MANUAL DO PROFESSOR

SER PROTAGONISTA

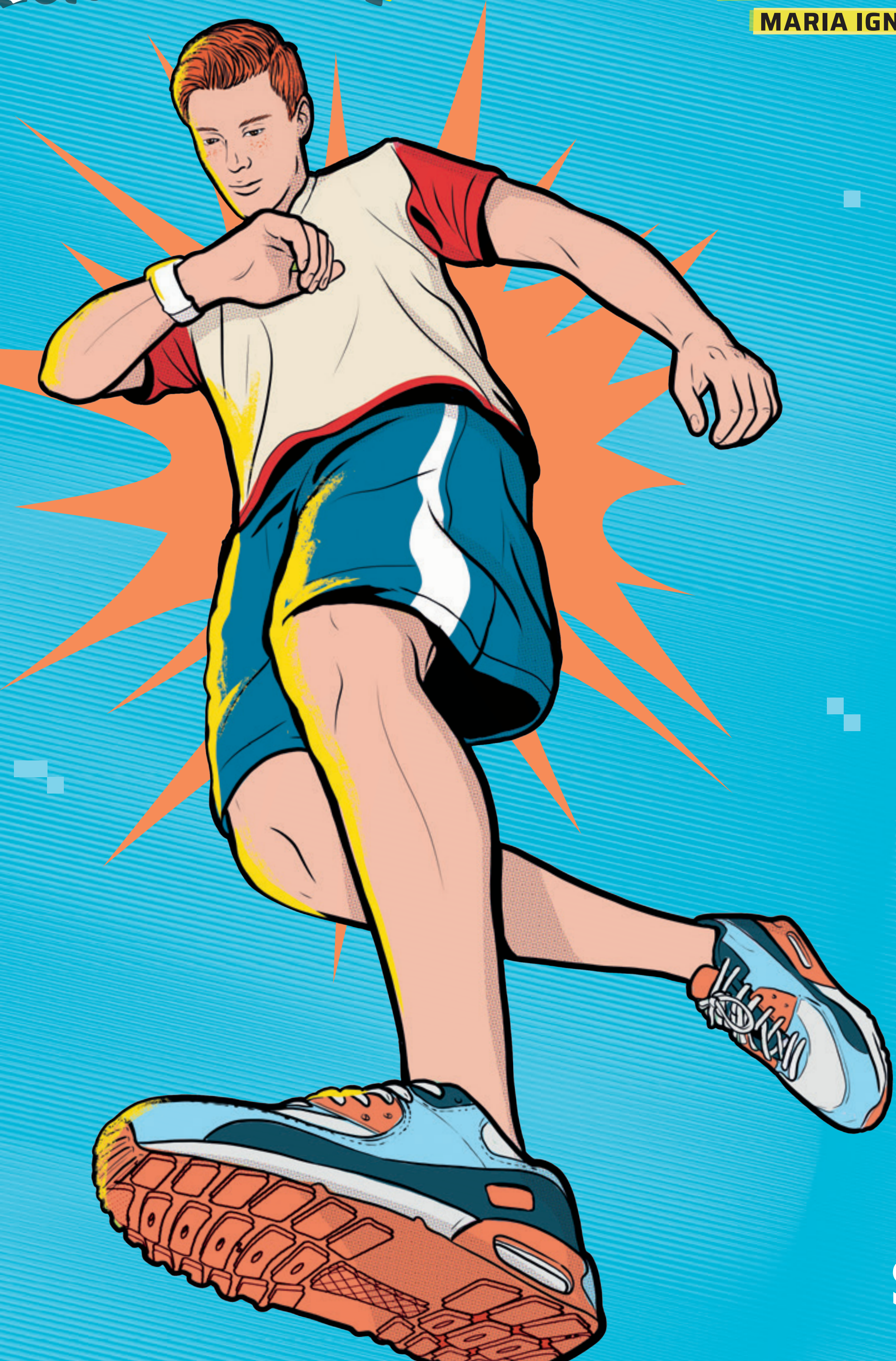
MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 1

Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias
Componente curricular: Matemática

ENSINO MÉDIO

VOLUME 1

FABRICIO EDUARDO FERREIRA
KATIA STOCCO SMOLE
MARIA IGNEZ DINIZ



sm

SER PROTAGONISTA

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 1

Área do conhecimento:
Matemática e
suas Tecnologias
Componente curricular:
Matemática

ENSINO MÉDIO
VOLUME 1

FABRICIO EDUARDO FERREIRA

Licenciado em Matemática pelo Instituto Municipal de Ensino Superior de Catanduva (IMES-Catanduva), São Paulo.
Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Fundamental e Ensino Médio pela Universidade Estadual Paulista (Unesp) de São José do Rio Preto, São Paulo.
Mestre em Matemática pela Unesp de São José do Rio Preto, São Paulo.
Professor de Educação Básica e Ensino Superior nos cursos de Pedagogia e Licenciatura em Matemática.
Consultor de instituições e redes de ensino em projetos curriculares e de formação de professores de Matemática.
Autor de materiais para formação continuada de professores de Matemática.

KATIA STOCCO SMOLE

Licenciada em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Moema.
Bacharela em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Moema.
Especialista em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP).
Mestra em Educação pela Faculdade de Educação (FE) da USP.
Doutora em Educação pela FE-USP.
Diretora de grupo de formação e pesquisa em ensino de Matemática.
Assessora de instituições e secretarias de educação em projetos curriculares e de formação de professores de Matemática.
Autora de livros didáticos e de formação de professores.

MARIA IGNEZ DINIZ

Bacharela em Matemática pelo IME-USP.
Mestra em Matemática pelo IME-USP.
Doutora em Matemática pelo IME-USP.
Diretora de grupo de formação e pesquisa em ensino de Matemática.
Assessora de instituições e secretarias de educação em projetos curriculares e de formação de professores de Matemática.
Autora de livros didáticos e de formação de professores.

São Paulo, 1ª edição, 2024

sm

Ser Protagonista Matemática e suas Tecnologias 1 – Matemática

Direção editorial André Monteiro
Gerência editorial Lia Monguilhott Bezerra
Coordenação editorial André Zamboni
Edição executiva Thais Bueno de Moura
Edição Alessandra Cardozo, Amanda da Rocha Ribeiro, Cecília Tiemi Ikedo, Lindiana Justiniano de Oliveira, Luana Fernandes de Souza, Marcela de Marques Bagagini Cardoso, Tatiana Sousa Paim
Colaboração técnico-pedagógica Ana Paula Santos
Suporte editorial Camila Alves Batista, Fernanda de Araújo Fortunato
Coordenação de preparação e revisão Cláudia Rodrigues do Espírito Santo
Preparação: Ana Paula Migiyama, Eliane de Abreu Santoro, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares, Vera Lúcia Rocha
Revisão: Alexander Barutti Azevedo, Ana Paula Migiyama, Márcio Medrado, Maria Angélica Lau P. Soares, Vera Lúcia Rocha, Waldeli Azevedo
Apoio de equipe: Camila Lamin Lessa, Luiza Emrich
Coordenação de *design* Gilciane Munhoz
Design: Paula Maestro
Coordenação de arte Vitor Trevelin
Edição de arte: Clayton Renê Pires Soares
Assistência de arte: Bernard Rodrigues Fuzetti
Assistência de produção: Júlia Stacciarini Teixeira
Coordenação de iconografia Josiane Laurentino
Pesquisa iconográfica: Priscilla Liberato
Tratamento de imagem: Marcelo Casaro, Robson Mereu
Capa APIS Design
Ilustração de capa: Davi Augusto
Projeto gráfico APIS Design
Editoração eletrônica Setup Bureau Editoração Eletrônica
Pré-impressão Américo Jesus, Mauro Moreira
Fabricação Alexander Maeda
Impressão

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Ferreira, Fabricio Eduardo
Ser protagonista matemática e suas tecnologias 1 / Fabricio Eduardo Ferreira, Katia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz. -- 1. ed. -- São Paulo : Edições SM, 2024.

Componente curricular: Matemática.
Área do conhecimento: Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-418-3236-6 (aluno)
ISBN 978-85-418-3230-4 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Tecnologia educacional I. Smole, Katia Stocco. II. Diniz, Maria Ignez. III. Título.

24-228882 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:
1. Ensino integrado : Livro-texto : Ensino médio 373.19

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

1ª edição, 2024

SM Educação
Avenida Paulista, 1842 – 18º andar, cj. 185, 186 e 187 – Condomínio Cetenco Plaza
Bela Vista 01310-945 São Paulo SP Brasil
Tel. 11 2111-7400
atendimento@grupo-sm.com
www.grupo-sm.com/br

APRESENTAÇÃO

OLÁ, JOVEM!

Este livro foi produzido para acompanhar seu percurso no aprendizado da Matemática. Ele foi elaborado para seguir com você ao longo do Ensino Médio no estudo de novos conceitos e novos procedimentos com o objetivo de ampliar e aprofundar o que você tem aprendido em Matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

É possível que você se pergunte: Mas o que este livro traz de diferente e como ele pode contribuir para minha formação?

A resposta está no caminho que convidamos você a trilhar para ampliar seus horizontes em relação à presença da Matemática nos diversos campos do conhecimento e, assim, se tornar ainda mais competente como leitor e produtor de textos dessa área e como resolvedor de problemas.

Ao aprender a analisar um problema – observando os dados fornecidos, as questões levantadas e as relações que os textos trazem –, você será capaz de conectar ideias e conhecimentos para construir uma estratégia de resolução, executar essa estratégia e avaliar se chegou ou não a uma resposta adequada.

Nossa proposta maior, no entanto, é que, ao utilizar este livro como ferramenta de estudo, você não apenas exercite a resolução de problemas, mas também aprenda a avaliar e a solucionar situações práticas em sua vida e em seus eventuais estudos no futuro, empregando os recursos e as formas de pensar da Matemática.

Para que você desenvolva ainda mais suas competências e habilidades para refletir e agir de modo consistente e confiante, dentro ou fora do ambiente escolar, criamos seções para você exercitar cálculos mentalmente e resolver problemas valendo-se de seus conhecimentos e do emprego da lógica. Em vários momentos, o conteúdo abordado nesses problemas extrapola a relação direta com o tema estudado no capítulo, tornando assim mais abrangente a compreensão do universo abarcado pela Matemática.

Ao longo deste material, você também terá diversas oportunidades de recordar e reforçar o que aprendeu anteriormente e contará com uma seção, ao final de cada capítulo, que ajudará você a estudar.

Vamos começar essa jornada?

Os autores

CONHEÇA SEU LIVRO

ABERTURA

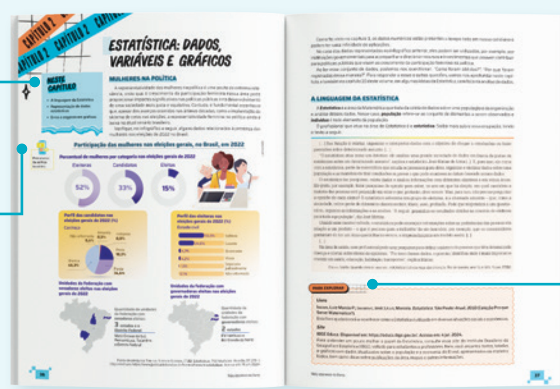
Uma imagem e um pequeno texto são apresentados no início de cada unidade para que você comece a refletir sobre os assuntos que serão estudados. Além disso, é uma oportunidade para que você possa resgatar os conhecimentos que já detém em relação aos temas indicados.

Indicação dos capítulos que compõem a unidade.

Após o texto inicial, há uma lista com os objetivos da unidade. A partir de cada objetivo, você saberá o que será estudado e poderá se preparar para as propostas que serão apresentadas.

DESENVOLVIMENTO DE CONTEÚDOS

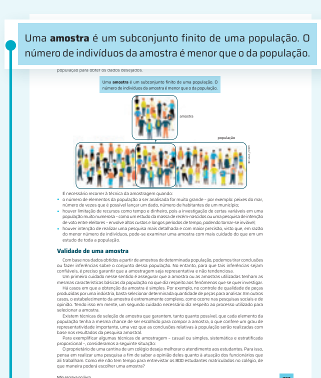
Ao longo deste volume, você encontrará textos, imagens, boxes e seções que vão ajudar você a compreender a importância da Matemática para sua formação cidadã e a continuidade de seus estudos.



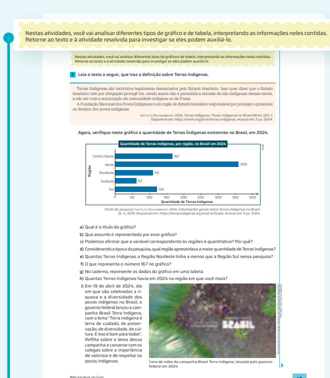
No início de cada capítulo, há uma lista com os principais assuntos que você vai estudar.

Objeto digital
O ícone indica um objeto digital presente no livro digital.

Para explorar
Esse boxe apresenta sugestões de visitas a museus, leituras complementares de livros, revistas e artigos, bem como indicações de filmes, *sites* e aplicativos.

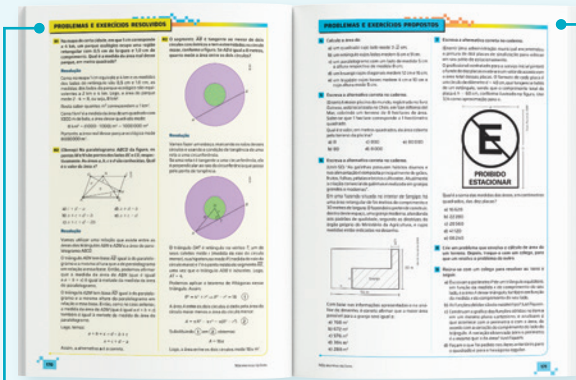


As ideias e os conceitos mais importantes são apresentados em destaque.



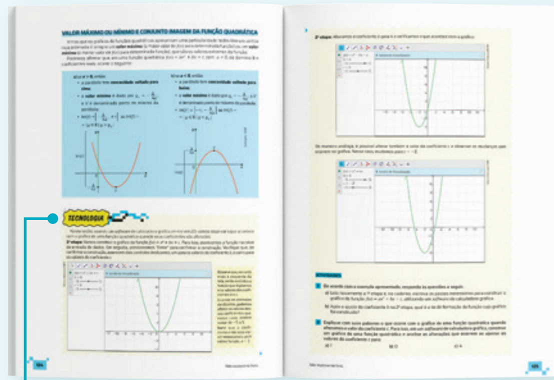
Fique de olho nas sugestões de estudo e nas reflexões para a resolução de alguns exercícios e do conteúdo apresentado.

Em diversos momentos, são sugeridos textos que permitem que você complemente seus estudos.

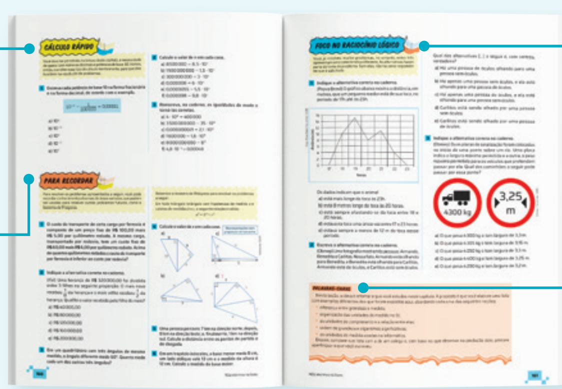


Problemas e exercícios resolvidos
Os exercícios resolvidos são boas oportunidades para você conhecer maneiras de resolver problemas e utilizar a escrita na linguagem matemática.

Problemas e exercícios propostos
Essa seção oferece atividades diversificadas para você resolver e avaliar seu aprendizado.



Tecnologia
Nessa seção, você vai conhecer e utilizar diversos recursos tecnológicos, como calculadora científica e alguns *softwares*, que ajudarão você a fazer gráficos, planilhas e simulações.



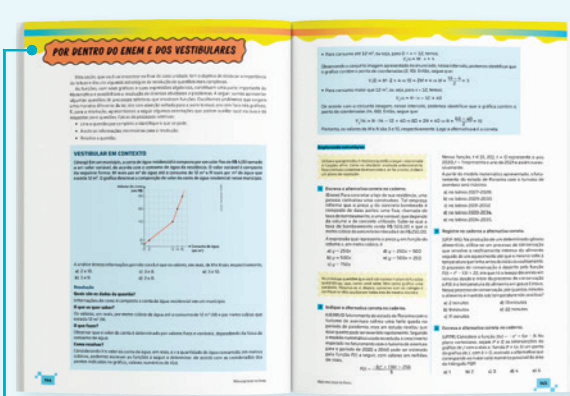
Cálculo rápido
Essa seção oferece exercícios para calcular mentalmente que podem ajudar você na resolução de problemas.

Para recordar
Nessa seção, são propostos exercícios para aprofundar o que você já estudou ou rever conhecimentos de anos anteriores que precisam estar sempre à sua disposição para você continuar aprendendo.

Foco no raciocínio lógico
Por meio dos problemas propostos nessa seção, você vai construir estratégias de resolução e usar o raciocínio dedutivo.

Palavras-chave
Esse boxe apresenta recursos importantes para quem estuda, com orientações de como organizar informações e fazer resumos e esquemas.

Matemática e...
Ao final de cada capítulo, você vai trabalhar com textos que mostram como a Matemática se associa a outras áreas do conhecimento.



Por dentro do Enem e dos vestibulares
Ao final de cada unidade, você vai mergulhar na resolução de um ou mais exercícios de uma prova oficial e, depois, aplicar o que aprendeu para resolver problemas de exames e de vestibulares de todo o Brasil.

SUMÁRIO

NÚMEROS, ANÁLISE DE DADOS E FUNÇÕES

Você já ouviu falar sobre analista de desempenho esportivo? Esse profissional é responsável por auxiliar a comissão técnica a partir da análise dos dados, propondo estratégias de aprimoramento que possam contribuir para que atletas e equipes alcancem melhores resultados em competições. Entre suas responsabilidades, estão coletar, estudar, analisar e interpretar as informações sobre o desempenho de cada atleta e das equipes – incluindo adversários. Com os dados obtidos, por meio de *softwares* específicos, é possível criar modelos matemáticos que contribuem para que esse profissional identifique padrões táticos e desenvolva estratégias.

OBJETIVOS

- Identificar campos numéricos e suas propriedades em diferentes situações de uso e de representação.
- Representar intervalos na reta real para descrever condições de uma variável.
- Identificar a representação de dados estatísticos em tabelas e gráficos divulgados por diferentes meios de comunicação.
- Reconhecer funções afins, funções quadráticas e funções definidas por partes em diversos contextos.
- Resolver problemas que envolvam os conceitos de função afim, função quadrática e outras funções.
- Construir, ler e interpretar gráficos de funções.
- Modelar uma situação contextualizada por meio de uma função, decidindo pela melhor representação: gráfica, algébrica ou textual.
- Elaborar argumentos e escrever conclusões.

Promova uma roda de conversa sobre o uso da Matemática no ambiente profissional. Questione os estudantes sobre quais profissões requerem habilidades como estabelecer padrões, interpretar dados e relacioná-los na solução de problemas. Aproveite o momento para explorar o fato de que, em diversas situações, é necessário fazer relações com conceitos e ideias matemáticas para tentar explicar o ocorrido.

Analista de desempenho esportivo, com seu equipamento, em um treino de futebol. Walsall, Inglaterra. Foto de 2024.

Adam Fradgley/West Bromwich Albion FC/Getty Images

UNIDADE 1

Neste capítulo, retomamos os diferentes campos numéricos, exploramos a linguagem de representação de conjuntos numéricos, ampliamos o trabalho com sua representação na reta numérica e, em particular, abordamos a ideia de intervalos numéricos e suas representações. Se considerar oportuno, solicite aos estudantes que observem os números presentes na imagem e discutam de que outras maneiras eles podem ser escritos e a quais conjuntos numéricos eles pertencem.

CONJUNTOS NUMÉRICOS E INTERVALOS NA RETA REAL

NESTE CAPÍTULO

- Conjuntos numéricos
- Intervalos
- Intersecção, reunião e diferença de conjuntos

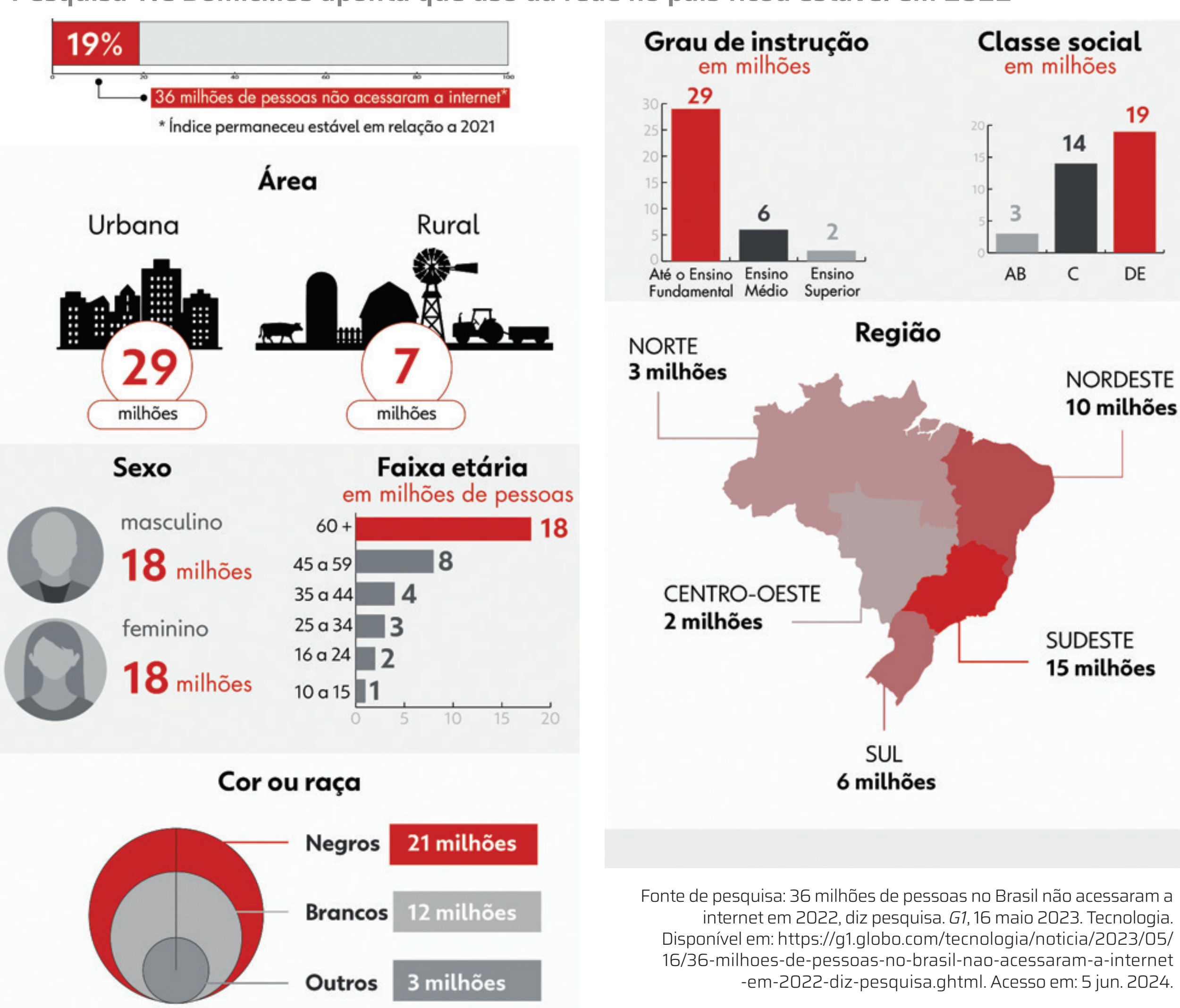
Você já percebeu que os números estão presentes nas mais diversas situações de nosso dia a dia? Por exemplo, nos meios de comunicação, frequentemente nos deparamos com informações numéricas relacionadas a medidas, a comparações ou a dados de pesquisas. E, para que essas informações façam sentido, precisamos compreendê-las e saber analisá-las. Por isso, os números serão o ponto de partida do nosso estudo.

Neste capítulo, vamos retomar alguns conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental sobre conjuntos numéricos e aprofundar alguns conceitos importantes para o que será apresentado e estudado em todo o volume.

Analise com atenção o infográfico a seguir. Ele mostra qual era o perfil dos brasileiros sem acesso à internet em 2022, facilitando a compreensão dos dados e permitindo uma análise desse recorte.

Desconectados: qual o perfil de quem não tem internet no Brasil

Pesquisa TIC Domicílios aponta que uso da rede no país ficou estável em 2022



Fonte de pesquisa: 36 milhões de pessoas no Brasil não acessaram a internet em 2022, diz pesquisa. *G1*, 16 maio 2023. Tecnologia. Disponível em: https://g1.globo.com/tecnologia/noticia/2023/05/16/36-milhoes-de-pessoas-no-brasil-nao-acessaram-a-internet-em-2022-diz-pesquisa.ghtml. Acesso em: 5 jun. 2024.

G1/Arte e dados

Ao trabalhar os tópicos "A origem dos números", "Conjunto dos números naturais (ℕ)", "Conjunto dos números inteiros (ℤ)", "Conjunto dos números racionais (ℚ)", "Conjunto dos números irracionais (𝕀)" e "Conjunto dos números reais (ℝ)", os estudantes poderão valorizar e compreender conhecimentos historicamente construídos, como é o caso da construção da ideia de número e dos conjuntos numéricos, o que contribui para a aquisição da competência geral **1**.

A ORIGEM DOS NÚMEROS

Os números nem sempre foram grafados como os conhecemos. Eles foram sendo organizados pouco a pouco, ao longo de milênios, em diferentes culturas, sempre na busca de representar e manipular quantidades. Descobertas históricas evidenciam registros com riscos em ossos e em paredes de cavernas. Registros em placas de argila foram encontrados em sítios arqueológicos do Oriente Médio, correspondendo a um período que se estende de 9 mil a 2 mil anos antes da nossa era.

Há mais de 5 mil anos, sociedades que precisavam realizar diferentes operações econômicas, e em grande quantidade, não podiam confiar tantos dados apenas à memória humana. Assim, acredita-se que surgiu a ideia de representar as quantidades por meio de sinais gráficos. A seguir, é possível observar os símbolos utilizados nos sistemas de numeração de algumas dessas sociedades e os algarismos como conhecemos atualmente, chamados de indo-arábicos.

Babilônico	𒁹	𒈫	𒐈	𒐉	𒐊	𒐋	𒑂	𒑄	𒑆	𒌋
Romano	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Chinês	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
Indo-arábico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ilustrações: ID/BR

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os números podem ser organizados em diferentes conjuntos. Vamos retomar e aprofundar nossos conhecimentos sobre alguns deles.

Conjunto dos números naturais

Os números que utilizamos, por exemplo, para realizar contagens, incluindo o zero, formam o **conjunto dos números naturais**, que é representado por ℕ. Esse conjunto apresenta infinitos elementos e pode ser indicado como:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Trabalhe com os estudantes a leitura da escrita simbólica "ℕ é o conjunto dos números 0, 1, 2, 3, ..." e explique o uso das reticências como recurso para indicar os infinitos elementos de ℕ, diante da impossibilidade de escrevê-los.

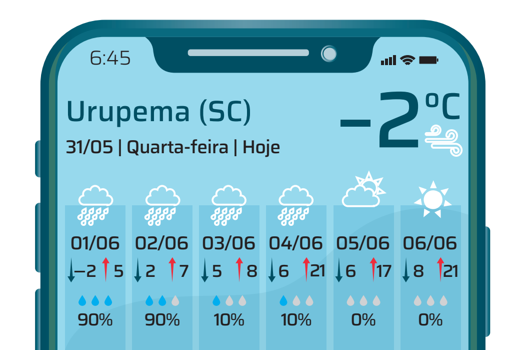
Os números naturais são ordenados. Isso significa que, dados dois números naturais quaisquer, é sempre possível dizer se eles são iguais ou se um deles é menor ou maior que o outro. O conjunto dos números naturais é infinito e, para qualquer número natural, sempre podemos ter um **sucessor** maior que ele. O sucessor de um número natural b é o número $(b + 1)$. E o **antecessor** de um número natural b, $b \neq 0$, é o número $(b - 1)$.

Conjunto dos números inteiros

Incentive a leitura individual desse texto. Solicite aos estudantes que, durante a leitura, procurem se lembrar de outras situações em que utilizam números inteiros negativos. Ao final, socialize as informações extraídas do texto e os exemplos citados por eles.

Os números negativos foram negados como números até o século XVIII. Apesar de diversos matemáticos terem se deparado com números negativos em operações e até mesmo na resolução de equações, sempre que isso acontecia o problema era classificado como impossível ou absurdo.

Hoje, o uso desses números é frequente em diversas situações cotidianas, como nas relacionadas a operações financeiras ou na indicação de medidas de temperatura.



Ilustrações: ID/BR

Trabalhe com os estudantes a leitura dessa maneira de escrever o conjunto $\mathbb{Z}$ e explique a eles o significado das reticências.

O conjunto dos números inteiros é representado por $\mathbb{Z}$ e pode ser indicado da seguinte maneira:

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

No conjunto dos números inteiros, quanto mais afastado do zero está um número negativo, menor ele é. Todo número negativo é menor que o zero ou que qualquer número positivo.

Como os números naturais, os números inteiros também são ordenados, pois dados dois números inteiros quaisquer, sempre é possível dizer se eles são iguais ou se um deles é menor ou maior que o outro.

Podemos destacar os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}^* = \{...,-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ é o conjunto dos números inteiros **não nulos**;

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ é o conjunto dos números inteiros **não negativos**;

$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$ é o conjunto dos números inteiros **não positivos**;

$\mathbb{Z}^*_+ = \{1, 2, 3, ...\}$ é o conjunto dos números inteiros **positivos**;

$\mathbb{Z}^*_- = \{..., -3, -2, -1\}$ é o conjunto dos números inteiros **negativos**.

O conjunto $\mathbb{Z}$ também é **infinito**, pois para qualquer número inteiro, sempre podemos obter um sucessor maior que ele. O **sucessor** de um número inteiro b é o número $(b + 1)$. Definimos também o **antecessor** de um número inteiro b como o número $(b - 1)$.

Conjunto dos números racionais

A origem dos números racionais positivos é milenar. No entanto, pela ausência da escrita ou de qualquer outra forma de registro, o que sabemos é que eles surgiram por volta do ano 3000 a.C., por causa de um problema relacionado ao controle das propriedades de terras às margens do rio Nilo, no Egito.

Ao medir as terras às margens do Nilo, os egípcios perceberam que nem sempre o resultado da medição correspondia a um número inteiro de vezes da unidade utilizada. Assim, como os números inteiros eram insuficientes para exprimir as medidas desejadas, eles criaram os números fracionários.

Escrita egípcia			
Escrita atual	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{21}$

Ilustrações: ID/BR

Desde os primeiros registros que conhecemos, os números que hoje chamamos de racionais abrangem os números naturais, os números inteiros e os números fracionários positivos e negativos.

Número racional é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$.

O conjunto dos números racionais é representado por $\mathbb{Q}$ e pode ser indicado da seguinte maneira:

lê-se: tal que

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

lê-se: pertence a

Detenha-se com cuidado na explicação da escrita simbólica do conjunto $\mathbb{Q}$, destacando o significado dos símbolos $\in$ e |. O símbolo $\in$ significa "pertence a": $a \in \mathbb{Z}$ deve ser lido como "a pertence a $\mathbb{Z}$" e entendido como "a é um número inteiro". Já o símbolo | significa "tal que".

Os números $\frac{3}{5}$, $-\frac{6}{11}$ e $\frac{12}{137}$ são exemplos de números racionais. Podemos escrever $\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$, $-\frac{6}{11} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{12}{137} \in \mathbb{Q}$.

Além disso, note que todo número inteiro é um número racional, pois ele pode ser escrito na forma fracionária. Analise estes exemplos:

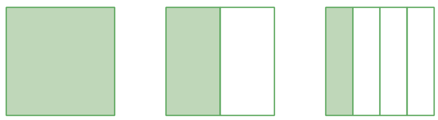
- $3 = \frac{3}{1}$
- $-4 = \frac{-12}{3} = \frac{12}{-3} = \frac{-4}{1}$

Nesta coleção, para simplificar a linguagem, quando usamos a expressão "área do quadrado", estamos nos referindo à área da região do plano limitada pelo quadrado. Essa observação vale também para a área de outros polígonos.

Os números racionais não nulos podem ser representados por meio de fração ou de notação decimal, com o correspondente sinal positivo ou negativo. Uma fração, em sua origem, corresponde à divisão de um inteiro em partes iguais. Essa ideia pode ser estendida para qualquer inteiro.

Observe a seguir o inteiro representado por um quadrado de área 25 u.a. (unidades de área) e as figuras seguintes, que representam frações desse inteiro.

Retome com os estudantes o significado da escrita fracionária como resultado da divisão do numerador pelo denominador. Se necessário, relembre como se faz, por exemplo, a divisão $\frac{25}{4} = 25 : 4$.



$\frac{25}{1}$ u.a. $\qquad$ $\frac{25}{2}$ u.a. $\qquad$ $\frac{25}{4}$ u.a. $\qquad$ $\frac{25}{5}$ u.a.

Ilustrações: ID/BR

$$\begin{array}{r|l} 25 & 4 \\ \hline -24 & 6 \\ 1 & \end{array}$$

Ao dividir 25 unidades por 4, obtemos 6 unidades e sobra 1 unidade.

$$\begin{array}{r|l} 25 & 4 \\ \hline -24 & 6{,}2 \\ 10 & \\ -8 & \\ 2 & \end{array}$$

1 unidade corresponde a 10 décimos. Ao dividir 10 décimos por 4, obtemos 2 décimos e sobram 2 décimos.

$$\begin{array}{r|l} 25 & 4 \\ \hline -24 & 6{,}25 \\ 10 & \\ -8 & \\ 20 & \\ -20 & \\ 0 & \end{array}$$

2 décimos correspondem a 20 centésimos. Ao dividir 20 centésimos por 4, obtemos 5 centésimos.

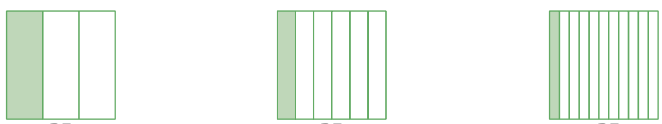
Então, $\frac{25}{4} = 25 : 4 = 6{,}25$.

Se considerar necessário, proponha aos estudantes que retomem como fazer, por exemplo, a divisão $\frac{3}{4}$ e obter a representação decimal dessa fração como 0,75.

A fração como resultado de uma divisão pode ser expressa em notação decimal, dividindo-se o numerador pelo denominador e obtendo-se o resultado final com um número decimal.

$\frac{25}{1} = 25 : 1 = 25 \qquad \frac{25}{2} = 25 : 2 = 12{,}5 \qquad \frac{25}{4} = 25 : 4 = 6{,}25 \qquad \frac{25}{5} = 25 : 5 = 5$

Agora, considere o mesmo quadrado, de área 25 u.a., visto anteriormente, mas com outras frações de sua área representadas.



$\frac{25}{3}$ $\qquad$ $\frac{25}{6}$ $\qquad$ $\frac{25}{11}$

Ilustrações: ID/BR

Nesses casos, ao realizarmos as divisões, obtemos:

$\frac{25}{3} = 25 : 3 = 8{,}3333...\qquad \frac{25}{6} = 25 : 6 = 4{,}1666... \qquad \frac{25}{11} = 25 : 11 = 2{,}2727...$

O que ocorre com essas frações da medida da área do quadrado e sua notação decimal é que, efetuando-se a divisão indicada, um algarismo ou um grupo de algarismos repete-se infinitamente no quociente. Em casos como esse, dizemos que o quociente está representado na forma decimal periódica chamada de **dízima periódica**, e a fração que gerou a dízima é chamada de **fração geratriz**.

O **período** de uma dízima periódica é o algarismo ou o grupo de algarismos que se repete. No caso das divisões anteriormente apresentadas:

- $\frac{25}{3}$ é a fração geratriz da dízima periódica 8,3333..., cujo período é 3.
- $\frac{25}{6}$ é a fração geratriz da dízima periódica 4,1666..., cujo período é 6.
- $\frac{25}{11}$ é a fração geratriz da dízima periódica 2,2727..., cujo período é 27.

Também podemos indicar o período que se repete em uma dízima periódica, usando um traço sobre o algarismo ou sobre o grupo de algarismos que se repetem.

- Escrever 8,3333... é o mesmo que escrever $8{,}\overline{3}$.
- Escrever 4,1666... é o mesmo que escrever $4{,}1\overline{6}$.
- Escrever 3,2727... é o mesmo que escrever $3{,}\overline{27}$.

Boa parte dos estudantes desconhece como e por que usar as atividades da seção *Problemas e exercícios resolvidos*. Por isso, é importante que eles sejam orientados a ler essas atividades e a analisá-las tendo em vista que elas podem ajudá-los a resolver as atividades da seção *Problemas e exercícios propostos*, que está nas próximas páginas deste capítulo. Uma sugestão é ler com os estudantes as atividades **R1**, **R2** e **R3** e, depois, pedir que observem as atividades da seção *Problemas e exercícios propostos* e identifiquem quais se assemelham a essas atividades resolvidas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Para desenvolver o cálculo mental e a estimativa nas operações com números racionais, veja nas *Orientações específicas* sugestões para trabalhar o jogo Labirinto.

Ao analisar as atividades resolvidas, procure:

- ler o enunciado calmamente, mais de uma vez, se necessário, para compreender o que se pede;
- identificar palavras ou expressões desconhecidas e buscar o significado delas, organizando uma lista para consulta, se considerar conveniente;
- ver a resolução analisando cada estratégia escolhida e tentando entender o porquê de cada escolha.

R1 **Dizemos que uma fração é irredutível quando ela não pode ser simplificada. Com base nessa informação, obtenha a fração irredutível equivalente a cada número decimal exato a seguir.**

a) 0,7

b) $-0{,}182$

c) 1,95

d) 0,02

Resolução

a) $0{,}7 = \frac{7}{10}$

b) $-0{,}182 = -\frac{182}{1000} = -\frac{91}{500}$

c) $1{,}95 = \frac{195}{100} = \frac{39}{20}$

d) $0{,}02 = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

R2 **Obtenha a fração irredutível equivalente a cada dízima periódica.**

a) 0,232323...

b) $3{,}\overline{6}$

Resolução

a) Seja x uma fração equivalente a 0,232323.... Podemos escrever que:

$$x = 0{,}232323... \quad (1)$$

Vamos multiplicar os dois membros da igualdade acima por uma potência de base 10, de modo que o período da dízima seja mantido. No caso, vamos multiplicar os dois membros por 10^2, uma vez que a dízima tem dois algarismos em seu período (23).

$$x = 0{,}232323...$$
$$10^2 \cdot x = 0{,}232323... \cdot 10^2$$
$$100x = 23{,}232323... \quad (2)$$

Agora, vamos subtrair (1) de (2).

$$100x - x = 23{,}232323... - 0{,}232323...$$
$$99x = 23$$
$$x = \frac{23}{99}$$

Como $x = 0{,}232323...$ e $x = \frac{23}{99}$, a fração irredutível equivalente à dízima periódica 0,232323... é $\frac{23}{99}$.

b) Seja x uma fração equivalente a 3,666.... Podemos escrever que:

$$x = 3{,}666... \quad (1)$$

Multiplicando os dois membros da igualdade acima por 10^1, obtemos:

$$x = 3{,}666...$$
$$10^1 \cdot x = 3{,}666... \cdot 10^1$$
$$10x = 36{,}666... \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2), obtemos:

$$10x - x = 36{,}666... - 3{,}666...$$
$$9x = 33$$
$$x = \frac{33}{9} = \frac{11}{3}$$

Portanto, a fração irredutível equivalente à dízima periódica $3{,}\overline{6}$ é $\frac{11}{3}$.

R3 **Uma dízima periódica, representada na forma decimal, é chamada de composta quando antes dos números que se repetem aparecem algarismos que não fazem parte do período. Por exemplo, na dízima 0,2171717..., 17 é o período e 2 é chamado de anteperíodo.**

Com base nessa informação, obtenha a fração irredutível equivalente a cada dízima periódica composta.

a) 0,2171717...

b) 0,35111...

Resolução

a) Seja x uma fração equivalente a 0,2171717.... Podemos escrever que:

$$x = 0{,}2171717...$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 10 e por 1000, obtemos:

$$10x = 2{,}171717... \quad (1)$$
$$1000x = 217{,}171717... \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2), obtemos:

$$1000x - 10x = 217{,}171717... - 2{,}171717...$$
$$990x = 215$$
$$x = \frac{215}{990}$$
$$x = \frac{43}{198}$$

Portanto, a fração irredutível equivalente à dízima periódica composta $0{,}2\overline{17}$ é $\frac{43}{198}$.

b) Seja x uma fração equivalente a 0,35111.... Podemos escrever que:

$$x = 0{,}35111...$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 100 e por 1000, obtemos:

$$100x = 35{,}111... \quad (1)$$
$$1000x = 351{,}111... \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2), obtemos:

$$1000x - 100x = 351{,}111... - 35{,}111...$$
$$900x = 316$$
$$x = \frac{316}{900} = \frac{79}{225}$$

Portanto, a fração irredutível equivalente à dízima periódica composta $0{,}35\overline{1}$ é $\frac{79}{225}$.

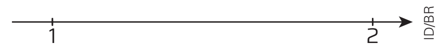
O objetivo principal do texto apresentado a seguir é levar os estudantes a pensar na densidade do conjunto dos números racionais, uma propriedade que os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não têm.

Quantos números racionais existem entre 1 e 2?

Quando falamos de números naturais, sabemos que entre dois deles existe uma quantidade finita de números naturais e que entre dois números naturais consecutivos não existe nenhum número natural. Por exemplo, entre os números 3 e 10 existem exatamente 6 números naturais: 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O mesmo acontece com os números inteiros.

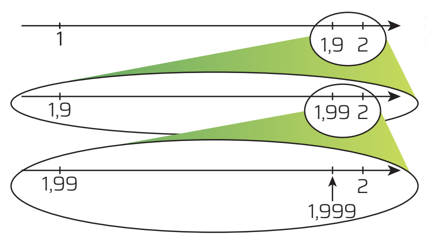
Já com os números racionais, a situação é diferente. Acompanhe a seguir o que acontece quando tentamos determinar números racionais entre 1 e 2.

- Considere o intervalo entre os números 1 e 2 na reta real.



- Entre o 1 e o 2 existem diversos números, como o 1,9.

- Já entre 1,9 e 2 existem diversos outros números, como o 1,99. E entre 1,99 e 2 existem ainda vários outros números, como o 1,999.

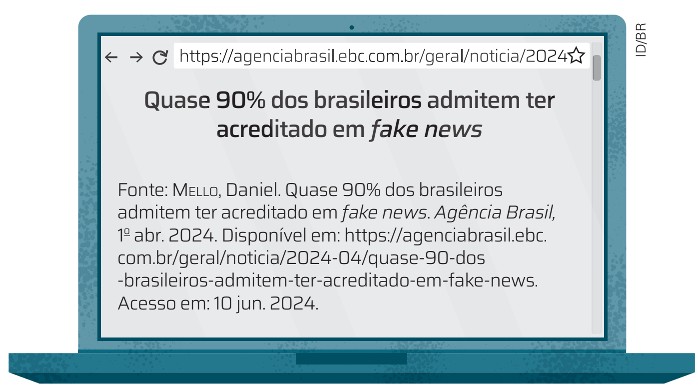


Poderíamos continuar esse processo indefinidamente, pois sempre seria possível determinar outro número no intervalo. O mesmo aconteceria para quaisquer dois outros racionais diferentes entre si.

De fato, o conjunto dos números racionais tem a propriedade de que **entre dois números racionais diferentes existe uma infinidade de números racionais**.

Aproveite a temática abordada para conversar com os estudantes sobre *fake news*. Uma sugestão é, primeiro, verificar se eles sabem o que são *fake news*. Se necessário, explique a eles que a divulgação de notícias falsas estrategicamente disseminadas é uma maneira de desinformação que ganhou impulso com o advento da internet e o crescimento no uso das redes sociais. Para que os conteúdos atinjam um maior número de pessoas, são utilizados algoritmos que impulsionam o alcance e a repercussão. E os motivos que levam à criação de *fake news* são diversos, como gerar boatos, prejudicar pessoas comuns, celebridades, políticos, marcas, entre outros. Após essa conversa, proponha que os estudantes, em grupos de três integrantes, pesquisem na comunidade local algum episódio envolvendo *fake news*. Peça a eles que escrevam um texto relatando quais foram as consequências do compartilhamento dessas informações falsas. Em um segundo momento, incentive-os a compartilhar os textos que produziram. Depois, solicite à turma que crie uma campanha de conscientização sobre essa temática, destacando pontos relevantes para reconhecer que uma informação é falsa.

Outra maneira de representar os números racionais é pela **porcentagem**. Em diversas situações do dia a dia, é possível observar informações com números seguidos do símbolo **%**. Leia o título da notícia ao lado.

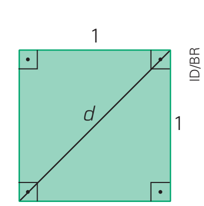


Fonte: Mello, Daniel. Quase 90% dos brasileiros admitem ter acreditado em *fake news*. *Agência Brasil*, 1º abr. 2024. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2024-04/quase-90-dos-brasileiros-admitem-ter-acreditado-em-fake-news. Acesso em: 10 jun. 2024.

Nesse título, a notação 90% corresponde à fração $\frac{90}{100}$, que indica que, a cada 100 entrevistados, 90 admitem ter acreditado em *fake news*.

Conjunto dos números irracionais

Desde o século VI a.C., os matemáticos gregos, discípulos de Pitágoras, já tinham descoberto que a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário não podia ser expressa por um número racional. Por exemplo, se tomarmos um quadrado cujo comprimento do lado mede 1 unidade de comprimento, podemos utilizar o teorema de Pitágoras para determinar a medida d da diagonal desse quadrado. Acompanhe:



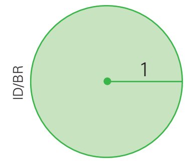
$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}$$

A representação decimal do número $\sqrt{2}$ apresenta infinitas casas decimais não periódicas, ou seja, esse número não pode ser expresso na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Portanto, não é racional.

Os estudantes convivem com números irracionais desde o Ensino Fundamental. O objetivo agora é enfatizar que esses números não são racionais, apesar de, em certas situações, eles serem substituídos por decimais aproximados.

Todo número cuja escrita decimal é infinita e não periódica é um **número irracional**.

Outro número que você provavelmente conhece, e também é irracional, é o número representado pela letra grega π (pi). Esse número corresponde à medida da área de um círculo cujo raio mede 1 unidade de comprimento ou, ainda, à metade da medida do perímetro de um círculo cujo raio mede 1 unidade de comprimento.



$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 95...$

Aproveite para retomar a noção de π e os procedimentos para o cálculo da medida da área de um círculo e da medida do comprimento de uma circunferência. Além disso, retome com os estudantes o uso das reticências como recurso para indicar as infinitas casas decimais do número π, diante da impossibilidade de escrevê-las.

Além de $\sqrt{2}$ e π, há outros números irracionais:

- todas as raízes quadradas de números naturais cujos radicandos não sejam quadrados perfeitos, por exemplo, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{2}$ e $-\sqrt{7}$;
- todas as raízes cúbicas de números naturais cujos radicandos não sejam cubos perfeitos, por exemplo, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[3]{225}$;

Se julgar necessário, retome com os estudantes a que se refere o termo "radicando".

- os resultados de algumas operações entre um número racional e um irracional, por exemplo, $2\sqrt{3}$, $3 - \sqrt[3]{20}$, $4 : \sqrt[6]{3}$ e $8 + \sqrt[5]{8}$.

O conjunto dos números irracionais é representado por $\mathbb{I}$.

índice
$\sqrt[n]{a} = b \longrightarrow$ raiz
radicando

Mitos acerca do número de ouro

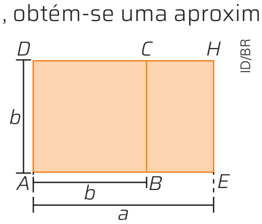
O objeto digital acrescenta informações sobre o número de ouro e sobre possíveis relações entre ele e algumas obras de arte famosas.

O número de ouro

O **número de ouro**, também chamado de **razão áurea** ou de **proporção áurea**, é uma constante matemática representada pela letra grega φ (lê-se: "fi"). Verifique a seguir a representação na forma fracionária e decimal desse número.

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1{,}6180339...$$

Observe que φ é um número irracional. No **retângulo áureo**, ao determinar a razão entre as medidas do lado maior e do lado menor da figura, obtém-se uma aproximação do número de ouro.



Todo retângulo de dimensões a e b, tal que $\frac{a}{b} = \frac{b}{a - b}$, é chamado retângulo áureo, e a razão $\frac{a}{b}$, número de ouro.

Agora, que tal investigar relações áureas em objetos retangulares? Para isso, reúna-se com um colega. Selecionem cinco objetos cujo formato seja o de um retângulo. Com o auxílio de uma régua, meçam o comprimento e a largura de cada objeto e registrem as medidas no caderno. Depois, calculem a razão entre essas medidas. Ao final, verifiquem quais desses objetos têm a razão entre as medidas de suas dimensões mais próxima do número de ouro.

Prova de que $\sqrt{2}$ é irracional

A prova de que $\sqrt{2}$ é um número irracional é razoavelmente simples. Acompanhe:

I. Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja racional, isto é, que possa ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, de modo que $\frac{p}{q}$ seja irredutível (p e q são primos entre si). Nesse caso, temos que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

II. Elevando os dois membros ao quadrado, obtemos $2 = \frac{p^2}{q^2}$ ou $p^2 = 2q^2$. Isso significa que p^2 é par, logo, p é **par**.

III. Por outro lado, como a fração $\frac{p}{q}$ é irredutível e p é par, então q tem de ser **ímpar**.

IV. Se p é par, existe um número inteiro m tal que $p = 2m$. Elevando ambos os membros ao quadrado, temos: $p^2 = 4m^2$. Como $p^2 = 2q^2$, então $4m^2 = 2q^2$ ou $q^2 = 2m^2$; logo, q^2 é par e q é par.

V. Essa última afirmação é um absurdo, pois em III concluímos que q deveria ser ímpar, e um número não pode ser par e ímpar simultaneamente.

Por isso, concluímos que a hipótese de $\sqrt{2}$ ser racional é falsa e que, portanto, $\sqrt{2}$ é irracional.

A seção *Tecnologia* busca favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao pensamento computacional, bem como levar os estudantes a compreender e a utilizar recursos tecnológicos para a resolução de problemas, contribuindo para que adquiram a competência geral **5**.

TECNOLOGIA

O objetivo da seção *Tecnologia* é desenvolver o letramento digital dos estudantes. Como esta é a primeira vez que essa seção aparece neste volume, a escolha inicial foi a calculadora simples. Para otimizar as aprendizagens esperadas, os estudantes podem utilizar, individualmente ou em grupos, calculadoras simples, ou as de *smartphones*, de computadores ou de *tablets*.

Vamos explorar algumas funções que podem ser encontradas em praticamente qualquer calculadora simples. Para isso, conheça as principais teclas e funções de uma calculadora.

Tecla	Funcionalidade
AC	Apaga todos os registros.
C	Apaga o último número digitado.
$\sqrt{\ }$	Calcula a raiz quadrada.
+/−	Troca o sinal do número digitado.
+ − × ÷	São as teclas relativas às quatro operações fundamentais.

Utilize uma calculadora simples, que tenha as teclas apresentadas anteriormente, para realizar as atividades propostas.

Antes de começar, certifique-se de apagar todos os registros que estiverem nela. No visor, deve aparecer apenas 0.

ATIVIDADES

1 Considere o quadro a seguir e faça o que se pede em cada item.

a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes indiquem o número que consideram mais próximo do valor de cada quociente, levando em consideração a quantidade de algarismos de cada número e a posição da vírgula.

Ao socializar as respostas à atividade **1**, discuta com os estudantes a importância de ter uma boa estimativa do resultado de uma operação, uma vez que essa habilidade permite controlar erros de cálculo e obter resultados adequados nos casos em que não há necessidade de obter o valor exato.

2,86 : 0,36	214,4 : 67	0,00069 : 0,023
0,8	3	0,0003
0,08	30	0,003
8	0,3	0,03
80	0,03	0,3

a) Para cada coluna do quadro, registre no caderno o número que você considera mais próximo do valor de cada quociente. **Não use a calculadora**.

b) Confira o resultado de cada operação com uma calculadora. Suas estimativas foram adequadas? Resposta pessoal. Primeira coluna: aproximadamente 8; segunda coluna: 3,2; terceira coluna: 0,03.

2 Faça o que se pede em cada item. Socialize as estratégias que os estudantes utilizaram para realizar os cálculos aproximados em cada um dos casos apresentados neste item.

a) Com o auxílio da calculadora, mas sem usar a tecla $\sqrt{\ }$, copie o quadro no caderno e complete-o, substituindo os ■ por números, como foi feito na primeira linha.

Números inteiros mais próximos	Números mais próximos com uma casa decimal	Números mais próximos com duas casas decimais
$2 < \sqrt{5} < 3$	$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$	$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$
2 ■ $< \sqrt{8} <$ ■ 3	2,8 ■ $< \sqrt{8} <$ ■ 2,9	2,82 ■ $< \sqrt{8} <$ ■ 2,83
4 ■ $< \sqrt{23} <$ ■ 5	4,7 ■ $< \sqrt{23} <$ ■ 4,8	4,79 ■ $< \sqrt{23} <$ ■ 4,80
6 ■ $< \sqrt{48} <$ ■ 7	6,9 ■ $< \sqrt{48} <$ ■ 7,0	6,92 ■ $< \sqrt{48} <$ ■ 6,93
16 ■ $< \sqrt{281} <$ ■ 17	16,7 ■ $< \sqrt{281} <$ ■ 16,8	16,76 ■ $< \sqrt{281} <$ ■ 16,77
33 ■ $< \sqrt{1\,111} <$ ■ 34	33,3 ■ $< \sqrt{1\,111} <$ ■ 33,4	33,33 ■ $< \sqrt{1\,111} <$ ■ 33,34
8 ■ $< \sqrt{67{,}3} <$ ■ 9	8,2 ■ $< \sqrt{67{,}3} <$ ■ 8,3	8,20 ■ $< \sqrt{67{,}3} <$ ■ 8,21
8 ■ $< \sqrt{71{,}17} <$ ■ 9	8,4 ■ $< \sqrt{71{,}17} <$ ■ 8,5	8,43 ■ $< \sqrt{71{,}17} <$ ■ 8,44

b) Refaça os cálculos usando a tecla $\sqrt{\ }$ da calculadora e confira suas respostas. Resposta pessoal.

Conjunto dos números reais

Quando falamos em números reais, estamos abrangendo todos os números vistos até aqui, ou seja, os números reais resultam da união dos números racionais com os irracionais.

NÚMEROS REAIS

- **Números racionais**
(além da representação fracionária, podem ser escritos na forma decimal exata ou como dízima periódica)
Exemplos:
$\frac{36}{6}$, 19, 2,015; $-\frac{8}{9}$; 1,01212...; $6\frac{1}{2}$; $-99,\overline{5}$.
  - **Números inteiros**
  Exemplos:
  -128, 1, $-\frac{12}{3}$, 0.
    - **Números naturais**
    Exemplos:
    0, 1, 2, $\frac{6}{2}$.
    - **Números inteiros negativos**
    Exemplos:
    -1, -2, -3, $-\frac{8}{2}$.
  - **Números fracionários não inteiros**
  Exemplos:
  $\frac{2}{3}$, $-\frac{99}{5}$, $5\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{10}$, $\frac{2\,004}{204}$.
- **Números irracionais**
(podem ser representados como dízimas infinitas não periódicas)
Exemplos:
$\sqrt{2}$, $-1,2345...$, 3π, $\frac{\sqrt[3]{-3}}{2}$, $\sqrt[6]{4}$.

Os números reais são ordenados. Isso significa que, dados dois números reais, é sempre possível verificar se eles são iguais ou se um deles é menor ou maior que o outro.

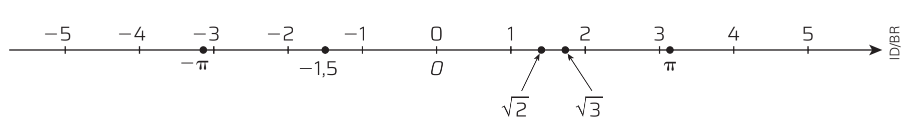
O conjunto dos números reais, representado por $\mathbb{R}$, é completo. Isso significa que, dada uma unidade de medida e qualquer segmento de reta, existe sempre um número real que representa a medida do comprimento desse segmento. Essa propriedade diferencia o conjunto dos números reais e o dos números racionais.

Reta real

Reforce com os estudantes que, por convenção, os números reais são representados na reta numérica em ordem crescente, da esquerda para a direita.

Cada número real pode ser associado a um único ponto da reta numérica e cada ponto da reta numérica pode ser associado a um único número real. Assim, podemos dizer que os números reais e os pontos da reta numérica estão em uma correspondência um a um, ou seja, em uma **correspondência biunívoca**.

Dessa maneira, podemos chamar a reta numérica de **reta real.** Observe um exemplo de representação da reta real com alguns números indicados.



PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

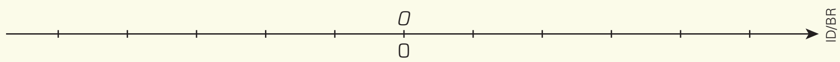
Escolha uma ou duas atividades desta seção para analisar com os estudantes. Essa prática é importante nas primeiras ocorrências da seção *Problemas e exercícios resolvidos* neste volume.

R4 Represente os números a seguir em uma mesma reta real.

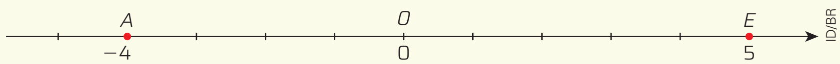
A: -4	*B*: $-2{,}5$	*C*: 4,3	*D*: $-\frac{7}{4}$	*E*: 5	*F*: $\sqrt{2}$	*G*: $-\pi$

Resolução

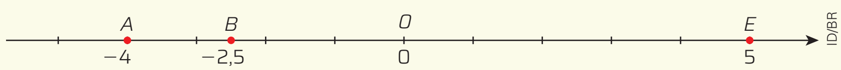
Primeiro, traçamos a reta real e determinamos uma unidade de medida para graduar a reta. E, em seguida, marcamos a origem, nesse caso, o ponto *O*.



Agora, marcamos os pontos *A* e *E*, que correspondem a números inteiros e, portanto, coincidem com as marcas da graduação da reta numérica.

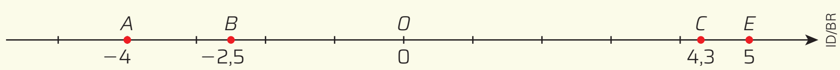


Em seguida, optamos por marcar o ponto *B*, $-2{,}5$, que pode ser localizado exatamente na metade da medida do segmento entre as marcações referentes aos pontos -2 e -3.

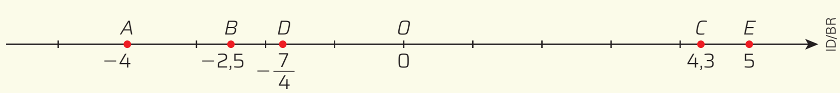


Para marcar os pontos *C*, *D* e *G*, podemos fazer uma representação aproximada.

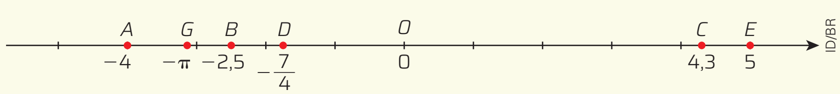
O ponto *C*, 4,3, está mais próximo de 4 do que de 5.



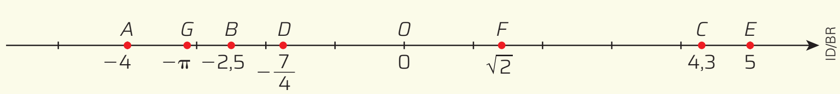
Para localizar o ponto *D*, calculamos $-7 : 4$, pois $-\frac{7}{4} = -7 : 4$. Assim, verificamos que *D* está mais próximo de -2 do que de -1, dado que $-7 : 4 = -1{,}75$.



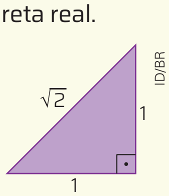
O valor de π é aproximadamente 3,14; portanto, *G*, isto é, $-\pi$, está mais próximo de -3 do que de -4.



Por fim, vamos marcar o ponto *F*. Podemos recorrer ao valor aproximado e verificar que $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$, ou seja, esse valor está perto de 1,5.



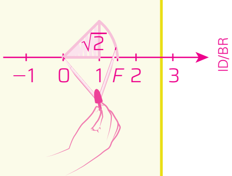
Outra maneira de localizar o ponto *F* é construir um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 unidade de medida de comprimento e, portanto, com hipotenusa igual a $\sqrt{2}$; e, com o auxílio de um compasso, transportar a medida para a reta real.



ATENÇÃO!

Tenha cuidado com a ponta seca ao manusear o compasso.

Incentive os estudantes a localizar o número utilizando o procedimento sugerido. Eles devem desenhar um triângulo retângulo, de modo que a medida dos catetos coincida com a medida correspondente a uma unidade da reta real. Em seguida, com o compasso, devem transportar a medida do segmento correspondente à hipotenusa, como mostrado a seguir.



R5 Sem usar a calculadora, determine um valor aproximado para $\sqrt{15}$.

Resolução Os estudantes poderão compreender esta atividade com mais facilidade caso já tenham realizado as atividades da seção *Tecnologia*.

Para calcular o valor aproximado de $\sqrt{15}$, temos de determinar um número que, multiplicado por ele mesmo, dê, aproximadamente, 15. Para isso, vamos determinar os quadrados perfeitos mais próximos de 15 e a raiz quadrada desses números. Oriente os estudantes a acompanhar essa resolução com uma calculadora.

$$9 < 15 < 16$$
$$\sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16}$$
$$3 < \sqrt{15} < 4$$

Como não existem números naturais entre 3 e 4, podemos calcular o quadrado de alguns números racionais entre esses números, até obtermos um resultado próximo a 15. Acompanhe.

a	a^2	Erro ($15 - a^2$)
3,5	$3{,}5^2 = 3{,}5 \cdot 3{,}5 = 12{,}25$	$15 - 12{,}25 = 2{,}75$ (falta)
3,8	$3{,}8^2 = 3{,}8 \cdot 3{,}8 = 14{,}44$	$15 - 14{,}44 = 0{,}56$ (falta)
3,9	$3{,}9^2 = 3{,}9 \cdot 3{,}9 = 15{,}21$	$15 - 15{,}21 = -0{,}21$ (excesso)

Analisando os resultados obtidos, verificamos que $\sqrt{15}$ está compreendida entre 3,8 e 3,9. Assim, $3{,}8 < \sqrt{15} < 3{,}9$.

a	a^2	Erro ($15 - a^2$)
3,86	$3{,}86^2 = 3{,}86 \cdot 3{,}86 = 14{,}8996$	$15 - 14{,}8996 = 0{,}1004$ (falta)
3,87	$3{,}87^2 = 3{,}87 \cdot 3{,}87 = 14{,}9769$	$15 - 14{,}8996 = 0{,}0231$ (falta)
3,88	$3{,}88^2 = 3{,}88 \cdot 3{,}88 = 15{,}0544$	$15 - 15{,}0544 = -0{,}0544$ (excesso)

Como $\sqrt{15}$ está mais próxima de 3,87 que de 3,88, podemos dizer que $\sqrt{15} \simeq 3{,}87$.

Comente com os estudantes que poderíamos continuar esse processo e obter um valor aproximado para a raiz desejada com quantas casas decimais quiséssemos. Espera-se que eles compreendam que, nesse caso, para dar continuidade, eles deveriam testar valores entre 3,87 e 3,88.

R6 Indique um número irracional compreendido entre $\frac{22}{3}$ e $\frac{23}{3}$.

Resolução Converse com os estudantes sobre os significados da expressão "compreendido entre" e oriente-os a analisar o sentido matemático de "estar entre".

Considerando a o número que buscamos, sabemos que $\frac{22}{3} < a < \frac{23}{3}$. Como $\frac{22}{3}$ e $\frac{23}{3}$ são números positivos maiores que 1, então:

$$\left(\frac{22}{3}\right)^2 < a^2 < \left(\frac{23}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{484}{9} < a^2 < \frac{529}{9}$$

Podemos atribuir a a^2 qualquer número racional na forma fracionária que esteja entre $\frac{484}{9}$ e $\frac{529}{9}$. Por exemplo, $a^2 = \frac{495}{9}$. Assim, temos:

$$\frac{484}{9} < \frac{495}{9} < \frac{529}{9} \Rightarrow \frac{484}{9} < 55 < \frac{529}{9}$$

Se julgar oportuno, explique aos estudantes o significado do símbolo $\Rightarrow$. Lemos a expressão "$A \Rightarrow B$" como "*A* implica *B*" ou "se *A*, então *B*". Neste caso, se *A* for verdadeiro, então *B* é também verdadeiro; se *A* for falso, então nada se pode afirmar sobre *B*.

Extraindo a raiz de todos os membros dessas desigualdades, temos:

$$\sqrt{\frac{484}{9}} < \sqrt{55} < \sqrt{\frac{529}{9}} \Rightarrow \frac{22}{3} < \sqrt{55} < \frac{23}{3}$$

Assim, $\sqrt{55}$ está entre $\frac{22}{3}$ e $\frac{23}{3}$. Podemos confirmar isso fazendo:

$\frac{22}{3} = 7{,}333...$ $\qquad$ $\sqrt{55} \simeq 7{,}416$ $\qquad$ $\frac{23}{3} = 7{,}666...$

Como 55 não é um quadrado perfeito, sua raiz quadrada é um número é irracional.

Ao apresentar e justificar sua opinião no item **b** da atividade **3**, os estudantes estão trabalhando a capacidade de argumentação, favorecendo, assim, o desenvolvimento da competência geral **7**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

A cada problema, retorne ao texto e às atividades das seções *Problemas e exercícios resolvidos* para investigar qual deles pode auxiliá-lo a resolver a atividade que você deve solucionar agora.

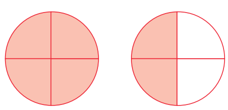
1 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Ao escutar a notícia de que um filme recém-lançado arrecadou, no primeiro mês de lançamento, R$ 1,35 bilhão em bilheteria, um estudante escreveu corretamente o número que representa essa quantia, com todos os seus algarismos. Alternativa **e**.

O número escrito pelo estudante foi

a) 135 000,00.
b) 1 350 000,00.
c) 13 500 000,00.
d) 135 000 000,00.
e) 1 350 000 000,00.

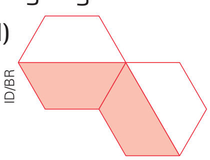
2 **Relacione as representações correspondentes ao mesmo número. Para isso, associe cada letra ao símbolo romano correspondente.** **a)** – II), **b)** – III), **c)** – IV), **d)** – I).

a) 

ID/BR

b) 1,25

c) $\frac{3}{5} + \frac{7}{3}$

d) 

ID/BR

I) $\frac{1}{2}$

II) $\frac{3}{2}$

III) $\frac{5}{4}$

IV) $\frac{44}{15}$

3. **a)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que sim, pois 2 é um número racional entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{2}$.

3 **Daniel pensou em um número racional entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{2}$ e desafiou Pedro a adivinhar em que número havia pensado. Pedro deu o seguinte palpite: "Você pensou no número 2.". Daniel respondeu: "Quase! Você errou por três quartos.".**

a) Em sua opinião, o palpite de Pedro foi razoável? Justifique.

b) Depois que Daniel informou a Pedro que ele errou por três quartos, era possível adivinhar o número pensado? Justifique sua resposta. Sim.

4 **Dê os diferentes modos de representar o número 16, correspondentes a cada uma das sentenças.**

a) 16 é a metade de um número. $\frac{32}{2}$
b) 16 é o dobro de um número. $2 \cdot 8$
c) 16 é o quadrado de um número. 4^2
d) 16 é a quarta potência de um número. 2^4
e) 16 é a diferença entre dois quadrados. $5^2 - 3^2$
f) 16 é o produto de três números inteiros. $2 \cdot 2 \cdot 4$
g) 16 é a diferença entre dois números inteiros. $20 - 4$

5 **Descubra diferentes maneiras de representar o número −100.** Exemplo de resposta: -10^2; $-\frac{1000}{10}$; $(-10) \cdot (+10)$.

6 **Qual é o número racional pelo qual você deve multiplicar cada um dos números indicados a seguir para que o produto dos dois seja 1?**

a) 2 $\frac{1}{2}$
b) −3 $-\frac{1}{3}$
c) $\frac{2}{5}$ $\frac{5}{2}$
d) −0,6 $-\frac{5}{3}$

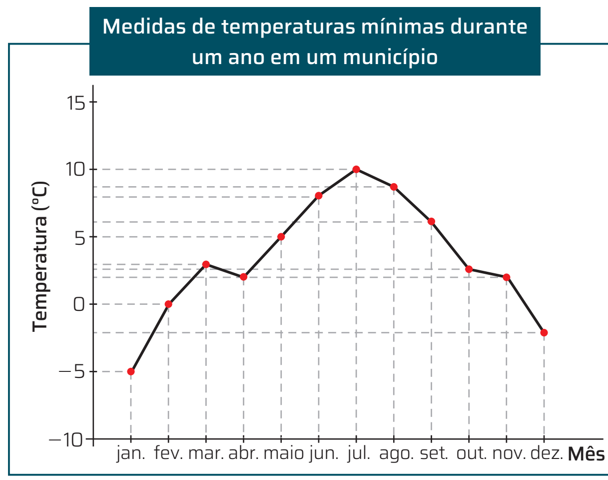
7 **Faça o que se pede em cada item.**

a) Represente na reta numérica os números a seguir. Consulte a resposta no Manual do Professor.

I. $-\frac{23}{46}$ II. $-\frac{1}{2}$ III. −0,5 IV. $-\frac{5}{10}$

b) O que você pode concluir quanto aos números do item anterior? Espera-se que os estudantes concluam que os números do item anterior são todos iguais.

8 **Analise o gráfico e faça o que se pede em cada item.**



ID/BR

Dados fictícios.

a) Construa uma tabela com as medidas aproximadas das temperaturas mínimas relativas a todos os meses. Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) Qual foi a variação de temperatura mínima entre:
- janeiro e março? 8 °C
- abril e julho? 8 °C
- julho e outubro? 7,5 °C

c) Em quais meses foram registradas a medida de temperatura mínima mais alta e a mais baixa? Julho e janeiro.

9 **Considere a imagem a seguir e responda às questões.**

Seregam/Shutterstock.com/ID/BR

a) Que fração da *pizza* retratada na imagem representa uma fatia? E duas? $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$

b) Quantos pedaços representam meia *pizza*? 4 pedaços.

10 **Obtenha a fração irredutível equivalente a:**

a) 0,36 $\frac{9}{25}$
b) −2,125 $-\frac{17}{8}$
c) 0,262626... $\frac{26}{99}$
d) 2,176176176... $\frac{2174}{999}$
e) 0,8474747... $\frac{839}{990}$
f) 0,12666... $\frac{19}{150}$

11 Efetue as operações a seguir.

a) 0,666... − 0,6 $\frac{1}{15}$

b) 0,23 : 0,2333... $\frac{69}{70}$

c) −0,1777... + 1,7 $\frac{137}{90}$

d) 0,161616... : 0,4777... $\frac{160}{473}$

12 (PUC-RJ) Escreva na forma de fração $\frac{m}{n}$ a soma 0,2222... + 0,23333.... $\frac{41}{90}$

13 Responda às questões e faça o que se pede a seguir.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes tenham considerado a adição e a subtração da quantidade de casas decimais e as aproximações da multiplicação ou da divisão das partes inteiras dos números decimais em cada resposta.

a) Qual é a parte decimal dos resultados indicados a seguir? Sem fazer as contas, identifique a posição da vírgula em cada resposta. **a)** I) 15,32958 II) 29,458 III) 22,6125 IV) 39,653465 V) 3,0505263

I. 6,783 · 2,26 = 1532958

II. 4,532 · 6,5 = 29458

III. 72,36 : 3,2 = 226125

IV. 200,25 : 5,05 = 39653465

V. 2,898 : 0,95 = 30505263

b) Que critério você usou para colocar a vírgula em cada um dos resultados indicados no item anterior?

c) Com o auxílio de uma calculadora, confira as respostas obtidas no item **a**, analisando os possíveis erros. Resposta pessoal.

14 Faça o que se pede em cada item.

14. b) Números racionais: 1, 10, 2, 20, 3, 30; números irracionais: $\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$.

a	1	10	100	4	40	400	9	90	900
$\sqrt{a}$	1	$\sqrt{10}$	10	2	$2\sqrt{10}$	20	3	$3\sqrt{10}$	30

a) Copie o quadro no caderno e complete-o.

b) Classifique cada um dos números que você utilizou para preencher o quadro em racional ou irracional.

c) Qual é a característica comum a todos os números racionais indicados no item anterior?
Resposta possível: São números inteiros.

15 Analise a sequência a seguir.

$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, ...$

a) Determine os cinco próximos termos dessa sequência. $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$

b) Indique os dez primeiros números irracionais dessa sequência. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$

16 Qual é a medida do lado de um quadrado com 10 000 m² de área? E com 1000 m² de área? 100 m; $10\sqrt{10}$ m.

17 Indique no caderno quais das frações a seguir representam dízimas periódicas. $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{9}$.

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{9}$

d) $\frac{1}{10}$

18 Qual é a maior distância que uma pessoa pode andar em linha reta em uma sala retangular cujas dimensões são 6 m por 10 m? $2\sqrt{34}$ m

19 Indique um número irracional que esteja compreendido entre: Respostas possíveis:

a) 3 e 5. π

b) $\frac{1}{9}$ e $\frac{2}{9}$. $\frac{\sqrt{2}}{7}$

c) −3 e −2. $-\sqrt{5}$

d) $\frac{22}{3}$ e $\frac{23}{3}$ (exceto $\sqrt{55}$). $\sqrt{57}$

20 Calcule o valor aproximado das raízes a seguir e localize-as na reta numérica. Consulte a reta numérica no Manual do Professor.

a) $\sqrt{8}$ 2,8

b) $\sqrt{10}$ 3,2

c) $\sqrt{1025}$ 32

d) $\sqrt{38}$ 6,2

21 Escreva os números:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{5}{6}$ e $-\frac{\pi}{4}$ em ordem crescente. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{5}{6}$; $-\frac{\pi}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{\sqrt{3}}{3}$ em ordem decrescente. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$

22 Verifique se cada um destes números é racional ou irracional.

a) $\frac{347\,629}{7^{290}+1}$ Racional.

b) $\frac{0{,}232323...}{0{,}666...}$ Racional.

c) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ Irracional.

d) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ Irracional.

e) $6-\pi$ Irracional.

23 Represente na reta real os números $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $(\sqrt{3}-1)$, $\frac{\pi}{2}$, $(1-\sqrt{2})$, $(\sqrt{3}-2)$, $(\pi-1)$ e $(2-\pi)$. Consulte a resposta no Manual do Professor.

24 Classifique cada sentença em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) e justifique as falsas.

a) Todo número natural é inteiro. Verdadeira.

b) Todo número inteiro é natural.
Falsa; os números inteiros negativos não são naturais.

c) Todo número racional é real. Verdadeira.

d) Todo número real é irracional.
Falsa; os números reais podem ser racionais ou irracionais.

e) O número zero é racional. Verdadeira.

f) Número racional é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com b não nulo.
Falsa; a e b devem ser números inteiros, com b não nulo.

25 Crie uma atividade que tenha um número irracional. Resposta pessoal.

26 Elabore um problema para o qual a resposta seja um número inteiro que pertença a $\mathbb{Z}^*$. Resposta pessoal.

As atividades de elaboração de problemas (**25** e **26**) são importantes ao tornar os estudantes capazes não só de resolver os problemas propostos no livro ou pelo professor, mas também de estruturar novos problemas. Assim, eles sentem que podem participar do fazer matemático e adquirem noções sobre a maneira de utilizar a linguagem matemática, refletindo acerca dos próprios procedimentos e abordando situações que fazem parte de sua vivência.

INTERVALOS REAIS

Já estudamos um pouco a reta real. Agora, vamos estudar os intervalos limitados e os ilimitados.

Intervalos limitados

Acompanhe as situações a seguir.

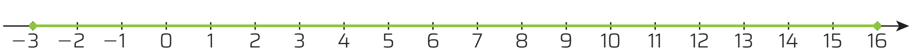
Situação A

No dia 20 de agosto de 2022, a medida de temperatura mínima no município catarinense de Urupema foi -3 °C. Suponha que a temperatura máxima, nesse dia, foi 16 °C. Qual foi a variação da medida de temperatura em Urupema nesse dia? Antes de continuar a leitura, tente responder a essa questão.
A variação da medida de temperatura, nesse dia, foi 19 °C.

Fom Conradi/iShoot/Folhapress

Geada em Urupema (SC). Foto de 2022.

Sendo T uma medida de temperatura registrada em um momento qualquer desse dia, podemos dizer que T está dentro do intervalo de -3 °C a 16 °C e representar esse intervalo por $-3\ °C \leq T \leq 16\ °C$.
Note que utilizamos a desigualdade porque não podemos enumerar todos os valores reais que estão entre -3 e 16, visto que são infinitos.
Na reta real, temos a seguinte representação para os valores de T:

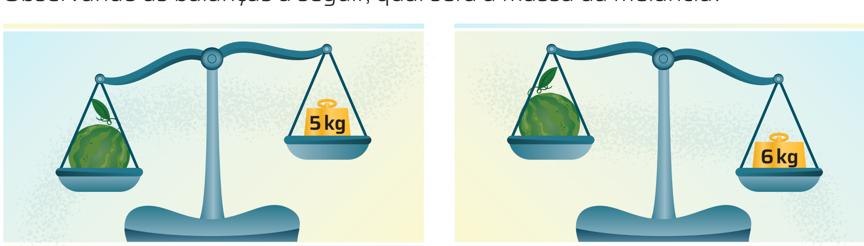


ID/BR

As “bolinhas cheias” (•) nas extremidades da representação geométrica do intervalo na reta real indicam que -3 e 16 **pertencem** a esse intervalo de medidas de temperaturas, o qual pode ser representado também da seguinte forma: $[-3, 16]$.
Dizemos que esse intervalo é **fechado** porque seus extremos -3 e 16 pertencem ao conjunto das medidas de temperaturas registradas em Urupema nesse dia.

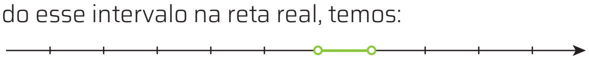
Situação B

Observando as balanças a seguir, qual será a massa da melancia?



ID/BR

Apenas com essas informações não é possível determinar a medida da massa exata da melancia. No entanto, podemos concluir que é maior que 5 kg e menor que 6 kg.
Assim, sendo M a massa da melancia, podemos escrever que $5 < M < 6$.
Representando esse intervalo na reta real, temos:



ID/BR

As “bolinhas vazias” (∘) nas extremidades da representação geométrica do intervalo na reta real indicam que 5 e 6 **não pertencem** a esse intervalo, que também pode ser representado da seguinte maneira:]5, 6[.

Dizemos que esse intervalo é **aberto** porque seus extremos não pertencem ao intervalo.

A leitura dos intervalos e de suas representações contribui para o letramento matemático dos estudantes.

Acompanhe, a seguir, o nome dos possíveis intervalos limitados para a e b reais e $a < b$.

- **Intervalo fechado** de extremos a e b: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$

- **Intervalo aberto** de extremos a e b: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =]a, b[$

- **Intervalo fechado** em a e **aberto** em b: $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a, b[$

- **Intervalo aberto** em a e **fechado** em b: $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} =]a, b]$

Referimo-nos a esses intervalos da seguinte maneira:

- $[a, b]$ é o conjunto dos valores reais de x, sendo x maior que ou igual a a e menor que ou igual a b.
- $]a, b[$ é o conjunto dos valores reais de x, com x maior que a e menor que b.

Intervalos ilimitados

Leia a situação a seguir.

Um corpo lançado da Terra no espaço, com velocidade suficiente para escapar da órbita do nosso planeta, se não se chocar com outro corpo ou for atraído por ele, tenderá a se afastar cada vez mais da Terra. Desse modo, a distância desse corpo à Terra aumentará indefinidamente.

Considerando o momento do lançamento desse corpo, as distâncias vão situar-se no intervalo $[0, +\infty[$.

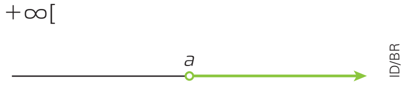
Os símbolos $+\infty$ (mais infinito) e $-\infty$ (menos infinito) não correspondem a números reais. Eles apenas mostram que uma variável pode crescer indefinidamente $(+\infty)$ ou decrescer indefinidamente $(-\infty)$.

Assim, podemos também considerar $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

De modo geral, sendo a um número real qualquer, podemos ter:

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = [a, +\infty[$

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} =]a, +\infty[$



- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} =]-\infty, a]$

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} =]-\infty, a[$

INTERSECÇÃO, REUNIÃO E DIFERENÇA DE CONJUNTOS

Há algumas operações que podem ser realizadas entre conjuntos. Considerando A e B conjuntos contidos em um conjunto universo E, temos:

Se considerar necessário, retome com a turma o conceito de conjunto universo. Quando vamos operar com conjuntos, ou seja, fazer a união ou a intersecção deles, os elementos do resultado da operação são mantidos no conjunto universo. Por isso é importante que os estudantes compreendam esse conceito.

O conjunto **intersecção** de A e de B (notação: $A \cap B$) é o conjunto formado por todos os **elementos comuns** a A **e** a B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

O conjunto **reunião** ou **união** de A e de B (notação: $A \cup B$) é o conjunto formado por **todos os elementos que pertencem** a A **ou** a B, isto é, pertencem a pelo menos um dos conjuntos.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

O conjunto **diferença** entre A e B (notação: $A - B$) é o conjunto formado pelos **elementos que pertencem** a A e **não pertencem** a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

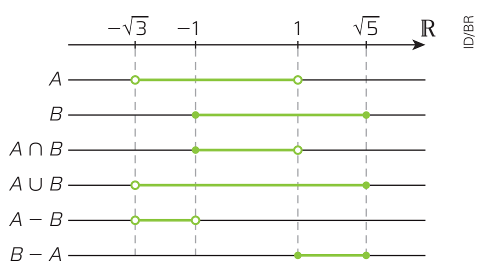
Exemplo 1

Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, temos:

- $A \cap B = \{2, 4\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
- $A - B = \{1, 3, 5\}$
- $B - A = \{6, 8\}$

Exemplo 2

Sendo $A = \left]-\sqrt{3}, 1\right[$ e $B = \left[-1, \sqrt{5}\right]$, temos:

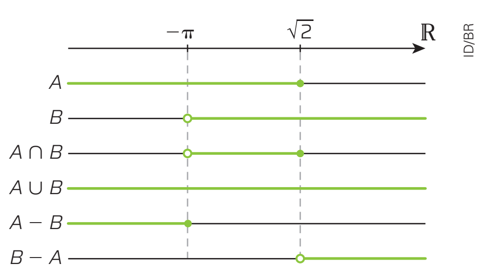


Portanto:

- $A \cap B = [-1, 1[$
- $A \cup B = \left]-\sqrt{3}, \sqrt{5}\right]$
- $A - B = \left]-\sqrt{3}, -1\right[$
- $B - A = \left[1, \sqrt{5}\right]$

Exemplo 3

Sendo $A = \left]-\infty, \sqrt{2}\right]$ e $B =]-\pi, +\infty[$, temos:



Portanto:

- $A \cap B = \left]-\pi, \sqrt{2}\right]$
- $A \cup B = \mathbb{R}$
- $A - B =]-\infty, -\pi]$
- $B - A = \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

27 A quais dos intervalos a seguir pertence $\sqrt{2}$? Justifique sua resposta.]0; 1,42[e]1,41; 1,42[.

]0; 1,42[ ]0; 1,41]]1,41; 1,42[ ]0; 1,41[

Consulte as respostas no Manual do Professor.

28 Represente na reta real os intervalos a seguir.

a) $[-4, 7]$ c) $[-\sqrt{3}, 3[$ e) $]-3, +\infty[$
b) $]-\sqrt{2}, 2[$ d) $]-6, -2]$ f) $]-\infty, \pi]$

29 Verifique a seguir como representar, usando outra notação, o intervalo do item **a** da atividade anterior e faça o mesmo para os outros itens.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 7\}$$

30 Represente em notação de intervalo os conjuntos descritos em cada item.

a) O conjunto dos números reais maiores que -2 e menores que ou iguais a 5. $]-2, 5]$

b) O conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}$, sendo x maior que 2 e menor que 2,5. $]2; 2,5[$

c) O conjunto dos valores de $x \in \mathbb{R}$, sendo x menor que 7. $]-\infty, 7[$

$]-1,3]$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 3\}$

$[-4, 0[$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x < 0\}$

$]-6,3; 2[$ f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6,3 < x < 2\}$

$[-1,5; \sqrt{2}]$ g) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1,5 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\}$

$]-\infty, 3[$ h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

$]-\infty, -2]$ i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2\}$

$]-1, +\infty[$ j) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

$[-\pi, +\infty[$ k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\pi\}$

Uma maneira de trabalhar a resolução de atividades em sala de aula é organizar os estudantes em duplas ou em pequenos grupos e atribuir, a cada um deles, três ou quatro itens de diferentes tipos para resolução e registro das soluções. Em seguida, solicite às duplas ou aos grupos que troquem as produções entre si para conferência e eventual correção. Isso permite que os estudantes recebam de volta suas produções avaliadas pelos colegas, para que possam ajustar ou refazer o que for preciso. Ao final, alguns itens mais controversos ou complexos podem ser discutidos coletivamente, com sua mediação.

31 Em uma turma de Ensino Médio foi feita uma pesquisa sobre a idade e a altura dos estudantes. As alturas variavam entre 1,68 m e 1,87 m, e as idades, entre 14 anos e 18 anos.

a) Com apenas essas informações, é possível indicar todas as alturas dos estudantes dessa turma? Não.

b) Indique todas as idades possíveis. Represente da forma que você achar mais conveniente. $]14, 18[$

32 Procure em um jornal (impresso ou eletrônico) a seção de meteorologia. Com base nas informações nela apresentadas, construa uma tabela que contenha:
Consulte as respostas no Manual do Professor.

- os municípios do Brasil mencionados nesse jornal;
- as medidas das temperaturas mínima e máxima;
- os intervalos de variação da medida de temperatura e as amplitudes térmicas correspondentes.

33 Considere um dado cúbico cujo número n obtido na face superior pode ser descrito pela condição $1 \leqslant n \leqslant 6$, em que $n \in \mathbb{N}$. **a)** $2 \leqslant S_2 \leqslant 12$

a) Indique uma condição que mostre os resultados possíveis quando se lançam dois dados e se adicionam os números obtidos na face superior.

29. b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < 2\}$ **c)** $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leqslant x < 3\}$ **d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x \leqslant -2\}$ **e)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$ **f)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \pi\}$

b) Indique uma condição que mostre os resultados que é possível obter quando se lançam três dados e se adicionam os números obtidos. $3 \leqslant S_3 \leqslant 18$

34 Quais são as dimensões possíveis, em cm, do lado de um quadrado para que sua área varie entre 4 cm² e 144 cm²? Represente o resultado na notação de intervalo. $]2, 12[$

35 Obtenha $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ e $B - A$ em cada item a seguir. Consulte as respostas na página 27.

a) $A = \{-2, -1, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 4\}$

b) $A = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$ e $B = \{-3, 3, 5\}$

c) $A = [-3, 2[$ e $B = [-1, 4[$

d) $A = \left]-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right]$ e $B = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{3}\right[$

e) $A =]-2, 2]$ e $B = \left[2, \sqrt{6}\right[$

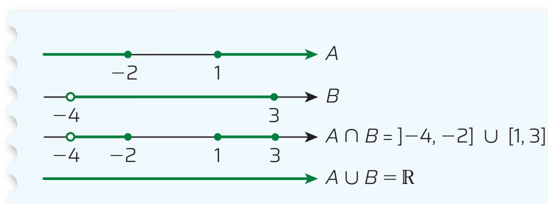
f) $A = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ e $B = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$

g) $A = \left[-\frac{5}{6}, +\infty\right[$ e $B = \left]-\frac{6}{7}, +\infty\right[$

36 Em uma prova havia a atividade a seguir.

> Obtenha $A \cap B$ e $A \cup B$ para:
> $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 1\}$ e $B =]-4, 3]$

Analise como um estudante resolveu essa atividade.



ID/BR

Retorne à solução do estudante e verifique se ele acertou ou errou a atividade. Caso ele tenha se equivocado, identifique o erro cometido por ele e apresente a resolução correta. O estudante acertou a atividade.

37 Sendo A e B os conjuntos descritos a seguir, dê uma resolução **incorreta** para $A \cup B$ e $A \cap B$. Depois, troque sua resolução com a de um colega. Um deve descobrir e corrigir os erros do outro. Resposta pessoal.

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{5} < x \leqslant \sqrt{10}\right\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt{3} \text{ ou } x \geqslant \sqrt{10}\right\}$$

38 Registre a alternativa correta no caderno. Alternativa **c**.

(UEG-GO) Dados dois conjuntos, A e B, onde $A \cap B = \{b, d\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ e $B - A = \{a\}$. O conjunto B é igual a:

a) $\{a\}$ c) $\{a, b, d\}$ e) $\{a, b, c, d, e\}$
b) $\{c, e\}$ d) $\{b, c, d, e\}$

Na atividade **32**, caso a seção do jornal escolhido mencione apenas um município, oriente os estudantes a pesquisar pelo menos mais cinco municípios e a procurar as informações solicitadas em outros meios.

Não escreva no livro.

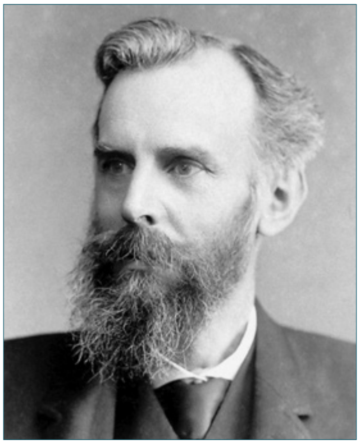
Diagramas de Euler-Venn

Ao longo deste capítulo, muitas vezes utilizamos os termos **conjuntos** e **elementos**. Todos os conjuntos estudados eram conjuntos de números, e cada número era um elemento desses conjuntos. No entanto, existem outros tipos de conjunto, como:

- o conjunto de carteiras de sua sala de aula;
- o conjunto de pessoas que moram no município de Curitiba;
- o conjunto de cartas de um baralho convencional.

Para quaisquer conjuntos, podemos representar as operações de união, intersecção e diferença entre conjuntos usando desenhos conhecidos como **diagramas de Euler-Venn**.

Esses desenhos são denominados diagramas de Euler-Venn em referência ao lógico inglês John Venn, que utilizou esse tipo de representação em seu livro *Symbolic logic*, em 1894, e ao matemático suíço Leonhard Euler, que, quase um século antes, havia feito desenhos como esses em suas cartas a uma princesa da corte alemã, para mostrar a ela raciocínios dedutivos.


CPA Media Pte Ltd/Alamy/Fotoarena

John Venn (1834-1923).


© Giancarlo Costa/Bridgeman Images/Fotoarena

Leonhard Euler (1707-1783).

Acompanhe, no exemplo a seguir, como são esses diagramas e como eles podem ser utilizados para representar algumas situações.

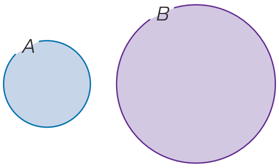
Seja A o conjunto das pessoas de sua família e B o conjunto das pessoas que moram em Curitiba.

O objeto digital aborda a história da Matemática destacando os matemáticos Leonhard Euler e John Venn e suas contribuições.

Leonhard Euler e John Venn, conheça mais esses dois matemáticos!

Situação A

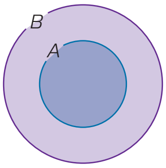
Nenhuma pessoa de sua família mora em Curitiba.
Nesse caso, dizemos que os conjuntos A e B são disjuntos e temos: $A \cap B = \varnothing$. O símbolo $\varnothing$ representa o conjunto vazio.



ID/BR

Situação B

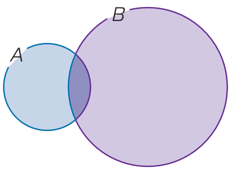
Todas as pessoas de sua família moram em Curitiba.
A está contido em B e escreve-se: $A \subset B$, em que o sinal $\subset$ significa que todo elemento de A é elemento de B. Observe que, nesse caso, $A \cap B = A$.



ID/BR

Situação C

Algumas pessoas da família de Antônia moram em Curitiba.
A parte escura representa a intersecção de A e B: $A \cap B$. A parte azul dentro de A representa $A - B$, que corresponde às pessoas da família de Antônia que não moram em Curitiba.



ID/BR

Utilizar esses diagramas pode nos auxiliar a pensar na resolução de alguns problemas, como os apresentados a seguir.

35.

a) $A \cap B = \{-1, 0, 4\}$; $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$;
$A - B = \{-2, 2\}$; $B - A = \{1\}$

b) $A \cap B = \{-3, 3, 5\} = B$; $A \cup B = \{-3, -1, 1, 3, 5\} = A$;
$A - B = \{-1, 1\}$; $B - A = \{\}$

c) $A \cap B = [-1, 2[$; $A \cup B = [-3, 4[$;
$A - B = [-3, -1[$; $B - A = [2, 4[$

d) $A \cap B = \left]-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right] = A$; $A \cup B = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{3}\right[= B$;
$A - B = \{\}$; $B - A = \left[-\sqrt{2}, -\frac{5}{6}\right] \cup \left]\frac{2}{3}, \sqrt{3}\right[$

e) $A \cap B = \{2\}$; $A \cup B = \left]-2, \sqrt{6}\right[$;
$A - B =]-2, 2[$; $B - A = \left]2, \sqrt{6}\right[$

f) $A \cap B = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[= B$; $A \cup B = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[= A$
$A - B = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$; $B - A = \{\}$

g) $A \cap B = \left[-\frac{5}{6}, +\infty\right[= A$; $A \cup B = \left]-\frac{6}{7}, +\infty\right[= B$
$A - B = \{\}$; $B - A = \left]-\frac{6}{7}, -\frac{5}{6}\right[$

Escolha uma ou duas atividades desta seção para analisar com os estudantes. Essa prática é importante nas primeiras ocorrências da seção *Problemas e exercícios resolvidos* neste volume.

R7 **Considere os seguintes conjuntos:**

A: conjunto dos divisores naturais de 6

B: conjunto dos divisores inteiros de 10

C: conjunto dos múltiplos inteiros de 3

D: conjunto dos números ímpares

a) Represente os conjuntos indicados acima utilizando linguagem simbólica.

b) Represente as operações a seguir em diagramas de Euler-Venn e indique os elementos que pertencem ao conjunto obtido em cada caso.

- $A \cap B$
- $A \cup C$
- $B - D$

Resolução

a) Conjunto *A*: Os divisores naturais (ou positivos) de 6 são 1, 2, 3 e 6.

Logo, $A = \{1, 2, 3, 6\}$.

Conjunto *B*: Todo número inteiro tem, além dos divisores positivos, os divisores negativos. Os divisores positivos de 10 são 1, 2, 5 e 10 e os negativos são -1, -2, -5 e -10.

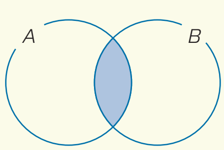
Logo, $B = \{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10\}$.

Conjunto *C*: Os múltiplos de 3 são obtidos multiplicando-se por 3 cada um dos números inteiros ..., $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$. Assim, os múltiplos inteiros de 3 são ..., $-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...$.

Logo, $C = \{..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...\}$.

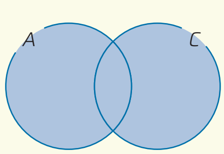
Conjunto *D*: Os números ímpares positivos são 1, 3, 5, ... e os negativos são $-1, -3, -5, ...$.

Logo, $D = \{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$.

b)
- 

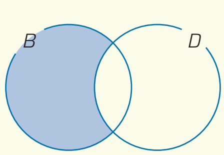
ID/BR

$A \cap B = \{1, 2\}$

- 

ID/BR

$A \cup C = \{..., -9, -6, -3, 0, 1, 2, 3, 6, 9, ...\}$

- 

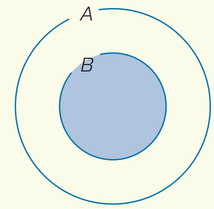
ID/BR

$B - D = \{-10, -2, 2, 10\}$

R8 **Se um conjunto *A* tem 72 elementos e um conjunto *B* tem 25 elementos, qual é a maior quantidade de elementos que o conjunto $A \cap B$ pode ter?**

Resolução

A situação em que $A \cap B$ é o maior conjunto possível ocorre quando $B \subset A$.



ID/BR

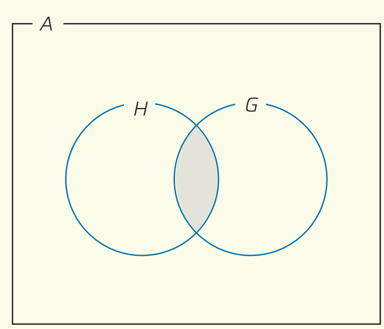
$A \cap B = B$

Nesse caso, $A \cap B$ terá 25 elementos.

R9 **Em uma turma com 35 estudantes, foi aplicada uma avaliação com duas questões: uma de História e outra de Geografia. Se 8 estudantes acertaram as duas questões, 15 acertaram a questão de História e 20, a de Geografia, quantos estudantes erraram as duas questões?**

Resolução

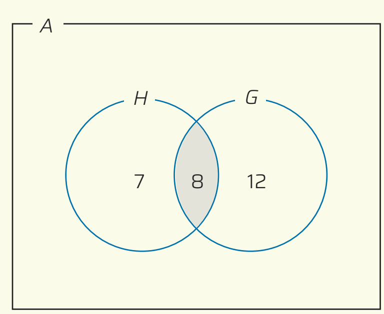
Sendo *A* o conjunto de todos os estudantes da classe, *H* o conjunto dos estudantes que acertaram a questão de História e *G* o conjunto dos estudantes que acertaram a questão de Geografia, podemos representar a situação pelo seguinte diagrama:



ID/BR

Como 8 estudantes acertaram as duas questões, sabemos que $H \cap G$ tem 8 estudantes. Sabemos também que 7 estudantes acertaram apenas a questão de História ($15 - 8 = 7$) e que 12 estudantes acertaram apenas a questão de Geografia ($20 - 8 = 12$).

Então, as partes claras de *H* e de *G* têm, respectivamente, 7 e 12 estudantes.



ID/BR

Para determinar o número de estudantes que erraram as duas questões, precisamos calcular a quantidade de estudantes de A que não estão nem em H nem em G.

Como A tem 35 estudantes ao todo, o número de estudantes de A que não pertencem a H ou a G é dado por:

$$35 - (7 + 8 + 12) = 35 - 27 = 8$$

Portanto, 8 estudantes erraram as duas questões.

R10 **Uma empresa realizou uma pesquisa para saber a preferência dos consumidores em relação a três marcas de suco de frutas, *A*, *B* e *C*. Os dados obtidos foram organizados na tabela a seguir.**

Consumo de suco de frutas das marcas *A*, *B* e *C*

Marca de suco	Consumidores
A	120
B	230
C	160
A e B	45
A e C	50
B e C	25
A, B e C	18
Nenhuma	320

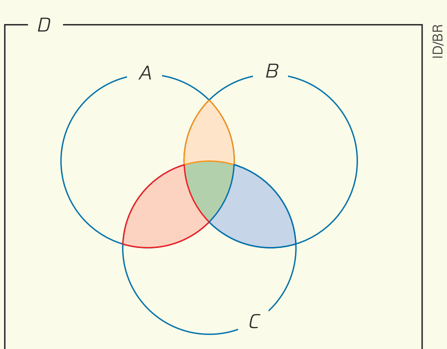
Dados obtidos pela agência de pesquisa.

Ao todo, quantas pessoas foram entrevistadas nessa pesquisa?

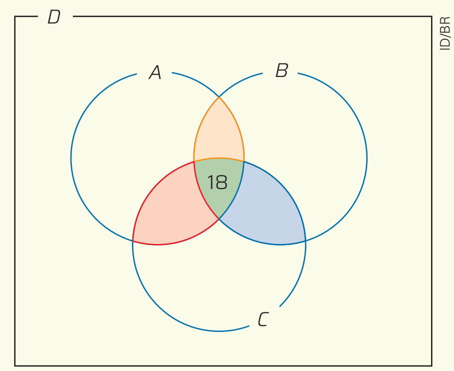
Resolução

Para facilitar a compreensão das relações entre os conjuntos dos consumidores de cada marca de suco, vamos utilizar um diagrama.

Sendo D o conjunto de todas as pessoas pesquisadas, podemos fazer a seguinte representação:



Agora, devemos inserir no diagrama as informações numéricas, em que os números indicam quantos consumidores pertencem a cada conjunto ou a cada parte destacada de cada um. Vamos começar pela parte destacada em verde, que representa $A \cap B \cap C$.



Como $A \cap B$ tem 45 elementos e $A \cap B \cap C$ tem 18, podemos concluir que a parte destacada em amarelo tem 27 elementos ($45 - 18 = 27$).

Usando o mesmo raciocínio, a parte destacada em azul tem 7 elementos ($25 - 18 = 7$) e a parte destacada em vermelho, 32 elementos ($50 - 18 = 32$).

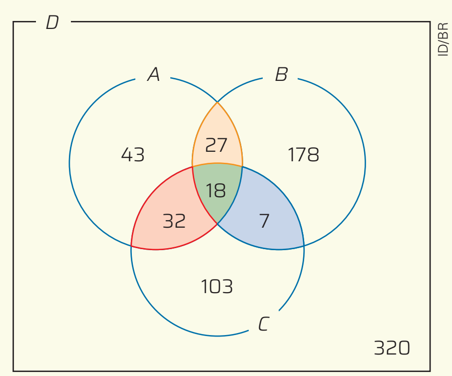
A parte clara de A deve ter 43 consumidores, pois:

$$120 - (27 + 18 + 32) = 43$$

Da mesma maneira, as partes claras de B e C têm, respectivamente, 178 e 103 consumidores, pois:

$$230 - (27 + 18 + 7) = 178$$

$$160 - (32 + 18 + 7) = 103$$



Por fim, para determinar o número total de entrevistados, basta adicionar os 320 consumidores que não escolheram os sucos A, B ou C a cada parte no diagrama:

$$320 + 43 + 27 + 18 + 32 + 178 + 7 + 103 = 728$$

Portanto, ao todo, foram entrevistadas 728 pessoas.

Faça com os estudantes o passo a passo para a confecção do diagrama do exercício **R10**. Observe se eles percebem que é essencial começar preenchendo o espaço destinado à intersecção $A \cap B \cap C$.

39 **Resolva a atividade e indique a alternativa correta no caderno.**

(UFPA) Em uma turma de cinquenta alunos de Medicina, há dezoito cursando Anatomia, quinze cursando Citologia e treze cursando Biofísica. Seis alunos cursam simultaneamente Anatomia e Citologia, cinco cursam simultaneamente Citologia e Biofísica e quatro cursam simultaneamente Anatomia e Biofísica. Dezesseis alunos não cursam nenhuma destas disciplinas. O número de alunos que cursam, simultaneamente, exatamente duas disciplinas é Alternativa **e**.

a) 31.

b) 15.

c) 12.

d) 8.

e) 6.

40 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Univesp) As inscrições para o vestibular de certa universidade puderam ser feitas através de 3 diferentes *sites*, *A*, *B* e *C*. Sabe-se que *A* e *B* receberam, juntos, 1200 inscrições, que *B* e *C* receberam, juntos, 1100 inscrições, e que *A* e *C* receberam, juntos, 1500 inscrições. Nessas condições, é correto afirmar que o número total de inscrições para esse vestibular foi igual a Alternativa **a**.

a) 1900.

b) 1850.

c) 1800.

d) 1750.

e) 1700.

41 **Escreva a alternativa correta no caderno.** Alternativa **c**.

(UEL-PR) Num dado momento, três canais de TV tinham, em sua programação, novelas em seus horários nobres: a novela *A* no canal *A*, a novela *B* no canal *B* e a novela *C* no canal *C*. Numa pesquisa com 3000 pessoas, perguntou-se quais novelas agradavam. [O quadro] abaixo indica o número de telespectadores que designaram as novelas como agradáveis.

Novelas	Número de telespectadores
A	1450
B	1150
C	900
A e *B*	350
A e *C*	400
B e *C*	300
A, *B* e *C*	100

Quantos telespectadores entrevistados não acham agradável nenhuma das três novelas?

a) 300 telespectadores.

b) 370 telespectadores.

c) 450 telespectadores.

d) 470 telespectadores.

e) 500 telespectadores.

42 **Escreva e resposta no caderno.**

(Uece) Em um grupo de 200 estudantes, 98 são mulheres das quais apenas 60 não estudam comunicação. Se do total de estudantes do grupo somente 60 estudam comunicação, o número de homens que não estudam esta disciplina é Alternativa **b**.

a) 85.

b) 60.

c) 80.

d) 75.

43 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UEFS-BA) Em um grupo de 30 jovens, 2 já assistiram a todos os filmes *X*, *Y* e *Z*, e 10 ainda não viram nenhum. Dos 14 que viram *Y*, 5 também assistiram a *X*, e 6 também viram *Z*. Ao todo, 11 jovens assistiram a *X*. Com base nessas informações, é correto concluir que, nesse grupo, Alternativa **b**.

a) ninguém assistiu apenas a *X*.

b) ninguém assistiu apenas a *Z*.

c) alguém assistiu a *Z*, mas não viu *Y*.

d) nem todos os que assistiram a *Z* viram *Y*.

e) todos os que assistiram a *X* também viram *Z*

44 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Uece) Em uma pesquisa que envolveu 120 alunas de uma academia de dança, foram obtidos os seguintes dados: 80 delas querem ser atrizes, 70 querem ser cantoras e 50 querem ser atrizes e cantoras. Considerando estes dados, é correto concluir que o número de alunas que não querem ser cantoras nem atrizes é Alternativa **b**.

a) 30.

b) 20.

c) 50.

d) 40.

45 **Reúna-se com um colega. Escolham um tema e elaborem um problema envolvendo operações com conjuntos. Depois, troquem o problema com outra dupla para que uma resolva o da outra. Ao final, verifiquem se as respostas estão corretas.**

O cálculo mental é uma importante habilidade e seu desenvolvimento deve ser um dos objetivos do aprendizado da Matemática, porque:
- tem importância prática no dia a dia;
- tem valor pessoal, individual;
- é útil na resolução de problemas.

CÁLCULO RÁPIDO

Alguns cálculos são constantemente usados. Conhecer os resultados ou ter estratégias de cálculo mental pode agilizar seu trabalho e permitir que sua atenção se volte para ideias e problemas mais importantes que os cálculos rotineiros. Por isso, nesta seção, presente em todos os capítulos, você encontrará alguns desafios para auxiliá-lo no desenvolvimento de sua habilidade de cálculo.

1 Calcule mentalmente o resultado das operações a seguir. Depois, confira e analise seus possíveis erros.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ 1

b) $1 - \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ $\frac{5}{6}$

d) $1 - \frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$

e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$

f) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$ $\frac{3}{10}$

g) 0,5 + 1,2 1,7

h) 2 − 0,75 1,25

i) 1,05 + 0,45 1,5

j) 1,25 − 0,75 0,5

k) 2 − 0,025 1,975

l) 5,25 + 1,35 6,6

2 Sem usar a calculadora e sem fazer contas no papel, escreva no caderno, na forma decimal, os números racionais em forma de fração a seguir.

a) $\frac{5}{10}$ 0,5

b) $\frac{13}{100}$ 0,13

c) $\frac{76}{100}$ 0,76

d) $\frac{93}{10}$ 9,3

e) $\frac{11}{1000}$ 0,011

f) $\frac{453}{100}$ 4,53

g) $\frac{725}{10}$ 72,5

h) $\frac{3361}{1000}$ 3,361

3 Calcule:

a) 10^{-1} 0,1

b) 10^{-2} 0,01

c) $(-5)^{-2}$ $\frac{1}{25}$

d) $-2(-2)^{-5}$ $\frac{1}{16}$

e) -15^{-1} $-\frac{1}{15}$

f) $(-3)^{-3}$ $-\frac{1}{27}$

g) 6^0 1

h) 4^{-2} $\frac{1}{16}$

i) 12^2 144

j) 3^4 81

k) 5^{-2} $\frac{1}{25}$

l) 6^{-3} $\frac{1}{216}$

4 Indique, no caderno, qual(is) das alternativas a seguir não é(são) equivalente(s) à "metade de 0,5". Alternativa **d**.

a) 0,25

b) $\frac{1}{2} \cdot 0,5$

c) $0,5 \cdot 0,5$

d) $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$

5 Calcule:

a) 10% de 120 12

b) 30% de 18 5,4

c) 0,5% de 138 0,69

d) 200% de 1530 3060

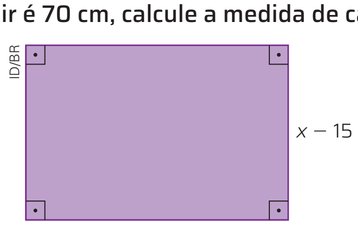
PARA RECORDAR

Os estudantes podem ser orientados a resolver as atividades desta seção aos poucos, no decorrer do estudo do capítulo, para que, durante esse período, apresentem suas dúvidas.

O objetivo desta seção é que você:
- relembre alguns conceitos já estudados;
- pense um pouco mais sobre técnicas de cálculo e resolução de problemas;
- tenha sempre em mente noções importantes e úteis para a resolução de problemas.

Vamos recordar alguns conceitos e formas de cálculo úteis para a continuidade de seus estudos.

1 O perímetro de um retângulo é a soma das medidas de seus lados. Sabendo que o perímetro do retângulo representado a seguir é 70 cm, calcule a medida de cada lado. 25 cm e 10 cm.



2 Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o. Para preencher cada linha, considere sempre o número inicial.

Número inicial	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	$2{,}5$	b
Adicione 2	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	$2+\sqrt{2}$	4	$4{,}5$	$b+2$
Eleve ao quadrado	9	4	1	0	$\frac{1}{4}$	1	2	4	$6{,}25$	b^2
Multiplique por 2	-6	-4	-2	0	1	2	$2\sqrt{2}$	4	5	$2b$
Divida por −1	3	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	-2	$-2{,}5$	$-b$

Na atividade **4**, enfatize com os estudantes que nem sempre o conjunto universo da incógnita de uma equação ou inequação é definido no enunciado. Lembre-os de que, quando não há menção ao conjunto universo da incógnita, deve ser considerado o maior possível nas condições da questão.

3 Comprei um carro por R$ 90 000,00. Após cinco meses, ele já havia sofrido uma desvalorização de 4,5%. Que valor o carro passou a ter depois dessa desvalorização? R$ 85 950,00

4 Resolva as equações a seguir.

a) $4x + 11 - 7x = -11$ $S = \left\{\frac{22}{3}\right\}$

b) $5x - (-x + 22) = -4$ $S = \{3\}$

c) $11x - (-3x + 10) = 4x + 2$ $S = \left\{\frac{6}{5}\right\}$

d) $x - \frac{3}{2} + x - \frac{10}{3} = 4$ $S = \{4{,}41\overline{6}\}$

5 Considere o quadro a seguir. *a* e *b* são grandezas diretamente proporcionais; *t* e *u* não são grandezas diretamente proporcionais.

Aproveite esta atividade para retomar com os estudantes quando duas grandezas são diretamente proporcionais e quando são inversamente proporcionais.

x	110	120	130	140
y	55	60	65	70

Esse quadro representa duas grandezas, x e y, diretamente proporcionais. Observe que os valores de x aumentam juntamente com os valores correspondentes de y, de tal forma que, quando calculamos $\frac{y}{x}$, temos um valor constante, que é $\frac{1}{2}$.

Agora, no caderno, indique qual dos quadros a seguir relaciona duas grandezas diretamente proporcionais. Quadro A.

A

a	2	3	4	5
b	3	4,5	6	7,5

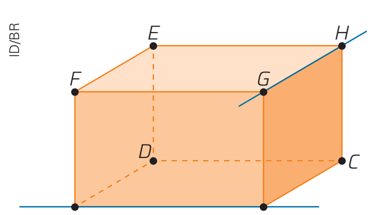
B

t	0,5	1	1,5	2
u	1	1,5	2	2,5

Duas grandezas x e y são **diretamente proporcionais** se existir uma constante $c \neq 0$, tal que $\frac{y}{x} = c$ para cada par de valores correspondentes de x e y.

x e y são **inversamente proporcionais** se existir uma constante $c \neq 0$, tal que $xy = c$ para cada par de valores correspondentes de x e y.

6 Analise o paralelepípedo retângulo representado a seguir e considere as informações apresentadas.



- A, B, C e D são pontos.
- $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{GH}$ são retas.
- $\overline{FE}$ é um segmento de reta.
- $ABGF$ é um retângulo e também uma face do paralelepípedo.

Agora, responda.

a) Que outros pontos estão destacados nesse sólido geométrico? E, F, G, H.

b) Sabendo que os pontos marcados são todos os vértices do paralelepípedo, quantos vértices tem esse sólido geométrico? Oito vértices.

c) Que outros segmentos de reta você identifica como arestas desse sólido geométrico? $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{BG}$, $\overline{CH}$, $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$.

d) Quantas arestas tem esse sólido geométrico? Doze arestas.

e) Quantas faces esse paralelepípedo tem? Seis faces.

Esta seção apresenta problemas não convencionais, que exigem dos estudantes as habilidades de leitura e mobilização de informações. Observe nos dois problemas a presença do raciocínio "Se *A* e *B*, então *C*":
1. Se o açougueiro vai sempre a pé para o trabalho e Pereira e Oliveira se revezam levando um ao outro para o trabalho, **então** o açougueiro não pode ter o nome Pereira nem Oliveira.
2. Se na primeira linha do quadrado 4 × 4 já estão os números 1 e 4 e o número 2 não pode ser repetido na terceira coluna, **então** o número 2 deve ocupar a segunda posição da primeira linha e o número 3, a terceira posição dessa linha.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Esta seção aparece sempre ao final de cada capítulo. Nela, você encontra problemas – nem sempre relacionados com os conceitos abordados neste capítulo – que dependem do uso do raciocínio lógico para serem resolvidos e em que, muitas vezes, não é preciso fazer cálculos.

1 **Pereira, Oliveira, Silva e Santos são quatro homens com uma das seguintes ocupações: açougueiro, bancário, padeiro e policial.** Pereira é bancário, Oliveira é padeiro, Silva é açougueiro e Santos é policial.

Utilizando as informações a seguir, descubra qual é a ocupação de cada homem.

I. Pereira e Oliveira são vizinhos e se revezam levando um ao outro para o trabalho.
II. Oliveira ganha mais dinheiro que Silva.
III. Pereira vence Santos, regularmente, no boliche.
IV. O açougueiro vai sempre a pé para o trabalho.
V. O policial não mora perto do bancário.
VI. A única vez que o padeiro encontrou o policial foi quando este o multou por excesso de velocidade.
VII. O policial ganha mais dinheiro que o bancário e que o padeiro.

2 **O quadrado 4 × 4 a seguir representa um mini-sudoku, um jogo de raciocínio e lógica. O objetivo é completar todos os espaços utilizando números naturais de 1 a 4. Não pode haver números repetidos nas linhas horizontais nem nas linhas verticais, assim como os números não podem se repetir nos quatro quadrados 2 × 2 em destaque.** $x + y = 4$

1	////	////	4
////	////	2	////
////	3	x	////
////	////	////	y

Sabendo que x e y são os valores obtidos nos espaços marcados da figura, quando se completa o mini-sudoku segundo as regras estabelecidas, calcule $x + y$.

PALAVRAS-CHAVE

Nesta seção, a ideia é retomar o que você aprendeu neste capítulo. A proposta é que você saiba quais são as ideias centrais estudadas.

Os termos a seguir apresentam as principais ideias abordadas neste capítulo:

- Números
- Reta real
- Dízima periódica
- Intervalos

Esta é a primeira vez que a seção *Palavras-chave* aparece neste volume. Sua função é promover a avaliação em três aspectos:
1. Como avaliação formativa, possibilita acompanhar as aprendizagens dos estudantes pelas evidências trazidas em seus resumos, para que, com base nesse acompanhamento, sejam planejadas eventuais retomadas coletivas ou direcionadas a determinados estudantes.
2. Como autoavaliação, permite que cada estudante se conscientize do que aprendeu e do que falta aprender.
3. Como novo momento de aprendizagem, possibilita aos estudantes identificar a importância de rever os conteúdos abordados neste capítulo e de refletir sobre eles.

Faça um resumo do que você aprendeu sobre esses conceitos. Para isso, releia cuidadosamente o capítulo, destacando os assuntos e as ideias centrais em cada parte. Vá fazendo anotações e verifique se é possível compreender o que está escrito. Depois, inclua exemplos e ilustrações para complementar seu texto.

Ao final, converse com os colegas sobre o quanto você aprendeu ao revisar este capítulo.

MATEMÁTICA E INCLUSÃO

O objetivo principal desta seção é trabalhar textos que mostrem como a Matemática se associa a outras áreas do conhecimento. Na parte **1** do Manual do Professor, há mais informações sobre essa temática. Se julgar conveniente, convide um professor da área de Linguagens e suas Tecnologias e um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para participar das discussões com a turma. Essa proposta pode auxiliar o desenvolvimento da competência específica **1** da área de Linguagens e suas Tecnologias, das competências específicas **5** e **3** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e das competências gerais **2**, **4**, **9** e **10** propostas pela BNCC, pois exercita a curiosidade intelectual, apresenta o braile como uma linguagem diferente e permite que os estudantes pratiquem a empatia, promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

Matemática para todos

Você já se perguntou como uma pessoa cega ou com baixa visão pode aprender e ensinar Matemática no dia a dia? Leia o texto a seguir e, depois, converse com os colegas e o professor.

Matemática para alunos cegos

Novas tecnologias desenvolvidas na UFRJ ampliam o acesso de estudantes com deficiência visual à disciplina, inclusive no ensino superior

O número de estudantes cegos nas escolas públicas vem aumentando nos últimos anos como resultado das recentes leis de inclusão do Brasil. Mas grande parte desses estudantes está excluída do processo de ensino-aprendizagem em muitas disciplinas, em particular na matemática. Os principais entraves são a leitura, a manipulação e a escrita de símbolos matemáticos. Felizmente, hoje já é possível minimizar essas dificuldades, com ajuda da tecnologia de computação e aplicação de técnicas pedagógicas.

Um pouco de história


Bridgeman Images/Easy Mediabank

Nicholas Saunderson (1682-1739).

Hoje são muitas as pessoas com deficiência visual formadas em diferentes áreas, graças à tecnologia. Qual seria a razão, então, de tão poucos cegos estarem em cursos ligados à matemática? O raciocínio da disciplina seria incompatível com as restrições impostas pela cegueira? Afinal, a matemática é baseada em um processo interativo de leitura e manipulação de símbolos, onde a visão é parte essencial, e o significado de uma expressão matemática não é facilmente traduzido em palavras.

Há exemplos que desmentem essa afirmação. Talvez o mais impressionante seja o do matemático inglês Nicholas Saunderson (1682-1739), que viveu em uma época em que não havia tecnologia de escrita para cegos. Mesmo assim, ele é considerado um dos maiores matemáticos da história – ocupou na Universidade de Cambridge (Reino Unido) a posição de Professor Lucasiano [...]. Mas Saunderson era um superdotado, formulava e resolvia equações complexas de cabeça. Uma pessoa cega, com capacidade intelectual comum, precisa de técnicas especiais de escrita e leitura para desenvolver sua habilidade matemática.

A matemática em Braille

Sergio Ranalli/Pulsar Imagens

Pessoa lendo em braile.

Foi só em 1824 que Louis Braille, um estudante cego, desenvolveu um sistema eficaz de escrita e leitura autônoma para pessoas com deficiência visual. O método Braille, que usa símbolos em relevo resultantes da combinação de pontos dispostos em duas colunas e três linhas, permite que o cego escreva e leia textos e, com pequenas adaptações, transcreva símbolos musicais e expressões matemáticas simples.

Entretanto, à medida que a complexidade aumenta e os elementos matemáticos não ficam todos em uma mesma linha (como frações, potências, raízes), é necessário introduzir componentes inexistentes na fórmula original transcrita. Somente assim, é possível manter os símbolos Braille lado a lado – algo essencial para leitura fluente com os dedos. [...]

Durante mais de cem anos, essa foi a única alternativa. E apenas nas escolas especializadas, dedicadas exclusivamente ao ensino fundamental, com professores habilitados para utilizar escrita matemática Braille. Mas isso não acontecia nas instituições de ensino regulares.

Oriente os estudantes na realização da atividade **2** e proponha que conversem com o professor de Sociologia para enriquecer o momento de roda de conversa. Com isso, é possível destacar o papel da Matemática para a cidadania e da educação para os direitos humanos. É interessante que os estudantes percebam, entre outros pontos, que o fato de haver diferentes tecnologias, como livros didáticos, *sites* e aplicativos, não garante que elas sejam utilizadas por todos de maneira adequada. Nesse momento, os estudantes podem identificar de que modo os conhecimentos matemáticos podem ser transmitidos com o auxílio de aplicativos e *softwares*, como os indicados no boxe Para explorar.

Novas perspectivas

Com a popularização do computador, tecnologias foram desenvolvidas nos Estados Unidos, mas não puderam ser adotadas no Brasil. Por aqui, em 1993, o *software* Dosvox – desenvolvido pelo Núcleo de Computação Eletrônica (NCE) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) – ampliou o uso do computador para cegos, para leitura e escrita, mas pouco oferecia quando o assunto era matemática.

Em 2017, a Lei Brasileira de Inclusão levou milhares de cegos às universidades. A minoria que ingressou em cursos de exatas e tecnológicas enfrentou imensas dificuldades. Era urgente desenvolver soluções. Simplificando, havia dois problemas para o aluno cego:

1. Escrever matemática no computador, com ferramentas simples, usando uma escrita linear (algo semelhante ao que os programadores fazem quando criam programas convencionais em um editor de textos de linhas de comando).
2. Ler um texto matemático escrito por ele próprio ou por outras pessoas, traduzindo o texto criado para uma fala que o representasse de forma clara.

[...]

Incentive os estudantes a utilizar os recursos digitais acessíveis e a explorar os aplicativos de reconhecimento de voz e os dispositivos de navegação adaptados. Solicite que avaliem as dificuldades que tiveram ao utilizar os aplicativos. Os livros digitais acessíveis e os aplicativos de acessibilidade são materiais fundamentais para pessoas cegas ou com baixa visão, pois proporcionam autonomia na busca por conhecimento. Além disso, a abordagem de temas relacionados à diversidade e à acessibilidade favorece a conscientização sobre as necessidades dessas pessoas e sobre os desafios que elas enfrentam, incentivando uma cultura mais inclusiva e respeitosa.

Próximos passos

Graças à tecnologia de computação e a dispositivos de reprodução específicos, abriram-se novas perspectivas para o ensino de matemática a cegos, inclusive no nível superior. As barreiras agora são o domínio dessas ferramentas pelos professores. Felizmente, mecanismos para disseminação dessas técnicas, principalmente via educação a distância, prometem capacitar os docentes para o ensino de matemática com o nível esperado para todos os brasileiros. Com ou sem deficiência.

Borges, José Antonio; Borges, Pedro Paixão. Matemática para alunos cegos. *Ciência Hoje*, Rio de Janeiro, out. 2018. Disponível em: https://cienciahoje.org.br/artigo/matematica-para-alunos-cegos/. Acesso em: 2 jul. 2024.

Após a leitura dos textos, proponha aos estudantes que reflitam sobre a importância de todas as pessoas conhecerem a linguagem braile, não apenas as pessoas com deficiência visual.

PARA EXPLORAR

Site

Projeto Dosvox. Disponível em: http://intervox.nce.ufrj.br/dosvox/. Acesso em: 2 jul. 2024.

Acesse a página para descobrir mais sobre o Dosvox e de que maneira ele pode contribuir para o ensino e a aprendizagem de pessoas cegas ou com baixa visão.

Aplicativo

Be My Eyes. Disponível em: https://www.bemyeyes.com/language/portuguese-brazil. Acesso em: 2 jul. 2024.

Por meio desse aplicativo, pessoas que enxergam podem descrever tarefas do cotidiano para pessoas que não enxergam. Dessa forma, é possível ajudar alguém a estudar, por exemplo.

Proponha aos estudantes que façam uma pesquisa sobre criação de *podcasts*, identificando os principais elementos desse tipo de conteúdo em áudio.
Para complementar a discussão, sugira a eles que desenvolvam projetos sobre o tema, como: panfletos informativos sobre a necessidade de adaptação de diferentes espaços para pessoas cegas ou com baixa visão; campanha publicitária incentivando a contratação de pessoas cegas ou com baixa visão no mercado de trabalho; *performance* sobre as dificuldades encontradas por essas pessoas no dia a dia; página na internet para divulgar os nomes dos atletas que mais se destacam no esporte paraolímpico no Brasil; aplicativo que facilite o ensino de Matemática para estudantes. Se necessário, sugira a eles a página a seguir, em que há um texto explicativo sobre o sistema braile e diversos materiais de referência para a produção de conteúdos para pessoas cegas ou com baixa visão: Instituto Benjamin Constant (IBC). O sistema braille. IBC, 24 fev. 2022. Disponível em: https://www.gov.br/ibc/pt-br/pesquisa-e-tecnologia/materiais-especializados-1/livros-em-braille-1/o-sistema-braille. Acesso em: 29 jul. 2024.

Ao propor as atividades **1** e **2**, o objetivo é que os estudantes despertem seu potencial pessoal nas tomadas de decisões e exerçam a empatia ao trabalhar em equipe. Assim, é esperado que eles se enturmem e participem ativamente dos processos propostos para resolvê-las, uma vez que será necessário buscar informações sobre o tema, organizar as tarefas do grupo, dialogar com os colegas, manifestar opiniões, ter assertividade e assumir a liderança para concluir cada etapa que eles definiram ser necessárias. É importante avaliar se os estudantes se envolveram com entusiasmo, demonstrando interesse pelo tema e empolgação pela produção do *podcast*, e, assim, desenvolvam a autoconfiança.

Conectando ideias

1 **Pesquise sobre o funcionamento do sistema braile e como se realiza a transcrição da linguagem matemática para esse sistema.**

2 **A tecnologia é essencial para a inclusão de pessoas cegas ou com baixa visão, pois pode proporcionar a elas acesso a recursos educacionais e mais autonomia na rotina diária.**

Mas de que modo as tecnologias acessíveis impactam a educação, o bem-estar e a qualidade de vida dessas pessoas?

- Organizem-se em grupos de quatro integrantes para pesquisar a importância e as limitações dessas tecnologias específicas. Depois, produzam um *podcast* sobre essas temáticas.
- Disponibilizem o *podcast* em uma plataforma e divulguem para os demais grupos, os colegas de outras turmas e a comunidade escolar. Ouçam os *podcasts* produzidos pelos outros grupos.
- Por fim, em uma roda de conversa, discutam os principais pontos apresentados por todos.

Você enfrentou os desafios dessas duas atividades com entusiasmo e energia? Resposta pessoal. As respostas dos estudantes à essa atividade apresentam evidências da competência socioemocional autoconfiança.

ESTATÍSTICA: DADOS, VARIÁVEIS E GRÁFICOS

CAPÍTULO 2

NESTE CAPÍTULO

- A linguagem da Estatística
- Representação de dados estatísticos
- Erros e enganos em gráficos

MULHERES NA POLÍTICA

Ao trabalhar o tema de abertura deste capítulo e os dados do infográfico apresentado a seguir os estudantes têm a oportunidade de exercitar a curiosidade intelectual, o que contribui para o desenvolvimento da competência geral **2**.

A representatividade das mulheres na política é uma pauta de extrema relevância, visto que o crescimento da participação feminina nessa área pode proporcionar impactos significativos nas políticas públicas e no desenvolvimento de uma sociedade mais justa e equitativa. Contudo, é fundamental reconhecer que, apesar dos avanços ocorridos nas últimas décadas, como a implantação do sistema de cotas nas eleições, a representatividade feminina na política ainda é baixa no atual cenário brasileiro.

Verifique, no infográfico a seguir, alguns dados relacionados à presença das mulheres nas eleições de 2022 no Brasil.

Precursoras da política brasileira

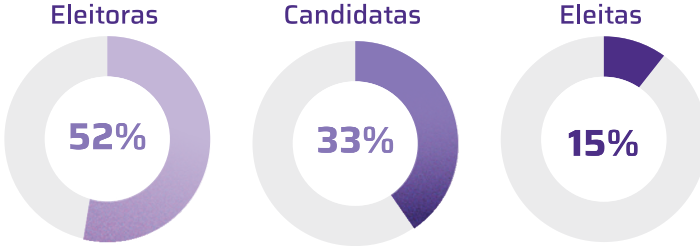
O objeto digital apresenta informações sobre 10 mulheres que foram pioneiras em diversos momentos da história política do Brasil.

Se julgar conveniente, proponha um trabalho em parceria com um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas sobre a trajetória das mulheres na política.

Participação das mulheres nas eleições gerais, no Brasil, em 2022

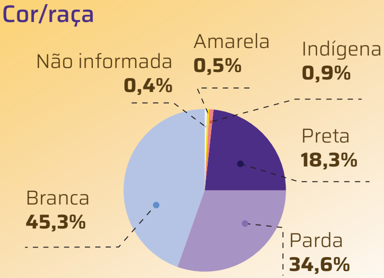
Luiz Iria/ID/BR

Percentual de mulheres por categoria nas eleições gerais de 2022



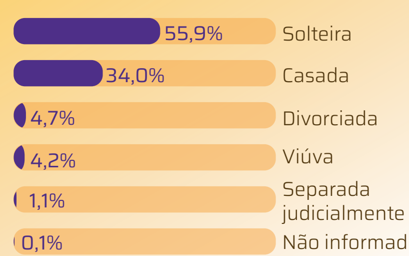
Perfil das candidatas nas eleições gerais de 2022 (%)

Cor/raça

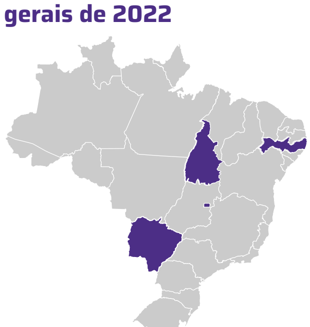


Perfil das eleitoras nas eleições gerais de 2022 (%)

Estado civil



Unidades da federação com senadoras eleitas nas eleições gerais de 2022



Quantidade de unidades da federação com **senadoras** eleitas:

3 estados e o Distrito Federal

Mato Grosso do Sul, Pernambuco, Tocantins e Distrito Federal

Unidades da federação com governadoras eleitas nas eleições gerais de 2022

Quantidade de unidades da federação com **governadoras** eleitas:

2 estados

Pernambuco e Rio Grande do Norte

Fonte de pesquisa: Tribunal Superior Eleitoral (TSE). Estatísticas. *TSE Mulheres*. Brasília, DF, [20--]. Disponível em: https://www.justicaeleitoral.jus.br/tse-mulheres/# estatisticas. Acesso em: 19 jun. 2024.

Não escreva no livro.

Como foi visto no capítulo 1, os dados numéricos estão presentes o tempo todo em nosso cotidiano e podem ter uma infinidade de aplicações.

No caso dos dados representados no infográfico anterior, eles podem ser utilizados, por exemplo, por instituições governamentais para acompanhar e direcionar recursos e investimentos que possam contribuir para políticas públicas que visem ao crescimento da participação feminina na política.

Ao ler esse conjunto de dados, podemos nos questionar: "Como foram obtidos?"; "Por que foram registrados dessa maneira?". Para responder a essas e outras questões, vamos nos aprofundar neste capítulo, e também no capítulo 10 deste volume, em algumas ideias da Estatística, com foco na análise de dados.

A LINGUAGEM DA ESTATÍSTICA

A **Estatística** é a área da Matemática que trata da coleta de dados sobre uma população e da organização e análise desses dados. Nesse caso, **população** refere-se ao conjunto de elementos a serem observados e **indivíduo** é todo elemento da população.

O profissional que atua na área de Estatística é o **estatístico**. Saiba mais sobre essa ocupação, lendo o texto a seguir.

[...] Sua função é coletar, organizar e interpretar dados com o objetivo de chegar a conclusões ou fazer previsões sobre determinado assunto. [...]

"O estatístico atua como um detetive: ele analisa uma grande variedade de dados em busca de pistas ou evidências sobre um determinado assunto", explica o estatístico José Matias de Lima [...]. E, para isso, ele conta com a estatística, parte da matemática que estuda os processos para obter, organizar e analisar dados sobre uma população e as maneiras de tirar conclusões ou prever o que pode acontecer no futuro baseado nesses dados.

O estatístico faz pesquisas, coleta dados e analisa informações com diferentes objetivos e em várias áreas. Ele pode, por exemplo, fazer pesquisas de opinião para saber, no ano em que há eleição, em qual candidato a maioria das pessoas está pensando em votar e que, portanto, deve vencer. Mas, para isso, não precisa perguntar a opinião de cada eleitor! O estatístico seleciona um grupo de eleitores, é a chamada amostra – que, como a sociedade, reúne gente de diferentes classes sociais, idade, sexo, profissão. Pede que respondam a um questionário, organiza as informações e as analisa. "A seguir, generaliza os resultados obtidos na amostra de eleitores para toda a população", diz José Matias.

Usando esse mesmo método, o estatístico pode conseguir informações sobre as preferências das pessoas em relação a um produto – o que é precioso para a indústria! Se ele descobrir, por exemplo, que os consumidores gostariam de ter um tênis que brilha no escuro, a empresa lançaria um modelo assim. [...]

[...]

Na área de saúde, esse profissional pode usar pesquisas para definir o número de pessoas que têm determinada doença e alertar sobre riscos de epidemia. "Por meio desses dados, o governo identifica onde é mais importante investir em saúde, educação, habitação, transportes", explica Matias.

COELHO, Sarita. Quando crescer, vou ser... estatístico! *Ciência Hoje das Crianças*, Rio de Janeiro, ano 15, n. 125, 15 jun. 2002.

Incentive os estudantes a ler o texto ao lado. Isso vai ajudá-los a valorizar a diversidade de experiências e a compreender as relações do que está sendo estudado com o mundo do trabalho, o que contribui para o desenvolvimento da competência geral **6**.

PARA EXPLORAR

Livro

IMENES, Luiz Marcio P.; JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. *Estatística.* São Paulo: Atual, 2010 (Coleção Pra que Serve Matemática?).

Esse livro ajudará você a reconhecer como a Estatística é utilizada em diversas situações sociais e econômicas.

Site

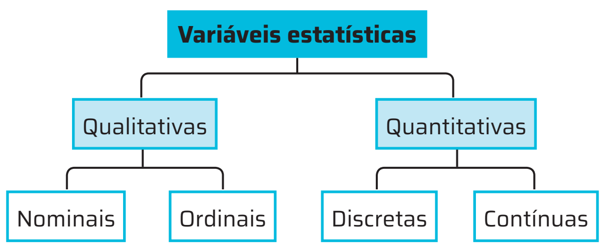
IBGE Educa. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/. Acesso em: 4 jul. 2024.

Para entender um pouco melhor o papel da Estatística, consulte esse *site* do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), voltado para estudantes e professores. Nele, você encontra textos, tabelas e gráficos com dados atualizados sobre a população e a economia do Brasil, apresentados de maneira lúdica, bem como dicas sobre publicações da área, mapas e outras informações.

Em um estudo estatístico, primeiro define-se a pesquisa a ser feita, os dados a serem coletados, a maneira como esses dados serão organizados e o modo como serão analisadas as variáveis, a fim de que seja possível descrever a situação investigada.

Cada um dos dados coletados está relacionado a uma **variável estatística**. Existem dois tipos de variáveis estatísticas, e cada uma delas pode ser classificada de dois modos:

- **Qualitativas**: indicam qualidades do fato observado, como classe social e fruta preferida.
  - **Nominais**: não apresentam relação de ordem. Por exemplo: cor da pele, gênero e nacionalidade.
  - **Ordinais**: apresentam relação de ordem, como escala de massa, na qual são usadas as classificações “leve”, “médio” ou “pesado”; escala de dor, na qual são usadas as classificações “pouca dor”, “dor suportável”, “dor insuportável”.
- **Quantitativas**: indicam quantidades do fato observado. Por exemplo: altura, número de irmãos e massa corporal.
  - **Discretas**: seus valores podem ser ordenados de modo que entre dois valores consecutivos não exista nenhum outro; ou seja, essas variáveis só podem assumir valores pertencentes a um conjunto enumerável de elementos, como gols de um jogo de futebol, idade em anos e número de filhos.
  - **Contínuas**: podem assumir qualquer valor em certo intervalo. Por exemplo: tempo que um atleta leva para correr 100 m, massa de um indivíduo e variação de temperatura.



REPRESENTAÇÃO DE DADOS ESTATÍSTICOS

A representação de dados em Estatística tem como objetivo sintetizar os valores que uma ou mais variáveis podem assumir, facilitando, assim, a percepção de sua variação. As principais maneiras de expressar dados estatísticos são por meio de tabelas e de gráficos.

Tabelas

O trabalho realizado no tópico “Representação de dados estatísticos” permite o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT102**, ao explorar dados estatísticos representados em tabelas e gráficos. Assim, por meio desses recursos, os estudantes podem interpretar informações de natureza científica e social.

As tabelas resumem um conjunto de dados e apresentam alguns elementos característicos. Verifique, no exemplo a seguir, cada um desses elementos.

1. **Título**: indica o assunto da tabela.
2. **Cabeçalho**: fornece mais informações sobre o tema apresentado na tabela.
3. **Linhas indicadoras**: especificam o conteúdo das colunas.
4. **Corpo**: reúne os dados da tabela.
5. **Fonte**: indica onde os dados tabulados foram coletados ou quem os obteve. Aparece sempre no rodapé da tabela. Em alguns casos, indica também o veículo de comunicação do qual a tabela ou o gráfico foi extraído.

1 **POPULAÇÃO MUNDIAL E DAS PRINCIPAIS REGIÕES**

2 **Projeção populacional média para 2030, 2050 e 2100**

3 **Região**	**População (em milhões)**		
	2030	2050	2100
Mundo	8546	9709	10349
África	1710	2485	3924
Ásia	4958	5292	4674
Europa	736	703	586
América do Norte	393	421	448
Oceania	49	57	68

4

5 Fonte de pesquisa: United Nations. Department of Economic and Social Affairs. *World population prospects 2022*. [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://population.un.org/wpp/Download/. Acesso em: 4 jul. 2024.

Gráficos

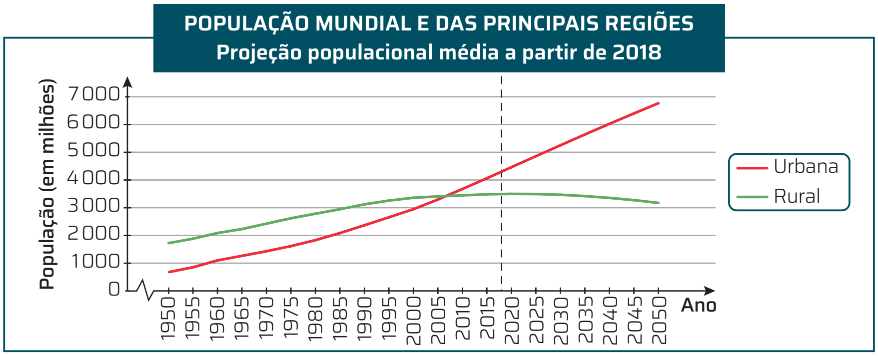
Embora as tabelas auxiliem na representação e na interpretação de dados, em algumas delas o excesso de informações pode dificultar a identificação clara dos aspectos centrais do levantamento estatístico. Isso pode ser resolvido pelo uso de gráficos.

O gráfico estatístico apresenta recursos visuais que tornam atraente a divulgação dos dados de uma pesquisa, possibilitando ao leitor compreender e comparar esses dados rapidamente.

A finalidade de um gráfico, portanto, é comunicar informações visualmente. Há diversos tipos e podem estar presentes na internet, em jornais, em revistas e até em noticiários da televisão.

Gráfico de linhas ou curvas

Em um gráfico de linhas ou curvas, os dados estatísticos são representados por meio de pontos que são ligados por linhas para facilitar a visualização. Esse tipo de gráfico é muito empregado na identificação de tendências de aumento ou de diminuição dos valores numéricos de uma informação, como neste exemplo.



ID/BR

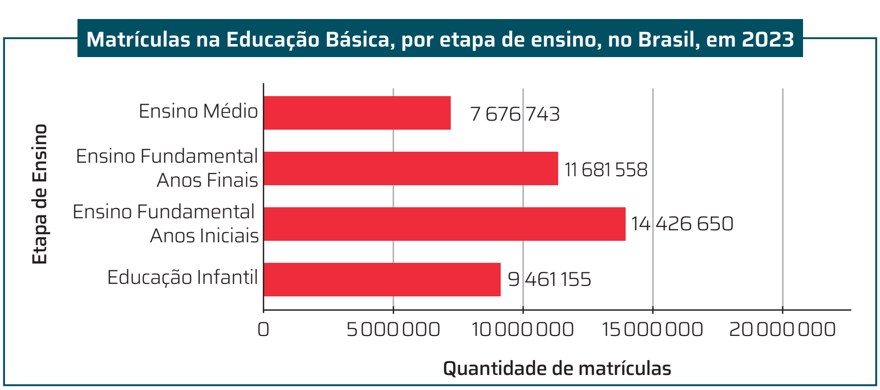
Se considerar pertinente, comente com os estudantes que o símbolo no eixo horizontal do gráfico indica que uma parte desse eixo foi omitida.

Fonte de pesquisa: United Nations. Department of Economic and Social Affairs. *World population prospects*: the 2018 revision. [*S. l.*], 2024. File 3; file 4. Disponível em: https://population.un.org/wup/Download/. Acesso em: 4 jul. 2024.

Nesse gráfico, os dados representados à direita da linha tracejada vertical correspondem a uma projeção da quantidade de habitantes das populações urbana e rural no mundo a partir de 2018, pois, na fonte de pesquisa, foram apresentados os dados até esse ano.

Gráfico de barras

Nesse tipo de gráfico, os dados são representados por figuras retangulares (ou blocos retangulares) dispostos vertical ou horizontalmente.

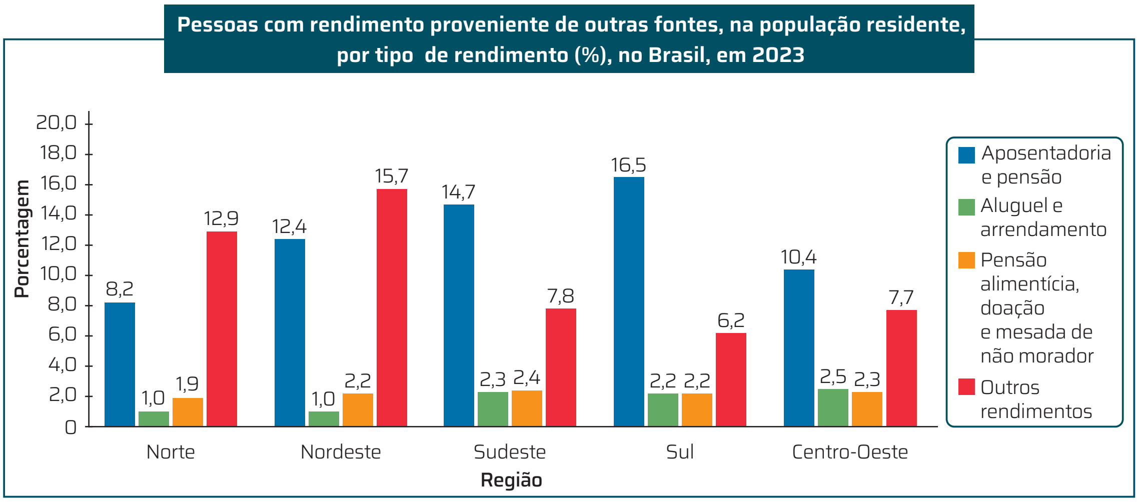


ID/BR

Fonte de pesquisa: Brasil. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). *Sinopses estatísticas da Educação Básica 2023*. Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/acesso-a-informacao/dados-abertos/sinopses-estatisticas/educacao-basica. Acesso em: 4 jul. 2024.

O **gráfico de barras múltiplas** é uma variação do gráfico de barras e geralmente é empregado quando se quer comparar dois ou mais fenômenos em uma mesma representação visual.

No gráfico a seguir, por exemplo, cada barra vertical representa a porcentagem de pessoas que recebiam outro tipo de renda que não fosse o salário, em cada região do Brasil, em 2023.



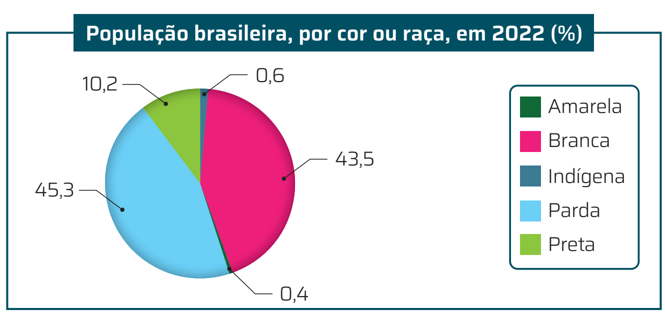
Fonte de pesquisa: Cabral, Umberlandia Alves. Em 2023, massa de rendimentos e rendimento domiciliar *per capita* atingem recorde. *Agência IBGE Notícias*, Rio de Janeiro, 19 abr. 2024. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/39809-em-2023-massa-de-rendimentos-e-rendimento-domiciliar-per-capita-atingem-recorde. Acesso em: 5 jul. 2024.

Gráfico de setores

O gráfico de setores é constituído de um círculo, que representa o porcentual total dos dados pesquisados, ou seja, 100%. Esse círculo é dividido em **setores circulares**, cujas áreas são proporcionais aos porcentuais dos respectivos dados que representam. Esse tipo de gráfico é adequado para comparar o dado relativo a cada setor com o total, como no exemplo a seguir:

Ao trabalhar o exemplo apresentado, comente com os estudantes que o IBGE pesquisa a cor ou a raça da população brasileira com base na autodeclaração, ou seja, o entrevistado identifica a si mesmo de acordo com uma das cinco opções: amarela, branca, indígena, parda ou preta. Além disso, explique à turma que o quesito cor é pesquisado desde a realização do primeiro censo no Brasil, em 1872, e passou a ser denominado "cor ou raça" apenas a partir de 1991. De acordo com o IBGE, raça é um conceito mais amplo do que cor de pele e outras características físicas e pode estar relacionado a critérios de pertencimento identitário, como origem familiar e etnia.

Fonte de pesquisa: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). *Panorama*: censo 2022. Rio de Janeiro, 2023. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/. Acesso em: 5 jul. 2024.

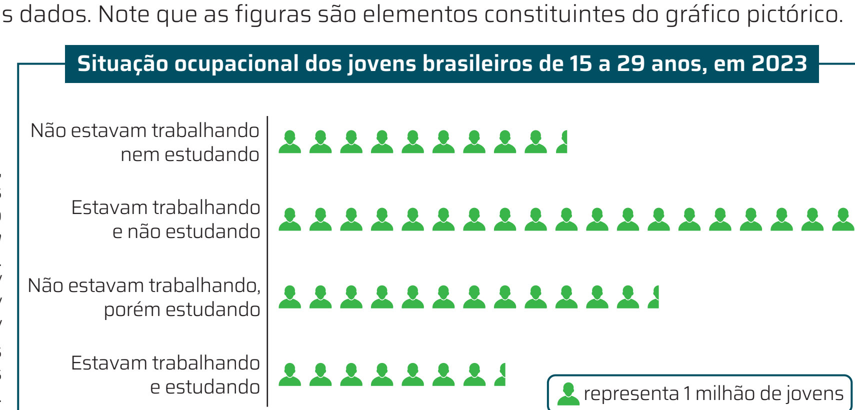


Se considerar oportuno, comente com os estudantes que alguns gráficos de setores não somam 100%, devido a arredondamentos e aproximações realizados.

Pictograma

Nesse tipo de gráfico, utilizam-se figuras ou outros recursos visuais relacionados ao tema da pesquisa para a representação dos dados. Note que as figuras são elementos constituintes do gráfico pictórico.

Fonte de pesquisa: Abdala, Vitor. Um em cinco jovens brasileiros de 15 a 29 anos não estuda nem trabalha. *Agência Brasil*, 22 mar. 2024. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2024-03/um-em-cinco-jovens-brasileiros-de-15-29-anos-nao-estuda-nem-trabalha. Acesso em: 5 jul. 2024.



As variáveis e os tipos de gráfico

Ao representar visualmente os resultados de uma pesquisa estatística, podemos optar por um tipo de gráfico que seja mais apropriado ao tipo de variável.

Para variáveis qualitativas, os gráficos mais indicados são os de barras e os de setores.

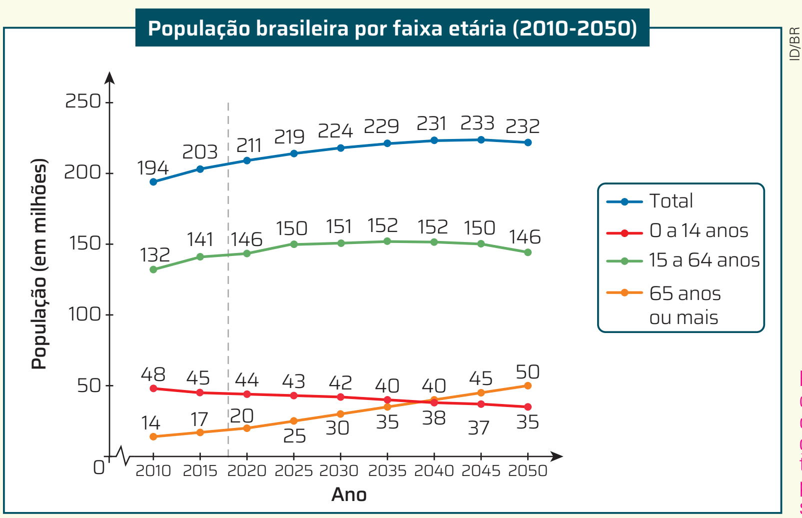
Para variáveis quantitativas, geralmente são utilizados os gráficos de barras ou de linhas, sendo este último mais comum para mostrar a variação dos dados ao longo de determinado período de tempo.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Leia a atividade a seguir e, antes de verificar a resolução, responda às perguntas no caderno. Depois, use a resolução para conferir suas respostas.

R1 **Em 2018, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) publicou alguns estudos sobre o crescimento populacional brasileiro, por faixa etária, desde 2000, e, a partir desse estudo, foi desenvolvida a projeção de crescimento populacional até 2050. De acordo com os dados estatísticos apresentados, é possível perceber que a população brasileira está envelhecendo. Analise-os e responda às questões.**

A temática do crescimento populacional no Brasil é um bom contexto para trabalhar de modo integrado com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo o desenvolvimento da competência específica **1** dessa área. Explique aos estudantes que, de acordo com o Estatuto da Pessoa Idosa, idoso é a pessoa de 60 anos de idade ou mais. No entanto, o IBGE utiliza a faixa etária de 65 anos ou mais para garantir a comparabilidade com pesquisas internacionais que incluem essa mesma faixa etária, como é o caso das pesquisas sobre mercado de trabalho.



Fonte de pesquisa: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). *Projeções da população*. Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9109-projecao-da-populacao.html?edicao=21830. Acesso em: 5 jul. 2024.

Peça aos estudantes que leiam o texto com atenção e dê a eles tempo suficiente para que analisem o gráfico.

a) Qual é o título desse gráfico? E qual é a finalidade do título?

b) Quem é o responsável pela coleta e publicação dos dados apresentados? Que parte do gráfico pode ser consultada para responder a essa questão?

c) O que representa a linha tracejada no gráfico?

d) Em que ano está previsto que a quantidade de brasileiros de 65 anos ou mais supere a quantidade de brasileiros de 0 a 14 anos?

e) A partir de que ano a população de 15 a 64 anos começa a diminuir?

f) É possível afirmar que, em 2070, a quantidade de brasileiros com 65 anos ou mais continuará a crescer? Explique.

Resolução

a) O título do gráfico é: População brasileira por faixa etária (2010-2050). O título descreve o conteúdo do gráfico.

b) O IBGE é responsável pela coleta e publicação desses dados. Essa informação pode ser consultada na fonte de pesquisa do gráfico.

c) Como a pesquisa foi publicada em 2018, a linha tracejada serve para indicar que até esse ano os dados são reais e que, a partir de 2018, referem-se a projeções.

d) Em 2040.

e) A partir de 2045.

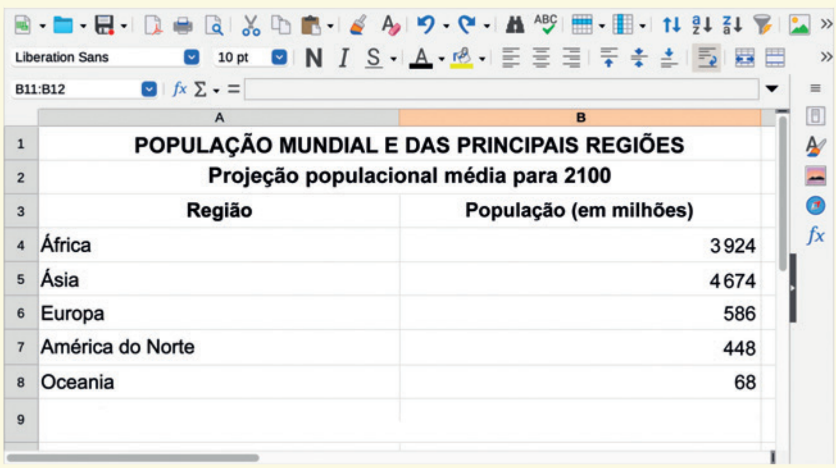
f) Não podemos afirmar nada quanto à quantidade de brasileiros da população em 2070, pois as projeções nesse gráfico só vão até 2050.

TECNOLOGIA

O LibreOffice é um *software* que pode ser baixado gratuitamente. É possível adquirir uma versão confiável do programa no *link* http://pt-br.libreoffice.org (acesso em: 31 jul. 2024). Um de seus aplicativos é a planilha eletrônica Calc, que pode ser utilizada para realizar cálculos e construir tabelas e gráficos.

Acompanhe as etapas de como construir um gráfico de barras horizontais com a planilha eletrônica Calc do LibreOffice. Para isso, utilizamos parte das informações apresentadas na tabela da página 38.

1ª etapa: Representamos na planilha eletrônica a parte da tabela cujo gráfico vamos construir.



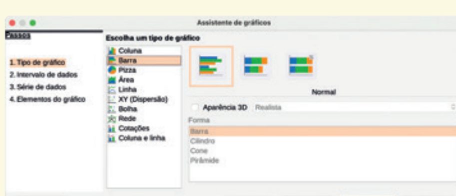
	A	B
1	POPULAÇÃO MUNDIAL E DAS PRINCIPAIS REGIÕES	
2	Projeção populacional média para 2100	
3	Região	População (em milhões)
4	África	3 924
5	Ásia	4 674
6	Europa	586
7	América do Norte	448
8	Oceania	68
9		

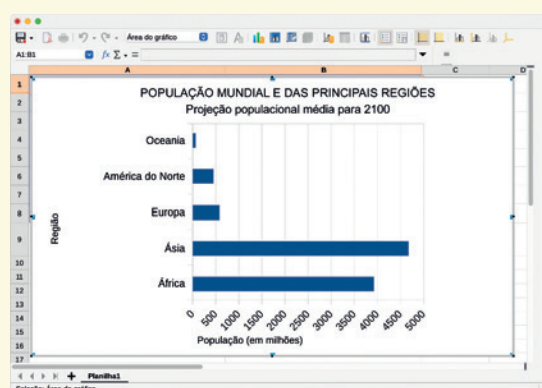
Imagens: LibreOffice/ID/BR

Fonte de pesquisa: United Nations. Department of Economic and Social Affairs. *World population prospects 2022*. [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://population.un.org/wpp/Download/. Acesso em: 4 jul. 2024.

2ª etapa: Selecionamos toda a tabela, clicamos em "Inserir" e, depois, em "Gráfico". No "Assistente de gráficos", selecionamos as opções "Barras" e "Normal" e clicamos em "Finalizar".

Nesse exemplo, foram inseridos o título e o rótulo dos eixos. Para incluir esses elementos, com o gráfico selecionado, clique em "Inserir" e, em seguida, em "Títulos..." e, depois, em "Rótulos de dados..." .





Imagens: LibreOffice/ID/BR

Fonte de pesquisa: United Nations. Department of Economic and Social Affairs. *World population prospects 2022*. [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://population.un.org/wpp/Download/. Acesso em: 4 jul. 2024.

De maneira análoga, podemos construir outros tipos de gráfico, como o de barras verticais, de setores, de linhas, entre outros.

ATIVIDADES

1 **Utilizando a planilha eletrônica Calc, construa:**

a) um gráfico de barras verticais apresentando a projeção populacional média das principais regiões para 2030. Para isso, na 1ª etapa da construção, represente a parte da tabela desejada e, na 2ª etapa, ao abrir o "Assistente de gráficos", selecione as opções "Coluna" e "Normal".

b) um gráfico de linhas apresentando as projeções populacionais médias mundiais para 2030, 2050 e 2100. Para isso, na 1ª etapa da construção, represente a parte da tabela desejada e, na 2ª etapa, ao abrir o "Assistente de gráficos", selecione as opções "Linha" e "Pontos e linhas".

2 **Em sua opinião, a escolha dos tipos de gráfico construídos na atividade 1 foi adequada? Explique.**

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Esta seção de atividades contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT102**, ao explorar a leitura e a interpretação de informações representadas em gráficos.

Nestas atividades, você vai analisar diferentes tipos de gráfico e de tabela, interpretando as informações neles contidas. Retorne ao texto e à atividade resolvida para investigar se eles podem auxiliá-lo.

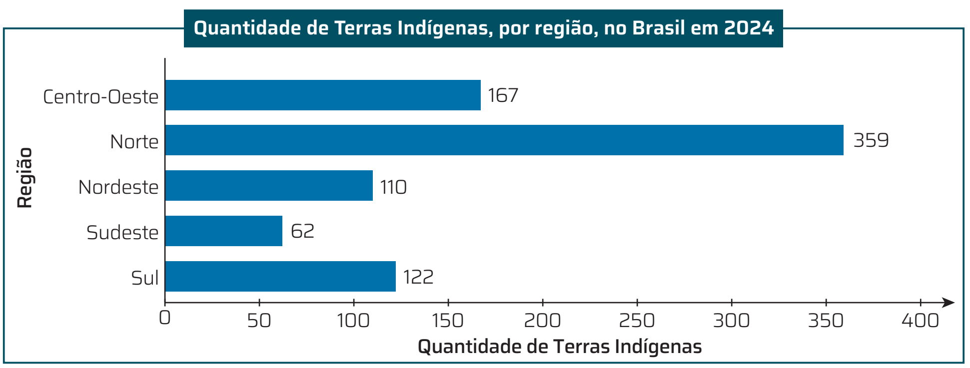
1 **Leia o texto a seguir, que traz a definição sobre Terras Indígenas.**

Terras Indígenas são territórios legalmente demarcados pelo Estado brasileiro. Isso quer dizer que o Estado brasileiro tem por obrigação protegê-los, sendo assim não é permitida a entrada de não indígenas nessas terras, a não ser com a autorização da comunidade indígena ou da Funai.

A Fundação Nacional dos Povos Indígenas é um órgão do Estado brasileiro responsável por proteger e promover os direitos dos povos indígenas.

INSTITUTO SOCIOAMBIENTAL (ISA). Terras Indígenas. *Povos Indígenas no Brasil Mirim*, [20--]. Disponível em: https://mirim.org/pt-br/terras-indigenas. Acesso em: 5 jul. 2024.

Agora, verifique neste gráfico a quantidade de Terras Indígenas existentes no Brasil, em 2024.



Fonte de pesquisa: INSTITUTO SOCIOAMBIENTAL (ISA). *Informações gerais sobre Terras Indígenas no Brasil*. [*S. l.*], 2019. Disponível em: https://terrasindigenas.org.br/pt-br/brasil. Acesso em: 5 jul. 2024.

Estas atividades permitem um trabalho integrado com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo o desenvolvimento da competência específica **1** dessa área. Para complementar, proponha uma pesquisa sobre a importância da demarcação das Terras Indígenas para as populações que nelas habitam. Comente com os estudantes que a proteção aos limites desses territórios contribui para a preservação do meio ambiente, pois diminui ou até evita a prática de atividades exploratórias, como o desmatamento.

a) Qual é o título do gráfico?

b) Que assunto é representado por esse gráfico?

c) Podemos afirmar que a variável correspondente às regiões é quantitativa? Por quê?

d) Considerando a época da pesquisa, qual região apresentava a maior quantidade de Terras Indígenas?

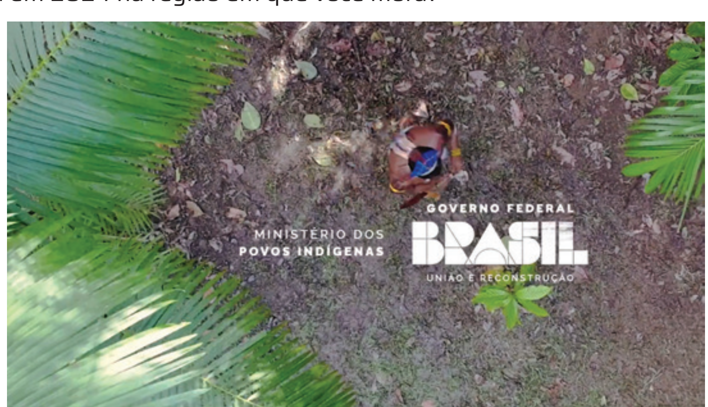
e) Quantas Terras Indígenas a Região Nordeste tinha a menos que a Região Sul nessa pesquisa?
A Região Nordeste tinha 12 Terras Indígenas a menos que a Região Sul.

f) O que representa o número 167 no gráfico?

g) No caderno, represente os dados do gráfico em uma tabela.

h) Quantas Terras Indígenas havia em 2024 na região em que você mora?

i) Em 19 de abril de 2024, dia em que são celebradas a riqueza e a diversidade dos povos indígenas no Brasil, o governo federal lançou a campanha Brasil Terra Indígena, com o lema "Terra indígena é terra de cuidado, de preservação, de diversidade, de cultura. E isso é bom para todos". Reflita sobre o lema dessa campanha e converse com os colegas sobre a importância de valorizar e de respeitar os povos indígenas.

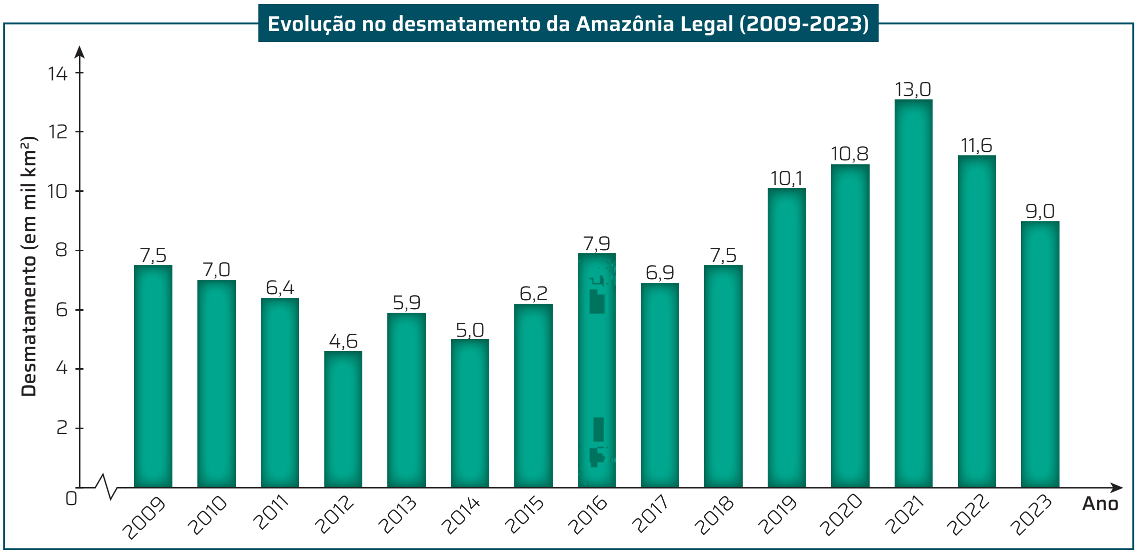


Secretaria de Comunicação (Secom) da Presidência da República/ Ministério dos Povos Indígenas

Cena de vídeo da campanha Brasil Terra Indígena, lançada pelo governo federal em 2024.

Após a resolução do item **i**, organize uma roda de conversa, a fim de que os estudantes compartilhem suas respostas. Aproveite o debate sobre a importância de valorizar e de respeitar os povos indígenas para comentar com a turma sobre a relação entre o modo de vida desses povos e a preservação ambiental. Momentos como esse podem desenvolver a conscientização dos estudantes sobre a responsabilidade de cada indivíduo na construção de um futuro sustentável, em que os recursos naturais e a diversidade cultural sejam preservados.

2 **Analise o gráfico a seguir e, depois, resolva as questões.** **2. d)** O desmatamento da Amazônia Legal diminuiu.



Fontes de pesquisa: Taxa de desmatamento na Amazônia cai 22,3% em um ano. Ministério do Meio Ambiente e Mudança do Clima, 14 nov. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/mma/pt-br/taxa-de-desmatamento-na-amazonia-cai-22-3-em-2023; Brasil. Ministério do Meio Ambiente e Mudança do Clima. Taxa de desmatamento: Amazônia Legal. Disponível em: http://educaclima.mma.gov.br/wp-content/uploads/2019/12/50b3-desmatamento-Amaz%C3%B4nia-at%C3%A9-2019.png. Acessos em: 6 jul. 2024.

a) Quais são as grandezas utilizadas no gráfico?

b) No intervalo de 2009 a 2023, em que ano o desmatamento atingiu o menor nível?

c) No gráfico, o número 7,5 ocorre duas vezes. Explique o significado dessa repetição.

d) De 2021 a 2023, o desmatamento da Amazônia Legal diminuiu ou aumentou?

e) Reúna-se com um colega para construir, em uma planilha eletrônica, um gráfico de linha que represente as informações sobre a evolução no desmatamento da Amazônia Legal.

f) Faça uma pesquisa para descobrir qual é a área do município onde você vive e compare-a às áreas desmatadas na Amazônia a cada ano, de acordo com esse gráfico. Registre suas conclusões no caderno.

3 **De acordo com o gráfico da atividade anterior, 9 mil km² da área da Amazônia Legal foram desmatados em 2023. Sabendo que um campo de futebol tem dimensões de 70 m por 110 m, responda:**

a) A quantos campos de futebol como esse equivale a área desmatada na Amazônia Legal em 2023?
A aproximadamente 1 168 831 campos de futebol.

b) Nesse ano, quantos campos de futebol como esse foram desmatados a cada 10 minutos?
Aproximadamente 22 campos de futebol.

4 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Em uma corrida de regularidade, cada corredor recebe um mapa com o trajeto a ser seguido e uma tabela indicando intervalos de tempo e distâncias entre postos de averiguação. O objetivo dos competidores é passar por cada um dos postos de averiguação o mais próximo possível do tempo estabelecido na tabela. Suponha que o tempo previsto para percorrer a distância entre dois postos de verificação consecutivos seja sempre de 5 min 15 s, e que um corredor obteve os seguintes tempos nos quatro primeiros postos.

	1º posto	**2º posto**	**3º posto**	**4º posto**	**...**	**Último posto (final do trajeto)**
Tempo previsto	5 min 15 s	10 min 30 s	15 min 45 s	21 min 00 s	...	1 h 55 min 30 s
Tempo obtido pelo corredor	5 min 27 s	10 min 54 s	16 min 21 s	21 min 48 s	...	//////////////////////

Caso esse corredor consiga manter o mesmo ritmo, seu tempo total de corrida será Alternativa **c**.

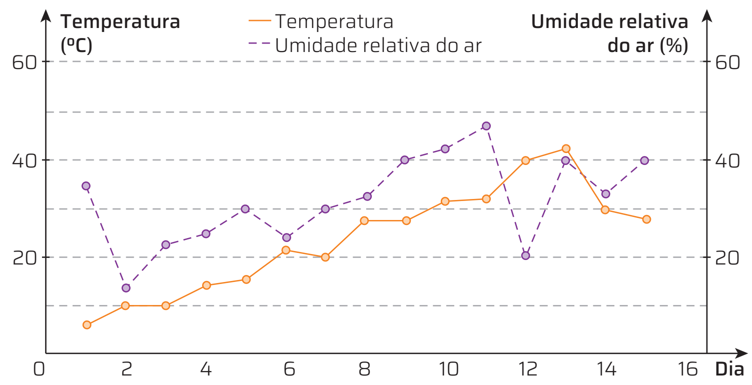
a) 1 h 55 min 42 s.
b) 1 h 56 min 30 s.
c) 1 h 59 min 54 s.
d) 2 h 05 min 09 s.
e) 2 h 05 min 21 s.

5 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Enem) O serviço de meteorologia de uma cidade emite relatórios diários com a previsão do tempo. De posse dessas informações, a prefeitura emite três tipos de alertas para a população:

- Alerta cinza: deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura será inferior a 10 °C, e a umidade relativa do ar for inferior a 40%;
- Alerta laranja: deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura deve variar entre 35 °C e 40 °C, e a umidade relativa do ar deve ficar abaixo de 30%;
- Alerta vermelho: deverá ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura será superior a 40 °C, e a umidade relativa do ar for inferior a 25%.

Um resumo da previsão do tempo nessa cidade, para um período de 15 dias, foi apresentado no gráfico.



Enem. Fac-símile: ID/BR

Decorridos os 15 dias de validade desse relatório, um funcionário percebeu que, no período a que se refere o gráfico, foram emitidos os seguintes alertas: Alternativa **a**.

- Dia 1: alerta cinza;
- Dia 12: alerta laranja;
- Dia 13: alerta vermelho.

Em qual(is) desses dias o(s) aviso(s) foi(ram) emitido(s) corretamente?

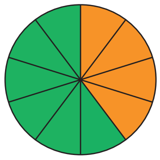
a) 1 b) 12 c) 1 e 12 d) 1 e 13 e) 1, 12 e 13

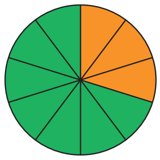
6 **Indique a alternativa correta no caderno.**

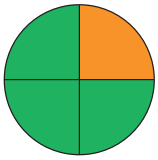
(Insper-SP) Estima-se que 8,9 bilhões de toneladas de plásticos já foram fabricados desde meados do século passado, quando começaram a ser produzidos em escala industrial.

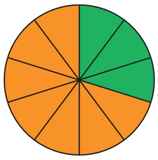
(https://revistapesquisa.fapesp.br, jul. 2019. Adaptado.)

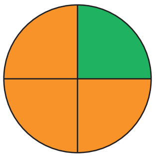
Dessa quantidade de plástico fabricado, parte está em uso e o restante foi descartado, sendo que a quantidade de plástico descartado supera em 3,7 bilhões de toneladas a quantidade de plástico em uso. Assim, o gráfico de setores que melhor representa a quantidade de plástico em uso e descartado é: Alternativa **d**.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Ilustrações: Insper-SP. Fac-símile: ID/BR

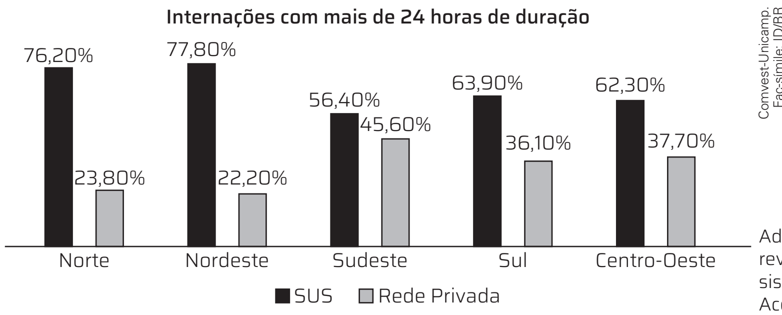
Na atividade **7**, é possível avaliar se os estudantes identificam e interpretam os diferentes tipos de gráfico e se produzem texto em linguagem adequada. Além disso, ao se reunirem em duplas para elaborar um problema, eles desenvolvem a competência geral **9**. Momentos como esse possibilitam aos estudantes exercitar a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.

7 **Reúna-se com um colega para pesquisar diferentes tipos de gráfico em jornais, revistas ou na internet. Tentem obter pelo menos um gráfico de cada tipo estudado. Em seguida, escolham um dos gráficos coletados e elaborem perguntas a serem respondidas com base nas informações que ele representa. Façam uma troca com outra dupla de colegas: vocês respondem as perguntas feitas por eles e eles respondem as de vocês. Depois, uma dupla confere as respostas da outra.** Resposta pessoal.

Incentive os estudantes a buscar gráficos e tabelas que tratem de temas variados. Aproveite o momento para reforçar a importância de eles indicarem de onde as informações foram extraídas e exercitarem o pensamento crítico em relação aos assuntos abordados.

8 Registre no caderno a alternativa correta.

(Comvest-Unicamp) O gráfico a seguir compara, por região, o percentual do número de internações com duração superior a 24 horas, realizadas na rede privada e no SUS (Sistema Único de Saúde) em 2019.



Adaptado de https://revistapesquisa.fapesp.br/sistema-em-construcao/. Acesso em: 14/12/22.

Segundo esse gráfico, é correto afirmar que Alternativa **a**.

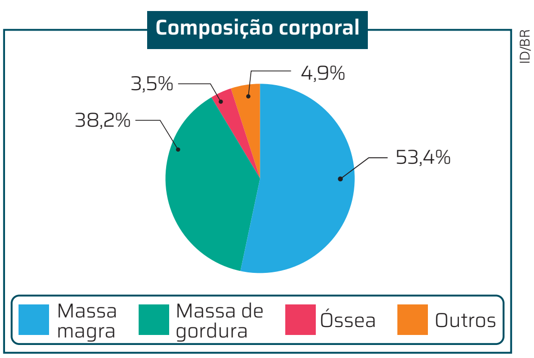
a) mais da metade destas internações em todo o Brasil foram realizadas pelo SUS.

b) na Região Sudeste, a maioria dessas internações foram realizadas fora do SUS.

c) nas regiões Norte e Nordeste, a quantidade destas internações realizadas fora do SUS foi superior a 30%.

d) mais de 70% dessas internações em cada uma das regiões (Sudeste, Sul e Centro-Oeste) foram realizadas pelo SUS.

9 **Bianca realizou alguns exames para verificar sua composição corporal. O gráfico de setores a seguir representa como sua massa de 81,2 kg está distribuída em seu corpo.** **9. a)** Sim, pois 53,4% da massa corporal de Bianca corresponde à massa magra.



Dados fictícios.

De acordo com o gráfico, responda às questões.

a) É correto afirmar que mais da metade da massa corporal de Bianca é composta de massa magra? Explique como pensou para responder.

b) Calcule quantos quilogramas de massa magra Bianca possui. Aproximadamente 43,36 kg.

c) Agora, escreva no caderno uma questão relacionada ao gráfico. Troque a questão com um colega, para que um resolva a do outro. Ao final, verifiquem juntos a resolução.
Resposta pessoal.

CÁLCULO RÁPIDO

Alguns cálculos são constantemente usados. Conhecer os resultados ou ter estratégias de cálculo mental pode agilizar seu trabalho e permitir que sua atenção se volte para ideias e problemas mais relevantes que os cálculos rotineiros. Por isso, nesta seção, presente em todos os capítulos, você encontrará alguns desafios para auxiliá-lo a desenvolver a habilidade de cálculo.

1 **Muitas vezes você terá de fazer cálculos com porcentagens e nem sempre terá uma calculadora para auxiliá-lo. Lembre-se de que:**

$100\% = 1$ $\quad 50\% = \frac{1}{2}$ $\quad 25\% = \frac{1}{4}$ $\quad 20\% = \frac{1}{5}$ $\quad 10\% = \frac{1}{10}$

Use essas informações para calcular mentalmente:

a)
- 50% de 120. 60
- 25% de 120. 30
- 20% de 120. 24
- 10% de 120. 12

b)
- 10% de 440. 44
- 20% de 440. 88
- 5% de 440. 22
- 25% de 440. 110

c)
- 5% de 360. 18
- 15% de 360. 54
- 25% de 360. 90
- 50% de 360.180

d)
- 50% de 80. 40
- 25% de 80. 20
- 20% de 80. 16
- 5% de 80. 4

PARA RECORDAR

Depois de estudar os números racionais e reais, a proposta é recordar como resolver problemas e atividades em que esses números estão presentes.

1 Se $\frac{3a}{b} = \frac{1}{2}$, qual é o valor de $\frac{b}{a}$? 6

2 Um jornal semanal disponibiliza um quarto de suas 60 páginas para anúncios publicitários. Nessas páginas são inseridos dois anúncios, e cada um deles ocupa um quarto de página. Quantos anúncios esse jornal publica em 12 semanas? 360 anúncios.

3 Na representação de um mapa, dois municípios estão a 4,5 centímetros um do outro. Nesse mapa, 0,5 cm representa 1 km. Qual é a distância real entre os dois municípios? 9 km

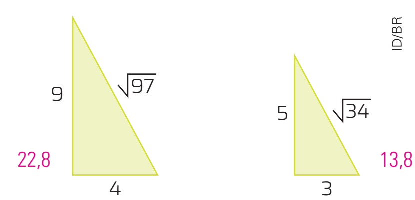
4 Em certo treino de corrida, Carla correu 3 km em 27,5 minutos, e Milena, 6 km em $53\frac{1}{3}$ minutos. Qual das duas foi mais rápida nesse treino? Milena.

Retome os diagramas de Euler-Venn do capítulo 1 para resolver a próxima atividade.

5 Em um grupo de universitários, $\frac{1}{4}$ deles cursa Engenharia, $\frac{3}{5}$ cursam Administração e $\frac{3}{8}$ dos estudantes são da turma de Direito. Além disso, 9 estudantes cursam simultaneamente Administração e Direito. Qual é o total de estudantes desse grupo de universitários? Nesse grupo, há 40 estudantes ao todo.

No próximo problema, os números estão presentes em figuras geométricas.

6 Determine a medida aproximada do perímetro de cada figura.



FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Estes três problemas, com enunciados muito curtos, parecem simples, mas não são. Para facilitar a resolução deles, organize as informações apresentadas e faça um registro da sua estratégia.

1 Uma baleia mede 30 metros mais a metade de seu comprimento. Quantos metros ela mede? 60 metros.

2 Se três gatos pegassem três ratos em três minutos, nessas mesmas condições, quantos gatos seriam necessários para pegar cem ratos em cem minutos? 3 gatos.

3 Quanto tempo um trem de 1 km de comprimento, com velocidade de 1 km por minuto, leva para atravessar um túnel de 1 km de comprimento? 2 minutos.

PALAVRAS-CHAVE

Neste capítulo, os temas e os conceitos principais foram:

- uso cotidiano dos números;
- diferentes variáveis para determinados conjuntos de dados.
- tipos de gráfico mais usuais para representar dados de modo organizado.

Escreva para um colega da classe, com suas palavras, uma explicação sobre cada um desses três itens. Você pode usar texto, desenhos, esquemas, gráficos. Troque sua produção com o colega e analise se ele teve a mesma compreensão que a sua, e se você pode contribuir para o aprimoramento do texto dele.

MATEMÁTICA E ENVELHECIMENTO DA POPULAÇÃO

O objetivo desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes ao desenvolver habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propor que vivenciem um processo investigativo trabalhando, assim, as competências específicas **1** e **2** da área de Matemática e suas Tecnologias. Esta seção também contempla as competências gerais **1**, **2** e **4** da Educação Básica ao incentivar que, a partir da valorização social e cultural, os estudantes entendam e expliquem a realidade, continuem a aprender e colaborem para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Além disso, a seção contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT102**, pois apresenta análise de gráficos de pesquisas estatísticas divulgados por diferentes meios de comunicação.

Se julgar conveniente, convide um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para participar das discussões com a turma.

Pirâmide etária brasileira e envelhecimento da população

O objeto digital apresenta análises sobre o formato da pirâmide etária brasileira de acordo com os dados do Censo Demográfico 2022 e mostra a tendência que esses dados indicam.

Raio X da população e um olhar para o futuro

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) é o órgão responsável por coletar, analisar e divulgar informações sobre a população brasileira, como o número de habitantes de um lugar, a etnia com que uma pessoa se identifica, a quantidade de homens e de mulheres, a idade média da população, entre outras. O trabalho realizado pelo IBGE é relevante para o planejamento e a tomada de decisões em várias áreas do governo e da sociedade.

O texto a seguir apresenta uma análise realizada pelo IBGE sobre a pirâmide etária do Brasil.

Censo 2022: número de pessoas com 65 anos ou mais de idade cresceu 57,4% em 12 anos

Em 2022, o total de pessoas com 65 anos ou mais de idade no país (22 169 101) chegou a 10,9% da população, com alta de 57,4% frente a 2010, quando esse contingente era de 14 081 477, ou 7,4% da população. Já a população idosa de 60 anos ou mais é de 32 113 490 (15,6%), um aumento de 56,0% em relação a 2010, quando era de 20 590 597 (10,8%). É o que revelam os resultados do universo da população do Brasil desagregada por idade e sexo, do Censo Demográfico 2022. Esta segunda apuração do Censo mostra uma população de 203 080 756 habitantes, com 18 244 pessoas a mais do que na primeira apuração.

[...]

"O Estatuto do Idoso define como idoso a pessoa de 60 anos ou mais. O corte de 65 anos ou mais foi utilizado nesta análise para manter comparabilidade internacional e com outras pesquisas que utilizam essa faixa etária, como de mercado de trabalho", justifica Izabel Marri, gerente de Estudos e Análises da Dinâmica Demográfica do IBGE. O aumento da população de 65 anos ou mais em conjunto com a diminuição da parcela da população de até 14 anos no mesmo período, que passou de 24,1% para 19,8%, evidenciam o franco envelhecimento da população brasileira.

"Ao longo do tempo a base da pirâmide etária foi se estreitando devido à redução da fecundidade e dos nascimentos que ocorrem no Brasil. Essa mudança no formato da pirâmide etária passa a ser visível a partir dos anos 1990 e a pirâmide etária do Brasil perde, claramente, seu formato piramidal a partir de 2000. O que se observa ao longo dos anos, é redução da população jovem, com aumento da população em idade adulta e também do topo da pirâmide até 2022", analisa a gerente.

Gomes, Irene; Britto, Vinícius. Censo 2022: número de pessoas com 65 anos ou mais de idade cresceu 57,4% em 12 anos. *Agência IBGE Notícias*, Rio de Janeiro, 1º nov. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/38186-censo-2022-numero-de-pessoas-com-65-anos-ou-mais-de-idade-cresceu-57-4-em-12-anos. Acesso em: 3 jul. 2024.

PARA EXPLORAR

Pesquisa

Após 20 anos de vigência, três em cada quatro brasileiros já ouviram falar sobre o Estatuto da Pessoa Idosa

Conheça os temas, as perguntas e os resultados da pesquisa realizada pelo Instituto DataSenado para averiguar a percepção e a opinião das pessoas sobre a Lei n. 10 741, de 1º de outubro de 2003, e para verificar a qualidade de vida dos cidadãos e as condições de acessibilidade para as pessoas idosas nas cidades.

Disponível em: https://www12.senado.leg.br/institucional/datasenado/publicacaodatasenado?id=apos-20-anos-de-vigencia-tres-em-cada-quatro-brasileiros-ja-ouviram-falar-sobre-o-estatuto-da-pessoa-idosa. Acesso em: 6 set. 2024.

andreswd/E+/Getty Images

Mulheres exercitando o corpo. A prática regular de atividades físicas promove um envelhecimento mais saudável e com qualidade de vida.

Não escreva no livro.

O aumento da expectativa de vida causa impacto direto na Previdência Social e nos sistemas de saúde, que precisam se adaptar para atender mais idosos. Além disso, surgem desafios para garantir direitos e promover políticas públicas que assegurem qualidade de vida adequada para a população idosa, o que abrange acesso a serviços de saúde e à moradia e inclusão social.

A pirâmide etária citada anteriormente é composta de dois gráficos de barras duplas. Cada um deles mostra informações sobre a população do país, organizadas por sexo e por faixa etária.

Esses gráficos são úteis para entendermos como a população está distribuída por idade e para analisar a expectativa de vida. A seguir, apresentamos a pirâmide etária do Brasil com dados de dois censos demográficos realizados pelo IBGE, para que seja possível verificar as diferenças e semelhanças.

As pirâmides etárias do Brasil e de outros países do mundo têm passado por mudanças significativas nas últimas décadas. Antes, essas estruturas eram caracterizadas por base larga e topo estreito, refletindo altas taxas de natalidade e de mortalidade. No entanto, com a queda na taxa de natalidade e o aumento na expectativa de vida, as pirâmides etárias têm se modificado. No Brasil, observa-se o envelhecimento gradual da população, e o crescimento da população idosa em relação às crianças e aos jovens. Essas transformações têm implicações profundas para as políticas públicas, demandando adaptações nos sistemas de saúde, de Previdência Social e de assistência social para garantir o bem-estar e a inclusão de diferentes faixas etárias. No cenário mundial, muitos países enfrentam desafios semelhantes, com ajustes necessários em políticas educacionais, de mercado de trabalho e de planejamento urbano para lidar com uma população mais envelhecida e suas demandas específicas.

ID/BR

População residente no Brasil, segundo sexo e grupos de idade, em 2010 e 2022 (%)

Fonte de pesquisa: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Conheça o Brasil: população – Pirâmide etária. *IBGE Educa Jovens*, Rio de Janeiro, [20--]. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/jovens/conheca-o-brasil/populacao/18318-piramide-etaria.html. Acesso em: 6 set. 2024.

Conectando ideias

1 **Converse com o professor e os colegas sobre o envelhecimento da população brasileira e responda: Em sua opinião, quais são as possíveis consequências sociais desse fenômeno?**

2 **Pesquise a pirâmide etária de outro país e compare-a com a pirâmide etária do Brasil, retratando pontos comuns e diferenças entre as populações de ambos os países. Em seguida, faça o que se pede em cada item.**

a) Elabore um gráfico de setores com base na análise do perfil populacional do país escolhido.

b) Apresente aos colegas os resultados de sua pesquisa. Depois, discutam os principais pontos levantados por todos.

Você completou cada uma das tarefas propostas nestas atividades? Desistiu de alguma delas? Por quê? As respostas dos estudantes podem trazer evidências da competência socioemocional persistência.

3 **Em 2023, o Ministério dos Direitos Humanos e da Cidadania, em parceria com a Secretaria de Comunicação Social, lançou a campanha Envelhecer é o nosso futuro, para celebrar os 20 anos do Estatuto da Pessoa Idosa. Alguns cartazes foram utilizados para divulgar informações sobre o envelhecimento e o aumento da população idosa e para apresentar os desafios a serem enfrentados e os avanços obtidos após a promulgação da lei. Em sua opinião, qual é o significado do título da campanha?**

Ministério dos Direitos Humanos e da Cidadania/Governo Federal. Fotografia: Brastock/Shutterstock.com/ID/BR

Cartaz da campanha Envelhecer é o nosso futuro, de 2023.

Neste capítulo, o foco é o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT105,** na medida em que os estudantes utilizam, representam e resolvem problemas envolvendo funções e unidades de medida diversas e simetrias no plano.

RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS: FUNÇÕES

NESTE CAPÍTULO

- Plano cartesiano
- Função: domínio, conjunto imagem e contradomínio
- Gráfico de função
- Simetria e funções

Verifique se os estudantes compreendem o significado dos termos “custo”, “receita” e “lucro”. De acordo com o *Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa*, estas são as definições de cada um desses termos:

custo

1. esforço, trabalho empreg. na produção de bens e serviços

[...]

3. [...] o valor de mercado de algo, calculado monetariamente, a partir do capital e do tempo gastos na sua produção e a margem de lucro de seu produtor; preço

4. [...] a quantia com que se adquire algum bem ou serviço

[...]

receita

1. valor que é recebido, arrecadado ou apurado [...]

[...]

2. conjunto dos rendimentos de um Estado, uma sociedade, um indivíduo [...]

[...]

lucro

[...]

2. [...] ganho auferido durante uma operação comercial ou no exercício de uma atividade econômica

[...]

Instituto Antônio Houaiss. *Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. 1 CD-ROM.

Neste capítulo, vamos iniciar o estudo de funções. Os conceitos e a linguagem apresentados podem ser utilizados em diversas áreas do conhecimento para descrever fenômenos em que uma grandeza depende de outra e também em algumas questões cotidianas. Para começar, acompanhe as situações a seguir.

Situação A

Uma empresa fabrica apenas um tipo de produto e o vende por R$ 1,50 a unidade. Na produção dessa mercadoria, existe um custo fixo mensal de R$ 6 300,00 e um custo variável de R$ 0,80 por unidade fabricada. Quantas unidades desse produto devem ser vendidas por mês, para que a empresa comece a ter lucro?
Essa situação é comum em Administração, Contabilidade e Economia. A quantidade mínima de produtos que uma empresa precisa vender para não ter nem prejuízo nem lucro é chamada de **ponto de equilíbrio** desse produto.

O ponto de equilíbrio é um importante indicador do risco da produção de um negócio e pode ser determinado com base no custo e na receita.

Pessoa segurando *tablet*.

yoh4nn/iStock/Getty Images

Estabelecer o ponto de equilíbrio de uma mercadoria consiste em determinar a quantidade de peças que precisam ser vendidas para que a receita seja igual aos custos, ocasionando um lucro nulo. Essa quantidade pode ser obtida por meio de uma equação.

Considerando x a quantidade de produtos vendidos, temos:

- Receita $R(x)$: $R(x) = 1{,}50x$
- Custo de produção $C(x)$: $C(x) = 6\,300 + 0{,}80x$

$$R(x) = C(x)$$
$$1{,}50x = 6\,300 + 0{,}80x$$
$$1{,}50x - 0{,}80x = 6\,300$$
$$0{,}7x = 6\,300$$
$$x = \frac{6\,300}{0{,}7}$$
$$x = 9\,000$$

Portanto, a empresa tem de vender mais de 9 000 unidades desse produto por mês para começar a ter lucro.

Situação B

A numeração dos calçados depende do comprimento do pé. Para determinar o número do calçado, os fabricantes brasileiros utilizam a fórmula $N = \frac{5c + 28}{4}$, em que N é o número do calçado e c é a medida, em centímetro, do comprimento do pé.

No quadro a seguir, podemos observar essa relação para algumas medidas de pés. Se o comprimento do pé de uma pessoa mede 24 cm, por exemplo, então ela usa calçado número 37.

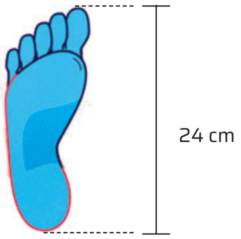
$$N = \frac{5c + 28}{4}$$

$$N = \frac{5 \cdot 24 + 28}{4}$$

$$N = \frac{120 + 28}{4}$$

$$N = \frac{148}{4}$$

$$N = 37$$



Denis Freitas/ID/BR

Comprimento do pé	Número do calçado
20 cm	32
22 cm	34,5 ≃ 35
24 cm	37
26 cm	39,5 ≃ 40
28 cm	42
30 cm	44,5 ≃ 45

Situação C

Um pediatra prescreveu um medicamento que devia ser tomado de 12 em 12 horas. A dose diária recomendada é 50 mg por quilograma de massa corporal. Um frasco desse remédio tem 250 mg do medicamento em cada 4 mL. Quantos mililitros devem ser prescritos para cada horário, de acordo com a massa do paciente?

Sendo x a massa, em quilograma, do paciente. A dose diária deve ser $(50 \cdot x)$ mg do medicamento.

Como essa dose deve ser administrada de 12 em 12 horas, ou seja, duas vezes por dia, em cada horário o paciente deve tomar $\left(\frac{50 \cdot x}{2}\right)$ mg do medicamento.

Para determinar a quantidade k correspondente aos mililitros que devem ser prescritos em cada horário, podemos usar a seguinte relação:

$$250 \text{ mg} \text{ ——— } 4 \text{ mL}$$

$$\left(\frac{50 \cdot x}{2}\right) \text{ mg} \text{ ——— } k \text{ mL}$$

Assim, temos:

$$250 \cdot k = \left(\frac{50 \cdot x}{2}\right) \cdot 4 \Rightarrow 250k = (25x) \cdot 4 \Rightarrow 250k = 100x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{100x}{250} \Rightarrow k = \frac{2x}{5}$$

Portanto, devem ser prescritos $\left(\frac{2x}{5}\right)$ mL em cada horário. Isso significa que:

- se o paciente tiver 20 kg, ele deve tomar 8 mL em cada horário, pois $\frac{2x}{5} = \frac{2 \cdot 20}{5} = 8$.
- se o paciente tiver 35 kg, ele deve tomar 14 mL em cada horário, pois $\frac{2x}{5} = \frac{2 \cdot 35}{5} = 14$.

Drazen Zigic/Shutterstock

Pai e filho em uma teleconsulta com um pediatra.

Você percebeu algo em comum nas três situações apresentadas, isto é, que existe uma relação entre duas grandezas e que uma depende da outra?

- Na situação **A**, a receita e o custo dependem da quantidade de unidades vendidas do produto. Nesse caso, as variáveis C e R e dependem do valor da variável x.
- Na situação **B**, o número do sapato depende do comprimento do pé. Nesse caso, a variável N depende da variável c.
- Na situação **C**, a dose do medicamento depende da massa do paciente. Nesse caso, a variável K depende da variável x.

Em Matemática, cada uma dessas situações corresponde a uma **função**, que é o tema de estudo deste capítulo.

Museu do Louvre, Paris, França. Fotografia: CBW/Alamy/Fotoarena

HALS, Frans. *Retrato de René Descartes, c. 1649*. Óleo sobre tela, 77,5 cm × 68,5 cm.

No decorrer do livro, incentivaremos a leitura de textos matemáticos. Se possível, realize uma leitura em voz alta do texto do início deste tópico e peça aos estudantes que ouçam com atenção e anotem no caderno as palavras cujo significado desconheçam. Em seguida, solicite a eles que procurem o significado dessas palavras no dicionário. Chame a atenção da turma para o fato de que, nos textos, certas palavras estão destacadas. Pergunte: "Qual pode ser a intenção desse destaque? E as imagens, que relação elas têm com o texto?".

PLANO CARTESIANO

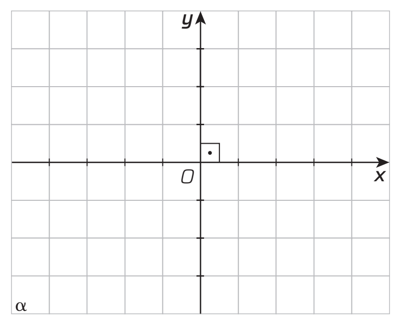
A ideia de localizar pontos em um plano é bem antiga e já havia sido usada pelo geômetra grego Apolônio de Perga (*c.* 262 a.C.-*c.* 190 a.C.). No entanto, o sistema que usamos hoje se originou dos trabalhos do matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650). A tradução para Descartes, em latim, é Cartesius e, por isso, esse sistema é conhecido como **cartesiano**.

Para construir um plano cartesiano ou um referencial cartesiano no plano, inicialmente, devemos desenhar duas retas reais perpendiculares, chamadas **eixos**. Vamos nomear o ponto de intersecção desses eixos de ponto O.

O eixo desenhado na posição horizontal é denominado **eixo das abscissas** e, em geral, é indicado por Ox ou simplesmente x.

O eixo desenhado na posição vertical é denominado **eixo das ordenadas** e, geralmente, é indicado por Oy ou simplesmente y.

Observe a seguir um plano cartesiano, indicado pela letra grega α e representado em uma malha quadriculada.

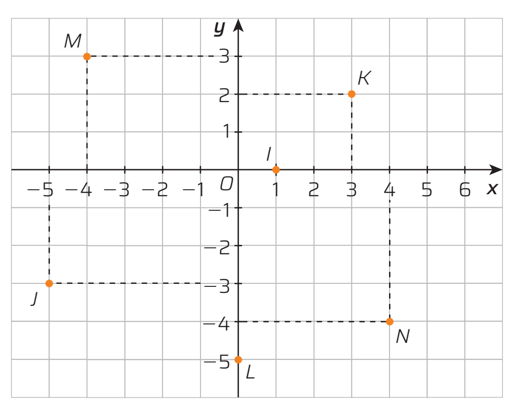


ID/BR

O ponto O corresponde ao número zero em cada eixo e é chamado de **origem**. Observe também que cada eixo é subdividido em segmentos de mesma medida, representando a unidade.

Para determinar a posição de um ponto no plano cartesiano, é necessário traçar, a partir do ponto, linhas perpendiculares a cada eixo.

Observe os pontos destacados no plano cartesiano a seguir e acompanhe como podemos localizar esses pontos.



ID/BR

- Ao traçar linhas perpendiculares aos eixos e que se cruzam no ponto K, localizamos o número 3 no eixo x e o número 2 no eixo y. Representamos o ponto K com um par ordenado: $K(3, 2)$.
- O ponto I está sobre o eixo x, uma unidade para a direita da origem. Representamos o ponto I por $I(1, 0)$.
- O ponto M tem abscissa -4 e ordenada 3. Assim, o ponto M está localizado em $M(-4, 3)$.

Seguindo o mesmo raciocínio, temos: $J(-5, -3)$, $L(0, -5)$ e $N(4, -4)$.

Não escreva no livro.

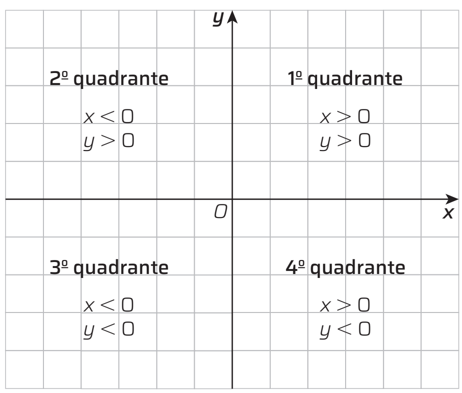
O objeto digital explica de forma simples e descontraída como comandos para inteligência artificial (I. A.) influenciam as respostas obtidas e como construir bons comandos para ter respostas mais assertivas.

Os dois números reais do par ordenado que dá a localização do ponto no plano são chamados de **coordenadas** do ponto. Nesse par, o primeiro número indica o deslocamento horizontal (sobre o eixo x) e o segundo número indica o deslocamento vertical (sobre o eixo y), sempre a partir da origem $O(0, 0)$.

Note que, considerando o referencial cartesiano, associamos a cada ponto do plano uma única dupla ordenada de números reais e, a cada dupla ordenada de números reais, um único ponto do plano. Essa correspondência determina um **sistema de coordenadas cartesianas**.

Sistema de coordenadas cartesianas ortogonais é a correspondência de cada par ordenado de números reais a um único ponto do plano cartesiano.

Os eixos Ox e Oy dividem o plano em quatro regiões, denominadas **quadrantes**, representadas de acordo com a figura a seguir.



ID/BR

René Descartes

Que tal saber um pouco mais de Descartes?

Imagine se você pudesse voltar no tempo e entrevistar o filósofo: que perguntas você faria a ele?

Com o auxílio de uma inteligência artificial, simule esta entrevista. Para isso, primeiro elabore as perguntas que você gostaria de fazer a ele.

Depois, planeje com cuidado os comandos que você dará para que a inteligência artificial realize a simulação dessa entrevista.

Engenharia de *prompt*

Essa proposta contribui para o desenvolvimento da competência geral **1** e da habilidade **EM13LP45**, relacionada às competências específicas **1** e **3** da área de Linguagens e suas Tecnologias, além de ser uma oportunidade de usar a tecnologia para fins didáticos.

Auxilie os estudantes a escolher uma inteligência artificial (I. A.) para utilizar nessa atividade. O objeto digital proposto pode auxiliá-los a definir como escolher os comandos para usar, da melhor maneira possível, os recursos da I. A. Após um primeiro contato com a I. A., oriente os estudantes a ouvir o *podcast* proposto e, com as informações apresentadas, redefinir os comandos dados à I. A.

Após a execução da atividade, peça aos estudantes que compartilhem com os colegas essa experiência comparando os resultados obtidos antes e após ouvirem o *podcast*. Solicitem que apresentem as estratégias usadas para realizar a atividade.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 Determine m e n de modo que $(2m - n, 5) = (7, m + n)$.

Resolução

Dois pares ordenados são iguais se, e somente se, o primeiro elemento de um dos pares ordenados for igual ao primeiro elemento do outro e os segundos elementos forem iguais. Assim, podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2m - n = 7 \\ m + n = 5 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as equações desse sistema, temos:

$$2m + m - n + n = 7 + 5$$
$$3m = 12$$
$$m = \frac{12}{3}$$
$$m = 4$$

Substituindo o valor de m em uma das equações do sistema, encontramos o valor de n. Vamos substituí-lo na segunda equação, observe:

$$m + n = 5$$
$$4 + n = 5$$
$$n = 5 - 4$$
$$n = 1$$

Portanto, $m = 4$ e $n = 1$.

Na atividade **5**, peça aos estudantes que deem exemplos de outros pontos nessa condição.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Consulte o desenho no Manual do Professor.

1 Desenhe um plano cartesiano no caderno e localize os pontos $A(2, 6)$, $B(-4, 5)$, $C(-5, -2)$, $D(4, -3)$, $E(3, 0)$, $F(0, 4)$, $G(-4, 0)$ e $H(0, -1)$. Depois, responda às questões.

a) Desses oito pontos, qual é o de maior ordenada? O ponto *A*.

b) Qual dos pontos tem a menor abscissa? O ponto *C*.

c) Qual é a ordenada do ponto *B*? 5

d) Qual é a abscissa do ponto *G*? -4

e) Quais desses pontos estão localizados sobre o eixo horizontal (o eixo *Ox*)? Os pontos *E* e *G*.

f) Quais desses pontos estão localizados sobre o eixo vertical (o eixo *Oy*)? Os pontos *F* e *H*.

g) Quais desses pontos estão localizados abaixo do eixo horizontal? Os pontos *C*, *D* e *H*.

h) Quais desses pontos estão localizados à esquerda do eixo vertical? Os pontos *B*, *C* e *G*.

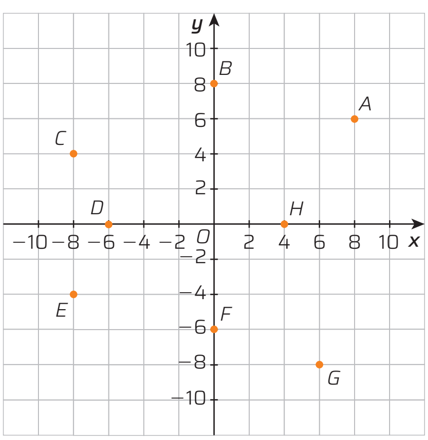
2 Localize os pontos $A(-1, 3)$, $B(0, 3)$, $C(2, 3)$ e $D(5, 3)$ no plano cartesiano. Depois, responda às questões.

a) O que podemos afirmar sobre os pontos que têm ordenadas iguais? Eles são colineares.

b) O que ocorre com as ordenadas dos pontos que pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo das abscissas? As ordenadas são iguais.

3 Determine as coordenadas dos pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* e *H* indicados no plano cartesiano a seguir.

$A(8, 6)$; $B(0, 8)$; $C(-8, 4)$; $D(-6, 0)$; $E(-8, -4)$; $F(0, -6)$; $G(6, -8)$; $H(4, 0)$



ID/BR

4 Localize os pontos $A(-3, 3)$, $B(-3, 0)$, $C(-3, 4)$ e $D(-3, -2)$ no plano cartesiano ortogonal. Depois, responda às questões.

a) O que podemos afirmar sobre os pontos que têm a mesma abscissa? Pontos que têm abscissas iguais são colineares.

b) O que ocorre com as abscissas dos pontos pertencentes a uma mesma reta paralela ao eixo das ordenadas? As abscissas são iguais.

5 O ponto que tem coordenadas (5, 3) coincide com o ponto que tem coordenadas (3, 5)? Por quê?

6. O ponto *A* pertence ao 1º quadrante, *B* ao 2º quadrante, *C* ao 3º quadrante e *D* ao 4º quadrante.

6 Determine o quadrante ao qual pertence cada um dos pontos a seguir.

$A(\sqrt{2} - 1, 4 - \pi)$ $\quad$ $C(2 - \pi, \sqrt{2} - 2)$

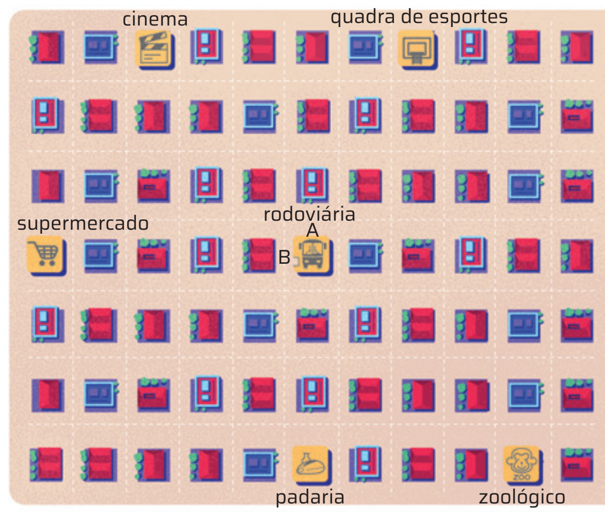
$B(\sqrt{3} - 2, \sqrt{5} - 2)$ $\quad$ $D(\sqrt{3} - 1, 3 - \pi)$

7 Determine *m* e *n* para que:

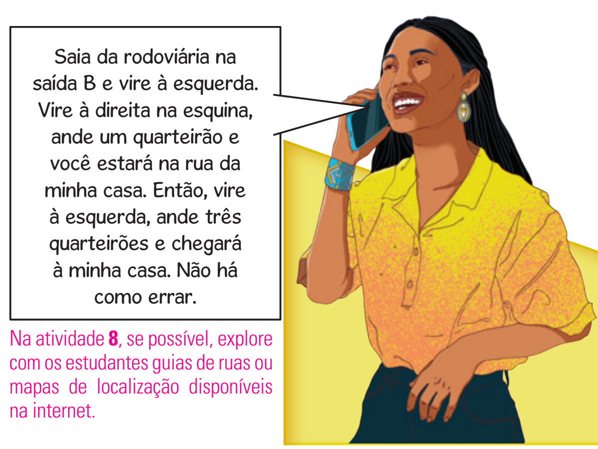
a) $(2m - 3, n + 4) = (6, 5)$ $m = \frac{9}{2}$ e $n = 1$

b) $(m - n, m + n) = (-3, 2)$ $m = -\frac{1}{2}$ e $n = \frac{5}{2}$

8 Marisa se mudou para outra cidade e convidou seu primo Sílvio para visitá-la. Para que ele pudesse chegar facilmente à casa dela, Marisa enviou-lhe um mapa com algumas indicações.



Denis Freitas/ID/BR



@mickart_/ID/BR

Na atividade **8**, se possível, explore com os estudantes guias de ruas ou mapas de localização disponíveis na internet.

a) Sílvio seguiu essas instruções e chegou à casa de Marisa. Que ponto de referência há perto da casa dela? A padaria.

b) Tomando a rodoviária como ponto de referência, indique alguns caminhos que podem ser seguidos para ir: ao cinema, ao zoológico e ao supermercado. Respostas pessoais.

c) Desenhe um plano cartesiano e localize nele os pontos do item anterior. Use a rodoviária como (0, 0) e um quarteirão como unidade.

Consulte o desenho no Manual do Professor.

5. Não, porque o ponto de coordenadas (5, 3) dista 5 unidades do eixo vertical para a direita e 3 unidades do eixo horizontal para cima. Já o ponto (3, 5) dista 3 unidades do eixo vertical para a direita e 5 unidades do eixo horizontal para cima.

Não escreva no livro.

O objetivo deste tópico e dos seguintes é apresentar, de maneira informal, o conceito de função, antes de abordar a terminologia específica relacionada a esse objeto de conhecimento e os conceitos de domínio, variáveis dependente e independente, crescimento e decrescimento de uma função, valor de uma função em um ponto, sinal de uma função e zeros. A proposta é de interpretação e de investigação, com vistas a desenvolver as habilidades **EM13MAT501** e **EM13MAT502**.

FUNÇÃO

No início deste capítulo, você viu que duas grandezas podem estar relacionadas de modo que uma grandeza dependa da outra. **Função** é uma maneira de relacionar grandezas. Nesse tipo de relação, duas grandezas, x e y, se relacionam de tal forma que:

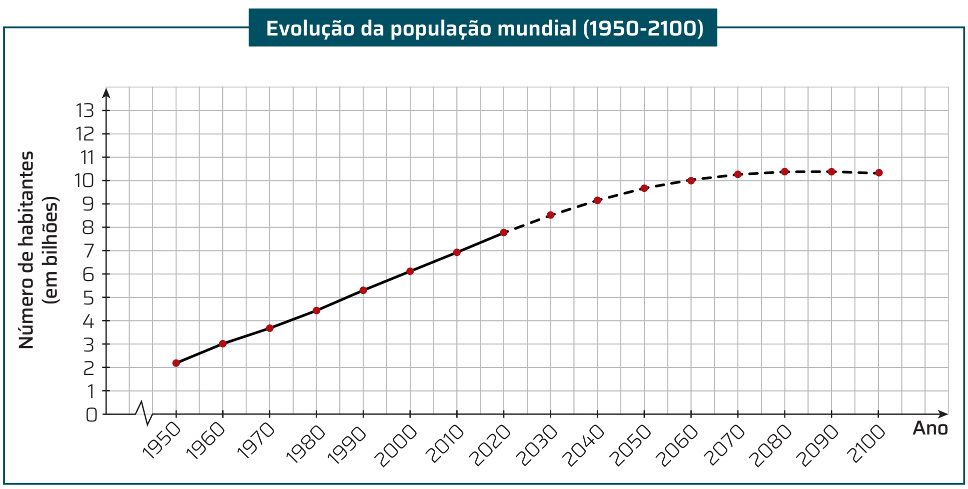
- x pode assumir qualquer valor em um conjunto A dado;
- os valores que y assume dependem dos valores de x, de modo que a cada x se associa um e somente um y.

O **gráfico de uma função** é a representação geométrica do conjunto de pares ordenados (x, y), em que x assume os valores do conjunto A para os quais a função faz sentido e y é o valor associado a x.

Os elementos do conjunto apresentado no exemplo **1** referem-se aos anos correspondentes aos pontos destacados no gráfico. Aproveite o momento e comente com os estudantes que a linha usada para unir os pontos do gráfico serve apenas para facilitar a visualização do comportamento da variável "número de habitantes" ao longo do tempo. O gráfico do número de habitantes em função do tempo é formado apenas por pontos.

Exemplo 1

Verifique o gráfico a seguir, que relaciona o número y de habitantes da população mundial (em bilhões) e o tempo x (em anos).



Fonte de pesquisa: United Nations. Department of Economic and Social Affairs. *World population prospects 2024*. [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://population.un.org/wpp. Acesso em: 7 jul. 2024.

Esse gráfico permite visualizar o crescimento da população no período de 1950 a 2020 e a previsão desse crescimento de 2020 a 2100.

Perceba que os valores de x pertencem ao conjunto dos números naturais e variam no intervalo de 1950 a 2100. Além disso, para $x = 1950$, o valor de y é aproximadamente igual a 2 bilhões e, para $x = 2000$, y é aproximadamente igual a 6 bilhões.

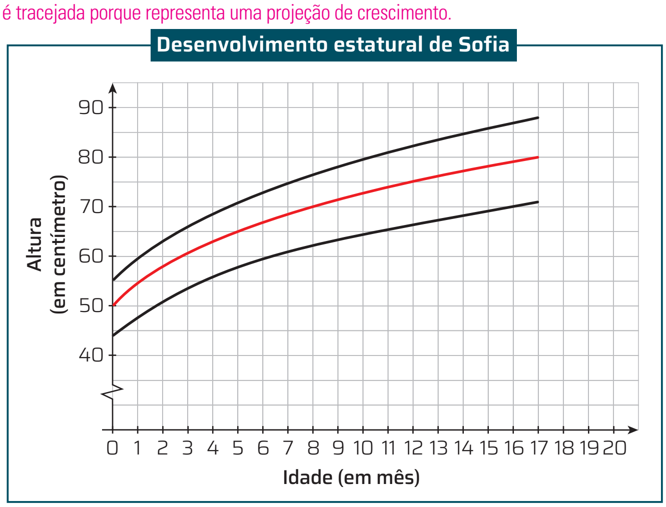
Pergunte aos estudantes por que acham que, a partir do ano 2020, a linha do gráfico é tracejada, e não contínua. Reserve um tempo para que formulem a resposta. Depois, comente com eles que a linha é tracejada porque representa uma projeção de crescimento.

Exemplo 2

O gráfico ao lado mostra o desenvolvimento da estatura de Sofia em função de sua idade durante alguns meses.

As duas linhas contínuas em preto correspondem às maiores e às menores alturas esperadas para crianças com desenvolvimento normal, e a curva em vermelho mostra a altura da Sofia.

Observe que a altura dela era próxima de 64 cm aos 5 meses de idade e passou a ser próxima de 72 cm aos 10 meses.



Dados fictícios.

Exemplo 3

Nas instruções de uma garrafa de 500 mL de suco concentrado, é informado que, para o preparo, o conteúdo inteiro da garrafa deve ser dissolvido em 2 L de água. Isso significa que cada garrafa de suco concentrado corresponde a 2,5 L de suco pronto.

Podemos relacionar a quantidade de suco concentrado e a de suco pronto usando uma função. Essa função pode ser descrita por uma igualdade algébrica.

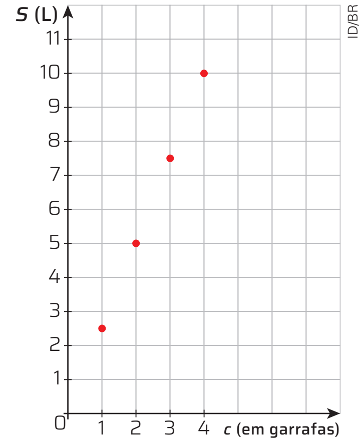
Considerando S a quantidade de litros de suco pronto e c a quantidade de garrafas inteiras de suco concentrado, temos:

$$S = (2 \text{ L de água} + 0{,}5 \text{ L de suco concentrado}) \cdot c$$
$$S = 2{,}5 \cdot c$$

Podemos representar as correspondências entre os valores de S e c em um quadro e no plano cartesiano, obtendo alguns pontos da representação gráfica dessa relação.

Proponha aos estudantes que leiam os exemplos em duplas e, depois, discutam entre si o que, em cada uma das situações, caracteriza uma função. Depois, registre no quadro as expressões que mostram a percepção dos estudantes sobre o que as funções têm em comum, especialmente a relação de dependência entre grandezas.
Observe também se eles diferenciam o conjunto de valores para a primeira grandeza (a variável independente), de modo que construam uma ideia inicial sobre o significado de domínio para cada função apresentada nessas situações. O conceito de domínio de uma função será formalizado posteriormente.

Garrafas de suco concentrado	Suco pronto (em litro)
1	2,5
2	5
3	7,5
4	10
10	25
⋮	⋮



Exemplo 4

A área de um quadrado varia de acordo com a medida de seu lado:

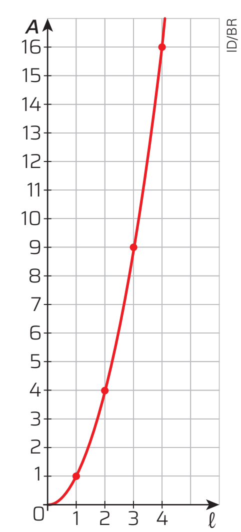
- se o lado mede 1 unidade de comprimento, então a área mede 1 unidade de área.
- se o lado mede $\frac{1}{2}$ unidade de comprimento, então a área mede $\frac{1}{4}$ unidade de área.
- se o lado mede 8,4 unidades de comprimento, então a área mede 70,56 unidades de área.

Portanto, se o lado mede ℓ, então a medida A da área é ℓ^2.

Assim, podemos esboçar um gráfico usando o plano cartesiano, em que vamos marcar, no eixo horizontal, os valores de ℓ e, no vertical, os valores correspondentes à área A.

Observe que podemos construir um quadro e atribuir a ℓ qualquer valor real positivo e, a partir dele, traçar o gráfico como uma linha contínua.

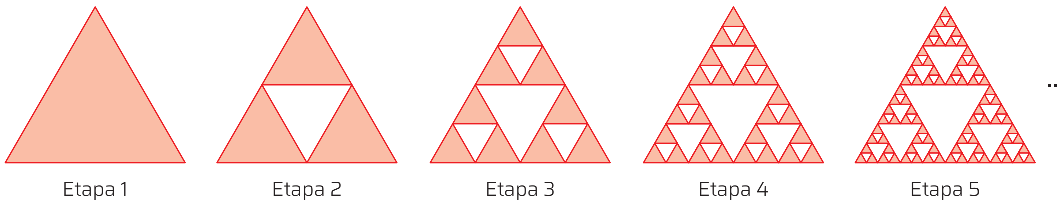
ℓ	A
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
2	4
3	9
3,48	12,1104
4	16
4,2	17,64
5	25
⋮	⋮



Não escreva no livro.

Exemplo 5

Algumas sequências de figuras geométricas também podem ser construídas de acordo com uma função. Apresentamos a seguir as cinco primeiras figuras da sequência conhecida como Triângulo de Sierpinski, que foi descrita pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969).



Ilustrações: ID/BR

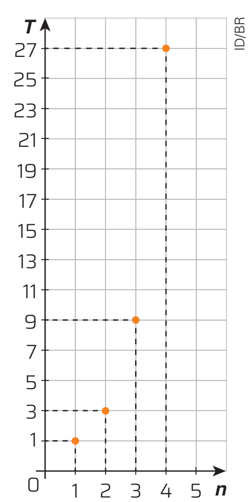
As figuras dessa sequência são obtidas a partir de um triângulo equilátero, apresentado na etapa **1**, que é dividido em 4 triângulos congruentes. O triângulo invertido é representado em branco e, assim, a figura da etapa **2** é composta por 3 triângulos equiláteros laranjas.

A cada etapa, os triângulos laranjas são divididos em 4 triângulos equiláteros congruentes, sendo que um deles deve ficar branco, como podemos verificar nas etapas apresentadas.

No quadro a seguir podemos verificar que o número de triângulos laranjas que compõem o triângulo de cada etapa dessa sequência é uma função do número da etapa correspondente.

Etapa	1	2	3	4	...
Número de triângulos laranjas	1	3	9	27	...

Se representarmos pela letra T o número de triângulos laranjas existentes na etapa de número n, é possível calcular o valor de T por meio da igualdade $T = 3^{n-1}$, em que n é qualquer número natural maior que ou igual a 1. Assim, podemos construir um gráfico que mostre a relação entre T e n.



Você conseguiu perceber um pouco a ideia de função em Matemática? Mas é importante compreender que nem sempre uma relação entre duas grandezas é uma função. Para entender isso, vamos observar um **contraexemplo**, isto é, um exemplo de não função.

A cada número natural n vamos associar os números inteiros que, elevados ao quadrado, resultam em n. Observe no quadro alguns exemplos.

n	**Números inteiros que, elevados ao quadrado, são iguais a n**
0	0
1	1 e -1
2	Não existem
3	Não existem
4	2 e -2
5	Não existem
⋮	⋮

Em Matemática, a palavra "**contraexemplo**" é usada quando queremos dar um exemplo contrário ao que estamos destacando. No caso, vamos dar um exemplo de uma relação entre duas grandezas que não é uma função.

Apesar de a relação entre essas duas grandezas ser possível, ela não satisfaz duas das condições para ser função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$:

- Todo valor de $n \in \mathbb{N}$ deve ter um correspondente em $\mathbb{Z}$.
- Não pode haver mais de um correspondente em $\mathbb{Z}$ para o mesmo valor de n.

Portanto, a cada valor de $n \in \mathbb{N}$ deve estar associado um único valor em $\mathbb{Z}$. Entretanto, no quadro anterior, vimos que a alguns valores de n está associado mais de um valor em $\mathbb{Z}$ e que a outros não existe valor em $\mathbb{Z}$ associado.

DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E CONJUNTO IMAGEM

Vamos analisar com mais detalhes alguns elementos de uma função, estabelecer a forma usual de representá-la e entender melhor o significado do seu gráfico.

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, indicamos a função f de A em B por:

$$\begin{aligned} &f\colon A \to B \\ &\quad x \mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Nessa função:

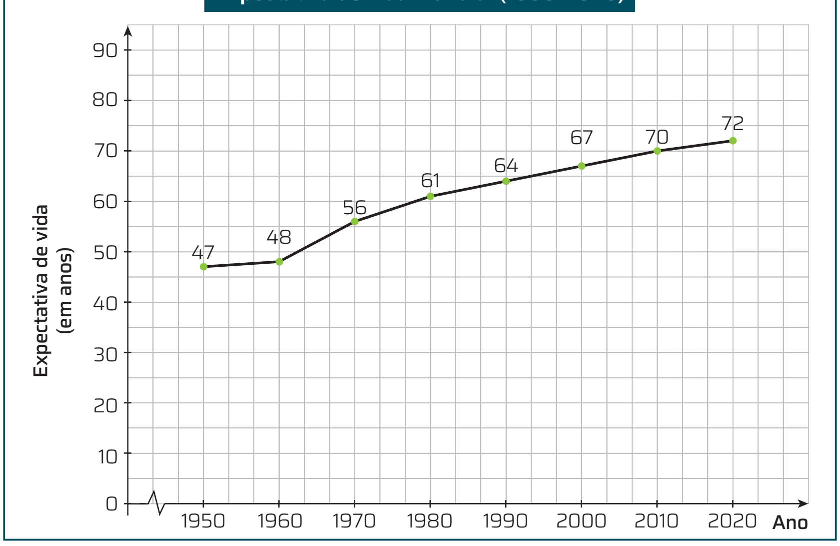
- x é a **variável independente** da função f, e y é a **variável dependente**, pois os valores de y dependem dos valores escolhidos para x. Já este último pode variar, assumindo qualquer valor do conjunto A.
- A é o **domínio** de f, pois é o conjunto dos valores de x para os quais a função é possível. O domínio de f é indicado por $\mathrm{D}(f)$.
- B é o **contradomínio** de f, pois é um conjunto que contém todos os valores possíveis de y. O contradomínio de f é indicado por $\mathrm{CD}(f)$.

Além disso, sendo x um elemento qualquer de A, seu correspondente y em B é a imagem de x pela aplicação de f ou é o valor de x pela função f, e denota-se $y = f(x)$.

Os elementos de B que são imagens dos elementos de A pela função f constituem o conjunto imagem de f, indicado por $\mathrm{Im}(f)$. O conjunto imagem de uma função está contido em seu contradomínio.

Para entender melhor o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de uma função, considere o gráfico a seguir, que relaciona a expectativa de vida mundial ao longo dos anos.

Expectativa de vida mundial (1950-2020)



ID/BR

Fonte de pesquisa: Our World in Data. *Data life expectancy at birth*. United Kingdom, 2023. Disponível em: https://ourworldindata.org/grapher/life-expectancy?country=~OWID_WRL. Acesso em: 8 jul. 2024.

Nesse gráfico:

- $\mathrm{D}(f) = [1950, 2020]$
- $\mathrm{CD}(f) = [0, 90]$
- $\mathrm{Im}(f) = [47, 72]$

Não escreva no livro.

Agora, vamos voltar aos exemplos **1** a **5**, apresentados nas páginas anteriores, para fazer algumas análises.

- No exemplo **1**, os valores de x pertencem ao conjunto dos números naturais e variam de 1 950 a 2 100. Assim, o domínio dessa função pode ser representado por $\{x \in \mathbb{N} \mid 1950 \leqslant x \leqslant 2100\}$.
  Além disso, é possível buscar na fonte do gráfico que os valores de y variam de 2 536 431 a 10 423 541. Logo, o conjunto imagem correspondente ao número de habitantes é $\{y \in \mathbb{N} \mid 2\,536\,431 \leqslant y \leqslant 10\,423\,541\}$.
- No exemplo **2**, o domínio da função é $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant 17\}$, pois, para cada valor da idade da criança entre 0 e 17 meses, há um valor da altura da criança correspondente a ele.
  Como nesse intervalo de tempo a altura da criança varia de 50 cm a 80 cm, o conjunto imagem dessa função é o intervalo [50, 80]. Note que, nesse caso, também é possível representar o conjunto imagem por $\{y \in \mathbb{R} \mid 50 \leqslant y \leqslant 80\}$.
- No exemplo **3**, a função S tem como domínio possível o conjunto $\mathbb{N}^*$, que corresponde à quantidade de garrafas inteiras de suco concentrado que devem ser dissolvidos em 2 L de água.
  Para cada garrafa inteira de suco concentrado, obtêm-se 2,5 L de suco pronto. Assim, o conjunto imagem de S é o conjunto de números reais que pode ser escrito como {2,5; 5; 7,5; 10; ...} ou $\{y \in \mathbb{R} \mid y = 2{,}5 \cdot c$, em que $c \in \mathbb{N}^*\}$.
- No exemplo **4**, os possíveis valores para a medida ℓ do lado de um quadrado são todos os números reais positivos.
  Assim, o domínio da função A é $]0, +\infty[$ e o conjunto imagem correspondente aos valores de A também é o conjunto $]0, +\infty[$.
- No exemplo **5**, a função T tem como domínio $\mathbb{N}^*$, que corresponde aos possíveis valores das etapas de construção do Triângulo de Sierpinski, e o conjunto imagem de T é o conjunto $\{1, 3, 9, 27, 81, ...\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*\}$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R2 **Os quadros a seguir representam alguns pares de valores de funções de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$. Para cada quadro, escreva uma possível lei na qual y é função de x. Depois, dê o conjunto imagem dessas funções.**

a)

x	...	−1	0	1	2	3	4	...
y	...	1	2	3	4	5	6	...

b)

x	...	−2	−1	0	1	2	3	...
y	...	−4	−2	0	2	4	6	...

Resolução

a) Observando os valores de cada coluna, é possível perceber que, para obter os valores de y, adicionamos 2 aos valores de x, ou seja, fazemos $x + 2$. Assim, a lei da função pode ser escrita por $y = x + 2$ ou $f(x) = x + 2$.
Se x pode assumir qualquer valor inteiro, então podemos indicar o conjunto imagem por:
$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = x + 2\}$

b) Nesse caso, podemos notar que cada imagem de x é o seu dobro, isto é, $y = 2x$. Logo, a lei que determina a função é $f(x) = 2x$.
Assim, temos: $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = 2x\}$

R3 **Seja a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \text{ é racional} \\ -x, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Calcule $f(0)$, $f(-2)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$, $f(\pi - 1)$.

Resolução

Na função f a imagem de um número racional é o próprio racional, e a imagem de um número irracional é o oposto desse irracional.

Assim, como 0 e −2 são racionais, e $\sqrt{2}$ e $\pi - 1$ são irracionais, temos:

Se considerar oportuno, comente com os estudantes que este é um caso de função definida por partes e que o estudo de funções desse tipo será aprofundado posteriormente.

$$f(0) = 0$$
$$f(-2) = -2$$
$$f\left(\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$$
$$f(\pi - 1) = -(\pi - 1) = -\pi + 1$$

R4 Considere a função indicada a seguir e faça o que se pede.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = x^2 - 1$$

a) Calcule $f(6)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$ e $f\left(\sqrt{3} - 2\right)$.

b) Determine um elemento de $D(f)$ cuja imagem por f seja 8.

c) Determine um elemento de $D(f)$ cuja imagem por f seja -5.

Resolução

a) Para calcular a imagem de 6 pela função f, basta substituir x por 6 em $f(x) = x^2 - 1$. Assim:

$$f(6) = 6^2 - 1 = 36 - 1 = 35$$

De modo análogo:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$f\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$f\left(\sqrt{3} - 2\right) = \left(\sqrt{3} - 2\right)^2 - 1 =$$
$$= \left(3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 + 4\right) - 1 =$$
$$= \left(7 - 4\sqrt{3}\right) - 1 = 6 - 4\sqrt{3}$$

b) Nesse caso, queremos calcular $x \in D(f)$ tal que $f(x) = 8$.

Substituindo $f(x)$ por $x^2 - 1$, temos:

$$x^2 - 1 = 8$$

$$x^2 = 9 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Portanto, se $f(x) = 8$, então $x = -3$ ou $x = 3$.

c) Sendo x tal que $f(x) = -5$, temos:

$$x^2 - 1 = -5$$
$$x^2 = -4$$

Portanto, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -4$.

Logo, não existe, em $D(f)$, elemento cuja imagem pela função f seja -5.

Isso quer dizer que -5 não é elemento de $Im(f)$.

As atividades **9**, **10** e **11** exigem dos estudantes a habilidade de argumentação; assim, é necessário que eles reflitam sobre o que entenderam das ideias apresentadas em relação à função. Esse trabalho contribui para a aquisição da competência geral **7**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9 **Em uma aula de Matemática, o professor disse aos estudantes: "Alguns dos exemplos que eu mostrei são tipos especiais de relações que podem ser chamadas de funções, mas, agora, vou mostrar exemplos de relações que não são funções". Analise os contraexemplos que o professor mostrou à turma e justifique por que não são funções.**

a) Associação dos meses do 1º semestre do ano com os nomes dos colegas da turma que nasceram nesses meses.

Mês	Nome
Janeiro	Paula
Fevereiro	Pedro, Marta e Edna
Março	Luís e Raquel
Abril	//
Maio	Ângela, Ricardo, Antônio e Valmir
Junho	Marina

b) Associação de cada número natural com os números reais que diferem uma unidade desse número.

$\mathbb{N}$		$\mathbb{R}$	$\mathbb{N}$		$\mathbb{R}$
0	$\longrightarrow$	1 e -1	3	$\longrightarrow$	2 e 4
1	$\longrightarrow$	0 e 2	4	$\longrightarrow$	3 e 5
2	$\longrightarrow$	1 e 3	...	$\longrightarrow$	...

c) Associação de cada número inteiro com seu inverso.
Não é função, porque o inteiro 0 não está relacionado a valor em $\mathbb{R}$.

$\mathbb{Z}$		$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{R}$
-4	$\longrightarrow$	$-\frac{1}{4}$	0	$\longrightarrow$	?
-3	$\longrightarrow$	$-\frac{1}{3}$	1	$\longrightarrow$	1
-2	$\longrightarrow$	$-\frac{1}{2}$	2	$\longrightarrow$	$\frac{1}{2}$
-1	$\longrightarrow$	-1	3	$\longrightarrow$	$\frac{1}{3}$

d) Associação do número de sapato que cada pessoa calça com a idade dessa pessoa.
Não é função, porque podem existir pessoas de idades diferentes e que usem sapatos com mesmo número.

10 **Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:**
$f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $f(0{,}666...) = \frac{5}{3}$, $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ e $f(1 - \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \text{ é racional} \\ 2x, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Calcule $f(0)$, $f(2)$, $f(0{,}666...)$, $f\left(\sqrt{3}\right)$, $f\left(1 - \sqrt{2}\right)$.

Em caso de dúvida, leia novamente a atividade **R4**.

11 **Considere a função a seguir.** $D(f) = A = \{-3, -1, 1, 3\}$ e $Im(f) = \{-6, -2, 2, 6\}$.

$$f\colon A \to B$$
$$x \mapsto y = 2x$$

Obtenha $D(f)$ e $Im(f)$ sabendo que $A = \{-3, -1, 1, 3\}$ e $B = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$.

9. a) Não é função, porque alguns meses estão associados a mais de um nome. Fevereiro, por exemplo, apresenta três nomes: Pedro, Marta e Edna.
b) Não é função, porque a cada número natural correspondem dois valores (dois números reais). Ao número 1, por exemplo, correspondem dois números: 0 e 2.

14. a) $f(-1) = -2$; $f(-2,1) = -4,2$; $f(1,2) = 2,4$; $f(\pi) = 2\pi$ e $f(1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$

Utilize os exemplos fornecidos na atividade **12** parar avaliar a compreensão dos estudantes sobre o conceito de função.

12 Você conhece outros significados para as palavras "**função**", "**domínio**" e "**imagem**"? Qual deles se aproxima da ideia matemática de cada termo? Resposta pessoal.

13 Dê exemplos de funções usadas em nosso dia a dia e que são diferentes dos apresentados neste capítulo. Resposta pessoal.

14 Faça o que se pede em cada item, considerando a função f de domínio real definida por $y = 2x$.

a) Calcule $f(-1)$, $f(-2,1)$, $f(1,2)$, $f(\pi)$, $f\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

b) Qual é o elemento de D(f) cuja imagem pela função f vale 100? $x = 50$

15 Determine uma expressão para a função $f(n)$ em cada caso.

a)

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	2	3	4	5	6

$f(n) = n + 1$

b)

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	4	5	6	7	8

$f(n) = n + 3$

c)

n	−2	−1	0	1	2
$f(n)$	4	1	0	1	4

$f(n) = n^2$

16 Um motorista entrou em uma estrada às 10 horas e manteve velocidade constante de 90 km/h durante 20 minutos. A correspondência entre a velocidade e o tempo pode ser descrita por um quadro como este:
Não é função, pois a uma mesma velocidade correspondem vários tempos.

Velocidade (em km/h)	Tempo
90	10 h
90	10 h 05 min
90	10 h 10 min
90	10 h 15 min
90	10 h 20 min

A relação entre a velocidade e o tempo mostrada nesse quadro é uma função ou não? Justifique.

17 Um grupo de meninas vai comprar duas bolas que custam, juntas, R$ 336,00 e o valor será dividido igualmente entre elas. Chamando de f a função que expressa o valor y pago por cada uma a partir do número x de meninas e sabendo que o grupo deve ter de 4 a 8 meninas, responda:

a) Qual é o domínio de f? $D(f) = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

b) Qual é o conjunto imagem? $Im(f) = \{84; 67,2; 56; 48; 42\}$

c) Qual é a lei que associa x e y? $y = \frac{336}{x}$, com x assumindo os valores 4, 5, 6, 7 ou 8.

18 Paula organizou um quadro associando os nomes dos colegas aos meses em que nasceram.

Nome	Mês
Paula	Janeiro
Pedro, Marta e Edna	Fevereiro
Luís e Raquel	Março
Ângela, Ricardo, Antônio e Valmir	Maio
Marina	Junho

Ela concluiu que a relação entre os dados deste quadro corresponde a uma função. Explique por que ela chegou a essa conclusão. O quadro apresentado o corresponde a uma função, porque a cada pessoa corresponde um, e apenas um, mês de nascimento.

19 Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = x^2$.

a) Determine o elemento de D(f) cuja imagem pela função f seja -64. Não existe elemento no domínio cuja imagem é -64.

b) Determine o elemento de D(f) cuja imagem pela função f seja zero. $x = 0$

20 Escreva no caderno a alternativa correta.

(IFPE) Para se calcular o consumo mensal, em kWh, de um aparelho elétrico, usa-se a seguinte expressão: $C = \frac{P \cdot H \cdot D}{1000}$, em que C é o consumo em kWh; P é a potência do aparelho em watt (W); H é o número de horas de uso por dia, e D é o número de dias de uso por mês. O Prof. Sérgio instalou em seu banheiro um chuveiro elétrico com uma potência de 2 500 W. A família do professor é composta de cinco pessoas, e cada uma delas toma dois banhos por dia com uma duração de 10 minutos cada banho. Qual o consumo de energia do chuveiro elétrico após 30 dias? Alternativa **c**.

a) 75
b) 100
c) 125
d) 150
e) 175

21 Indique a alternativa correta no caderno.

(Unifor-CE) Em pontes e viadutos, é necessário prever juntas de dilatação, pois sob o efeito da variação de temperatura as seções podem se dilatar ou contrair. O espaço entre duas seções é chamado de vão. Para uma determinada ponte, a largura do vão entre duas seções $V(T)$, em milímetros, varia linearmente com a temperatura T, em graus Celsius (°C). Para essa ponte, foi verificado que quando a temperatura é de 28 °C a largura do vão é 12,5 mm e quando a temperatura é 40 °C a largura do vão é de 8,5 mm. A expressão que relaciona a largura do vão (em mm) e a temperatura (em °C) é? Alternativa **c**.

a) $V(T) = -\frac{1}{40}(T - 40) + 12,5$

b) $V(T) = \frac{1}{28}(T - 28) + 12,5$

c) $V(T) = -\frac{1}{3}(T - 28) + 12,5$

d) $V(T) = -\frac{1}{3}(T + 28) - 12,5$

e) $V(T) = -\frac{1}{3}(T - 40) + 12,5$

Mostre aos estudantes que a situação apresentada na atividade **18** corresponde a um contraexemplo do item **a** da atividade **9**.

GRÁFICO DE FUNÇÃO

Vimos que o gráfico de uma função é o conjunto dos pontos (x, y) em que x assume os valores do domínio e y é o valor associado a cada x. Agora, vamos aprofundar esse estudo.

Considere uma função do tipo:

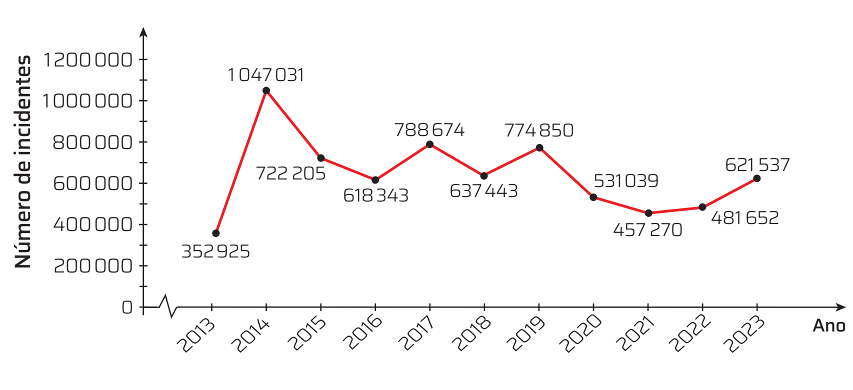
$$f: A \to B$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Quando $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, o gráfico dessa função é o conjunto dos pontos $(x, f(x))$ de um plano cartesiano em que:

- no eixo das abscissas Ox, representamos os valores de x, $x \in A$.
- no eixo das ordenadas Oy, representamos os valores de $y = f(x)$, $y \in B$.

A partir do gráfico de uma função, podemos obter algumas informações sobre ela. Acompanhe um exemplo prático da aplicação de um gráfico de função e das informações que dele podemos obter.

Notificações de incidentes de segurança da internet no Brasil recebidas pelo Cert.br (2013-2023)



ID/BR

Fonte de pesquisa: Centro de Estudos, Resposta e Tratamento de Incidentes de Segurança no Brasil (Cert.br). *Incidentes notificados ao* Cert.br. São Paulo, 2024. Disponível em: https://stats.cert.br/incidentes/#incidentes. Acesso em: 8 jul. 2024.

Observando o gráfico, podemos extrair algumas informações, como:

- O gráfico representa o número de notificações reportadas em **função** do tempo no período de 2013 a 2023.
- O número de notificações **cresceu** nos períodos de 2013 a 2014, 2016 a 2017, 2018 a 2019, 2021 a 2022 e 2022 a 2023.
- O número de notificações **decresceu** nos períodos de 2014 a 2015, 2015 a 2016, 2017 a 2018, 2019 a 2020 e 2020 a 2021.
- No período de 2013 a 2014 foi registrado o maior aumento, aproximadamente 197%, o que corresponde a 694106 notificações (1047031 − 352925).
- Em 2014, foi registrado o maior número de notificações durante o período de 2013 a 2023.

Neste capítulo, também vimos que é possível representar uma função usando um quadro ou, em alguns casos, uma igualdade algébrica do tipo $y = f(x)$ e que cada representação permite que algumas informações acerca da função sejam extraídas com mais facilidade. No exemplo anteriormente apresentado, o gráfico revela informações que não estariam evidentes tanto em uma igualdade algébrica quanto em um quadro.

Quem é responsável pela segurança da internet no Brasil?

O Centro de Estudos, Resposta e Tratamento de Notificações de Incidentes de Segurança no Brasil (Cert.br) foi criado pelo Comitê Gestor da Internet no Brasil (CGI.br) para realizar atividades que contribuem para o cumprimento das atribuições relacionadas à segurança da internet no país. Saiba mais sobre o CGI.br no texto a seguir.

Sobre o CGI.br

O Comitê Gestor da Internet no Brasil tem a atribuição de estabelecer diretrizes estratégicas relacionadas ao uso e desenvolvimento da Internet no Brasil e diretrizes para a execução do registro de Nomes de Domínio, alocação de Endereço IP (Internet Protocol) e administração pertinente ao Domínio de Primeiro Nível ".br". Também promove estudos e recomenda procedimentos para a segurança da Internet e propõe programas de pesquisa e desenvolvimento que permitam a manutenção do nível de qualidade técnica e inovação no uso da Internet.

Comitê Gestor da Internet no Brasil. Sobre o CGI.br. Disponível em: https://cgi.br/sobre/. Acesso em: 8 jul. 2024.

Estudo de funções por meio de gráficos cartesianos

Já estudamos como localizar pontos e construir gráficos em um sistema de coordenadas cartesianas.

Para representar graficamente uma função, devemos:

- construir um quadro, com números que satisfaçam a igualdade $y = f(x)$, com $x \in D(f)$;
- fixar um referencial cartesiano;
- localizar no referencial cartesiano os pontos associados aos pares ordenados $(x, f(x))$.

Agora, acompanhe dois exemplos de como representar uma função usando um gráfico cartesiano; esse será o tipo de gráfico que mais usaremos para estudar funções.

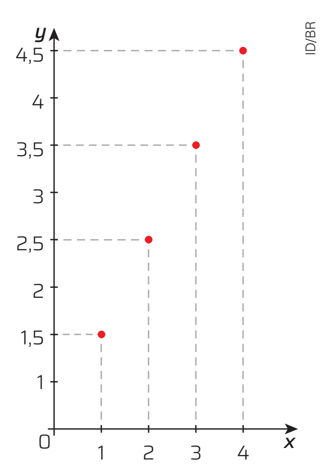
Exemplo 1

Considere a função a seguir, em que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1,5; 2,5; 3,5; 4,5\}$.

$$f: A \to B$$
$$x \mapsto y = x + 0,5$$

Como A é um conjunto finito, com apenas quatro elementos, é possível calcular as imagens de todos os elementos de $D(f)$. Assim:

x	1	2	3	4
y	$1 + 0,5 = 1,5$	$2 + 0,5 = 2,5$	$3 + 0,5 = 3,5$	$4 + 0,5 = 4,5$



Note que todos os valores de y obtidos pertencem ao conjunto B.

Como A é um conjunto finito com quatro elementos, o gráfico de f é formado por quatro pontos.

Observe no gráfico que os valores de $f(x)$ crescem à medida que x cresce.

Exemplo 2

Considere a função a seguir.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = -x + 0{,}5$$

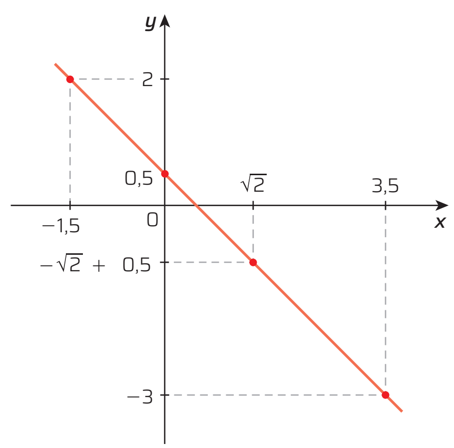
Perceba que, para essa função, é impossível escrever as imagens de todos os elementos do domínio de f, um a um, porque $D(f) = \mathbb{R}$.

Observe também que x pode ser racional ou irracional.

Assim, para construir o gráfico dessa função, vamos montar um quadro atribuindo a x alguns valores do domínio e determinando suas respectivas imagens.

x	$-1{,}5$	0	$\sqrt{2}$	$3{,}5$
y	$-(-1{,}5) + 0{,}5 = 2$	$-(0) + 0{,}5 = 0{,}5$	$-\sqrt{2} + 0{,}5$	$-3{,}5 + 0{,}5 = -3$

Representamos no plano cartesiano os pontos associados a esses pares ordenados.



Observe que, nesse caso, o gráfico de f é uma reta, pois $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, em que os valores de $f(x)$ decrescem à medida que x cresce.

O **gráfico** de uma função é o conjunto de todos os pontos do plano cartesiano correspondentes aos pares (x, y) que determinam a função $y = f(x)$, com $x \in D(f)$.

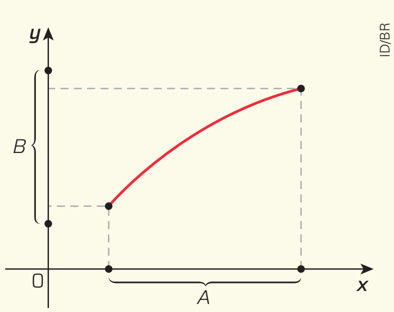
Nesta sequência de atividades resolvidas, a linguagem matemática específica está muito presente. Por isso, oriente os estudantes a fazer a leitura silenciosa dos textos, anotando o que não compreenderam e recorrendo ao conteúdo do capítulo sempre que for necessário. Depois, peça a eles que, em duplas ou em pequenos grupos, analisem as resoluções e verifiquem se as dúvidas anotadas foram sanadas. A habilidade de leitura de texto matemático se desenvolve quando os estudantes têm a oportunidade de fazer uma leitura autônoma.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

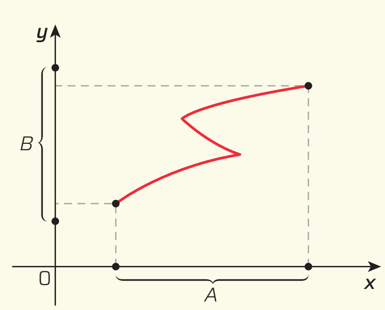
R5 **Verifique se cada um dos gráficos a seguir representa ou não uma função do conjunto A no conjunto B.**

Lembre-se de que, em uma função, duas grandezas x e y se relacionam de modo que x pode assumir qualquer valor em um conjunto A dado e para cada valor de x existe um único valor de y que depende do valor de x.

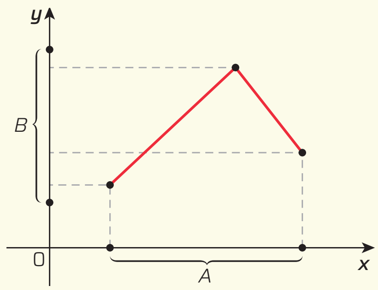
a)



b)

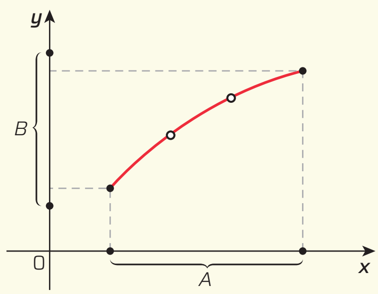


c)



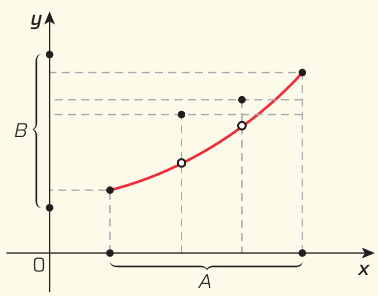
ID/BR

d)



ID/BR

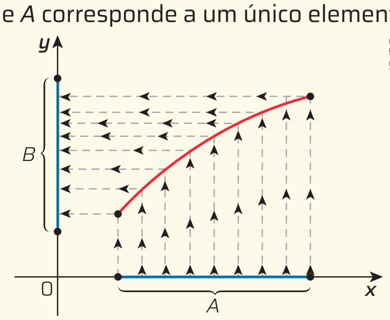
e)



ID/BR

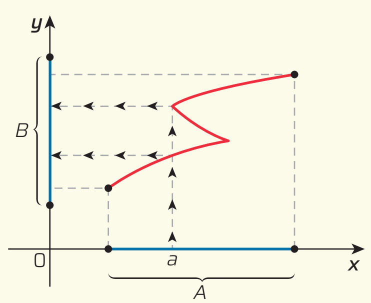
Resolução

a) É uma função de *A* em *B*, porque todo elemento de *A* corresponde a um único elemento de *B*.



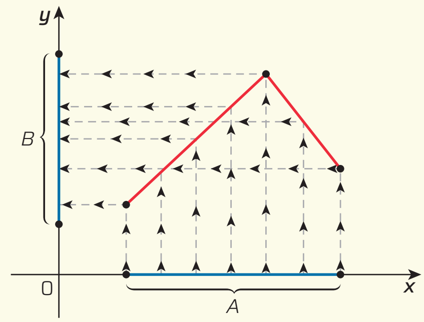
ID/BR

b) Não é uma função de *A* em *B*, porque existe, por exemplo, o elemento $a \in A$ que corresponde a dois elementos de *B*.



ID/BR

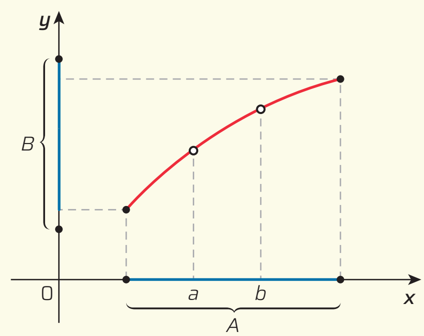
c) Este gráfico representa uma função de *A* em *B*, porque todo elemento de *A* corresponde a um único elemento de *B*.



ID/BR

Observe que, nesse caso, há elementos de *A* que têm o mesmo correspondente em *B*. Lembremos que, em uma função, é perfeitamente possível dois elementos do domínio terem uma mesma imagem.

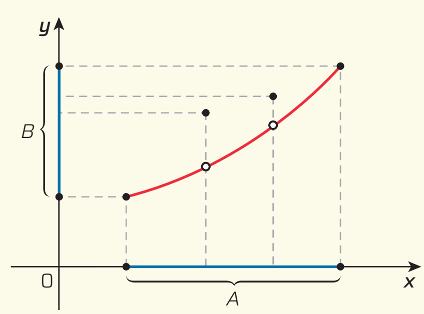
d) Este gráfico não representa uma função de *A* em *B*, porque os elementos *a* e *b* em *A* não têm correspondentes em *B*.



ID/BR

Compare os gráficos dos itens *d* e *e*. Identifique quais são as diferenças e semelhanças entre eles.

e) Este gráfico representa uma função de *A* em *B*, porque todo elemento de *A* corresponde a um único elemento de *B*.



ID/BR

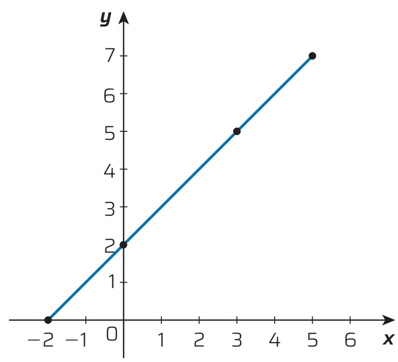
Antes de avançar em seus estudos, retome a resolução de cada item dessa atividade resolvida e observe que, ao traçar as retas paralelas a *Oy* pelos valores do domínio de uma relação f, esta será função somente se cada uma dessas paralelas a *Oy* intersectar o gráfico de f em um, e somente um, ponto.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

23. a) O número dito por Luiz é o quadrado do número dito por Marcelo, menos uma unidade.

A atividade **23** favorece o desenvolvimento da linguagem algébrica para representar a relação entre grandezas.

22 Seja f a função dada pelo gráfico a seguir.



ID/BR

a) Encontre $f(5)$. $f(5) = 7$

b) Determine o valor de x tal que $f(x) = 5$. $x = 3$

c) Determine o domínio de f. $D(f) = [-2, 5]$

d) Obtenha o conjunto imagem de f. $Im(f) = [0, 7]$

23 Luiz e Marcelo inventaram um jogo de desafios. Marcelo dizia um número. Depois, Luiz dizia outro número usando uma regra conhecida apenas por ele. O desafio de Marcelo era descobrir qual era a regra que Luiz estava usando. Para organizar uma estratégia, Marcelo montou o quadro a seguir.

Número que falei	−2	−1	0	1	2	3
Número que Luiz falou	3	0	−1	0	3	8

a) Qual regra você acha que Luiz utilizou? Explique.

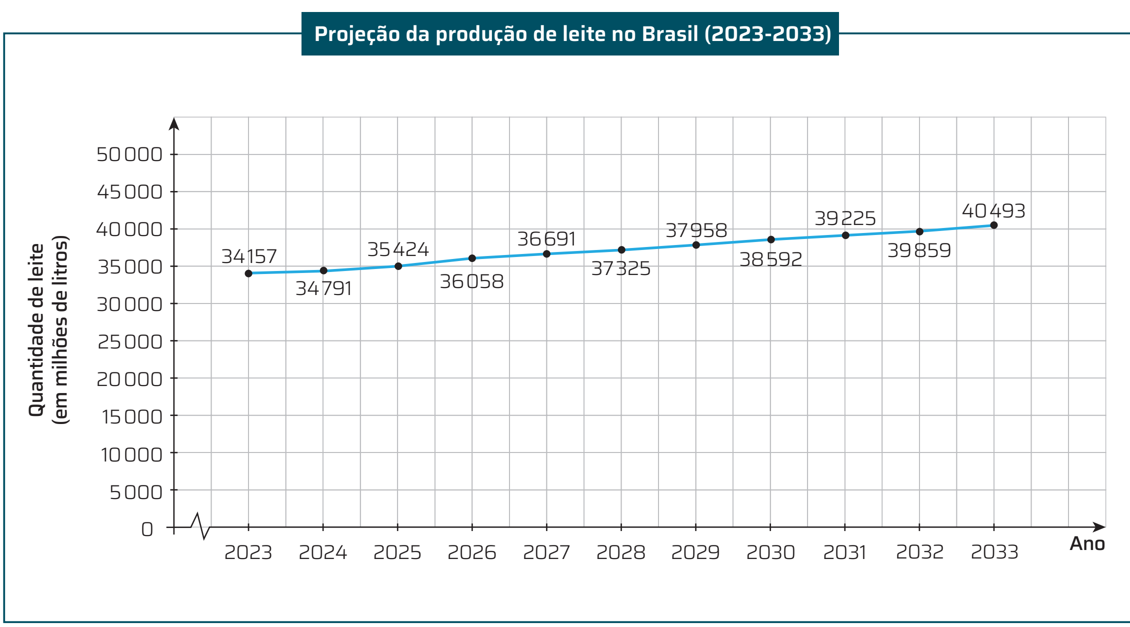
b) A regra utilizada por Luiz é uma função? Sim.

c) Sendo x os números ditos por Marcelo e y os números falados por Luiz, indique uma lei que represente y em função de x. $y = x^2 - 1$

d) Quais podem ser o domínio e o conjunto imagem dessa função? $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; $Im(f) = \{-1, 0, 3, 8\}$

e) Faça o gráfico dessa função.
Consulte o gráfico no Manual do Professor.

24 De acordo com o relatório *Projeções do agronegócio: Brasil 2022/23 a 2032/33*, da Secretaria de Política Agrícola, vinculada ao Ministério da Agricultura e Pecuária, a produção de leite deverá crescer no período contemplado pelo documento. O gráfico a seguir apresenta essa projeção, em milhões de litros de leite.



ID/BR

Fonte de pesquisa: Brasil. Ministério da Agricultura e Pecuária. *Projeções do agronegócio:* Brasil 2022/23 a 2032/33. Brasília, DF: Mapa, 2023. Disponível em: https://www.gov.br/agricultura/pt-br/assuntos/politica-agricola/todas-publicacoes-de-politica-agricola/projecoes-do-agronegocio/projecoes-do-agronegocio-2022-2023-a-2032-2033.pdf/. Acesso em: 9 jul. 2024.

a) Do que trata o gráfico? O gráfico apresenta a projeção da produção de leite no Brasil, em milhões de litros, de 2023 a 2033.

b) Em que ano a produção esperada de leite será de aproximadamente 38 000 milhões de litros? Em 2029.

c) Em quanto deve aumentar a produção de leite de 2023 a 2033? Em 6 336 milhões de litros.

d) Reúna-se com um colega para elaborar uma questão sobre os dados apresentados nesse gráfico. Depois, troquem a questão com a de outra dupla e a resolvam. Resposta pessoal.

Releia a atividade **R5** antes de resolver as próximas atividades.

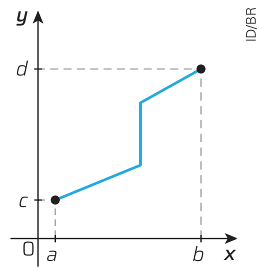
A atividade **24** propõe a análise de informações que envolvem a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação e para a avaliação de situações da realidade. Para isso, os estudantes utilizam conhecimentos matemáticos, o que contribui para a aquisição da competência geral **7**.

Não escreva no livro.

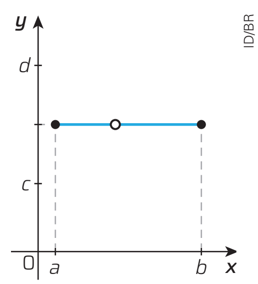
27. c) Sim, pois a quantidade de quilômetros rodados depende de quantos litros há no tanque e a determinado número relativo à quantidade de litros de combustível está associado um único número relativo à quantidade de quilômetros rodados.

25 Quais gráficos representam funções de A em B?

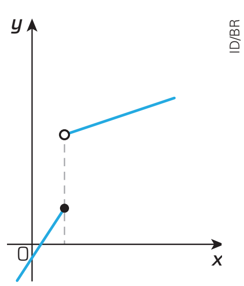
a) $A = [a, b]$ e $B = [c, d]$. Não é função.



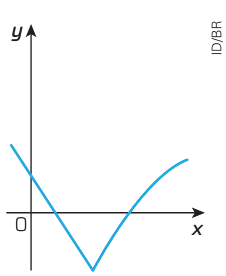
b) $A = [a, b]$ e $B = [c, d]$. Não é função.



c) $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$. É função.

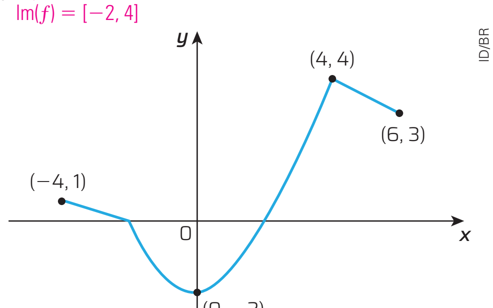


d) $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$. É função.



26 Determine o domínio e o conjunto imagem de cada função representada a seguir.

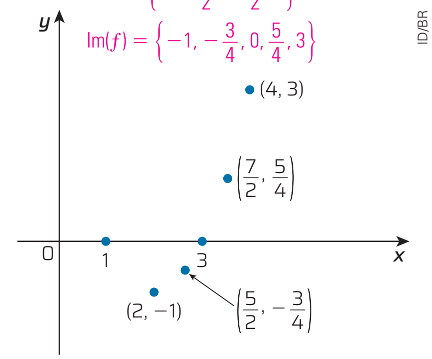
a) $D(f) = [-4, 6]$
$Im(f) = [-2, 4]$



Na atividade **27**, dê atenção especial às sentenças matemáticas produzidas no item **f**. Ajude os estudantes a analisá-las e a encontrar eventuais erros.

b) $D(f) = \left\{1, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$

$Im(f) = \left\{-1, -\frac{3}{4}, 0, \frac{5}{4}, 3\right\}$



27 Sabendo que um veículo roda 10 km com um litro de combustível e que seu tanque comporta 40 litros, faça o que se pede em cada item.

a) Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o.

Litro	0	0,5	1	1,5	2	4	10	25	40
Quilômetro rodado	0	5	10	15	20	40	100	250	400

b) O que acontece com os quilômetros rodados à medida que aumenta o consumo de litros de combustível? A quantidade de quilômetros rodados aumenta à medida que aumentamos a quantidade de combustível consumido.

c) Essa relação é uma função? Por quê?

d) Sendo a relação dada uma função, dê o domínio e o conjunto imagem dessa função. $D(f) = [0, 40]$ $Im(f) = [0, 400]$

e) Em um sistema de eixos coordenados, esboce um gráfico para essa relação considerando o consumo de apenas um tanque de combustível. Consulte o gráfico no Manual do Professor.

f) Usando x para representar a quantidade de combustível, em litros, e y para representar os quilômetros rodados, escreva uma sentença matemática que represente a relação entre x e y. $y = 10x$

g) Qual seria o conjunto A formado por todos os possíveis valores de x? $A = [0, 40]$

28. a) $C(0,5) = \pi$ cm, $C(1) = 2\pi$ cm, $C(1,5) = 3\pi$ cm, $C(2) = 4\pi$ cm, $C(2,5) = 5\pi$ cm e $C(3) = 6\pi$ cm.

28 Faça o que se pede em cada item.

a) Calcule a medida do comprimento de circunferências cujos raios meçam, respectivamente, 0,5 cm, 1 cm, 1,5 cm, 2,0 cm, 2,5 cm e 3 cm.

b) Construa um quadro. Na primeira coluna, coloque a medida do raio e, na segunda, a medida do comprimento da circunferência. Consulte o quadro no Manual do Professor.

c) Construa um gráfico com base nos dados apresentados nesse quadro. Consulte o gráfico no Manual do Professor.

d) Elabore uma sentença matemática que, a cada valor da medida do raio, faça corresponder um valor para a medida do comprimento da circunferência. $C(r) = 2\pi r$

e) Podemos dizer que essa relação entre grandezas é uma função? Por quê? Sim, pois a cada medida de raio está associado uma, e apenas uma, medida de comprimento.

f) Sendo a relação dada uma função, determine seu domínio e seu conjunto imagem.
$D(f) = \{0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$
$Im(f) = \{\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi\}$

A atividade **30** permite que os estudantes interpretem criticamente uma situação econômica que envolve a variação de grandezas, pela análise do gráfico que representa a alíquota do Imposto sobre a Renda a pagar em função do salário, desenvolvendo as habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT404**. Comente com os estudantes que, no cálculo do Imposto sobre a Renda, ainda é considerada uma parcela a deduzir em cada faixa. Indique a eles a fonte de pesquisa da tabela para que obtenham mais informações.

29 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(Enem) Dirigir após ingerir bebidas alcoólicas é uma atitude extremamente perigosa, uma vez que, a partir da primeira dose, a pessoa já começa a ter perda de sensibilidade de movimentos e de reflexos. Apesar de a eliminação e absorção do álcool depender de cada pessoa e de como o organismo consegue metabolizar a substância, ao final da primeira hora após a ingestão, a concentração de álcool (C) no sangue corresponde a aproximadamente 90% da quantidade (q) de álcool ingerida, e a eliminação total dessa concentração pode demorar até 12 horas.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 1º dez. 2018 (adaptado).

Nessas condições, ao final da primeira hora após a ingestão da quantidade q de álcool, a concentração C dessa substância no sangue é expressa algebricamente por Alternativa **a**.

a) $C = 0{,}9q$
b) $C = 0{,}1q$
c) $C = 1 - 0{,}1q$
d) $C = 1 - 0{,}9q$
e) $C = q - 10$

30 **A tabela a seguir apresenta a alíquota definida para o cálculo mensal do Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF) em 2024 no Brasil.**

Incidência mensal	
Base de cálculo (R$)	**Alíquota (%)**
Até 2 259,20	0 (isento)
De 2 259,21 a 2 826,65	7,5
De 2 826,66 a 3 751,05	15
De 3 751,06 a 4 664,68	22,5
Acima de 4 664,68	27,5

Fonte de pesquisa: Brasil. Receita Federal do Brasil. *Tributação de 2024*. Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/2024. Acesso em: 20 jun. 2024.

a) Construa um gráfico que represente a alíquota do IRPF a pagar em função do salário.
Consulte o gráfico no Manual do Professor.

b) Reúna-se com um colega para fazer uma análise do gráfico que vocês construíram no item anterior. Reflitam sobre como o IRPF incide sobre as faixas salariais. Por fim, escrevam um pequeno texto que sintetize as ideias que vocês levantaram.
Respostas pessoais.

31 **Considerando que $\ell \in \mathbb{N}^*$ é a medida do lado de um quadrado qualquer e P, a medida de seu perímetro, resolva os itens a seguir.**

a) Copie este quadro no caderno e complete-o:

ℓ	1	2	3	4	5	6	7
P	4	8	12 ////	16 ////	20 ////	24 ////	28 ////

b) Sim, pois a cada medida de lado ℓ temos um, e apenas um, valor de perímetro P associado.

b) A relação entre a medida do lado de um quadrado e seu perímetro é um exemplo de função? Por quê?

c) Construa um gráfico que represente essa relação.
Consulte o gráfico no Manual do Professor.

32 **Retome os exemplos de funções presentes nas atividades desta seção e verifique quais delas têm valores de y crescente ou decrescente quando x varia no domínio da função.**
Consulte a resposta no Manual do Professor.

33 **Em cada item, é descrita uma situação que relaciona duas grandezas. Analise cada uma delas e verifique se as previsões são corretas ou não.**

a) Um time marcou 30 pontos no primeiro quarto de um jogo de basquete. Portanto, no final do jogo (quatro quartos), o time terá marcado 120 pontos. Nada podemos dizer sobre os pontos dos demais quartos.

b) Em duas horas de viagem, um carro com velocidade constante percorreu 200 km. Mantendo a mesma velocidade, após cinco horas, ele terá percorrido 500 km. Correta.

c) Uma pessoa gastou R$ 10,00 no mercado em 10 minutos. Se ela ficar no mercado 50 minutos, gastará R$ 50,00. Nada podemos dizer sobre o gasto nos demais minutos.

d) Um estacionamento cobra R$ 3,50 pela primeira hora na vaga e R$ 2,00 pelas horas adicionais. Se uma pessoa estacionar o carro durante duas horas, ela pagará R$ 5,50. Correta.

34 **Considere as informações apresentadas nos itens a seguir e elabore uma ou mais questões para cada um deles.** Redigir um problema com base nos dados de uma tabela e/ou de um gráfico possibilita aos estudantes aprimorar a linguagem matemática.

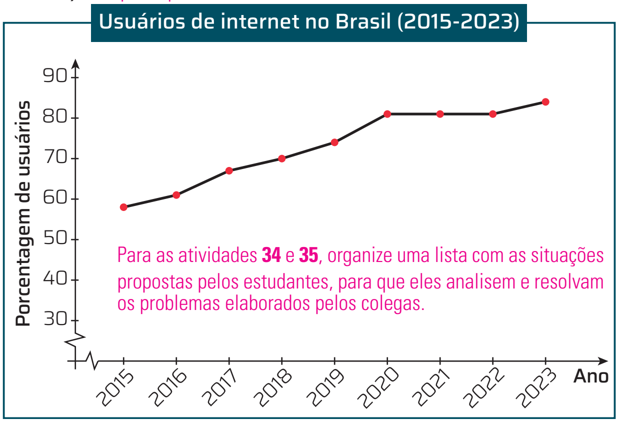
a)

Celular para uso pessoal no Brasil						
Ano	2016	2017	2018	2019	2021	2022
Quantidade de pessoas (em milhões)	136,3	139,5	142,8	147,1	155,2	160,4

Fonte de pesquisa: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). *Pnad contínua 2022*. [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/home/ipp/brasil. Acesso em: 20 jun. 2024.

34. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.



Para as atividades **34** e **35**, organize uma lista com as situações propostas pelos estudantes, para que eles analisem e resolvam os problemas elaborados pelos colegas.

Fonte de pesquisa: Centro Regional de Estudos para o Desenvolvimento da Sociedade da Informação (Cetic). *TIC Domicílios 2023*. NIC.br, 16 nov. 2023. Disponível em: https://cetic.br/media/analises/tic_domicilios_2023_coletiva_imprensa.pdf. Acesso em: 20 jun. 2024.

35 **Crie uma lei de formação para uma função e construa apenas um quadro correspondente a ela. Troque de quadro com um colega para que um descubra a regra do outro. Depois, juntos, construam o gráfico e deem o domínio e o conjunto imagem das funções criadas.**
Resposta pessoal.

A atividade **33** trabalha a análise de texto para desenvolver nos estudantes a capacidade de identificar e superar fragilidades argumentativas, como generalizações indevidas. As atividades **30** e **35** permitem que os estudantes exercitem a empatia, o diálogo e a cooperação, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e seus saberes, contribuindo para a aquisição da competência geral **9**.

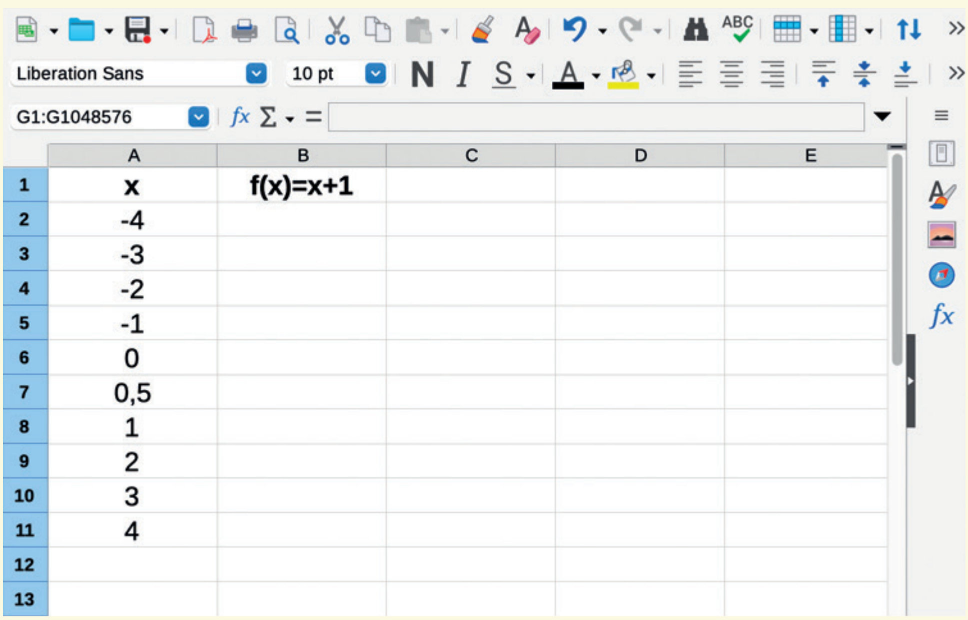
Não escreva no livro.

TECNOLOGIA

Você já sabe como construir gráficos na planilha eletrônica Calc, por meio de tabelas inseridas nessa planilha. Agora, você vai aprender a construir gráficos de funções de domínio real na planilha Calc.

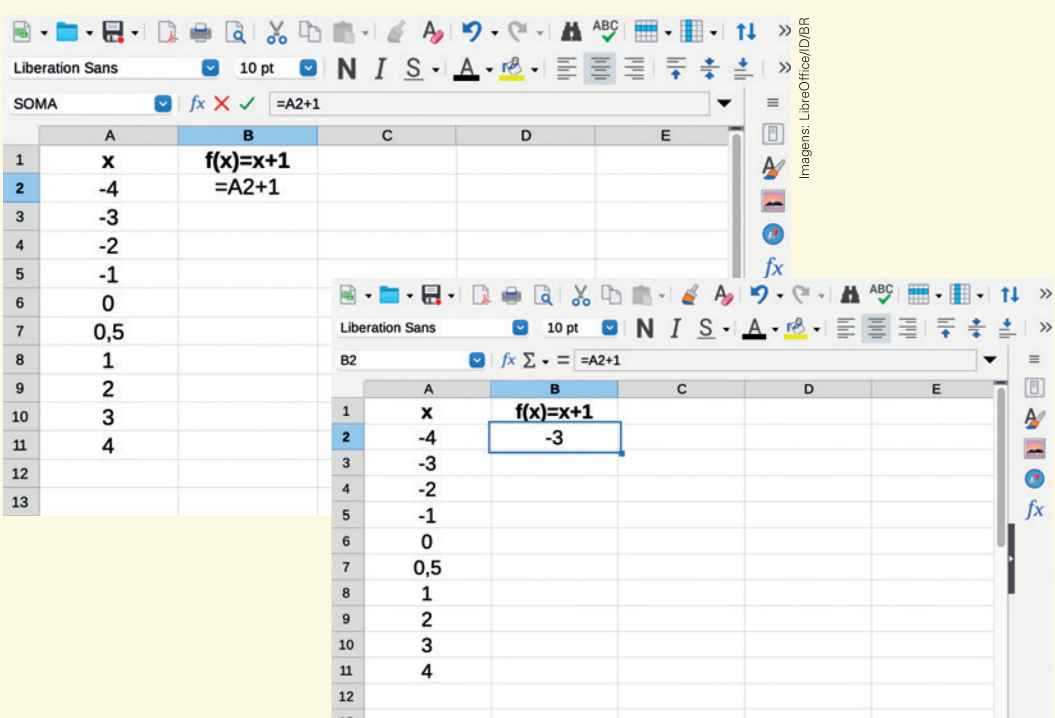
Para isso, acompanhe a seguir as etapas de como construir o gráfico da função de domínio real $f(x) = x + 1$, para $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

1ª etapa: Abra a planilha. Na coluna A, vamos colocar os valores de *x* e, na coluna B, vamos obter os valores de $f(x)$. Nas células A2:A11 atribuímos alguns valores a *x*.



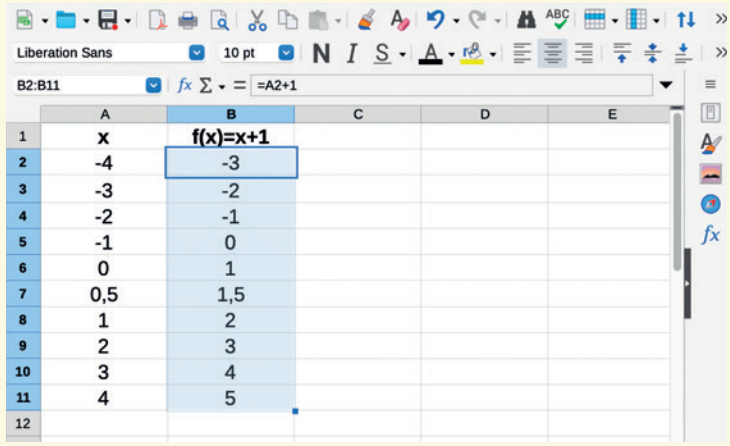
LibreOffice/ID/BR

2ª etapa: Na célula B2, digite =A2+1. Depois, pressione a tecla Enter e observe o que acontecerá.



Imagens: LibreOffice/ID/BR

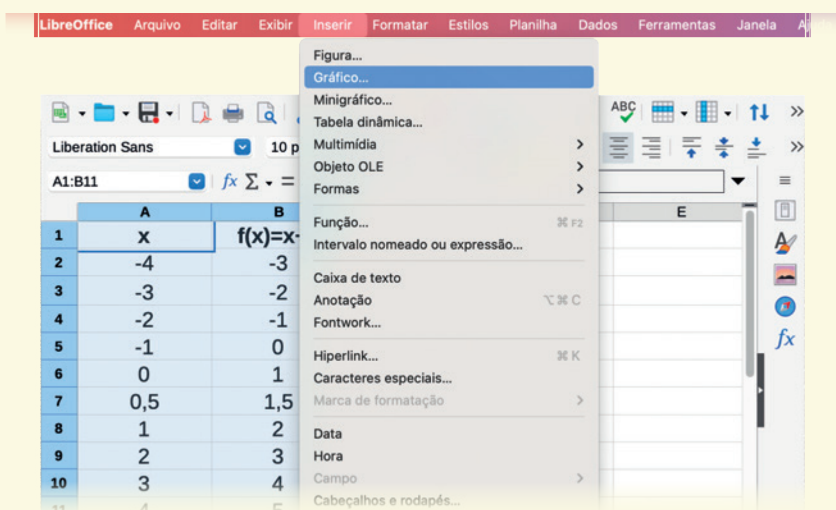
3ª etapa: Clique na opção autopreenchimento , no canto inferior direito da célula B2, e arraste o cursor até a célula B11. Os valores de *f*(*x*), da coluna B, serão calculados automaticamente.



LibreOffice/ID/BR

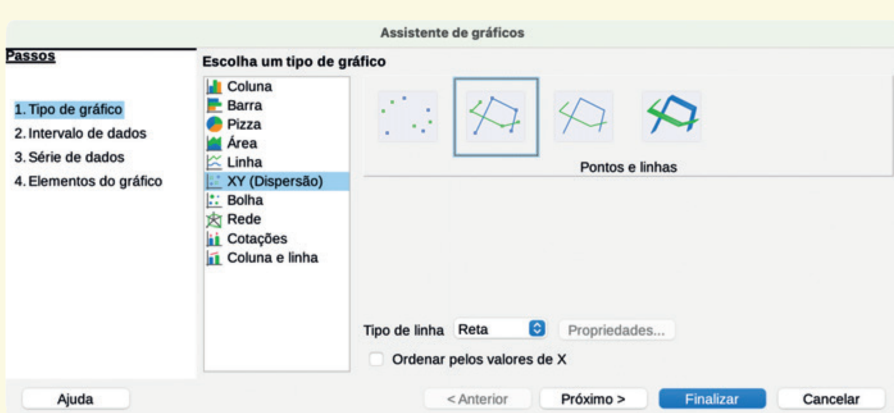
Se quiser verificar a validade dos números que apareceram na coluna B, dê um duplo clique em qualquer uma das células a partir de B3 e observe o que acontece.

4ª etapa: Agora, vamos construir o gráfico dessa função. Selecione toda a tabela, clique em "Inserir" e, depois, em "Gráfico", para abrir o "Assistente de gráficos".



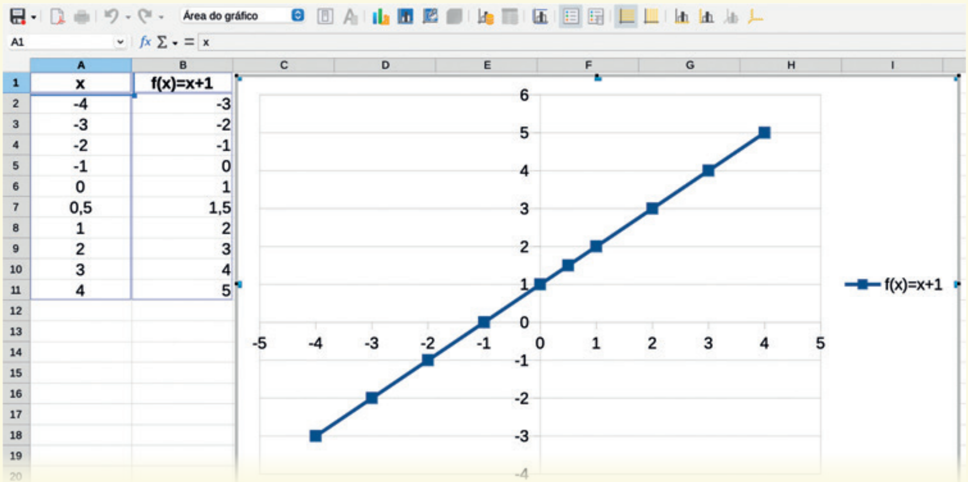
LibreOffice/ID/BR

5ª etapa: No "Assistente de gráficos", escolha o tipo de gráfico selecionando as opções "*XY* (Dispersão)" e "Pontos e linhas".



LibreOffice/ID/BR

6ª etapa: Por fim, clique em finalizar para construir o gráfico. Use os recursos disponíveis no LibreOffice para formatar o gráfico como você preferir.



LibreOffice/ID/BR

É importante que os estudantes indiquem, na planilha eletrônica, os extremos do intervalo que querem determinar. Os valores e a quantidade de valores indicados por eles entre esses intervalos podem variar. Proponha a eles que compartilhem esses valores, para que percebam que, mesmo indicando valores um pouco diferentes, o gráfico construído tem o mesmo traçado.

ATIVIDADES

1 **De acordo com o exemplo apresentado nas páginas 69 e 70, responda às questões a seguir.**

a) O que significa a expressão digitada em B2, na segunda etapa? Que relação ela tem com a função $f(x) = x + 1$? O número é consecutivo ao que está em A2, ou seja, é o resultado da adição de 1 ao número que está em A2. Essa expressão significa que, na célula B2, sempre teremos o número consecutivo ao que estiver na célula A2.

b) Na imagem da direita da 2ª etapa, o que o número que apareceu na célula B2 representa? Nas células B2 a B11, temos os números consecutivos aos que estão nas células A2 a A11, respectivamente.

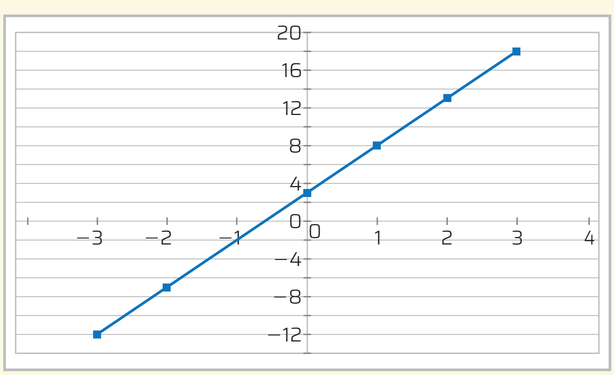
c) Sem realizar cálculos, determine:

- $f(-3)$ $f(-3) = -2$
- $f(-1)$ $f(-1) = 0$
- $f(0)$ $f(0) = 1$
- $f(0{,}5)$ $f(0{,}5) = 1{,}5$
- $f(2)$ $f(2) = 3$
- $f(4)$ $f(4) = 5$

d) O que você observou para responder ao item **c** sem realizar cálculos? As células A2 a A11 e B2 a B11 da planilha.

e) Determine o domínio e o conjunto imagem da função representada pelo gráfico da 6ª etapa. $D(f) = [-4, 4]$ e $Im(f) = [-3, 5]$

2 **Observe a seguir o gráfico da função $f(x)$, construído na planilha eletrônica Calc.**



ID/BR

a) Determine o domínio e o conjunto imagem da função f representada no gráfico. $D(f) = [-3, 3]$ e $Im(f) = [-12, 18]$.

b) Qual das sentenças matemáticas a seguir é lei da função que foi representada no gráfico? III

I) $f(x) = 3x + 2$

II) $f(x) = -3x + 3$

III) $f(x) = 5x + 3$

IV) $f(x) = -5x + 2$

c) Na planilha eletrônica Calc, reproduza o gráfico da função que você indicou no item **b**, para valores de x entre -5 e 7. Consulte a resposta no Manual do Professor.

3 **Retorne à atividade 15 e construa um gráfico para cada função na planilha eletrônica Calc.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

Se na escola houver projetor e computadores disponíveis, utilize-os, para que os estudantes possam apresentar os gráficos que construíram.

DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO DE VARIÁVEL REAL

Você já viu que para a completa caracterização de uma função, precisamos de dois conjuntos – o **domínio** e o **contradomínio** –, de modo que a todo elemento x pertencente ao domínio esteja associado um único elemento y pertencente ao contradomínio.

Quando uma função f é descrita apenas por uma sentença $y = f(x)$, e x é um número real, podemos considerar que:

- o **domínio** é o subconjunto de $\mathbb{R}$ dos valores de x para os quais a expressão que define $f(x)$ pode ser calculada;
- o **contradomínio** é $\mathbb{R}$.

Assim, para a função $f(x) = \frac{6x}{7}$ o domínio é $\mathbb{R}$ e para a função $g(x) = \frac{6}{7x}$, o domínio é $\mathbb{R}^*$, pois x não pode ser nulo. Acompanhe outros exemplos de funções e como obter o domínio de cada uma delas.

Exemplo 1

Considere a função $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$. Nessa função, o denominador não pode ser nulo. Assim:

$$x - 2 \neq 0$$
$$x \neq 2$$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$.

Exemplo 2

Considere a função $f(x) = \sqrt[4]{2x - 6}$. Em $\mathbb{R}$, o radicando de uma raiz de índice par não pode ser negativo. Então:

$$2x - 6 \geqslant 0$$
$$2x \geqslant 6$$
$$x \geqslant 3$$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\} = [3, +\infty[$.

Exemplo 3

Considere a função $f(x) = \sqrt[3]{2x - 8}$.
Como o radicando de uma raiz de índice ímpar pode ser negativo, nulo ou positivo, então $2x - 8$ pode assumir todos os valores reais e, consequentemente, x pode assumir qualquer valor real.
Portanto, $D(f) = \mathbb{R}$.

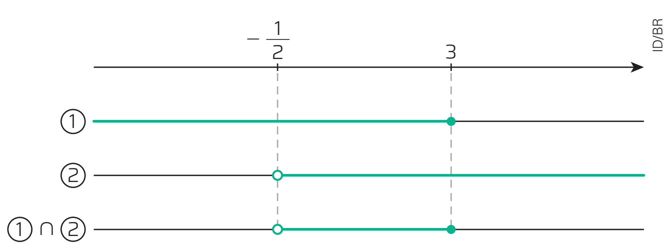
Exemplo 4

Considere a função $f(x) = \frac{\sqrt{3 - x}}{\sqrt{2x + 1}}$.

Em $\mathbb{R}$, o radicando de uma raiz de índice par não pode ser negativo e o denominador de uma fração não pode ser nulo. Então:

$$3 - x \geqslant 0 \qquad\qquad 2x + 1 > 0$$
$$-x \geqslant -3 \qquad\qquad 2x > -1$$
$$x \leqslant 3 \quad ① \qquad\qquad x > -\frac{1}{2} \quad ②$$

Vamos efetuar a intersecção dos intervalos ① e ②, por meio do seguinte esquema:



Portanto, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x \leqslant 3\right\} = \left]-\frac{1}{2}, 3\right]$.

OPERAÇÕES BÁSICAS ENTRE FUNÇÕES

Considere as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 5x$. A partir delas, podemos definir as seguintes funções:

- $S(x) = x^2 + 5x$
- $P(x) = x^2 \cdot 5x$
- $Q_2(x) = \dfrac{5x}{x^2}$
- $D(x) = x^2 - 5x$
- $Q_1(x) = \dfrac{x^2}{5x}$

Perceba que essas cinco novas funções dependem de f e de g e foram construídas a partir delas por soma (S), diferença (D), produto (P) e quociente (Q) dos valores de x que pertencem simultaneamente ao domínio de f e ao de g. As três primeiras funções têm domínio $\mathbb{R}$, enquanto as funções Q_1 e Q_2 têm domínio $\mathbb{R}^*$. Podemos definir as operações entre duas funções quaisquer da maneira indicada a seguir.

Dadas as funções:

$$\begin{aligned} f\colon A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} g\colon B &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = g(x) \end{aligned}$$

definimos:

- **Soma** de f e g como sendo a função que denotamos por $f + g$ com domínio $A \cap B$, pela relação $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para cada x em $A \cap B$.
- **Diferença** de f e g como sendo a função que denotamos por $f - g$ com domínio $A \cap B$, pela relação $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ para cada x em $A \cap B$.
- **Produto** de f e g como sendo a função que denotamos por $f \cdot g$ com domínio $A \cap B$, pela relação $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ para cada x em $A \cap B$.
- **Quociente** de f e g como sendo a função que denotamos por $\dfrac{f}{g}$ com domínio $C = \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$, pela relação $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ para cada x em C.

SIMETRIA E FUNÇÕES

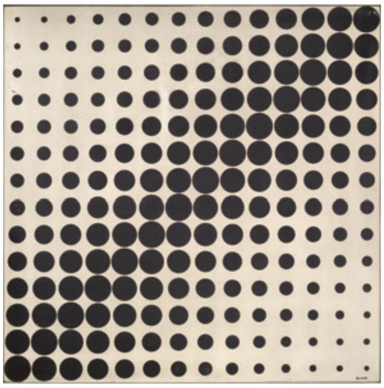
O objeto digital traz imagens que exemplificam como a simetria está presente em obras de arte e na Arquitetura.

Simetria na Arte e na Arquitetura

Na Arte e na Arquitetura, é comum utilizar figuras e objetos que remetem à ideia de simetria, em virtude da harmonia e do equilíbrio que proporcionam.


Bernard Barroso/Shutterstock.com/ID/BR

Fachada do Teatro Amazonas, em Manaus (AM). Foto de 2022.


Luiz Sacilotto/Coleção particular

SACILOTTO, Luiz. *Concreção 8079*, 1980. Têmpera sobre tela sobre madeira, 80 cm × 80 cm.

Uma figura plana simétrica que tem simetria de reflexão apresenta uma reta chamada **eixo de reflexão** ou **eixo de simetria**, que a divide em duas figuras congruentes que podem ser sobrepostas. Esse eixo funciona como um espelho que reflete uma parte sobre a outra. Ao dobrarmos a figura nessa linha, cada parte se encaixará perfeitamente na outra.

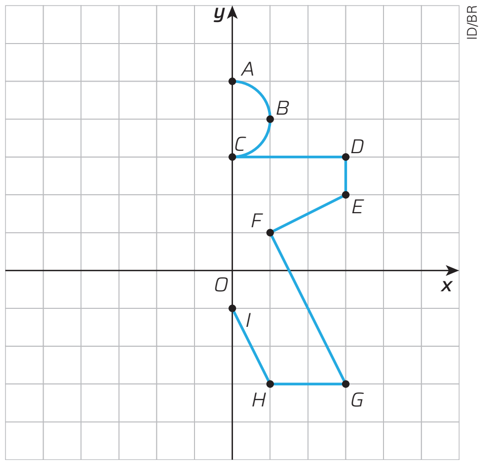

@mickart_/ID/BR

Muitas das propriedades dos gráficos de funções serão justificadas pela simetria. Daí a importância do estudo sobre simetrias no plano cartesiano. O trabalho com simetria e análise das produções arquitetônica e artística contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT105**, que auxiliará os estudantes a aplicar os conceitos estudados na construção dos gráficos de funções. Sugerimos que realize com eles a experiência do espelho. Também é possível promover um trabalho com os professores de Arte e Língua Portuguesa, a fim de desenvolver as competências específicas **3** e **6** da área de Linguagens e suas Tecnologias.

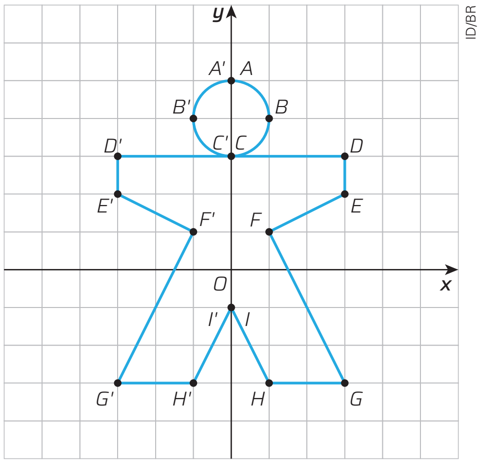
Simetria no plano cartesiano

No plano cartesiano, a simetria de reflexão apresenta relações entre as coordenadas dos pontos da figura simétrica.

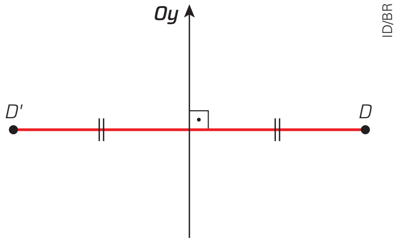
Imagine que o eixo vertical Oy seja o eixo de simetria de uma figura e que apenas a metade que fica à direita do eixo vertical esteja desenhada, como indicado na figura a seguir.



Ao completar a figura, quais serão as coordenadas dos pontos da metade à esquerda correspondentes aos pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I? Qual é a relação entre as abscissas desses nove pontos e as de seus correspondentes? E entre as ordenadas?



Cada ponto situado à esquerda do eixo Oy é **simétrico** a um ponto à direita desse eixo. Por exemplo, na figura a seguir, D' é o ponto simétrico ao ponto D em relação ao eixo Oy.



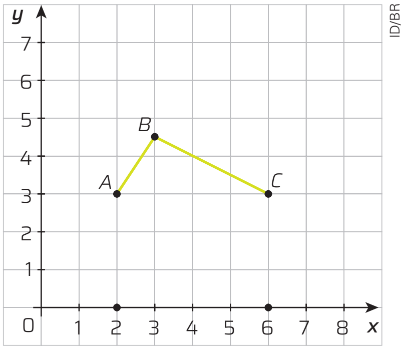
Coordenadas e simetria

Todos os exemplos de funções apresentados até aqui eram de funções de uma variável. No entanto, existem funções de duas variáveis.

Um exemplo de função de duas variáveis é a função S, cujo domínio é o plano cartesiano e que, a cada ponto do plano com coordenadas (x, y), associa-se o ponto $(x, -y)$, também do plano cartesiano.

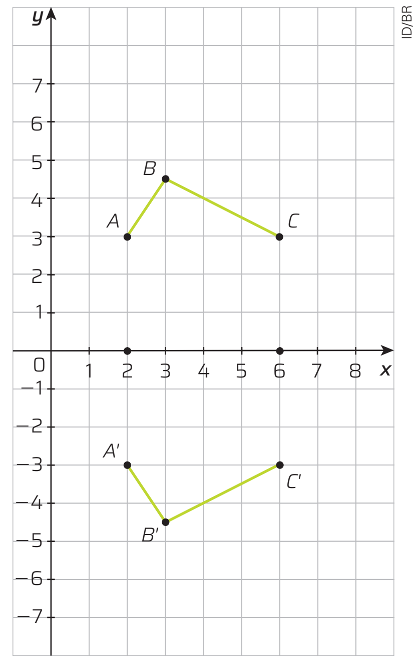
Ela pode ser escrita da seguinte maneira: $S(x, y) = (x, -y)$ para todo (x, y) do plano cartesiano.

Vamos investigar o que essa função faz com os pontos da linha poligonal ABC a seguir.



Representando por A', B' e C' os pontos imagens correspondentes a A, B e C, temos:

- $S(A) = S(2, 3) = (2, -3) = A'$
- $S(B) = S(3; 4,5) = (3; -4,5) = B'$
- $S(C) = S(6, 3) = (6, -3) = C'$



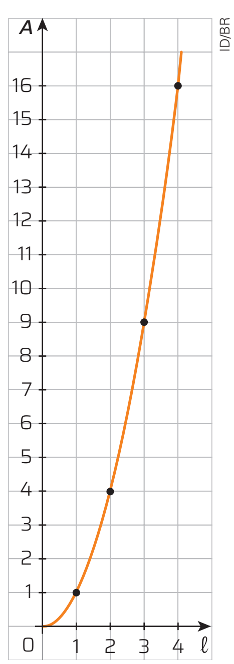
A função S transformou a linha ABC na linha $A'B'C'$, simétrica à linha original em relação ao eixo de reflexão Ox.

Observe que o eixo Ox funciona como um espelho que reflete $ABCDE$ sobre $A'B'C'D'E'$.

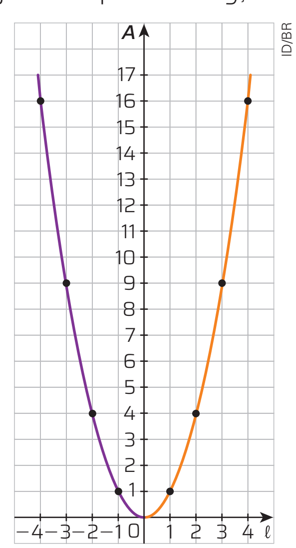
Agora, vamos fazer o mesmo com os gráficos de funções, uma vez que eles são figuras no plano.

Vamos considerar a função que relaciona a medida do lado de um quadrado com sua área. Se o lado do quadrado mede x, podemos escrever a área A usando a relação $A(x) = x^2$, para $x > 0$, com x real.

O gráfico da função A está representado a seguir.



O que acontece com os pontos desse gráfico se considerarmos a função $R(x, y) = (-x, y)$? A função R mantém a ordenada de cada ponto e troca o sinal da abscissa de cada ponto. Por exemplo, o ponto (1, 1) do gráfico é levado pela função R para $(-1, 1)$, e o ponto (2, 4) terá como imagem o ponto $(-2, 4)$. Portanto, a imagem do gráfico da função A, por essa simetria de reflexão, é a figura à esquerda de Oy, em roxo:



O eixo das ordenadas Oy passa a ser o eixo de simetria da figura inteira, composta da parte laranja e da parte roxa. Essa figura inteira corresponde ao gráfico da função $f(x) = x^2$, considerando qualquer valor real.

A simetria do gráfico dessa função é uma propriedade importante e será explorada no capítulo **5** desta unidade.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

36 Determine o domínio de cada função a seguir.

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-12}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\} = \mathbb{R} - \{4\}$

b) $f(x) = \sqrt{3x-15}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\} = [5, +\infty[$

c) $f(x) = \sqrt[6]{-2x+6}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\} =]-\infty, 3]$

d) $f(x) = \sqrt[3]{2x+5}$ $D(f) = \mathbb{R}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{2x+5}}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > -\frac{5}{2}\right\} = \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$

f) $f(x) = \dfrac{3x-7}{x^2-4}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{1-x}}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\} = [0, 1[$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+5}}{x-2}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geqslant -\frac{5}{2} \text{ e } x \neq 2\right\}$

37 Reproduza a linha poligonal *ABC* do tópico "Coordenadas e simetria" no caderno e faça o que se pede.

a) Construa a linha poligonal $A''B''C''$ usando a função $R(x, y) = (-x, y)$. Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) Que relação existe entre a linha poligonal *ABC* e sua imagem por *R*? São simétricas em relação ao eixo *Oy*.

c) Agora, aplique sobre a linha poligonal *ABC* a função $V(x, y) = (-x, -y)$. Que transformação foi feita sobre ela? Agora, a linha poligonal formada e a inicial são simétricas em relação à origem do sistema cartesiano.

d) As figuras obtidas nos itens **a** e **c** são congruentes à linha poligonal *ABC*? E entre si?
Sim, pois mantêm forma e dimensões.

38 Reproduza, no caderno, o gráfico apresentado no tópico "Coordenadas e simetria" da função da área do quadrado $A(x) = x^2$, para $x > 0$, com x real. Depois, trace a imagem dos pontos desse gráfico pela função $S(x, y) = (x, -y)$. Em seguida, responda às questões.

a) Qual é o eixo de simetria da figura composta pelo gráfico de *A* e a imagem obtida por *S*?
O eixo de simetria é o eixo *Ox*.

b) A nova figura formada corresponde ao gráfico de uma função? Justifique sua resposta.
Não corresponde a uma função, porque há mais de uma imagem para um mesmo valor de *x* do domínio.

39 Considerando as funções f, g e h apresentadas a seguir, determine os domínios das funções indicadas em cada item.

$f(x) = -2x$ $g(x) = x^2$ $h(x) = \dfrac{1}{x}$

a) $f + g$ $D = \mathbb{R}$

b) $g + h$ $D = \mathbb{R} - \{0\}$

c) $\dfrac{f}{h}$ $D = \mathbb{R} - \{0\}$

d) $\dfrac{h}{g}$ $D = \mathbb{R} - \{0\}$

e) $f \cdot g$ $D = \mathbb{R}$

f) $f \cdot h$ $D = \mathbb{R} - \{0\}$

40 Resolva a equação $\dfrac{f(x) - g(x)}{x} = 0$, sabendo que $f(x) = x - 3$ e $g(x) = \dfrac{30}{x^2 + 6x - 10}$. $S = \{-7, 4\}$

TECNOLOGIA

Use uma calculadora para resolver as atividades propostas a seguir.

tatianasun/Shutterstock/ID/BR

Aplicativo de calculadora no celular.

1 Em cada caso, determine um número que, colocado no local indicado com ■, permita que o resultado da operação esteja dentro do intervalo determinado. Respostas pessoais.

a) $15 \cdot ■ \in [40, 50]$

b) $7 \cdot ■ \in [1, 4]$

c) $8 \cdot ■ \in [2, 3]$

d) $15 : ■ \in [68, 70]$

2 Qual é o maior número inteiro y que torna a desigualdade a seguir verdadeira? 11

$$y \cdot 84\,697 < 1\,000\,000$$

3 Descubra como usar a calculadora para calcular as potências indicadas em cada item.

a) 2^4 (2) (x^y) (4) (=)

b) 2^{10} (2) (x^y) (1) (0) (=)

c) 3^8 (3) (x^y) (8) (=)

d) 4^5 (4) (x^y) (5) (=)

e) 5^9 (5) (x^y) (9) (=)

4 Se você digitar -2 e apertar ($\sqrt{\ }$), o que a calculadora mostra? Por quê?
Indicará um erro, porque a raiz quadrada de um número negativo não existe em $\mathbb{R}$.

Não escreva no livro.

CÁLCULO RÁPIDO

No estudo das funções, alguns cálculos algébricos costumam aparecer com frequência. Vamos calcular mentalmente.

1 Simplifique.

a) $x + 2x - 3x$ 0

b) $-2x + x + 5$ $-x + 5$

c) $3 - (x + 1) + 2x$ $2 + x$

d) $5(x - 1) + 2(3 - x)$ $3x + 1$

e) $-(x - 3) + 4x$ $3x + 3$

f) $2x - 3y - x + y$ $x - 2y$

g) $2(x - y) + 3x + y$ $5x - y$

h) $3(x + y) + 2(7 - x)$ $x + 3y + 14$

2 Calcule mentalmente a raiz de cada equação.

a) $t - 30 = 65$ $t = 95$

b) $y - 30 = -65$ $y = -35$

c) $z + 30 = 65$ $z = 35$

d) $-n + 30 = 65$ $n = -35$

e) $-a - 30 = 65$ $a = -95$

f) $-x + 30 = -65$ $x = 95$

g) $-b + 30 = -65$ $b = 95$

h) $m - 40 = 75$ $m = 115$

i) $y - 40 = 75$ $y = 115$

j) $r + 35 = -10$ $r = -45$

3 Responda aos itens a seguir.

a) Quantos metros há em: 12,7 km, 18,75 km, 2 km? 12 700 m; 18 750 m; 2 000 m

b) Quantos quilômetros há em: 3 758 m, 12 000 m, 750 m? 3,758 km; 12 km; 0,75 km

c) Quantos centímetros há em: 3,48 m, 24,1 m, 1,5 m? 348 cm; 2 410 cm; 150 cm

d) Quantos metros há em: 258 cm, 175 cm, 15 cm? 2,58 m; 1,75 m; 0,15 m

4 Sabendo que 1 h equivale a 60 min (ou 60') e que 1 min equivale a 60 s (ou 60"), calcule:

a) quantos minutos há em: 10 h; 1 h 30 min; 7 h 20 min; 1 h 15 min; 3 dias; 600 min; 90 min; 440 min; 75 min; 4 320 min.

b) quantos segundos há em: 3 min; 60 min; 6 min 3 s; 1,5 min; 1 h; 4 min 30 s. 180 s; 3 600 s; 363 s; 90 s; 3 600 s; 270 s

Verifique se os estudantes percebem que podem realizar os cálculos usando diferentes estratégias.

5 Escreva cada fração algébrica a seguir na forma mais simples.

a) $\frac{4x}{2}$ $2x$

b) $\frac{6x - 2}{2}$ $3x - 1$

c) $\frac{-x^2}{x}$ x, com $x \neq 0$

d) $\frac{x^2 + 2x}{x}$ $x + 2$, com $x \neq 0$

e) $\frac{4x}{4}$ x

f) $\frac{6x - 2}{4}$ $\frac{3x - 1}{2}$

g) $\frac{-2x^2 + 4x}{x}$ $-2x + 4$, com $x \neq 0$

h) $\frac{4x}{8}$ $\frac{x}{2}$

i) $\frac{6x - 2}{8}$ $\frac{3x - 1}{4}$

j) $\frac{-x^2}{2x}$ $-\frac{x}{2}$, com $x \neq 0$

k) $\frac{x^2 + 2x}{2x}$ **k)** $\frac{x + 2}{2}$, com $x \neq 0$

l) $\frac{x^4 + 3x^2}{x^2}$ $x^2 + 3$, com $x \neq 0$

6 Escreva em linguagem algébrica cada expressão a seguir, conforme o exemplo.

> Um número aumentado em duas unidades: $a + 2$.

a) O dobro de um número. $2a$

b) O quadrado de um número. a^2

c) Um número diminuído em duas unidades. $a - 2$

d) A divisão de um número por 2. $\frac{a}{2}$

e) Aumentar 2 em duas vezes um número. $2a + 2$

f) O dobro de um número diminuído em duas unidades. $2a - 2$

g) A soma do quadrado de um número com o quadrado de 2. $a^2 + 2^2$

h) O quadrado da soma de um número e 2. $(a + 2)^2$

i) A diferença entre o quadrado de um número e o quadrado de 2. $a^2 - 2^2$

j) O quadrado da diferença entre um número e 2. $(a - 2)^2$

k) Duas vezes a soma de 2 e um número. $2(2 + a)$

Após as atividades **3** e **4** da seção *Cálculo rápido*, converse com o professor de Física para que, juntos, trabalhem outras atividades de cálculo mental que auxiliem os estudantes nos cálculos rápidos com números decimais e medidas.

PARA RECORDAR

1 Dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ e $B = [0, 5[$, determine o que se pede em cada item.

a) $A \cap B$ $[0, 1[$

b) $A \cup B$ $]-1, 5[$

c) $A - B$ $]-1, 0[$

d) $B - A$ $]1, 5[$

2 A resolução de cada equação a seguir **contém erros**. Encontre-os e corrija-os.

a)
$$x(x + 4) + x(x + 2) = 2x^2 + 10$$
$$x^2 + 4 + x^2 + 2 = 2x^2 + 10$$
$$2x^2 + 6 = 2x^2 + 10$$
$$4x^2 = 16$$
$$x^2 = \frac{16}{4} = 4$$
$$x = \pm 2$$

O erro está na aplicação da propriedade distributiva realizada na 2ª linha e no cálculo do termo em x^2 na 4ª linha da resolução. Resposta correta: $x = \frac{5}{3}$.

b)
$$\frac{x}{2} + 6 = x - 9$$
$$\frac{x}{2} + 6 = x - 9$$
$$x + 3 = 2x - 9$$
$$x - 2x = -9 - 3$$
$$-x = -12$$
$$x = 12$$

O erro está na simplificação realizada na 2ª linha da resolução. A resposta correta é $x = 30$.

c)
$$x + \frac{1}{3} = 2x$$
$$\frac{3x + 1}{3} = 2x$$
$$x + 1 = 2x$$
$$1 = 2x - x$$
$$x = 1$$

O erro está na simplificação realizada na 2ª linha da resolução. A resposta correta é $x = \frac{1}{3}$.

Os problemas **2** e **3** podem exigir mais tempo para sua resolução; por isso, uma sugestão é dar o prazo de uma semana para que os estudantes possam desenvolver suas resoluções e depois compartilhar o que fizeram.

3 **Se $200 \leqslant a \leqslant 400$ e $600 \leqslant b \leqslant 1200$, com a e b reais, qual é:**

a) o menor valor possível para a soma $a + b$? 800

b) o maior valor possível para a diferença $b - a$? 1 000

c) o maior valor possível para a diferença $a - b$? -200

d) o menor valor possível para o produto $a \cdot b$? 120 000

e) o maior valor possível para o produto $a \cdot b$? 480 000

f) o menor valor possível para o produto $b \cdot a$? 120 000

g) o maior valor possível para o quociente $\frac{b}{a}$? 6

h) o menor valor possível para o quociente $\frac{b}{a}$? 1,5

4 **Considere o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor m de uma mercadoria.**

a) Qual é a função que representa esse valor? $V(m) = 0{,}97m$

b) Faça um gráfico para essa função e indique seu domínio e seu conjunto imagem. Consulte a resposta no Manual do Professor.

5 **Resolva os sistemas de equações a seguir.**

a) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ $S = \{(1, 2)\}$

b) $\begin{cases} -y = -5 - 2x \\ x = 5 - 2y \end{cases}$ $S = \{(-1, 3)\}$

6 **Classifique cada sentença a seguir em verdadeira (V) ou falsa (F).**

a) O perímetro de um quadrado é diretamente proporcional à medida do lado dele. Verdadeira.

b) O perímetro de um triângulo é diretamente proporcional à medida da área dele. Falsa.

c) O consumo de combustível de um carro é diretamente proporcional à distância percorrida por esse carro. Verdadeira.

d) O tempo gasto para finalizar uma obra é diretamente proporcional ao número de operários que nela trabalham. Falsa.

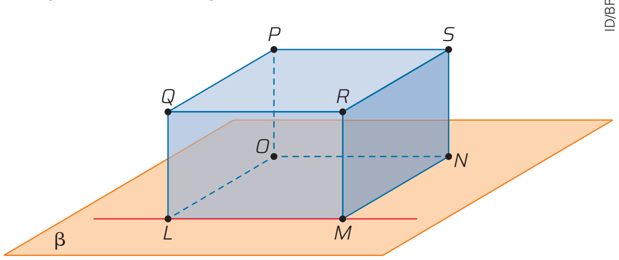
e) O tempo gasto em uma viagem de carro é diretamente proporcional à velocidade do carro. Falsa.

f) O tempo de sono de uma pessoa é diretamente proporcional à idade dela. Falsa.

g) O número do calçado de uma pessoa é diretamente proporcional à altura dela. Falsa.

7 **Na figura a seguir, dizemos que a reta LM está contida no plano β porque todos os seus pontos pertencem ao plano.**

ID/BR



a) Dê exemplos de outras três retas que estão contidas em β. Exemplo de resposta: $\overleftrightarrow{LO}$, $\overleftrightarrow{NO}$, $\overleftrightarrow{MN}$.

b) Dê exemplos de três retas que não estão contidas em β. Exemplo de resposta: $\overleftrightarrow{QP}$, $\overleftrightarrow{RS}$, $\overleftrightarrow{OP}$.

8 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Um estudante de arquitetura projetou um prédio de 32 m de altura a ser construído em uma maquete, em papel-cartão, na escala 1 : 50. Nesse caso, na maquete, a altura do prédio mede Alternativa **c**.

a) 0,32 m.

b) 0,50 m.

c) 0,64 m.

d) 1,00 m.

e) 1,32 m.

9 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFGD-MS) Dados dois números, x e y, considere que cada um deles é composto por quatro dígitos distintos entre si. Assuma que os dígitos de x são pares e formem o maior número possível e os dígitos de y são ímpares e formem o menor número possível. Para a diferença $x - y$, a variação analisada resultou, corretamente, em Alternativa **a**.

a) sete mil, duzentos e oitenta e cinco.

b) duas mil, duzentos e oitenta.

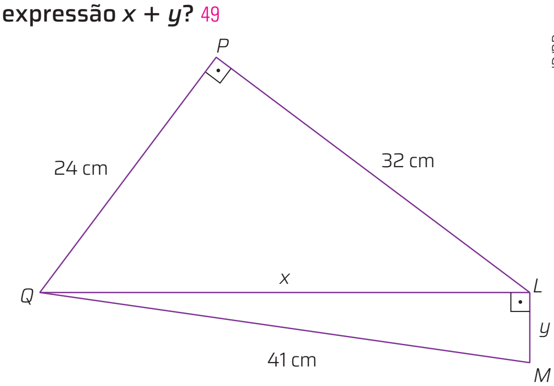
c) mil e oitenta.

d) sete mil e duzentos.

e) sete mil e cinco.

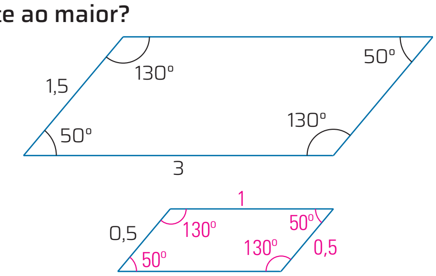
10 **Considerando a figura a seguir, qual é o valor da expressão $x + y$?** 49

ID/BR



11 **Quais devem ser as medidas dos lados e dos ângulos do paralelogramo menor, para que ele seja semelhante ao maior?**

Ilustrações: ID/BR



FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

1 Uma caixa contém quatro caixas menores e cada uma destas contém outras quatro caixas ainda menores. Quantas caixas há ao todo? 21


Denis Freitas/ID/BR

2 Ao ingressar na universidade, Patrícia recebeu de seus pais duas opções de mesada:

- Opção A – R$ 150,00 em janeiro e, todos os meses, mais R$ 150,00 que no mês anterior.
- Opção B – R$ 1,00 em janeiro, triplicando todos os meses a mesada do mês anterior.

a) Qual das duas opções permitirá a Patrícia receber mais dinheiro no final do ano? Opção **B**.

b) Outubro é um mês em que Patrícia prevê muitas despesas. Se o critério de escolha entre a opção A e a opção B fosse o valor da mesada de outubro, Patrícia teria feito a mesma opção? Sim, a opção **B** continua sendo a melhor opção.

3 Em uma noite muito escura, quatro amigos precisam atravessar uma ponte, mas existem algumas dificuldades a serem vencidas. Preste muita atenção a elas! Consulte a resposta no Manual do Professor.

- A ponte é frágil e, por isso, só podem atravessar duas pessoas de cada vez.
- Por causa da escuridão, para fazer a travessia é preciso usar a única lanterna disponível.
- Uma das pessoas leva um minuto para atravessar a ponte, outra leva dois minutos, a terceira pessoa leva cinco minutos e a quarta pessoa atravessa a ponte em 10 minutos.
- Se duas pessoas atravessam a ponte juntas, elas caminham no tempo da pessoa mais lenta.

O desafio é fazer com que todos atravessem a ponte usando ao todo 17 minutos.

4 Resolva a atividade e escreva a afirmação correta no caderno.

Carlos e sua irmã Andreia foram à farmácia do avô deles com o cachorro Lulu. Lá encontraram uma balança com defeito que só indicava corretamente valores superiores a 60 kg. Eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcações: Alternativa **e**.

- Carlos e Lulu juntos — 87 kg
- Carlos e Andreia juntos — 123 kg
- Andreia e Lulu juntos — 66 kg

Podemos afirmar que:

a) a massa de cada um deles é menor que 60 kg.

b) dois deles têm massa maior que 60 kg.

c) Andreia é a mais pesada dos três.

d) a massa de Andreia é a média aritmética das massas de Carlos e Lulu.

e) Carlos é mais pesado que Andreia e Lulu juntos.

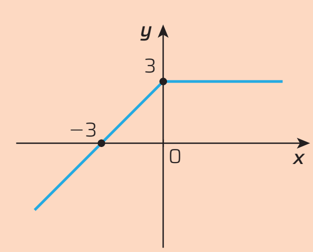
A proposta desta seção é avaliativa. As produções dos estudantes trarão evidências das aprendizagens sobre os conceitos e, ao mesmo tempo, permitirão acompanhar a apropriação da linguagem relativa às funções. Ao final, explique aos estudantes que a proposta é desenvolver estratégias para ajudá-los na autogestão de seus estudos, seja os do tema deste capítulo, seja os de outras áreas do conhecimento.

PALAVRAS-CHAVE

Elabore, no caderno, um resumo das ideias centrais deste capítulo.

Em seguida, analise o gráfico ao lado e escreva no caderno:

- em quais quadrantes do plano cartesiano a função se encontra;
- uma lei na forma $y = f(x)$ que corresponda a esse gráfico;
- o domínio e o contradomínio dessa função;
- o conjunto imagem dessa função.



ID/BR

Agora, escreva no caderno uma explicação para cada um dos seguintes termos estudados neste capítulo.

- Gráfico
- Sistema de coordenadas cartesianas
- Função
- Domínio
- Contradomínio
- Conjunto imagem

Ilustre, dê exemplos, seja criativo!

O objetivo desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes ao desenvolver habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propor que vivenciem um processo investigativo. Esta seção propicia o trabalho com as competências específicas **1** e **2** da área de Matemática e suas Tecnologias, além de favorecer o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT104**, ao possibilitar que os estudantes se posicionem diante de situações contextualizadas e fundamentem seus argumentos em fatos expressos por taxas/índices de outra área do conhecimento.

Desigualdade social

A Matemática é uma importante ferramenta para o estudo de fenômenos sociais. Entre os índices utilizados nesse tipo de estudo, podemos destacar o Índice de Gini. Vamos ler o texto a seguir para conhecer esse índice?

Variação do Índice de Gini de alguns países de 2012 a 2022

O objeto digital acrescenta conhecimento sobre os dados do índice de Gini mostrando a variação desse índice em alguns países ao longo dos anos e analisando como tal variação se relaciona com o aumento ou a diminuição da desigualdade desses países.

Para ampliar os conhecimentos acerca do tema desigualdade social, convide um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, preferencialmente de Geografia, para participar das discussões. Para complementar, aproveite a temática apresentada para explorar informações relacionadas à realidade social do município em que a escola está localizada. Para isso, com a ajuda dos estudantes, defina alguns temas estruturais de grande relevância que indiquem as condições de vida do município e as desigualdades sociais. Proponha a eles que pesquisem essas informações e verifiquem se há políticas públicas para tentar reduzir o problema da desigualdade social, como programas que proporcionem a aquisição de moradia ou o acesso à universidade para pessoas de baixa renda, entre outros. Ao final, proponha a realização de uma exposição para os demais colegas e um debate sobre a importância da interpretação dos dados estatísticos sobre esse tema, visto que podem ser valiosos subsídios à administração pública e ao planejamento social e econômico do Brasil.

O Índice de Gini, criado pelo matemático italiano Conrado Gini, é um instrumento para medir o grau de concentração de renda em determinado grupo. Ele aponta a diferença entre os rendimentos dos mais pobres e dos mais ricos. Numericamente, varia de zero a um (alguns apresentam de zero a cem). O valor zero representa a situação de igualdade, ou seja, todos têm a mesma renda. O valor um (ou cem) está no extremo oposto, isto é, uma só pessoa detém toda a riqueza. Na prática, o Índice de Gini costuma comparar os 20% mais pobres com os 20% mais ricos. [...]

WOLFFENBÜTTEL, Andréa. O que é? – Índice de Gini. *Desafios do Desenvolvimento*, Brasília, DF, ano 1, ed. 4, 2004. Disponível em: http://www.ipea.gov.br/desafios/index.php?option=com_content&id=2048:catid=28. Acesso em: 2 ago. 2024.

Nos últimos anos, esse índice tem apontado uma queda na desigualdade social. A seguir, leia uma reportagem que retrata essa situação.

Desigualdade no Brasil é a menor nos últimos 10 anos, aponta IBGE

A desigualdade no Brasil caiu em 2022 e atingiu o menor nível da série histórica da *Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios* (*Pnad*) *Contínua – Todos os rendimentos*, que começou em 2012.[...]

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) divulgou [...] os dados do índice de Gini do rendimento domiciliar per capita, um indicador de desigualdade, que mostra a queda de 0,544 em 2021 para 0,518 em 2022. O número ficou abaixo também de 2019, quando era 0,544. O Índice Gini mede a concentração da distribuição de renda e quanto mais perto de 1, maior é a desigualdade. E, quanto mais perto de zero, menor é a desigualdade.

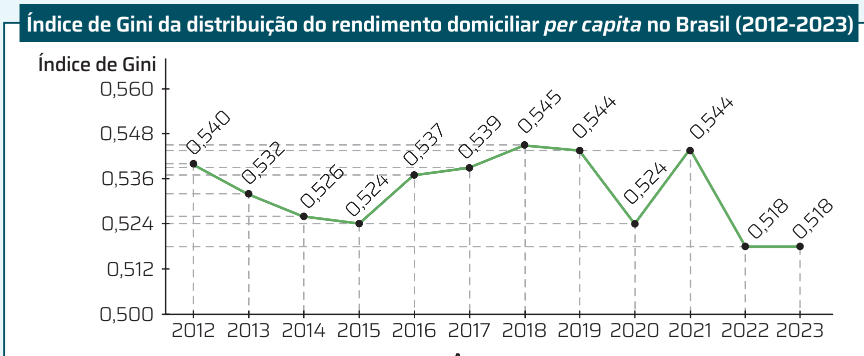
[...]

A analista do IBGE e responsável pela pesquisa, Alessandra Brito, credita a esse movimento de renda, o aumento do valor do Auxílio Brasil em ano eleitoral e a melhora do mercado de trabalho, com o aumento da população ocupada, que cresceu 8,8%, e da massa de rendimentos do trabalho, de 6,6%, para R$ 253,1 bilhões por mês.

"Muitas pessoas voltaram para o mercado de trabalho, os muito pobres estão recebendo um auxílio que se compara ao auxílio emergencial em valor, e o 1% mais rico teve uma pequena redução no rendimento", sintetiza Brito.

DESIGUALDADE no Brasil é a menor nos últimos 10 anos, aponta IBGE. *Correio Braziliense*, Brasília, DF, 11 maio 2023. Seção Economia. Disponível em: https://www.correiobraziliense.com.br/economia/2023/05/5093783-desigualdade-no-brasil-e-a-menor-nos-ultimos-10-anos-aponta-ibge.html. Acesso em: 2 ago. 2024.

Índice de Gini da distribuição do rendimento domiciliar *per capita* no Brasil (2012-2023)



ID/BR

Fonte de pesquisa: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). Tabela 7435: Índice de Gini do rendimento domiciliar *per capita*, a preços médios do ano. *In: Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua anual*. Brasília, DF: IBGE, 2024. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/7435. Acesso em: 4 set. 2024.

Tales Azzi/Pulsar Imagens

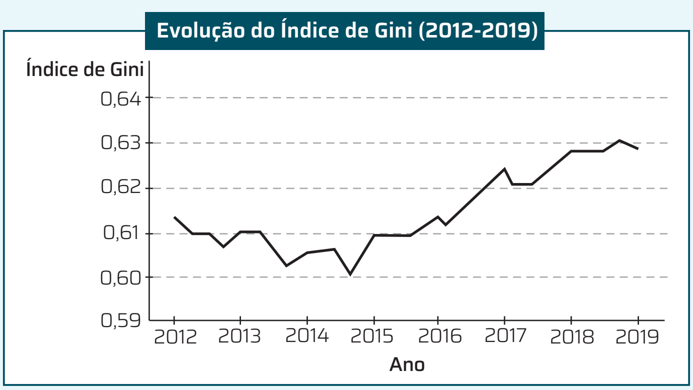
Nesta foto, tirada em São Paulo (SP), é possível perceber alguns elementos que evidenciam a desigualdade social no Brasil. Foto de 2020.

Conectando ideias

1 Faça uma pesquisa sobre os valores atuais desse índice no Brasil. O que se pode afirmar sobre a desigualdade social no país, ao comparar os valores encontrados com os do gráfico da página anterior?
A resposta a essa atividade vai depender do ano em que ela estiver sendo aplicada.

2 Reúna-se com os colegas para discutir quais podem ser os fatores que interferem na variação desse índice. Será que o desemprego pode ser uma das explicações para isso? Resposta pessoal.

3 O gráfico a seguir, extraído de uma reportagem do jornal virtual *Nexo*, mostra a evolução do Índice de Gini no Brasil.



ID/BR

Fonte de pesquisa: Roubicek, Marcelo. A trajetória da desigualdade no Brasil, segundo este economista. *Nexo*, *[s. l.]*, 28 dez. 2023. Disponível em: https://www.nexojornal.com.br/entrevista/2020/02/20/A-trajetoria-da-desigualdade-no-Brasil-segundo-este-economista. Acesso em: 2 ago. 2024.

Além do IBGE, o Banco Mundial apresenta dados atuais do Índice de Gini, em uma página disponível em: https://data.worldbank.org/indicator/SI.POV.GINI?end=2022&locations=BR&start=2009&view=chart (acesso em: 2 set. 2024). Esse dado pode ser comparado com o de outros países no *site* Countryeconomy.com, disponível em: https://pt.countryeconomy.com/demografia/indice-de-gini (acesso em: 2 set. 2024). É interessante notar que o Índice de Gini do Brasil é muito próximo ao de alguns países africanos, como Angola e Zâmbia.

Compare esse gráfico com o apresentado anteriormente.

a) Qual é a principal diferença entre eles? Os estudantes podem apontar que, para um mesmo ano, os dois gráficos apresentam índices diferentes.

b) O ponto de mínimo, ou seja, o ponto que indica a menor desigualdade, coincide nos dois gráficos? Não. No primeiro gráfico, o valor mínimo é 0,518 e, no segundo, é 0,60.

c) A informação de que a desigualdade se acentuou entre 2015 e 2019 está expressa nos dois gráficos? De que maneira?
Sim, é possível extrair essa informação comparando o índice de 2014 com o de 2015.

4 O Índice de Gini é uma medida estatística amplamente utilizada para analisar a distribuição de renda e a disparidade socioeconômica em um país.

Como o Índice de Gini no Brasil reflete a distribuição de renda e as oportunidades socioeconômicas entre os diferentes grupos da população?

- Em grupo, pesquise os efeitos do Índice de Gini na sociedade brasileira e que medidas podem contribuir para evitar a desigualdade social.
- Com os colegas de grupo, elabore um texto com os resultados obtidos.
- Discutam com a turma os principais pontos levantados por todos.

No contexto brasileiro, um Índice de Gini historicamente alto indica que a desigualdade socioeconômica afeta diretamente as oportunidades dos grupos mais vulneráveis da população, dificultando a mobilidade social. Grupos mais vulneráveis têm menos acesso a direitos básicos, como educação de qualidade, serviços de saúde e oportunidades de trabalho. Portanto, políticas públicas que visam reduzir o Índice de Gini podem ser fundamentais para promover uma distribuição mais equitativa de oportunidades, contribuindo para um desenvolvimento social mais justo e inclusivo.

Durante essas atividades, você manteve o foco e resistiu a distrações? Resposta pessoal.
As respostas dos estudantes ao último item trazem evidências da competência socioemocional autogestão.

FUNÇÃO AFIM

NESTE CAPÍTULO

- Função afim ou polinomial do 1º grau
- Zero ou raiz da função afim
- Construção do gráfico de uma função afim
- Função identidade
- Função crescente e função decrescente
- Inequação
- Estudo do sinal

Este capítulo sistematiza o estudo das funções afins e enfatiza a relação entre a expressão algébrica da função e seu gráfico, assim como a utilização da função para a resolução de situações-problema. Portanto, este capítulo favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT401**.
Além disso, neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificar padrões e elaborar hipóteses para generalizar e expressar algebricamente essa generalização e reconhecer quando essa representação é de função polinomial do 1º grau, desenvolvendo, assim, a habilidade **EM13MAT501**.
Os exemplos e os contextos apresentados em algumas atividades podem motivar o interesse dos estudantes pela pesquisa mais aprofundada sobre algum tema relacionado a consumo, saúde, impostos e taxas de serviços ou profissões. Dessa maneira, eles poderão exercitar a curiosidade intelectual e agir com autonomia, o que contribui para a aquisição das competências gerais **2** e **10**.

Antes de comprar um aparelho de ar condicionado, é importante escolher um modelo que funcione adequadamente, sem consumir mais energia elétrica do que o necessário. Para isso, é preciso considerar algumas informações, como a área do ambiente em que o aparelho será instalado, a taxa de resfriamento do aparelho e o número de pessoas que podem frequentar esse ambiente.

A capacidade de resfriamento de um ar-condicionado é medida em BTU, sigla para *british thermal unit*, que significa "unidade térmica inglesa". Essa unidade de medida indica a quantidade de calor que um aparelho pode reduzir ou aumentar de um ambiente; quanto maior o número de BTU, maior é a capacidade de resfriamento do aparelho.

BaLL LunLa/Shutterstock.com/ID/BR

Mulher instalando ar-condicionado.

Cada modelo de ar-condicionado tem uma taxa de resfriamento, que corresponde à capacidade de resfriamento do aparelho em um ambiente de 1 m^2. Nesse caso, podemos representar a capacidade C de resfriamento do aparelho, em BTU, por $C = T \cdot A$, sendo:

- T a taxa de resfriamento em BTU por metro quadrado;
- A a área do ambiente, em metro quadrado.

Para cada pessoa que pode frequentar o ambiente, deve-se adicionar, à capacidade de resfriamento, cerca de uma unidade da taxa de resfriamento do aparelho. Assim, sendo n o número de pessoas no ambiente, podemos representar C em função de n: $C(n) = T \cdot A + n \cdot T$.

Agora, considere a seguinte situação.

Um aparelho de ar-condicionado será instalado em uma sala de aula de 12 m^2 de área que será usada por, no máximo, 10 pessoas. Qual deve ser a capacidade de resfriamento desse aparelho?

Vamos considerar um modelo cuja taxa de resfriamento é de 600 BTU por metro quadrado. Assim, temos:

$C(n) = 600 \cdot 12 + n \cdot 600 \Rightarrow C(n) = 600n + 7\,200$

Analisando a função obtida, podemos perceber que é necessário instalar um aparelho com, pelo menos, 7 200 BTU, pois:

$C(0) = 600 \cdot 0 + 7\,200 = 7\,200$

Como essa sala de aula pode ser usada por até 10 pessoas, vamos determinar qual deve ser a capacidade de resfriamento do aparelho para $n = 10$.

$C(10) = 600 \cdot 10 + 7\,200$
$C(10) = 6\,000 + 7\,200$
$C(10) = 13\,200$

Logo, a capacidade do aparelho instalado deve ser de, pelo menos, 13 200 BTU.

Observe que a função $C(n) = 600n + 7\,200$ pode ser escrita, de forma geral, como $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais, com $a \neq 0$.

Neste capítulo, vamos estudar esse tipo de função devido à importância de seu uso para descrever fenômenos de diferentes áreas do conhecimento.

Não escreva no livro.

A partir deste momento, o trabalho contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT401**, pois permite que os estudantes convertam representações algébricas de funções polinomiais do 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, com e sem o uso de *softwares*. Leia este tópico e o próximo com os estudantes para que entendam a simbologia, o papel da figura e por que há destaque nos boxes.

INTRODUÇÃO À FUNÇÃO AFIM

As funções afins correspondem às relações entre a variável dependente e a variável independente que são expressas por polinômios do 1º grau. Por isso, também podem ser denominadas funções polinomiais do 1º grau.

Uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo x associa o número $ax + b$, com a e b reais, sendo $a \neq 0$, é denominada **função afim** ou **função polinomial do 1º grau**.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = ax + b,\ a \neq 0$$

Exemplos

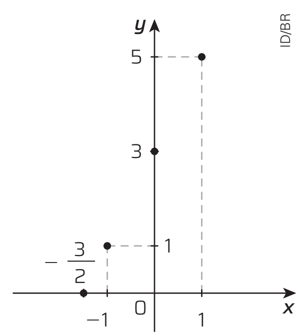
- $y = 3x + 2$, com $a = 3$ e $b = 2$
- $y = 2 - 4x$, com $a = -4$ e $b = 2$
- $y = -\frac{2x}{3} - 6$, com $a = -\frac{2}{3}$ e $b = -6$
- $y = 2x$, com $a = 2$ e $b = 0$
- $y = -3x$, com $a = -3$ e $b = 0$
- $y = \frac{2}{5}x - \frac{1}{3}$, com $a = \frac{2}{5}$ e $b = -\frac{1}{3}$

GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM

Vamos esboçar o gráfico da função $y = 2x + 3$, de domínio $\mathbb{R}$, e analisar algumas de suas características.

Podemos iniciar construindo um quadro com alguns valores correspondentes de x e y. Atribuindo alguns valores a x, determinamos os valores correspondentes de y e, assim, obtemos alguns dos pares ordenados dessa função. Os pontos que representam esses pares ordenados podem ser marcados em um sistema de coordenadas cartesianas, como o apresentado a seguir.

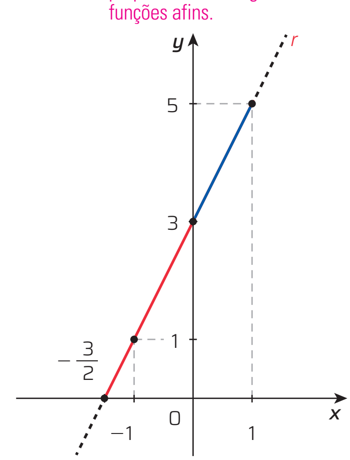
x	y
$-\frac{3}{2}$	0
-1	1
0	3
1	5



Trabalhar este tópico contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT510**, pois permite que os estudantes investiguem conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, utilizando uma reta para descrever a relação observada.
Inicialmente, vamos promover o raciocínio abdutivo, levando os estudantes, considerando os dados disponíveis, a encontrar como resposta plausível que o gráfico da função afim deve ser uma reta. Mais adiante, a dedução formal, por raciocínio dedutivo, vai comprovar essa propriedade dos gráficos das funções afins.

Para construirmos o gráfico, o ideal seria que fôssemos atribuindo todos os valores possíveis a x e marcássemos os pontos obtidos no gráfico, até que ele estivesse completo. No entanto, isso é impossível, porque o número de pontos é infinito, uma vez que a função está definida para todo x real.

Por isso, escolhemos apenas alguns pontos, que marcamos no plano cartesiano, e tentamos ver como eles delineiam o gráfico. Em nosso exemplo, a localização dos pontos sugere que o gráfico será uma reta.



Vamos considerar, no gráfico de $y = 2x + 3$, os segmentos determinados pelos pontos $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ e $(0, 3)$ e pelos pontos $(0, 3)$ e $(1, 5)$. A princípio, não sabemos se esses segmentos estão contidos em uma mesma reta. Então, medimos o ângulo de inclinação desses dois segmentos em relação ao eixo Ox.

Se os dois segmentos tiverem o mesmo ângulo de inclinação em relação ao eixo Ox e um ponto em comum, podemos concluir que eles estão contidos em uma mesma reta.

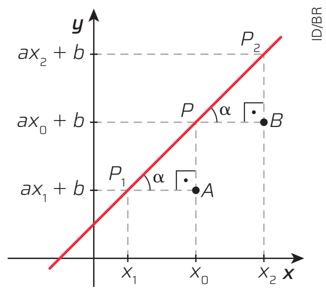
Observe que os dois segmentos passam pelo ponto $(0, 3)$. Vamos mostrar, a seguir, como confirmar que os ângulos de inclinação desses dois segmentos são iguais em relação ao eixo Ox.

A questão proposta neste boxe responde a uma pergunta frequente entre os estudantes. Como a justificativa apresentada exige que eles relembrem o conceito e as propriedades de triângulos semelhantes, essa é uma oportunidade para fazer a retomada de habilidades desenvolvidas no Ensino Fundamental.

Por que o gráfico da função afim é uma reta?

Para comprovar que os pontos do gráfico de qualquer função afim $y = ax + b$, com $a \neq 0$, são pontos de uma reta do plano cartesiano, vamos considerar dois pontos quaisquer, $P_1(x_1, ax_1 + b)$ e $P_2(x_2, ax_2 + b)$, do gráfico da função e mostrar que todos os outros pontos do gráfico dessa função estão alinhados com esses dois, ou seja, que qualquer ponto do gráfico está na reta que passa por P_1 e P_2.

Seja P um ponto qualquer do gráfico de f: $P(x_0, ax_0 + b)$. Observe a posição dos pontos P_1 e P_2 na reta representada no gráfico e os dois triângulos retângulos formados com vértice comum em P.



Relacionando as medidas dos lados correspondentes dos triângulos P_1AP e PBP_2, temos:

$$\frac{PA}{P_2B} = \frac{(ax_0 + b) - (ax_1 + b)}{(ax_2 + b) - (ax_0 + b)} = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{AP_1}{BP}$$

Logo, esses dois triângulos são semelhantes, porque têm um ângulo reto ($\widehat{A}$ e $\widehat{B}$) e dois pares de lados proporcionais entre si ($\overline{PA}$ é proporcional a $\overline{P_2B}$ e $\overline{AP_1}$ é proporcional a $\overline{BP}$).

Como consequência disso, as medidas de seus ângulos correspondentes são iguais.

$$\text{med}(P\widehat{P}_1A) = \text{med}(P_2\widehat{P}B) = \alpha$$

Isso só é possível se os pontos P_1, P_2 e P estiverem em uma mesma reta.

Concluímos, então, que o gráfico de uma função afim é sempre uma reta.

Assim, toda vez que tivermos de construir o gráfico de uma função $y = ax + b$, basta determinar dois de seus pontos e traçar a reta que passa por eles.

Após o estudo do tópico "Termos relacionados à função afim", peça aos estudantes que organizem no caderno um resumo com os termos e as noções apresentados, entre eles, os termos "corta" e "intercepta" com maneiras relativamente formais de se referir a intersecção de duas figuras ou de dois objetos geométricos.

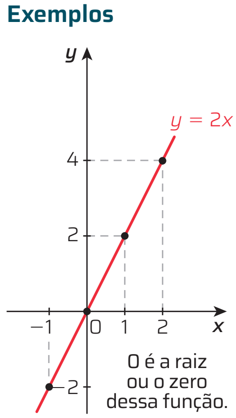
TERMOS RELACIONADOS À FUNÇÃO AFIM

Para estudar esse tipo de função, é preciso conhecer e identificar, na lei da função e em seu gráfico, o que significam alguns termos.

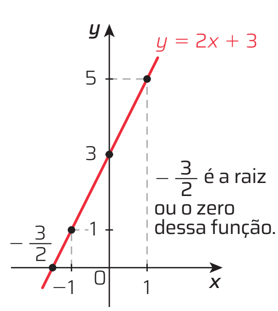
Toda função afim $y = ax + b$, com $a \neq 0$, tem como gráfico uma reta do plano cartesiano, e alguns termos podem ser identificados a partir dessa reta.

- A abscissa do ponto em que a reta corta o eixo Ox corresponde ao valor de x tal que $f(x) = 0$. Nesse caso, x é chamado de **raiz** ou **zero** da função afim.

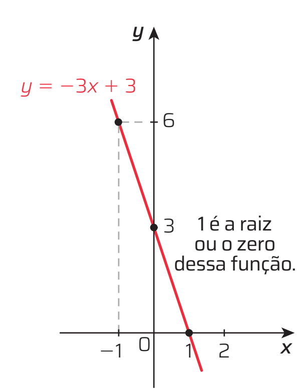
Exemplos



$2x = 0 \Rightarrow x = 0$



$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

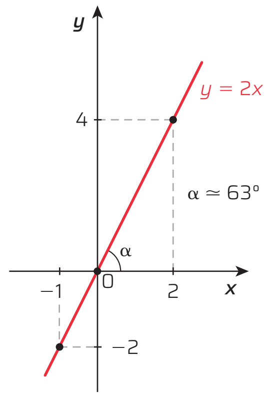


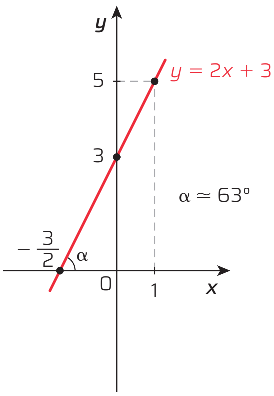
$-3x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$

Ilustrações: ID/BR

- Na função $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, o número a é chamado de **coeficiente angular** ou **declividade** do gráfico de f, porque ele determina a inclinação da reta com o eixo Ox.
- O número b é denominado **coeficiente linear** do gráfico de f e corresponde à ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy no plano cartesiano.

Como exemplo, considere novamente os gráficos de $y = 2x$ e $y = 2x + 3$ e a medida α do ângulo formado entre a reta que representa cada função e o eixo Ox.





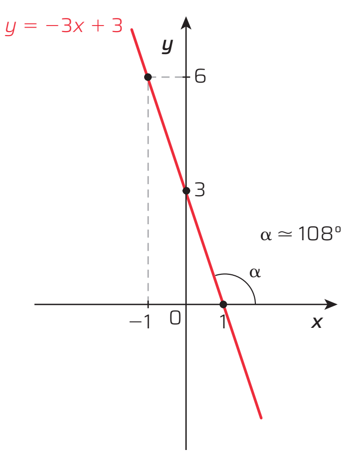
Ilustrações: ID/BR

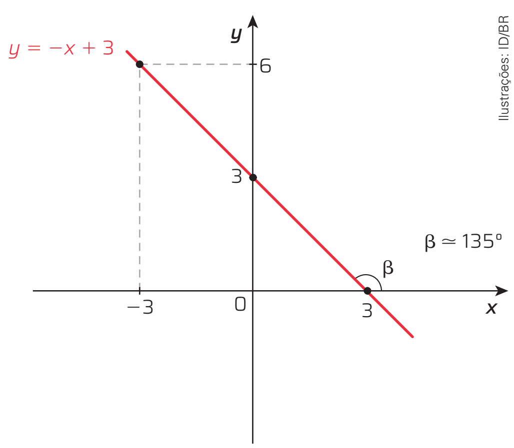
Observe que, em ambas as funções, $a = 2$ e os ângulos de inclinação das retas com o eixo Ox têm a mesma medida (aproximadamente 63°).

Já o ponto em que cada reta corta o eixo Oy no plano cartesiano muda: em $y = 2x$, o gráfico corta os eixos na origem e em $y = 2x + 3$, a reta foi "deslocada" um pouco mais para cima, passando a cortar o eixo Oy no ponto (0, 3).

Isso ocorre porque o coeficiente linear b é diferente nas duas funções: $b = 0$ em $y = 2x$ e $b = 3$ em $y = 2x + 3$.

Agora, considere os gráficos das funções $y = -3x + 3$ e $y = -x + 3$.





Ilustrações: ID/BR

Nesse caso, a inclinação das retas é diferente, pois:

- a função $y = -3x + 3$ tem coeficiente angular -3 e o seu ângulo de inclinação de medida α tem, aproximadamente, 108°.
- a função $y = -x + 3$ tem coeficiente angular -1 e o seu ângulo de inclinação de medida $\beta = 135°$.

Entretanto, nesse caso, as duas retas cortam o eixo Oy no ponto (0, 3), porque nas duas funções o coeficiente linear é $b = 3$.

> O gráfico de toda função afim $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, intersecta o eixo Oy no ponto $(0, b)$.

Note que, no caso em que $b = 0$, ou seja, em que $f(x) = ax$, com $a \neq 0$, o gráfico da função f passa pelo ponto (0, 0). Nessa situação, a função afim recebe também o nome de **função linear**.

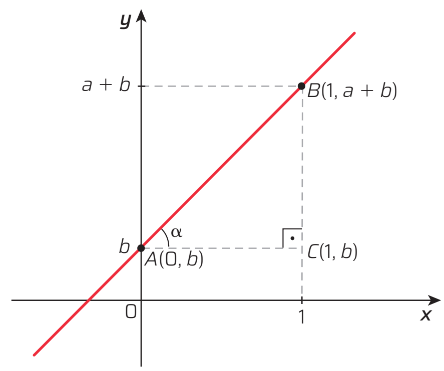
Como o coeficiente *a* se relaciona com a medida do ângulo de inclinação de uma função afim $f(x) = ax + b$?

Vamos considerar dois pontos do gráfico de $f(x) = ax + b$.

x	$f(x)$
0	b
1	$a + b$

A partir desses pontos, $A(0, b)$ e $B(1, a + b)$, temos duas situações possíveis para o gráfico de f.

1ª situação: se α for um ângulo agudo.
O gráfico da função se assemelha a este.



ID/BR

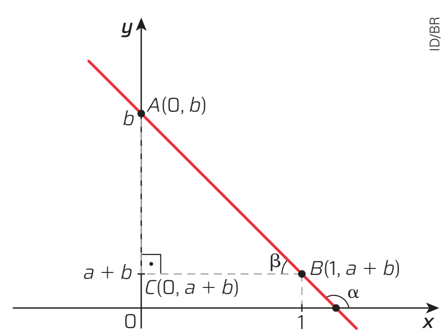
O triângulo com vértices em A, B e C é retângulo em C, sendo C o ponto $(1, b)$.
A inclinação dessa reta em relação ao eixo Ox é dada por:

$$\frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{BC}{CA} = \frac{a + b - b}{1} = a, \text{ então } a > 0.$$

Quando α é um ângulo agudo o coeficiente a é positivo, pois é dado pela razão da medida dos lados do triângulo ABC. Logo, a é positivo quando o ângulo α é agudo.

Este tópico responde a uma pergunta frequente entre os estudantes, mas, nesse momento, optamos por não relacionar a inclinação da reta ao conceito de tangente, pois é possível que eles ainda não tenham conhecimento de Trigonometria.

2ª situação: se α for um ângulo obtuso.
O gráfico da função se assemelha a este.



ID/BR

O triângulo com vértices em A, B e C é retângulo em C, sendo C o ponto $(0, a + b)$.
A inclinação dessa reta em relação ao eixo Ox é dada por:

$$\frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida do cateto adjacente a } \beta} = \frac{AC}{BC} = \frac{b - (a + b)}{1} = -a, \text{ então } -a > 0 \text{ pois é}$$

dado pela razão das medidas dos lados do triângulo ABC.

Assim, a é negativo quando α é obtuso, pois $-a > 0$.

Essa relação entre o coeficiente a e o ângulo de inclinação da reta do gráfico da função é o motivo de esse coeficiente ser chamado de coeficiente angular da reta.

Mais adiante, no tópico “Função crescente e função decrescente”, esse coeficiente voltará a ser tema de estudo deste capítulo.

O trabalho com este tópico contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT510**, pois permite que os estudantes analisem o comportamento de duas variáveis numéricas, utilizando uma reta para descrever a relação observada.

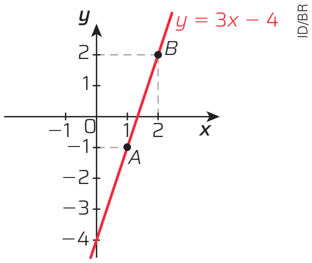
CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO AFIM

Há diferentes maneiras de determinar o gráfico de uma função afim. Considerando $f(x) = 3x - 4$, já trabalhamos das duas primeiras maneiras apresentadas a seguir e vamos conhecer outra.

1ª maneira

Podemos obter dois pontos de f escolhendo dois valores de x para determinar o $f(x)$ correspondente.

x	$f(x) = 3x - 4$
1	-1
2	2



Então, o gráfico de f corresponde à reta que passa pelos pontos $A(1, -1)$ e $B(2, 2)$.

2ª maneira

Podemos obter a raiz de f para encontrar um ponto do gráfico.

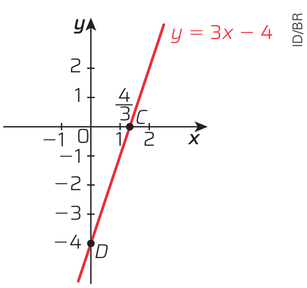
$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x - 4 = 0 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Logo, o ponto $C\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ pertence ao gráfico dessa função.

Como em $f(x)$ temos $b = -4$, então o ponto $D(0, -4)$ também pertence ao gráfico de f. Note que se o coeficiente linear fosse zero, seria necessário encontrar outro ponto do gráfico em que $x \neq 0$.

Observe a seguir o gráfico da função f e dos pontos obtidos.

Verifique se os estudantes percebem que o gráfico obtido com os pontos C e D é o mesmo obtido com os pontos A e B, pois a função f considerada é a mesma nos dois casos.
Se possível, solicite a eles que identifiquem nesse gráfico os pontos A e B.



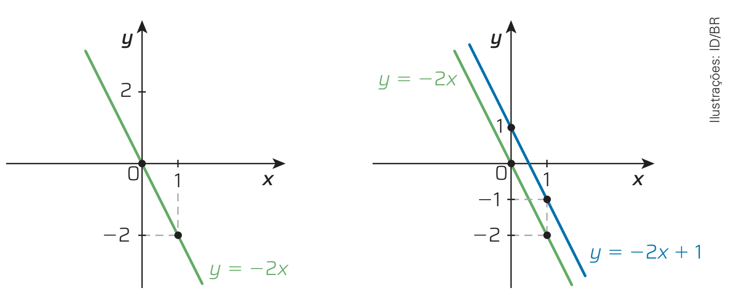
3ª maneira

Também é possível determinar o gráfico de uma função afim a partir do gráfico de outras funções afins que tenham o mesmo coeficiente angular.

Por exemplo, conhecendo o gráfico de $y = -2x$, é possível traçar o gráfico de $y = -2x + 1$. Nesse caso, sabemos que:

- as retas dos dois gráficos são paralelas, pois têm o mesmo coeficiente angular;
- a segunda reta passa pelo ponto $(0, 1)$.

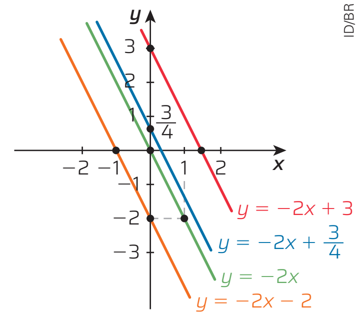
Trabalhar os conceitos de translação e de simetria na construção de gráficos de funções afins contribui para a aquisição da habilidade **EM13MAT105**.



Observe que, a cada ordenada do gráfico de $y = -2x$, adicionamos uma unidade para obter as ordenadas de $y = -2x + 1$. Assim, o gráfico de $y = -2x + 1$ pode ser obtido pelo deslocamento de uma unidade do gráfico de $y = -2x$, para cima na direção Oy.

É possível integrar o assunto abordado no boxe desta página com a seção *Tecnologia* que será proposta adiante. Para isso, solicite aos estudantes que, utilizando um *software* de construção de gráficos, tracem gráficos de diversas funções $y = -2x + b$, variando o valor de b. Assim, eles poderão observar outros exemplos da relação de translação entre as retas. Isso pode ser repetido com diferentes funções afins, variando o valor de b e mantendo o valor de a. Essa também é uma oportunidade que possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT510** por meio da investigação de conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas.

Usando o mesmo raciocínio, é possível traçarmos outros gráficos, como os das funções $y = -2x + 3$, $y = -2x - 2$ e $y = -2x + \frac{3}{4}$.

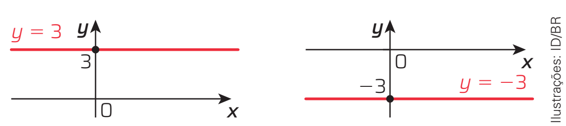


Em cada caso, o coeficiente linear determina o deslocamento do gráfico de $y = -2x$, a distância e o sentido desse deslocamento na direção Oy.

Função constante e função nula

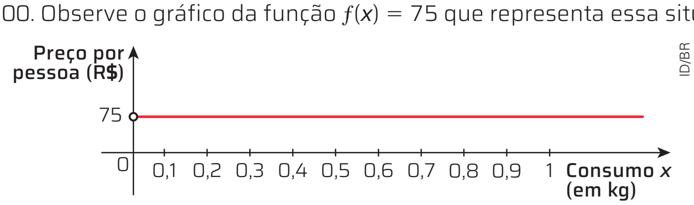
Há outra função que, embora não seja afim, também é uma relação do tipo $y = ax + b$. Ela é chamada de **função constante**.

A função constante tem $a = 0$ e, desse modo, a expressão $y = ax + b$ fica reduzida a $y = b$. O gráfico dessa função é uma reta paralela ao eixo Ox, como nesses exemplos.



Na prática, lidamos com muitas funções constantes e, mesmo sem saber nomeá-las, resolvemos situações relacionadas a elas.

Por exemplo, considere um restaurante com sistema de rodízio que cobra R$ 75,00 por pessoa, independentemente de ela consumir 0,2 kg, 0,5 kg ou 2 kg de comida. Assim, o preço único pago por pessoa será sempre R$ 75,00. Observe o gráfico da função $f(x) = 75$ que representa essa situação.



De forma geral, se relacionarmos o consumo x de cada pessoa ao valor k pago, obteremos uma função f constante: $f(x) = k$.

Um caso particular de função constante é a **função nula**, em que a expressão $y = ax + b$ fica reduzida a $y = 0$, pois $a = 0$ e $b = 0$. Perceba que o gráfico dessa função é o próprio eixo Ox.

ALGORITMO, FLUXOGRAMA E FUNÇÃO AFIM

O trabalho com este tópico contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**, ao propor aos estudantes que registrem em um fluxograma um algoritmo que resolva um problema. Além disso, favorece o desenvolvimento das competências gerais **2** e **4**, ao possibilitar que os estudantes exercitem a curiosidade intelectual utilizando diferentes linguagens.

Você sabia que podemos programar um computador para traçar o gráfico de uma função afim? Também é possível fazê-lo identificar se um ponto pertence ou não ao gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax + b$.

Para que um computador entenda os comandos programados e a linguagem matemática, é necessário utilizar um código, chamado de **linguagem de programação**. Esse código funciona como um tradutor da nossa língua ou da linguagem matemática para a linguagem binária, que é a compreendida pelo computador. Assim como existem diversas línguas e cada uma tem suas regras, também existem diversas linguagens de programação, cada qual com as próprias regras.

Independentemente da linguagem de programação a ser utilizada, precisamos saber o que se quer traduzir, isto é, quais serão as instruções ou quais serão os comandos a serem traduzidos. Essa lista de instruções é denominada **algoritmo**.

Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver determinado problema ou realizar determinada atividade, ou seja, é a decomposição de um procedimento complexo em partes mais simples, que são relacionadas e ordenadas.

Você conhece e utiliza vários algoritmos diariamente, mas nem sempre percebe isso. Por exemplo, ir ao colégio e voltar, instalar um aplicativo no celular ou no computador, escolher uma roupa para vestir são processos que podem ser descritos em etapas, organizadas em sequência, do início ao fim.

As etapas de um algoritmo podem ser descritas de diversas maneiras. Vamos conhecer uma delas: os **fluxogramas**.

Fluxograma é uma representação gráfica da sequência das etapas necessárias para que um problema seja resolvido ou uma atividade seja realizada.

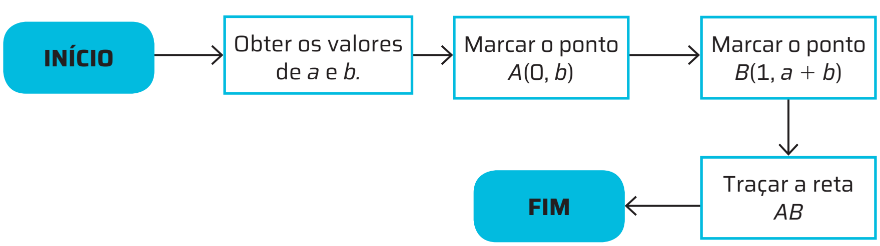
A utilização de um fluxograma pode facilitar a compreensão das etapas necessárias para realizar uma atividade, pois evidencia como ela pode ser dividida em tarefas menores.

Acompanhe como é possível transformarmos o algoritmo para construir o gráfico de uma função afim no plano cartesiano em um fluxograma.

O algoritmo correspondente a esse processo é:

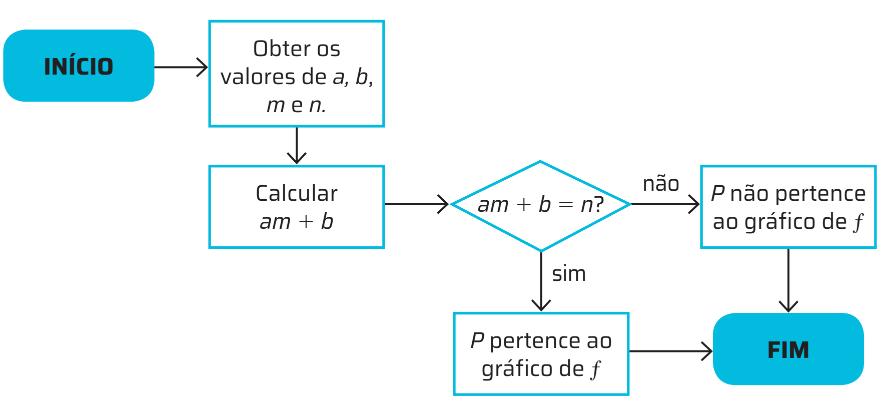
1. Apresentar os coeficientes da função $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.
2. Marcar o ponto $A(0, f(0) = b)$.
3. Marcar o ponto $B(1, f(1) = a + b)$.
4. Traçar $\overleftrightarrow{AB}$.

Em um fluxograma, são representados o início, o fim e todas as etapas e é indicada, por meio de setas, a sequência de etapas necessárias para alcançar o resultado final. Observe um possível fluxograma que expressa esse algoritmo:



Cada tipo de comando em um fluxograma é representado por símbolos específicos. Observe que as figuras com pontas arredondadas indicam o início e o fim da sequência de etapas, enquanto os retângulos indicam cada etapa da sequência. Além disso, os fluxogramas podem ter losangos, que representam momentos em que a direção do fluxo depende de uma tomada de decisão, podendo seguir mais de um caminho. Todos os elementos de um fluxograma devem estar conectados uns aos outros por setas, e nenhum deles pode ficar isolado.

Observe o fluxograma a seguir, que apresenta um processo para verificar se um ponto $P(m, n)$ pertence ou não ao gráfico de uma função $f(x) = ax + b$.



PARA EXPLORAR

Vídeo

O que é algoritmo? [*S. l.*: *s. n.*], 2018. 1 vídeo (3 min 11 s). Publicado pelo canal GCF Aprende Livre. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=iEVLDKOLgQk. Acesso em: 10 jul. 2024.

Você sabia que utilizamos algoritmo até mesmo para preparar macarrão? Aprenda mais sobre esse tema assistindo ao vídeo sugerido.

Solicite aos estudantes que reproduzam as instruções do fluxograma e observem o que será obtido. Espera-se que eles percebam que esse fluxograma representa o processo indicado.

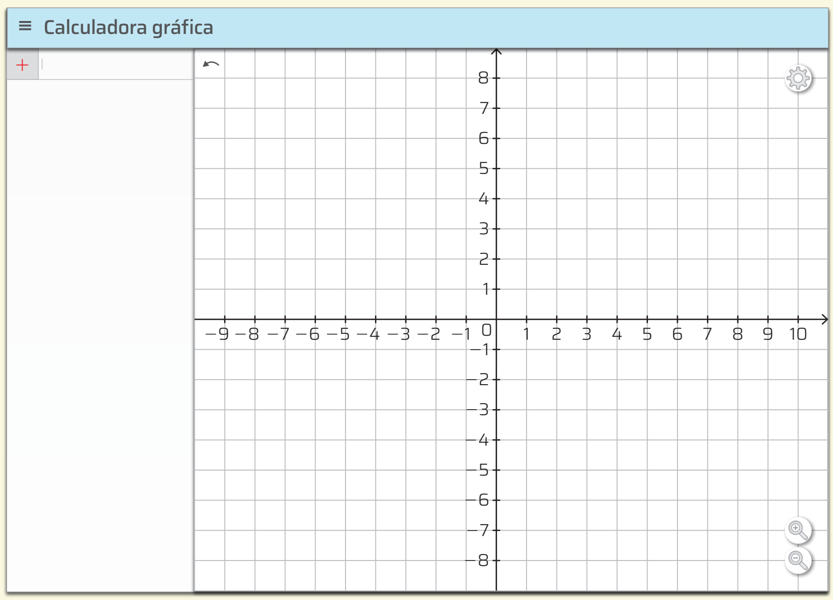
O processo investigativo apresentado nesta seção favorece o desenvolvimento da competência geral **5**.

Há diversos tipos de calculadora gráfica *on-line*; escolha um deles e apresente-o aos estudantes ou dê a eles algumas opções e incentive-os a usar o tipo de calculadora gráfica *on-line* que preferirem. As etapas apresentadas podem ser realizadas em diversos *softwares*, como o Geogebra e o Desmos.

TECNOLOGIA

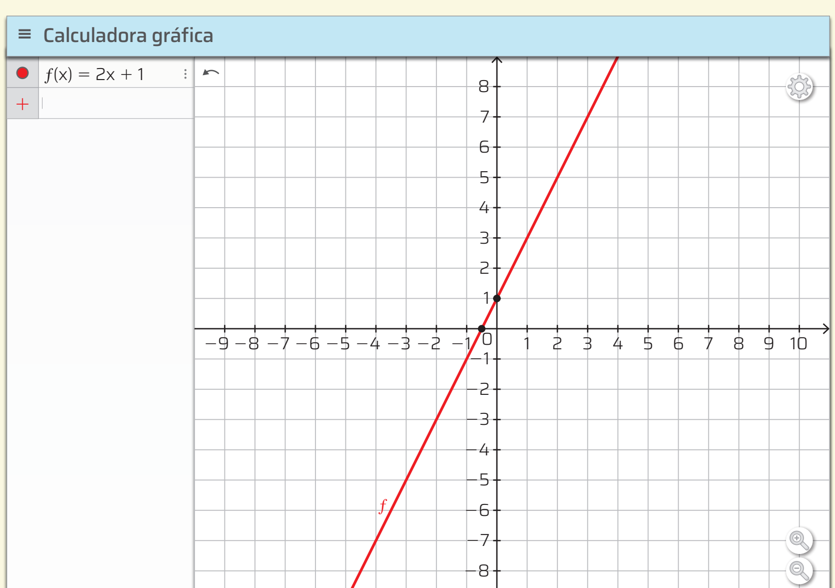
Você já ouviu falar em calculadoras gráficas? Esses tipos de *software* podem ser utilizados para construir e editar gráficos em duas ou três dimensões. Acompanhe as etapas a seguir para construir o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$ em 2D, em uma calculadora gráfica *on-line*.

1ª etapa: Ao abrir o programa, observamos se a janela aberta apresenta dois eixos cartesianos. Caso seja necessário, buscamos a opção de configuração de duas dimensões. Aproveitamos para conhecer e explorar as ferramentas disponíveis na calculadora gráfica.



Nelson Matsuda/ID/BR

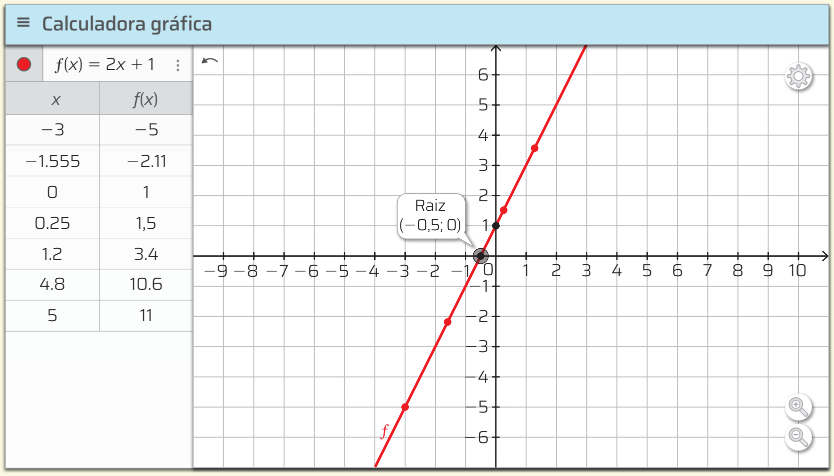
2ª etapa: Vamos construir o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$. Para isso, escrevemos a função na caixa de entrada de dados. Em seguida, apertamos "Enter" para confirmar a construção. A janela de visualização deve ficar parecida com a imagem a seguir.



Nelson Matsuda/ID/BR

3ª etapa: Vamos usar as ferramentas de configuração para personalizar o gráfico. É possível alterar a cor da reta, a espessura e o estilo do fio, deixando-o tracejado, por exemplo, e muito mais. Também é possível personalizar a janela de exibição, alterando o *zoom* e a malha quadriculada, por exemplo.

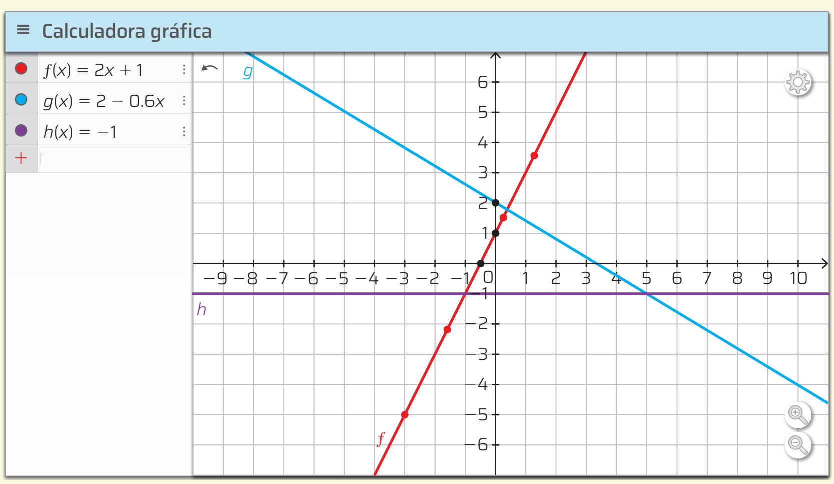
4ª etapa: Vamos buscar a visualização dos dados dessa função. Eles podem ser disponibilizados em um quadro de valores, sobre a reta no plano cartesiano ou em outras opções de ferramentas.



Nelson Matsuda/ID/BR

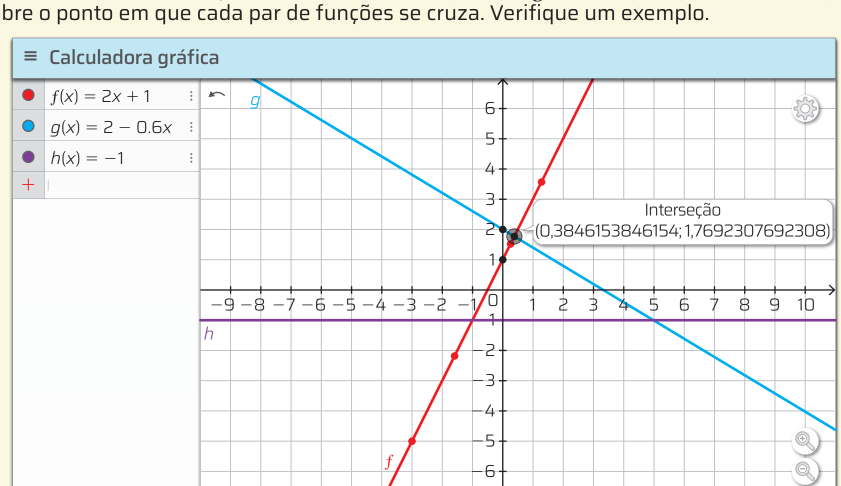
Se necessário, reduza o *zoom* ou movimente a tela para visualizar no gráfico outros pontos que estão indicados no quadro de valores.

5ª etapa: Vamos construir o gráfico de outras funções no mesmo sistema de coordenadas cartesianas. Para isso, escrevemos a função $g(x) = 2 - 0{,}6x$ e $h(x) = -1$, cada uma em uma caixa de entrada de dados. Se for necessário, clicamos no botão +, que pode ser usado para adicionar novas funções. A cada registro apertamos "Enter" para confirmar a construção do gráfico da função. A janela de visualização deve ficar parecida com a imagem a seguir.



Nelson Matsuda/ID/BR

6ª etapa: Por fim, vamos determinar os pontos comuns das funções f e g, das funções f e h e das funções g e h. Para isso, podemos clicar sobre o ponto em que cada par de funções se cruza. Verifique um exemplo.



Nelson Matsuda/ID/BR

ATIVIDADES

1 **Nas etapas apresentadas construímos o gráfico de três funções. Qual é o domínio e a imagem dessas funções?** $D(f) = D(g) = D(h) = \mathbb{R}$, $Im(f) = Im(g) = \mathbb{R}$, $Im(h) = \{-1\}$

2 **Faça o que se pede em cada item.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

a) Usando uma calculadora gráfica, trace, em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas, os gráficos das funções: $A(x) = 3x$, $B(x) = 3x + 1$, $C(x) = -3x$, $D(x) = -3x - 1$ e $E(x) = -3x + 1$.

b) Faça uma lista com as características comuns e com as diferenças entre os seguintes pares de função: Resposta pessoal.

- *A* e *C*;
- *A* e *B*;
- *A* e *D*;
- *B* e *E*.

3 **Agora um desafio! Usando seus conhecimentos sobre funções afins e sobre gráficos em uma calculadora gráfica, reúna-se em duplas ou em trios para fazer o que se pede em cada item.** Respostas pessoais.

a) Construam funções em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas para ilustrar a letra *N*.

b) Quantas funções foram utilizadas? Quais foram elas?

c) Registrem o algoritmo que permite traçar a letra *N* em uma calculadora gráfica e, depois, representem esse registro com um fluxograma.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **Determine a lei da função afim f cujo gráfico passa por $A(-2, 10)$ e $B(1, 4)$.**

Resolução

Se f é definida por $y = ax + b$, com $a \neq 0$, e um ponto A pertence ao gráfico de f, as coordenadas de A satisfazem a equação $y = ax + b$:

$$10 = a(-2) + b \quad (1)$$

Se B é outro ponto que pertence ao gráfico de f, vale a igualdade:

$$4 = a \cdot 1 + b \quad (2)$$

Resolvendo o sistema formado por (1) e (2), obtemos $a = -2$ e $b = 6$.

Portanto, $f(x) = -2x + 6$.

R2 **Determine m e n para que as funções $f(x) = 2mx + 6$ e $g(x) = (m - n)x + 2n$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, sejam iguais.**

Resolução

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = m - n \\ 6 = 2n \end{cases}$$

De $6 = 2n$, obtemos $n = 3$ e substituímos em $2m = m - n$:

$$2m = m - 3 \Rightarrow m = -3$$

Portanto, $m = -3$ e $n = 3$.

R3 **Determine o ponto comum às funções $y = -2x - 7$ e $y = 4x + 5$, escreva qual é a posição relativa entre as retas e desenhe os gráficos dessas funções.**

Se desejar, use um *software* para obter o gráfico das funções em um mesmo sistema de eixos cartesianos e, assim, resolver a atividade **R3**.

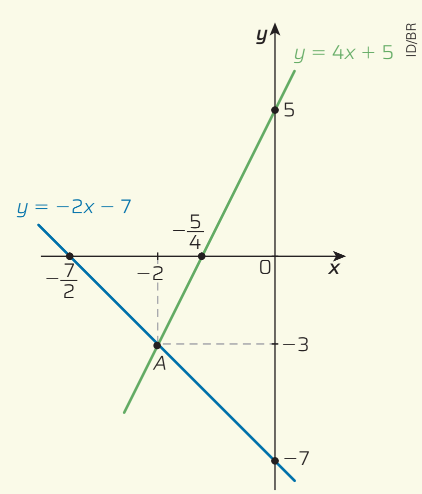
Resolução

- $y = -2x - 7$ tem coeficiente linear -7 e raiz $-\frac{7}{2}$;
- $y = 4x + 5$ tem coeficiente linear 5 e raiz $-\frac{5}{4}$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} y = -2x - 7 \\ y = 4x + 5 \end{cases}$, obtemos:

$$x = -2 \quad \text{e} \quad y = -3$$

Portanto, o ponto comum às duas retas é $A(-2, -3)$. Como as retas se intersectam em um único ponto, dizemos que elas são **concorrentes**.



Se achar oportuno, na atividade **R2**, explique aos estudantes o significado do símbolo ⇔. Lemos a expressão "*A* ⇔ *B*" como "*A* é equivalente a *B*" ou "*A* se e somente se *B*". Nesse caso, *A* é verdadeiro se *B* for verdadeiro, e *A* é falso se *B* for falso.

R4 Determine m e n para que a função g seja linear.

$$g(x) = (m - 2)x^2 + 4x + n + 6$$

Resolução

Sabemos que uma função linear f é do tipo $f(x) = ax$, com $a \neq 0$. Logo:

$$g \text{ é função linear} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \\ \text{e} \\ n + 6 = 0 \Rightarrow n = -6 \end{cases}$$

Nesse caso, temos $g(x) = 4x$, que é uma função linear.

Durante a correção das atividades, sempre que possível, relacione os gráficos das funções a suas propriedades geométricas. Destaque o paralelismo, a concorrência e, por último, o perpendicularismo de cada gráfico com outras retas em relação aos eixos.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Organize-se da seguinte maneira para resolver os problemas e os exercícios propostos.

a) Releia, se achar necessário, os textos do tópico "Introdução à função afim" até o tópico "Construção do gráfico de uma função afim". Isso o ajudará a resolver as atividades **1** a **5**.

b) Retome a atividade **R1** antes de fazer as atividades **6** e **7** e as atividades **R2** e **R4**, se tiver dúvidas com as propostas das atividades **10** e **11**.

1 Construa o gráfico cartesiano de cada função de domínio $\mathbb{R}$. Consulte as respostas no Manual do Professor.

a) $y = -3x + 4$

b) $y = 4x + 8$

c) $y = -5x - 6$

d) $y = 10x - 5$

e) $y = 4x$

f) $y = -3x$

2 Determine a raiz ou o zero de cada função a seguir.

a) $f(x) = 3x + 15$ $x = -5$

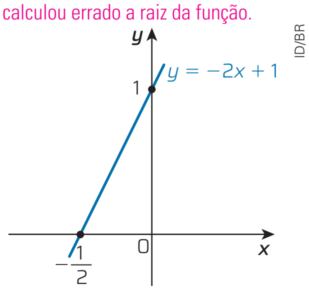
b) $f(x) = -4x + 12$ $x = 3$

c) $f(x) = 5x - 7$ $x = \frac{7}{5}$

d) $f(x) = -5x$ $x = 0$

3 Ao construir o gráfico para $y = -2x + 1$, o desenhista cometeu um erro. Você consegue identificá-lo?

O desenhista calculou errado a raiz da função.



4 Determine o ponto comum aos gráficos de f e g, sendo $f(x) = -x + 2$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 1$. $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Se puder, na atividade **4**, use um *software* de geometria e desenhe os gráficos dessas funções em um mesmo sistema de eixos cartesianos para conferir sua resolução.

5 Sejam as funções $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x - 2$ e $h(x) = 2x + 1$, de domínio $\mathbb{R}$, faça o que se pede.

a) Construa os gráficos de f, g e h no mesmo sistema de coordenadas. Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) Como podemos obter o gráfico de g a partir do gráfico de f? Deslocando o gráfico de f em duas unidades para baixo na direção do eixo Oy.

c) Como podemos obter o gráfico de h a partir do gráfico de f? Deslocando o gráfico de f em uma unidade para cima na direção do eixo Oy.

6 Sabendo que o gráfico de uma função linear f passa por $(2, -8)$, faça o que se pede.

a) Determine f. $f(x) = -4x$

b) Construa o gráfico de f. Consulte a resposta no Manual do Professor.

c) Calcule $f(f(3))$. 48

7 Obtenha a função polinomial do 1º grau cujo gráfico passa por:

a) $A(0, 3)$ e $B(-1, 2)$. $f(x) = x + 3$

b) $K(1, 6)$ e $L(-2, -3)$. $f(x) = 3x + 3$

c) $C(3, 7)$ e $D(0, 0)$. $f(x) = \frac{7}{3}x$

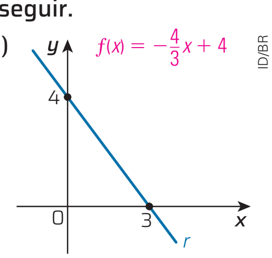
d) $M(-1, 3)$ e $N(0, 0)$. $f(x) = -3x$

8 Escolha um dos pares de pontos da atividade anterior e, propositalmente, cometa um erro no cálculo da lei da função afim correspondente. Troque o cálculo com um colega para que um descubra o erro do outro.

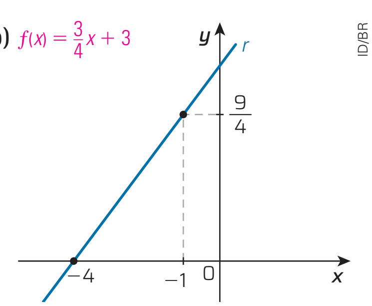
Resposta pessoal.

9 Determine a função f cujo gráfico é a reta r nos casos a seguir.

a) $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$



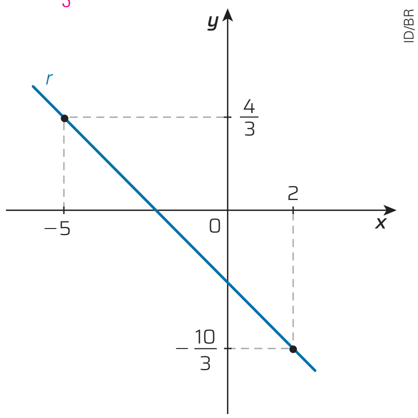
b) $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$



Ao discutir a proposta da atividade **8**, solicite a alguns estudantes que coloquem as respostas no quadro. O desafio será descobrir o erro cometido pelo colega. Faça, então, com os estudantes, uma lista de cuidados para não cometer erros ao resolver uma atividade como essa.

As atividades **14** a **19** contribuem para a aquisição da habilidade **EM13MAT302**, ao propor aos estudantes que construam modelos com função do 1º grau para resolver problemas em contextos diversos.

c) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 2$



10 **Determine *m* e *n* para que as funções *f* e *g* definidas a seguir sejam lineares.**

a) $f(x) = (m - 3)x^2 + 5x + n + 4$ $m = 3$ e $n = -4$.

b) $g(x) = mx^3 + (n - 5)x^2 + 2x + 2m + n - 5$ $m = 0$ e $n = 5$.

11 **Mostre que *f* é função afim.**

a) $f(x) = (x - 6)^2 - (x - 3)(x - 12)$ $f(x) = 3x$

b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x}{3x^2 + 3}$ $f(x) = \frac{2}{3}x$

12 **Faça um fluxograma para construir no plano cartesiano o gráfico de $f(x) = ax + b$ usando a raiz da função e o ponto em que a reta do gráfico encontra o eixo *Oy*. Considere também o caso em que $a = 0$. Depois, troque o fluxograma com um colega, execute-o e valide-o.** Resposta pessoal.

13 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFPR) Uma fábrica de calçados possui um custo fixo mensal de R$ 20 000,00 relacionado a pagamentos de salários, aluguel e outras despesas fixas. Sabendo que, a cada par de calçados produzido, essa fábrica fatura R$ 28,00, a expressão que descreve o lucro mensal, em reais, em função do número *x* de calçados produzidos é: Alternativa **b**.

a) $20\,000x - 28$.

b) $28x - 20\,000$.

c) $28x + 20\,000$.

d) $-28x + 20\,000$.

e) $-20\,000x + 28$.

14 **Considere um retângulo com *x* cm de comprimento e 10 cm de largura. Nessas condições:**

14. a)
$P(1) = 22$ cm
$P(1{,}5) = 23$ cm
$P(2) = 24$ cm
$P(3) = 26$ cm
$P(4) = 28$ cm

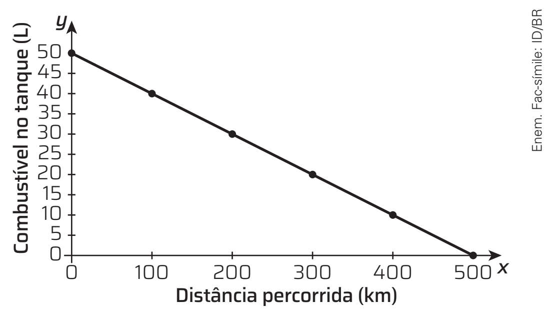
a) calcule o perímetro do retângulo quando o comprimento for: 1 cm; 1,5 cm; 2 cm; 3 cm e 4 cm;

b) construa um quadro associando cada comprimento ao perímetro do retângulo;
Consulte a resposta no Manual do Professor.

c) se *x* representa o comprimento do retângulo, indique qual é a lei da função que expressa o perímetro nesse retângulo. $P(x) = 20 + 2x$

15 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo *y* (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo *x* (horizontal). Alternativa **b**.



A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é

a) $y = -10x + 500$

b) $y = \dfrac{-x}{10} + 50$

c) $y = \dfrac{-x}{10} + 500$

d) $y = \dfrac{x}{10} + 50$

e) $y = \dfrac{x}{10} + 500$

16 **Um artesão recebe um valor fixo de R$ 200,00 por dia mais R$ 30,00 por peça que ele produzir.**

a) Determine a sentença matemática que permite calcular o valor (*V*) que esse artesão vai receber em um dia de trabalho em função do número de peças produzidas por ele (*x*). $V(x) = 200 + 30x$

b) Em determinado dia, o artesão recebeu R$ 800,00 pelo serviço. Calcule a quantidade de peças que ele produziu nesse dia. Ele produziu 20 peças.

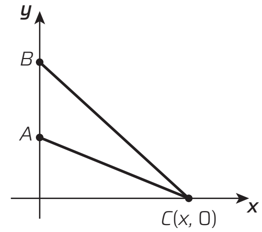
17 **(UFPR) Numa expedição arqueológica em busca de artefatos indígenas, um arqueólogo e seu assistente encontraram um úmero, um dos ossos do braço humano. Sabe-se que o comprimento desse osso permite calcular a altura aproximada de uma pessoa por meio de uma função do primeiro grau.**

a) Determine essa função do primeiro grau, sabendo que o úmero do arqueólogo media 40 cm e sua altura era 1,90 m, e o úmero de seu assistente media 30 cm e sua altura era 1,60 m. $y = 3x + 70$

b) Se o úmero encontrado no sítio arqueológico media 32 cm, qual era a altura aproximada, em metro, do indivíduo que possuía esse osso? 1,66 m

18 **(UEG-GO) A figura representa no plano cartesiano um triângulo *ABC*, com coordenadas *A*(0, 5), *B*(0, 10) e *C*(*x*, 0), em que *x* é um número real positivo.**

As atividades **20** a **26** foram pensadas para que os estudantes desenvolvam as habilidades de leitura, escrita e argumentação matemática. Se julgar oportuno, eles podem realizar toda a sequência de atividades, ou parte dela, usando o que aprenderam na seção *Tecnologia*. Resolver essas atividades contribui para a aquisição da habilidade **EM13MAT105**, permitindo que os estudantes compreendam noções de transformações isométricas.



UEG-GO. Fac-símile: ID/BR

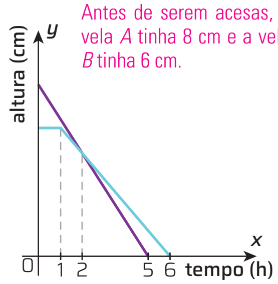
Tendo em vista as informações apresentadas:

a) encontre a função F que representa a área do triângulo ABC, em função de sua altura relativa ao lado $\overline{AB}$; $F(x) = \frac{5}{2}x$

b) esboce o gráfico da função F.
Consulte a resposta no Manual do Professor.

19 **(Uerj) Em um determinado dia, duas velas foram acesas: a vela *A* às 15 horas e a vela *B*, 2 cm menor, às 16 horas. Às 17 horas desse mesmo dia, ambas tinham a mesma altura. Observe o gráfico que representa as alturas de cada uma das velas em função do tempo a partir do qual a vela *A* foi acesa.**

Antes de serem acesas, a vela *A* tinha 8 cm e a vela *B* tinha 6 cm.



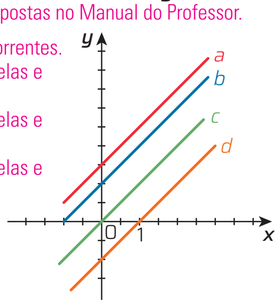
Uerj. Fac-símile: ID/BR

Calcule a altura de cada uma das velas antes de serem acesas.

As atividades a seguir servirão para você refletir e aprofundar seus conhecimentos sobre função afim. Para resolvê-las, será necessário relembrar as posições relativas entre duas retas coplanares, que são: concorrentes, perpendiculares ou paralelas.

20 **As funções $y = x$, $y = x - 1$, $y = x + 1$ e $y = x + 1{,}5$ estão representadas a seguir.**
Consulte as respostas no Manual do Professor.

21. a) As retas são concorrentes.
b) As retas são paralelas e não concorrentes.
c) As retas são paralelas e não concorrentes.
d) As retas são paralelas e não concorrentes.



ID/BR

a) Identifique a reta correspondente a cada função.

b) Determine as coordenadas de dois pontos do plano que pertençam a cada uma das retas.

c) Indique as coordenadas do ponto de intersecção de cada reta com o eixo Oy.

d) Em que ponto cada reta intersecta o eixo Ox.

e) Qual é a posição relativa entre essas retas?

21 **Sabendo que duas retas são concorrentes se elas têm coeficientes angulares diferentes, verifique se as retas a seguir são concorrentes.**

a) $y = -\frac{1}{4}x$
$y = 4x$

b) $y = 3x + 2$
$y = 3x - 5$

c) $y = \frac{1}{2}x + 8$
$y = 0{,}5x - 3$

d) $y = 2x + 3$
$y = 2x + 5$

22 **Construa o gráfico de cada função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a seguir em um mesmo sistema de eixos. Em seguida, responda: O que se pode dizer da posição relativa entre as retas do item a? E do item b?**

a) $y = 3x$ e $y = -x$

b) $y = \frac{2}{3}x$ e $y = -\frac{3}{2}x$

As retas do item **a** e do item **b** são concorrentes. Entretanto, as do item **b** são concorrentes perpendiculares.

23 **Construa o gráfico de cada função a seguir, em um mesmo referencial cartesiano, e verifique a posição relativa entre as retas que representam cada função.**

a) $y = 5x$ e $y = -\frac{1}{5}x + 2$ São retas concorrentes perpendiculares.

b) $y = 3x + 2$ e $y = \frac{1}{3}x + 2$ São retas concorrentes.

24 **Ao resolver as atividades anteriores, Júlia escreveu a seguinte observação:** Júlia está correta. Resposta pessoal.

Duas retas são perpendiculares se o coeficiente angular de uma delas é o oposto do inverso da outra, ou seja, se uma tiver coeficiente angular m, a outra terá coeficiente igual a $-\frac{1}{m}$, com $m \neq 0$.

Você concorda com essa afirmação? Justifique sua resposta.

25 **Indique as condições sobre os coeficientes lineares e angulares de duas funções afins para que as retas de seus gráficos sejam:** Consulte as respostas no Manual do Professor.

a) paralelas;

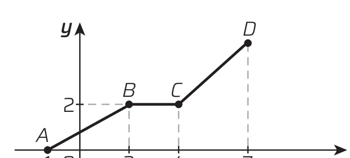
b) concorrentes;

c) perpendiculares.

Ilustre suas explicações com exemplos.

26 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Unifor-CE) A figura abaixo representa o gráfico de uma função f cujo domínio é o intervalo fechado $-1 \leqslant x \leqslant 7$.



Unifor-CE. Fac-símile: ID/BR

Sabe-se que o segmento AB é paralelo ao segmento CD e que o segmento BC é paralelo ao eixo dos x. Nessas condições, podemos afirmar que o valor de $f(x) - f(4{,}5)$ é igual a Alternativa **c**.

a) $\frac{3}{7}$.

b) $\frac{17}{10}$.

c) $\frac{5}{3}$.

d) $\frac{9}{5}$.

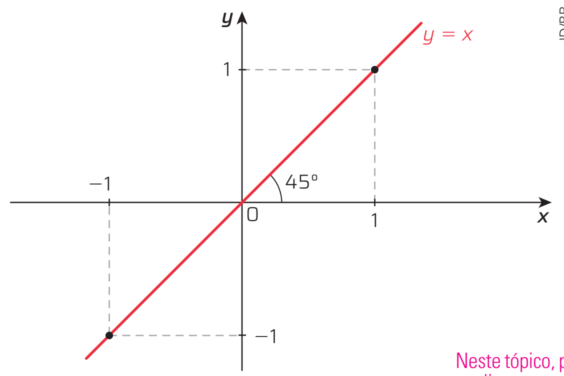
e) 2.

Na atividade **24**, incentive a discussão sobre a afirmação de Júlia, perguntando aos estudantes: "Que argumentos vocês utilizam para defender a ideia proposta?". Ao fazer esse tipo de argumentação e respeitando a opinião dos colegas, os estudantes estarão desenvolvendo a competência geral **9**.

FUNÇÃO IDENTIDADE

Se a função afim $y = ax + b$ apresenta $a = 1$ e $b = 0$, ela fica reduzida a $y = x$, sendo conhecida como **função identidade**, porque, a cada valor de x, associa idêntico valor a y.

O gráfico da função identidade é a reta que contém as bissetrizes do primeiro e do terceiro quadrantes do sistema de coordenadas cartesianas.



Neste tópico, por meio do raciocínio abdutivo, vamos analisar um caso empírico de modo que os estudantes considerem como plausível a relação entre o sinal do coeficiente angular de uma função afim e o fato de a função ser crescente ou decrescente.

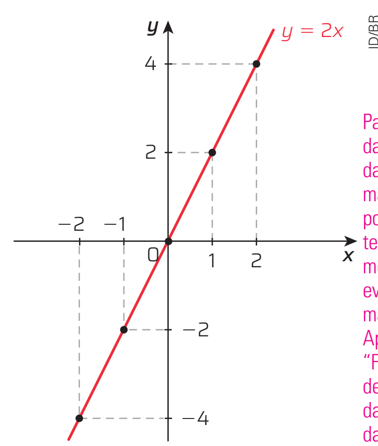
FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE

Vamos estudar mais o coeficiente angular a de uma função afim qualquer $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

Para começar, vamos considerar as funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = -2x$, de domínio $\mathbb{R}$, e analisar o que ocorre com as imagens quando aumentamos os valores de x.

a) $f(x) = 2x$

x	$y = 2x$
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4

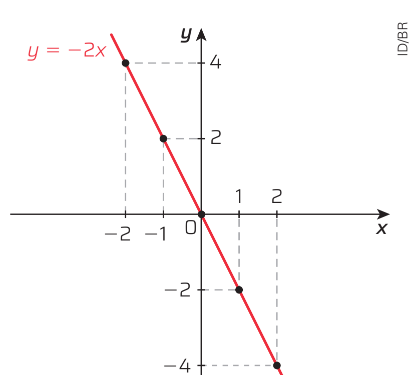


Para desenvolver nos estudantes a habilidade de leitura da linguagem específica de matemática, você pode propor a eles que leiam o conteúdo desta seção individualmente e, depois, discutam eventuais dúvidas com um ou mais colegas.
Após a leitura do tópico "Função crescente e função decrescente", peça aos estudantes que resolvam a atividade **27**.

Note que na função f o valor de y cresce 2 unidades para cada unidade de variação de x e que $a = 2$. Aumentando os valores de x, os valores das imagens correspondentes também aumentam. Dizemos, então, que essa função é **crescente** em $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = -2x$

x	$y = -2x$
-2	4
-1	2
0	0
1	-2
2	-4



Não escreva no livro.

Note que na função g o valor de y decresce 2 unidades para cada unidade de variação de x e que $a = -2$. Nesse caso, aumentando os valores de x, os valores das imagens correspondentes diminuem. Dizemos, então, que essa função é **decrescente** em $\mathbb{R}$.

Função crescente é aquela em que, aumentando o valor de x, o valor de y também aumenta. Já na **função decrescente**, aumentando o valor de x, o valor de y diminui. De modo geral, f é crescente em $\mathbb{R}$ se, para quaisquer valores de x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$, e f é decrescente em $\mathbb{R}$ se, para quaisquer valores de x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$ com $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.

Em toda função afim, $f(x) = ax + b$, temos que:

- se $a > 0$ e $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$ e $ax_1 + b < ax_2 + b$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$, e f é crescente em seu domínio $\mathbb{R}$;
- se $a < 0$ e $x_1 < x_2$, então $ax_1 > ax_2$ e $ax_1 + b > ax_2 + b$, ou seja, $f(x_1) > f(x_2)$, e f é decrescente em seu domínio $\mathbb{R}$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R5 **Considerando a função $y = -2x + 3$ de domínio $\mathbb{R}$:**

a) verifique qual é a raiz da função;

b) construa o gráfico da função;

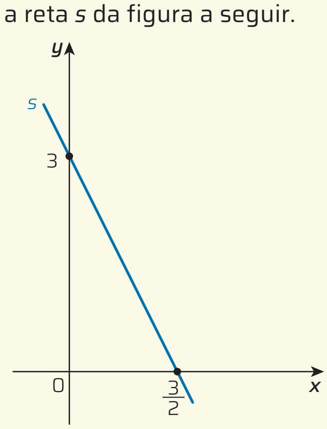
c) analise a função quanto ao seu crescimento.

Resolução

a) Fazendo $y = 0$, temos: $-2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Logo, a raiz da função é $\frac{3}{2}$ e o gráfico corta Ox em $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

b) O gráfico de $y = -2x + 3$ é a reta s da figura a seguir.



ID/BR

c) Essa função é decrescente em $\mathbb{R}$ porque, aumentando o valor de x, diminui o valor de y.

R6 **Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (2m - 10)x$. Determine m para que:**

a) f seja crescente em $\mathbb{R}$;

b) f seja decrescente em $\mathbb{R}$.

Resolução

a) f é crescente em $\mathbb{R}$ se, e somente se: $2m - 10 > 0 \Rightarrow m > 5$

b) f é decrescente em $\mathbb{R}$ se, e somente se: $2m - 10 < 0 \Rightarrow m < 5$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

27 **Classifique em crescente ou decrescente cada função de domínio $\mathbb{R}$ dada a seguir.**

a) $f(x) = (\sqrt{3} - 1)x$ Crescente.

b) $f(x) = (1 - \sqrt{2})x$ Decrescente.

c) $f(x) = (\pi - 4)x$ Decrescente.

d) $f(x) = (2 - \sqrt{3})x$ Crescente.

Antes de fazer a atividade **28**, sugerimos que você leia novamente a atividade **R6**.

28 **Determine $m \in \mathbb{R}$ para que f seja crescente em $\mathbb{R}$.**

a) $f(x) = (2m - 3)x$ $m > \frac{3}{2}$

b) $f(x) = (3m + 6)x$ $m > -2$

c) $f(x) = (-2m + 6)x$ $m < 3$

d) $f(x) = (-m + 4)x$ $m < 4$

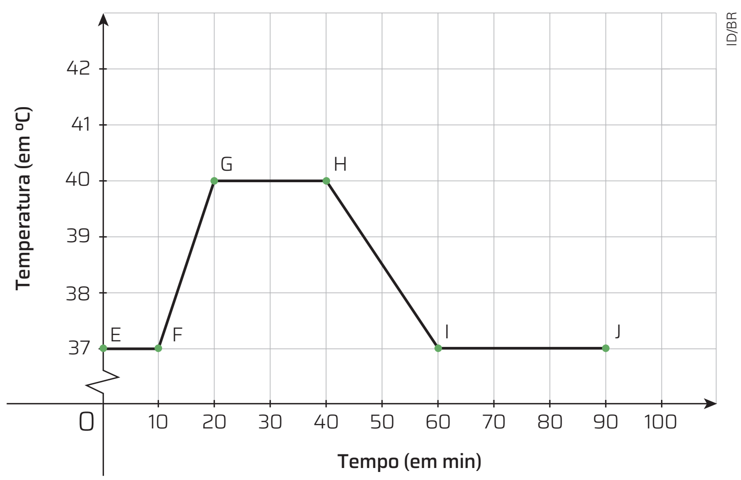
29 **Repita a atividade anterior para que f seja decrescente em $\mathbb{R}$.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

FUNÇÕES DEFINIDAS POR PARTES

O trabalho com este tópico possibilita o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT404**, pois envolve a análise de funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações algébrica e gráfica que permitem interpretar criticamente situações econômicas e sociais.

Além das funções que podem ser obtidas pelas operações entre funções, há outra forma de gerar novas funções. Acompanhe a seguinte situação.

O corpo humano apresenta uma temperatura normal entre 36 °C e 37,5 °C. Uma pessoa adoeceu e sua temperatura subiu para 40 °C, o que significa febre bem alta. Ela tomou um medicamento e, após 20 minutos, a febre baixou até voltar a 37 °C. O gráfico a seguir mostra a variação da temperatura corporal dessa pessoa ao longo do tempo.



Esse gráfico pode ser descrito por diferentes funções afins restritas a alguns intervalos e funções constantes. Chamando de f a função que engloba todas elas e de x o tempo, temos:

$$f(x) = \begin{cases} 37, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ \dfrac{3}{10}x + 34, \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \\ 40, \text{ se } 20 < x \leqslant 40 \\ -\dfrac{3}{20}x + 46, \text{ se } 40 < x \leqslant 60 \\ 37, \text{ se } 60 < x \leqslant 90 \end{cases}$$

Esse é um exemplo de uma **função definida por partes**.

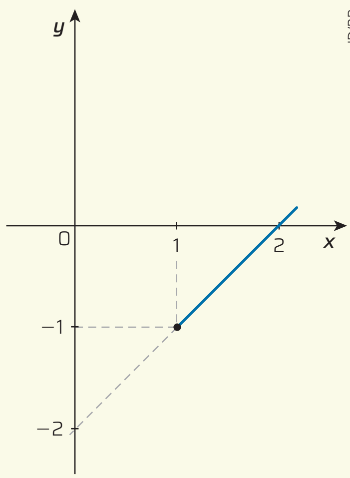
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R7 Esboce o gráfico cartesiano da função definida por:

$$\begin{cases} y = x - 2, \text{ para } x \geqslant 1 \\ y = -x + 1, \text{ para } x < 1 \end{cases}$$

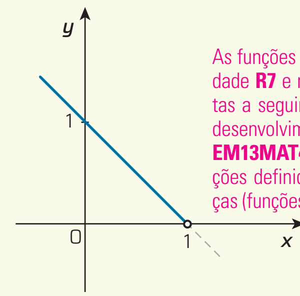
Resolução

Traçando o gráfico de $y = x - 2$ e considerando a parte correspondente a $x \geqslant 1$, obtemos o gráfico a seguir.



ID/BR

Realizamos um procedimento análogo para obter o gráfico de $y = -x + 1$, para $x < 1$.

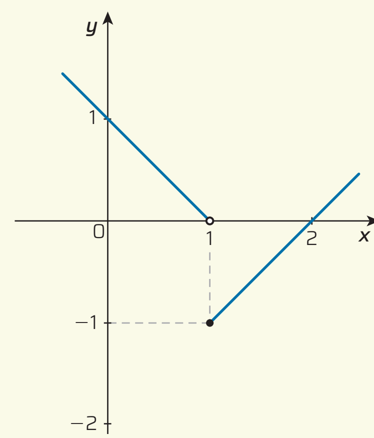


ID/BR

As funções apresentadas na atividade **R7** e nas atividades propostas a seguir têm como objetivo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404**, ao trabalhar funções definidas por várias sentenças (funções definidas por partes).

Traçando os dois gráficos no mesmo sistema de coordenadas, obtemos o gráfico cartesiano da função definida por:

$$\begin{cases} y = x - 2, \text{ para } x \geqslant 1 \\ y = -x + 1, \text{ para } x < 1 \end{cases}$$



ID/BR

As atividades **31**, **33**, **35**, **37** e **38** contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT510**, pois permitem que os estudantes investiguem conjuntos de dados relacionados ao comportamento de duas variáveis numéricas. Além disso, essas atividades desenvolvem a habilidade de avaliar propostas de intervenção na realidade usando conhecimentos algébricos.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Consulte a resposta no Manual do Professor.

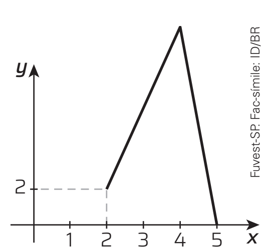
30 **Faça o gráfico cartesiano de f sendo:**

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ para } x \geqslant -2 \\ -x, \text{ para } x < -2 \end{cases}$$

31 **Registre a resolução no caderno.**

(Fuvest-SP) Considere a função f, cujo domínio é o intervalo fechado $[0, 5]$ e que está definida pelas condições:

- para $0 \leqslant x \leqslant 1$, tem-se $f(x) = 3x + 1$;
- para $1 < x < 2$, tem-se $f(x) = -2x + 6$;
- f é linear no intervalo $[2, 4]$ e também no intervalo $[4, 5]$, conforme mostra a figura a seguir;



Fuvest-SP. Fac-símile: ID/BR

- a área sob o gráfico de f no intervalo $[2, 5]$ é o triplo da área sob o gráfico de f no intervalo $[0, 2]$.

Com base nessas informações,

a) desenhe, [em um sistema de coordenadas,] o gráfico de f no intervalo $[0, 2]$; Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) determine a área sob o gráfico de f no intervalo $[0, 2]$; $\frac{11}{2}$

c) determine $f(4)$. $f(4) = \frac{29}{3}$

32 **Uma papelaria cobra R\$ 0,20 por página xerocada, caso o número de páginas seja inferior ou igual a 50. Se o número de páginas for superior a 50, o custo por página adicional passa a ser R\$ 0,16. Esboce o gráfico do custo total (C) para copiar x páginas.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

33 **Indique a alternativa correta no caderno.**

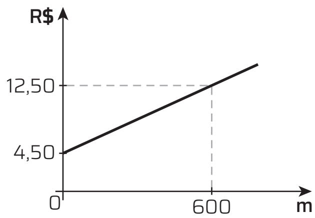
(Enem) O valor cobrado por uma corrida de táxi é calculado somando-se a bandeirada, um valor fixo que é cobrado em qualquer corrida, a um valor variável que depende da distância percorrida.

Uma empresa de táxi cobra pela bandeirada o valor de R$ 4,50. Para corridas de até 200 metros, é cobrada somente a bandeirada, e para corridas superiores a 200 metros é cobrado o valor de R$ 0,02 para cada metro adicional percorrido.

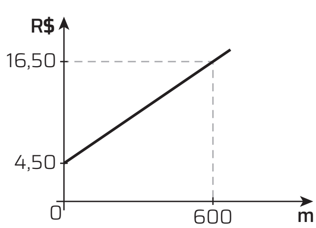
Para analisar o valor cobrado, em real, em função da distância percorrida, em metro, a empresa elaborou um gráfico, com uma simulação para uma distância de 600 metros.

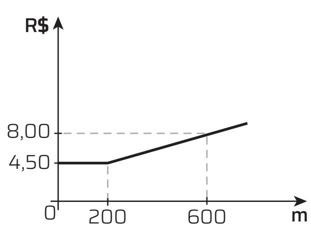
O gráfico que representa o valor da corrida, em real, em função da distância percorrida, em metro, é

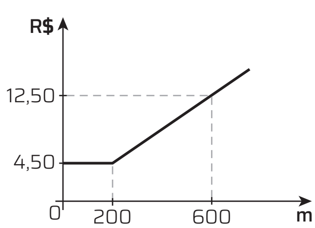
Alternativa **d**.

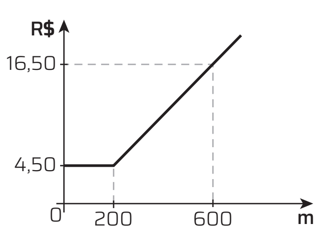
a)


Ilustrações: Enem. Fac-símile: ID/BR

b)


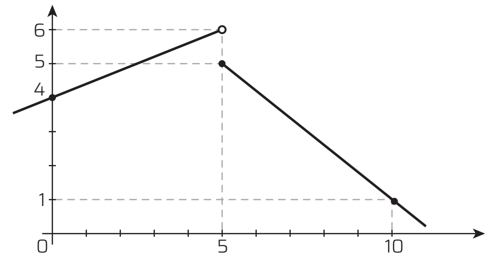
c)


d)


e)


34 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(UFG-GO) A função, definida para todo número real x, cujo gráfico está representado abaixo, tem a seguinte lei de formação: Alternativa **a**.



UFG-GO. Fac-símile: ID/BR

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x + 4, x < 5 \\ -\frac{4}{5}x + 9, x \geqslant 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{5}x + 4, x < 5 \\ \frac{4}{5}x + 9, x \geqslant 5 \end{cases}$

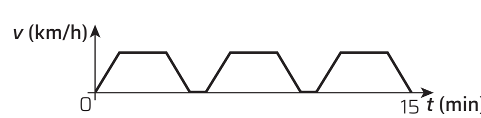
c) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x + 4, x < 5 \\ -\frac{5}{4}x + 9, x \geqslant 5 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x + 4, x < 5 \\ \frac{4}{5}x + 9, x \geqslant 5 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x + 4, x < 5 \\ \frac{5}{4}x + 9, x \geqslant 5 \end{cases}$

35 **Escreva a alternativa correta no caderno.** Alternativa **a**.

(Enem) Um semáforo é composto, geralmente, de três círculos de luzes coloridas (vermelho, amarelo e verde). A cor vermelha indica que o veículo deve estar parado e permanecer assim até que a cor verde volte a acender. O gráfico apresenta a variação de velocidade de um carro ao longo de um percurso de 15 minutos de duração, da residência de uma pessoa até seu local de trabalho. Durante esse percurso, o carro parou somente nos semáforos existentes ao longo de seu trajeto.



Enem. Fac-símile: ID/BR

Em quantos semáforos ele parou?

a) 2 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

36 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(UPE) Considere a função real g definida a seguir.

$$g(x) = \begin{cases} 2 + x, \text{ se } x \leqslant -1 \\ 1, \text{ se } -1 < x < 1 \\ -2x + 3, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Não escreva no livro.

A atividade **38** contribui para o desenvolvimento das competências gerais **2** e **9**. Utilize essa atividade como instrumento de avaliação para verificar a compreensão dos estudantes em relação à leitura de gráficos e a capacidade deles de produzir um texto consistente que represente cada etapa dessa função.

Em relação a essa função, é **CORRETO** afirmar que Alternativa **c**.

a) é decrescente para $x < 1$.
b) é crescente para $x > 1$.
c) é uma função constante se $-1 < x < 0$.
d) é crescente para $x > -1$.
e) é decrescente para $x \geqslant 0$.

37 **Um ciclista saiu de casa às 7 horas e pedalou até às 10 horas em velocidade constante de 15 km/h. O pneu furou e ele levou uma hora para fazer o conserto. Retornou a pedalar, mantendo a velocidade anterior, e demorou uma hora e meia para chegar ao destino. Descansou durante duas horas e voltou para casa sem parar, em velocidade constante, e chegou às 19 h 30 min.**

a) Contando as paradas, quanto tempo o ciclista gastou na ida? E na volta? Ida: 5,5 horas. Volta: 5 horas.
b) Com que velocidade o ciclista se deslocou na volta? 13,5 km/h
c) Faça um gráfico da velocidade em função do tempo do percurso de ida. Consulte a resposta no Manual do Professor.

38 **Observe o gráfico a seguir e faça o que se pede.**

a) Em qual(is) intervalo(s) a função que é representada por esse gráfico apresenta comportamento proporcional? Explique.
b) Elabore um texto com uma situação que possa ser representada por esse gráfico. Depois, troque seu texto com o de um colega e discutam se vocês concordam que a situação elaborada pelo colega pode ser representada pelo gráfico.

INEQUAÇÕES E ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO AFIM

Solicite aos estudantes que, em duplas, leiam o tópico "Inequações e estudo do sinal da função afim" e as atividades **R8** a **R11**. Depois, discuta com eles sobre o que aprenderam e as dúvidas que tiveram.

Vamos aprofundar o estudo das funções. Para isso, acompanhe a situação a seguir e sua resolução.

Um motorista de aplicativo recebe a quantia inicial de R$ 8,60 em cada corrida realizada e uma quantia adicional pela distância percorrida de R$ 2,20 por quilômetro. Que distância esse motorista deve percorrer, em uma única corrida, para receber pelo menos R$ 55,00?

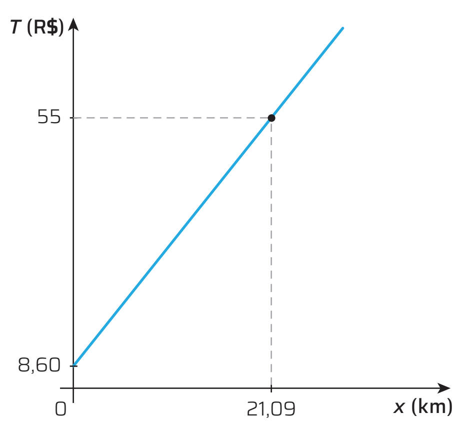
Como o valor recebido por corrida realizada varia em função da distância percorrida, podemos representar a quantia total T que esse motorista recebe quando percorre x quilômetros em uma corrida por uma função afim:

$$T(x) = 2{,}20 \cdot x + 8{,}60$$

O que precisamos saber é para quais valores de x tem-se $T(x) \geqslant 55$.

Para isso, vamos iniciar pelo cálculo do valor de x para o qual temos $T(x) = 55$ e, em seguida, vamos analisar o gráfico da função T.

$$\begin{aligned} 2{,}20x + 8{,}60 &= 55 \\ 2{,}20x &= 46{,}40 \\ x &= \frac{46{,}40}{2{,}20} \\ x &\simeq 21{,}09 \end{aligned}$$



Assim, para qualquer valor de x maior que 21,09, temos que $T(x)$ será maior que 55. Ou seja:

$$T(x) \geqslant 55 \text{ se } x \geqslant 21{,}09$$

Portanto, para receber pelo menos R$ 55,00, o motorista deve percorrer em uma única corrida, no mínimo, 21,09 quilômetros.

O que fizemos foi resolver uma desigualdade que envolve uma função afim.

Se $y = f(x)$ é uma função real, chamamos de **inequação** cada uma das seguintes desigualdades:

$f(x) > 0$ $\quad$ $f(x) \geqslant 0$ $\quad$ $f(x) < 0$ $\quad$ $f(x) \leqslant 0$

De modo geral:

Sendo $y = ax + b$ uma função afim, uma **inequação do 1º grau** é toda inequação redutível a uma das seguintes formas:

$ax + b > 0$ $\quad$ $ax + b \geqslant 0$ $\quad$ $ax + b < 0$ $\quad$ $ax + b \leqslant 0$

Em uma inequação do 1º grau, os valores da variável que transformam a inequação em uma desigualdade verdadeira recebem o nome de soluções da inequação. O conjunto de todas as soluções de uma inequação é o **conjunto solução** (S) ou **conjunto verdade** dessa inequação.

No processo de resolução de uma inequação do 1º grau, precisamos descobrir os valores de x para os quais $ax + b < 0$ ou $ax + b = 0$ ou $ax + b > 0$, o que é chamado de estudo do sinal de uma função afim.

Exemplo

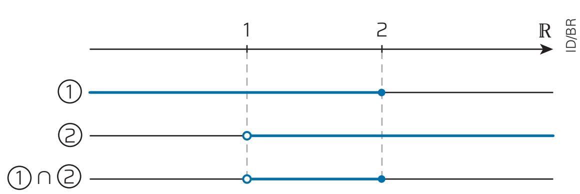
Acompanhe como podemos encontrar o conjunto solução em $\mathbb{R}$ de uma inequação dupla, que é equivalente a um sistema de desigualdades simples e simultâneas em que:

$$a < b < c \iff a < b \text{ e } b < c$$

Então, dada a desigualdade $2x - 1 \leqslant x + 1 < 3x - 1$, temos:

$$\begin{cases} 2x - 1 \leqslant x + 1 \Rightarrow x \leqslant 2 \quad (1) \\ \text{e} \\ x + 1 < 3x - 1 \Rightarrow x > 1 \quad (2) \end{cases}$$

Nesse caso, representamos a solução de cada inequação em forma de intervalo e fazemos a intersecção de (1) e (2). Observe.



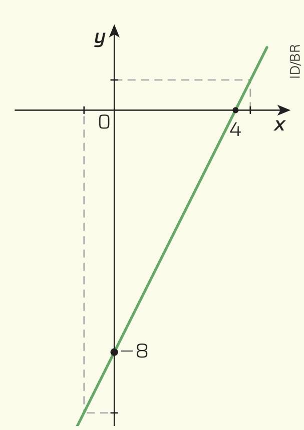
Dessa forma, obtemos $S =]1, 2]$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R8 **Resolva a inequação $2x - 8 > 0$.**

Resolução

Podemos resolver uma inequação do 1º grau **graficamente** ou **algebricamente**. Acompanhe a seguir as duas maneiras.



- Para resolver a inequação graficamente, primeiro construímos o gráfico da função $y = 2x - 8$.

  Analisando o gráfico, devemos procurar os valores de x que tornam $2x - 8 > 0$, ou seja, que tornam a função positiva. Verificamos no gráfico que $f(x) > 0$ quando $x > 4$.

- Para resolver essa inequação algebricamente, isolamos x:

$$2x - 8 > 0$$
$$2x > 8$$
$$x > \frac{8}{2}$$
$$x > 4$$

Portanto, todo número real maior que 4 é solução de $2x - 8 > 0$.

Podemos descrever o conjunto solução S assim:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\} \text{ ou } S =]4, +\infty[$$

R9 **Resolva em $\mathbb{R}$ a seguinte inequação:**

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{x+1}{2} \geqslant \frac{5x-1}{6}$$

Resolução

Sabendo que o mínimo múltiplo comum dos denominadores 2, 3 e 6 é 6, temos:

$$\frac{2(2x-1)}{6} - \frac{3(x+1)}{6} \geqslant \frac{5x-1}{6}$$

Eliminando os denominadores, temos:

$$2(2x-1) - 3(x+1) \geqslant 5x - 1$$

Logo, $-4x \geqslant 4$.

Dividindo os membros de $-4x \geqslant 4$ por -4, obtemos $x \leqslant -1$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$ ou $S =]-\infty, -1]$.

R10 **A média da altura de quatro jogadores de uma equipe juvenil de futebol é 1,75 m. Qual deve ser a altura de um novo jogador para que a média da altura seja superior a 1,8 m?**

Resolução

Se, inicialmente, a média das alturas é 1,75 m, então a soma das alturas é:

$$4 \cdot 1{,}75 = 7$$

Portanto, a soma das alturas é 7 m (porque são quatro jogadores).

Se a média das alturas for 1,8 m, então a soma das alturas será:

$$5 \cdot 1{,}8 = 9$$

Assim, a soma das alturas será 9 m (porque agora são cinco jogadores).

Seja h a altura do quinto jogador, então:

$$h + 7 > 9$$
$$h > 2$$

Logo, a altura do quinto jogador deverá ser superior a 2 metros.

R11 **Descubra os valores de x para os quais a função afim $f(x) = 3x + 1$ é maior que zero ou menor que zero.**

Resolução

Primeiramente, devemos descobrir para que valor de x a função $f(x) = 3x + 1$ é igual a zero:

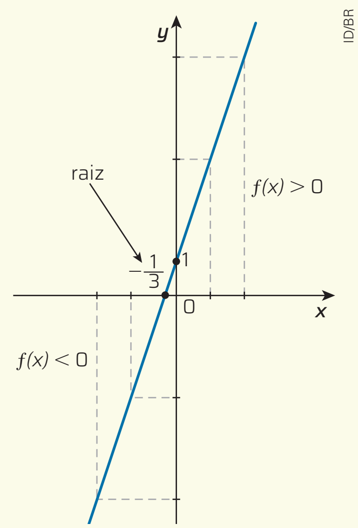
$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Ou seja, $-\frac{1}{3}$ é a raiz dessa função.

Usando esse valor de x e um outro valor qualquer, construímos um quadro e esboçamos o gráfico da função.

> Lembre-se de que o gráfico que representa a função afim é uma reta e, por isso, dois pontos são suficientes para determiná-la.

x	$y = 3x + 1$
$-\frac{1}{3}$	0
0	1



Como o gráfico de uma função afim é uma reta que pode ser crescente ou decrescente, conhecendo a raiz ou o zero da função e o coeficiente angular, somos capazes de estudar o sinal, pois a função troca de sinal quando passa pela raiz.

Analisando o gráfico obtido, podemos verificar que a função $f(x) = 3x + 1$ é representada por uma reta crescente e troca de sinal quando $x = -\frac{1}{3}$.

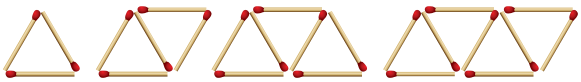
Então, temos que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ quando } x > -\frac{1}{3} \\ f(x) = 0 \text{ quando } x = -\frac{1}{3} \\ f(x) < 0 \text{ quando } x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

40. c) $D(P) = \mathbb{N}^*$
$Im(P) = \{P \in \mathbb{N} \mid P = n + 2, n \geqslant 1\}$

39 Analise a sequência de triângulos formados por palitos.


ID/BR

a) Copie o quadro no caderno e complete-o.

Número de triângulos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
Número de palitos	3	5	7	9	11	13	15	17	19	$2n+1$

b) Qual lei expressa o número de palitos em função do número de triângulos que se quer formar? $p(n) = 2n + 1$

c) De que tipo é essa função? Função afim ou polinomial do 1º grau.

d) Qual é o domínio e o conjunto imagem dessa função? $D(p) = \mathbb{N}^*$
$Im(p) = \{p \in \mathbb{N} \mid p = 2n + 1, n \geqslant 1\}$

e) Desenhe o gráfico da função e responda: Ele será uma reta? Por quê? Consulte a resposta no Manual do Professor.

f) Quantos palitos são necessários para formar 89 triângulos? 179 palitos.

g) Quantos triângulos serão formados com 101 palitos? 50 triângulos.

40 Organize um quadro para mostrar o perímetro de cada figura indicada no problema anterior (considere 1 palito como unidade de medida).

a) Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o.

40. d) A função é crescente, porque à medida que o número de triângulos aumenta, o perímetro também aumenta.

Número de triângulos	1	2	3	4	5	6	7	n
Perímetro da figura	3	4	5	6	7	8	9	$n+2$

b) Expresse a lei que dá o perímetro em função do número de triângulos. $P(n) = n + 2$

c) Determine o domínio e o conjunto imagem dessa função.

d) A função é crescente ou decrescente? Por quê?

e) Construa um gráfico para a função e explique por que ele será formado apenas por pontos isolados. Consulte a resposta no Manual do Professor.

41 Estude o sinal de cada função. Consulte as respostas no Manual do Professor.

a) $f(x) = 3x - 36$
b) $f(x) = -4x + 36$
c) $f(x) = 5x + 35$
d) $f(x) = -8x - 4$
e) $f(x) = 6x$
f) $f(x) = -5x$

42 Resolva graficamente as inequações. Consulte as respostas no Manual do Professor.

a) $x + 3 > -6$
b) $-2x + 5 > -8$
c) $2(x + 3) > -1$
d) $3x + 6 \leqslant -1{,}5$

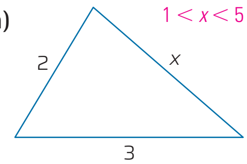
43 Seja a inequação $\frac{x-3}{5} - \frac{x+1}{2} \geqslant \frac{x-4}{10}$, determine:

a) a maior solução real; $-\frac{7}{4}$
b) a maior solução par; -2
c) a maior solução ímpar; -3
d) o menor inteiro que não é solução. -1

44 A medida do comprimento de cada lado de um triângulo tem de ser menor que a soma das medidas dos comprimentos dos outros dois.

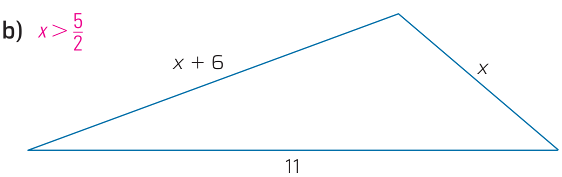
Determine as desigualdades para cada um dos triângulos e, depois, resolva-as. Lembre-se de que as medidas dos lados só podem ser números reais maiores que zero.

a) $1 < x < 5$

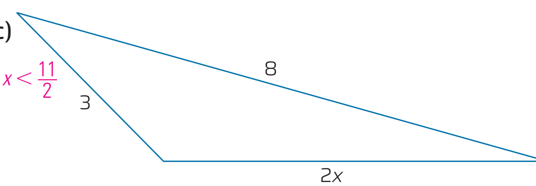


Ilustrações: ID/BR

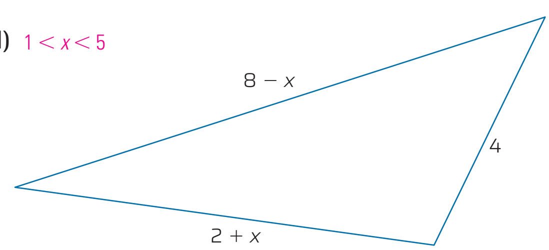
b) $x > \frac{5}{2}$



c) $\frac{5}{2} < x < \frac{11}{2}$



d) $1 < x < 5$



45 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações.

a) $5(x - 2) - 2(x - 1) > 4(x + 2)$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 16\}$

b) $\frac{x-3}{4} - \frac{x+1}{3} \leqslant \frac{x-1}{6}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{11}{3}\}$

c) $(x - 4)^2 < (x - 3)^2$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{7}{2}\}$

d) $2 - \frac{x-1}{10} \leqslant 5$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -29\}$

46 Resolva os sistemas.

a) $\begin{cases} 3x - 2 \leqslant 2x - 1 \\ 2x + 1 \geqslant x - 3 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 1\}$

b) $\begin{cases} 3(x - 1) \geqslant x + 1 \\ 5x - 4 < 6x + 3 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

47 Resolva as inequações.

a) $6x - 10 < x + 20 < 5x + 40$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 6\}$

b) $-x + 3 \leqslant 2x - 1 \leqslant 8x + 3$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{4}{3}\right\}$

c) $5x - 1 \leqslant 2x + 2 < 3x - 1$ $S = \varnothing$

Escolha uma ou duas inequações da atividade **42** (a do item **a**, por exemplo) e peça aos estudantes que resolvam $x + 3 = -6$, $x + 3 < -6$ e $x + 3 \geqslant -6$ algébrica e graficamente; depois, solicite que comparem o que muda na resposta de cada caso, de acordo com o sinal que aparece entre $x + 3$ e -6.

Não escreva no livro.

Se achar interessante, na atividade **48**, organize com os estudantes uma pesquisa sobre os planos de telefonia celular usados por eles.

48 A assinatura mensal de um telefone celular é R$ 36,00 e cada minuto falado custa R$ 3,00.

a) Qual é o limite máximo de minutos que podemos usar durante um mês para que o valor da conta não ultrapasse R$ 72,00? 12 minutos.

b) Supondo que as tarifas sofram um reajuste de 5%, qual é o número máximo de minutos que poderemos usar durante um mês para que a conta continue até R$ 72,00? (Faça arredondamentos, se for necessário.) 10 minutos.

49 Em Imaginolândia, onde a moeda também é o real, qualquer cliente da empresa Telefone para Todos (TPT) paga R$ 18,50 pela assinatura mensal e R$ 1,25 por minuto falado. À soma da assinatura com o preço total dos minutos falados é aplicada uma taxa de imposto de 16%.

a) Qual é o número máximo de minutos que um cliente pode utilizar sem que sua conta mensal ultrapasse R$ 70,00? 33 minutos.

b) Se a taxa for elevada para 18%, qual é o número máximo de minutos que o cliente poderá falar para que sua conta mensal não ultrapasse R$ 70,00? 32 minutos.

50 (FGV-SP) João deseja adquirir um telefone celular. Dois planos lhe são oferecidos:

I. **Plano alfa:** Se o consumo não ultrapassar 100 minutos, o preço por minuto será R$ 0,70. Se o consumo ultrapassar 100, mas não for maior que 400 minutos, o preço por minuto terá um desconto de R$ 0,001 (um milésimo de real) multiplicado pelo número de minutos que exceder o consumo de 100 minutos. Se o consumo ultrapassar 400 minutos, o preço por minuto será R$ 0,40.

II. **Plano beta:** Há um preço fixo de R$ 50,00, com o direito de uso de 87 minutos (franquia) de ligação e o minuto excedente custará R$ 0,80.

Para quantos minutos de ligação o plano beta é o mais vantajoso? O plano beta é mais vantajoso a partir de 72 minutos, até 140 minutos.

51 (Unicamp-SP) Sejam dadas as funções $f(x) = px$ e $g(x) = 2x + 5$, em que p é um parâmetro real.

a) Supondo que $p = -5$, determine para quais valores reais de x tem-se $f(x) \cdot g(x) < 0$.

b) Determine para quais valores de p temos $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [-8, -1]$.

51. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \text{ ou } x > 0\right\}$

b) $p \leqslant -3$

CÁLCULO RÁPIDO

Neste capítulo, fica evidente que resolver equações do 1º grau mentalmente pode ajudar no traçado de gráficos de funções, no estudo do sinal da função e na resolução de inequações.

1 Resolva as equações.

a) $2x = 0$ $x = 0$

b) $2x = +2$ $x = 1$

c) $2x = -4$ $x = -2$

d) $2x = -2$ $x = -1$

e) $2x = -1$ $x = -\frac{1}{2}$

f) $-4 = 2x$ $x = -2$

g) $-3 = -x$ $x = 3$

h) $-1 = 3x$ $x = -\frac{1}{3}$

i) $1 = -3x$ $x = -\frac{1}{3}$

j) $3x + 6 = 0$ $x = -2$

k) $-x + 2 = 0$ $x = 2$

l) $-2x - 4 = 0$ $x = -2$

Nesta seção, é muito importante discutir como os estudantes pensaram para resolver as equações. O estudante que, ao resolver $-3 = -x$, disser que $x = 3$, porque o oposto de -3 é 3, mostra que compreende a igualdade com significado algébrico. Ele poderá auxiliar aquele que "passou o x" para o outro lado da equação, sem compreender o real significado dessa movimentação das letras e dos números. Caso julgue pertinente, proponha outras equações, em outras oportunidades.

2 Resolva cada equação, conforme a estratégia apresentada no exemplo.

$$2x + 5 = 13 \Rightarrow x = \frac{13 - 5}{2} \Rightarrow x = 4$$

a) $4y + 8 = 40$ $y = 8$

b) $3a + 10 = 70$ $a = 20$

c) $7m - 5 = 16$ $m = 3$

d) $-2b + 10 = 0$ $b = 5$

e) $-4z + 12 = -12$ $z = 6$

f) $-5t + 20 = 35$ $t = -3$

3 Resolva as equações, conforme a estratégia apresentada no exemplo.

$$\frac{2}{x + 1} = 2 \Rightarrow 2(x + 1) = 2 \Rightarrow x + 1 = \frac{2}{2} \Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$$

a) $\frac{12}{3x + 1} = 4$ $x = \frac{2}{3}$

b) $\frac{36}{n} = 9$ $n = 4$

c) $\frac{20}{7 - 2t} = 4$ $t = 1$

d) $\frac{30}{5 - m} = 6$ $m = 0$

Converse com o professor de Química sobre outras atividades que envolvem medidas, números decimais e porcentagem que vocês possam desenvolver juntos, para favorecer o cálculo rápido dos estudantes.

4 **Determine, em cada caso, o coeficiente angular a da reta que representa a função afim $y = ax + b$, de domínio $\mathbb{R}$, e que passa pelos pontos dados.**

> O coeficiente angular a da reta ($y = ax + b$) que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dado por $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

a) (5, 3) e (1, 11) -2 **b)** (−1, −2) e (3, 4) 1,5 **c)** (0, 0) e (5, 15) 3 **d)** (1, 5) e (4, 2) -1

5 **Faça as conversões a seguir. Lembre-se de que 1 kg = 1000 g e 1 g = 1000 mg.**

a) Quantos gramas há em:
- 2 kg? 2000 g
- 3,5 kg? 3500 g
- 1750 kg? 1750000 g
- 0,5 kg? 500 g

b) Quantos quilogramas há em:
- 150000 g? 150 kg
- 750 g? 0,75 kg
- 500 g? 0,5 kg
- 1300 g? 1,3 kg

c) Quantos miligramas há em:
- 17 g? 17000 mg
- 1,8 g? 1800 mg
- 0,5 g? 500 mg
- 30,2 g? 30200 mg

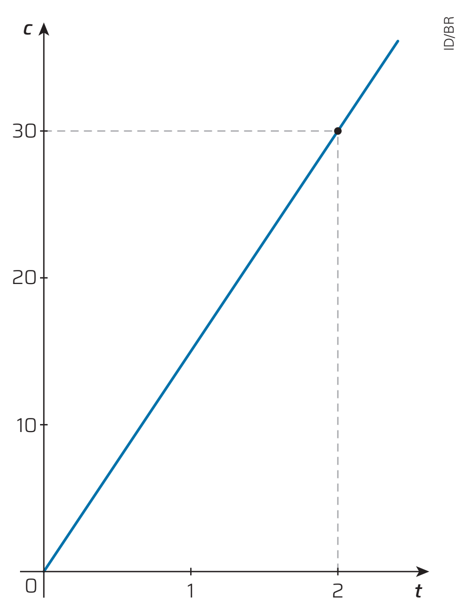
d) Quantos gramas há em:
- 6000 mg? 6 g
- 500 mg? 0,5 g
- 1750 mg? 1,75 g
- 650 mg? 0,65 g

PARA RECORDAR

A atividade **1** trabalha a noção de extrapolação a partir de um gráfico.

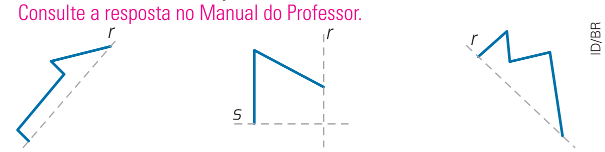
Vamos recordar partes importantes estudadas neste capítulo e nos capítulos anteriores. Assim, será mais fácil continuar aprendendo.

1 **A quantidade c de camisetas produzidas por uma pequena confecção, ao longo de um certo período de tempo t (medido em horas), apresenta uma variação como a representada no gráfico.** Aproximadamente 33 h 20 min.

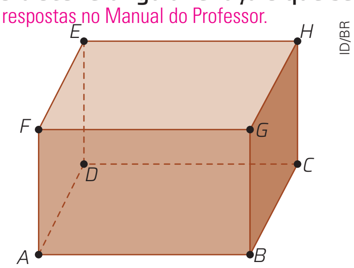


Com base em uma projeção do gráfico apresentado, qual é o tempo aproximado que essa confecção leva para ultrapassar a produção de 500 camisetas?

2 **Copie as figuras no caderno e construa suas imagens simétricas em relação às retas r ou s ou ambas.**
Consulte a resposta no Manual do Professor.



3 **Observe o bloco retangular e faça o que se pede.**
Consulte as respostas no Manual do Professor.



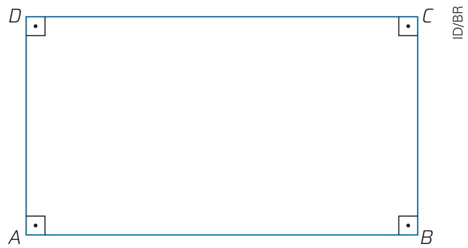
a) O plano ABC do bloco retangular contém a face $ABCD$ e as retas AB e BC. Dizemos, então, que essas retas são **coplanares**. Que outras retas coplanares podemos encontrar nesse bloco retangular passando por dois de seus vértices?

b) Retas coplanares que têm um único ponto comum são chamadas de **concorrentes**. Por exemplo, $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são concorrentes. Indique outros pares de retas concorrentes que passem por dois vértices desse sólido.

c) Retas coplanares que não têm ponto comum são chamadas de **paralelas**. Que retas paralelas podemos indicar nesse bloco retangular passando por dois vértices?

As atividades **3** e **4** ampliam o conhecimento geométrico e a habilidade de visualização espacial dos estudantes.

4 **Observe o retângulo a seguir e responda às questões.**



a) Os quatro ângulos são retos (têm 90º). Por isso, podemos afirmar que os segmentos AB e BC são **perpendiculares**, ou seja, formam entre si um ângulo de 90º. Que outros pares de segmentos perpendiculares aparecem no retângulo? $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$; $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$; $\overline{DA}$ e $\overline{AB}$.

b) A reta AB é perpendicular à reta BC porque forma com ela um ângulo reto. Que outras retas perpendiculares podemos encontrar nesse retângulo? $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{DA}$; $\overleftrightarrow{DA}$ e $\overleftrightarrow{AB}$.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

1 **Três estudantes estavam visitando uma cidade e notaram que o motorista de um automóvel estava infringindo o regulamento de trânsito.** Sim, o número é 7 744.

Mais tarde, ao comentarem sobre o caso, nenhum dos estudantes lembrava os quatro números da placa do carro, mas cada um havia registrado alguma particularidade desse número.

O primeiro estudante notou que os dois primeiros algarismos eram iguais. O segundo percebeu que os dois últimos também eram iguais. E o terceiro garantiu que o número da placa era um quadrado perfeito.

Será possível determinar o número da placa somente com esses dados?

2 **Roberto, José e Paulo são o maquinista, o condutor e o guarda-freios de um trem, e as profissões, na ordem em que foram indicadas, não correspondem necessariamente ao nome deles.**

Viajando no trem estão três passageiros também chamados Roberto, José e Paulo, que serão designados com a palavra senhor antes do nome. Roberto é o maquinista.

I. O senhor Paulo mora no Rio de Janeiro.
II. O guarda-freios mora em Porto Alegre.
III. O senhor José há muito tempo esqueceu toda a álgebra que aprendeu na escola.
IV. O passageiro cujo nome é o mesmo que o do guarda-freios mora em São Paulo.
V. O guarda-freios e um dos passageiros, um renomado físico, frequentam a mesma igreja.
VI. Roberto vence o condutor no bilhar.

Quem é o maquinista?

Os estudantes podem trocar suas produções realizadas na seção *Palavras-chave* para aperfeiçoar os registros uns dos outros. Isso incentiva a organização, o aprendizado colaborativo e a escrita na linguagem Matemática. Essas produções podem compor a avaliação formativa das expectativas de aprendizagem previstas ao final do estudo deste do capítulo. A reflexão final do estudante sobre sua produção evidencia a habilidade socioemocional de autogestão.

PALAVRAS-CHAVE

Os termos a seguir são os que consideramos fundamentais neste capítulo:

- Função afim ou função polinomial do 1º grau
- Raízes
- Estudo do sinal
- Desigualdade
- Inequações

Escreva no caderno o que você aprendeu sobre eles e destaque suas dúvidas.

Procure compreender o que ainda não sabe, relendo o livro ou conversando com o professor.

Seus registros sobre o que estudou neste capítulo estavam organizados? Eles auxiliaram você na produção solicitada como síntese de suas aprendizagens? De que modo você pode melhorar sua organização para o que vai aprender nos próximos capítulos?

MATEMÁTICA E MEIO AMBIENTE

O objetivo desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes ao desenvolver habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propor que vivenciem um processo investigativo. Trabalham-se, assim, as competências específicas **1** e **2** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Para ampliar os conhecimentos acerca do tema trabalhado nesta seção, convide um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias ou da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para participar das discussões.

Consumo consciente de energia elétrica

Economizar energia elétrica é uma das medidas essenciais para diminuir despesas, preservar o meio ambiente e promover a sustentabilidade. Para alcançar isso, é fundamental adotar práticas e tecnologias que previnam o desperdício, como o uso consciente de eletrodomésticos, a opção por aparelhos mais eficientes e o investimento em fontes de energia renováveis.

Leia o texto a seguir, que apresenta algumas dicas para reduzir o consumo de energia elétrica em casa.

Conta de luz mais cara: veja oito dicas para economizar na energia elétrica

Aneel anunciou bandeira tarifária vermelha patamar 2 para o mês de setembro; adoção de medidas simples para reduzir consumo em ar-condicionado, computador, geladeira, televisão e chuveiro fazem diferença

[...] A Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel) anunciou [...] o acionamento da bandeira vermelha patamar 2 pela primeira vez desde agosto de 2021. Isso significa que os consumidores pagarão mais caro e a saída é adotar medidas para economizar na conta de luz e fazer uso consciente da energia, segundo recomendação da própria agência.

"A orientação é para utilizar a energia de forma consciente e evitar desperdícios que prejudicam o meio ambiente e afetam a sustentabilidade do setor elétrico como um todo. A economia de energia é essencial para a preservação dos recursos naturais", diz a nota da Aneel.

[...]

Como economizar na conta de luz

1. Iluminação: Abra a janela durante o dia e aproveite a luz natural para evitar acender lâmpadas. Trocar as lâmpadas por modelos de LED, mais econômicas [...];
2. Televisão: Programe a TV ligada para desligar automaticamente à noite [...]. A Enel indica também tirar a TV da tomada quando não estiver assistindo, já que ela consome energia elétrica mesmo desligada;
3. Geladeira e congelador: Evite abrir e fechar a porta a todo momento e confira como está o estado das borrachas de vedação. [...];
4. Computador: Configure os seus dispositivos (*notebook* ou *desktop*) para desligar automaticamente após um período sem utilização. Desligue-os em pausas mais prolongadas, inclusive a tela;
5. Chuveiro elétrico: Sempre que possível, deixe-o na função verão. Ligue o chuveiro apenas quando os outros aparelhos da casa não estiverem ligados [...] para evitar a sobrecarga na rede elétrica;
6. Ferro de passar roupa: Dependendo do uso, ele pode representar até 7% de sua conta de energia elétrica, segundo a Enel. Além de acumular o máximo de roupas antes de passar, use-o na temperatura correta de aquecimento para cada tipo de roupa;
7. Ar-condicionado: Quanto mais frio, maior o consumo de energia. A dica é regular a temperatura para 23°C e não se esquecer de manter as janelas e portas fechadas para que o ar frio não escape;
8. Máquina de lavar: Além de acumular o máximo de roupas para lavá-las de uma só vez, confira também se o filtro da máquina está limpo. [...]

Afinal, o que é a bandeira tarifária?

Lançado em 2015, o sistema de bandeiras tarifárias foi criado pela Aneel para indicar quanto os custos de geração de energia elétrica no Brasil estão mais caros ou mais baratos. São três bandeiras: verde, amarela e vermelha.

No caso da bandeira verde, ela indica não ser necessário acrescentar cobranças adicionais. O acionamento da amarela e da vermelha dependem dos recursos hídricos disponíveis, já que a principal matriz energética brasileira advém das hidrelétricas. [...]

Conta de luz mais cara: veja oito dicas para economizar na energia elétrica. *Estadão*, São Paulo, 3 set. 2024. Disponível em: https://www.estadao.com.br/economia/aumento-conta-de-luz-mais-cara-como-economizar-energia-eletrica-veja-oito-dicas-bandeira-vermelha-patamar-2-setembro-nprei/. Acesso em: 24 set. 2024.

PARA EXPLORAR

Simulador

Companhia Paranaense de Energia (Copel). *Meu simulador de consumo*. Curitiba, [20--]. Disponível em: https://www.copel.com/scnweb/simulador/informacoes.jsf. Acesso em: 8 ago. 2024.

Para saber mais sobre o consumo médio de eletricidade dos aparelhos mais comuns nas classes de consumo residencial, rural e comercial/industrial, confira esse simulador elaborado pela Copel.

Não escreva no livro.

Dicas de economia de energia

Equipamentos:

Para calcular o consumo médio de energia (kWh) de um equipamento de acordo com o seu hábito de uso, procure a potência do aparelho no manual do fabricante. Em seguida, faça o cálculo da seguinte forma:

$$\frac{\text{Potência do equipamento (W)} \times \text{N}^{\underline{o}} \text{ de horas utilizadas} \times \text{N}^{\underline{o}} \text{ de dias de uso ao mês}}{1\,000}$$

Na coluna "Consumo médio mensal (kWh)" há equipamentos em que o resultado da multiplicação acima: "Potência (W) × número de horas × número de dias de uso no mês/1 000" resultará em valores diferentes do calculado. Isso se dá devido ao funcionamento desses equipamentos que "ligam e desligam" periodicamente, casos como: condicionadores de ar, geladeiras, *freezers*, ferro de passar roupas, lavadoras de louças e roupas, entre outros.

Para achar o custo mensal em reais, multiplique o consumo médio em kWh pelo valor da tarifa cobrada pela concessionária local.

DICAS de economia de energia. Procel Info, 2006. Disponível em: http://www.procel.gov.br/main.asp?View=%7bE6BC2A5F-E787-48AF-B485-439862B17000%7d. Acesso em: 8 ago. 2024.

Na tabela a seguir, disponibilizada pelo Programa Nacional de Conservação de Energia Elétrica (Procel), temos uma estimativa de consumo médio mensal de eletrodomésticos de acordo com um uso hipotético.

Estimativa de consumo médio mensal de eletrodomésticos

Aparelhos elétricos	Dias estimados uso/mês	Média utilização/dia	Consumo médio mensal (kWh)
Chuveiro elétrico – 4500 W	30	32 min	72,00
Computador	30	8 h	15,12
Ferro elétrico automático a seco – 1050 W	12	1 h	2,40
Geladeira 2 portas	30	24 h	48,24
Lâmpada fluorescente compacta – 11 W	30	5 h	1,65
Lâmpada incandescente – 40 W	30	5 h	6,00
Lavadora de roupas	12	1 h	1,76
Secador de cabelo – 1000 W	30	10 min	5,21
TV em cores – 32" (LCD)	30	5 h	14,25
Videogame	15	4 h	1,44

Fonte de pesquisa: DICAS de economia de energia. Procel Info, 2006. Disponível em: http://www.procel.gov.br/main.asp?View=%7bE6BC2A5F-E787-48AF-B485-439862B17000%7d. Acesso em: 8 ago. 2024.

Conectando ideias

Explique aos estudantes que a geração de energia elétrica é uma das principais fontes de emissões globais de poluentes e que a transição para energias limpas é essencial para enfrentar as mudanças climáticas. Aproveite para abordar o ODS 7, (disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs/7; acesso em: 8 ago. 2024), que faz parte da Agenda 2030 da Organização das Nações Unidas (ONU) e visa garantir o acesso a fontes de energia confiáveis, sustentáveis e modernas para todos.

1 **O chuveiro elétrico está presente em muitas residências brasileiras e é responsável por uma parte significativa do consumo de energia elétrica.**

a) Com os dados da tabela do Procel, escreva uma função que determina o consumo (C), em quilowatt-hora, em função do tempo (t), em hora, de utilização por dia. $C(t) = 4{,}5t$

b) Determine o consumo mensal (30 dias) em quilowatt-hora desse chuveiro, considerando que o uso diário seja de duas horas. 270 kWh

c) Analise se em sua residência o uso do chuveiro é consciente e como esse uso pode ser melhorado. Respostas pessoais.

2 **O consumo consciente de energia elétrica é fundamental para enfrentar os desafios ambientais no mundo. Reduzir o desperdício de eletricidade, utilizar aparelhos eletrônicos eficientes e optar por fontes de energia renováveis são práticas essenciais na atualidade, que, além de contribuir para a preservação ambiental, resultam em economia financeira.** Respostas pessoais.

a) O que pode ser feito para reduzir os impactos socioambientais causados pelo consumo de energia elétrica e como essas iniciativas podem ajudar a favorecer um futuro mais sustentável?

b) Em duplas, pesquisem medidas que estão sendo tomadas no Brasil e em outros países e elaborem uma apresentação com os dados coletados.

c) Apresentem suas conclusões aos colegas e discutam os principais pontos levantados por todos.

2. a) No processo proposto por esta atividade, os estudantes têm oportunidade de desenvolver a competência geral **7**, na medida em que formulam e defendem decisões que promovem a consciência socioambiental e o consumo responsável.

Dando continuidade ao estudo sistemático das funções algébricas mais simples, neste capítulo vamos estudar as funções quadráticas. Os textos e as atividades têm como objetivo dar aos estudantes oportunidades para modelar, representar e resolver situações contextualizadas que envolvem essas funções.

FUNÇÃO QUADRÁTICA

NESTE CAPÍTULO

- Introdução à função quadrática
- Gráfico da função quadrática
- Algoritmo, fluxograma e função quadrática
- Valor máximo ou mínimo e conjunto imagem da função quadrática
- Estudo do sinal da função quadrática
- Inequações do 2º grau
- Função modular

Vamos analisar uma situação que pode ser descrita por uma função.

Júlia é proprietária de uma loja de materiais esportivos cujo custo unitário é de R$ 200,00 para adquirir um modelo de bicicleta. Ela fez uma análise sobre a venda de cada produto da loja nos meses anteriores para planejar as vendas dos próximos meses e observou a seguinte relação entre a quantidade de bicicletas de certo modelo que foram vendidas e o seu preço de venda:

Se vender cada bicicleta por x reais, a quantidade de bicicletas vendidas no mês será $(800 - x)$ unidades, com $0 \leqslant x \leqslant 800$.

Assim, Júlia percebeu que à medida que o valor de x aumenta, a quantidade de bicicletas vendidas diminui. Com base nesses dados, é possível determinar uma função que relaciona o valor de x com o lucro que a loja pode ter com a venda desse modelo de bicicleta.

Se o valor de venda de cada bicicleta é x reais e o custo é R$ 200,00, o lucro de cada unidade é igual a $(x - 200)$ reais.

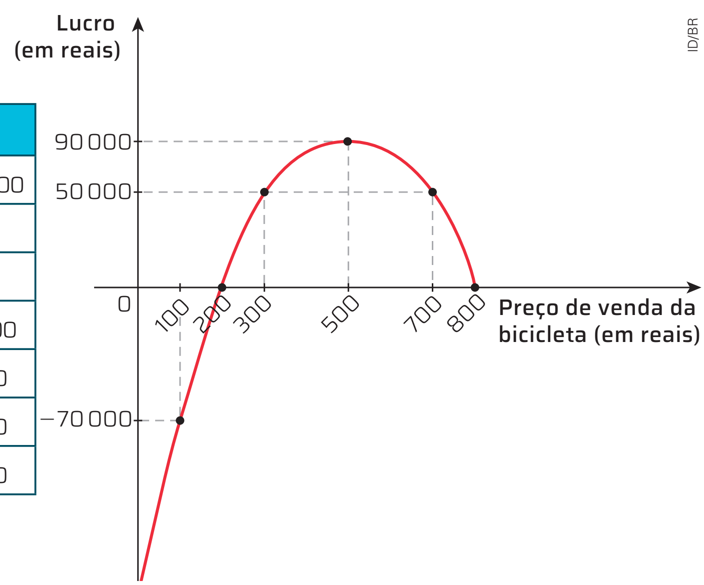
Vendendo $(800 - x)$ bicicletas, o lucro total L esperado é igual a:

$$L(x) = (800 - x) \cdot (x - 200)$$
$$L(x) = 800x - x^2 - 160\,000 + 200x$$
$$L(x) = -x^2 + 1\,000x - 160\,000$$

Esse é um exemplo de **função quadrática**, que também pode ser chamada de **função polinomial do 2º grau**. Para termos uma ideia do gráfico dessa função, vamos determinar alguns de seus pontos.

Julian Rovagnati/Shutterstock.com/ID/BR

x	$L(x)$
0	−160 000
200	0
800	0
100	−70 000
300	50 000
500	90 000
700	50 000



ID/BR

O gráfico sugere que o lucro na venda dessas bicicletas será máximo quando o preço de venda de cada bicicleta desse modelo for R$ 500,00. Nesse caso, o lucro será R$ 90 000,00.

Neste capítulo, vamos estudar as funções quadráticas. Faremos a mesma análise adotada para o estudo das funções afins: domínio, conjunto imagem, raízes, sinal, crescimento e decrescimento. Assim, vamos desenvolver estratégias para utilizar as funções quadráticas na resolução de diversos problemas, como o apresentado nessa situação.

A simetria de reflexão foi escolhida para relacionar pontos do gráfico com propriedades da função quadrática, o que permite dar significado aos pontos especiais do gráfico por meio das propriedades de simetria da parábola, possibilitando o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT105**. O trabalho com o texto introdutório possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302**, uma vez que nele é apresentado um modelo matemático descrito por meio de uma função quadrática. Já a habilidade **EM13MAT402** pode ser desenvolvida pelos estudantes ao interpretar e relacionar representações algébricas e geométricas de funções. Por fim, eles desenvolvem as habilidades **EM13MAT502** e **EM13MAT503** na medida que investigam relações entre gráficos e funções e pontos extremos dos gráficos de funções.

INTRODUÇÃO À FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número x associa o número $ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, é denominada **função quadrática** ou **função polinomial do 2º grau**.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

Dizemos que a, b e c são os coeficientes da função.

Costumamos dizer, resumidamente, que função quadrática é a função definida por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, ou $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, ficando subentendido que o domínio é $\mathbb{R}$.

Exemplos

- $y = 3x^2 + 6x + 2$, com $a = 3$, $b = 6$, $c = 2$.
- $y = 1 - 4x^2 - 8x$, com $a = -4$, $b = -8$, $c = 1$.
- $y = 20x - 5x^2$, com $a = -5$, $b = 20$, $c = 0$.
- $y = \sqrt{3} - \dfrac{2x^2}{3}$, com $a = -\dfrac{2}{3}$, $b = 0$, $c = \sqrt{3}$.
- $y = -4x^2$, com $a = -4$, $b = 0$, $c = 0$.

Os elementos que caracterizam determinada função quadrática, distinguindo-a de outras, são seus coeficientes a, b e c. Assim, consideradas as funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = mx^2 + nx + p$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, temos:

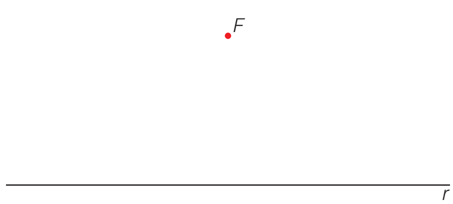
$$f = g \Leftrightarrow a = m \text{ (não nulos)},\ b = n \text{ e } c = p$$
$$f \neq g \Leftrightarrow a \neq m \text{ (não nulos) ou } b \neq n \text{ ou } c \neq p$$

GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

O gráfico de uma função quadrática corresponde a uma curva chamada de **parábola**.

A parábola é uma curva do plano cartesiano cujos pontos satisfazem uma condição bem definida. Acompanhe.

Toda parábola pode ser construída a partir de uma reta r e de um ponto F não pertencente a r. O conjunto de todos os pontos da parábola são os pontos do plano que estão à mesma distância de r e de F.

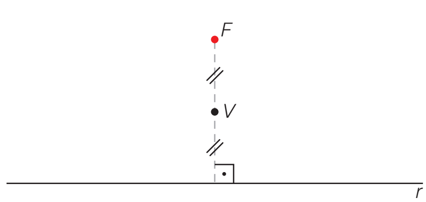


ID/BR

O ponto F é chamado de **foco** da parábola e r é a **diretriz** da parábola.

Para exemplificar, vamos desenhar alguns pontos de uma parábola. Para isso, consideramos r e F representados a seguir.

O ponto V, que é o ponto médio do segmento perpendicular a r e que passa por F, é um dos pontos da parábola porque a distância de V a F é igual à distância de V a r.



ID/BR

PARA EXPLORAR

Livro

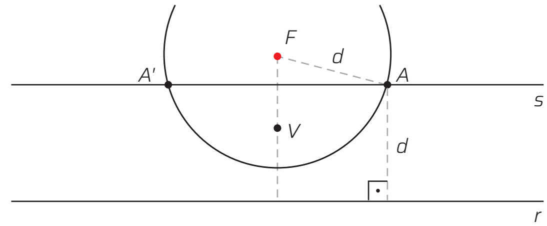
Imenes, Luiz Marcio P.; Jakubo, José; Lellis, Marcelo. *Equação do 2º grau*. São Paulo: Atual, 2004 (Coleção Pra que Serve Matemática?).

Esse livro dá uma boa ideia das situações em que se aplicam as equações do 2º grau, um dos conceitos mais importantes da Matemática e que está relacionado a este capítulo.

Peça aos estudantes que tragam régua, compasso e papel para, seguindo o texto do tópico "Gráfico da função quadrática", representar pontos de uma parábola. Ao representá-los, eles poderão refletir sobre o que caracteriza uma parábola e entender melhor o significado dessa curva e sua relação com as funções quadráticas.

O trabalho com este tópico possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT402**, ao permitir que os estudantes interpretem e relacionem as representações algébricas e geométricas de funções.

Em seguida, traçamos uma reta s paralela a r a uma distância d e, com a ponta-seca do compasso centrada em F e com abertura d, traçamos um arco intersectando a reta s em dois pontos: A e A'. Esses dois pontos pertencem à parábola, porque ambos distam d de F e de r.

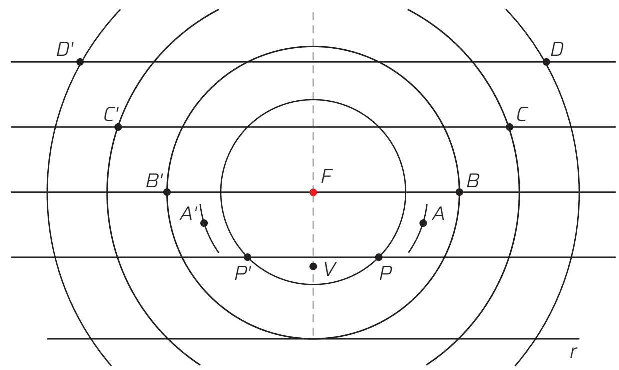


ID/BR

ATENÇÃO!

Tenha cuidado com a ponta-seca ao manusear o compasso.

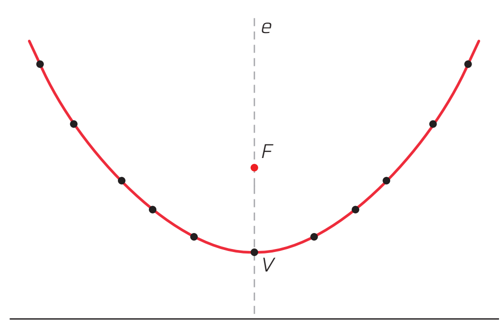
Para representar outros pontos da parábola, podemos traçar outras retas paralelas a r e circunferências com raios iguais às distâncias dessas retas a r.



ID/BR

Se pudéssemos traçar todas as possíveis retas e circunferências e representar todos os pontos da parábola, obteríamos um modelo como o representado a seguir.

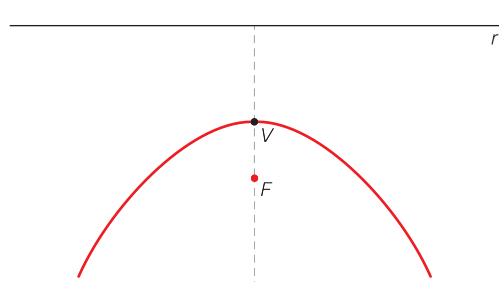
Se os estudantes tiverem dúvida sobre eixo de simetria, retome as atividades do tópico "Simetria e funções" do capítulo **3**.



ID/BR

Como os dois pontos obtidos para cada circunferência são simétricos em relação à reta que passa por F e V, podemos concluir que essa reta é o **eixo de simetria** da parábola.

Acompanhe outro exemplo, em que o ponto F está abaixo da reta r. Nesse caso, a parábola mudaria de posição, o que chamamos de **concavidade da parábola**, e ficaria voltada para baixo.



ID/BR

Se a reta r é horizontal, dizemos que a primeira parábola apresentada tem **concavidade para cima** e a segunda, **concavidade para baixo**.

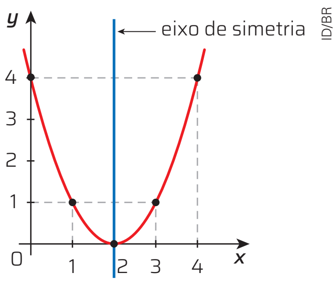
Para esboçar o gráfico de uma função quadrática ou função polinomial do 2º grau, podemos determinar alguns pontos que pertencem à parábola e representá-los no plano cartesiano. Acompanhe alguns exemplos.

Exemplo 1

Para esboçar o gráfico da função quadrática, definida por $f(x) = x^2 - 4x + 4$, atribuímos alguns valores arbitrários para x, de modo a obter alguns pares ordenados (x, y). Em seguida, representamos esses pares ordenados por pontos no plano cartesiano e traçamos o esboço do gráfico da função.

Os exemplos **1** e **2** permitem que, pelo raciocínio abdutivo, o estudante infira a relação entre o sinal do coeficiente a e a concavidade da parábola do gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$. Mais adiante, pelo raciocínio dedutivo, esse fato será demonstrado formalmente.

x	y
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4



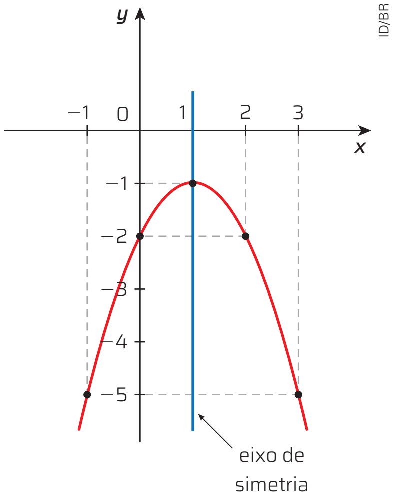
Com base no gráfico de f, observamos que:

- a **concavidade** da parábola está voltada **para cima** (veremos mais adiante que isso ocorre porque $a = 1 > 0$);
- 4 é a **ordenada** do ponto em que a parábola corta Oy ($c = 4$);
- essa função tem **uma raiz real dupla**, que é 2, **abscissa** do ponto em que a curva intersecta Ox;
- o ponto $(2, 0)$ é denominado **vértice da parábola**;
- a **reta vertical** que passa pelo vértice é o **eixo de simetria** do gráfico de f.

Exemplo 2

De maneira análoga à apresentada no exemplo **1**, podemos representar o gráfico da função quadrática definida por $f(x) = -x^2 + 2x - 2$.

x	y
-1	-5
0	-2
1	-1
2	-2
3	-5



Com base no gráfico de f, observamos que:

- a **concavidade** da parábola está voltada **para baixo** (veremos mais adiante que isso ocorre porque $a = -1 < 0$);
- -2 é a **ordenada** do ponto em que a parábola corta Oy ($c = -2$);
- essa função **não tem raízes reais** (a parábola não intersecta Ox);
- o ponto $(1, -1)$ é denominado **vértice da parábola**;
- a **reta vertical** que passa pelo vértice é o **eixo de simetria** do gráfico de f.

No livro *Equação do 2º grau*, indicado para a leitura dos estudantes em *Para explorar*, há uma complementação interessante para este boxe.

Fórmula geral de resolução de uma equação quadrática

Acompanhe, a seguir, a ideia principal do método utilizado para resolver uma equação que pode ser reduzida ao tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

- Se $ax^2 + bx + c$ for um trinômio quadrado perfeito, podemos fatorá-lo na forma $(dx + e)^2$. Acompanhe a resolução de $16x^2 + 8x + 1 = 16$.

  Fatoramos $16x^2 + 8x + 1$ em $(4x + 1)^2$, então:

$$(4x + 1)^2 = 16$$

  Portanto:

$$4x + 1 = 4 \quad \text{ou} \quad 4x + 1 = -4$$

$$x = \frac{3}{4} \qquad\qquad x = -\frac{5}{4}$$

  Logo, $S = \left\{-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right\}$.

- Se o trinômio não for um quadrado perfeito, para resolver a equação proposta, devemos completar um quadrado perfeito com base na expressão dada. Acompanhe no quadro a seguir o raciocínio utilizado.

Procedimento	**Exemplo** $3x^2 + 5x + 1 = 0$	**Caso geral** $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$
1. Como o coeficiente de x^2 é a, dividimos todos os termos da equação por a ($a \neq 0$).	$x^2 + \frac{5x}{3} + \frac{1}{3} = 0$	$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$
2. Isolamos o termo independente.	$x^2 + \frac{5x}{3} = -\frac{1}{3}$	$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$
3. Acrescentamos aos dois membros da equação um número capaz de transformar o 1º membro em um quadrado perfeito. Para isso, elevamos ao quadrado a metade do coeficiente de x.	$x^2 + \frac{5x}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$ $x^2 + 2 \cdot \frac{5}{6}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$	$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ $x^2 + 2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
4. Observamos que o 1º membro da equação é um quadrado perfeito e que podemos adicionar as duas frações do 2º membro.	$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
5. Extraímos a raiz quadrada dos dois membros e isolamos x.	$x + \frac{5}{6} = +\frac{\sqrt{13}}{6}$ ou $x + \frac{5}{6} = -\frac{\sqrt{13}}{6}$ $x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{6}$ ou $x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{6}$	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Assim, obtemos a fórmula geral de resolução, na qual $b^2 - 4ac$ é o **discriminante**, também representado pela letra grega maiúscula Δ (delta). A fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau é comumente conhecida como **fórmula de Bhaskara**, em homenagem ao matemático hindu que a difundiu.

O trabalho com este tópico possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT105**, ao utilizar as noções de eixo de simetria, que envolvem transformações geométricas, para auxiliar na análise matemática e na construção de parábolas.

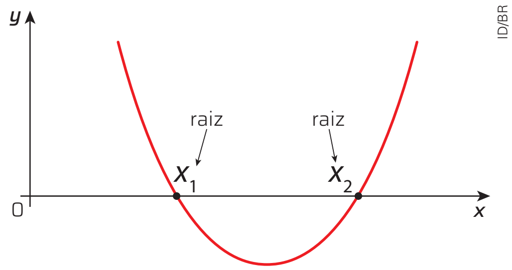
Pontos importantes do gráfico da função quadrática

Estudamos anteriormente que, para esboçar o gráfico de uma função quadrática, precisamos determinar alguns pontos que pertencem à parábola, atribuindo valores à variável x. No entanto, há alguns pontos essenciais que podem até dispensar outros cálculos. Esses pontos são as **raízes** da função, o **ponto** em que a parábola **intersecta** o eixo ***Oy*** e o **vértice** da parábola.

Raízes da função quadrática

Oriente os estudantes a ler em dupla o tópico "Raízes da função quadrática" para que desenvolvam a habilidade de leitura de textos com a linguagem matemática simbólica e gráfica e aprendam a identificar a relação entre as raízes de uma função e seu gráfico.

Para determinar as raízes ou os zeros de uma função quadrática é preciso descobrir os pontos em que a parábola definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ (em que a, b, c são números reais e $a \neq 0$) intersecta o eixo Ox. Como são pontos de intersecção com o eixo Ox, pertencem ao gráfico da função e ao eixo Ox, tendo, portanto, coordenada $y = 0$. Assim, devemos fazer $f(x) = 0$, ou seja, $ax^2 + bx + c = 0$.

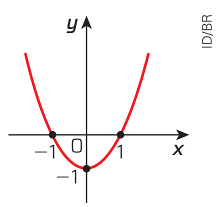


A equação $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser resolvida utilizando-se a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau com uma incógnita, em que o discriminante é $\Delta = b^2 - 4ac$.

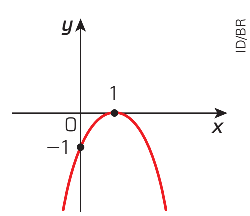
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Com relação ao valor do discriminante, podem ocorrer três casos:

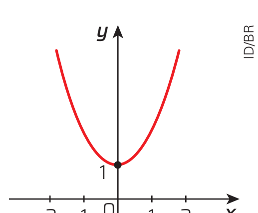
- $\Delta > 0$: a equação tem duas raízes reais e distintas e a parábola intersecta o eixo Ox em dois pontos. A função $y = x^2 - 1$, por exemplo, tem $\Delta = 4 > 0$ e raízes $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$.



- $\Delta = 0$: a equação tem duas raízes reais e iguais e a parábola intersecta o eixo Ox em apenas um ponto. Por exemplo, a função $y = -x^2 + 2x - 1$ tem $\Delta = 0$ e raízes $x_1 = x_2 = 1$.



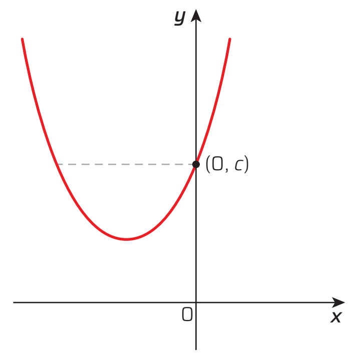
- $\Delta < 0$: a equação não tem raízes reais e a parábola não intersecta o eixo Ox. Isso pode ser notado, por exemplo, na função $y = 3x^2 + 1$, cujo $\Delta = -12 < 0$.



Ponto em que a parábola intersecta o eixo *Oy*

Este é um ponto fácil de ser determinado para toda função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, de domínio $\mathbb{R}$ e coeficientes reais, com $a \neq 0$. Uma vez que é o ponto de intersecção com o eixo Oy, tem coordenada $x = 0$. Substituindo x por 0 na lei $f(x) = ax^2 + bx + c$ da função, obtemos $f(0) = c$, ou seja, $y = c$.

Assim, o ponto $P(0, c)$ é o ponto em que o gráfico de f intersecta o eixo Oy.

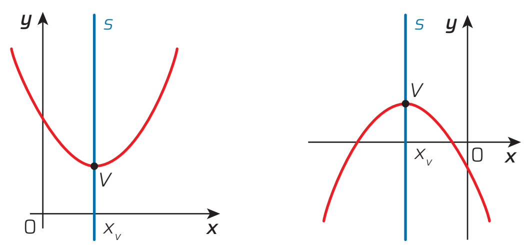


ID/BR

Vértice da parábola

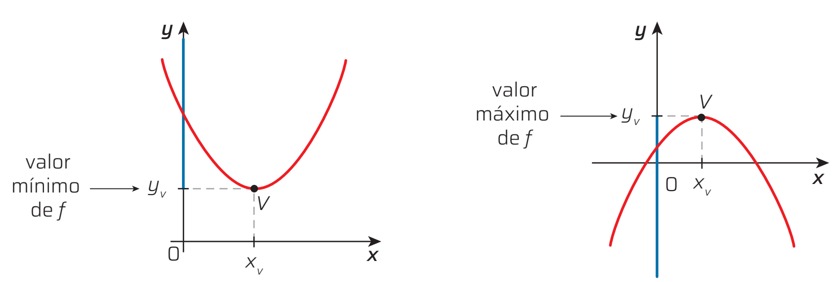
O vértice (V) da parábola correspondente ao gráfico de uma função polinomial do 2º grau é outro ponto importante, por três motivos:

1º) Conhecida a abscissa x_V do vértice, determinamos a reta que constitui o eixo de simetria do gráfico da função. Essa reta passa por $(x_V, 0)$ e é paralela a Oy.



Ilustrações: ID/BR

2º) V é o ponto em que f assume seu menor valor ou seu maior valor, dependendo da concavidade da parábola.



Ilustrações: ID/BR

3º) A função f muda de comportamento ao passar por V, isto é, nos intervalos $]-\infty, x_V]$ e $[x_V, +\infty[$, f é crescente em um deles e decrescente no outro, dependendo da concavidade da parábola.

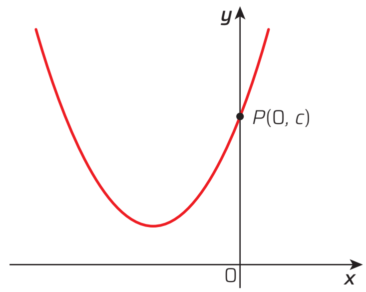
Ilustrações: ID/BR

f é crescente em $]-\infty, x_V]$ e decrescente em $[x_V, +\infty[$.

f é decrescente em $]-\infty, x_V]$ e crescente em $[x_V, +\infty[$.

Não escreva no livro.

Agora, para determinar o vértice $V(x_V, y_V)$, vamos partir do ponto $P(0, c)$ em que o gráfico de f intersecta o eixo Oy.



Para $y = c$ em $y = ax^2 + bx + c$, temos:

$$c = ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + bx = 0$$

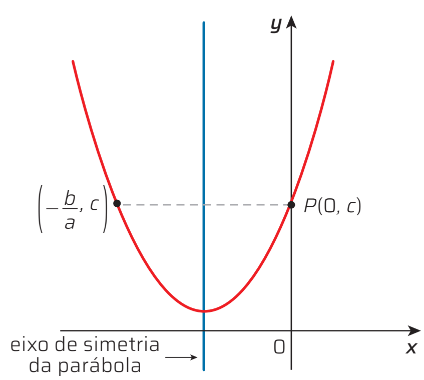
$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{a}$$

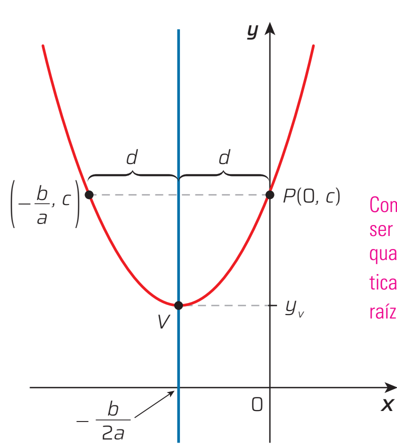
Para $x = -\frac{b}{a}$, temos dois casos a considerar: $b \neq 0$ ou $b = 0$. Acompanhe.

1º) Para $b \neq 0$, existe outro ponto da parábola com ordenada c: o ponto $\left(-\frac{b}{a}, c\right)$.

Nesse caso, o eixo de simetria não é o eixo Oy.



Como $\left(-\frac{b}{a}, c\right)$ e $(0, c)$ devem ser equidistantes do eixo de simetria, todos os pontos desse eixo têm abscissa igual à metade de $-\frac{b}{a}$, ou seja, $-\frac{b}{2a}$.



Comente com os estudantes que x_V também pode ser determinado sem a necessidade de fórmulas, quando são conhecidas as raízes da função quadrática. Nesse caso: $x_V = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, sendo x_1 e x_2 as raízes da função.

Logo, o vértice V tem abscissa $x_V = -\frac{b}{2a}$ e sua ordenada y_V é a imagem de x_V pela função:

$$y_V = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y_V = \cancel{a}\cdot\frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_V = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

Portanto:

$$\boxed{V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)}$$

2º) Se $b = 0$, então:

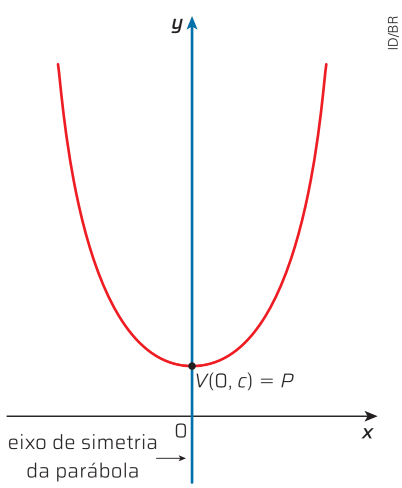
$$x_V = -\frac{0}{a} = 0$$

Logo:

$$\boxed{V(0, c)}$$

Nesse caso, no gráfico, o vértice $V(0, c)$ é o próprio ponto $P(0, c)$, que se localiza no eixo de simetria da parábola. Verifique a representação a seguir.

Antes de iniciar o próximo tópico, incentive os estudantes a expressar suas conclusões sobre os gráficos das funções da forma $f(x) = x^2 + c$, para c real, e verifique se estabelecem relação com a simetria de translação do gráfico de $y = x^2$ na direção do eixo Oy.
Registre essas conclusões, pois essa relação será retomada mais adiante, na próxima seção *Tecnologia*.



Concavidade da parábola

A concavidade de uma parábola que representa o gráfico de uma função quadrática, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$, depende do sinal do coeficiente a.

Sabemos que o vértice $V(x_V, y_V)$ é o ponto em que f assume seu menor ou maior valor. Então, vamos calcular o valor de f em um ponto à direita de V, o ponto que tem abscissa $(x_V + 1)$.

$$f(x_V + 1) = a(x_V + 1)^2 + b(x_V + 1) + c$$

$$f(x_V + 1) = a(x_V)^2 + 2ax_V + a + bx_V + b + c$$

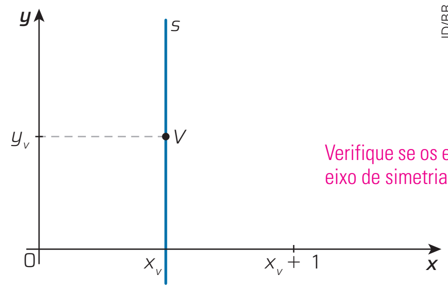
$$f(x_V + 1) = \underbrace{a(x_V)^2 + bx_V + c}_{y_V} + 2a\cdot\underbrace{x_V}_{-\frac{b}{2a}} + b + a$$

$$f(x_V + 1) = y_V + \cancel{2a}\left(-\frac{b}{\cancel{2a}}\right) + b + a$$

$$f(x_V + 1) = y_V - b + b + a$$

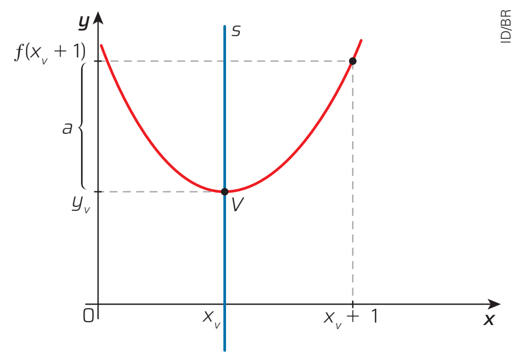
$$f(x_V + 1) = y_V + a$$

Concluindo, $f(x_V + 1) = y_V + a$.



ID/BR

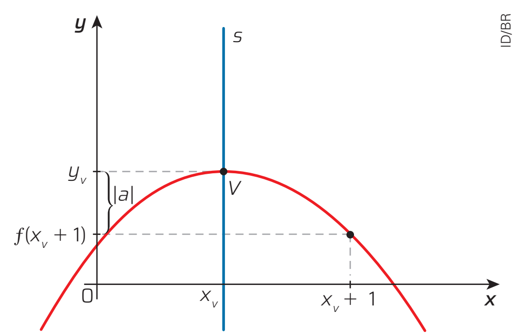
Verifique se os estudantes perceberam que, quando $x_V = 0$, o eixo de simetria é o eixo das ordenadas, *Oy*.



ID/BR

Assim:

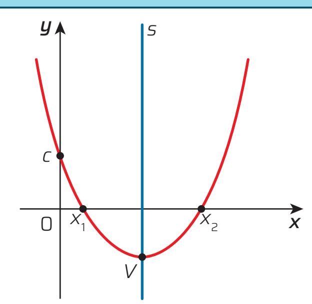
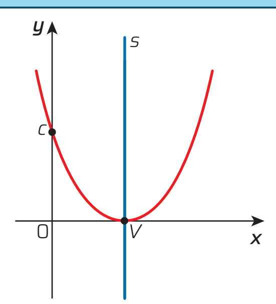
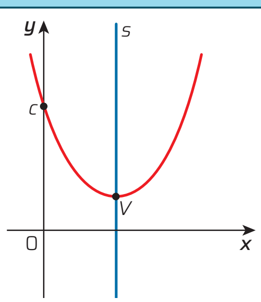
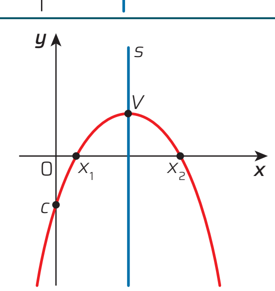
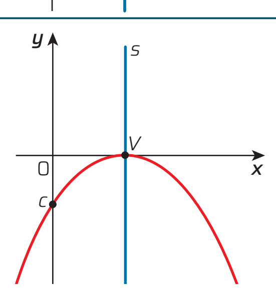
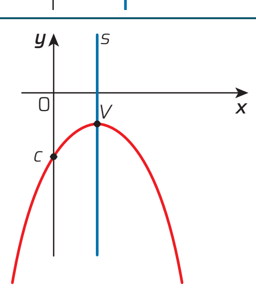
- Se $a > 0$, então $f(x_V + 1) > y_V$, o que implica que f assume seu menor valor em V, e a parábola tem **concavidade voltada para cima**.



ID/BR

- Se $a < 0$, então $f(x_V + 1) < y_V$; nesse caso, f assume seu maior valor em V, e a parábola tem **concavidade voltada para baixo**.

Podemos organizar o seguinte quadro-resumo para $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, em que V indica o vértice e s, o eixo de simetria.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Ilustrações: ID/BR

O trabalho com este tópico possibilita o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT315** e **EM13MAT402**, uma vez que explora as representações geométricas no plano cartesiano, nesse caso, um gráfico de uma função quadrática. Além disso, esse processo é descrito por meio de um fluxograma.

No terceiro item, se necessário, lembre aos estudantes que, quando a função não tiver raízes reais ($\Delta < 0$), a parábola não cruza o eixo *Ox*.

No sexto item, se julgar conveniente, mostre aos estudantes que o ponto $Q(1, a + c)$ sempre pertencerá à parábola nos casos em que $x_V = 0$, pois teremos uma função do tipo $y = ax^2 + c$. Fazendo $x = 1$ nessa função, temos: $y = a \cdot 1^2 + c \Rightarrow y = a + c$.

Construção do gráfico de uma função quadrática

De acordo com o que estudamos até aqui, para esboçar o gráfico da função, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$, precisamos:

1º) observar o coeficiente a para determinar a concavidade da parábola;

2º) verificar o coeficiente c para determinar em que ponto a parábola intersecta o eixo *Oy* e marcar o ponto $P(0, c)$;

3º) determinar as raízes da função que determina onde a parábola cruzará o eixo *Ox*;

4º) determinar o vértice V da parábola;

5º) traçar o eixo de simetria da parábola, ou seja, traçar a reta vertical que passa por $(x_V, 0)$;

6º) se $x_V = 0$ ($b = 0$), marcar o ponto $Q(1, a + c)$;

7º) traçar o esboço da parábola que passa pelos pontos analisados.

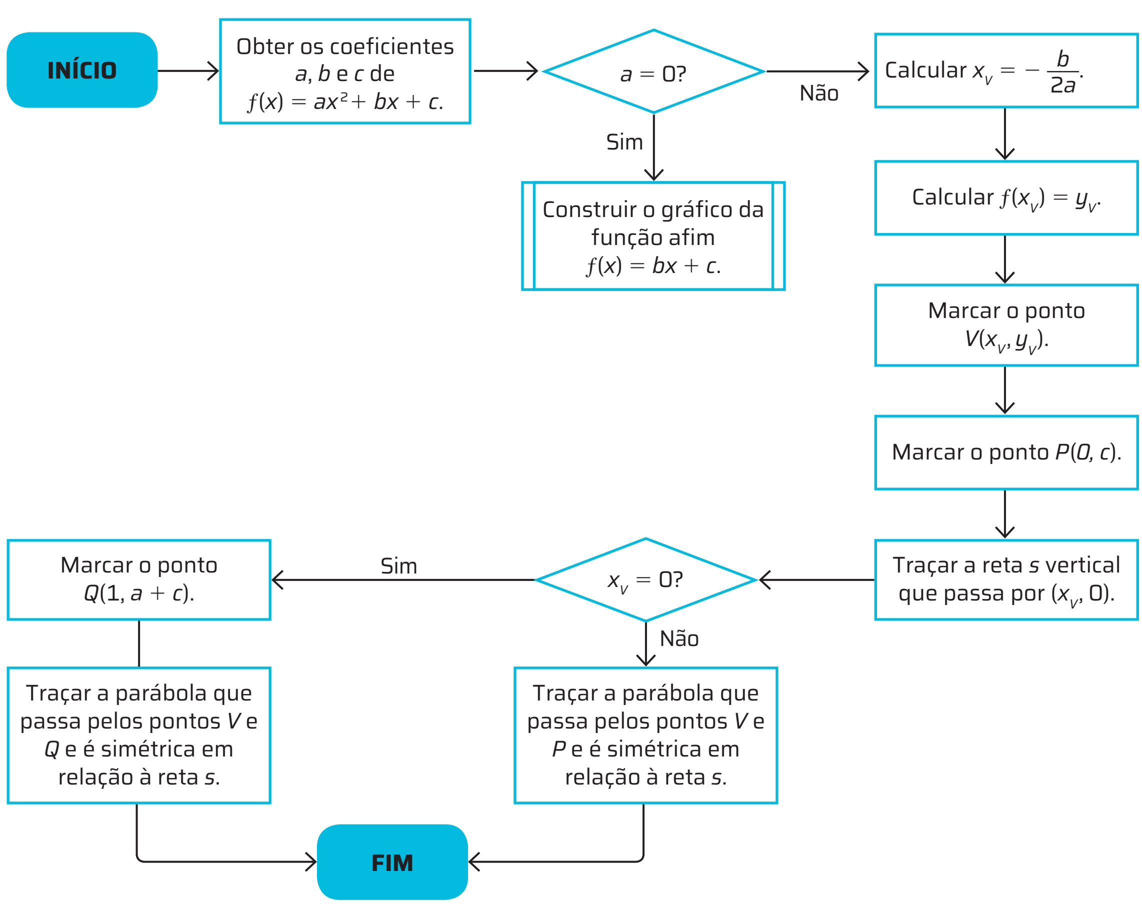
O trabalho com o tópico "Algoritmo, fluxograma e função quadrática" contribui para o desenvolvimento da competência geral **4** e da habilidade **EM13MAT315**, ao representar o algoritmo de um problema proposto por meio de fluxograma, utilizando uma linguagem visual, matemática e científica.

ALGORITMO, FLUXOGRAMA E FUNÇÃO QUADRÁTICA

Vamos conhecer outro símbolo usado em fluxogramas.

Para indicar que parte do processo já foi mapeada em outro fluxograma, podemos usar o símbolo ▭. Esse símbolo é utilizado para simplificar o fluxograma, sem repetir processos que já foram definidos antes ou em outro documento.

No capítulo anterior, estudamos o fluxograma para construir o gráfico de uma função afim. Agora, acompanhe o fluxograma a seguir e verifique se ele mostra um processo para a construção do gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ no plano cartesiano.



PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Enquanto estuda a atividade **R1**, resolva os itens da atividade **10** da seção *Problemas e exercícios propostos*.

R1 **Em cada item, esboce o gráfico da função e dê as coordenadas do vértice *V* da parábola.**

a) $y = x^2 - 6x + 5$ b) $y = -2x^2 + x - 1$

Resolução

a) De acordo com o que estudamos até aqui, é possível fazer um esboço do gráfico da função $y = x^2 - 6x + 5$ sem que seja preciso determinar outros pontos da parábola além das raízes, do ponto de intersecção com *Oy* e do vértice.

Nessa função:

- $a = 1$, logo $a > 0$.

  Assim, a concavidade da parábola é voltada para cima: $\smile$

- $\Delta = b^2 - 4ac$

  $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$

  $\Delta = 36 - 20$

  $\Delta = 16$

  Portanto, $\Delta > 0$.

As atividades **R1**, **R2** e **R3** possibilitam o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT402**, ao apresentar as características de uma função quadrática e relacionar a sua representação algébrica com a representação geométrica no plano cartesiano.

- As raízes são dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

- Como $c = 5$, o ponto de coordenadas (0, 5) pertence à parábola e ao eixo *Oy*.
- As coordenadas do vértice são:

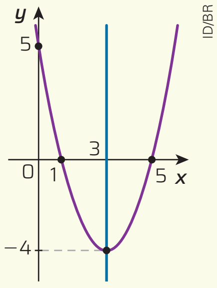
$$x_V = -\frac{b}{2a} \qquad y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$x_V = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1} \qquad y_V = -\frac{16}{4}$$

$$x_V = \frac{6}{2} = 3 \qquad y_V = -4$$

Logo, $V(3, -4)$.

Verifique o esboço do gráfico.



b) Para a função $y = -2x^2 + x - 1$, verificamos que:

- $a = -2$, logo $a < 0$.

  Então, a concavidade da parábola é voltada para baixo: $\frown$

- $\Delta = b^2 - 4ac$

  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1)$

  $\Delta = 1 - 8$

  $\Delta = -7$

  Portanto, $\Delta < 0$.

- Não há raízes reais, pois $\Delta < 0$.
- Como $c = -1$, o ponto $(0, -1)$ é o ponto de intersecção com o eixo *Oy*.
- As coordenadas do vértice são:

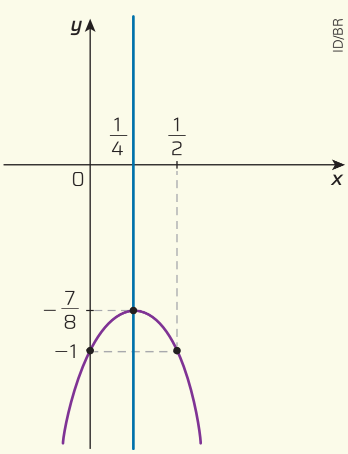
$$x_V = -\frac{b}{2a} \qquad y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$x_V = -\frac{1}{2 \cdot (-2)} \qquad y_V = -\frac{-7}{4 \cdot (-2)}$$

$$x_V = \frac{1}{4} \qquad y_V = -\frac{7}{8}$$

Logo, $V\left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{8}\right)$.

Verifique o esboço do gráfico.



R2 **Determine *m* para que o gráfico da função dada por $y = mx^2 + 3x - 2$ passe por $A(-1, -3)$.**

Resolução

Substituindo *x* por -1 e *y* por -3 em $y = mx^2 + 3x - 2$, temos:

$$-3 = m \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 2$$

$$-3 = m - 3 - 2$$

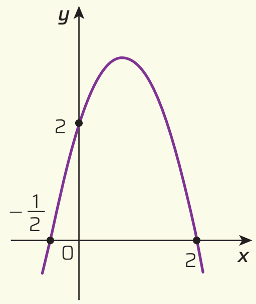
$$m = 5 - 3$$

$$m = 2$$

Portanto, *m* deve ser igual a 2.

Na atividade **R4**, caso julgue pertinente, sugira aos estudantes que usem também a calculadora gráfica apresentada no capítulo 4 para resolvê-la. Eles podem construir os gráficos das duas funções e encontrar os pontos de intersecção desses gráficos. A resolução algébrica pode complementar a gráfica, e vice-versa.

R3 **Determine a lei da função quadrática representada na figura a seguir.**



Resolução

Uma função quadrática é definida por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

Substituindo em $y = ax^2 + bx + c$ as coordenadas $(0, 2)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e $(2, 0)$ dos pontos de intersecção da parábola com os eixos coordenados, temos:

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 0 = a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{1}{2}\right) + c \\ 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = c \\ 0 = \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c \\ 0 = 4a + 2b + c \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos $a = -2$, $b = 3$ e $c = 2$.

Portanto, a função quadrática é $y = -2x^2 + 3x + 2$.

R4 **Obtenha os pontos comuns aos gráficos de $y = x^2 + 2x$ e $y = x + 2$.**

Resolução

Obtemos as coordenadas dos pontos comuns aos gráficos de $y = x^2 + 2x$ e $y = x + 2$ resolvendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x & (1) \\ y = x + 2 & (2) \end{cases}$$

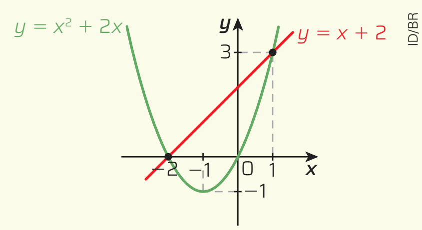
Substituindo (1) em (2), temos:

$$x^2 + 2x = x + 2$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

Em (2):

- $x = -2$
  $y = -2 + 2 = 0$
- $x = 1$
  $y = 1 + 2 = 3$

Portanto, os pontos comuns são $(-2, 0)$ e $(1, 3)$.



6. a) Eixo Oy: $(0, -9)$; eixo Ox: $(3, 0)$ e $(-3, 0)$.
b) Eixo Oy: $(0, -6)$; eixo Ox: $(2, 0)$ e $(-3, 0)$.
c) Eixo Oy: $(0, 10)$; eixo Ox: não há ponto de intersecção.
d) Eixo Oy: $(0, 10)$; eixo Ox: $(-5, 0)$ e $(2, 0)$.

Uma maneira de trabalhar a resolução de atividades em sala de aula é organizar os estudantes em duplas ou em pequenos grupos e atribuir, a cada um, três ou quatro itens de diferentes tipos para a resolução e o registro de suas soluções.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Faça uma pesquisa sobre a vida do matemático hindu Bhaskara (c. 1114-c. 1185).

2 Mostre que:

a) $f(x) = (2x - 1) \cdot (x - 3) - x \cdot (x + 1)$ é uma função quadrática; $f(x) = x^2 - 8x + 3$; é uma função quadrática.

b) $f(x) = (2x + 1) \cdot (3x - 1) - (3x - 2) \cdot (2x + 1)$ não é uma função quadrática. $f(x) = 2x + 1$; não é uma função quadrática (é uma função afim).

3 Determine k para que $f(x) = (k^2 - 9)x^2 + 2kx - 1$ seja uma função quadrática. $k \neq 3$ e $k \neq -3$

4 Determine m e n para que as funções dadas a seguir, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, sejam iguais. $m = -3$ e $n = -7$

$f(x) = 2x^2 + (m - 3)x + 4$

$g(x) = 2x^2 - 6x + m - n$

5. a) $\frac{1}{10}$ e 1
b) $\frac{5}{2}$

5 Determine as raízes (ou os zeros) reais das funções.

a) $f(x) = 10x^2 - 11x + 1$

b) $f(x) = -4x^2 + 20x - 25$

c) $f(x) = 6x^2 - 3x + 1$

d) $f(x) = -x^2 + 36$

e) $f(x) = 3x^2 - 7x$

f) $f(x) = 5x^2$

5. c) Não há raiz real.
d) 6 e -6
e) $\frac{7}{3}$ e 0
f) 0

As atividades **6**, **7**, **10** e **19** contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT402**, pois abordam as características de uma função quadrática e permitem relacionar a sua representação algébrica com a representação geométrica no plano cartesiano.

6 Em cada item, determine as coordenadas dos pontos do gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que intersectam os eixos cartesianos.

a) $f(x) = x^2 - 9$

b) $f(x) = x^2 + x - 6$

c) $f(x) = x^2 - 3x + 10$

d) $f(x) = -x^2 - 3x + 10$

7 Construa o gráfico da função $y = x^2 + 2x$.

Com base no gráfico, determine a solução de cada equação.

a) $x^2 + 2x = 0$ $x = 0$ ou $x = 2$

b) $x^2 + 2x = 3$ $x = -3$ ou $x = 1$

8. $\sqrt{10}$ s

8 Um vaso caiu do décimo sexto andar de um edifício, a 50 metros do chão. A distância do vaso em relação ao solo, em cada momento da queda, pode ser calculada pela fórmula $d = 50 - 5t^2$, em que d é a distância em metro e t, o tempo em segundo. Quantos segundos o vaso levou para atingir o solo?

As atividades **11** e **12** possibilitam mobilizar a competência geral **4**, além de desenvolver a habilidade **EM13MAT315**, uma vez que permitem registrar em um fluxograma um algoritmo para resolver um problema, promovendo o uso de uma linguagem visual, matemática e científica.

9 A soma e o produto das raízes x_1 e x_2 de uma equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ são dados, respectivamente, por $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$. **a)** $x_1 + x_2 = -2$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{5}$ **c)** $x_1 + x_2 = 0$; $x_1 \cdot x_2 = -4$

Calcule $x_1 + x_2$ e $x_1 \cdot x_2$ nas seguintes equações:

a) $5x^2 + 10x + 2 = 0$

b) $4x^2 - 10x + 3 = 0$ $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4}$

c) $15x^2 - 60 = 0$

d) $\left(\sqrt{2} + 1\right)x^2 = 0$ $x_1 + x_2 = 0$; $x_1 \cdot x_2 = 0$

10 Esboce o gráfico de cada função a seguir. Consulte as respostas no Manual do Professor.

a) $y = x^2 - 2x - 8$

b) $y = -2x^2 + 5x - 2$

c) $y = 2x^2 - 4x + 3$

d) $y = -x^2 + 4x - 2$

11 Construa um fluxograma para determinar as raízes de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Consulte a resposta no Manual do Professor.

12 Construa um fluxograma para traçar o gráfico de uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, utilizando obrigatoriamente as raízes de f e outras informações que achar necessárias. Consulte a resposta no Manual do Professor.

13 Releia o texto do tópico "Pontos importantes do gráfico da função quadrática" e analise as concavidades das parábolas da atividade **10** segundo as informações do texto. Itens **a** e **c**: concavidade para cima, $a > 0$; itens **b** e **d**: concavidade para baixo, $a < 0$.

14 Considere as funções apresentadas na atividade **5**. Sem construir os gráficos correspondentes, indique o(s) item(ns) que corresponde(m) a qual(is) daquelas funções:

a) têm concavidade voltada para cima; **a, c, e, f**

b) têm concavidade voltada para baixo; **b, d**

c) intersectam o eixo Ox em dois pontos distintos; **a, d, e**

d) não intersectam o eixo Ox; **c**

e) intersectam o eixo Ox em um único ponto; **b, f**

f) têm concavidade voltada para cima e não intersectam o eixo Ox; **c**

g) têm concavidade voltada para cima e intersectam o eixo Ox em um único ponto. **f**

15 Trace, em um mesmo sistema de eixos coordenados, os gráficos das seguintes funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$: Consulte os gráficos no Manual do Professor.

- $y = x^2$
- $y = x^2 + 2$
- $y = x^2 - 2$

a) Determine as coordenadas dos vértices dessas parábolas. $(0, 0)$; $(0, 2)$; $(0, -2)$

b) As concavidades das parábolas estão voltadas para cima ou para baixo? Por quê? Para cima, pois em todas as funções $a = 1$, ou seja, $a > 0$.

c) Todas as parábolas que você traçou têm o mesmo eixo de simetria? Se sua resposta for afirmativa, escreva qual é esse eixo. Sim, o eixo de simetria é Oy.

d) Como você pode obter os gráficos de $y = x^2 + 2$ e $y = x^2 - 2$ a partir do gráfico de $y = x^2$? Transladando os gráficos.

16 Escreva duas funções quadráticas diferentes e construa seus gráficos em um mesmo sistema de eixos coordenados. Agora, responda aos itens **a** e **b** da atividade **15**, mas considerando as funções que você escreveu. Consulte um exemplo de resposta no Manual do Professor.

As atividades **17** e **18** auxiliam no desenvolvimento das habilidades **EM13MAT402** e **EM13MAT502**, pois permitem explorar a relação entre as representações algébrica e geométrica de uma função quadrática.

17 Determine a função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos (1, 8), (0, 3) e (2, −1). $f(x) = -7x^2 + 12x + 3$

18 Com base na atividade **17**, analise as seguintes situações:

a) Se fossem dados apenas os pontos (1, 8) e (0, 3), o que aconteceria? Teríamos infinitas funções quadráticas cujo gráfico passaria pelos pontos dados.

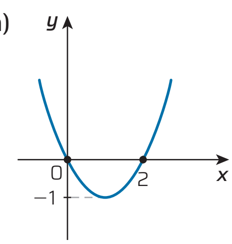
b) Se o ponto (1, 8) fosse trocado pelo ponto (0, 8), o que aconteceria? Não teríamos uma função.

19 Obtenha os pontos comuns aos gráficos de $y = \frac{x}{2}$ e $y = x^2 - 4x$. $(0, 0)$ e $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Antes de resolver a atividade **20**, releia a atividade **R3**.

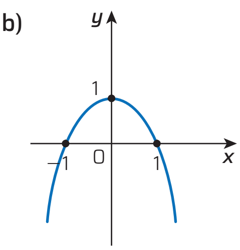
20 Determine a função quadrática representada pelos gráficos a seguir.

a)



$f(x) = x^2 - 2x$

b)



$f(x) = -x^2 + 1$

Ilustrações: ID/BR

21 (UFRN)

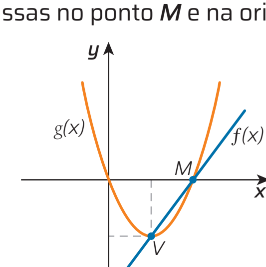
a) Esboce, no mesmo sistema de eixos [...], os gráficos das funções reais de variável real $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x^2 - 8x + 12$.
Consulte a resposta no Manual do Professor.

Em caso de dúvida, leia novamente a atividade **R4**.

b) Determine as coordenadas (x, y) de todos os pontos em que os gráficos das funções dadas se [intersectam]. $(1, 5)$ e $(9, 21)$

22 Registre a alternativa correta no caderno.

(UEA-AM) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais estão representados os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ respectivamente, como uma reta e uma parábola de vértice V, que [...] [intersecta] o eixo das abscissas no ponto M e na origem do sistema.



ID/BR

Sabendo que $f(x) = 2x - 8$ e que os pontos M e V são comuns aos dois gráficos, as coordenadas do vértice V são: Alternativa **a**.

a) (2, −4)

b) (2, −8)

c) (2, −6)

d) (3, −8)

e) (3, −6)

Na atividade **16**, proponha a troca entre os estudantes para que cada um resolva a questão proposta pelo outro. Escolha duas ou três dessas questões para discutir coletivamente com a turma.

Não escreva no livro.

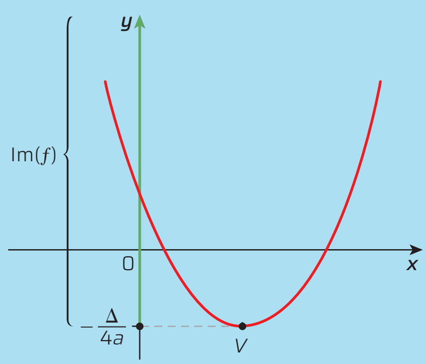
VALOR MÁXIMO OU MÍNIMO E CONJUNTO IMAGEM DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Vimos que os gráficos de funções quadráticas apresentam uma particularidade: todos têm um vértice cuja ordenada é sempre um **valor máximo** (o maior valor de $f(x)$ para determinada função) ou um **valor mínimo** (o menor valor de $f(x)$ para determinada função), que são os valores extremos da função.

Podemos afirmar que, em uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, de domínio $\mathbb{R}$ e coeficientes reais, ocorre o seguinte:

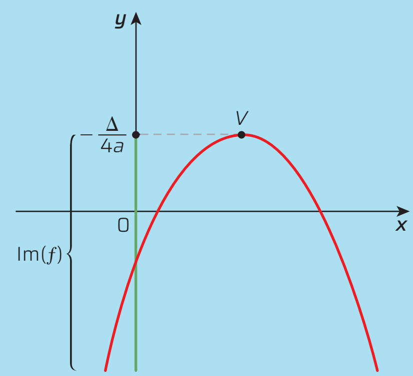
a) se $a > 0$, então:

- a parábola tem **concavidade voltada para cima**;
- o **valor mínimo** é dado por $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$, e V é denominado ponto de mínimo da parábola;
- $\text{Im}(f) = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$ ou $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_V\}$



b) se $a < 0$, então:

- a parábola tem **concavidade voltada para baixo**;
- o **valor máximo** é dado por $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$, e V é denominado ponto de máximo da parábola;
- $\text{Im}(f) = \left]-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$ ou $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_V\}$



Ilustrações: ID/BR

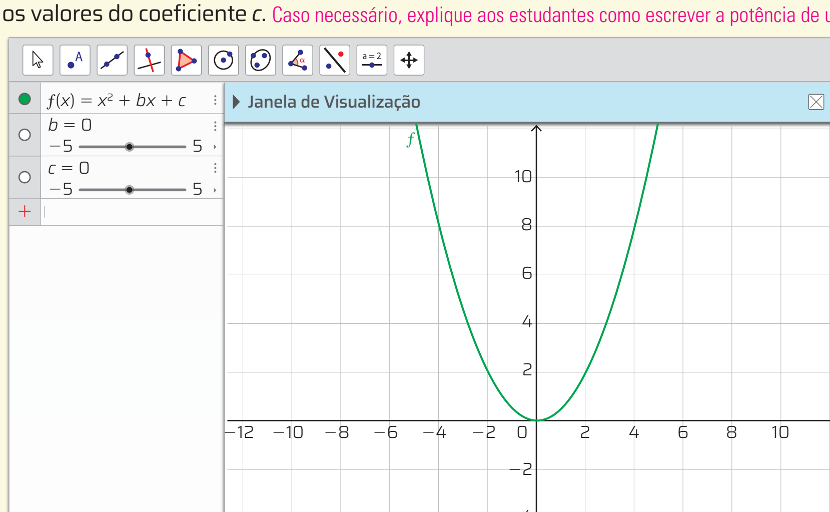
TECNOLOGIA

As etapas apresentadas foram testadas com o Geogebra, mas elas podem sofrer alteração de acordo com o *software* de calculadora gráfica escolhido e, por isso, podem ser ajustadas conforme a necessidade.

Nesta seção, usando um *software* de calculadora gráfica *on-line* em 2D, vamos observar o que acontece com o gráfico de uma função quadrática quando seus coeficientes são alterados.

1ª etapa: Vamos construir o gráfico da função $f(x) = x^2 + bx + c$. Para isso, escrevemos a função na caixa de entrada de dados. Em seguida, pressionamos "Enter" para confirmar a construção. Verifique que, ao confirmar a construção, aparecem dois controles deslizantes, um para os valores do coeficiente b, e outro para os valores do coeficiente c. Caso necessário, explique aos estudantes como escrever a potência de um valor no *software* escolhido.

Nelson Matsuda/ID/BR

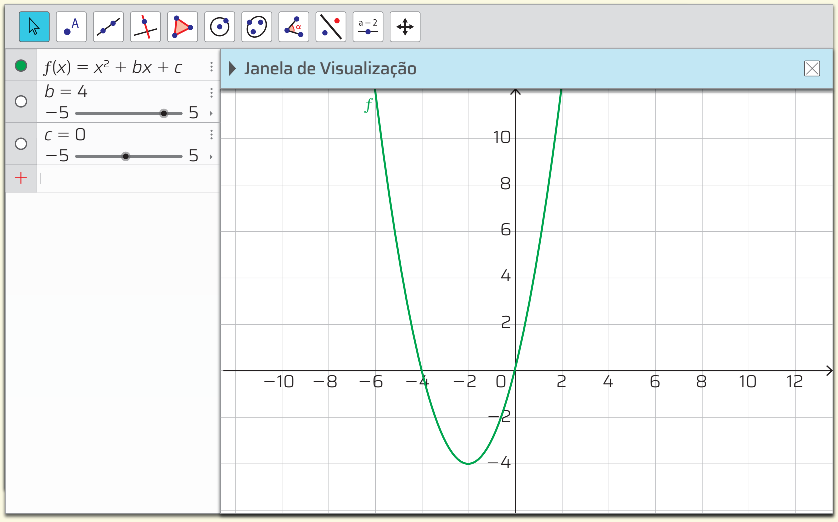


Observe que, no canto mais à esquerda da tela, estão exibidos a função que digitamos e os valores dos coeficientes b e c.

Usando os controles deslizantes, podemos alterar os valores desses coeficientes que, nesse caso, podem variar de -5 a 5.

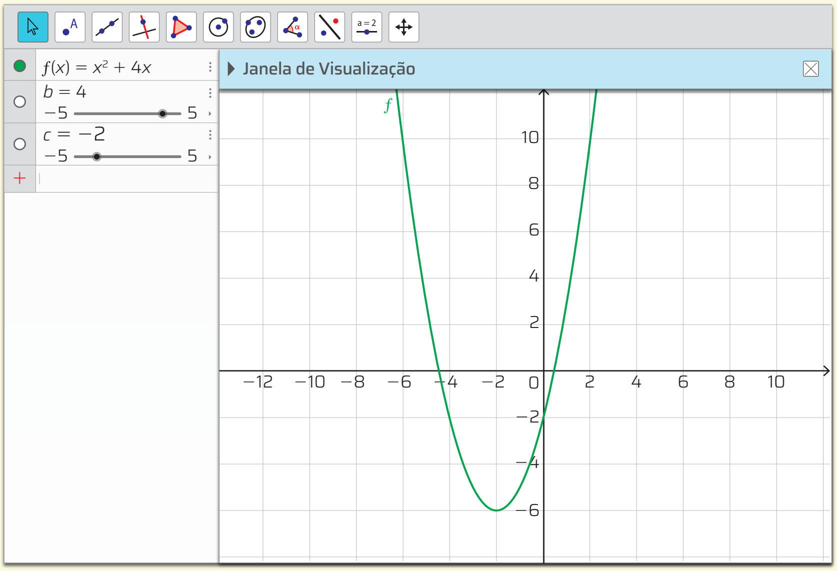
Note que o coeficiente a não está visível nessa janela, pois nessa função, $a = 1$.

2ª etapa: Alteramos o coeficiente b para 4 e verificamos o que acontece com o gráfico.



Nelson Matsuda/ID/BR

De maneira análoga, é possível alterar também o valor do coeficiente c e observar as mudanças que ocorrem no gráfico. Nesse caso, mudamos para $c = -2$.



Nelson Matsuda/ID/BR

Caso os estudantes tenham dificuldade em perceber as mudanças ocorridas em cada caso, proponha a eles que construam todos os gráficos em um mesmo plano cartesiano. Isso pode auxiliá-los na visualização e na comparação dos gráficos.

ATIVIDADES

1 **De acordo com o exemplo apresentado, responda às questões a seguir.**

a) Leia novamente a 1ª etapa e, no caderno, escreva os passos necessários para construir o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, utilizando um *software* de calculadora gráfica.
Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) Após o ajuste do coeficiente b na 2ª etapa, qual é a lei de formação da função cujo gráfico foi construído? $f(x) = x^2 + 4x$

2 **Explique com suas palavras o que ocorre com o gráfico de uma função quadrática quando alteramos o valor do coeficiente c. Para isso, em um *software* de calculadora gráfica, construa um gráfico de uma função quadrática e analise as alterações que ocorrem ao ajustar os valores do coeficiente c para:**

a) 1 b) 0 c) 4

Espera-se que os estudantes reconheçam que, fixados os valores de a e c, o coeficiente b determina a translação do gráfico na direção do eixo Ox (na horizontal) e fixando-se os valores de a e b, a variação do coeficiente c corresponde à translação do gráfico na direção do eixo Oy (na vertical).

Não escreva no livro.

R5 **Determine m e n para que o vértice da parábola de lei $y = x^2 - mx + n$ seja $(-1, 2)$. Classifique o vértice em ponto de máximo ou ponto de mínimo.**

Resolução

Como $x_v = -\dfrac{b}{2a}$, temos:

$$-\frac{b}{2a} = -1$$

$$-\frac{-m}{2 \cdot 1} = -1$$

$$m = -2$$

Como $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$, temos:

$$-\frac{\Delta}{4a} = 2$$

$$-\frac{(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot n}{4 \cdot 1} = 2$$

$$n = 3$$

Portanto, $m = -2$ e $n = 3$, e o vértice é ponto de mínimo, pois $a > 0$.

R6 **Determine o conjunto imagem da função $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$ de domínio $\mathbb{R}$.**

Resolução

Como $a = 2$, temos $a > 0$. Logo, o conjunto imagem é $\left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$.

Como $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$, temos:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 2} = -7$$

Portanto, $\text{Im}(f) = [-7, +\infty[$.

R7 **Determine m real para que a função abaixo tenha valor máximo.**

$$f(x) = (3m - 12)\,x^2 - 5x - 1$$

Resolução

Para que a função apresente valor máximo, devemos ter $a < 0$, ou seja:

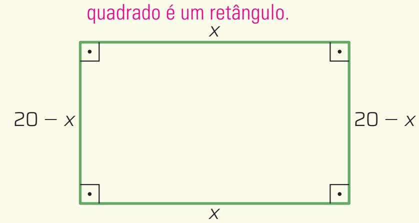
$$3m - 12 < 0$$

$$m < 4$$

R8 **De todos os retângulos de perímetro igual a 40 cm, determine o de área máxima.**

Resolução

Se a medida do comprimento, em centímetro, de um lado de um retângulo é x ($x > 0$), o outro lado, paralelo a esse, também terá medida x. Logo, cada um dos outros dois lados medirá: $\dfrac{40 - 2x}{2} = 20 - x$, com $x > 0$. Converse com os estudantes sobre o fato de que todo quadrado é um retângulo.



ID/BR

Assim, a área $A(x)$ desse retângulo é expressa por:

$$A(x) = x(20 - x)$$

$$A(x) = -x^2 + 20x, \text{ com } 0 < x < 20$$

Como $a = -1$, existe valor máximo de $A(x)$, então:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-1)} = 10$$

Assim, a medida de uma dimensão do retângulo é $x = 10$ e a outra é:

$$20 - x = 20 - 10 = 10$$

Portanto, o retângulo procurado é um quadrado cujo lado mede 10 cm.

ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Estudar o sinal de uma função f significa descobrir os valores de $x \in D(f)$, para os quais $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$ ou $f(x) > 0$.

Acompanhe os exemplos a seguir.

Exemplo 1

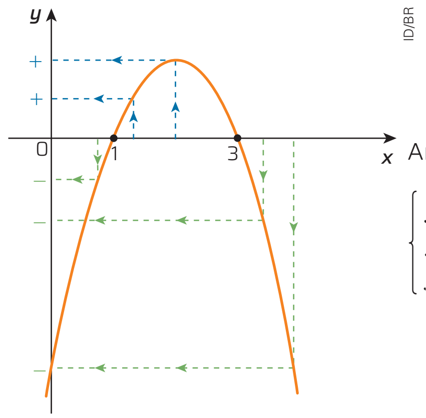
Vamos estudar o sinal da função $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

$$\Delta = 4^2 - 4(-1) \cdot (-3) = 4$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{-2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1$$

Assim, sabemos que $f(x) = 0$ para $x = 3$ ou $x = 1$.

Como $a = -1$, a parábola tem concavidade voltada para baixo. Analise o esboço do gráfico.



Analisando o gráfico, temos:

$$\begin{cases} f(x) < 0, \text{ para } x < 1 \text{ ou } x > 3 \\ f(x) = 0, \text{ para } x = 1 \text{ ou } x = 3 \\ f(x) > 0, \text{ para } 1 < x < 3 \end{cases}$$

Exemplo 2

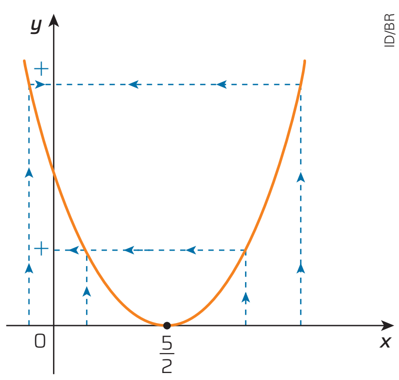
Vamos estudar o sinal da função $f(x) = 4x^2 - 20x + 25$.

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm 0}{8} = \frac{5}{2}$$

Assim, sabemos que $f(x) = 0$ para $x = \frac{5}{2}$.

Como $a = 4$, a parábola tem concavidade voltada para cima. Analise o esboço do gráfico.



Analisando o gráfico, temos:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \text{ para } x \neq \frac{5}{2} \\ f(x) = 0, \text{ para } x = \frac{5}{2} \\ f(x) < 0, \text{ para nenhum valor de } x \end{cases}$$

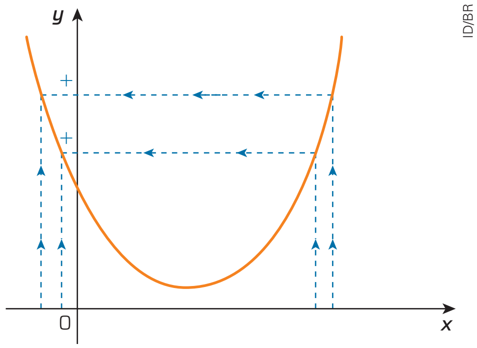
Exemplo 3

Vamos estudar o sinal da função $f(x) = x^2 + 4$.

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16$$

Assim, sabemos que a parábola não tem pontos (x, y) tais que $y = f(x) = 0$.

Como $a = 1$, a concavidade da parábola é voltada para cima. Analise o esboço do gráfico.



Analisando o gráfico, temos:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \text{ para qualquer valor real de } x \\ f(x) < 0, \text{ para nenhum valor de } x \\ f(x) = 0, \text{ para nenhum valor de } x \end{cases}$$

De volta ao problema inicial

Vamos retomar o problema apresentado na página 110 deste capítulo, porém, agora vamos analisá-lo com todos os conhecimentos que você tem sobre as funções quadráticas.

Vimos que a função $L(x)$ relaciona o preço x de cada bicicleta com o lucro que pode ser obtido com a venda desse modelo de bicicleta.

$$L(x) = (800 - x) \cdot (x - 200)$$
ou
$$L(x) = -x^2 + 1000x - 160\,000$$

Como essa função tem $a = -1$ e $-1 < 0$, sabemos que seu gráfico tem concavidade para baixo e tem um ponto de máximo, que corresponde a um valor de x do vértice da parábola que determina o lucro máximo.

Como o vértice da parábola é dado por $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, temos:

$$\Delta = 1000^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-160\,000) = 360\,000$$

Então, podemos escrever:

$$x_V = -\frac{1000}{2 \cdot (-1)} = 500$$

$$y_V = -\frac{360\,000}{4 \cdot (-1)} = 90\,000$$

Logo, podemos afirmar que, se o preço de venda de cada bicicleta for R$ 500,00, o lucro será R$ 90 000,00, como havíamos observado no esboço do gráfico da função.

Essas ferramentas que exploramos para analisar situações que podem ser descritas por funções quadráticas são muito úteis, pois valem para qualquer função desse tipo.

28. a) $\text{Im}(f) = \left[-\frac{25}{8}, +\infty\right[$ **b)** $\text{Im}(f) = \left]-\infty, \frac{37}{12}\right]$ **c)** $\text{Im}(f) = [-5, +\infty[$ **d)** $\text{Im}(f) =]-\infty, 4]$ **e)** $Im(f) = \left[\frac{1}{5}, +\infty\right[$ **f)** $Im(f) =]-\infty, 0]$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

23 Para que valor de x a função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ assume valor mínimo? $x = 1$

24 A função $f(x) = 3x^2 + 6x - m$ tem valor mínimo igual a 4. Determine m. $m = -7$

25 Ao corrigir a atividade **24** feita por Humberto, a professora verificou que ele cometeu um erro em sua resolução. Analise a solução de Humberto e localize o erro cometido por ele. Humberto errou ao realizar as operações $3(-1)^2$ e $-3 - 6$.

Nessa atividade, organize com os estudantes uma lista com os possíveis erros que podem ser cometidos nesse tipo de problema.

ID/BR

Para $f(x) = 3x^2 + 6x - m$, temos:

$$x_V = -\frac{6}{6} = -1$$

$$y_V = f(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) - m$$

Então:

$$f(-1) = -3 - 6 - m$$
$$f(-1) = 9 - m$$

Como $y_V = 4$, temos:

$$9 - m = 4$$
$$m = 5$$

26 Indique, no caderno, as afirmações que **não** são válidas para a função $f(x) = -9x^2 + 6x - 1$. Não são válidas: **a**, **b** e **d**.

Na atividade **26**, explore com os estudantes os argumentos que justificam a validade, ou não, de cada afirmação.

a) O conjunto imagem dessa função é $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.

b) O gráfico dessa função tem sua concavidade voltada para baixo e intersecta o eixo Oy em dois pontos distintos.

c) O vértice dessa função é seu ponto de máximo.

d) O vértice dessa função é dado por $V(5, 0)$.

27 Determine m e n para que o vértice da parábola dada por $y = -4x^2 + mx + n$ seja $\left(\frac{1}{2}, 9\right)$. $m = 4$ e $n = 8$

28 Determine o conjunto imagem de cada função de domínio $\mathbb{R}$ a seguir.

a) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$

b) $f(x) = -3x^2 + 7x - 1$

c) $f(x) = 5x^2 - 10x$

d) $f(x) = -x^2 + 4$

e) $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$

f) $f(x) = -9x^2 + 6x - 1$

29 Determine m para que a função:

a) $f(x) = (10 - 5m)x^2 + 4x + 3$ tenha valor mínimo; $m < 2$

b) $f(x) = (-3m + 6)x^2 - 2x - 6$ tenha valor máximo. $m > 2$

30 De todos os pares de números reais de soma igual a 12, determine aquele de produto máximo. 6 e 6

31 Considere a equação $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$, em que a representa a aceleração; v, a velocidade; v_0, a velocidade inicial; e Δs, o deslocamento da bola. Qual deverá ser a velocidade mínima de uma bola lançada verticalmente, a partir do solo, para que atinja 5 m de altura? Dado: $g = 10$ m/s². $v_0 = 10$ m/s

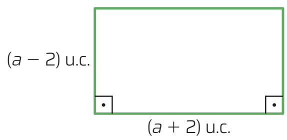
Se necessário, nessa atividade, informe aos estudantes que g refere-se à aceleração da gravidade.

32 A potência elétrica lançada em um circuito por um gerador é expressa por $P = 10i - 5i^2$, em que i é a intensidade da corrente elétrica, em ampere. Calcule a intensidade da corrente elétrica necessária para obter a potência máxima do gerador. 1 A

Explore com os estudantes as estratégias encontradas por eles para solucionar as atividades de **30** a **37**, visto que envolvem as habilidades de resolução de problemas, argumentação e análise de intervenção na realidade.

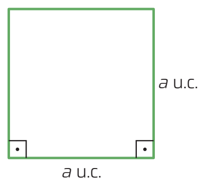
As atividades **35** e **36** possibilitam aos estudantes desenvolver a habilidade **EM13MAT302**, pois exploram a ideia de construção de modelos matemáticos para resolver problemas.

33 **As medidas das dimensões de cada uma das figuras são dadas pelas expressões indicadas.**



Ilustrações: ID/BR

Esta atividade favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT402**, pois explora a representação algébrica e geométrica de uma função quadrática, e o fato de que uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra.



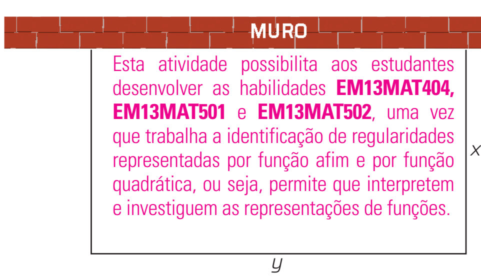
a) Mostre que a área do retângulo é representada pelo polinômio $a^2 - 4$. $A_{\text{retângulo}} = (a + 2)(a - 2) = a^2 - 4$

b) Suponha que a seja um número real positivo tal que $a > 2$ e construa um gráfico para mostrar o comportamento da função $y = a^2 - 4$.

c) No mesmo sistema de eixos coordenados, construa um gráfico para $y = a^2$, sendo $a \geqslant 0$.

d) Qual das duas figuras tem maior área? Por quê? O quadrado de lado de medida a, pois $a^2 > a^2 - 4$ para $a > 2$.

34 **José tem 20 metros de tela de arame e deseja cercar uma horta retangular aproveitando um muro que protege um dos lados, conforme indicado na figura.**



ID/BR

Esta atividade possibilita aos estudantes desenvolver as habilidades **EM13MAT404, EM13MAT501** e **EM13MAT502**, uma vez que trabalha a identificação de regularidades representadas por função afim e por função quadrática, ou seja, permite que interpretem e investiguem as representações de funções.

Consulte as respostas dos itens **a**, **c**, **d** e **f** no Manual do Professor.

Considerando x a medida da largura e y a medida do comprimento do retângulo, faça o que se pede.

a) Organize um quadro com alguns valores possíveis de x e de y.

b) Expresse uma relação entre x e y. $y = 20 - 2x$

c) Construa um gráfico com os dados do quadro.

d) Organize um quadro com alguns valores para a área do terreno, de acordo com os valores de x e de y.

e) Indique, em função de x, uma equação que expresse a área desse terreno. $A(x) = 20x - 2x^2$

f) Construa um gráfico que mostre a variação da área desse terreno em função de x.

g) Qual é a área máxima que esse terreno pode ter? 50 m²

35 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Cederj) Uma praça retangular tem 120 metros de perímetro. Denotando-se por x a medida, em metros, de um dos seus lados, a área $A(x)$ dessa praça é expressa, em metros quadrados, por: Alternativa **a**.

a) $A(x) = 60x - x^2, 0 < x < 60$

b) $A(x) = 120x - x^2, 0 < x < 120$

c) $A(x) = 30x - x^2, 0 < x < 30$

d) $A(x) = 40x - x^2, 0 < x < 40$

36 **Uma tela de arame com 28 metros de comprimento será usada para cercar uma região retangular. Quais devem ser as medidas dos lados do retângulo para que a área cercada seja máxima?**
O retângulo deve ser um quadrado de lado de medida 7 m.

37 **Estude o sinal de cada função a seguir.**
Consulte as respostas no Manual do Professor.

a) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$

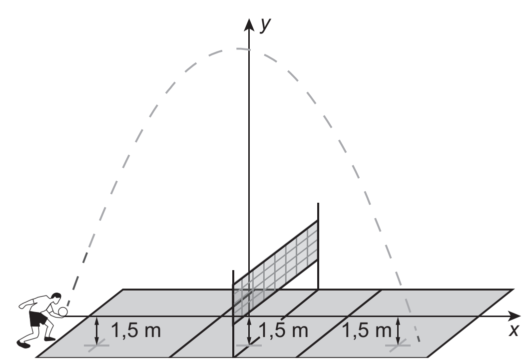
b) $f(x) = -5x^2 + 7x - 2$

c) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

d) $f(x) = -9x^2 + 24x - 16$

38 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde. Alternativa **d**.



Enem. Fac-símile: ID/BR

A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- **ginásio I: 17 m;**
- **ginásio II: 18 m;**
- **ginásio III: 19 m;**
- **ginásio IV: 21 m;**
- **ginásio V: 40 m.**

O saque desse atleta foi invalidado:

a) apenas no ginásio I.

b) apenas nos ginásios I e III.

c) apenas nos ginásios I, II e III.

d) apenas nos ginásios I, II, III e IV.

e) em todos os ginásios.

As atividades **38**, **39** e **40** possibilitam desenvolver a habilidade **EM13MAT503**, pois permitem que os estudantes investiguem o ponto de máximo do gráfico de uma função quadrática.

39 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Ao analisar os dados de uma epidemia em uma cidade, peritos obtiveram um modelo que avalia a quantidade de pessoas infectadas a cada mês, ao longo de um ano. O modelo é dado por $p(t) = -t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural, variando de 1 a 12, que representa os meses do ano, e $p(t)$ a quantidade de pessoas infectadas no mês t do ano. Para tentar diminuir o número de infectados no próximo ano, a Secretaria Municipal de Saúde decidiu intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia. Foram apresentadas cinco propostas (I, II, III, IV e V), com diferentes períodos de intensificação das propagandas:

- I: $1 \leqslant t \leqslant 2$;
- II: $3 \leqslant t \leqslant 4$;
- III: $5 \leqslant t \leqslant 6$;
- IV: $7 \leqslant t \leqslant 9$;
- V: $10 \leqslant t \leqslant 12$.

A sugestão dos peritos é que seja escolhida a proposta cujo período de intensificação da propaganda englobe o mês em que, segundo o modelo, há a maior quantidade de infectados. A sugestão foi aceita.

A proposta escolhida foi a: Alternativa **c**.

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

40 **Uma bola é lançada verticalmente para cima. Suponha que sua altura h, em metro, em função do tempo t, em segundo, após o lançamento, seja $h = -t^2 + 4t + 6$.**

a) Qual é a altura inicial? 6 m

b) Qual é o tempo que a bola leva para voltar a sua altura inicial? 4 s

c) Qual é a altura máxima atingida pela bola? 10 m

d) Usando uma calculadora gráfica, realize simulações e varie os coeficientes b e c, um de cada vez. O que acontece com a altura máxima atingida pela bola de acordo com a variação desses coeficientes? Consulte a resposta no Manual do Professor.

Neste tópico, incentive a leitura individual e a discussão em duplas ou em pequenos grupos para que os estudantes possam desenvolver a leitura da linguagem matemática e para que, na troca com os colegas, utilizem essa linguagem em suas afirmações e em seus argumentos.

INEQUAÇÕES DO 2º GRAU

Uma empresa freta aviões com 100 lugares para grupos de turistas. Cada passageiro paga R$ 400,00 pela passagem e mais R$ 10,00 para cada lugar que ficar vazio. Qual é a quantidade de pessoas que devem compor um grupo para que, ao fretar o avião, a empresa receba no mínimo R$ 33 000,00 a fim de não ter prejuízo?

Vamos considerar que o avião foi fretado para x passageiros. O preço total pago pelo grupo de x pessoas é obtido com base no preço pago individualmente, que é $400 + 10 \cdot (100 - x)$ reais, em que $(100 - x)$ representa a quantidade de lugares vagos. Assim, o total T a ser pago em função de x é:

$$T(x) = x \cdot [400 + 10 \cdot (100 - x)]$$
$$T(x) = 1\,400x - 10x^2$$

Para a empresa não ter prejuízo, é preciso que $T(x) \geqslant 33\,000$. Logo, o número x de passageiros deve satisfazer a seguinte relação:

$$1\,400x - 10x^2 \geqslant 33\,000$$

Inequação do 2º grau na variável real x é toda desigualdade redutível à forma: $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ ou $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

Esse tipo de relação é chamado de **desigualdade** ou **inequação do 2º grau.**

Para obtermos o conjunto solução S de uma inequação do 2º grau, precisamos analisar o sinal da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Acompanhe os exemplos a seguir.

Exemplo 1

Vamos determinar o conjunto solução da inequação $x^2 - 2x - 3 < 0$.

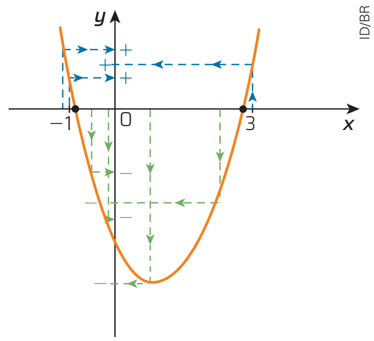
Inicialmente, devemos estudar o sinal da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Para $f(x) = 0$, temos:

$$\Delta = 16 \quad \text{e} \quad x = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -1$$

Então, $f(x) = 0$ para $x = 3$ ou $x = -1$.

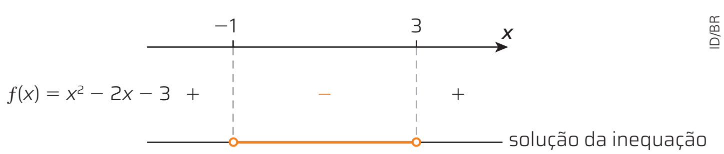
Como $a = 1 > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima. Analise o esboço do gráfico.



Analisando o gráfico, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) < 0, \text{ para } -1 < x < 3 \\ f(x) = 0, \text{ para } x = 3 \text{ ou } x = -1 \\ f(x) > 0, \text{ para } x < -1 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

Também podemos representar essa situação esquematicamente, desenhando somente o eixo Ox e utilizando a notação de intervalo.



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$ ou $S =]-1, 3[$.

Exemplo 2

Vamos determinar o conjunto solução da inequação $9x^2 + 6x + 1 > 0$.

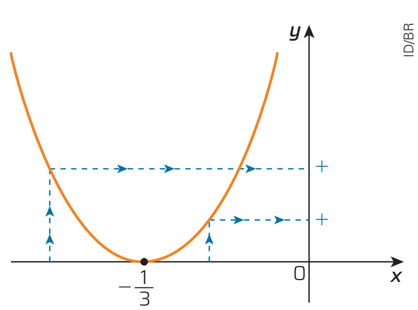
Inicialmente, devemos estudar o sinal da função $f(x) = 9x^2 + 6x + 1$.

Para $f(x) = 0$, temos:

$$\Delta = 0 \qquad \text{e} \qquad x = \frac{-6 \pm 0}{18} = -\frac{1}{3}$$

Então, $f(x) = 0$ para $x = -\frac{1}{3}$.

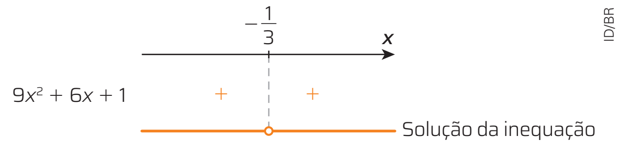
Como $a = 9 > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima. Analise o esboço do gráfico.



Analisando o gráfico, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \text{ para } x \neq -\frac{1}{3} \\ f(x) = 0, \text{ para } x = -\frac{1}{3} \\ f(x) < 0, \text{ para nenhum valor de } x \end{cases}$$

Essa é a resolução geométrica da inequação. Também podemos representar essa situação esquematicamente utilizando a notação de intervalo.



Portanto, $S = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

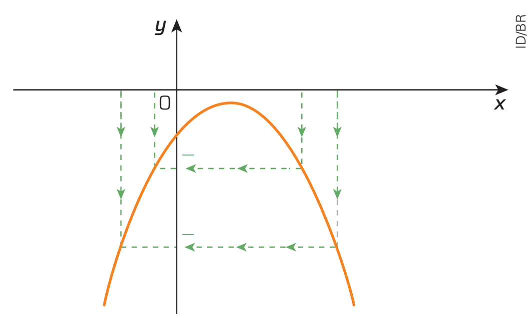
Exemplo 3

Vamos determinar o conjunto solução da inequação $-5x^2 + 4x - 1 \geqslant 0$.

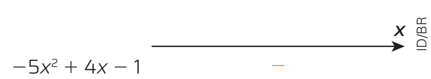
Inicialmente, devemos estudar o sinal da função $f(x) = -5x^2 + 4x - 1$.

$$\Delta = -4$$

Logo, essa função não tem raízes reais.
Como $a = -5 < 0$, a concavidade é voltada para baixo. Analise o esboço do gráfico.



Esquematicamente, temos:

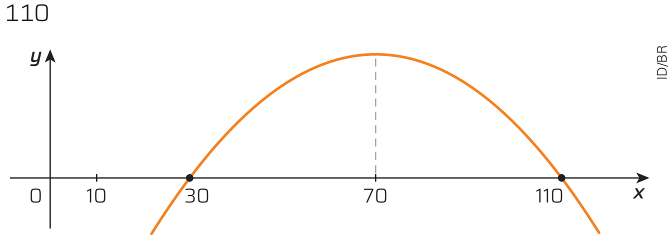


Portanto, $S = \varnothing$.

Exemplo 4

Agora, podemos resolver o problema proposto no início deste tópico, ou seja, determinar o número de passageiros x que é solução da inequação $1\,400x - 10x^2 \geqslant 33\,000$ ou $-10x^2 + 1\,400x - 33\,000 \geqslant 0$.
Estudando o sinal da função dada por $y = -10x^2 + 1\,400x - 33\,000$, temos:

- $a < 0$
- $\Delta = 640\,000 > 0$
- Raízes: $x = 30$ ou $x = 110$



Esquematicamente, temos:

Então $-10x^2 + 1\,400x - 33\,000 \geqslant 0$ se $30 \leqslant x \leqslant 110$.
Como o avião tem capacidade para 100 passageiros, a empresa deve fretá-lo para grupos de 30 a 100 turistas, a fim de evitar prejuízo.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R9 **Discuta a existência de raízes reais da função quadrática $f(x) = x^2 - (2m - 3)x + 0{,}75m$, com $m \in \mathbb{R}$.**

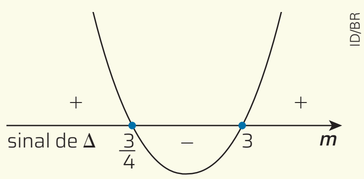
Resolução

Para resolver essa questão, devemos analisar o discriminante de f.

$$\Delta = [-(2m - 3)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}75m$$
$$\Delta = 4m^2 - 15m + 9$$

Mas $\Delta = 4m^2 - 15m + 9$ corresponde a uma função quadrática.

As raízes de $4m^2 - 15m + 9$ são $\frac{3}{4}$ e 3.



Portanto:

- $f(x)$ terá duas raízes desiguais $\Leftrightarrow \Delta > 0$

  Então, $m < \frac{3}{4}$ ou $m > 3$.
- $f(x)$ terá uma raiz real $\Leftrightarrow \Delta = 0$

  Então, $m = \frac{3}{4}$ ou $m = 3$.
- $f(x)$ não terá raiz real $\Leftrightarrow \Delta < 0$

  Então, $\frac{3}{4} < m < 3$.

R10 **Determine os valores reais de m para os quais $2x^2 - (m - 2)x - m + 2 > 0$ para todo x real.**

Resolução Se julgar necessário, realize a representação gráfica no quadro.

A parábola de f deve estar acima do eixo Ox para que $f(x) > 0$ para todo x real.

Para isso, é necessário e suficiente que: $\Delta < 0$ e $a > 0$.

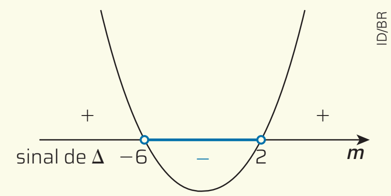
Peça aos estudantes que expliquem o significado da expressão "raiz dupla" na resolução da atividade **R11**. Note se eles percebem que essa expressão indica que as raízes encontradas para a equação do 2º grau são iguais. Peça que expliquem quando uma equação do 2º grau tem raiz dupla.

Temos:

- $a = 2$, então $a > 0$
- $\Delta = [-(m - 2)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-m + 2) < 0$

  $\Delta = m^2 + 4m - 12 < 0$

As raízes de $m^2 + 4m - 12 = 0$ são -6 e 2, logo $\Delta < 0$ para $-6 < m < 2$.

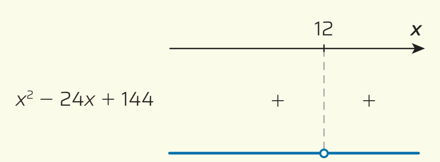


R11 **Determine o domínio de $f(x) = \dfrac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 24x + 144}}$**

Resolução

Como não existe raiz quadrada de número real negativo, tampouco denominador zero, então existe $\dfrac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 24x + 144}}$ em $\mathbb{R}$ se $x^2 - 24x + 144 > 0$.

Considerando que $x^2 - 24x + 144 = 0$ tem $\Delta = 0$ e raiz dupla 12, temos:



Portanto, $D(f) = \mathbb{R} - \{12\}$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Na atividade **41**, para resolver geometricamente as inequações, os estudantes devem esboçar o gráfico das funções quadráticas para analisar o comportamento delas.

41 **Resolva geometricamente as inequações.**

a) $-x^2 + 4x - 4 < 0$ $S = \mathbb{R} - \{2\}$

b) $x^2 - 4x + 5 < 0$ $S = \varnothing$

42 **Resolva cada inequação em $\mathbb{R}$.**

a) $5x^2 + 11x + 2 > 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < -2 \text{ ou } x > -\frac{1}{5}\right\}$

b) $2x^2 + 3x \leqslant 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 0\right\}$

c) $-4x^2 + 28x - 49 \geqslant 0$ $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

43 **Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\dfrac{2}{x^2} \geqslant 1$.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \text{ e } x \neq 0\right\}$

44 **Resolva o sistema:** $\begin{cases} x^2 - 2x \geqslant 0 \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 0 \text{ ou } 2 \leqslant x < 3\}$

Nas atividades **52** e **53**, a proposta é mais complexa e pode demandar mais tempo para ser realizada. Organize os estudantes para que trabalhem em duplas.

45 Discuta a existência de zeros reais da função $f(x) = 5x^2 - 6x + m - 4$ de domínio $\mathbb{R}$.

45. f terá duas raízes reais se $\Delta > 0$; então $m < \frac{29}{5}$
f terá uma raiz real se $\Delta = 0$; então $m = \frac{29}{5}$
f não terá raiz real se $\Delta < 0$; então $m > \frac{29}{5}$

46 Para quais valores reais de m a função a seguir admite raízes reais? Para quaisquer valores reais de m.

$$f(x) = x^2 + (2m - 1)x - 2m$$

47 Para quais valores reais de m a função a seguir admite raiz dupla? $m = 4$

$$f(x) = mx^2 - mx + 1$$

48 Para quais valores reais de k a função a seguir não admite zeros reais? $\{k \in \mathbb{R} \mid -4 < k < 4\}$

$$f(x) = 2x^2 - (k - 4)x - k + 4$$

49 Determine o domínio de cada função.

a) $f(x) = \sqrt{-2x^2 - 7x - 3}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -3 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}\right\}$

b) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{\sqrt{9 - x^2}}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$

50 Determine o valor de k nas inequações a seguir para todo x real.

a) $-x^2 + 4x - k < 0$ $S = \{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$

b) $2x^2 + (k - 6)x + 1 > 0$ $S = \left\{k \in \mathbb{R} \,\middle|\, 6 - 2\sqrt{2} < k < 6 + 2\sqrt{2}\right\}$

A atividade **51** permite o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302**, ao trabalhar a ideia de construção de modelos matemáticos para a resolução de problemas.

51 Deseja-se construir uma casa térrea de formato retangular. O terreno onde a casa será construída é retangular e tem 90 m de perímetro. Calcule as medidas desse terreno, considerando que a área da casa deve ser menor que 350 m². Se $0 < x < 10$, então $35 < y < 45$. Se $x > 35$, então $0 < y < 10$.

52 Elabore um problema parecido com o proposto na atividade **51** sobre uma função quadrática que envolva a área A de um círculo de raio R (em cm), com $0 < R < 100$. Consulte um exemplo de resposta no Manual do Professor.

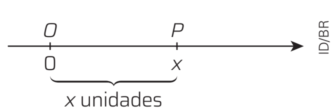
53 Escreva uma inequação do 2º grau cuja solução seja $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$. Consulte um exemplo de resposta no Manual do Professor.

Consulte no Manual do Professor uma sugestão para trabalhar as principais propriedades das funções afim e quadrática com o jogo Tiras de propriedades para funções.

FUNÇÃO MODULAR

Você já estudou alguns tipos de função, mas existem outros tipos que não são função afim nem função quadrática, como as funções definidas por partes, que você já estudou anteriormente. Agora, vamos estudar a **função modular**, que é um dos casos de funções definidas por partes, construída a partir do conceito de módulo de um número real.

Considere uma reta real, um ponto O demarcado nela, que será associado ao número zero, e um ponto P que representa um número real x.



Geometricamente, podemos interpretar que o módulo do número real x corresponde à distância do ponto P à origem O.

O **módulo** de um número real x (notação: $|x|$) é o próprio x, se x for não negativo, ou é o oposto de x, se x for negativo.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos

- $|4| = 4$
- $|-3| = -(-3) = 3$
- $\left|\sqrt{2} - 1\right| = \sqrt{2} - 1$, pois $\sqrt{2} - 1$ é **positivo**.
- $\left|\sqrt{3} - 2\right| = -\left(\sqrt{3} - 2\right) = -\sqrt{3} + 2$, pois $\sqrt{3} - 2$ é **negativo**.
- $|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ se } x^2 - 4 \geqslant 0, \text{ ou seja, para } x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2. \\ -x^2 + 4, \text{ se } x^2 - 4 < 0, \text{ ou seja, para } -2 < x < 2. \end{cases}$

Estudamos anteriormente que, se x existe para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e se, além disso, qualquer número real x apresenta um único x correspondente, vamos, nessas condições, definir uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, denominada função modular.

A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número x associa seu módulo, é denominada **função modular**.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = |x|$$

Costumamos dizer, resumidamente, que a função modular é definida por $y = |x|$ ou $f(x) = |x|$, subentendendo que o domínio é $\mathbb{R}$.

Tendo em vista a definição de $|x|$, podemos descrever a função modular por:

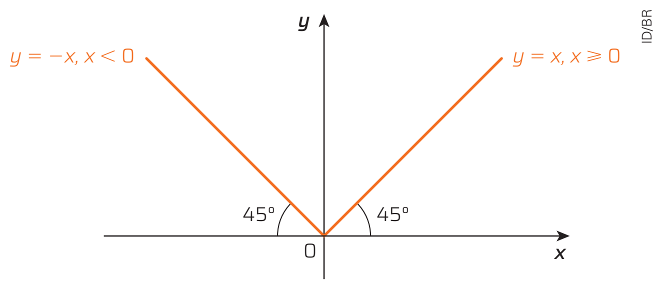
$$y = f(x) = \begin{cases} x, \text{ para } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ para } x < 0 \end{cases}$$

Este tópico contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT105**, ao utilizar as noções simetria na construção de gráfico de uma função modular.

Gráfico da função modular

Como $y = x$, para $x \geqslant 0$, o gráfico dessa função é a bissetriz do 1º quadrante do sistema de coordenadas cartesianas; e como $y = -x$, para $x < 0$, o gráfico dessa função é a bissetriz do 2º quadrante.

Assim, o gráfico de $y = |x|$, de domínio $\mathbb{R}$, é a reunião das bissetrizes do 1º e do 2º quadrante. Analise o gráfico a seguir.

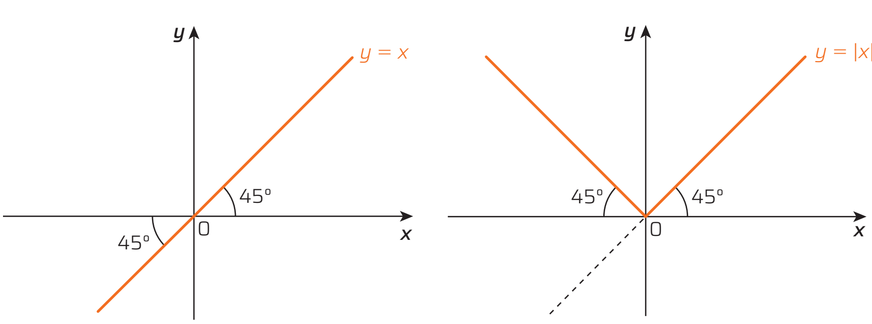


ID/BR

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$$

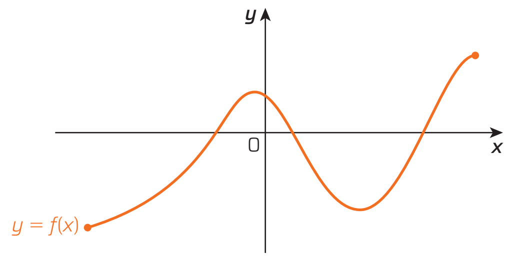
Observe que podemos obter o gráfico de $y = |x|$, de domínio $\mathbb{R}$, a partir do gráfico de $y = x$, pois:

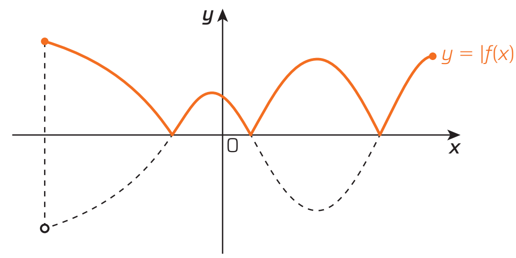
- Para $x \geqslant 0$, temos que $x = |x|$; assim, o gráfico de $y = |x|$ coincide com o de $y = x$.
- Para $x < 0$, temos $|x| = -x$; assim, para cada $x < 0$, o ponto do gráfico de $y = |x|$ é obtido refletindo o ponto correspondente do gráfico de $y = x$ em relação a Ox.



Ilustrações: ID/BR

De maneira geral, conhecido o gráfico de $y = f(x)$, obtemos o de $y = |f(x)|$ aproveitando o trecho acima de Ox e construindo os trechos simétricos em relação a Ox das partes do gráfico de $y = f(x)$ situadas abaixo desse eixo.

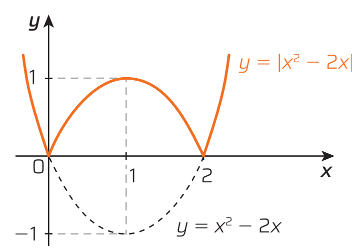




Ilustrações: ID/BR

Exemplo

Para obtermos o gráfico de $y = |x^2 - 2x|$, esboçamos a parábola dada por $y = x^2 - 2x$ e aplicamos o procedimento descrito anteriormente.



ID/BR

Observe que o eixo de simetria da parábola de $y = x^2 - 2x$ será também eixo de simetria do gráfico da função $y = |x^2 - 2x|$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R12 Resolva as equações.

a) $|-3x - 5| = 7$

b) $|x^2 - 5x - 3| = 3$

Resolução

a) $$|-3x - 5| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 5 = 7 \Rightarrow -3x = 7 + 5 \Rightarrow -3x = 12 \Rightarrow x = -4 \\ \text{ou} \\ -3x - 5 = -7 \Rightarrow -3x = -7 + 5 \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{-4, \dfrac{2}{3}\right\}$.

b) $$|x^2 - 5x - 3| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 3 = 3 \Rightarrow x = 6 \text{ ou } x = -1 \\ \text{ou} \\ x^2 - 5x - 3 = -3 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 5 \end{cases}$$

Portanto, $S = \{-1, 0, 5, 6\}$.

TECNOLOGIA

Há diversos tipos de calculadora gráfica *on-line*; as etapas apresentadas podem ser realizadas em diversos *softwares*, como o Geogebra e o Desmos.

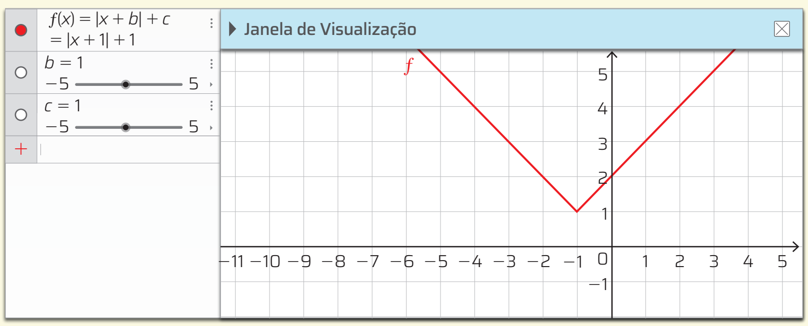
Utilizando novamente um *software* de calculadora gráfica *on-line* em 2D, podemos construir e manipular o gráfico de uma função modular. Além disso, podemos variar os coeficientes para verificar o que ocorre com esse gráfico em cada caso.

Acompanhe as etapas de como construir o gráfico da função $f(x) = |x + b| + c$ e modificar seus coeficientes b e c para verificar o que acontece com o gráfico dessa função em diferentes situações.

1ª etapa: Inicialmente, construímos o gráfico da função $f(x) = |x + b| + c$. Para isso, escrevemos a expressão $|x + b| + c$ na caixa de entrada e clicamos no botão “Enter”.

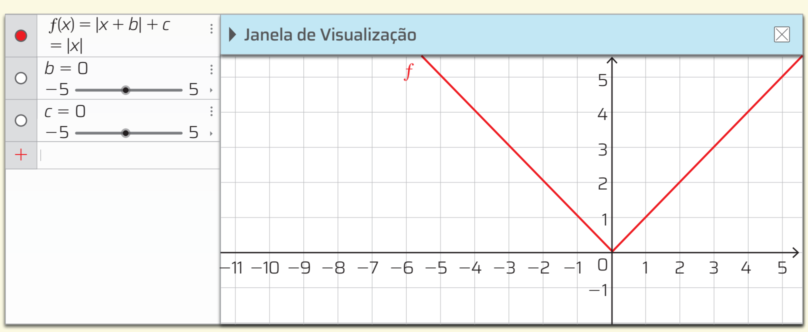
Em alguns *softwares* o módulo pode ser escrito usando a barra vertical do teclado: “|”. Em outros, pode ser necessário digitar “abs” na caixa de entrada de dados para indicar o módulo; nesse caso, a expressão deve ser digitada como “$abs(x + b) + c$”.

Note que a função obtida tem b = c = 1. Assim, o gráfico representado é o da função $f(x) = |x + 1| + 1$.



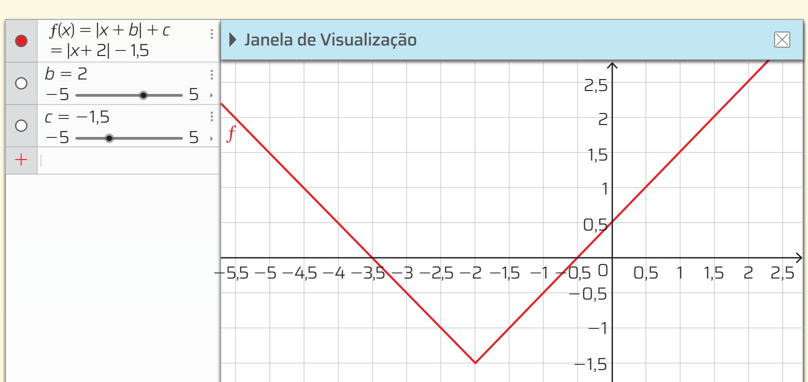
Nelson Matsuda/ID/BR

2ª etapa: Em seguida, vamos usar o controle deslizante para alterar os coeficientes b e c. Observe o gráfico obtido para $b = c = 0$.



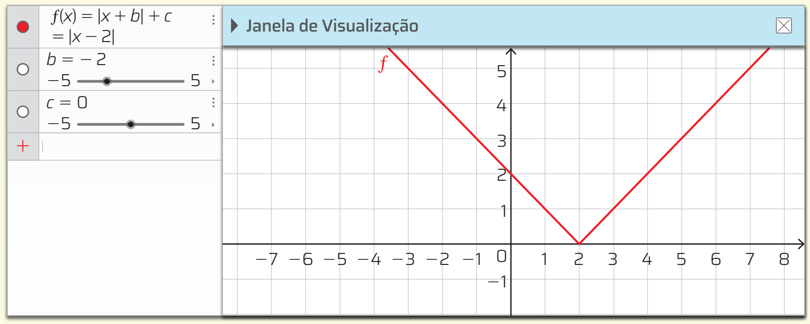
Nelson Matsuda/ID/BR

3ª etapa: Agora, vamos usar o controle deslizante para representar o gráfico da função $f(x) = |x + 2| - 1{,}5$.



Nelson Matsuda/ID/BR

4ª etapa: Usando o controle deslizante, realize outras alterações no valor dos coeficientes b e c. Por exemplo, verifique o que ocorre com o gráfico da função ao alterarmos o coeficiente b para -2 e c para 0.



Nelson Matsuda/ID/BR

ATIVIDADES

1 De acordo com o exemplo apresentado, responda às questões a seguir.

a) Escreva, no caderno, a lei de formação da função cujo gráfico foi construído na 2ª etapa.

b) Após alterar o coeficiente b no exemplo da 4ª etapa, qual é a lei de formação da função cujo gráfico foi representado?

c) Como o valor do coeficiente b alterou o gráfico da função proposta?

2 Reproduza o exemplo apresentado em um *software* de calculadora gráfica e, em seguida, altere o valor do coeficiente c para -4. Repita o processo e altere o coeficiente c para 4. Quais alterações ocorreram no gráfico dessa função após cada um desses ajustes?

55. a) $\begin{cases} x - 3, \text{ para } x \geqslant 3 \\ 3 - x, \text{ para } x < 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x + 8, \text{ para } x \leqslant 4 \\ 2x - 8, \text{ para } x > 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 1 - x, \text{ para } x \leqslant 1 \\ x - 1, \text{ para } x > 1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x^2 - 1, \text{ para } x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ 1 - x^2, \text{ para } -1 < x < 1 \end{cases}$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

54 Calcule:

a) $|-2{,}001|$ 2,001

b) $|\sqrt{5} - 2|$ $\sqrt{5} - 2$

c) $|3 - \pi|$ $\pi - 3$

d) $\left|\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\right|$ $\frac{1}{2}$

55 Obtenha a expressão equivalente a cada módulo, para $x \in \mathbb{R}$.

a) $|x - 3|$

b) $|-2x + 8|$

c) $|1 - x|$

d) $|x^2|$ x^2

e) $|x^2 + 1|$ $x^2 + 1$

f) $|x^2 - 1|$

56 Classifique cada sentença a seguir em verdadeira ou falsa e justifique suas respostas no caderno.

a) $|x| \geqslant 0$ para todo número real x.
Verdadeira, pela definição de $|x|$.

b) $|x| = |-x|$ para todo número real x.

c) $|x^2| = |x|^2 = x^2$ para todo número real x.

d) $|x| \geqslant x$ para todo número real x.
Verdadeira, pois para $x \geqslant 0$ temos $x \geqslant x$ e para $x < 0$, temos $-x \geqslant x$.

57 Ao resolver a inequação $|x + 3| < 2$, Renata cometeu um erro. Veja a seguir a resolução feita por ela, descubra o erro e corrija-o. O erro está na 1ª linha. Solução correta: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -1\}$

ID/BR

$$-2 < x + 3 < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 < -2 \Rightarrow x < -5 \\ \text{ou} \\ x + 3 < 2 \Rightarrow x < -1 \end{cases}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x < -1\}$$

58 Elabore uma equação modular cuja solução esteja no intervalo $[-4, 1]$. Consulte uma sugestão de resposta no Manual do Professor.

59 Analise o quadro a seguir.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	4	2	0	2	4	6

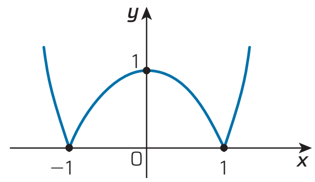
a) Esse quadro foi construído para representar uma função modular do tipo $y = |ax + b|$. Qual é a função? $y = |2x|$

b) Considerando que a função seja definida em $\mathbb{R}$, construa seu gráfico. Consulte a resposta no Manual do Professor.

56. b) Verdadeira, pois $|-x| = -(-x) = x$, para $x \geqslant 0$, ou $|-x| = -x$, para $x < 0$.
c) Verdadeira, pois $|x^2| = x^2$, assim como $|x|^2 = x^2$, para $x \geqslant 0$, ou $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$, para $x < 0$.

Informe aos estudantes que eles podem utilizar o *software* de calculadora gráfica para resolver a atividade **62**.

60 O gráfico a seguir representa uma função modular do tipo $y = |ax^2 + bx + c|$.



ID/BR

a) Determine a lei de formação dessa função. $y = |-x^2 + 1|$

b) Considerando $D(f) = \mathbb{R}$, qual é o conjunto imagem dessa função? $Im(f) = [0, +\infty[$

61 Esboce o gráfico das funções de domínio $\mathbb{R}$.

a) $y = |x| + 2$

b) $y = |-6x - 3|$

c) $y = |x - 2| - 1$

d) $y = |x^2 - 1| - 2$

e) $y = -|x^2 - 2x| + 1$

f) $y = |x^2 - 2x - 3|$

Consulte as respostas no Manual do Professor.

62 Faça o que se pede em cada item.

a) Represente no mesmo sistema de coordenadas os gráficos das funções $f(x) = |4 - x^2|$ e $g(x) = \dfrac{x + 7}{2}$. Consulte a resposta do item **a** no Manual do Professor.

b) Responda: Quantas soluções tem a equação $|4 - x^2| = \dfrac{x + 7}{2}$? 4 soluções.

63 Registre a alternativa correta no caderno.

(Uece) Ao representarmos a equação $|x| - |y| = 1$, no plano, com o sistema usual de coordenadas cartesianas, teremos: Alternativa **a**.

a) quatro semirretas.

b) quatro segmentos de retas.

c) duas retas.

d) duas semirretas.

64 Escreva a alternativa correta no caderno.

(UFT-TO) Se V é o conjunto solução da equação modular $|3x + 2| - 1 = x$, no universo dos números reais $\mathbb{R}$, então V corresponde ao conjunto: Alternativa **a**.

a) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\dfrac{1}{2} \text{ ou } x = -\dfrac{3}{4}\right\}$

b) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\dfrac{1}{2}\right\}$

c) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{3}{4}\right\}$

d) $V = \varnothing$

CÁLCULO RÁPIDO

Fatoração, produtos notáveis e equações do 2º grau apareceram ao longo de todo este capítulo e serão parte do estudo de outras funções.

1 Utilize a estratégia apresentada no exemplo e desenvolva os produtos.

$$(m - 7)^2 = m^2 - 14m + 49$$

a) $(t + 8)^2$ $t^2 + 16t + 64$

b) $(2y^2 - 4)^2$ $4y^4 - 16y^2 + 16$

c) $(3m^4 + 5)^2$ $9m^8 + 30m^4 + 25$

d) $(10 - 4x)^2$ $100 - 80x + 16x^2$

e) $\left(\dfrac{1}{2} + z\right)^2$ $\dfrac{1}{4} + z + z^2$

f) $\left(\dfrac{3}{4}m^2 - 6\right)^2$

g) $(5z^2 - 3m^3)^2$

h) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{7}\right)^2$ $2\sqrt{14} + 9$

1. f) $\dfrac{9}{16}m^4 - 9m^2 + 36$
g) $25z^4 - 30z^2m^3 + 9m^6$

2 Utilize a estratégia apresentada no exemplo e calcule os produtos.

$$(x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$$

a) $(y + 6)(y + 2)$ $y^2 + 8y + 12$

b) $(t + 2)(t + 2)$ $t^2 + 4t + 4$

c) $(m + 3)(m + 5)$ $m^2 + 8m + 15$

d) $(n - 5)(n + 2)$ $n^2 - 3n - 10$

e) $(t + 5)(t - 9)$

f) $(x - 1)(x - 6)$

g) $(y - 3)(y - 3)$

h) $(z - 2)(z - 10)$

2. e) $t^2 - 4t - 45$
f) $x^2 - 7x + 6$
g) $y^2 - 6y + 9$
h) $z^2 - 12z + 20$

3 Resolva em $\mathbb{R}$ cada equação a seguir e relacione as equações que têm as mesmas raízes. **a)** e **b)**; **c)**, **d)** e **g)**; **e)** e **f)**

a) $x^2 = 1$ $x = \pm 1$

b) $x^2 - 1 = 0$ $x = \pm 1$

c) $x^2 = 4$ $x = \pm 2$

d) $x^2 - 4 = 0$ $x = \pm 2$

e) $x^2 = 2$ $x = \pm\sqrt{2}$

f) $x^2 - 2 = 0$ $x = \pm\sqrt{2}$

g) $4 - x^2 = 0$ $x = \pm 2$

h) $9 - x^2 = 0$ $x = \pm 3$

i) $16 - x^2 = 0$ $x = \pm 4$

j) $49 - x^2 = 0$ $x = \pm 7$

k) $81 - x^2 = 0$ $x = \pm 9$

l) $100 - x^2 = 0$ $x = \pm 10$

4 Toda equação incompleta da forma $x^2 - px = 0$ pode ser fatorada da seguinte maneira: $x(x - p) = 0$ e, por isso, $x = 0$ e $x = p$ são suas raízes. Com base nesse conceito, resolva mentalmente cada equação a seguir.

a) $x^2 - x = 0$ $S = \{0, 1\}$

b) $x^2 + x = 0$ $S = \{0, -1\}$

c) $-x^2 - 2x = 0$ $S = \{0, -2\}$

d) $x^2 - 3x = 0$ $S = \{0, 3\}$

e) $x^2 + 3x = 0$ $S = \{0, -3\}$

f) $-2x^2 + 4x = 0$ $S = \{0, 2\}$

g) $x^2 - 8x = 0$ $S = \{0, 8\}$

h) $x^2 + 8x = 0$ $S = \{0, -8\}$

i) $-x^2 - 6x = 0$ $S = \{0, -6\}$

j) $x^2 - 15x = 0$ $S = \{0, 15\}$

k) $x^2 + 15x = 0$ $S = \{0, -15\}$

l) $-2x^2 + 6x = 0$ $S = \{0, 3\}$

5 Acompanhe o exemplo e resolva mentalmente as equações a seguir.

$$y^2 + 4y = 0$$
$$y(y + 4) = 0$$
$$y = 0 \quad \text{ou} \quad y = -4$$

a) $z^2 - 3z = 0$ $z = 0$ ou $z = 3$

b) $m^2 - \dfrac{1}{5}m = 0$ $m = 0$ ou $m = \dfrac{1}{5}$

c) $t^2 + \dfrac{3}{4}t = 0$ $t = 0$ ou $t = -\dfrac{3}{4}$

d) $x^2 + 1{,}5x = 0$ $x = 0$ ou $x = -1{,}5$

e) $k^2 - 2{,}8k = 0$ $k = 0$ ou $k = 2{,}8$

f) $n^2 + 0{,}8n = 0$ $n = 0$ ou $n = -0{,}8$

g) $x^2 + 6x = 0$ $x = 0$ ou $x = -6$

h) $z^2 - \dfrac{4}{7}z = 0$ $z = 0$ ou $z = \dfrac{4}{7}$

i) $y^2 + 3{,}34y = 0$ $y = 0$ ou $y = -3{,}34$

j) $x^2 - 5x = 0$ $x = 0$ ou $x = 5$

Ter fluência em cálculos algébricos é importante para a ampliação da linguagem matemática, bem como para a diminuição de erros na resolução de problemas.

6 Utilize a estratégia apresentada no exemplo e resolva mentalmente cada equação a seguir.

$$(x+3)\cdot(x-4)=0$$
$$x+3=0 \quad \text{ou} \quad x-4=0$$
$$x=-3 \quad \text{ou} \quad x=4$$

a) $\left(t+\frac{1}{5}\right)\cdot(t-2)=0$ $t=-\frac{1}{5}$ ou $t=2$

b) $(m-5)\cdot\left(m+\frac{2}{3}\right)=0$ $m=5$ ou $m=-\frac{2}{3}$

c) $(y+1)\cdot(y-3{,}8)=0$ $y=-1$ ou $y=3{,}8$

d) $(n+6)\cdot\left(n+\frac{7}{2}\right)=0$ $n=-6$ ou $n=-\frac{7}{2}$

e) $(b-4{,}5)\cdot\left(b-\frac{3}{7}\right)=0$ $b=4{,}5$ ou $b=\frac{3}{7}$

f) $(t+10)\cdot(t-10)=0$ $t=-10$ ou $t=10$

g) $(x-2{,}6)\cdot(x-7)=0$ $x=2{,}6$ ou $x=7$

h) $(k-8)\cdot(k+1)=0$ $k=8$ ou $k=-1$

i) $(y-\sqrt{2})\cdot(y+\sqrt{3})=0$ $y=\sqrt{2}$ ou $y=-\sqrt{3}$

PARA RECORDAR

Esta sequência de atividades permite a retomada de temas importantes para dar continuidade ao estudo da Matemática. Regras de sinais, significado de potenciação e definições dos principais quadriláteros estão presentes nestas questões.

1 Construa, no caderno, um quadro com as seis primeiras potências dos números compreendidos entre 1 e 10.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	////	////	////	////	////	////	////	////	////	////
n^3	////	////	////	////	////	////	////	////	////	////
n^4	////	////	////	////	////	////	////	////	////	////
n^5	////	////	////	////	////	////	////	////	////	////
n^6	////	////	////	////	////	////	////	////	////	////

Agora, responda às questões:

a) Que números podem representar os algarismos das unidades das potências de 2? Os números pares.

b) Qual é o algarismo das unidades de 5^{35}, 5^{100} e 5^{200}? 5

c) Qual é o algarismo das unidades das potências de 4 cujo expoente é um número par? 6

d) Qual é o algarismo das unidades das potências 9^{18}, 9^{23} e 9^{100}? 1, 9 e 1.

e) Estabeleça uma regra para determinar o último algarismo de qualquer potência de 9. Sendo k esse último algarismo da potência 9^n: $k=1$, se n é par; $k=9$, se n é ímpar.

2 Qual dos números a seguir é negativo? Por quê?

a) $(-3)^{20}$, $(-3)^{23}$ $(-3)^{23}$, pois a base é negativa e o expoente é ímpar.

b) $(-123)^{26}$, $(-123)^{27}$ $(-123)^{27}$, pois a base é negativa e o expoente é ímpar.

c) $(-12)^5$, $(-12)^6$ $(-12)^5$, pois a base é negativa e o expoente é ímpar.

d) 2^8, $(-2)^8$ Nenhum dos números, pois a base de 2^8 é positiva, e $(-2)^8$ tem expoente par.

Use uma calculadora com a tecla %, para resolver as questões a seguir.

3 Em uma escola, havia 500 estudantes matriculados. No ano seguinte, a quantidade de matrículas aumentou 12%. Ao todo, quantos estudantes estão matriculados nessa escola? 560 estudantes.

4 Em uma partida de basquete, os 87 pontos de uma equipe foram obtidos pelos seguintes jogadores:

Jogador	Paulo	Carlos	João	Luiz	Marcelo
Pontuação	21	12	38	11	5

Qual é a porcentagem de pontos que cada um conseguiu nessa partida? Paulo: 24%; Carlos: 14%; João: 43%; Luiz: 13%; Marcelo: 6%

5 Suponha que os custos de produção e de comercialização embutidos no preço do litro de leite sejam:

Fornecedor da matéria-prima	62,7%
Transformação e laboratório	7,8%
Embalagem	16,0%
Custos diversos	1,9%
Distribuição e comercialização	9,6%
Lucro	2,0%
Total	**100,0%**

a) Quanto custa a embalagem de 1 litro de leite que é vendido por R$ 4,90? R$ 0,55

b) Quanto o fornecedor da matéria-prima recebe a cada litro de leite que é vendido por R$ 4,90? R$ 2,16

6 Analise o quadro a seguir.

Quadrilátero	Definição
Paralelogramo	Quadrilátero com dois pares de lados paralelos.
Retângulo	Quadrilátero com quatro ângulos retos.
Quadrado	Quadrilátero com quatro ângulos retos e os quatro lados congruentes.
Losango	Quadrilátero com os quatro lados congruentes.
Trapézio	Quadrilátero com pelo menos um par de lados paralelos.

a) No caderno, desenhe exemplos de todos os quadriláteros descritos no quadro.
Consulte um exemplo de resposta no Manual do Professor.

b) Retângulos, quadrados e losangos são paralelogramos. Você concorda com essa afirmação? Por quê? Espera-se que os estudantes concordem com a afirmação, pois retângulos, quadrados e losangos têm dois pares de lados paralelos.

c) Qual quadrilátero é retângulo e losango ao mesmo tempo? Por quê? O quadrado, pois tem 4 ângulos retos e 4 lados congruentes.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Se considerar necessário, proponha aos estudantes que façam um desenho ou um esquema para auxiliá-los na resolução das atividades. Para a atividade **2**, uma estratégia de resolução é "pensar do final para o começo", ou seja, pensar em quantas maçãs o homem tinha antes de chegar à última porteira para sair dela com uma única maçã.

1 Responda às questões a seguir.

a) De quantas maneiras diferentes cinco pessoas podem se sentar em um carro de cinco lugares? 120 maneiras.

b) Nesse mesmo carro, de quantas maneiras as cinco pessoas podem se sentar, se apenas uma delas souber dirigir? 24 maneiras.

2 **Um homem passou por sete porteiras, entrou em um pomar e pegou algumas maçãs. Ao voltar, encontrou um conhecido em cada porteira. Ele doou, a cada passagem por uma delas, metade das maçãs que ele tinha colhido, mais uma maçã. Assim aconteceu em cada porteira, e ele saiu com apenas uma maçã depois de cruzar a sétima porteira. Quantas maçãs ele apanhou no pomar?** 382 maçãs.

3 Escreva no caderno a alternativa correta.

(Unicamp-SP) Todo final de semana, as amigas Ana, Bruna e Carol se encontram em um parque para andar de bicicleta ou de patins. Nesta brincadeira, a escolha entre patins e bicicleta é feita usando a seguinte regra: Alternativa **d**.

Se Ana anda de patins, Carol também anda de patins. Bruna anda de patins apenas quando Carol anda de bicicleta.

Sabendo que neste final de semana Carol andou de patins, então é necessariamente verdade que:

a) Ana andou de patins.

b) Ana não andou de patins.

c) Bruna andou de patins.

d) Bruna não andou de patins.

PALAVRAS-CHAVE

No caderno, faça uma lista das palavras-chave referentes a este capítulo. Pense em cada uma delas e responda:

- O que aprendi sobre esses conceitos?
- Quais dúvidas ainda tenho?

Para sanar suas dúvidas, releia o texto do capítulo, retome as atividades e, se necessário, converse com o professor.

Utilize as produções dos estudantes como instrumento de avaliação. Observe se eles registram ou mencionam os principais conceitos e procedimentos relativos às funções quadráticas. Verifique o que falta nesses textos para decidir o que é preciso retomar com toda a turma ou com alguns grupos de estudantes.

MATEMÁTICA E ESPORTE

O objetivo desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes ao desenvolver habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propor a eles que vivenciem um processo investigativo, possibilitando um trabalho com as competências específicas **1** e **2** da área de Matemática. Se julgar conveniente, convide professores dos componentes curriculares Física e Educação Física para participar das discussões com a turma.

Trajetória parabólica no esporte

Diversas modalidades esportivas, como futebol, basquete, vôlei, saltos ornamentais, lançamento de flechas e de dardos, envolvem trajetórias parabólicas. Para estudar a execução dos movimentos exigidos e criar estratégias de *performance* que possam auxiliar os atletas na obtenção de um melhor rendimento esportivo, é possível criar modelos que representem esses movimentos fazendo uso de recursos e conceitos relacionados à Matemática e à Física.

Os saltos ornamentais, por exemplo, são espetáculos de acrobacias executadas com extrema habilidade e técnica, que chamam a atenção do público pela plasticidade e flexibilidade dos atletas. Eles executam movimentos impressionantes, que podem ser descritos por modelos matemáticos e analisados de acordo com princípios da Física. Observa-se, assim, a combinação entre arte e ciência no esporte.

Outro exemplo é o movimento de uma bola de basquete ao ser arremessada. Analise a fotografia a seguir.

Toyota/Zuma Press/Fotoarena

Trajetória parabólica do lançamento de uma bola realizado por um robô. Ele utiliza a inteligência artificial para detectar o aro e calcular o movimento ideal sem errar nenhum arremesso. Japão, foto de 2020.

Não escreva no livro.

Vamos ler o texto a seguir e discutir com os colegas e o professor as questões propostas?

A física no esporte

Ballet, patinação no gelo, boxe, futebol, basquete. Não importa a modalidade. Para tirar o melhor proveito e obter o melhor desempenho em qualquer esporte, use a física a seu favor!

A ciência básica mais "fuçada" de todas tem tudo a ver com uma *performance* melhor por parte dos esportistas. Isso porque são as leis da física que regem movimentos, velocidade, força, inércia, atrito, interferindo diretamente nas modalidades esportivas.

A tecnologia, nesse sentido, tem aberto mais possibilidades. Hoje é possível observar movimentos em velocidades muito lentas, monitorar músculos durante a execução de saltos e a quantidade de oxigênio no organismo, entre outras coisas. "Os atletas sempre tiveram conhecimento sobre o auxílio da física nos esportes e sempre a utilizaram a seu favor, mas agora, com a tecnologia que permite a observação detalhada, essa ciência pode ser mais bem explorada nos esportes", afirma o docente do Instituto de Física de São Carlos (IFSC/USP), Francisco Eduardo Gontijo Guimarães.

Para tirar proveito máximo da física, os atletas e seus treinadores têm que ter em mente alguns pontos chaves. Começando pela noção básica de que é preciso superação do tempo, distância e inércia (esta última influenciando diretamente na aceleração dos corpos). "O atleta sai do repouso e tem que buscar a máxima aceleração para conseguir melhor velocidade", explica Guimarães. "A rapidez com que um corpo altera sua velocidade é determinada pela inércia".

Não coincidentemente, a física lida exatamente com essas três problemáticas e, por esse motivo, pode se tornar uma grande aliada do atleta, uma vez que ambos – o atleta e a física – "lutam" contra o mesmo "inimigo".

[...]

O jogador do esporte mais popular no mundo e especialmente no Brasil relaciona-se o tempo todo com a física. O futebolista não pensa se o percurso da bola, ao ser chutada, deve ser parabólico ou retilíneo, mas ele sabe que dar "efeito" na bola é ideal na cobrança de faltas, ou chutá-la e fazer com que ela se movimente sem giro é ideal para passes.

"Numa cobrança de falta, o atleta, instintivamente, fará com que ela se movimente em tal direção que sobreponha a barreira e se encaminhe para [a] direção do gol. É o giro ou 'efeito' que faz com que a bola faça a curva", explica o docente.

Nesse caso, o movimento do ar interfere no movimento da bola. A composição entre o giro da bola e a passagem do ar por ela pode alterar o movimento e o efeito final, pode ser a responsável por um gol cinematográfico.

Técnica semelhante pode ser usada no vôlei. No saque, bolas com efeito são comuns, pois dessa forma fica imprevisível para o adversário saber sua posição final. Já nos passes, isso não pode ocorrer. O toque do levantador deve ser feito sem dar qualquer efeito na bola, para que o atacante saiba muito bem para onde deve correr e dar sua cortada. "Nessa modalidade, as leis de impacto ou impulso estão diretamente relacionadas. Existem técnicas específicas ensinadas aos jogadores para aprender a lidar com o impacto entre corpos, nesse caso, bola e mão", explica Guimarães.


Richard Callis/Eurasia Sport Images/Getty Images

Gabriela Braga, atleta da Seleção Brasileira de Vôlei, nos Jogos Olímpicos de Paris 2024. França, foto de 2024.

[...]

Por ser uma ciência básica que está envolvida com tudo que nos rodeia, a física pode ser uma grande aliada dos atletas. Depende, como quase tudo que está ao nosso redor, do uso que será feito dela. Os atletas, para chegarem à perfeição, lidam com os mesmos desafios de um mágico: a máxima rapidez para proporcionar o melhor (e mais belo) desempenho. No caso do atleta, a física pode ser o ingrediente principal a seu favor. E, para isso, não é preciso mágica: somente inteligência e disposição para saber usá-la.

A FÍSICA no esporte. Portal IFSC, 26 set. 2012. Disponível em: https://www2.ifsc.usp.br/portal-ifsc/a-fisica-no-esporte/. Acesso em: 10 jul. 2024.

Conectando ideias

1. Resposta esperada: O modelo matemático que descreve trajetórias parabólicas e os conhecimentos de Física se complementam, oferecendo informações valiosas que podem ser aplicadas em várias modalidades esportivas. O estudo da trajetória do objeto ou da pessoa em movimento parabólico permite que os atletas otimizem técnicas e ajustem ângulos e intensidade de forças, visando aumentar a eficiência de seus movimentos ou arremessos.

1 Como a Física pode auxiliar os atletas nas práticas esportivas? Converse com os colegas e o professor.

2 Segundo o texto, há um ângulo ideal para o atleta de salto em distância executar sua trajetória parabólica de modo que consiga atingir uma distância máxima. Entretanto, de acordo com o professor Otaviano Helene, do Instituto de Física da USP, como o atleta está em movimento, com o impulso, ele consegue saltar formando um ângulo máximo de aproximadamente 22° com a horizontal. O que ocorre se o ângulo for maior que o ideal, isto é, 45°? E se ele for menor?

Se a medida do ângulo for maior que a ideal, o atleta subirá mais, mas não atingirá a distância horizontal máxima. Entretanto, se o ângulo for menor, o atleta voltará ao solo antes de atingir a distância horizontal desejada.

3 Os atletas, além de dominarem os princípios da Física, contam com a tecnologia como uma poderosa aliada em busca da alta *performance* esportiva.

Como a tecnologia pode colaborar para que os atletas alcancem excelentes resultados?

- Em duplas, pesquisem quais tipos de tecnologia favorecem os atletas e, em seguida, elaborem um relatório com os dados coletados.
- Apresentem o relatório aos colegas e discutam os principais pontos levantados por vocês e por eles.
- Vocês completaram as tarefas propostas nesses itens? Abandonaram alguma? Por quê?

As respostas dos estudantes ao último item apresentam evidências da competência socioemocional persistência.

3. Resposta pessoal. Explique aos estudantes que a tecnologia tem desempenhado papel crucial em busca da alta *performance* dos atletas, transformando radicalmente o cenário esportivo. Desde sensores integrados em equipamentos até análises avançadas de dados biométricos, as inovações tecnológicas fornecem informações mais precisas sobre o desempenho físico e técnico dos competidores. Essas ferramentas não apenas auxiliam no aprimoramento de treinamentos personalizados, mas também na prevenção de lesões e na otimização de estratégias durante competições, permitindo aos atletas alcançar novos patamares de excelência.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Esta seção tem como objetivo ajudar os estudantes a desenvolver habilidades de leitura e interpretação de atividades características de provas e exames de processos seletivos oficiais, além de ampliar seu repertório de estratégias para resolvê-las. Oriente a turma a, em um primeiro momento, ler a atividade proposta e tentar resolvê-la sem consultar a solução apresentada no Livro do Estudante. Depois, peça aos estudantes que comparem a estratégia que utilizaram com aquela que o livro sugere.

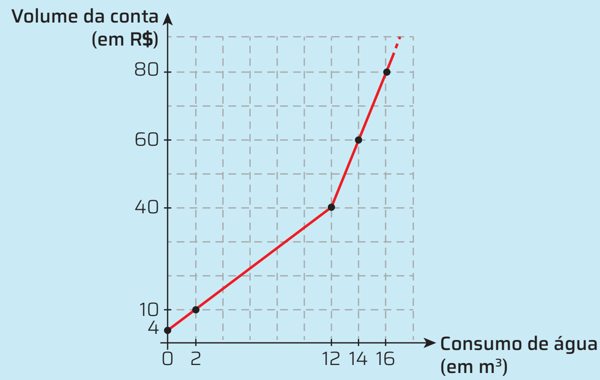
Esta seção, que você vai encontrar no final de cada unidade, tem o objetivo de destacar a importância da leitura e discutir algumas estratégias de resolução de questões mais complexas.

As funções, com seus gráficos e suas expressões algébricas, constituem uma parte importante da Matemática e possibilitam a resolução de diversas atividades e problemas. A seguir, vamos apresentar algumas questões de processos seletivos que envolvem funções. Escolhemos problemas que exigem uma maneira diferente de ler, ora com atenção voltada para a parte textual, ora com foco nos gráficos. E, para a resolução, apresentamos a seguir algumas orientações que podem auxiliar você na busca de respostas para questões típicas de processos seletivos:

- Leia a questão por completo e identifique o que se pede.
- Anote as informações necessárias para a resolução.
- Resolva a questão.

VESTIBULAR EM CONTEXTO

(Unesp) Em um município, a conta de água residencial é composta por um valor fixo de R$ 4,00 somado a um valor variável, de acordo com o consumo de água da residência. O valor variável é composto da seguinte forma: *M* reais por m³ de água até o consumo de 12 m³ e *N* reais por m³ de água que exceda 12 m³. O gráfico descreve a composição do valor da conta de água residencial nesse município.



Unesp. Fac-símile: ID/BR

A análise dessas informações permite concluir que os valores, em reais, de *M* e *N* são, respectivamente,

a) 2 e 10.
b) 3 e 9.
c) 3 e 8.
d) 2 e 8.
e) 3 e 10.

Resolução

Quais são os dados da questão?

Informações de como é composta a conta de água residencial em um município.

O que se quer saber?

Os valores, em reais, por metro cúbico de água até o consumo de 12 m³ (*M*) e por metro cúbico que exceda 12 m³ (*N*).

O que fazer?

Observar que o valor da conta é determinado por valores fixos e variáveis, dependendo da faixa de consumo de água.

Como resolver?

Considerando *V* o valor da conta de água, em reais, e *x* a quantidade de água consumida, em metros cúbicos, podemos escrever as funções a seguir e determinar, de acordo com as coordenadas dos pontos indicados no gráfico, valores numéricos de $V(x)$.

- Para consumo até 12 m^3, ou seja, para $0 \leq x \leq 12$, temos:

$$V_1(x) = M \cdot x + 4$$

Observando o conjunto imagem apresentado no enunciado, nesse intervalo, podemos identificar que o gráfico contém o ponto de coordenadas (2, 10). Então, segue que:

$$V_1(2) = M \cdot 2 + 4 \Rightarrow 10 = 2M + 4 \Rightarrow M = \frac{10 - 4}{2} = 3$$

- Para consumo maior que 12 m^3, ou seja, para $x > 12$, temos:

$$V_2(x) = N \cdot (x - 12) + 40$$

De acordo com o conjunto imagem, nesse intervalo, podemos identificar que o gráfico contém o ponto de coordenadas (14, 60). Então, segue que:

$$V_2(14) = N \cdot (14 - 12) + 40 \Rightarrow 60 = 2N + 40 \Rightarrow N = \frac{60 - 40}{2} = 10$$

Portanto, os valores de M e N são 3 e 10, respectivamente. Logo a alternativa **e** é a correta.

Explorando estratégias

Utilize o que aprendeu e resolva a questão a seguir, relacionada a funções afins. Como na atividade resolvida anteriormente, faça a leitura cuidadosa do enunciado e, se for preciso, elabore um plano de resolução.

1 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Para concretar a laje de sua residência, uma pessoa contratou uma construtora. Tal empresa informa que o preço y do concreto bombeado é composto de duas partes: uma fixa, chamada de taxa de bombeamento, e uma variável, que depende do volume x de concreto utilizado. Sabe-se que a taxa de bombeamento custa R$ 500,00 e que o metro cúbico do concreto bombeado é de R$ 250,00.

A expressão que representa o preço y em função do volume x, em metro cúbico, é Alternativa **d**.

a) $y = 250x$
b) $y = 500x$
c) $y = 750x$
d) $y = 250x + 500$
e) $y = 500x + 250$

As próximas questões que você vai resolver tratam de funções quadráticas, que, como você sabe, têm como gráfico uma parábola. Resolva-as e, depois, converse com os colegas e verifique se eles resolveram todas elas da mesma maneira.

2 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UERR) O faturamento do estado de Roraima com o turismo de aventura sofreu uma forte queda no período de pandemia, mas um estudo revelou que esse quadro pode ser revertido rapidamente. Segundo o modelo matemático usado no estudo, o crescimento esperado no faturamento com o turismo de aventura para o período de 2020 a 2040 pode ser estimado pela função $F(t)$ a seguir, com valores em milhões de reais.

$$F(t) = \frac{-6t^2 + 138t + 258}{5}$$

Nessa função, $t \in [0, 20]$, $t = 0$ representa o ano 2020, $t = 1$ representa o ano de 2021 e assim sucessivamente.

A partir do modelo matemático apresentado, o faturamento do estado de Roraima com o turismo de aventura será máximo Alternativa **c**.

a) no biênio 2027-2028.
b) no biênio 2029-2030.
c) no biênio 2031-2032.
d) no biênio 2033-2034.
e) no biênio 2034-2035.

3 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(UFJF-MG) Na produção de um determinado gênero alimentício, utiliza-se um processo de conservação que envolve o resfriamento intenso do alimento seguido de um aquecimento até que o mesmo volte à temperatura que tinha antes do início do resfriamento. O processo de conservação é descrito pela função $F(t) = t^2 - 13t + 22$, em que t é o tempo decorrido em minutos desde o início do processo de conservação e $F(t)$ é a temperatura do alimento em graus Celsius. Nesse processo de conservação, por quantos minutos o alimento é mantido sob temperatura não positiva? Alternativa **b**.

a) 2 minutos
b) 9 minutos
c) 11 minutos
d) 13 minutos
e) 22 minutos

4 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(UFPR) Considere a função $f(x) = -x^2 + 6x - 8$. No plano cartesiano, sejam P e Q as intersecções do gráfico de f com o eixo x. Sendo $R = (a, b)$ um ponto do gráfico de f, com $b > 0$, assinale a alternativa que corresponde ao maior valor numérico possível da área do triângulo PQR. Alternativa **a**.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

GRANDEZAS EM GERAL E ÁREAS

As grandezas e suas medidas estão sempre presentes no cotidiano. Observe quantas medidas estão envolvidas no preparo de um bolo: tantos gramas de certo ingrediente, tantos mililitros de outro, temperatura do forno, tempo para assar o bolo...

Nesta unidade, você vai ampliar o estudo sobre grandezas, diferenciá-las de suas medidas, estudar o que são grandezas de base e grandezas derivadas e aprender como realizar conversões entre unidades de medida. Além disso, vai utilizar conhecimentos sobre ângulos e suas medidas para analisar ladrilhamentos do plano. A grandeza área será retomada, assim como o estudo de áreas de algumas figuras planas.

OBJETIVOS

- Diferenciar grandezas de suas medidas.
- Conhecer e utilizar unidades de medida do Sistema Internacional e de informática.
- Calcular áreas de figuras planas.
- Resolver e elaborar problemas que envolvam áreas.

Neste momento, pode-se questionar os estudantes se as receitas da família deles apresentam unidades de medida diferentes daquelas convencionais que são usadas na Matemática. Depois, pergunte: "Como essas receitas tiveram origem?"; "Que conhecimento é esse passado de geração em geração sem a necessidade da matemática escolar?".

Mãe e pai preparando um bolo com a filha. ▶

UNIDADE 2

6 Grandezas e medidas

7 Áreas de figuras planas

Jacob Wackerhausen/iStock/Getty Images

CAPÍTULO 6

Os conceitos e atividades deste capítulo têm como objetivo incentivar os estudantes a interpretar textos e resolver problemas utilizando medidas do SI, em notação científica e grandezas derivadas, desenvolvendo, assim, as habilidades **EM13MAT103**, **EM13MAT313** e **EM13MAT314**.

GRANDEZAS E MEDIDAS

NESTE CAPÍTULO

- Grandezas e suas medidas
- Grandezas de base e grandezas derivadas
- Unidades de informática
- Notação científica
- Algarismos significativos e algarismos incertos no valor de medições

@mickart_/ID/BR

Você observou algo em comum nessas perguntas?

Os números estão presentes de alguma maneira, seja na pergunta, seja na resposta que se espera ou no raciocínio utilizado para responder a cada uma delas; porém, não são apenas os números que estão presentes em todas elas.

O que há em comum entre temperatura, altura, área de uma superfície e capacidade de uma lata?

Podemos juntar tempo, volume, massa, velocidade e densidade a essa lista e perguntar novamente: O que há em comum entre os itens dessa lista? O que os caracteriza?

Neste capítulo, vamos estudar os conceitos presentes nas situações indicadas anteriormente, considerando-os grandezas, e, depois, estudar suas medidas. Para isso, é preciso organizar esse conhecimento que, sem dúvida, você já tem e utiliza há muito tempo.

GRANDEZAS

Incentive a leitura individual deste tópico para posterior conversa em pequenos grupos. Depois, organize uma roda para que todos da turma possam trocar ideias, conhecimentos e novas aprendizagens, além de esclarecer dúvidas.

Grandeza é a característica de um corpo, fenômeno ou substância que pode ser reconhecida por suas qualidades e determinada numericamente. Em outras palavras, grandeza é tudo que pode ser medido e que tenha atributos baseados em dados numéricos ou geométricos. Assim, o comprimento de um objeto ou de um local, a velocidade de um veículo e a capacidade de um recipiente são alguns exemplos de grandezas, mas a cor de uma roupa ou a intensidade de um sentimento não são grandezas, de acordo com a definição estabelecida.

As grandezas, da maneira como foram definidas, também podem ser chamadas de **grandezas físicas** ou **grandezas mensuráveis**.

Grandezas e suas medidas

É importante distinguir uma grandeza de sua medida. A medida é o número que resulta da comparação do atributo a ser medido de um objeto, fenômeno ou substância com a unidade de medida considerada.

Por sua vez, a unidade de medida de uma dada grandeza é também uma grandeza, do mesmo tipo daquela que se quer medir, sendo definida e adotada por convenção (quando se trata de uma unidade de medida padronizada). A medição é feita ao compararmos a unidade de medida com o que se quer medir, o que permite expressar, por um valor numérico, o resultado dessa comparação.

Por exemplo, para medir o comprimento de um caderno, escolhemos como unidade de medida um comprimento de tamanho determinado (nesse caso, pode ser o centímetro) e usamos um instrumento que registre essa unidade de medida (pode ser uma régua) para compará-la com o comprimento do caderno, chegando ao número de vezes que essa unidade cabe no que estamos medindo.

@mickart_/ID/BR

Sistemas de medida

Desde a antiguidade, o ser humano percebeu a necessidade de medir as coisas. Antigamente, esse processo era realizado com o que se tinha disponível: comprimentos de campos eram medidos com o uso de cordas, e volumes eram medidos com recipientes como canecas.

Com o tempo, notamos que, além de medir as coisas, era necessário ter certa padronização nas medições. Assim, as primeiras unidades de medida que surgiram eram feitas com base em partes do corpo humano. A largura de um dedo humano era chamada de dígito; a distância entre o polegar e o dedo mínimo, com a mão esticada, era chamada de palmo; o comprimento do braço, desde o cotovelo até a ponta do dedo médio, era chamado de côvado. Como essas unidades de medida variavam de uma pessoa para outra, foi necessário criar um sistema no qual, independentemente de quem o estivesse usando, as medidas fossem sempre as mesmas.

Na Inglaterra, o rei Henrique I, que governou de 1100 a 1135 d.C., decretou que uma jarda corresponderia à distância da ponta de seu nariz à ponta de seu polegar com o braço estendido. Com isso, podemos notar que a unidade de medida dependia de decisões muito arbitrárias. Atualmente, a jarda é usada nas medições das marcações dos campos de futebol americano, por exemplo. Os Estados Unidos adotaram a jarda como unidade básica de comprimento, mas a atual jarda americana, que corresponde a 0,914 m, não tem a mesma medida da jarda inglesa, que foi uma medida decretada pelo livre arbítrio de um rei.

O trabalho com os tópicos "Sistemas de medida", "O sistema métrico decimal" e "Sistema Internacional de Unidades" contribui para o desenvolvimento da competência geral **1** e da habilidade **EM13MAT103**, uma vez que os estudantes utilizam conhecimentos historicamente construídos a fim de compreender a realidade, além de interpretar e entender o uso de unidades de medida de diferentes grandezas, como armazenamento de dados e distâncias microscópicas e astronômicas.

PARA EXPLORAR

Texto

INSTITUTO NACIONAL DE METROLOGIA, QUALIDADE E TECNOLOGIA (Inmetro). Introdução. Inmetro, 5 ago. 2024. Disponível em: https://www.gov.br/inmetro/pt-br/assuntos/metrologia-cientifica/laboratorios/introducao. Acesso em: 2 ago. 2024.

Os laboratórios de Metrologia Científica e Industrial, que compõem a Diretoria de Metrologia Científica do Inmetro, fazem calibrações e ensaios para melhorar a confiabilidade das medições. Conheça as nove áreas temáticas desses laboratórios e as principais atividades desenvolvidas nessas áreas, como a padronização das unidades do SI.

O sistema métrico decimal

Na transição entre os séculos XVIII e XIX, formou-se uma comissão composta de matemáticos, físicos, geômetras e cientistas para a elaboração de um sistema geral e uniforme de unidades. Essa comissão apresentou à Assembleia Nacional, na França, o metro-padrão: uma barra de platina que oficializou o chamado "sistema métrico decimal".

O mesmo grupo definiu, na época, outras unidades de medida: o quilograma para medir massas, o segundo para medir o tempo, o are para medir áreas e o litro para medir volumes.

Sistema Internacional de Unidades

Com a evolução do sistema métrico decimal ao longo do tempo, foram adotados novos protótipos internacionais para as medidas-padrão do quilograma e do metro. Entre 1954 e 1971, a Conferência Geral de Pesos e Medidas decidiu que o sistema deveria se chamar Sistema Internacional de Unidades (SI) e abranger outros tipos de grandeza física, considerando-se fundamentais as unidades de comprimento, massa, tempo, corrente elétrica, temperatura termodinâmica, intensidade luminosa e quantidade de matéria.

Observe o quadro que mostra as grandezas e as unidades definidas pelo SI.

Grandeza	Unidade de medida	Símbolo da unidade
comprimento	metro	m
tempo	segundo	s
massa	quilograma	kg
temperatura termodinâmica	kelvin	K
corrente elétrica	ampere	A
quantidade de substância	mol	mol
intensidade luminosa	candela	cd

Na tradução luso-brasileira de 2021 do SI, adota-se a grafia com "k" para o prefixo "kilo". Entretanto, o prefixo aplicado nesta coleção é "quilo".

Além disso, foi adotado um conjunto de nomes e respectivos símbolos para designar os prefixos indicativos de múltiplos e submúltiplos decimais das unidades do SI. Usamos alguns desses prefixos com bastante frequência, como o *quilo-* (k), o *centi-* (c) e o *mili-* (m).

A adoção do SI não impede a utilização de outras unidades de medida. É comum, por exemplo, usarmos o minuto para medir o tempo ou o litro para medir volumes.

Existem também outras unidades de medida de comprimento, como a milha, o pé e a jarda, que compõem o chamado sistema imperial e são adotadas em apenas três países: Estados Unidos, Libéria e Myanmar (Birmânia).

Neste momento, pode-se questionar os estudantes sobre unidades de medida adotadas nas feiras, no artesanato e no comércio e que são diferentes das unidades convencionais, como as que eles estão estudando na escola.

Observe a seguir conversões de unidades de medida do sistema métrico para unidades de medida do sistema imperial, considerando grandezas variadas.

- 1 grão corresponde a aproximadamente 0,0648 grama.
- 1 onça fluída corresponde a 29,5735 mililitros.
- 1 polegada corresponde a aproximadamente 2,54 centímetros.
- 1 pé corresponde a aproximadamente 30,48 centímetros.
- 1 jarda corresponde a aproximadamente 91,44 centímetros.
- 1 milha corresponde a aproximadamente 1,609 quilômetro.

Grandezas de base e grandezas derivadas

Chamamos de **grandezas de base** aquelas definidas por apenas uma característica física, ou seja, aquelas que independem de outras.

Como vimos, as grandezas de base são definidas por um padrão estabelecido e por unidades de base do SI. As sete grandezas de base definidas pelo SI são: comprimento, tempo, massa, temperatura termodinâmica, corrente elétrica, quantidade de substância e intensidade luminosa.

São chamadas de **grandezas derivadas** aquelas resultantes de combinações das grandezas de base, segundo relações algébricas, de produto e/ou quociente. Elas podem, ainda, ser obtidas da combinação de outras grandezas derivadas previamente definidas.

Exemplo 1

A grandeza derivada velocidade é obtida do quociente entre as grandezas comprimento e tempo.
Por exemplo, a velocidade da luz no vácuo é 299 792 458 m/s (lemos m/s como metro por segundo).

Exemplo 2

A grandeza derivada densidade de uma substância ou de um corpo é obtida do quociente entre as grandezas massa e volume.
Por exemplo, a densidade do álcool etílico é 0,789 g/cm^3 (lemos g/cm^3 como grama por centímetro cúbico).

Exemplo 3

A grandeza energia elétrica é obtida do produto das grandezas potência elétrica (grandeza derivada) e tempo (grandeza de base).
Por exemplo, o consumo de energia elétrica de um chuveiro de 4 500 W de potência utilizado por uma hora e meia é 6,75 kWh (lemos kWh como quilowatt-hora).

Exemplo 4

A grandeza área é obtida do produto de uma grandeza comprimento por outra grandeza comprimento.
Por exemplo, a medida da área de um quarto é 18 m^2 (lemos m^2 como metro quadrado).

A leitura e a análise da seção *Problemas e exercícios resolvidos* permitem que os estudantes valorizem as atividades propostas como um momento especial de aprendizagem. Para isso, você pode ler com eles a atividade **R1** e, depois, solicitar que identifiquem quais atividades da seção *Problemas e exercícios propostos* se assemelham a essa atividade resolvida.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **Sabendo que 1 onça equivale a aproximadamente 30 gramas e que 1 milha equivale a aproximadamente 1,6 quilômetro, faça as conversões a seguir.**

a) 3 quilômetros quadrados em metro quadrado.

b) 20 onças em quilograma.

c) 2 milhas em decâmetro.

Resolução

a) Como 1 quilômetro quadrado equivale a 1 000 000 metros quadrados, 3 quilômetros quadrados equivalem a 3 000 000 metros quadrados.

b) Como 1 onça equivale a aproximadamente 30 gramas, 20 onças equivalem a aproximadamente 600 gramas ($20 \cdot 30 = 600$). Como 1 000 gramas equivalem a 1 quilograma, 600 gramas equivalem a 0,6 quilograma ($600 : 1000 = 0,6$). Logo, 20 onças equivalem a aproximadamente 0,6 quilograma.

c) Como 1 milha equivale a aproximadamente 1,6 quilômetro, 2 milhas equivalem a aproximadamente 3,2 quilômetros ($2 \cdot 1,6 = 3,2$). Como 1 quilômetro equivale a 100 decâmetro, então 3,2 quilômetros equivalem a aproximadamente 320 decâmetro ($3,2 \cdot 100 = 320$).

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

A atividade **4** contribui para o desenvolvimento da competência geral **9**. Momentos como esse possibilitam aos estudantes exercitar a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.

1 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) A London Eye é uma enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro, em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.

stocksre/Shutterstock.com/ID/BR

Disponível em: www.mapadelondres.org. Acesso em: 14 maio 2015 (adaptado).

Não habituado com a unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas, e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista ficou surpreendido com o resultado obtido em metros. Qual a medida que mais se aproxima do diâmetro da Roda do Milênio, em metros? Alternativa **d**.

a) 53
b) 94
c) 113
d) 135
e) 145

2 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Em 2010, um caos aéreo afetou o continente europeu, devido à quantidade de fumaça expelida por um vulcão na Islândia, o que levou ao cancelamento de inúmeros voos. Cinco dias após o início desse caos, todo o espaço aéreo europeu acima de 6 000 metros estava liberado, com exceção do espaço aéreo da Finlândia. Lá, apenas voos internacionais acima de 31 mil pés estavam liberados.

Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 21 abr. 2010 (adaptado).

Considere que 1 metro equivale a aproximadamente 3,3 pés. Qual a diferença, em pés, entre as altitudes liberadas na Finlândia e no restante do continente europeu cinco dias após o início do caos? Alternativa **c**.

a) 3 390 pés.
b) 9 390 pés.
c) 11 200 pés.
d) 19 800 pés.
e) 50 800 pés.

3 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Fatec-SP) João, preocupado com nosso planeta, irá instalar placas solares em sua residência. Alternativa **b**.

Para atender ao consumo de energia de sua casa, serão necessários 2 120 W de potência por dia. Após estudar o problema, adquiriu módulos solares fotovoltaicos com forma retangular e as seguintes características:

- potência diária gerada por módulo: 265 W; e
- dimensão de cada módulo: 1,65 m por 1,00 m, com espessura desprezível.

Os módulos serão instalados no telhado, um ao lado do outro, sem sobreposição.

Assinale a alternativa que apresenta a área total mínima, em m^2, que será ocupada pelos módulos que João deverá instalar para atender suas necessidades.

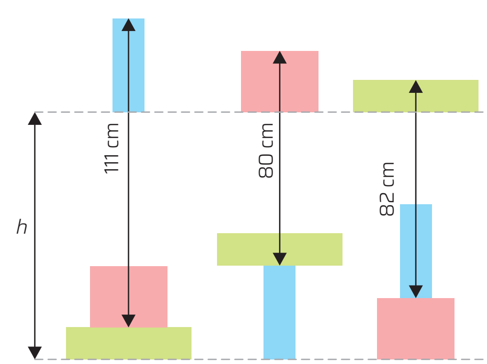
Despreze quaisquer formas de perda de energia.

a) 12,5
b) 13,2
c) 14,6
d) 15,3
e) 16,4

4 **Pesquise a relação entre metro e hectômetro e crie um problema que envolva essas unidades de medida e cuja resposta seja dada em centímetro. Depois, troque o problema com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro.** Resposta pessoal.

5 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Obmep) Na figura, os lados dos retângulos são horizontais ou verticais, e os retângulos de mesma cor são idênticos. Qual é o valor de *h*? Alternativa **d**.



Obmep. Fac-símile: ID/BR

a) 88 cm
b) 89 cm
c) 90 cm
d) 91 cm
e) 92 cm

6 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Um marceneiro recebeu a encomenda de uma passarela de 14,935 m sobre um pequeno lago, conforme a Figura **I**. A obra será executada com tábuas

Ao realizar a atividade **7**, os estudantes desenvolvem a habilidade **EM13MAT103**, a competência específica **2** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e a competência geral **2**. Além de compreender o emprego de unidades de medida astronômicas, eles vão usar interpretações sobre a dinâmica do cosmos, exercitar a curiosidade intelectual e refletir sobre possíveis soluções para os problemas propostos.

de 10 cm de largura, que já estão com o comprimento necessário para instalação, deixando-se um espaçamento de 15 mm entre tábuas consecutivas, de acordo com a planta do projeto na Figura **II**.

Elias Kelly/Shutterstock.com/ID/BR

Figura I

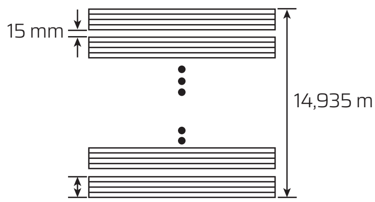


Figura II

Enem. Fac-símile: ID/BR

Desconsiderando-se eventuais perdas com cortes durante a execução do projeto, quantas tábuas, no mínimo, o marceneiro necessitará para a execução da encomenda? Alternativa **c**.

a) 60
b) 100
c) 130
d) 150
e) 598

7 **Leia o texto e, depois, responda às questões.**

O que são exoplanetas?

Exoplanetas, ou planetas extrassolares, são planetas que orbitam uma estrela que não seja o Sol, pertencendo a um outro sistema planetário. Apenas na nossa galáxia existem milhares de outras estrelas, que abrigam os exoplanetas.

Ao longo de toda a história, a humanidade descobriu apenas nove planetas, sendo que um deles, Plutão, foi rebaixado. Todos nossos vizinhos no Sistema Solar. Mas, em 1992, dois cientistas [encontraram] o primeiro planeta orbitando outra estrela, e, desde então, mais de 3 mil foram descobertos.

De acordo com a agência espacial americana, existem atualmente 3 564 exoplanetas confirmados, além de 4 496 candidatos à espera de confirmação. Eles estão espalhados por 2 656 sistemas estelares.

Os cálculos indicam que cada estrela possui ao menos um planeta, mas existem alguns sistemas já confirmados com planetas que orbitam duas, três ou até quatro estrelas.

E conhecer outros sistemas estelares permite que os cientistas compreendam a dinâmica do [...] próprio Sistema Solar. Mas o ponto mais comentado sobre os exoplanetas é a possibilidade de encontrar outro planeta como a Terra, capaz de abrigar vida.

Dos mais de 3 mil exoplanetas conhecidos, dois se destacam pela proximidade e semelhança com a Terra.

Em agosto [...] [de 2016], astrônomos dos Observatórios Europeus do Sul anunciaram a descoberta de Proxima b, na órbita de Proxima Centauri, a menor estrela de um sistema triplo conhecido como Alpha Centauri, a apenas quatro anos-luz de distância da Terra.

Em novembro [...][de 2017] foi anunciada a descoberta de Ross 128b, um exoplaneta com massa 1,3 vezes a da Terra. O que mais chamou a atenção dos pesquisadores é que Ross 128 b, a 11 anos-luz da Terra, possui temperaturas variando entre −60 graus Celsius e 20 graus Celsius, ideal para abrigar a vida como a conhecemos.

[...]

O QUE são exoplanetas? *O Globo*, 23 dez. 2021. Disponível em: https://oglobo.globo.com/sociedade/ciencia/o-que-sao-exoplanetas-22191793. Acesso em: 27 jun. 2024.

Se possível, use esta atividade para propor um trabalho interdisciplinar com um professor de Ciências da Natureza.

a) Sabendo que um ano-luz é a distância percorrida pela luz em um ano, o que equivale a aproximadamente 9,5 trilhões de quilômetros, qual é a distância, em quilômetro, da Terra até o exoplaneta Ross 128b? $104{,}5 \cdot 10^{12}$ km

b) Sabendo que a massa da Terra é aproximadamente $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, qual é a massa, em quilograma, do exoplaneta Ross 128b? $7{,}761 \cdot 10^{14}$ kg

8 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Eear-FAB) O consumo de combustível por um veículo pode ser determinado pela razão entre a distância percorrida e o volume de combustível consumido. Um veículo X apresenta um consumo de 20 km/L, quando abastecido exclusivamente com gasolina, e de 18 km/L, quando abastecido exclusivamente com etanol. Estes valores de consumo foram obtidos considerando uma pista retilínea e uma velocidade constante de módulo igual a 80 km/h. Nestas condições, o veículo X foi inicialmente abastecido exclusivamente com 20 L de gasolina e se movimentou na pista até esgotar totalmente o tanque e, em seguida, abastecido exclusivamente com 20 L de etanol e novamente se deslocou até esgotar totalmente o tanque de combustível. Quando abastecido exclusivamente com os 20 L de gasolina, o veículo se movimenta quanto tempo, em min, a mais do que em relação ao abastecimento exclusivamente com 20 L de etanol? Alternativa **c**.

a) 5
b) 25
c) 30
d) 50

9 **Elabore um problema que envolva grandezas de base e um problema que envolva grandezas derivadas. Os problemas podem envolver uma ou mais grandezas, e a resolução de um deles deve demandar a conversão de unidades de medida. Depois, troque os problemas que você elaborou com os de um colega para que um resolva os do outro.** Resposta pessoal.

Ao realizar as atividades **8** e **9**, os estudantes desenvolvem a habilidade **EM13MAT314**, pois devem elaborar um problema que envolva grandezas derivadas, como velocidade, e a competência geral **9**. Momentos como esse possibilitam aos estudantes exercitar a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.

Unidades de informática

A tecnologia digital é algo muito presente em nosso dia a dia. Por meio dela, podemos nos comunicar com pessoas em tempo real, independentemente da distância, ter acesso a informações das mais variadas fontes e criar documentos, entre tantas outras possibilidades. Para que tudo isso seja possível, os dispositivos eletrônicos precisam ter certa capacidade de armazenamento, além de conseguir enviar e receber informações.

Os computadores trabalham com código binário, que é um sistema de codificação no qual todos os dados são representados por zeros e/ou uns. Esse código é a linguagem que o computador utiliza para representar desde as informações mais simples até as mais complexas.

Cada valor do código binário foi denominado *bit* (*binary digit*, em inglês), que é a menor unidade de informática. Um *bit* é representado assim: 1 b. Cada conjunto de 8 *bits* forma 1 *byte* (1 B), que corresponde a um caractere (letra, número, espaço ou símbolo). Por exemplo, este texto, na linguagem do computador, é formado por diversas sequências de zeros e uns, agrupadas de oito em oito.

Da mesma forma que, para medir massas, temos unidades como o quilograma, que corresponde a um múltiplo do grama, também temos unidades de medida de informática para representar múltiplos do *bit* e do *byte*. Porém, a estrutura das unidades de informática está escrita na base 2, e não na base 10, que estamos acostumados a usar. Isso acontece porque um *bit* só pode assumir dois valores (0 ou 1), enquanto no sistema decimal os algarismos podem assumir 10 valores (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9). Isso significa que os prefixos com que representamos os múltiplos do *bit* e do *byte* são potências de base 2, e não de base 10.

Segundo o Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro), os prefixos do SI representam exclusivamente potências de base 10 e não devem ser utilizados para expressar potências de base 2. Assim, na teoria, 1 kB representa 1 000 *bits*, e não 1 024 *bits*. A International Electrotechnical Comission (IEC), ou Comissão Eletrotécnica Internacional, adotou prefixos correspondentes às potências binárias. Os prefixos e símbolos relativos a 2^{10}, 2^{20}, 2^{30}, 2^{40}, 2^{50} e 2^{60} são, respectivamente: *kibi* (Ki), *mebi* (Mi), *gibi* (Gi), *tebi* (Ti), *pebi* (Pi) e *exbi* (Ei). Então, por exemplo, um *kibibyte* se escreve: $1\ KiB = 2^{10}\ B = 1\,024\ B$, em que 1 B designa um *byte*. Apesar de, no padrão IEC, os prefixos conterem uma letra "i" em sua grafia, para diferenciar as unidades de base 2 das unidades de base 10, eles raramente são usados.

Ainda sobre os prefixos propostos pela IEC, leia o texto a seguir.

Leszek Glasner/Shutterstock.com/ID/BR

Os computadores interpretam apenas códigos binários. Nesse sistema, toda informação é representada por 0 e 1.

É possível que os estudantes confundam 1 *bit* (1 b) com 1 *byte* (1 B). Comente que, no caso de unidades de medida, o fato de a letra ser minúscula ou maiúscula faz muita diferença, pois trata-se de unidades diferentes. Se necessário, reforce com eles a relação 8 b = 1 B (8 *bits* formam 1 *byte*). Enfatize também que o *bit* pode ter somente dois valores (zero ou um) e que 1 *byte* é a sequência de 8 *bits*.

Sobre *bits* e *bytes*: prefixos para múltiplos binários

Quando um kilobyte é um kibibyte? E um MB em vez de um MiB?

Você já se perguntou por que seu disco rígido de 500 GB tem apenas 488 *gigabytes* depois de formatado? Enquanto a maioria dos sistemas operacionais utiliza o sistema de números binários para expressar o tamanho dos dados do arquivo, os prefixos para os múltiplos são baseados no sistema métrico. Portanto, mesmo que um "kilo" métrico seja igual a 1 000, um "kilo" binário é igual a 1 024. Você já está confuso? Não se surpreenda, porque mesmo as pessoas mais experientes em tecnologia confundem as duas. Em outras palavras, o *kilobyte* costuma ser de 1 000 *bytes*, mas, na verdade, é de 1 024 *bytes*.

Essencialmente, tudo se resume a diferenças entre unidades binárias e decimais, e ambas devem ser cuidadosamente separadas. Por exemplo, a diferença entre o tempo de transferência de um arquivo de um *gigabyte* (1 000 *megabytes*) será significativamente melhor que o de um *gigabyte* binário verdadeiro (conhecido como *gibibyte*), que contém 1 024 *megabytes*. Quanto maior o arquivo usado na transferência de dados, maior será a diferença.

Bits e *bytes*

Anos atrás, em um momento em que as capacidades do computador quase não correspondiam às poucas dezenas de *kilobytes* exigidas por essa "página" da *web*, os engenheiros de computadores notaram que o binário 2^{10} (1 024) era quase igual ao decimal 10^3(1 000) e, por uma questão de conveniência, eles começaram a se referir a 1 024 *bytes* como um *kilobyte*. Afinal, era apenas uma diferença de 2,4%, e todos os profissionais geralmente sabiam do que estavam falando entre si.

Apesar da imprecisão e do uso inadequado do prefixo decimal do SI "kilo", o termo também foi usado com facilidade por vendedores e nas lojas, e atraiu o público.

Com o passar do tempo, os *kilobytes* evoluíram para *megabytes*, depois *gigabytes* e, agora, *terabytes*. O problema é que, na escala tera do SI (10^{12}), a discrepância com o equivalente binário (2^{40}) não é de 2,4% na escala quilo, mas aproxima-se de 10%. Em escala reduzida (10^{18} e 2^{60}), é mais próximo de 20%. É apenas a matemática que determina que, quanto maior o número de *bytes*, maior a diferença, de modo que as imprecisões – tanto para engenheiros quanto para a equipe de *marketing* e para o público – devem aumentar cada vez mais.

Fonte de pesquisa: Sobre *bits* e *bytes*: prefixos para múltiplos binários. Comissão Eletrotécnica Internacional, [20--]. Disponível em: https://www.iec.ch/prefixes-binary-multiples. Acesso em: 28 jun. 2024. Tradução nossa. Título original: About bits and bytes: prefixes for binary multiples.

Além de influenciar o tamanho dos arquivos que utilizamos, os *bits* e os *bytes* também influenciam a velocidade da transferência de dados. A velocidade de transferência geralmente é medida pela quantidade de *megabits* por segundo (Mbps ou Mb/s) enviada de um ponto a outro, seja pela internet, seja quando copiamos algum arquivo de um dispositivo para outro, usando, por exemplo, um *pen drive*.

Quando fazemos um teste de velocidade da internet, em geral obtemos como resultado o tempo de latência, a velocidade de *download* e a velocidade de *upload*. Mas o que significam esses dados?

O tempo de latência é o tempo de reação da conexão, ou seja, o intervalo decorrido até que recebamos uma resposta depois de solicitar uma ação. A latência costuma ser medida em milissegundo.

A velocidade de *download* é a velocidade com que os servidores enviam dados para o usuário. Quando abrimos uma página na internet ou recebemos um *e-mail* ou um vídeo, estamos recebendo dados. Comumente, as conexões são projetadas para ter uma velocidade de *download* maior que de *upload*, pois a maioria das atividades *on-line* é composta de *downloads*.

A velocidade de *upload* é aquela com que o dispositivo envia dados para o servidor, seja para destiná-los a outras pessoas, seja para alimentar um *site*. Quando enviamos *e-mails* ou anexamos um arquivo, estamos enviando dados.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R2 Realize as conversões indicadas.

a) de 1 GB para b;
b) de 1 Mb para B;
c) de 500 MB para GB.

As atividades desta seção e as da seção *Problemas e exercícios propostos* utilizam os prefixos do SI, em vez de usar os prefixos definidos pela IEC, porque, no cotidiano, essa é a prática comum. Os cálculos, porém, devem ser feitos supondo que os prefixos usados tenham sido os definidos pela IEC, ou seja, considerando a base binária, e não a decimal.

Resolução

a) Sabemos que 1 GB equivale a 2^{30} B e que 1 B equivale a 8 b, ou seja, a 2^3 b. Assim, temos:

$$2^{30} \cdot 2^3 = 2^{33}$$

Então, 1 GB equivale a 2^{33} b.

b) Sabemos que 1 Mb equivale a 2^{20} b. Como 1 B equivale a 8 b, para transformar 2^{20} b em B, basta dividir 2^{20} por 8, ou seja, por 2^3. Assim, 2^{20} b equivale a 2^{17} B.

c) Sabemos que 1 GB equivale a 2^{10} MB. Pela regra de três, temos:

$$1\text{ GB} \text{ ——— } 2^{10}\text{ MB}$$

$$x\text{ GB} \text{ ——— } 500\text{ MB}$$

$$2^{10} \cdot x = 500 \cdot 1$$

$$x = \frac{500}{2^{10}}$$

$$x = 0{,}48828125$$

Logo, 500 MB equivalem a 0,48828125 GB.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

A atividade **10** possibilita aos estudantes desenvolver as habilidades **EM13MAT103** e **EM13MAT314**, ao interpretar e compreender o uso de unidades de medida de armazenamento de dados, além de resolver problemas que envolvem grandezas como velocidade. Se julgar oportuno, peça a eles que façam uma pesquisa mais detalhada sobre como funciona o processo descoberto pelos pesquisadores e como isso pode aperfeiçoar processos produtivos. Dessa maneira, os estudantes trabalham a competência específica **1** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

10 Leia o texto a seguir.

Pesquisadores atingem 44.2 Tbps através de cabo de fibra óptica padrão

Dispositivo chamado microcomb *substituiu os* lasers *tradicionais nos equipamentos*

Pesquisadores das universidades australianas de Monash, Swinburne e RMIT conseguiram atingir uma **taxa de transferência na incrível velocidade de 44,2 Tbps** através das fibras ópticas já existentes. Esse aproveitamento da infraestrutura de dados atual fornece velocidades superiores a **1 milhão de vezes a velocidade média da internet dos usuários domésticos**.

Para comparação, a média para usuários dos Estados Unidos é de 50,2 Mbps (*megabits* por segundo), enquanto no Brasil essa velocidade é de 24,77 Mbps. A descoberta abre caminho para **atualizações na rede de fibra óptica existente**, o que deve reduzir os custos caso fosse necessário implementar uma infraestrutura totalmente nova.

A pesquisa utilizou um dispositivo óptico chamado de ***microcomb*** (micropente de frequência) para substituir os 80 *lasers* dos equipamentos de telecomunicações atuais usados na internet de fibra. O *microcomb* é um dispositivo óptico que gera linhas de frequência muito nítidas em um minúsculo *chip* e permite que os pesquisadores utilizem não apenas a presença de luz (como é feito com os *lasers* tradicionais encontrados em equipamentos ópticos) mas a falta da luz também.

O aproveitamento da ausência de luz usado pelos *microcombs* é chamado de **pulsos "escuros" de luz**. Embora hoje em dia nenhum usuário precise de velocidades de transmissão da ordem dos 44,2 Tbps alcançados pelos pesquisadores, o avanço no processamento, nas tecnologias de comunicação e na supercomputação deverá utilizar essa nova velocidade futuramente.

CANCELIER, Mariela. Pesquisadores atingem 44.2 Tbps através de cabo de fibra óptica padrão. *Mundo Conectado*, 25 maio 2020. Disponível em: https://mundoconectado.com.br/noticias/v/13779/pesquisadores-atingem-442-tbps-atraves-de-cabo-de-fibra-optica-padrao. Acesso em: 1º jul. 2024.

a) Qual é a diferença entre a velocidade de transmissão de dados alcançada pelos pesquisadores e a média da velocidade da internet no Brasil? 44 199 975,23 Mbps.

b) E a diferença entre a velocidade de transmissão alcançada pelos pesquisadores e a média de velocidade da internet nos Estados Unidos? 44 199 949,8 Mbps.

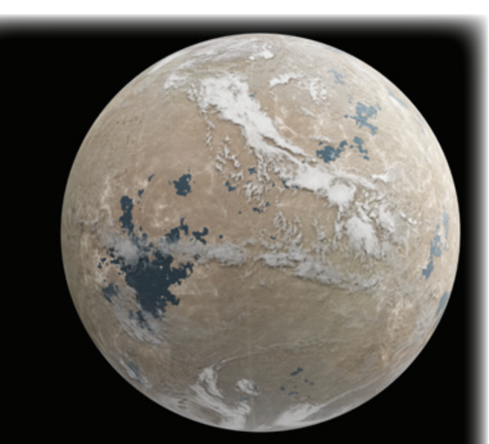
11 **Indique a alternativa correta no caderno.** Alternativa **c**.

(Ufam) Um estudante tem, em sua residência, internet com velocidade de 20 MB/s. Ele precisa fazer o *download* de uma coletânea de exercícios, cujo arquivo zipado tem 1,5 GB. Considerando que 1 GB = 1024 MB, podemos afirmar que o intervalo de tempo necessário para que o arquivo zipado seja completamente baixado, caso a velocidade da internet se mantenha constante, será de:

a) 65,0 s
b) 75,0 s
c) 76,8 s
d) 80,8 s
e) 90,8 s

NOTAÇÃO CIENTÍFICA

O trabalho com os tópicos "Notação científica", "Ordem de grandeza", "Algarismos significativos" e "Incertezas" possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT313**, pois os estudantes vão resolver problemas que envolvem medições nos quais é necessário verificar o uso de algarismos significativos e duvidosos, além de usar a notação científica, se necessário.


Representação de Proxima Centauri b. Cores-fantasia.

NASA/Visualization Technology Applications and Development

Leia as informações a seguir.

- Existem mais de 10 000 000 000 000 000 000 000 de estrelas visíveis no Universo.
- O exoplaneta mais próximo da Terra, conhecido como Proxima Centauri b, está a aproximadamente 40 000 000 000 000 quilômetros da Terra, na constelação de Centaurus.
- O tamanho de um vírus pode variar de 0,00000002 a 0,0000003 metro.

Você conseguiu ler com facilidade essas informações? Agora, leia as mesmas informações, mas com os números expressos de outra maneira.

- Existem mais de 10 sextilhões de estrelas visíveis no Universo.
- O exoplaneta mais próximo da Terra, conhecido como Proxima Centauri b, está a aproximadamente 40 trilhões de quilômetros da Terra, na constelação de Centaurus.
- O tamanho de um vírus pode variar de 20 a 300 nanômetros.

Ficou mais fácil de ler?

Não escreva no livro.

De modo geral, números escritos com muitos zeros dificultam a comunicação da ordem de grandeza que expressam e, muitas vezes, não podem sequer ser lidos, como é o caso da massa de um elétron, que é de aproximadamente 0,000000000000000000000000000911 grama.

Nas *Orientações específicas*, encontra-se o jogo Scino como sugestão para o trabalho com a notação científica.

Uma possível maneira de facilitar o registro de números com muitos algarismos ou muitas casas decimais é utilizar a **notação científica**.

Um número racional decimal está escrito em notação científica se for apresentado no formato $x \cdot 10^n$, com $1 \leqslant x < 10$ e n sendo um número inteiro.

Analise como seria a representação das informações anteriores e da massa de um elétron em notação científica.

- Número de estrelas visíveis no Universo: mais de $1 \cdot 10^{22}$.
- Distância entre a Proxima Centauri b e a Terra: aproximadamente $4 \cdot 10^{13}$ quilômetros.
- Tamanho de um vírus: de $2 \cdot 10^{-8}$ a $3 \cdot 10^{-7}$ metros.
- Massa de um elétron: $9{,}11 \cdot 10^{-28}$ gramas.

Ordem de grandeza

Nem sempre o valor exato de uma medida é relevante e, nesses casos, é comum nos referirmos à potência de 10 mais próxima do número exato. Esse valor aproximado é chamado de **ordem de grandeza**.

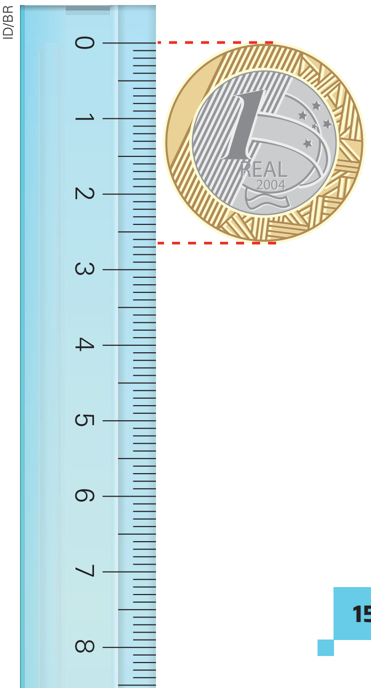
Para determinar a ordem de grandeza de um número, devemos escrevê-lo em notação científica, ou seja, na forma $x \cdot 10^n$, e comparar x com 5,5:

- se $x \geqslant 5{,}5$, a ordem de grandeza do número é 10^{n+1};
- se $x < 5{,}5$, a ordem de grandeza do número é 10^n.

Assim, por exemplo, a ordem de grandeza do número de estrelas visíveis no Universo é 10^{22}, a ordem de grandeza da distância entre Proxima Centauri b e a Terra é 10^{13} quilômetros, a ordem de grandeza do tamanho de um vírus varia de 10^{-8} a 10^{-7} metros e a ordem de grandeza da massa de um elétron é 10^{-27} gramas.

Algarismos significativos

O resultado de uma medição expressa o valor de uma grandeza física e, raramente, essa medição é isenta de erro. Isso acontece por diversos fatores – pode variar, por exemplo, em decorrência de imprecisão dos instrumentos utilizados ou até mesmo por causa de aproximações feitas por quem realiza a medição.



Vamos imaginar que alguém queira medir o diâmetro de uma moeda de um real utilizando uma régua graduada em milímetro. Ao fazer tal medição, a pessoa descobre que esse diâmetro tem entre 2,6 cm e 2,7 cm.

Agora, vamos supor que alguém estime em 2,65 cm esse "pouco" que ultrapassa a marca correspondente a 2,6 cm, mas não atinge a marca de 2,7 cm.

Observe que, nessa situação, temos dois números que foram obtidos de maneira exata (2 e 6) e um que é duvidoso (5).

Mesmo se a medida obtida tivesse sido 2,7 cm, a medição não seria exata, pois não é possível saber com certeza se a medida é 2,70 cm ou 2,71 cm, por exemplo. Assim, nesse caso, o algarismo 0 seria duvidoso. Note que nunca teremos a medida exata de um objeto e, portanto, sempre haverá um algarismo duvidoso em nossas medições.

Os algarismos exatos e os algarismos duvidosos de uma medida são chamados de **algarismos significativos**. Assim, no exemplo da medição do diâmetro da moeda de um real, teríamos:

$$\underbrace{2{,}6}_{\text{algarismos significativos exatos}}\ \underbrace{5}_{\text{algarismo significativo duvidoso}}$$

> Dado o resultado de uma medição, os algarismos significativos são todos aqueles contados, da esquerda para a direita, a partir do primeiro algarismo diferente de zero.

Exemplos Mostre aos estudantes que 0,0575 L é o mesmo que 57,5 mL e que nada se altera. A escrita em mililitro ainda apresenta três algarismos significativos.

- 96,20 m: tem quatro algarismos significativos.
- 0,0575 L: tem três algarismos significativos.
- 0,0250 kg: tem três algarismos significativos.
- 1,7 cm: tem dois algarismos significativos.

Zeros à esquerda do primeiro algarismo diferente de zero, da esquerda para a direita, antes ou depois da vírgula, não são significativos. Refletem apenas a utilização da unidade ou de seus múltiplos e submúltiplos.

Entretanto, zeros colocados à direita do resultado da medição são significativos. No primeiro exemplo, escrever 96,20 m é diferente de escrever 96,2 m. Na primeira escrita, 0 é o algarismo duvidoso e, na segunda, 2 é o algarismo duvidoso. Ou seja, a medida 96,20 foi obtida com maior precisão.

Em trabalhos científicos, o uso da notação científica e a apresentação das medições com as respectivas incertezas são muito comuns e necessários. Assim, ao fazer a conversão de um número para sua forma em notação científica, devemos estar atentos, pois a quantidade de algarismos significativos deve ser preservada.

Observe alguns exemplos neste quadro.

Número	Escrita em notação científica	Quantidade de algarismos significativos
875	$8{,}75 \cdot 10^2$	3
0,03301	$3{,}301 \cdot 10^{-2}$	4
70,00540	$7{,}000540 \cdot 10^1$	7
27 150,0	$2{,}71500 \cdot 10^4$	6

Incertezas

No exemplo da moeda de um real, ao indicarmos que o diâmetro mede 2,65 cm, sabemos que essa medida não é exata. Outra pessoa poderia estimá-la em 2,64 cm ou 2,66 cm. Isso remete ao que chamamos de **incerteza**.

A incerteza é dada pela metade da menor divisão do instrumento de medida. Por exemplo, a menor divisão da régua utilizada era 0,1 cm; portanto, sua incerteza seria de 0,05 cm. Assim, a medida do diâmetro da moeda deveria vir acompanhada da respectiva incerteza: $2{,}65 \pm 0{,}05$ cm.

Sugira aos estudantes que pesquisem casos em que a notação científica é utilizada.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R3 **Escreva os números a seguir em notação científica.**

a) 5 000 000 000

b) 0,000000005

Resolução

a) Poderíamos escrever esse número assim:

$$5\,000\,000\,000 = 5 \cdot 1\,000\,000\,000$$

Sabendo que $1\,000\,000\,000 = 10^9$, logo:

$$5\,000\,000\,000 = 5 \cdot 1\,000\,000\,000 = 5 \cdot 10^9$$

b) $0{,}000000005 = \dfrac{5}{1\,000\,000\,000} = \dfrac{5}{10^9} = 5 \cdot 10^{-9}$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

As atividades **13** a **21** possibilitam aos estudantes desenvolver a habilidade **EM13MAT313**, ao resolver problemas que envolvem medições em que é necessário verificar o uso de algarismos significativos e duvidosos, além de empregar a notação científica.

12 **Expresse os seguintes números em notação científica:**

a) 0,00000000025 $2{,}5 \cdot 10^{-10}$

b) 432 000 000 000 $4{,}32 \cdot 10^{11}$

c) 0,0000000000000987 $9{,}87 \cdot 10^{-14}$

d) 0,00000000001235 $1{,}235 \cdot 10^{-11}$

13 **O coração é um músculo que bombeia, em média, 5 litros de sangue por minuto por todo o organismo. Expresse, em notação científica, a quantidade média de sangue bombeado no organismo durante um ano.** $2{,}628 \cdot 10^{6}$ L

14 **No corpo humano, temos, aproximadamente, 97 000 quilômetros de veias, artérias e vasos capilares. Expresse, em notação científica, o correspondente a esse valor em metro e em centímetro.** $9{,}7 \cdot 10^{7}$ m ou $9{,}7 \cdot 10^{9}$ cm

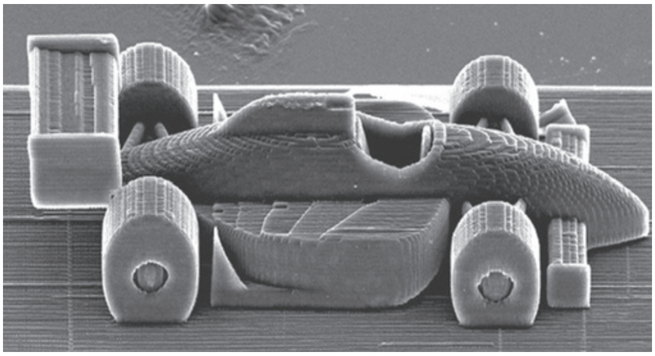
15 **Usualmente, no corpo de determinada pessoa há 5,5 litros de sangue e 5 milhões de glóbulos vermelhos por milímetro cúbico de sangue. Escreva, em notação científica, a quantidade de glóbulos vermelhos presentes no corpo dessa pessoa.** $2{,}75 \cdot 10^{13}$ glóbulos vermelhos.

Lembre-se: $1\ \text{L} = 1000\ \text{cm}^3$ e $1\ \text{cm}^3 = 1000\ \text{mm}^3$

16 **O telescópio Hubble localizou uma estrela batizada de V12 a 10,4 milhões de anos-luz da Terra. Se um ano-luz equivale a 9,5 trilhões de quilômetros, como se deve indicar, em notação científica, a distância da Terra à estrela V12, em quilômetro?** $9{,}88 \cdot 10^{19}$ km

17 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Pesquisadores da Universidade de Tecnologia de Viena, na Áustria, produziram miniaturas de objetos em impressoras 3D de alta precisão. Ao serem ativadas, tais impressoras lançam feixes de *laser* sobre um tipo de resina, esculpindo o objeto desejado. O produto final da impressão é uma escultura microscópica de três dimensões, como visto na imagem ampliada.



Enem. Fac-símile: ID/BR

A escultura apresentada é uma miniatura de um carro de Fórmula 1, com 100 micrômetros de comprimento. Um micrômetro é a milionésima parte de um metro. Usando notação científica, qual é a representação do comprimento dessa miniatura, em metro? Alternativa **c**.

a) $1{,}0 \times 10^{-1}$

b) $1{,}0 \times 10^{-3}$

c) $1{,}0 \times 10^{-4}$

d) $1{,}0 \times 10^{-6}$

e) $1{,}0 \times 10^{-7}$

18 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

A idade do planeta Terra foi estimada em 4,5 bilhões de anos. A ordem de grandeza da idade da Terra, em hora, é: Alternativa **a**.

a) 10^{13}.

b) 10^{14}.

c) 10^{15}.

d) 10^{17}.

e) 10^{24}.

19 **Escreva as medidas a seguir em notação científica e indique os algarismos exatos e os duvidosos.**

a) 584 m Exatos: 5 e 8. Duvidoso: 4.

b) 0,0806 cm Exatos: 8 e 0. Duvidoso: 6.

c) 39 mm Exato: 3. Duvidoso: 9.

d) 39,0 mm Exatos: 3 e 9. Duvidoso: 0.

20 **Indique no caderno a alternativa correta.**

O número de algarismos significativos de 0,0000000009076 cm é: Alternativa **b**.

a) 3.

b) 4.

c) 11.

d) 14.

e) 15.

Após as atividades de cálculo rápido propostas, promova uma roda de conversa com os estudantes para verificar se eles compreendem a importância de desenvolver habilidades de cálculo mental porque:

- tem importância prática no dia a dia;
- tem valor pessoal, individual;
- é útil na resolução de problemas em Matemática.

CÁLCULO RÁPIDO

Você deve ter percebido, na leitura deste capítulo, a necessidade de operar com números decimais e potências de base 10. Vamos, então, exercitar esse tipo de cálculo mentalmente, para que eles auxiliem na resolução de problemas.

1 Escreva cada potência de base 10 na forma fracionária e na forma decimal, de acordo com o exemplo.

$$10^{-5} = \frac{1}{100\,000} = 0{,}00001$$

a) 10^5 $\frac{1}{0{,}00001} = 100\,000$

b) 10^{-4} $\frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$

c) 10^4 $\frac{1}{0{,}0001} = 10\,000$

d) 10^{-7} $\frac{1}{10\,000\,000} = 0{,}0000001$

e) 10^7 $\frac{1}{0{,}0000001} = 10\,000\,000$

2 Calcule o valor de n em cada caso.

a) $8\,500\,000 = 8{,}5 \cdot 10^n$ $n = 6$

b) $1\,500\,000\,000 = 1{,}5 \cdot 10^n$ $n = 9$

c) $300\,000\,000 = 3 \cdot 10^n$ $n = 8$

d) $0{,}000006 = 6 \cdot 10^n$ $n = -6$

e) $0{,}0000055 = 5{,}5 \cdot 10^n$ $n = -6$

f) $0{,}000098 = 9{,}8 \cdot 10^n$ $n = -5$

3 Reescreva, no caderno, as igualdades de modo a torná-las corretas. **a)** $4 \cdot 10^6 = 4\,000\,000$ e $400\,000 = 4 \cdot 10^5$

a) $4 \cdot 10^6 = 400\,000$

b) $3\,500\,000\,000 = 35 \cdot 10^9$

c) $0{,}000000021 = 2{,}1 \cdot 10^9$

d) $1\,600\,000 = 1{,}6 \cdot 10^5$

e) $8\,000\,000\,000 = 8^9$

f) $4{,}8 \cdot 10^{-5} = 0{,}00048$

b) $3\,500\,000\,000 = 35 \cdot 10^8$ e $35 \cdot 10^9 = 35\,000\,000\,000$
c) $0{,}000000021 = 2{,}1 \cdot 10^{-8}$ e $2{,}1 \cdot 10^9 = 2\,100\,000\,000$
d) $1\,600\,000 = 1{,}6 \cdot 10^6$ e $1{,}6 \cdot 10^5 = 160\,000$
e) $8\,000\,000\,000 = 8 \cdot 10^9$ e $8^9 = 134\,217\,728$
f) $4{,}8 \cdot 10^{-5} = 0{,}000048$ e $0{,}00048 = 4{,}8 \cdot 10^{-4}$

Esta sequência de atividades permite a retomada de temas importantes para continuar o estudo da Matemática. Nas questões, estão presentes conhecimentos relacionados a funções afins, medidas de ângulos internos de quadriláteros e a resolução de problemas utilizando a relação do teorema de Pitágoras.

PARA RECORDAR

Para resolver os problemas apresentados a seguir, você pode recordar conhecimentos diversos de áreas variadas, que podem ser usados para resolver outros problemas futuros, como o teorema de Pitágoras.

1 O custo do transporte de certa carga por ferrovia é composto de um preço fixo de R$ 100,00 mais R$ 5,00 por quilômetro rodado. A mesma carga, transportada por rodovia, tem um custo fixo de R$ 60,00 mais R$ 6,00 por quilômetro rodado. Acima de quantos quilômetros rodados o custo do transporte por ferrovia é inferior ao custo por rodovia? Acima de 40 km rodados.

2 Indique a alternativa correta no caderno.

(Ifal) Uma herança de R$ 320 000,00 foi dividida entre 3 filhos na seguinte proporção: O mais novo recebeu $\frac{1}{8}$ da herança e o mais velho recebeu $\frac{1}{2}$ da herança. Qual foi o valor recebido pelo filho do meio? Alternativa **c**.

a) R$ 40 000,00

b) R$ 80 000,00

c) R$ 120 000,00

d) R$ 160 000,00

e) R$ 200 000,00

3 Em um quadrilátero com três ângulos de mesma medida, o ângulo diferente mede 60°. Quanto mede cada um dos outros três ângulos? 100°

Relembre o teorema de Pitágoras para resolver os problemas a seguir.

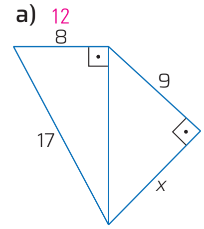
Em todo triângulo retângulo com hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e c, a seguinte relação é válida:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

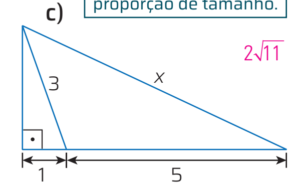
4 Calcule o valor de x em cada caso.

Representações sem proporção de tamanho.

a) 12

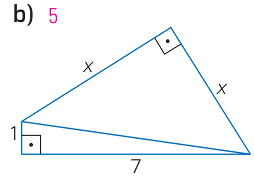


c) $2\sqrt{11}$

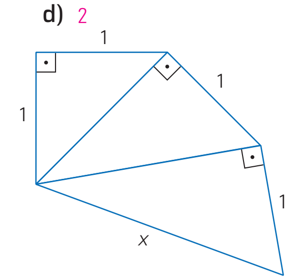


Ilustrações: ID/BR

b) 5



d) 2



5 Uma pessoa percorre 7 km na direção norte; depois, 8 km na direção leste; e, finalmente, 1 km na direção sul. Calcule a distância entre os pontos de partida e de chegada. 10 km

6 Em um trapézio isósceles, a base menor mede 8 cm, um lado oblíquo vale 13 cm e a medida da altura é 12 cm. Calcule a medida da base maior. 18 cm

Não escreva no livro.

Após a resolução dos problemas apresentados nesta seção, leve os estudantes a perceber que as alternativas fazem parte do enunciado dos problemas.

No problema **3**, comente com os estudantes que o termo "peso" utilizado nesta atividade se refere à massa; explique que, apesar de terem significados distintos, no cotidiano, as pessoas costumam usar esses termos como sinônimos.

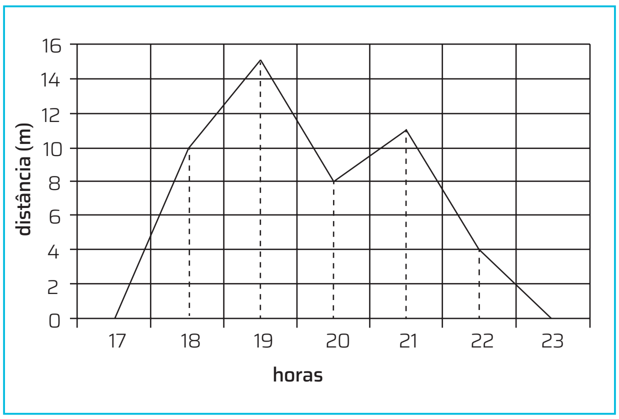
FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Você já resolveu muitos problemas, no entanto, estes três apresentam uma característica diferente. As alternativas fazem parte do texto do problema. Sem elas, não há como responder ao que é solicitado.

1 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Prova Brasil) O gráfico abaixo mostra a distância, em metros, que um pequeno roedor está de sua toca, no período de 17h até às 23h. Alternativa **b**.

Inep, Prova Brasil. Fac-símile: ID/BR



Os dados indicam que o animal

a) está mais longe da toca às 23h.

b) está 8 metros longe da toca às 20 horas.

c) está sempre afastando-se da toca entre 18 e 20 horas.

d) estava na toca uma única vez entre 17 e 23 horas.

e) estava sempre a menos de 12 m da toca nesse período.

2 **Escreva a alternativa correta no caderno.** Alternativa **a**.

(Obmep) Uma fotografia mostra três pessoas: Armando, Benedita e Carlitos. Nessa foto, Armando está olhando para Benedita, e Benedita está olhando para Carlitos. Armando está de óculos, e Carlitos está sem óculos.

Qual das alternativas [...] a seguir é, com certeza, verdadeira?

a) Há uma pessoa de óculos olhando para uma pessoa sem óculos.

b) Há apenas uma pessoa sem óculos, e ela está olhando para uma pessoa de óculos.

c) Há apenas uma pessoa de óculos, e ela está olhando para uma pessoa sem óculos.

d) Carlitos está sendo olhado por uma pessoa sem óculos.

e) Carlitos está sendo olhado por uma pessoa de óculos.

3 **Indique a alternativa correta no caderno.** Alternativa **e**.

(Obmep) Duas placas de sinalização foram colocadas no início de uma ponte sobre um rio. Uma placa indica a largura máxima permitida e a outra, o peso máximo permitido para os veículos que pretendem passar por ela. Qual dos caminhões a seguir pode passar por essa ponte?

Obmep. Fac-símile: ID/BR

a) O que pesa 4 300 kg e tem largura de 3,3 m.

b) O que pesa 4 305 kg e tem largura de 3,15 m.

c) O que pesa 4 250 kg e tem largura de 3,3 m.

d) O que pesa 4 400 kg e tem largura de 3,25 m.

e) O que pesa 4 290 kg e tem largura de 3,2 m.

PALAVRAS-CHAVE

As produções dos estudantes podem compor as avaliações formativa e ipsativa, dependendo de seu planejamento.

Nesta seção, a ideia é retomar o que você estudou neste capítulo. A proposta é que você elabore uma lista com exemplos diferentes dos que foram expostos aqui, abordando cada uma das seguintes noções:

- diferença entre grandeza e medida;
- organização das unidades de medida no SI;
- as unidades de comprimento e a relação entre elas;
- ordem de grandeza e algarismos significativos;
- as unidades de medida usadas na informática.

Depois, compare sua lista com a de um colega e, com base no que observar na produção dele, procure aperfeiçoar o que você escreveu.

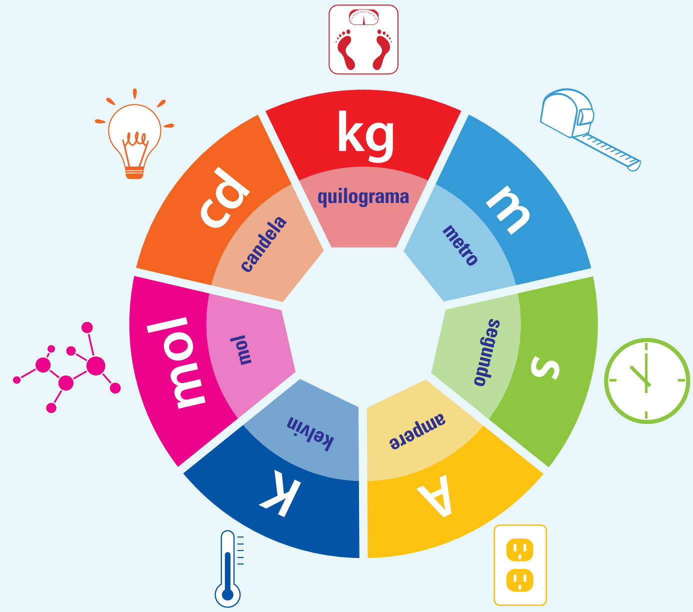
MATEMÁTICA E UNIDADES DE MEDIDA

Esta seção contempla as competências gerais **1** e **2** da Educação Básica propostas pela BNCC, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo, exercitando a curiosidade intelectual e recorrendo à abordagem própria das ciências. Além disso, esta seção possibilita uma integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e com o tema contemporâneo transversal Ciência e Tecnologia. Pode ser proposto um trabalho integrado com os professores de Física ou de Química a fim de explorar a competência específica **3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e a habilidade **EM13MAT103**, incentivando a interpretação e a compreensão do uso de unidades de medidas.

Se julgar oportuno, convide um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para participar das discussões.

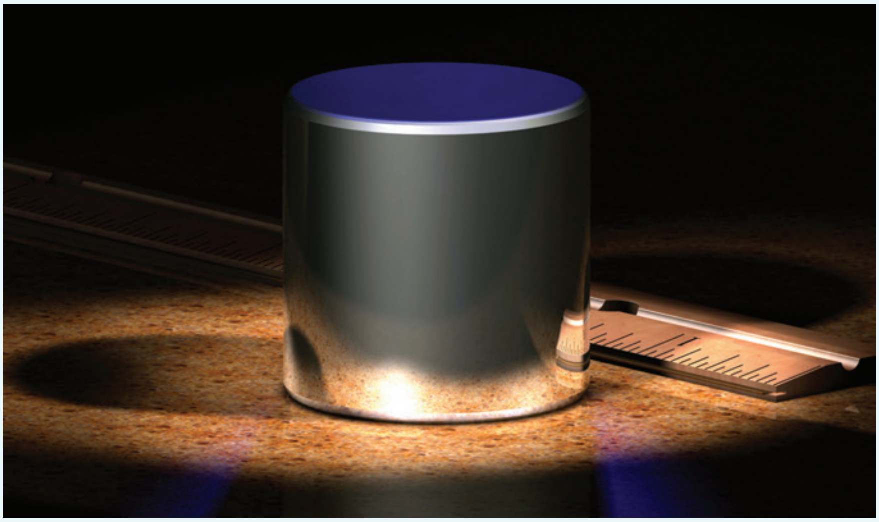
A importância de medir corretamente

O Sistema Internacional de Unidades (SI) foi criado em 1960 para padronizar as unidades de medida de grandezas no mundo todo. Esse sistema determina sete grandezas de base: tempo, comprimento, massa, corrente elétrica, temperatura termodinâmica, quantidade de matéria e intensidade luminosa. Cada grandeza de base corresponde a uma unidade de base: segundo, metro, quilograma, ampere, kelvin, mol e candela.



rktz/Shutterstock.com/ID/BR

O quilograma foi escolhido como a unidade de massa elementar padrão, e sua definição foi estabelecida no século XIX, com base em um objeto. Em 2019, a medida do quilograma passou a ser um valor derivado de uma constante.



Escritório Internacional de Pesos e Medidas, Paris. Fotografia: ID/BR

Ilustração do Protótipo Internacional do Quilograma fora de suas redomas protetoras.

Leia o texto a seguir para entender de que maneira isso aconteceu. Em seguida, discuta as informações com o professor e os colegas.

Cientistas escolhem nova forma de medir 1 kg

O que é 1 quilo? Atualmente, há uma definição muito simples: é a massa de um pedaço de liga de platina-irídio que está guardado na Secretaria Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, na França, desde 1889. É o chamado protótipo internacional do quilograma, também conhecido como Le Grand K. Há várias cópias dele ao redor do mundo, que são usadas para calibrar balanças e assegurar que o mundo usa o mesmo sistema de medida.

Todas as balanças do mundo – desde a da farmácia, a da sua cozinha até a de laboratórios – são fabricadas seguindo o padrão estabelecido pelo cilindro de platina e irídio, que fica mantido em um cofre e não pode ser sequer tocado (o óleo que passaria dos dedos para a superfície poderia alterar a massa do objeto, o que estragaria todo o seu propósito). Mas, agora, os cientistas querem atualizar essa medida.

Nesta sexta-feira (16/11), cientistas de todo o mundo se reúnem na Conferência Geral de Pesos e Medidas em Versailles, na França, para votar uma nova definição do quilo. A razão principal é que a massa do Le Grand K não é constante. Ela perdeu cerca de 50 microgramas (o mesmo que um cílio, aproximadamente) desde sua criação. O problema é que, mesmo quando esse cilindro de metal perde massa, ele ainda vale exatamente um quilo de acordo com a definição atual.

Essa perda aconteceu porque o protótipo perdeu átomos com o tempo, e sua massa é “suscetível a danos e fatores ambientais”, segundo o Laboratório Britânico de Física, que abriga o Kilo 18, uma das cópias do Le Grand K. Aliás, o Le Grand K só é comparado a suas cópias a cada 40 anos, o que torna a calibração potencialmente imprecisa.

E apesar de a perda de massa ser equivalente a um cílio, as repercussões podem ser importantes para a ciência. “Não é um problema quando se está medindo açúcar para uma receita, mas está se tornando inaceitável para a ciência mais sofisticada, como a medição de dose de fármacos”, diz uma declaração do Laboratório Britânico de Física.

A expectativa é de que a conferência desta sexta-feira aprove a nova definição de 1 quilo. A proposta é atrelar a medida de um quilo à constante de Planck, uma medida da mecânica quântica que não vai mudar – nem na Terra nem em outro lugar do Universo. O valor de um quilo não será alterado, mas redefini-lo com a constante de Planck assegura que a medida permaneça confiável. Isso também permite medidas de massa muito mais precisas no futuro.

A constante de Planck descreve o comportamento de partículas e ondas em escala atômica e é definida por três unidades: o metro, o quilo e o segundo. Como o segundo e o metro são definidos pela velocidade da luz (um metro é a distância percorrida pela luz no vácuo no período de 1/299 792 458 segundo, e um segundo é a duração de 9 192 631 770 períodos de radiação correspondentes à transição entre os dois níveis do átomo de césio 133), a constante pode ser usada para definir um quilo. A constante de Planck pode ser medida usando um instrumento conhecido como balança de Kibble.

“A redefinição do quilograma é um avanço tremendo para a comunidade internacional de medição e para a ciência”, afirma Ian Robinson, pesquisador do Laboratório Britânico de Física. Se aprovada, a nova definição entrará em vigor em 20 de maio de 2019.

CIENTISTAS escolhem nova forma de medir 1 kg. *Época Negócios* on-line, 16 nov. 2018. Disponível em: https://epocanegocios.globo.com/Mundo/noticia/2018/11/cientistas-escolhem-nova-forma-de-medir-1-kg.html. Acesso em: 2 out. 2024.

Conectando ideias **1.** A velocidade da luz é, aproximadamente, 299 792 458 m/s (cerca de 300 000 km/s).

1 **Com base na definição de metro abordada no texto, calcule a velocidade da luz. Depois, relacione-a com outras medidas de tempo conhecidas (como o dia e o ano) e com distâncias (como aquelas entre o Sol e a Terra, entre o Sol e Plutão, etc.).**

2 **O metro e o quilograma foram redefinidos por questões de precisão científica.**

Como as unidades de medida de grandezas fundamentais são definidas atualmente?

- Compare-as com as definições originais, explicando os problemas que existiam e suas implicações em erros de cálculo na produção científica. Resposta pessoal.
- Em grupos, façam uma pesquisa e lembrem-se de que é importante consultar fontes confiáveis e indicá-las ao final do trabalho.
- Apresentem os resultados aos demais grupos e discutam os principais pontos levantados por todos.
- Você é capaz de dizer o que aprendeu e quais são suas dúvidas ao final dessas atividades? As respostas dos estudantes ao último item apresentam evidências da competência socioemocional autoconhecimento.

Não escreva no livro.

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Neste capítulo, os estudantes vão: interpretar e analisar textos que envolvem a grandeza área; resolver problemas relacionados a diversas situações; estabelecer relações entre área e perímetro de alguns polígonos; e investigar os ladrilhamentos no plano. Assim, eles poderão desenvolver as habilidades **EM13MAT103**, **EM13MAT307**, **EM13MAT505** e **EM13MAT506**. Além disso, na seção *Matemática e meio ambiente*, ao propor medidas de recuperação específicas para o bioma da região em que moram, os estudantes desenvolvem a habilidade **EM13MAT201**.

NESTE CAPÍTULO

- A grandeza área
- Áreas de figuras planas
- Ladrilhamento

Leia as notícias a seguir, que apresentam medidas de extensões de terra.

Ilustrações: ID/BR

Fontes de pesquisa: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). *Áreas territoriais*. [*S. l.*], 2022. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/geociencias/organizacao-do-territorio/estrutura-territorial/15761-areas-dos-municipios.html; IBGE. Amazônia Legal: o que é. IBGE, 2022. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/geociencias/cartas-e-mapas/mapas-regionais/15819-amazonia-legal.html?=&t=o-que-e; IBGE prevê safra de 308,5 milhões de toneladas para 2024, com queda de 2,8% frente a 2023. *Agência IBGE Notícias*, Rio de Janeiro, 9 nov. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/38299-ibge-preve-safra-de-308-5-milhoes-de-toneladas-para-2024-com-queda-de-2-8-frente-a-2023. Acessos em: 19 jul. 2024.

Perceba que, conhecendo a área plantada de cereais, leguminosas e oleaginosas, é possível prever a produção dessa safra e sua contribuição para as finanças dos produtores e a economia do Brasil. Saber a medida da área de florestas ou de municípios permite estimar os recursos necessários para sua preservação ou manutenção e para a oferta de serviços em cada localidade.

A grandeza **área** será o principal tema de estudo deste capítulo.

Não escreva no livro.

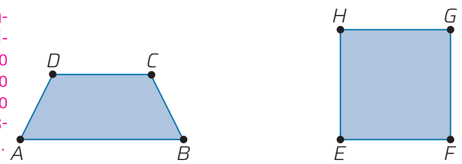
Neste tópico, apresentamos uma definição da grandeza área e diferentes métodos para a obtenção da medida de superfícies, como a comparação da área de figuras planas com a área de um quadrado e a aproximação por cortes de uma figura irregular. Por isso, esse trabalho contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307**.

A GRANDEZA ÁREA

Podemos dizer que a área de uma figura plana é a medida da superfície dessa figura, ou seja, a medida da região que ela ocupa no plano. Agora vamos comparar as áreas de duas figuras planas, independentemente de suas formas.

Considere o trapézio *ABCD* e o quadrado *EFGH* a seguir.

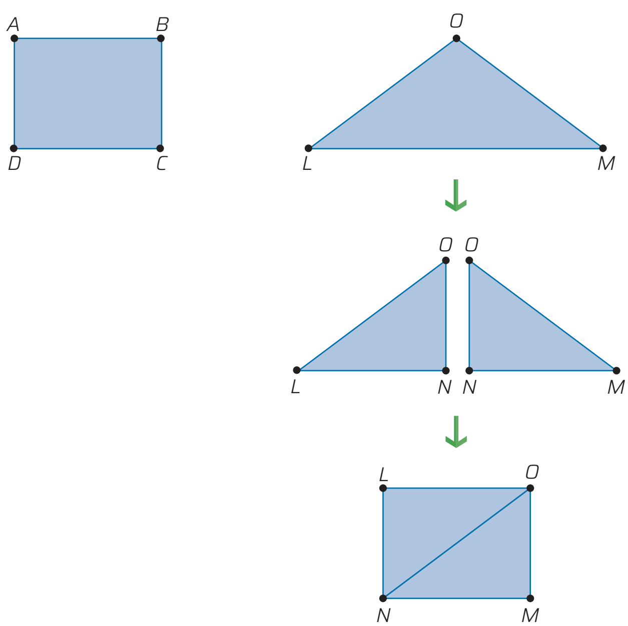
Nesta coleção, para simplificar a linguagem, utilizamos o nome do polígono quando nos referimos ao polígono e também quando nos referimos a ele acrescido de sua região interna.



Ilustrações: ID/BR

Nesse caso, é possível perceber que o trapézio ocupa uma região menor que o quadrado. Assim, a área do trapézio é menor que a área do quadrado.

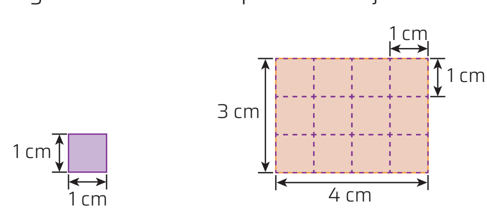
Agora, analise o retângulo *ABCD* e o triângulo *LMO*.



Ilustrações: ID/BR

De acordo com a última figura, podemos perceber que os retângulos *ABCD* e *LOMN* têm a mesma medida como regiões do plano. Logo, o retângulo *ABCD* e o triângulo *LMO* têm a mesma área. Mas, como podemos ter certeza de que, no primeiro caso, o trapézio tem área menor que a do quadrado e, no segundo, o retângulo e o triângulo têm mesma área?

Assim como fazemos para medir o comprimento, para determinar a área de uma figura, precisamos escolher uma unidade de medida de área e compará-la com a área da figura que queremos medir. O resultado dessa comparação é o que chamamos de **área da figura plana**, que é um número que mostra quantas vezes a unidade de medida utilizada cabe na figura. Para obter, por exemplo, a área de um retângulo com dimensões de 3 cm e 4 cm, podemos comparar a região ocupada pelo retângulo com a de um quadrado cujo lado mede 1 cm.



Ilustrações: ID/BR

Por definição, a área do quadrado de lado 1 cm corresponde a 1 cm² ou 1 centímetro quadrado. Portanto, o retângulo tem área de 12 cm².

PARA EXPLORAR

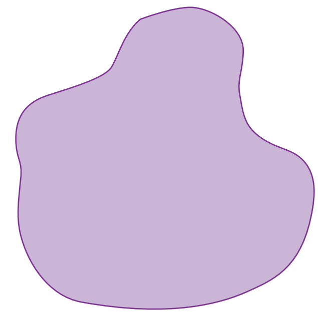
Livro

VALLADARES, Renato J. Costa. *O jeito matemático de pensar*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2012.

Nesse livro, é possível descobrir como o uso da estimativa e de medidas pode ajudar a resolver várias situações do dia a dia.

Em alguns casos, como quando a figura tem um contorno irregular, é preciso empregar um cálculo aproximado da área.

Imagine um terreno com o formato da figura ilustrada. Como podemos calcular a área que esse terreno ocupa? Uma maneira é representar o terreno em uma malha quadriculada e contar quantos quadradinhos inteiros da malha cabem dentro do terreno e quantos quadradinhos inteiros cobrem o terreno totalmente. Depois, calculamos a média aritmética dos dois valores, o que nos dará uma aproximação razoável da área do terreno.



Ilustrações: ID/BR

Admitindo que cada quadradinho da malha equivale a um quadrado de 1 m², verifique como contamos os quadradinhos inteiros da malha que cabem dentro do terreno (figura **1**) e os quadradinhos inteiros da malha que cobrem o terreno por inteiro (figura **2**).

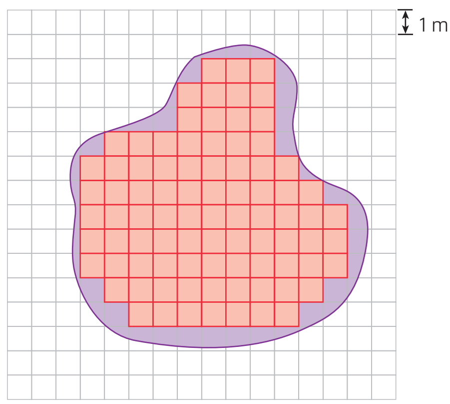


Figura 1

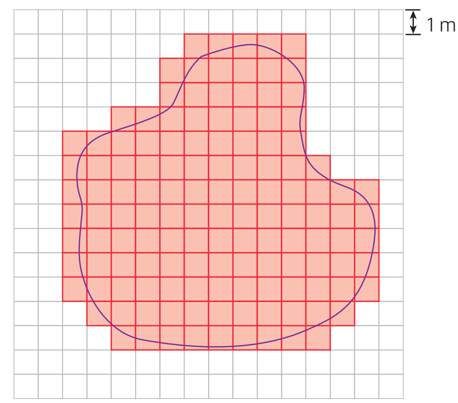


Figura 2

Há 86 quadradinhos inteiros dentro do terreno e há 131 quadradinhos inteiros cobrindo o terreno todo. Dizemos, então, que a área por falta do terreno é 86 metros quadrados e que a área por excesso do terreno é 131 metros quadrados. Ou seja, podemos afirmar que a área do terreno é maior que 86 metros quadrados e menor que 131 metros quadrados.

Calculando a média aritmética das duas áreas, em m², chegamos a: $\frac{86 + 131}{2} = 108{,}5$

Portanto, uma aproximação razoável da área do terreno é 108,5 metros quadrados.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Nas atividades **1** e **2**, você vai rever algumas ideias importantes que são utilizadas com frequência em atividades que envolvem áreas.

1 **Um quadrado tem 24 cm de perímetro. Calcule:**

a) o comprimento da diagonal; $6\sqrt{2}$ cm

b) a distância do centro do quadrado a cada lado. 3 cm

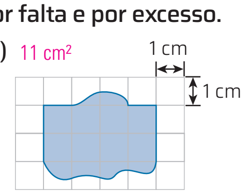
2 **Faça o que se pede em cada item.**

a) Seja *G* o ponto de encontro das alturas de um triângulo equilátero *ABC*, de perímetro igual a 24 m. Calcule a medida da altura desse triângulo.

b) Sabendo que a distância de *G* aos lados do triângulo é $\frac{\ell\sqrt{3}}{6}$, em que ℓ é a medida do lado do triângulo, determine a distância de *G* aos vértices do triângulo *ABC*. **a)** $4\sqrt{3}$ m **b)** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ m

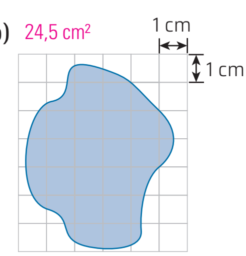
3 **Determine, em cada item, a medida aproximada da área da figura, utilizando o cálculo da média entre as áreas por falta e por excesso.**

a) 11 cm²



Ilustrações: ID/BR

b) 24,5 cm²

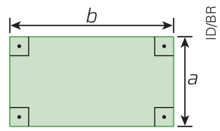


Não escreva no livro.

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

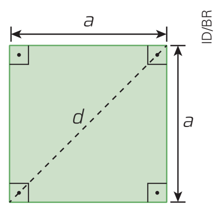
Vamos relembrar a área de algumas figuras planas. Indicaremos por A a medida da área de cada figura plana.

- **Área do retângulo**



$A = b \cdot a$

- **Área do quadrado**



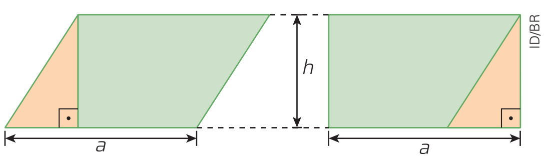
$A = a^2$

$A = \frac{d^2}{2}$

- **Área do paralelogramo**

Se necessário, comente que, nesse caso, o fato de uma figura ser equivalente a outra significa que as duas figuras têm a mesma medida de área.

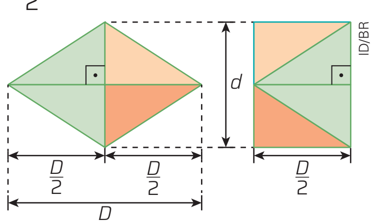
A área de um paralelogramo com um lado de medida a e altura de medida h relativa a esse lado é equivalente à área de um retângulo de dimensões a e h.



$A = a \cdot h$

- **Área do losango**

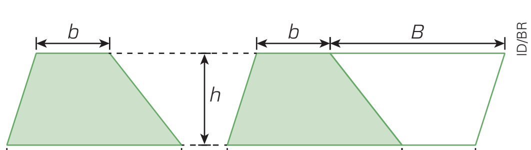
Um losango com diagonais de medidas d e D é equivalente a um retângulo de dimensões d e $\frac{D}{2}$.



$A = \frac{d \cdot D}{2}$

- **Área do trapézio**

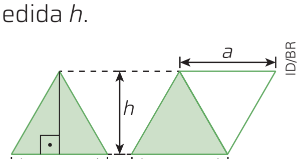
Um trapézio com bases de medidas B e b e altura relativa às bases de medida h é equivalente à metade de um paralelogramo com lado de medida $B + b$ e altura de medida h.



$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

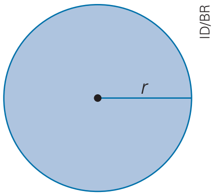
- **Área do triângulo**

Um triângulo com base de medida a e altura relativa à base de medida h é equivalente à metade de um paralelogramo com um lado de medida a e altura respectiva de medida h.



$A = \frac{a \cdot h}{2}$

- **Área do círculo**



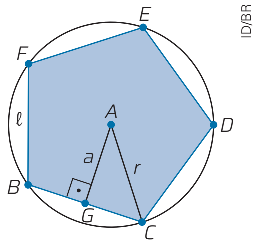
$$A = \pi \cdot r^2$$

Área de um polígono regular

Você lembra o que são polígonos regulares? São os polígonos em que todos os lados são congruentes, assim como todos os ângulos internos.

Todos os polígonos regulares podem ser inscritos em uma circunferência.

Observe, a seguir, o pentágono regular inscrito em uma circunferência.

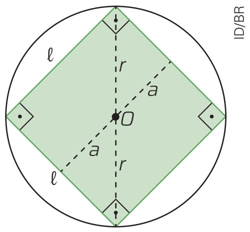


O apótema é um segmento com extremos no centro do polígono e no ponto médio de um de seus lados. Ele é perpendicular ao seu lado.

Na figura, o lado do pentágono mede ℓ, o apótema mede a e o raio da circunferência mede r.

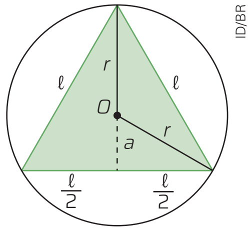
Vamos calcular a medida do apótema de alguns polígonos regulares inscritos em uma circunferência em função da medida do lado do polígono.

- **Quadrado inscrito na circunferência**



Observando a figura, podemos perceber que $2a = \ell$, ou seja, $a = \frac{\ell}{2}$. Assim, a medida do apótema do quadrado é metade da medida do lado do quadrado.

- **Triângulo equilátero inscrito na circunferência**

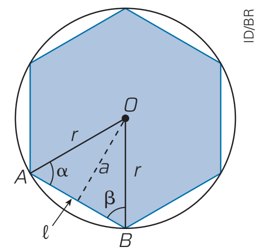


Lembrando que, em um triângulo equilátero, a medida da altura h é dada, em função da medida ℓ (ℓO) do lado, por $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Como vale a igualdade $h = r + a$, segue que $r = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} - a$. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2} - a\right)^2 \Rightarrow a^2 + \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4} - a\ell\sqrt{3} + a^2 \Rightarrow \frac{\ell^2}{2} = a\ell\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$$

Assim, $a = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$.

- **Hexágono regular inscrito na circunferência**



Como a soma das medidas dos ângulos centrais de um polígono é 360°, obtemos:

$\text{med}(A\widehat{O}B) = \dfrac{360°}{6} = 60°$

Temos $OA = OB = r$; então, concluímos que o triângulo AOB é isósceles. Portanto, $\alpha = \beta$. Logo:

$$\alpha + \beta + 60° = 180° \Rightarrow \alpha + \alpha = 180° - 60° \Rightarrow 2\alpha = 120° \Rightarrow \alpha = 60°$$

Como os três ângulos internos do triângulo AOB têm medidas de 60°, esse triângulo é equilátero. Assim, $OA = OB = AB$. Então, $\ell = r$.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

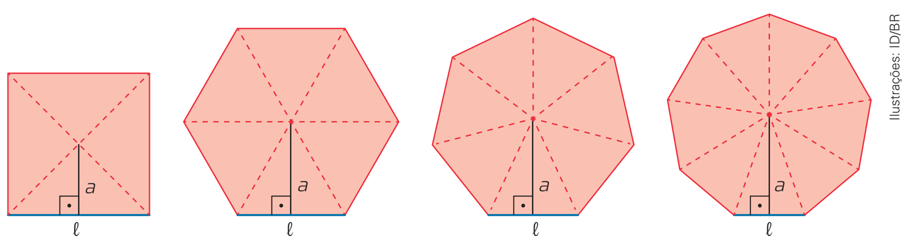
$$r^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2$$

Como $\ell = r$, temos:

$$\ell^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow \ell^2 = \frac{\ell^2}{4} + a^2 \Rightarrow a^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Assim, $a = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Agora, observe os polígonos regulares a seguir.



Repare que, se um polígono regular tem n lados, ele pode ser dividido em n triângulos isósceles. Em cada um desses triângulos, a base é o lado do polígono regular e a altura relativa a essa base é o apótema do polígono regular.

Assim, a área de um polígono regular de n lados pode ser escrita do modo destacado a seguir, em que P é o perímetro e a é a medida do apótema do polígono.

$$\boxed{A = \frac{P \cdot a}{2}}$$

UNIDADES DE MEDIDA DE ÁREA

No SI, a unidade de medida padrão de área é o **metro quadrado**, cujo símbolo é **m²**, que corresponde à área de um quadrado com 1 m de lado.

Uma das unidades de medida de área que tem particular uso no Brasil na medição de terrenos é o hectare.

O **hectare**, cujo símbolo é **ha**, corresponde à área de um quadrado com 100 m de lado:

$$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$$

Como a medida 100 m corresponde a um dos múltiplos do metro, o hectômetro (hm), temos:

$$1 \text{ ha} = 1 \text{ hm}^2$$

Existem outras unidades de área que não pertencem ao SI. O alqueire, usado para medir a área de propriedades rurais, é uma delas. No Brasil, porém, um alqueire tem diferentes medidas, dependendo da região. Por exemplo, o alqueire paulista corresponde a 24 200 m²; o alqueire mineiro, a 48 400 m²; e o alqueire do Norte, a 27 225 m².

Se julgar oportuno, explore os aspectos históricos, sociais e culturais das diferentes medidas de alqueire nas regiões brasileiras, de modo a ampliar os conhecimentos dos estudantes. Outra possibilidade é pedir a eles que pesquisem o motivo da diferença de medidas do alqueire no Brasil e como as características e os aspectos de cada região podem ter influenciado essa diferença. Esse trabalho contribui para a aquisição da competência geral **6**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **No mapa de certa cidade, em que 1 cm corresponde a 4 km, um parque ecológico ocupa uma região retangular com 0,5 cm de largura e 1,0 cm de comprimento. Qual é a medida da área real desse parque, em metro quadrado?**

Resolução

Como no mapa 1 cm equivale a 4 km e as medidas dos lados do retângulo são 0,5 cm e 1,0 cm, as medidas dos lados do parque ecológico são equivalentes a 2 km e 4 km. Logo, a área do parque mede $2 \cdot 4 = 8$, ou seja, 8 km².

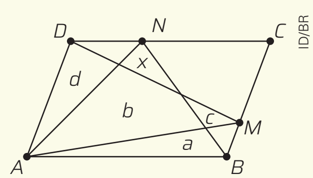
Resta saber quantos m² correspondem a 1 km².

Como 1 km² é a medida da área de um quadrado com 1000 m de lado, a área desse quadrado mede:

$$8\ \text{km}^2 = (1000 \cdot 1000)\ \text{m}^2 = 1\,000\,000\ \text{m}^2$$

Portanto, a área real desse parque ecológico mede 8 000 000 m².

R2 **(Obmep) No paralelogramo *ABCD* da figura, os pontos *M* e *N* são pontos dos lados *BC* e *CD*, respectivamente. As áreas *a*, *b*, *c* e *d* são conhecidas. Qual é o valor da área *x*?**



a) $c + d - a$

b) $a + c + d - b$

c) $a + c + d - 2b$

d) $a + d - b$

e) $a + c - d$

Resolução

Vamos utilizar uma relação que existe entre as áreas dos triângulos *ABN* e *ADM* e a área do paralelogramo *ABCD*.

O triângulo *ABN* tem base $\overline{AB}$ igual à do paralelogramo e a mesma altura que a do paralelogramo em relação a essa base. Então, podemos afirmar que a medida da área de *ABN* (que é igual a $a + b + x$) é igual à metade da medida da área do paralelogramo.

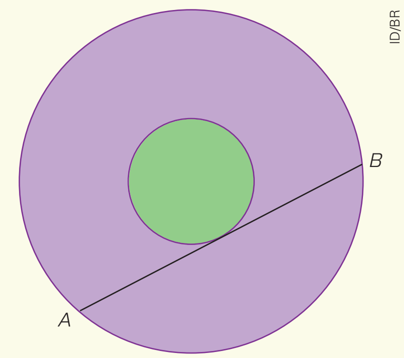
O triângulo *ADM* tem base $\overline{AD}$ igual à do paralelogramo e a mesma altura do paralelogramo em relação a essa base. Então, como no caso anterior, a medida da área de *ADM* (que é igual a $d + b + c$) também é igual à metade da medida da área do paralelogramo.

Logo, temos:

$$a + b + x = d + b + c$$
$$x = c + d - a$$

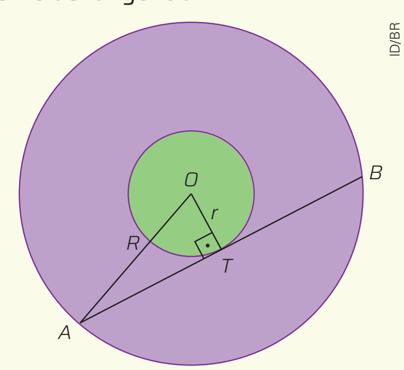
Assim, a alternativa **a** é a correta.

R3 **O segmento $\overline{AB}$ é tangente ao menor de dois círculos concêntricos e tem extremidades no círculo maior, conforme a figura. Se *AB* é igual a 8 metros, quanto mede a área entre os dois círculos?**



Resolução

Vamos fazer um esboço, marcando os raios desses círculos e usando a condição de tangência de uma reta a uma circunferência.
Se uma reta *t* é tangente a uma circunferência, ela é perpendicular ao raio da circunferência que passa pelo ponto de tangência.



O triângulo *OAT* é retângulo no vértice *T*, um de seus catetos mede *r* (medida do raio do círculo menor), sua hipotenusa mede *R* (medida do raio do círculo maior) e *T* é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, uma vez que o triângulo *AOB* é isósceles. Logo, $AT = 4$.

Podemos aplicar o teorema de Pitágoras nesse triângulo. Assim:

$$R^2 = 4^2 + r^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = 16 \quad (1)$$

A área *A* entre os dois círculos é dada pela área do círculo maior menos a área do círculo menor:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$A = 16\pi$$

Logo, a área entre os dois círculos mede 16π m².

As atividades **R2** e **R3** são mais complexas, por isso sugerimos que solicite aos estudantes que leiam essas atividades individualmente e, depois, discutam-nas em duplas ou em pequenos grupos. A atividade **R2** é puramente literal, e a atividade **R3** exige conhecimentos sobre a posição relativa entre reta e circunferência, além do teorema de Pitágoras. Caso surjam dúvidas, oriente os estudantes a consultar o livro e as anotações que fizeram. Ao final, proponha uma discussão coletiva.

4 **Calcule a área de:**

a) um quadrado cujo lado mede $3\sqrt{2}$ cm; 18 cm²

b) um retângulo cujos lados medem 6 cm e 9 cm; 54 cm²

c) um paralelogramo com um lado de medida 5 cm e altura respectiva de medida 8 cm; 40 cm²

d) um losango cujas diagonais medem 12 cm e 16 cm; 96 cm²

e) um trapézio cujas bases medem 4 cm e 10 cm e cuja altura mede 5 cm. 35 cm²

5 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Enem) A maior piscina do mundo, registrada no livro *Guiness*, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área. Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado.

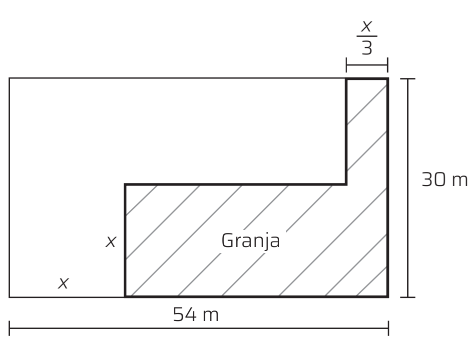
Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina? Alternativa **e**.

a) 8
b) 80
c) 800
d) 8 000
e) 80 000

6 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Unit-SE) "As galinhas possuem hábitos diurnos e sua alimentação é composta principalmente de grãos, frutos, folhas, pétalas e brotos cultivados. Atualmente a criação comercial de galinhas é realizada em granjas grandes e modernas".

Em uma fazenda situada no interior de Sergipe, há uma área retangular de 54 metros de comprimento e 30 metros de largura. O fazendeiro pretende construir, dentro deste espaço, uma granja moderna, atendendo aos padrões de qualidade, segundo as diretrizes do órgão próprio do Ministério da Agricultura, e cujas medidas estão indicadas no desenho.



Unit-SE. Fac-símile: ID/BR

Com base nas informações apresentadas e na análise do desenho, é correto afirmar que a maior área possível para a granja será igual a: Alternativa **a**.

a) 768 m²
b) 672 m²
c) 576 m²
d) 384 m²
e) 288 m²

A atividade **6** simula uma situação prática de planejamento agrícola, em que é necessário calcular a área disponível para otimizar o uso do terreno, utilizando o método da reconfiguração em retângulos. A atividade **7** reflete uma situação prática de planejamento urbano, em que é necessário calcular a área total a ser pintada para estimar custos e materiais. Por isso, essas atividades possibilitam aos estudantes desenvolver a habilidade **EM13MAT307**.

7 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento.

O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro $d = 40$ cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é $h = 60$ cm, conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para π.

Enem. Fac-símile: ID/BR

Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas? Alternativa **b**.

a) 16 628
b) 22 280
c) 28 560
d) 41 120
e) 66 240

8 **Crie um problema que envolva o cálculo de área de um terreno. Depois, troque-o com um colega, para que um resolva o problema do outro.** Resposta pessoal.

9 **Reúna-se com um colega para resolver os itens a seguir.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

a) Escrevam o perímetro P de um triângulo equilátero, em função da medida x do comprimento do seu lado, e a área A desse triângulo, também em função da medida x do comprimento do seu lado.

b) As funções obtidas são do mesmo tipo? Justifiquem.

c) Construam o gráfico das funções obtidas no item **a** em um mesmo plano cartesiano, e analisem o que acontece com o perímetro e com a área, de acordo com a variação do comprimento do lado do triângulo. A variação observada para o perímetro é a mesma que a da área? Justifiquem.

d) Façam o que foi pedido nos itens anteriores para o quadrado e para o hexágono regular.

A atividade **9** contribui para o trabalho com as competências gerais **2**, **7** e **9** ao propor a investigação, a reflexão e a realização de uma análise crítica para formular e defender ideias e a habilidade **EM13MAT506**, pois, em duplas, os estudantes devem classificar as funções perímetro P e área A do triângulo equilátero e analisar como a medida do lado x varia em um gráfico.

LADRILHAMENTO

O trabalho com este tópico contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT505**, ao levar os estudantes a investigar e a resolver problemas de ladrilhamento do plano por polígonos.

É provável que você já tenha encontrado um piso ou uma parede coberta com ladrilhos. Observe alguns exemplos a seguir.


Dong Nhat Huy/Shutterstock.com/ID/BR

Ladrilhos retangulares.


Peyker/Shutterstock.com/ID/BR

Ladrilhos em formato hexagonal.

Essas imagens mostram **ladrilhamentos** do plano, ou seja, uma parte do plano preenchida com ladrilhos, sem sobreposição ou buracos.

Essa técnica de revestimento tem sido usada desde que o ser humano começou a utilizar pedras para cobrir o chão e as paredes de suas casas. As mais antigas peças de ladrilho foram encontradas no Egito e datam de 5 000 anos a.C. Com o tempo, cores, desenhos e padrões passaram a fazer parte dos ladrilhos, de modo que eles também pudessem ser apreciados por seu visual. Desde o calçamento das vias na Roma Antiga até os palácios da Alhambra, no município de Granada (Espanha), construídos por mouros e cristãos, entre os séculos XIII e XV, ao longo dos tempos os ladrilhamentos têm sido úteis, além de serem belos; por isso, estão presentes hoje em muitos espaços e cenários de nossa vida cotidiana.


joserpizarro/Shutterstock.com/ID/BR

Piso decorativo.

Ladrilhamentos

O objeto digital permite explorar ladrilhamentos em diferentes contextos e temáticas.

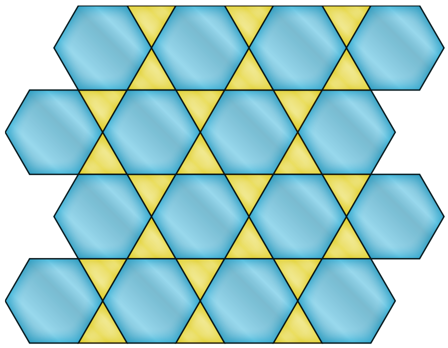
Atualmente, essa técnica de ladrilhamento, também chamada de mosaico, pode ser observada em papéis de parede, pisos decorativos com cerâmicas ou pedras, pisos e forros de madeira, estamparias de tecidos, malharias, artesanatos, etc.

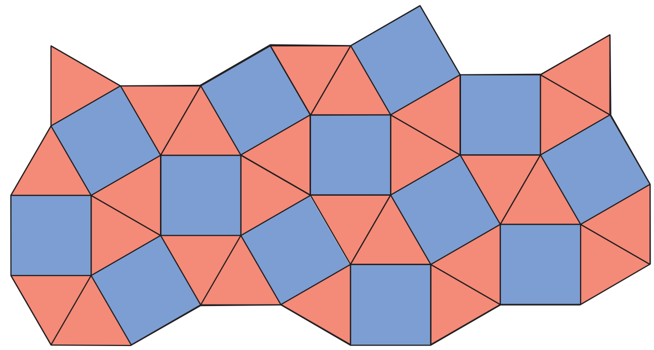

Darren Platts/iStock/Getty Images

Tapete.

Não escreva no livro.

Um mosaico pode ser formado por mais de um tipo de polígono.





Ilustrações: ID/BR

Ladrilhamentos no plano euclidiano

Vamos estudar o ladrilhamento do ponto de vista da Matemática, considerando mosaicos que usam apenas polígonos regulares e mantêm a mesma distribuição das peças nos vértices.

Assim, serão trabalhados mosaicos cuja composição de ladrilhos satisfaz as seguintes condições:

- os ladrilhos são polígonos regulares;
- a intersecção de dois polígonos é sempre um lado ou um vértice, ou é vazia;
- os tipos de ladrilho que se encontram em cada vértice são sempre os mesmos, pois a distribuição ao redor de cada vértice segue um mesmo padrão.

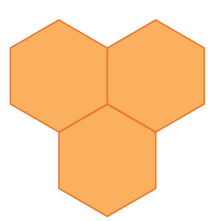
Vamos estudar dois tipos de mosaico que satisfazem essas condições: os mosaicos **regulares** e os **semirregulares**.

Mosaicos regulares

Um mosaico regular é formado por polígonos regulares de um só tipo, e todos eles são congruentes.

Vamos verificar se é possível montar um mosaico regular com alguns tipos de polígono regular.

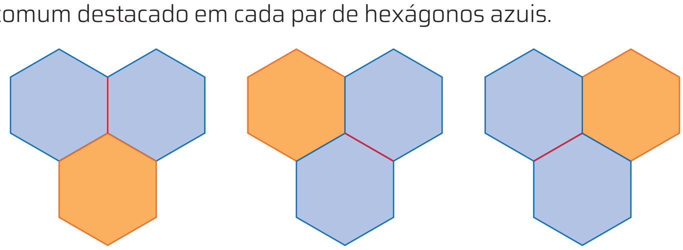
O mosaico representado a seguir é formado por hexágonos regulares congruentes.



ID/BR

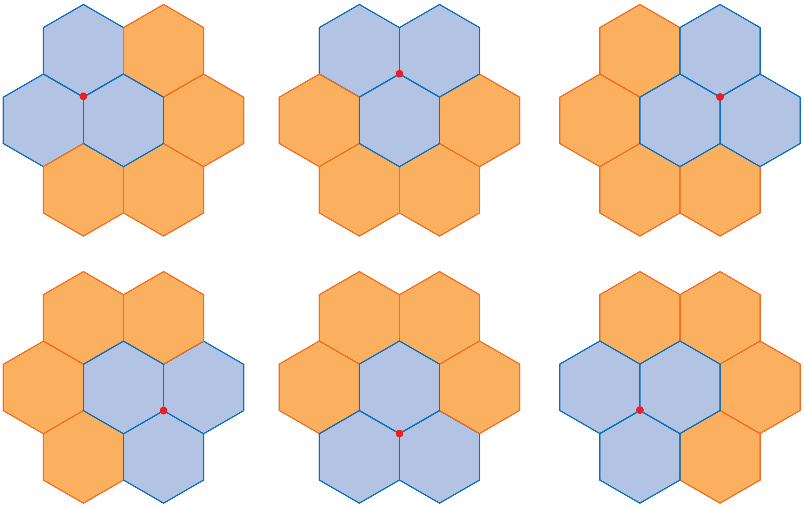
Vamos conferir se esse padrão de figuras pode ser usado de modo a produzir um mosaico regular.

- Os ladrilhos são hexágonos regulares congruentes; portanto, são polígonos regulares.
- Nesse mosaico, a intersecção de dois polígonos é sempre um lado. Verifique o lado comum destacado em cada par de hexágonos azuis.



Ilustrações: ID/BR

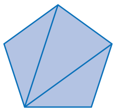
- Em cada vértice, três hexágonos se encontram. Verifique que no mosaico a distribuição ao redor de cada vértice segue sempre o mesmo padrão, ou seja, sempre haverá três hexágonos ao redor de um vértice.



Ilustrações: ID/BR

Como as três condições foram satisfeitas, concluímos que é possível fazer um mosaico regular usando hexágonos regulares.

Agora, vamos tentar fazer um mosaico usando pentágonos regulares. Para isso, podemos decompor o pentágono em três triângulos.

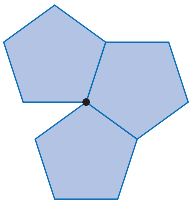


ID/BR

Como é possível decompor o pentágono regular em três triângulos e a soma dos ângulos internos de cada triângulo é 180°, então a soma dos ângulos internos de um pentágono é igual a 540°, pois $3 \cdot 180° = 540°$. Como o pentágono é regular, cada ângulo interno mede 108°, pois $540° : 5 = 108°$.

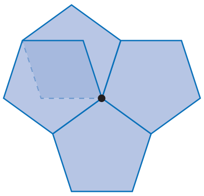
Imagine um vértice do mosaico no qual se encontram apenas pentágonos regulares. Para que os pentágonos recubram o plano sem qualquer buraco ou sobreposição, a soma das medidas dos ângulos ao redor desse vértice precisa ser igual a 360°.

Se houver três pentágonos ao redor de cada vértice, a soma das medidas dos ângulos ao redor do vértice será igual a 324°, pois $3 \cdot 108° = 324°$. Assim, sobrará um espaço do plano, como podemos observar na imagem a seguir.



ID/BR

Se houver quatro pentágonos ao redor de cada vértice, a soma das medidas dos ângulos ao redor do vértice será igual a 432°, pois $4 \cdot 108° = 432°$. Assim, haverá sobreposição de pentágonos, como podemos observar na imagem a seguir.



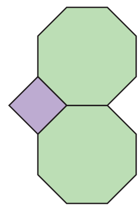
ID/BR

Logo, não é possível fazer um mosaico regular usando pentágonos regulares.

Mosaicos semirregulares

Esse tipo de mosaico é formado por dois ou mais tipos de polígono regular, sendo que os polígonos de mesmo tipo são congruentes.

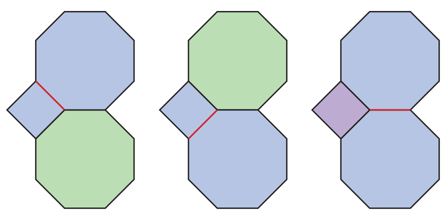
Vamos observar um mosaico formado por dois tipos de polígono regular.



ID/BR

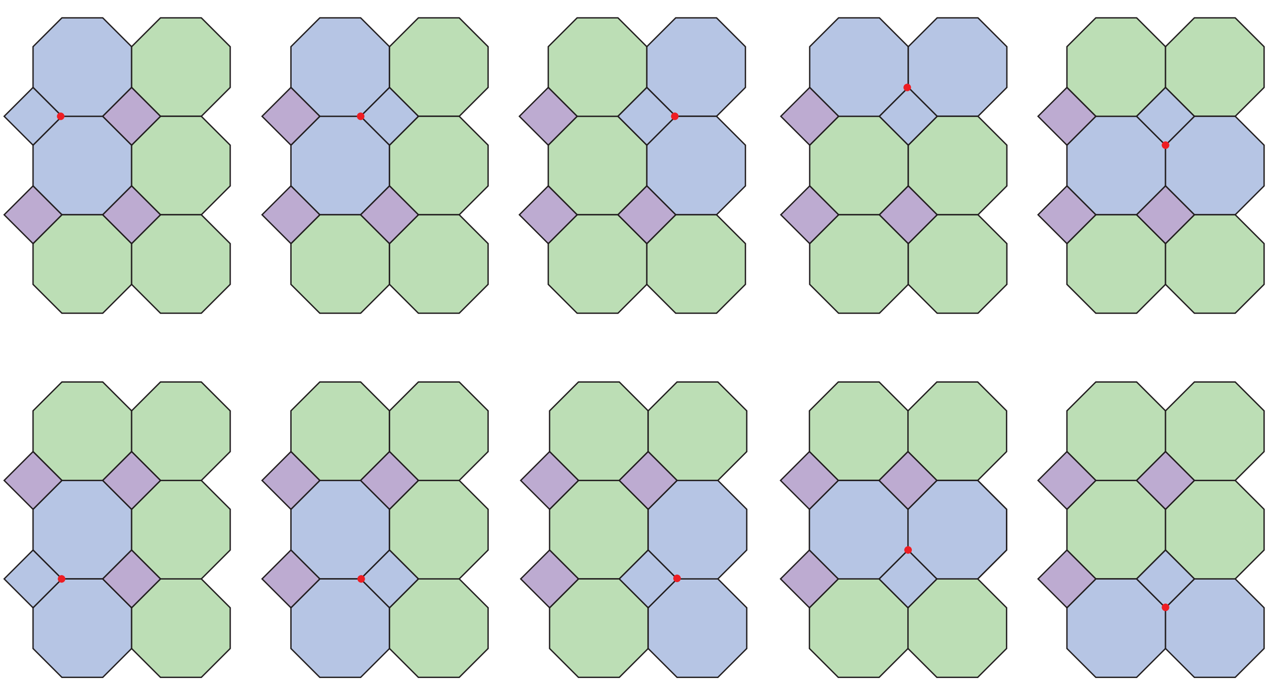
Esse mosaico é formado por dois octógonos regulares congruentes e um quadrado.

Vamos conferir se as condições da composição com ladrilhos que queremos trabalhar são atendidas.



Ilustrações: ID/BR

- Os ladrilhos são octógonos regulares congruentes e quadrados; portanto, são polígonos regulares.
- Nesse mosaico, a intersecção de dois polígonos é sempre um lado. Observe, a seguir, que, a cada par de polígonos destacado, a intersecção é sempre um lado.
- Em cada vértice, dois octógonos e um quadrado se encontram. Perceba que, se ampliarmos o mosaico, a distribuição ao redor de cada vértice segue sempre o mesmo padrão, ou seja, sempre haverá dois octógonos e um quadrado ao redor de um vértice.



Ilustrações: ID/BR

Concluímos, assim, que o mosaico composto de octógonos regulares congruentes e quadrados é um mosaico semirregular.

Construção de ladrilhamentos regulares e semirregulares

O objeto digital aprofunda o estudo de ladrilhamentos mostrando a construção de ladrilhamentos regulares e semirregulares e explorando diferentes composições geométricas.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R4 **(Uece) Em muitas edificações, são usados ladrilhos cerâmicos no revestimento de pisos planos, pelo fato de as peças cerâmicas usadas possuírem padrões geométricos que permitem os encaixes lado a lado sem deixar brechas. Desejamos ladrilhar um ambiente em forma de L com cantos retangulares, utilizando peças cerâmicas que possuem a forma de um retângulo cujas dimensões de cada uma delas são 45 cm de largura por 60 cm de comprimento. Considerando que o perímetro do ambiente em forma de L é composto por seis segmentos de reta cujas medidas dos comprimentos são 9 m, 9 m, 12 m, 15 m, 18 m, e 27 m, admitindo-se que não há corte de peças e que se use *n* peças para o revestimento total do piso, é correto afirmar que o valor de *n* pode ser**

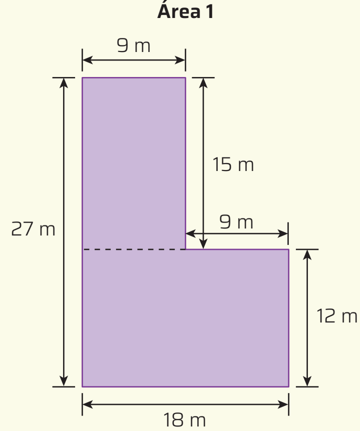
a) 1350 ou 1450.
b) 1300 ou 1400.
c) 1200 ou 1500.
d) 1250 ou 1350.

Resolução

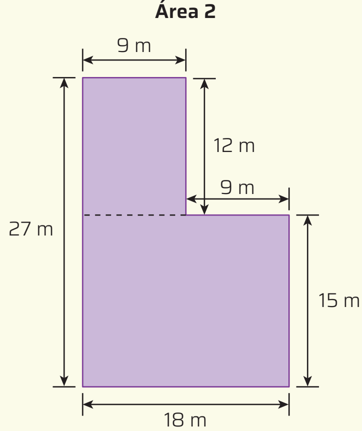
As dimensões das peças cerâmicas são 45 cm de largura por 60 cm de comprimento, que, em metro, são 0,45 m × 0,60 m. Logo, a área desse retângulo mede 0,27 m².

Vamos fazer um esboço do ambiente em forma de L, conforme as indicações do enunciado. Temos duas possibilidades:

Área 1



Área 2



Ilustrações: ID/BR

Assim, as áreas A_I e A_{II} desses ambientes medem, em metros quadrados:

$$A_I = (9 \cdot 15 + 18 \cdot 12)\ m^2 = 351\ m^2$$

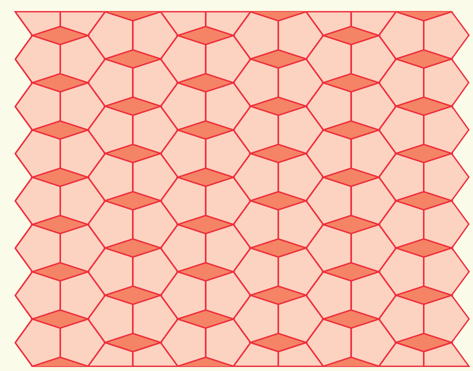
$$A_{II} = (9 \cdot 12 + 18 \cdot 15)\ m^2 = 378\ m^2$$

Dessa forma, o número de peças cerâmicas necessárias para cobrir as áreas totais do ambiente em forma de L é igual a:

$$n = \frac{351}{0{,}27} = 1300 \text{ ou } n = \frac{378}{0{,}27} = 1400$$

Logo, a alternativa **b** é a correta.

R5 **O mosaico da figura a seguir é composto de losangos congruentes entre si e de pentágonos regulares, também congruentes entre si.**



ID/BR

A razão entre as medidas das áreas de um pentágono e de um losango, nessa ordem, é igual a *R*. Qual é a razão entre a medida da área da região clara e a medida da área da região escura, nessa ordem?

Resolução

A razão entre as medidas das áreas de um pentágono e de um losango é dada por:

$$\frac{\text{medida da área de um pentágono}}{\text{medida da área de um losango}} = R$$

Observamos que, no mosaico, o padrão que se repete é formado por 15 pentágonos e 7,5 losangos.

Podemos ver também que a área clara do mosaico é formada pelos pentágonos, que a área escura é formada pelos losangos e que o padrão do mosaico se repete exatamente 6 vezes. Assim, a razão entre a medida da área da região clara e a medida da área da região escura é dada por:

$$\frac{\text{medida da área da região clara}}{\text{medida da área da região escura}} =$$

$$= \frac{\text{medida da área de 90 pentágonos}}{\text{medida da área de 45 losangos}} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\text{medida da área de um pentágono}}{\text{medida da área de um losango}} = 2R$$

Então, a razão entre a medida da área da região clara e a medida da área da região escura é igual a $2R$.

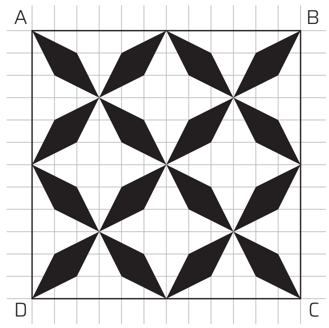
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Ao realizar as atividades **10**, **11** e **13**, os estudantes desenvolvem a habilidade **EM13MAT505** na medida em que investigam e resolve problemas de ladrilhamento do plano por polígonos.

10 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Vunesp) O mosaico da figura adiante foi desenhado em papel quadriculado 1×1. A razão entre a parte escura e a parte clara, compreendida pelo quadrado *ABCD*, é: Alternativa **a**.

a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{3}{5}$. d) $\frac{5}{7}$. e) $\frac{5}{8}$.



Vunesp. Fac-símile: ID/BR

11 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(UFSCar-SP) A figura **1** representa um determinado encaixe no plano de 7 ladrilhos poligonais regulares (1 hexágono, 2 triângulos, 4 quadrados), sem sobreposições e cortes.

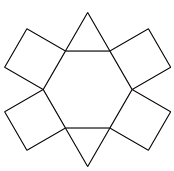


Figura 1

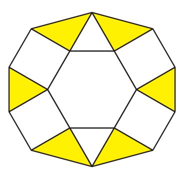


Figura 2

UFSCar-SP Fac-símile: ID/BR

Em relação aos 6 ladrilhos triangulares colocados perfeitamente nos espaços da figura **1**, como indicado na figura **2**, é correto dizer que: Alternativa **d**.

a) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 15°.

b) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 30°.

c) 2 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 50° e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 30°.

d) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos retângulos isósceles.

e) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos escalenos.

12 **Reúna-se com três colegas para fazer o que se pede.**

a) Sabendo que existem somente três tipos de mosaico regular, descubram quais são os polígonos que compõem esses mosaicos. Consulte as respostas no Manual do Professor.

b) Deem três exemplos de mosaicos semirregulares.

c) Tentem formular uma regra para descobrir quais combinações de polígonos regulares é possível fazer ao redor de um vértice.

d) É possível ladrilhar o plano usando quatro tipos de polígono regular? Se sim, quais seriam esses polígonos?

13 **Indique a alternativa correta no caderno.** Alternativa **b**.

(Enem) Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

Enem. Fac-símile: ID/BR

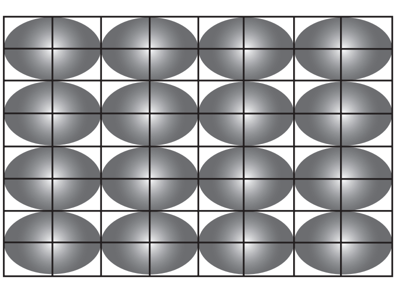


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano.

Enem. Fac-símile: ID/BR

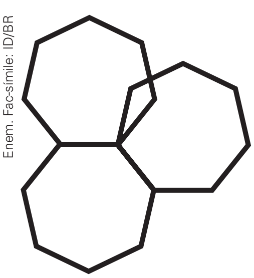
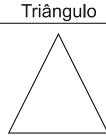
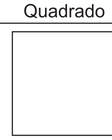
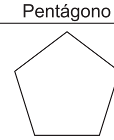
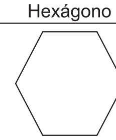
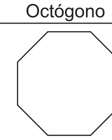
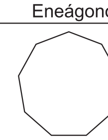


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição).

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Eneágono
Figura						
Ângulo interno	60°	90°	108°	120°	135°	140°

Enem. Fac-símile: ID/BR

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um:

a) triângulo. b) quadrado. c) pentágono. d) hexágono. e) eneágono.

A atividade **12** contribui para a aquisição das competências gerais **2** e **9**, podendo ser resolvida com o apoio de *softwares* de geometria dinâmica para a tentativa de produção dos mosaicos. Momentos como esse possibilitam aos estudantes exercitar o diálogo e a cooperação.

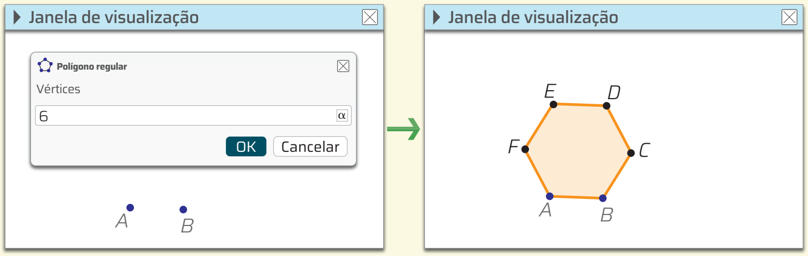
TECNOLOGIA

Há diversos tipos de *software* de geometria dinâmica disponíveis na internet; as etapas apresentadas foram testadas no GeoGebra.

Podemos usar um *software* de geometria dinâmica para construir mosaicos. Alguns programas desse tipo podem ser encontrados gratuitamente na internet. Baixe e instale um deles. Lembre-se de verificar se você está baixando o arquivo de um *site* confiável.

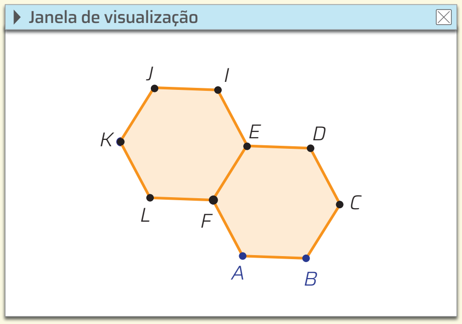
Acompanhe a seguir as etapas para construir um mosaico com hexágonos regulares em um desses *softwares*.

1ª etapa: Inicialmente, vamos construir um hexágono regular. Para isso, com a opção "Polígono regular"  selecionada, clicamos em dois pontos na janela de visualização. Na caixa de texto que abrir, digitamos 6, correspondente à quantidade de lados do polígono, e clicamos em "ok" para construir o hexágono *ABCDEF*.



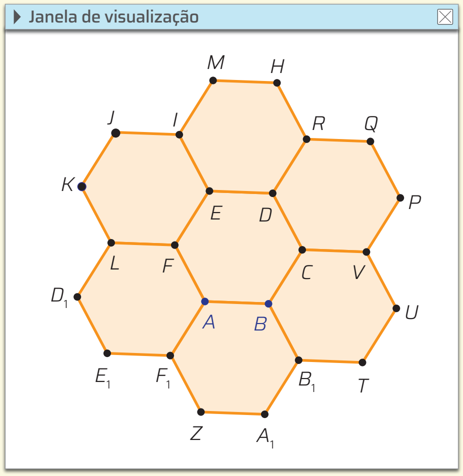
Nelson Matsuda/ID/BR

2ª etapa: Para a construção do mosaico, utilizaremos os vértices do hexágono *ABCDEF* como base para os próximos hexágonos. Por exemplo, com a mesma ferramenta da etapa anterior selecionada, clicamos nos pontos *F* e *E*, nessa ordem, e de maneira semelhante a anterior, construímos o hexágono *FEIJKL*.



Nelson Matsuda/ID/BR

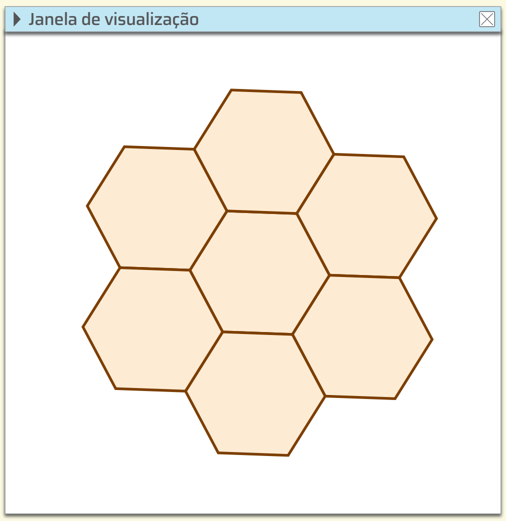
3ª etapa: De maneira análoga à etapa anterior, construímos outros hexágonos compondo o mosaico.



Nelson Matsuda/ID/BR

Não escreva no livro.

4ª etapa: Podemos, ainda, personalizar o mosaico criado, por exemplo, mudando a cor e aumentando ou diminuindo a espessura do fio, escondendo alguns elementos, entre outras opções. Para isso, basta buscar essas opções nas configurações do *software*. Na janela que abrir, podemos alterar diversas propriedades do polígono selecionado. Observe a seguir o mosaico construído na etapa anterior, com algumas mudanças realizadas.



Nelson Matsuda/ID/BR

Atividades As atividades a seguir, sobre ladrilhamentos com apoio de geometria dinâmica, desenvolvem a criatividade e a capacidade investigativa dos estudantes, promovendo, assim, a aquisição das habilidades **EM13MAT505** e **EM13LGG701**.

1 Com um *software* de geometria dinâmica, crie um mosaico usando polígonos. Em seguida, compartilhe sua obra com os colegas e o professor.

2 Com um *software* de geometria dinâmica, crie um mosaico usando diferentes tipos de polígonos regulares. Em seguida, compartilhe sua obra com os colegas e o professor.

3 Os mosaicos que você criou nas atividades anteriores são de qual tipo: regulares ou semirregulares? Ou não são de nenhum desses tipos?

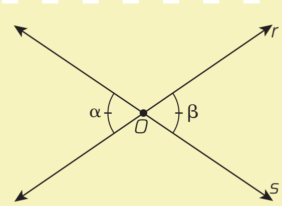
4 Utilizando um *software* de geometria dinâmica, verifique com quais polígonos é possível criar um mosaico regular.

CÁLCULO RÁPIDO

Lembre-se de que:

- dois ângulos são **complementares** se a soma de suas medidas é 90°;
- dois ângulos são **suplementares** se a soma de suas medidas é 180°;
- dois ângulos são chamados de **opostos pelo vértice** se têm o mesmo vértice e as semirretas que os definem pertencem às mesmas retas.

Os ângulos α e β são opostos pelo vértice e, por isso, têm a mesma medida.



ID/BR

1 Calcule mentalmente a medida do complemento do ângulo em cada caso.

a) 12° 78°
b) 27° 63°
c) 35° 55°
d) 41° 49°
e) 59° 31°
f) 68° 22°
g) 76° 14°
h) 84° 6°
i) 3° 87°
j) x $90° - x$

Não escreva no livro.

2 Calcule a medida do suplemento de cada medida do ângulo em cada caso.

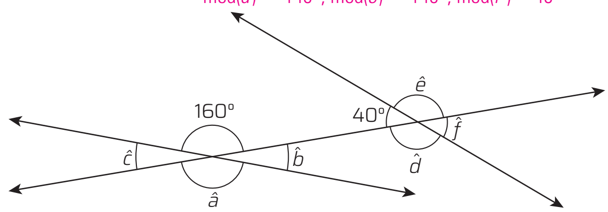
a) 37° 143°
b) 79° 101°
c) 98° 82°
d) 105° 75°
e) 156° 24°
f) 42° 138°
g) 87° 93°
h) 124° 56°
i) 161° 19°
j) y $180° - y$

3 Dois ângulos são complementares e um deles mede o dobro do outro. Qual é a medida de cada um desses ângulos? 30° e 60°.

4 Dois ângulos são suplementares e um deles mede a metade do outro. Quanto mede cada ângulo? 60° e 120°.

5 Calcule mentalmente as medidas dos ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$ e $\hat{f}$. med($\hat{a}$) = 160°; med($\hat{b}$) = 20°; med($\hat{c}$) = 20°; med($\hat{d}$) = 140°; med($\hat{e}$) = 140°; med($\hat{f}$) = 40°

ID/BR



PARA RECORDAR

Mais um conjunto de atividades variadas para você estudar, retomar conteúdos e avançar na capacidade de resolver problemas.

1 Qual é o valor numérico de $P = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ para $a = 0{,}1$ e $b = 0{,}2$? $-0{,}007$

2 Indique a alternativa correta no caderno. Alternativa **b**.

Felipe e Carlos estão conversando sobre o conceito de grandezas inversamente proporcionais. Acompanhe o diálogo entre eles.

@mickart_/ID/BR

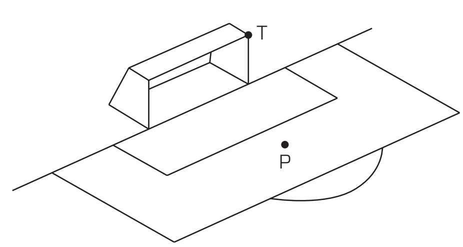
Considere que o tempo restante para o final de semestre e a quantidade de trabalhos para entregar sejam duas grandezas, respectivamente, s e t, inversamente proporcionais.

A relação entre s e t pode ser representada por:

a) $s = \dfrac{8}{t^2}$
b) $s = \dfrac{10}{t}$
c) $s = \dfrac{4}{t + 1}$
d) $s = \dfrac{3t + 5}{2}$

3 Indique a alternativa correta no caderno. Alternativa **a**.

(Insper-SP) A figura mostra parte de um campo de futebol, em que estão representados um dos gols e a marca do pênalti (ponto P). Considere que a marca do pênalti equidista das duas traves do gol, que são perpendiculares ao plano do campo, além das medidas a seguir, que foram aproximadas para facilitar as contas.



Insper-SP. Fac-símile: ID/BR

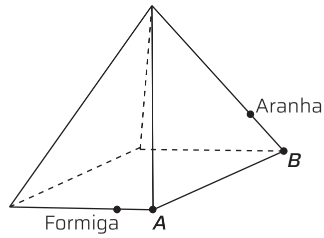
- Distância da marca do pênalti até a linha do gol: 11 metros.
- Largura do gol: 8 metros.
- Altura do gol: 2,5 metros.

Um atacante chuta a bola da marca do pênalti e ela, seguindo uma trajetória reta, choca-se contra a junção da trave esquerda com o travessão (ponto T). Nessa situação, a bola terá percorrido, do momento do chute até o choque, uma distância, em metros, aproximadamente igual a:

a) 12.
b) 14.
c) 16.
d) 18.
e) 20.

4 **Escreva a alternativa correta no caderno.** Alternativa **a**.

(Obmep) A figura a seguir representa uma pirâmide de base quadrada cujas arestas medem 1 m. Uma formiga e uma aranha estão nas posições indicadas, a 25 cm dos vértices A e B, respectivamente. Qual é a menor distância que a aranha deve percorrer para chegar até a formiga, andando somente sobre as faces triangulares da pirâmide?



Obmep. Fac-símile: ID/BR

a) 1 m   b) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ m   c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m   d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ m   e) $\frac{4}{5}$ m

5 **Escreva a alternativa correta no caderno.** Alternativa **a**.

(Obmep) Turmalinas são pedras preciosas cujo valor varia de acordo com o peso; se uma turmalina pesa o dobro de outra, então seu valor é cinco vezes o dessa outra. Zita, sem saber disso, mandou cortar uma turmalina que valia R$ 1000,00 em quatro pedras iguais. Quanto ela irá receber se vender os quatro pedaços?

a) R$ 160,00   b) R$ 200,00   c) R$ 250,00   d) R$ 400,00   e) R$ 500,00

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Aqui estão dois problemas para você avaliar sua habilidade para organizar informações e raciocinar dedutivamente.

1 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Obmep) Ana, Beatriz, Cláudia, Daniela e Érica foram visitar a vovó Margarida. Beatriz chegou antes de Ana e depois de Daniela. Já Cláudia, Daniela e Érica chegaram uma em seguida da outra, nessa ordem. Quem foi a primeira a chegar? Alternativa **c**.

a) Ana   b) Beatriz   c) Cláudia   d) Daniela   e) Érica

2 **Indique a alternativa correta no caderno.** Alternativa **a**.

(Obmep) Uma melancia média e duas melancias grandes custam o mesmo que oito melancias pequenas. Uma melancia média e uma pequena custam o mesmo que uma melancia grande. Quantas melancias pequenas podem ser compradas pelo mesmo preço de uma melancia grande?

a) 3   b) 4   c) 5   d) 6   e) 7

As respostas e o resumo elaborados pelos estudantes podem ser instrumentos de avaliação das aprendizagens esperadas ao final deste capítulo. É interessante conversar com eles sobre a estratégia de estudo que adotaram durante a produção proposta na seção *Palavras-chave*, para que eles possam se conscientizar dessa maneira de estudar e possam utilizá-la em outras situações. Explicite que o objetivo é desenvolver estratégias de autogestão para aprender.

PALAVRAS-CHAVE

Releia o capítulo, suas anotações e as atividades e problemas que você resolveu.

Depois, responda no caderno às seguintes questões:

- O que significa área de uma figura plana?
- Quais são as principais unidades de medida de área? Onde são usadas?
- O que é ladrilhamento ou mosaico do plano?

Faça um resumo com as fórmulas para o cálculo das áreas de triângulos, quadriláteros, hexágonos regulares e círculos.

Anote também todos os termos que apareceram neste capítulo e que você considera importantes de serem lembrados.

O que você acaba de fazer é uma das várias estratégias utilizadas para estudar. Agora, você terá mais conhecimentos sobre áreas e ladrilhamentos do que quando estava realizando as atividades do capítulo.

MATEMÁTICA E MEIO AMBIENTE

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **4**, **7** e **9** propostas pela BNCC, permitindo que os estudantes entendam e expliquem a realidade, aprendendo e colaborando para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Além disso, esta seção possibilita uma integração com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, além de trabalhar os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Meio Ambiente, especificamente a educação ambiental. Além disso, tem como objetivos desenvolver a habilidade leitora dos estudantes em relação a textos de divulgação científica e propor atividade de investigação com a vivência de um processo criativo na elaboração de infográficos. Assim, são trabalhadas as habilidades relacionadas às competências **1** e **2** da área de Matemática e suas Tecnologias, em especial as habilidades **EM13MAT103** e **EM13MAT201**, ao propor medidas de recuperação específicas para o bioma da região em que moram.

Combate ao desmatamento

Se julgar conveniente, convide um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para participar das discussões.

Você certamente já conhece os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS). Formulados em 2015 por representantes dos 193 Estados-membros da Organização das Nações Unidas (ONU) e da sociedade civil, os ODS constituem um plano de ação que abrange questões de desenvolvimento social e econômico e visa desenvolver, até 2030, pontos de melhoria para a população global.

O plano é composto de 17 objetivos. Os de número 11, 12 e 13 são, respectivamente, “Cidades e comunidades sustentáveis”, “Consumo e produção responsáveis” e “Ação contra a mudança global do clima”. Para que eles sejam alcançados, são necessárias diversas ações, entre elas, o combate ao desmatamento.

Leia o texto a seguir para conhecer os dados sobre o desmatamento no Brasil, em 2023.

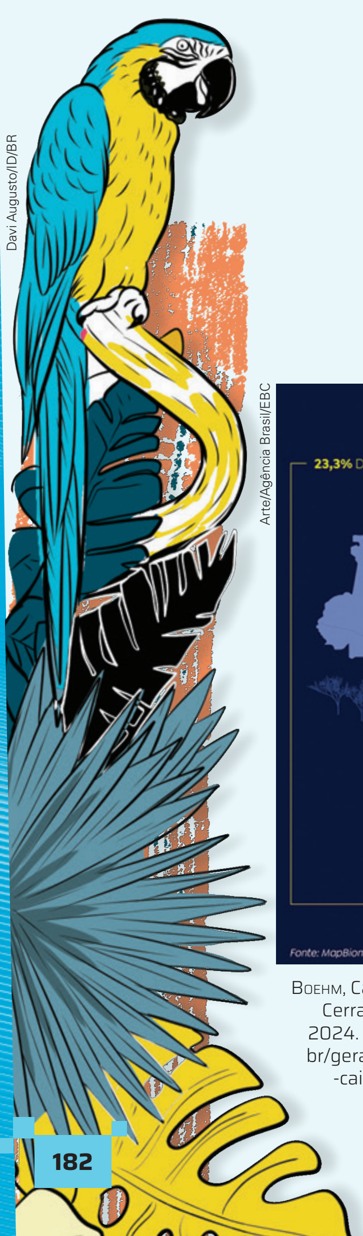
Área desmatada no Brasil cai 11,6%; no Cerrado, sobe

Bioma concentra mais da metade da região de desmate

Mais da metade de toda a área desmatada no Brasil em 2023 está localizada no Cerrado, apontou o Relatório Anual do Desmatamento (RAD) do MapBiomas [...]. Pela primeira vez desde o início da série histórica, em 2019, o Cerrado ultrapassou a Amazônia em termos de área desmatada. Quase todo o desmatamento do país (97%), nos últimos cinco anos, teve a expansão agropecuária como vetor, destacou o relatório.

O levantamento mostrou que, nos últimos cinco anos, o Brasil perdeu 8 558 237 hectares de vegetação nativa, o equivalente a duas vezes o estado do Rio de Janeiro. No entanto, em 2023, houve uma queda de 11,6% na área desmatada: ao todo, 1 829 597 hectares de vegetação nativa foram suprimidos em 2023. Em 2022, esse total foi de 2 069 695 hectares. Essa redução se deu apesar de um aumento de 8,7% no número de alertas, na mesma comparação.

O MapBiomas ressalta que os dados apontam a primeira queda do desmatamento no Brasil desde 2019, quando se iniciou a publicação do RAD. Por outro lado, a avaliação é de que a cara do desmatamento está mudando, se concentrando nos biomas onde predominam formações savânicas e campestres e diminuindo nas formações florestais.



Davi Augusto/ID/BR

Arte/Agência Brasil/EBC

Cerrado

Em 2023, 61% da área desmatada em todo o país estava no Cerrado e 25% na Amazônia. Foram 1 110 326 hectares desmatados no Cerrado, no ano passado [2023], um crescimento de 68% em relação a 2022. Na Amazônia, a área de vegetação suprimida no ano passado foi de 454,3 mil hectares – uma queda de 62,2% em relação a 2022.

Com exceção do Piauí, São Paulo e Paraná, todos os outros estados que concentram o Cerrado registraram aumento do desmatamento em 2023 na comparação com 2022. No caso do Maranhão, Tocantins, Goiás, Pará e Distrito Federal, a área desmatada mais do que dobrou.

Coordenadora do MapBiomas Cerrado, Ane Alencar lembra que o Cerrado – que já perdeu mais da metade de sua vegetação nativa –, passou a ser o protagonista do desmatamento no país, o que desperta preocupação:

“O Cerrado é um bioma estratégico no que diz respeito à questão hidrológica e o desmatamento do bioma tem um impacto grande na questão hídrica. Várias bacias que nascem no Cerrado banham outros biomas, então, nesse sentido, o desmatamento e a perda do Cerrado representam um impacto para os outros biomas.”

BOEHM, Camila. Área desmatada no Brasil cai 11,6%; no Cerrado, sobe. *Agência Brasil*, São Paulo, 28 maio 2024. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2024-05/area-desmatada-no-brasil-cai-116-diz-mapbiomas. Acesso em: 6 ago. 2024.

Não escreva no livro.

Em 2023, a área média desmatada por dia no país foi de 5 013 hectares ou 228 hectares por hora. Mais da metade foi no Cerrado, onde foram suprimidos 3 042 hectares de vegetação nativa por dia. O resultado é mais que o dobro da área desmatada na Amazônia, 1 245 hectares por dia, que, ainda assim, equivale a cerca de 8 árvores por segundo.

O dia com maior área desmatada em todo o país, no ano passado, foi 15 de fevereiro, quando a estimativa é que uma área equivalente a quase seis mil campos de futebol foi desmatada em apenas 24 horas.

[...]

BOEHM, Camila. Área desmatada no Brasil cai 11,6%; no Cerrado, sobe. *Agência Brasil*, São Paulo, 28 maio 2024. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2024-05/area-desmatada-no-brasil-cai-116-diz-mapbiomas. Acesso em: 6 ago. 2024.

Conectando ideias

Se possível, durante a realização da proposta da atividade **2**, incentive os estudantes a compreender como o PNSCA atua. Há informações disponíveis em: http://novacartografiasocial.com.br/apresentacao/ (acesso em: 15 out. 2024).

1 **Faça uma pesquisa sobre as principais causas do desmatamento no bioma Cerrado.** As principais causas do desmatamento no bioma Cerrado são a expansão agrícola e pecuária, a exploração de madeira, a urbanização e incêndios.

2 **Você sabe o que é cartografia social? A cartografia social é a representação espacial que comunidades tradicionais fazem dos locais ondem vivem, com o intuito de registrar o uso do espaço, conflitos territoriais e problemas socioambientais. Esse processo de automapeamento promove a identificação desses povos com os territórios que habitam e pode ser uma forma de resistência contra os problemas socioambientais que enfrentam. Nos *links* a seguir, você pode conhecer dois exemplos de atividades realizadas pelo Projeto Nova Cartografia Social da Amazônia (PNCSA):**

- Comunidades do Cerrado piauiense realizam o mapeamento social com o objetivo de combater o desmatamento na região. Disponível em: http://novacartografiasocial.com.br/nova-cartografia-social-no-cerrado-piauiense/. Acesso em: 15 out. 2024.
- Mapa do território do Riozinho, dos municípios de Santa Filomena e Ribeiro Gonçalves, no Piauí. Disponível em: http://novacartografiasocial.com.br/download/mapa-territorio-do-riozinho-comunidade-santa-fe-municipios-de-santa-filomena-e-ribeiro-goncalves-piaui/. Acesso em: 15 out. 2024.

Agora, faça o que se pede.

a) Pesquise outros projetos de mapeamento social na região do Cerrado brasileiro. Depois, elabore um cartaz para divulgar o projeto pesquisado. Ilustre esse cartaz com imagens e mapas produzidos pelas comunidades pesquisadas e, por fim, utilize uma plataforma de mapas e imagens de satélite *on-line*. Faça um mapa localizando a região onde o projeto foi desenvolvido e cole-o no cartaz.

b) Discuta com os colegas a relevância de projetos de cartografia social para as comunidades tradicionais, na busca por mitigar ou resolver problemas ambientais, como o desmatamento.

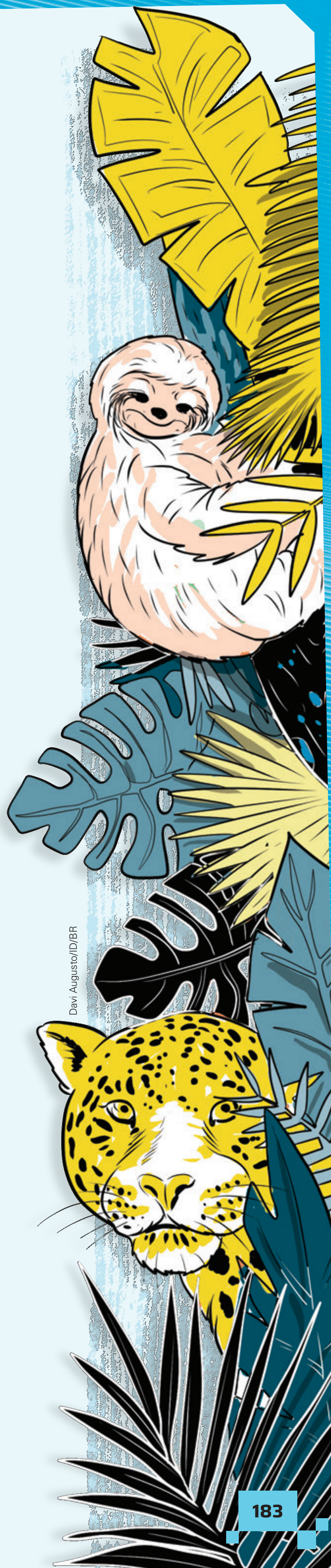
3 **O desmatamento é prejudicial ao meio ambiente, causando perda de biodiversidade e alterações climáticas. Por outro lado, o reflorestamento visa restaurar áreas degradadas, promovendo o plantio de novas árvores e vegetação original. Isso ajuda a recuperar ecossistemas danificados, a diminuir os efeitos das mudanças climáticas e a proteger os recursos naturais essenciais.**

Qual é a importância do reflorestamento na mitigação dos impactos causados pelo desmatamento no bioma da região onde vocês vivem?

- Reúnam-se em grupos e coletem informações sobre medida da área, em hectare, de desmatamento e de reflorestamento (se houver) do bioma predominante na região em que vocês moram.
- Proponham ações adequadas de recuperação desse bioma em uma área específica da região mapeada pelo grupo.
- Construam um infográfico para apresentar as propostas elaboradas e para ilustrar os dados da pesquisa realizada.

Você reconhece o esforço que precisa fazer para enfrentar situações novas como as dessas atividades? Explique a um colega.

Consulte o Manual do Professor para mais informações sobre essa atividade.



Davi Augusto/ID/BR

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Esta seção traz questões selecionadas para desenvolver a capacidade de leitura de textos característicos de provas e exames vestibulares e ampliar o repertório dos estudantes em termos de estratégias de resolução. Proponha a leitura da questão e solicite aos estudantes que resolvam o primeiro problema sem consultar a solução apresentada no livro, para, em seguida, comparar a estratégia e o registro próprios com aqueles apresentados.

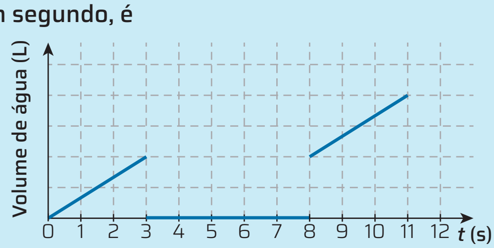
Esta seção, como a da unidade 1, tem o objetivo de destacar a importância da leitura e discutir algumas estratégias de resolução de questões de processos seletivos.

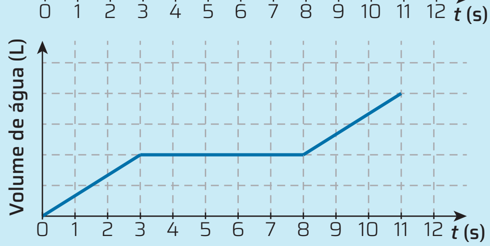
Escolhemos problemas que exigem uma maneira diferente de ler, ora com atenção voltada para a parte textual, ora com foco nos gráficos. Para a resolução, apresentamos algumas orientações que podem auxiliar na busca de respostas para questões típicas de processos seletivos.

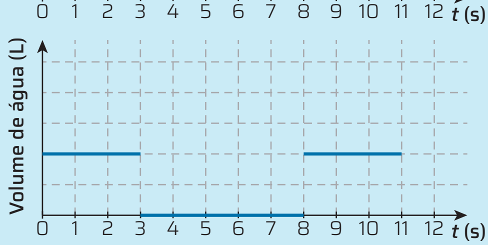
ENEM EM CONTEXTO

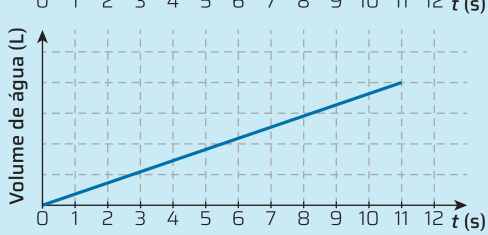
(Enem) Estudantes trabalhando com robótica criaram uma "torneira inteligente" que automatiza sua abertura e seu fechamento durante a limpeza das mãos. A tecnologia funciona da seguinte forma: ao se colocarem as mãos sob a torneira, ela libera água durante 3 segundos para que a pessoa possa molhá-las. Em seguida, interrompe o fornecimento de água por 5 segundos, enquanto a pessoa ensaboa suas mãos, e finaliza o ciclo liberando água para o enxágue por mais 3 segundos. Considere o tempo (*t*), em segundo, contado a partir do instante em que se inicia o ciclo. A vazão de água nessa torneira é constante.

Um esboço de gráfico que descreve o volume de água acumulado, em litro, liberado por essa torneira durante um ciclo de lavagem das mãos, em função do tempo (*t*), em segundo, é

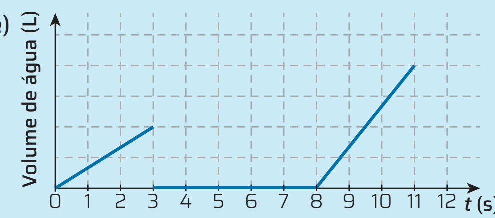
a)


b)


c)


d)


Ilustrações: Enem. Fac-símile: ID/BR

e)


Enem. Fac-símile: ID/BR

Resolução

Primeiro, vamos entender o problema e, em seguida, analisar cada uma das alternativas.

O texto do enunciado informa que, quando as mãos são colocadas sob uma torneira, esta realiza automaticamente três procedimentos:

- libera água por 3 s;
- interrompe o fornecimento de água por 5 s;
- libera água novamente por mais 3 s.

Outra informação indicada no texto, é que a vazão de água nessa torneira é constante. Isso significa que a torneira libera a mesma quantidade de água por determinado período, nesse caso, por segundo.

Assim, devemos determinar qual dos gráficos representa o volume de água acumulado liberado pela torneira: ele deve ser crescente no primeiro e terceiro intervalos, referentes aos períodos de 3 s em que há liberação de água, e constante no segundo intervalo, referente ao período de 5 em que não há liberação de água.

Agora, vamos analisar cada uma das alternativas.

O gráfico da alternativa **a** não está correto, pois nele o volume de água é zero no intervalo de 3 s a 8 s, não correspondendo ao volume acumulado.

O gráfico da alternativa **b** está correto, pois é crescente nos intervalos de 0 s a 3 s e de 8 s a 11 s, constante no intervalo de 3 s a 8 s e a quantidade de água não diminui em nenhum instante.

O gráfico da alternativa **c** não está correto, pois não é crescente nos intervalos correspondentes aos períodos de 3 s e indica volume zero no intervalo de 3 s a 8 s.

O gráfico da alternativa **d** não está correto, pois o volume de água no intervalo de 3 s a 8 s não é constante.

Não escreva no livro.

O gráfico da alternativa **e** não está correto, pois o volume de água no intervalo de 3 s a 8 s é zero e, de 8 s a 11 s, a quantidade de água liberada não é a mesma que aquela liberada no primeiro período de 3 s.
Logo, a alternativa **b** é a correta.
Você também pensou dessa forma? Analisou cada gráfico ou, de imediato, eliminou alguns deles?

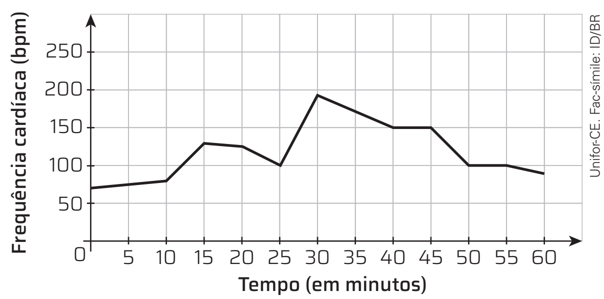
Explorando a estratégia

1 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Unifor-CE) A frequência cardíaca durante o exercício pode ajudar na perda de peso e na queima de gordura. Segundo especialistas do *site Medical News Today*, a frequência cardíaca máxima é de 220 batimentos por minuto (bpm). Para determinar o valor máximo adequado para um indivíduo, considerando a idade, basta fazer o seguinte cálculo: frequência cardíaca máxima − idade. De acordo com a Associação Americana do Coração (AHA, na sigla em inglês), durante o exercício, a frequência cardíaca deve ficar entre 50% e 85% do valor máximo, levando em consideração a idade.

Disponível em: www.veja.abril.com.br. Acesso em: 13 nov. 2020. (Adaptado)

O gráfico a seguir mostra a taxa de batimentos cardíacos de uma pessoa de 20 anos durante a prática de exercícios físicos por uma hora em um determinado dia.



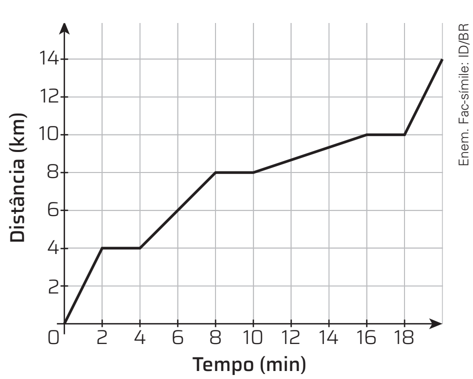
Em que momentos do treino dessa pessoa, a taxa de batimentos cardíacos estava em desacordo com o recomendado pelos especialistas? Alternativa **d**.

a) Nos primeiros 15 minutos e nos últimos 10 minutos.
b) Nos primeiros 10 minutos e na metade do treino.
c) Nos primeiros 12 minutos e nos últimos 5 minutos.
d) Nos primeiros 12 minutos, na metade do treino e nos últimos 5 minutos.
e) Em nenhum momento a taxa esteve fora do que os especialistas recomendam.

2 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Enem) O gráfico [...] associa a distância percorrida (em quilômetro) com o tempo (em minuto) gasto por um grupo de carros que partiu de um mesmo ponto e se deslocou em um trecho de uma rodovia. Esse grupo parou em três semáforos (S_1, S_2 e S_3) ao longo do percurso feito. Alternativa **d**.

As distâncias, em quilômetro, do ponto de partida a cada um dos semáforos S_1, S_2 e S_3 são



Teixeira, P. *et al. Funções 10º escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação, 1997.

a) 2, 6 e 8.
b) 2, 8 e 16.
c) 4, 4 e 2.
d) 4, 8 e 10.
e) 4, 10 e 18.

SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES

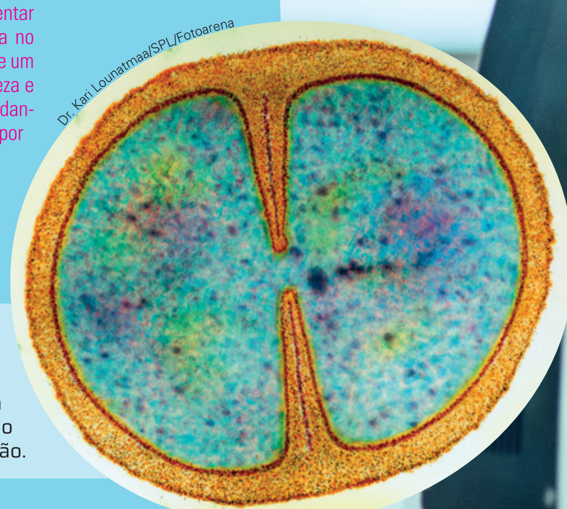
A forma de reprodução mais comum de uma bactéria se dá por um processo chamado de bipartição ou cissiparidade. Nesse processo, inicialmente ocorre a duplicação do DNA, seguido da divisão da célula bacteriana em duas células, cada uma correspondendo a uma nova bactéria. As duas novas bactérias também se dividem, cada uma gerando mais duas bactérias, e assim por diante.

Nesta unidade, você vai compreender que a quantidade de novas bactérias originadas desse processo de divisão celular forma uma sequência chamada progressão geométrica.

OBJETIVOS

- Identificar regularidades, definir e escrever sequências numéricas ou figurais de maneira recursiva ou não recursiva.
- Identificar progressões aritméticas e geométricas e compreender o valor de cada uma delas na construção do conhecimento matemático.
- Relacionar as progressões aritméticas a funções afins.
- Resolver problemas que envolvam os conceitos de progressões numéricas.
- Elaborar argumentos e escrever conclusões.

Se julgar conveniente, para complementar o trabalho com a temática apresentada no texto dessa abertura de unidade, convide um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, para explicar aos estudantes sobre a reprodução das bactérias por meio do processo de bipartição.



Dr. Kari Lounatmaa/SPL/Fotoarena

Bactéria *Staphylococcus epidermidis*; imagem colorizada; aumento de cerca de 58 000 vezes. Imagem obtida em um microscópio eletrônico de transmissão.

Jacob Wackerhausen/iStock/Getty Images

Pesquisadora utilizando equipamento de biotecnologia. ▶

UNIDADE 3

CAPÍTULO 8

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

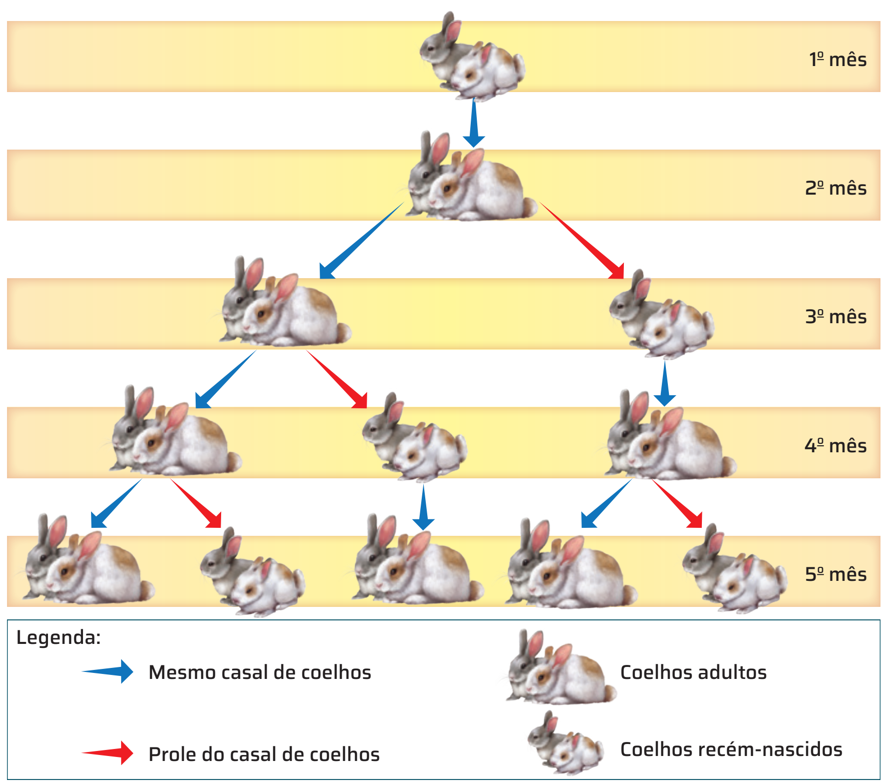
Este capítulo tem como objetivo principal desenvolver nos estudantes as competências específicas **4** e **5** ao propor que investiguem e elaborem hipóteses empregando a observação de padrões e experimentações, para compreender e utilizar, com flexibilidade, registros de representação algébricos e geométrico na resolução e na comunicação de resultados para diferentes situações-problema.

NESTE CAPÍTULO

- Sequências
- Padrões e regularidades
- Sequências numéricas e figurais
- Representação algébrica e geométrica de sequências numéricas

A natureza sempre foi observada com admiração, causando interesse nas pessoas em explorar e desvendar seus mistérios. Muitos estudiosos identificaram padrões em diversos elementos da fauna e da flora, inclusive em fenômenos naturais.

Entre os elementos que alguns estudiosos observaram, está a reprodução dos coelhos. Vamos considerar que um casal de coelhos recém-nascidos se torna fértil a partir do segundo mês de vida. Com base nessa informação, e no fato de que cada casal de coelhos gera um novo casal (prole) no mês seguinte e considerando que nenhum coelho morre neste período, surge o seguinte questionamento: Quantos casais de coelhos serão gerados em um ano?



Para realizar essa contagem, vamos fazer um quadro com a quantidade de casais de coelhos em cada mês por um ano.

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Quantidade de casais	1	1	2	3	5	/////	/////	/////	/////	/////	/////	/////

Você consegue completar o quadro a partir do sexto mês?

A resposta desse problema é que, ao fim de um ano, serão 144 casais de coelhos. Os números que representam a quantidade total de casais de coelhos a cada mês, durante um ano, são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

Esses números formam o que chamamos de **sequência numérica**. Se continuarmos indefinidamente, obteremos uma sequência bastante conhecida,

PARA EXPLORAR

Vídeo

Os caçadores de sons de Fibonacci. [*S. l.*: *s. n.*], 2012. 1 vídeo (10 min). Publicado pelo canal M3 Matemática Multimídia. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=OOK8fmzey_c. Acesso em: 11 jul. 2024.

Nesse vídeo, você vai conhecer outra aplicação da sequência de Fibonacci.

Livro

Enzensberger, Hans Magnus. *O diabo dos números*. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

Esse livro apresenta alguns conceitos de Matemática de maneira divertida e lúdica. Sua leitura, em especial da quinta e da sexta noites, vai ajudá-lo a refletir sobre as sequências que estudará nesta unidade.

Se julgar oportuno, incentive os estudantes a copiar e a completar o quadro no caderno antes de dar continuidade à leitura. Esse pode ser um momento propício para verificar os conhecimentos prévios deles sobre sequências.

Não escreva no livro.

chamada de **sequência de Fibonacci**. Esse nome foi dado em homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), mais conhecido como Fibonacci, cujo significado é "filho de Bonacci".

Nesta unidade, vamos estudar algumas sequências numéricas, em especial aquelas chamadas de **progressões aritméticas** e de **progressões geométricas**. Esse estudo vai contribuir para ajudá-los a resolver, por exemplo, situações que envolvem Matemática Financeira.

SEQUÊNCIAS

Uma sequência numérica é uma lista de números. Ela pode ser finita ou infinita e pode ter ou não uma lei de formação. Verifique dois exemplos.

- (5, 5, 4, 8, 6, 9, 1, 2) é uma sequência finita formada pelos algarismos que compõem o número de um telefone e não há padrão aparente que permita afirmar, com base nos termos anteriores, qual é o próximo termo.
- (1, 4, 16, 64, 256, ...) é uma sequência infinita formada pelos números naturais não nulos que são potências de 4. Essa sequência tem uma lei de formação: o primeiro termo é 1 e cada termo a partir do segundo é igual ao anterior multiplicado por 4.

Vamos nos concentrar em estudar sequências nas quais cada número sucede o anterior de acordo com determinada regra, de tal modo que é sempre possível saber se um número pertence ou não à sequência.

Existem muitas outras maneiras de construir sequências desse tipo. Acompanhe os exemplos a seguir.

Exemplo 1

Escolhemos um número para ser o **primeiro termo** da sequência, por exemplo, 5. Adicionamos a ele um número qualquer e obtemos o segundo termo. Neste caso, vamos adicionar 2 ao primeiro termo.

$$5 \underbrace{\qquad}_{+\,2} 7$$

Para obter os demais termos, vamos adicionando sempre o mesmo valor ao número anterior.

$$5 \underbrace{\qquad}_{+\,2} 7 \underbrace{\qquad}_{+\,2} 9 \underbrace{\qquad}_{+\,2} 11 \underbrace{\qquad}_{+\,2} 13$$

Exemplo 2

Assim como construímos uma sequência por meio da adição, podemos obter uma sequência ao subtrair sempre o mesmo valor do número anterior.

$$45 \underbrace{\qquad}_{-\,5} 40 \underbrace{\qquad}_{-\,5} 35 \underbrace{\qquad}_{-\,5} 30$$

Exemplo 3

Também podemos obter uma sequência multiplicando cada termo, a partir do primeiro, por um mesmo número.

$$2 \underbrace{\qquad}_{\times\,3} 6 \underbrace{\qquad}_{\times\,3} 18 \underbrace{\qquad}_{\times\,3} 54$$

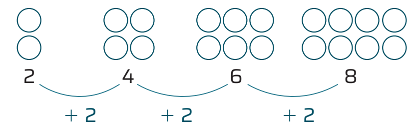
Exemplo 4

Outra maneira de se obter uma sequência é dividir cada termo, a partir do primeiro, por um mesmo número.

$$320 \underbrace{\qquad}_{\div\,2} 160 \underbrace{\qquad}_{\div\,2} 80 \underbrace{\qquad}_{\div\,2} 40$$

Exemplo 5 O exemplo **5** e as várias situações propostas a seguir possibilitam retomar e avaliar o conceito, a nomenclatura e as diferentes representações de funções estudadas na unidade 1.

É possível ainda construir sequências numéricas representando-as por figuras dispostas em uma ordem que se repete de acordo com um padrão.



O padrão de repetição dessa sequência é o acréscimo de duas bolinhas à direita ou à esquerda do termo anterior, sendo o primeiro termo composto de duas bolinhas.

De modo mais preciso:

Uma **sequência numérica infinita** é uma **função** cujo domínio é o conjunto dos números naturais não nulos.

Como exemplo, considere a sequência dada pela lei $f(n) = 2n$, em que $n \in \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Assim, temos:

- $f(1) = 2$
- $f(2) = 4$
- $f(3) = 6$
- $f(4) = 8$

Perceba que a função $f(n) = 2n$ indica a sequência dos números pares positivos, que representamos por (2, 4, 6, 8, ...).

Em geral, indicamos por a_n a imagem de n pela função f: $f(n) = a_n$.

Note que $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, ..., ou seja:

O índice n indica a posição do elemento, ou termo, a_n na sequência e o termo a_n é chamado de **termo geral** da sequência.

Assim:

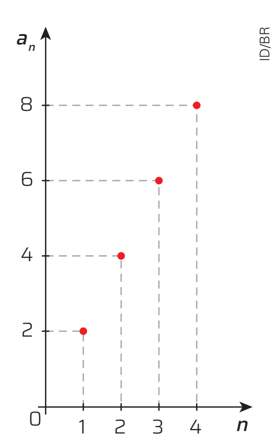
- a_1 é o primeiro termo da sequência;
- a_2 é o segundo termo da sequência;

⋮

- a_n é o n-ésimo termo, ou termo geral, da sequência;
- a_{n-1} é o termo antecessor de a_n;
- a_{n+1} é o termo sucessor de a_n.

A seguir está representado o gráfico da sequência dada pela lei $f(n) = 2n$. Observe que os pontos do gráfico da função $f(n) = 2n$ estão alinhados, mas o gráfico não é representado por uma reta, pois nesse caso consideramos apenas $n \in \mathbb{N}^*$.

Analise o gráfico com os estudantes e incentive-os a observar o que se alteraria nele se a função $f(n) = 2n$ fosse definida em $\mathbb{R}$. Aproveite para reforçar a compreensão de que, em $\mathbb{N}^*$, o gráfico corresponde a um conjunto de pontos e de que o significado de n na sequência (índice do termo) não permite $n \in \mathbb{R}$.



LEI DE FORMAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA

Considere a sequência (0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...). Nela, temos:

1º termo	2º termo	3º termo	4º termo	5º termo	6º termo	...	10º termo	...	20º termo
0 ou $3 \cdot 0$	3 ou $3 \cdot 1$	6 ou $3 \cdot 2$	9 ou $3 \cdot 3$	12 ou $3 \cdot 4$	15 ou $3 \cdot 5$	...	27 ou $3 \cdot 9$	...	57 ou $3 \cdot 19$

Lembre-se de que, para cada número a em $\mathbb{N}$, definimos seus múltiplos como os números obtidos pelo produto de a por um número natural. Assim, podemos dizer que essa sequência é formada pelos múltiplos de 3 em $\mathbb{N}$. Se chamarmos de n a posição de um termo da sequência, o n-ésimo termo dessa sequência pode ser representado por $3(n - 1)$.

Assim, a expressão $3(n - 1)$, com $n \in \mathbb{N}^*$, permite determinar qualquer termo da sequência dos múltiplos de 3. Dizemos que a expressão $3(n - 1)$ é a **lei de formação** (também chamada de **expressão geral**) dessa sequência e que n é a **variável** dessa lei, ou seja, $a_n = 3(n - 1)$ é o termo geral dessa sequência para $n \in \mathbb{N}^*$.

Agora, acompanhe outro exemplo.

Se $n \in \mathbb{N}^*$, n^2 é a lei de formação da sequência (1, 4, 9, 16, ...) de quadrados perfeitos.

n	1	2	3	4	5	...	25	...
n^2	1	4	9	16	25	...	625	...

O termo geral dessa sequência é $a_n = n^2$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$.

A lei de formação de uma sequência numérica pode aparecer de duas maneiras: termo geral ou fórmula de recorrência. Apresentamos, a seguir, cada uma delas.

Termo geral a_n

Cada termo é expresso em função de sua posição, ou seja, é dada uma fórmula que exprime a_n em função de n. Acompanhe os exemplos a seguir.

Exemplo 1

Considerando a sequência cujos termos são dados por $a_n = 1 + 4n$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

- Para $n = 1$: $a_1 = 1 + 4 \cdot 1 = 5$
- Para $n = 2$: $a_2 = 1 + 4 \cdot 2 = 9$
- Para $n = 3$: $a_3 = 1 + 4 \cdot 3 = 13$
- Para $n = 4$: $a_4 = 1 + 4 \cdot 4 = 17$

$\vdots$

Portanto, a sequência é (5, 9, 13, 17, ...).

Exemplo 2

Considerando a sequência cujos termos são dados por $a_n = n^3 - 1$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

- Para $n = 1$: $a_1 = 1^3 - 1 = 0$
- Para $n = 2$: $a_2 = 2^3 - 1 = 7$
- Para $n = 3$: $a_3 = 3^3 - 1 = 26$
- Para $n = 4$: $a_4 = 4^3 - 1 = 63$

$\vdots$

Portanto, a sequência é (0, 7, 26, 63, ...).

Fórmula de recorrência

São dadas duas regras: uma para identificar o primeiro termo (a_1) e outra para calcular cada termo (a_n) a partir do anterior (a_{n-1}). Acompanhe um exemplo.

Considere a sequência cujos termos obedecem às seguintes condições:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 4, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \end{cases}$$

Comente com os estudantes que um termo pode depender de mais de um termo anterior, como na sequência de Fibonacci. Nesse caso, teríamos mais de duas regras para formar a sequência.

Verifique que $a_1 = 3$ é a condição para o primeiro termo e que $a_n = a_{n-1} + 4$ é a lei de formação para os demais termos. Assim, temos:

- Para $n = 1$: $a_1 = 3$
- Para $n = 2$: $a_2 = a_1 + 4 = 3 + 4 = 7$
- Para $n = 3$: $a_3 = a_2 + 4 = 7 + 4 = 11$
- Para $n = 4$: $a_4 = a_3 + 4 = 11 + 4 = 15$

$\vdots$

Portanto, a sequência é (3, 7, 11, 15, ...).

TERMOS EQUIDISTANTES DOS EXTREMOS

Considere a sequência finita (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13). Os termos 1 e 13 são chamados **extremos** dessa sequência.

Dizemos que 5 e 9 são termos equidistantes dos extremos dessa sequência, pois existem dois termos antes do 5 e dois termos depois do 9.

$$(\underbrace{1,\ 3}_{2\text{ termos}},\ 5,\ 7,\ 9,\ \underbrace{11,\ 13}_{2\text{ termos}})$$

Os elementos 1 e 13 e os elementos 3 e 11 também são equidistantes dos extremos dessa sequência.

Considere uma sequência finita de n termos:

$$(a_1, a_2, ..., a_p, ..., a_q, ..., a_{n-1}, a_n), \text{ com } p < q$$

Os termos a_p e a_q são **equidistantes dos extremos** a_1 e a_n se o número de termos que antecedem a_p e o número de termos que sucedem a_q são iguais, isto é:

$$\text{se } p - 1 = n - q, \text{ então } p + q = n + 1$$

Note que as operações são feitas com os índices que determinam a posição do elemento na sequência, e não com os termos da sequência.

Acompanhe os exemplos.

Exemplo 1

A sequência (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12) tem sete termos. Nessa sequência:

- o terceiro (a_3) e o quinto (a_5) termos, 4 e 8, são equidistantes dos extremos a_1 e a_7 (0 e 12), respectivamente, pois $3 - 1 = 7 - 5$ ou $3 + 5 = 7 + 1$.
- o segundo e o sexto termos, 2 e 10, são equidistantes dos extremos, pois $2 - 1 =$ $= 7 - 6$ ou $2 + 6 = 7 + 1$.
- o primeiro e o sétimo termo, 0 e 12, são equidistantes dos extremos, pois $1 - 1 =$ $= 7 - 7$ ou $1 + 7 = 7 + 1$.

Exemplo 2

Em uma sequência de vinte termos, o terceiro (a_3) e o décimo oitavo (a_{18}) termos são equidistantes dos extremos a_1 e a_{20}, respectivamente, pois $3 + 18 = 20 + 1$.
É importante destacar que apenas sequências finitas apresentam termos equidistantes de seus extremos.

Propriedade exclusiva dos termos

A lei de formação de uma sequência numérica também pode ser dada por uma propriedade que caracteriza cada termo da sequência. Acompanhe um exemplo.

Vamos escrever os seis primeiros termos da sequência em que cada termo é a soma dos divisores do respectivo índice.

Em $\mathbb{N}$, um número natural a não nulo é divisor de $b \in \mathbb{N}$ se b é da forma $b = a \cdot n$ para algum valor $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso, dizemos também que b é divisível por a em $\mathbb{N}$.

Assim:

- o divisor de 1 é 1: $a_1 = 1$
- os divisores de 2 são 1 e 2: $a_2 = 1 + 2 = 3$
- os divisores de 3 são 1 e 3: $a_3 = 1 + 3 = 4$
- os divisores de 4 são 1, 2 e 4: $a_4 = 1 + 2 + 4 = 7$
- os divisores de 5 são 1 e 5: $a_5 = 1 + 5 = 6$
- os divisores de 6 são 1, 2, 3 e 6: $a_6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$

⋮

Portanto, a sequência é (1, 3, 4, 7, 6, 12, ...).

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Lembre-se de que, ao analisar as atividades resolvidas, é importante:

- ler o enunciado calmamente para compreender o que se pede;
- identificar palavras ou expressões desconhecidas e buscar o significado delas;
- ver a resolução, entendendo cada escolha feita;
- analisar os problemas e as atividades propostas antes de passar para a próxima atividade resolvida e pensar qual (ou quais) delas poderia(m) ser resolvida(s) com a ajuda da atividade resolvida que você acabou de ler.

R1 **Considere a sequência (4, 8, 12, 16, ...). Identifique uma possível regularidade e utilize-a para responder aos itens a seguir.**

a) Qual é o sexto termo dessa sequência?

b) Qual é o termo geral dessa sequência?

c) Obtenha o 30º termo dessa sequência.

Resolução

Uma possível regularidade para essa sequência é que seus termos são múltiplos de 4, em ordem crescente, começando pelo número 4.

a) Podemos continuar escrevendo a sequência (4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...) e concluir que o sexto termo dessa sequência é o número 24.

b) Se a_n é o n-ésimo múltiplo de 4 não nulo na posição n da sequência, temos:

$$a_1 = 4 = 4 \cdot 1$$
$$a_2 = 8 = 4 \cdot 2$$
$$a_3 = 12 = 4 \cdot 3$$
$$a_4 = 16 = 4 \cdot 4$$
$$a_5 = 20 = 4 \cdot 5$$
$$\vdots$$

Então, podemos escrever $a_n = 4 \cdot n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, como termo geral da sequência.

c) Se $a_n = 4 \cdot n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$a_{30} = 4 \cdot 30 = 120$$

R2 **Determine os cinco primeiros termos da sequência definida em cada item.**

a) $a_n = n^3 - 2, n \in \mathbb{N}^*$

b) $\begin{cases} n_1 = 0 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \end{cases}$

c) $a_n = q$, sendo q a quantidade de divisores de n.

Resolução

a) $a_1 = 1^3 - 2 = -1$

$a_2 = 2^3 - 2 = 6$

$a_3 = 3^3 - 2 = 25$

$a_4 = 4^3 - 2 = 62$

$a_5 = 5^3 - 2 = 123$

Portanto, os cinco primeiros termos dessa sequência são −1, 6, 25, 62 e 123.

b) $a_1 = 0$

Mais uma vez, recomendamos que, sempre que possível, sejam escolhidas uma ou duas atividades resolvidas para serem analisadas com os estudantes.

$a_2 = 2 \cdot a_1 + 3 = 2 \cdot 0 + 3 = 3$

$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$

$a_4 = 2 \cdot a_3 + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 21$

$a_5 = 2 \cdot a_4 + 3 = 2 \cdot 21 + 3 = 45$

Portanto, os cinco primeiros termos dessa sequência são 0, 3, 9, 21 e 45.

c) 1 só tem um divisor: $a_1 = 1$

2 tem dois divisores, 1 e 2: $a_2 = 2$

3 tem dois divisores, 1 e 3: $a_3 = 2$

4 tem três divisores, 1, 2 e 4: $a_4 = 3$

5 tem dois divisores, 1 e 5: $a_5 = 2$

Portanto, os cinco primeiros termos dessa sequência são 1, 2, 2, 3 e 2.

R3 **Considere as sequências com os 5 termos obtidos nos itens a e b da atividade R2. Determine, para cada sequência, todos os termos que são equidistantes dos extremos.**

Resolução

A sequência obtida pelos termos do item **a** é (−1, 6, 25, 62, 123). Logo, os extremos são −1 e 123. Os termos equidistantes dos extremos são: −1 e 123, 6 e 62.

A sequência obtida pelos termos do item **b** é (0, 3, 9, 21, 45). Logo, os extremos são 0 e 45. Os termos equidistantes dos extremos são: 0 e 45, 3 e 21.

R4 **Considere a sequência definida por $a_n = 3n - 15$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Verifique se os números a seguir são termos dessa sequência.**

a) −3

b) 1

Resolução

a)
$$\begin{aligned} a_n &= -3 \\ a_n &= 3n - 15 \\ 3n - 15 &= -3 \\ 3n &= 12 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

Então, concluímos que $a_4 = -3$ e −3 é um elemento da sequência.

b)
$$\begin{aligned} a_n &= 1 \\ a_n &= 3n - 15 \\ 3n - 15 &= 1 \\ 3n &= 16 \\ n &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Como $n = \frac{16}{3}$ não é um número natural, concluímos que 1 não pertence à sequência.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Escolha uma ou duas atividades desta seção para analisar com os estudantes. As demais podem ser resolvidas em duplas e corrigidas pelos próprios estudantes com a troca de resoluções entre as duplas.

A cada problema, retorne ao texto e às atividades da seção *Problemas e exercícios resolvidos* para investigar qual deles pode auxiliá-lo a resolver a atividade que você deve solucionar agora.

1 **Considere os dois primeiros termos de uma sequência e, depois, faça o que se pede em cada item.**

(10, 20, ...)

a) Resposta possível: Do primeiro para o segundo termo foi adicionado 10. O segundo termo é o dobro do primeiro termo.

b) Resposta possível: (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100); (10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1 280, 2 560, 5 120).

a) Determine duas regularidades distintas para essa sequência.

b) Escreva, no caderno, essa sequência até o décimo termo usando as duas regularidades que você determinou.

c) Compare sua resposta com a de um colega. Há diferenças entre elas? Quais? Resposta pessoal.

2. a) Resposta possível: Cada termo, a partir do segundo, tem 3 unidades a mais que o termo anterior; (5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32).

2 **Copie as sequências no caderno, identifique uma possível regularidade em cada uma e, com base nessa regularidade, complete a sequência até o décimo termo.** Respostas possíveis:

a) (5, 8, 11, 14, ...)

b) (5, 15, 45, 135, ...)

c) $\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, ...\right)$

d) (0,6; 0,8; 1; 1,2; ...)

b) Cada termo, a partir do segundo, é o triplo do termo anterior; (5, 15, 45, 135, 405, 1 215, 3 645, 10 935, 32 805, 98 415).

c) Cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando $\frac{1}{7}$ ao termo anterior; $\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, 1, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}\right)$.

d) Cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando 0,2 ao termo anterior; (0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2; 2,2; 2,4)

3 **Nas sequências dos itens a seguir, identifique uma possível regularidade e, com base nessa regularidade, obtenha o décimo termo.** Respostas possíveis:

a) (1, 4, 7, 10, ...) **a)** Cada termo, a partir do segundo, tem 3 unidades a mais que o termo anterior; 28.

b) (4; 2; 1; 0,5; ...) **b)** Cada termo, a partir do segundo, é a metade do termo anterior; $\frac{1}{128}$.

c) (0,1; 1; 10; 100; ...)

c) Cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando por 10 o termo anterior; 100 000 000.

4 **Considere a sequência (5, 10, 15, 20, ...) e, no caderno, responda ao que se pede em cada item.**

a) Qual é o sétimo termo dessa sequência? E o décimo? $a_7 = 35$; $a_{10} = 50$.

b) Qual é o termo geral dessa sequência? $a_n = 5n, n \in \mathbb{N}^*$.

Antes de resolver a atividade **5**, reveja a atividade **R1**.

5 **Escreva uma lei de formação para cada uma das sequências e, em seguida, use-a para obter o 20º termo.** Respostas possíveis:

a) (−2, −3, −4, −5, ...) $a_n = -n - 1, n \in \mathbb{N}^*$; $a_{20} = -21$.

b) (4, 8, 12, 16, ...) $a_n = 4 \cdot n, n \in \mathbb{N}^*$; $a_{20} = 80$.

c) (2, 4, 6, 8, ...) $a_n = 2 \cdot n, n \in \mathbb{N}^*$; $a_{20} = 40$.

6 **Em cada item, obtenha os cinco primeiros termos da sequência definida pela lei de formação indicada.**

a) $a_n = 3n$, com $n \in \mathbb{N}^*$ (3, 6, 9, 12, 15, ...)

b) $a_n = n + 4$, com $n \in \mathbb{N}^*$ (5, 6, 7, 8, 9, ...)

c) $a_n = 4n - 2$, com $n \in \mathbb{N}^*$ (2, 6, 10, 14, 18, ...)

d) $a_n = n^2 + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$ (2, 5, 10, 17, 26, ...)

e) $a_n = 2(n^2 + n)$, com $n \in \mathbb{N}^*$ (4, 12, 24, 40, 60, ...)

f) $a_n = 10^n - 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$ (9, 99, 999, 9 999, 99 999, ...)

g) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, ...\right)$

h) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 10^{n-1}$, com $n \geqslant 2$ (1, 11, 111, 1 111, 11 111, ...)

i) $a_1 = -2$; $a_n = a_{n-1} + 3$, com $n \geqslant 2$ (−2, 1, 4, 7, 10, ...)

j) $a_1 = 16$; $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, com $n \geqslant 1$ (16, 8, 4, 2, 1, ...)

k) $a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, com $n \geqslant 3$ (1, 4, 5, 9, 14, ...)

7 **Considere a sequência $a_n = -7 + 2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, e verifique se os números a seguir são termos dessa sequência.** −1 e 7 são termos dessa sequência.

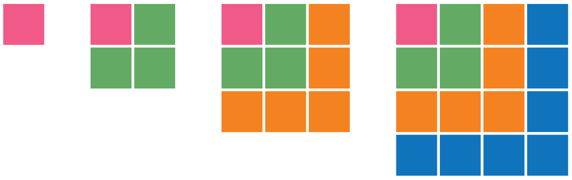
a) −1

b) 0

c) 7

d) 20

8 **Uma sequência de figuras é formada por quadradinhos. Observe a seguir os quatro primeiros termos.**



ID/BR

a) Quais são os quatro primeiros termos da sequência numérica que corresponde à quantidade de quadradinhos que formam cada uma das figuras dessa sequência? (1, 4, 9, 16).

b) Escreva, no caderno, a lei de formação que representa essa sequência. $a_n = n^2$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Obtenha o quinto termo dessa sequência. Consulte a resposta no Manual do Professor.

d) Quantos quadradinhos devem ser desenhados para representar, no total, do primeiro ao quinto termo dessa sequência? 55 quadradinhos.

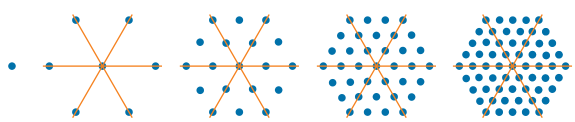
e) Quantos quadradinhos devem ser desenhados para representar o nono termo da sequência? E para representar o 12º? 81 quadradinhos. 144 quadradinhos.

f) Paula, ao resolver esse problema, disse: "Ah! Esse desenho dá a soma dos primeiros números ímpares". O que você pensa a respeito disso? Resposta pessoal.

g) Luiz afirmou: "Que nada, essa sequência representa os quadrados perfeitos". Qual dos dois tem razão: Paula ou Luiz? Justifique sua resposta. Resposta pessoal.

Dê especial atenção às atividades **8** (itens **d** e **e**) e **13**, pois elas podem ajudar a desenvolver a habilidade de utilizar conhecimentos algébricos como recurso para a construção de argumentação, desenvolvendo a competência geral **7**.

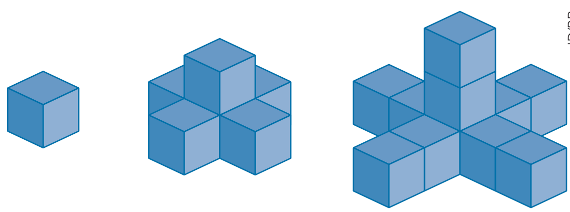
9 **Os cinco primeiros termos de uma sequência estão representados a seguir.**



a) Sem fazer o desenho, determine quantos pontos haverá nos dois próximos elementos dessa sequência. 91 e 127 pontos.

b) Explique como são marcados os pontos em cada elemento da sequência a partir do terceiro.

10 **Observe uma sequência de figuras construída com cubinhos. Em seguida, responda ao que se pede em cada item.**


ID/BR

a) Calcule a quantidade de cubinhos necessária para construir o 16º elemento dessa sequência. 76 cubinhos.

b) Com 96 cubinhos, qual elemento da sequência podemos construir? O 20º elemento da sequência.

11 **Leia o seguinte problema.**

> Três rapazes, um de camisa branca, outro de camisa amarela e outro de camisa azul, sobem uma escadaria. O de camisa branca é o mais adiantado: está a 9,3 m do chão e subiu metade dos degraus. O de camisa amarela está 6 m acima do rapaz de camisa azul, no 34º degrau. O rapaz de camisa azul está no 4º degrau. Os degraus têm todos a mesma medida de altura, exceto o primeiro, que tem 30 cm. Quantos degraus tem a escadaria?

Agora, analise como Amanda resolveu esse problema.

Considerando que o primeiro degrau mede 0,3 m e que x é a altura de cada degrau a partir do segundo, podemos representar com uma sequência a altura de cada degrau ao chão: (0,3; 0,3 + x; 0,3 + 2x, ...).

A lei de formação dessa sequência é $a_n = 0{,}3 + (n - 1)x$, em que a_n é a altura da escada no n-ésimo degrau.

Com base no enunciado, temos: $a_{34} - a_4 = 6$.

$[0{,}3 + (34 - 1)x] - [0{,}3 + (4 - 1)x] = 6$

$(0{,}3 + 33x) - (0{,}3 + 3x) = 6$

$0{,}3 + 33x - 0{,}3 - 3x = 6$

$30x = 6 \Rightarrow x = 0{,}2$

Portanto, a altura de cada degrau, a partir do segundo, é 0,2 m.

Se o rapaz de camisa branca subiu 9,3 m, o que equivale à metade dos degraus, considerando y o número total de degraus da escadaria, temos:

$0{,}3 + \left(y - \frac{1}{2}\right) \cdot 0{,}2 = 9{,}3$

$0{,}3 + \left(0{,}2y - \frac{0{,}2}{2}\right) = 9{,}3$

$\left(0{,}6 + 0{,}2y - \frac{0{,}2}{2}\right) = 9{,}3$

$0{,}4 + 0{,}2y = 18{,}6$

$0{,}2y = 18{,}2$

$y = \frac{18{,}2}{0{,}2} = 91$

Portanto, a escadaria tem 91 degraus.

ID/BR

Você concorda com a resolução da Amanda? Explique.
Resposta esperada: Não. A escadaria tem 92 degraus.

12 **Escreva uma sequência de:**

a) cinco termos, na qual cada termo a_n seja igual à soma dos números naturais menores que o índice, com $n \geqslant 1$. (0, 1, 3, 6, 10)

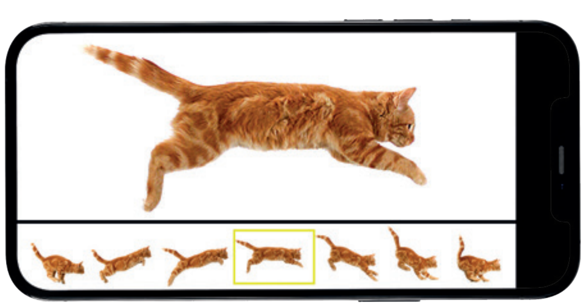
b) seis termos, na qual cada termo a_n seja igual à quantidade de divisores positivos do índice, para $n \geqslant 1$. (1, 2, 2, 3, 2, 4)

13 **Represente com um gráfico as sequências indicadas em cada item. Em seguida, identifique se cada sequência é crescente ou decrescente:**

a) as sequências dos itens **a** e **b** da atividade **5**; **a)** Decrescente; crescente.

b) as sequências dos itens **b** e **j** da atividade **6**. Crescente; decrescente.

14 **Alguns aparelhos eletrônicos têm um recurso que gera uma sequência de fotos capturando imagens 1,5 s antes e 1,5 s após uma pessoa tirar uma fotografia, sendo que a melhor imagem obtida nesta sequência é determinada como a foto principal.**


Primakov/Shutterstock.com/ID/BR

Quando esse recurso está ativo em um *smartphone*, é gerada uma sequência de 11 imagens capturadas. Sendo a_n o n-ésimo termo, se em uma sequência de imagens capturadas a foto principal e a foto de posição a_3 são equidistantes dos extremos, qual é a posição da foto principal nessa sequência de fotos? a_9

9. b) Resposta esperada: A quantidade de pontos de cada figura, a partir da terceira, é dada pela soma do termo anterior com um múltiplo de 6, sendo esse múltiplo correspondente a 6 vezes a posição do termo anterior. Isto é: $a_n = a_{(n-1)} + 6 \cdot (n - 1)$.

CÁLCULO RÁPIDO

1 **Resolva as equações.**

a) $4x = 8$ $S = \{2\}$

b) $2x = 1$ $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $6 = -x$ $S = \{-6\}$

d) $3 = 9x$ $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

e) $5x + 5 = 0$ $S = \{-1\}$

f) $7x - 7 = 0$ $S = \{1\}$

2 **Determine as soluções reais de cada equação.**

a) $\frac{2x-1}{x-1} = 3$ $S = \{2\}$

b) $2^{x-1} = 2^4$ $S = \{5\}$

c) $9^{x+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $S = \{-2\}$

d) $x \cdot (x + 4) = 0$ $S = \{-4, 0\}$

e) $x^2 - 9 = 0$ $S = \{-3, 3\}$

f) $5x^2 + 20 = 0$ $S = \{\ \}$

3 **Resolva as equações a seguir.**

a) $|-2x + 1| = 11$ $S = \{-5, 6\}$

b) $|x - 10| = -20$ $S = \{-10, 30\}$

c) $|x^2 - 2x - 4| = 4$ $S = \{-2, 0, 2, 4\}$

d) $5|x^2| + 11|x| + 2 = 0$ $S = \left\{-2, -\frac{1}{5}\right\}$

4 **Considere a equação $(3x - 2)^2 = 4$ e faça o que se pede a seguir.**

a) Resolva essa equação sem desenvolver o produto notável $(3x - 2)^2$. $S = \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$

b) Resolva essa equação desenvolvendo o produto notável $(3x - 2)^2$. $S = \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$

c) Descubra os erros nas resoluções dessa equação mostradas a seguir. Na resolução da direita, o erro está na segunda linha, ao trocar $(3x - 2)^2$ por $3x^2 - 4$.

$$(3x-2)^2 = 4 \qquad \sqrt{(3x-2)^2} = \sqrt{4} \qquad 3x - 2 = 2 \qquad 3x = 4 \qquad x = \frac{4}{3}$$

$$(3x-2)^2 = 4 \qquad 3x^2 - 4 = 4 \qquad 3x^2 = 8 \qquad x^2 = \frac{8}{3} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$$

Na resolução da esquerda, o erro está em não considerar que $\sqrt{(3x-2)^2}$ é igual ao $|3x - 2|$ e, assim, $3x - 2 = 2$ ou $3x - 2 = -2$. Desse modo, as raízes seriam 0 e $\frac{4}{3}$.

5 **Considere as retas que são gráficos das funções $y = 2x - 4$ e $y = -\frac{x}{4} + \frac{11}{4}$.**

a) Determine o ponto de intersecção dos gráficos dessas funções. (3, 2)

b) Verifique se a reta que é o gráfico da função $y = x - 1$ também passa por esse ponto. Sim.

6 **O gráfico de uma função afim passa pelos pontos $(-2, 2)$ e $(-3, 13)$. Qual é a expressão algébrica e a raiz dessa função?** $f(x) = -11x - 20$; $x = -\frac{20}{11}$.

7 **Classifique em crescente e decrescente cada função de domínio $\mathbb{R}$ dada a seguir.**

a) $p(a) = 3 + a$ Crescente.

b) $q(b) = \frac{1}{3}b - 5$ Crescente.

c) $r(c) = -\frac{c}{4}$ Crescente.

d) $s(x) = -2d + 7$ Decrescente.

8 **Quais dos números a seguir são raízes da função $f(x) = x^2 - x$? Indique-os no caderno.** 0 e 1.

a) -2

b) -1

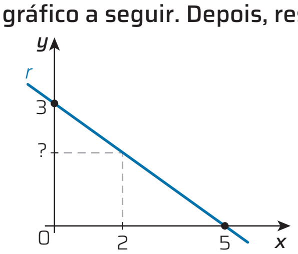
c) 0

d) 1

e) 2

f) 3

9 **Analise o gráfico a seguir. Depois, resolva os itens.**



$f(x) = -\frac{3}{5}x + 3$.

a) Determine a função f cujo gráfico é a reta r.

b) Estude o sinal da função e dê o domínio e o conjunto imagem de f. $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$.

PARA RECORDAR

Nesta seção, você vai relembrar alguns conceitos já estudados sobre números e funções. Se julgar necessário, retome os capítulos anteriores.

1 **Se $p = \sqrt{8^2 + 11^2}$, podemos afirmar que $14 < p < 15$? Por quê?** Não, pois p não está entre 14 e 15.

2 **Em uma empresa, $\frac{1}{3}$ dos funcionários tem idade inferior a 30 anos, $\frac{1}{4}$ tem entre 30 e 40 anos, e 40 funcionários têm 30 anos ou mais.**

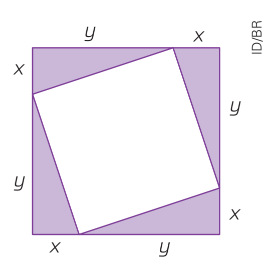
a) Quantas pessoas trabalham nessa empresa? 96 pessoas.

b) Quantas pessoas têm pelo menos 30 anos? 64 pessoas.

3 **Qual é a expressão algébrica da função afim cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo Ox e que passa pelo ponto $P(6, -4)$?** $f(x) = -4$.

4 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

Qual das expressões indicadas representa a medida da área da figura colorida de roxo? Alternativa **c**.



a) $x^2 + y^2$

b) $2(x^2 + y^2)$

c) $2xy$

d) $x^2 + 2xy + y^2$

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Problemas com enunciados curtos nem sempre são de rápida resolução. Alguns deles podem exigir mais do raciocínio lógico dedutivo para serem resolvidos.

1 **Tomás é mais velho que Ana e ela é mais nova que Sofia. Por sua vez, Sofia é mais velha que Tomás. Quem é o mais velho dos três?** Sofia.

2 **Indique a alternativa correta no caderno.** Alternativa **b**.

Se ontem fosse amanhã, hoje seria sexta-feira. Que dia é hoje?

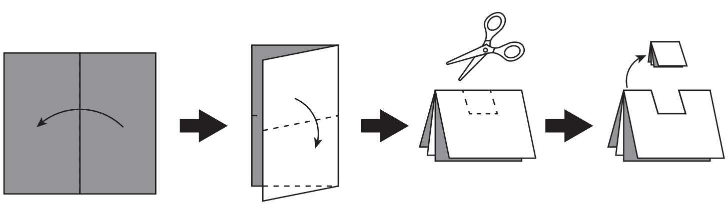
a) segunda-feira
b) quarta-feira
c) sexta-feira
d) domingo

3 **Um elevador tem capacidade máxima de 20 adultos ou 24 crianças. Se 15 adultos estão no elevador, quantas crianças podem entrar nele, sem exceder a capacidade máxima?** 6 crianças.

Para complementar, após os estudantes resolverem a atividade **4**, proponha a eles que realizem as etapas apresentadas, a fim de verificar se a resposta obtida está correta.

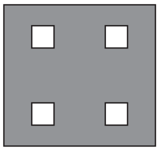
4 **Escreva no caderno a alternativa correta.** Alternativa **e**.

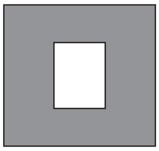
(Obmep) Joãozinho dobrou duas vezes uma folha de papel quadrada, branca de um lado e cinza do outro, e depois recortou um quadradinho, como na figura.

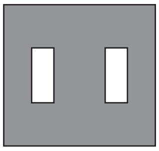


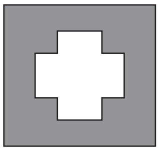
Obmep. Fac-símile: ID/BR

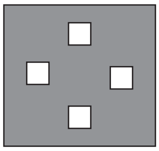
Qual das figuras abaixo ele encontrou quando desdobrou completamente a folha?

a) 

c) 

e) 

b) 

d) 

Ilustrações: Obmep. Fac-símile: ID/BR

PALAVRAS-CHAVE

O objetivo desta seção é retomar o que você aprendeu no capítulo. A proposta é que você saiba quais são os conceitos centrais estudados.

Faça uma síntese do que você aprendeu sobre sequências numéricas.

Aproveite também para tirar suas dúvidas sobre o que ainda não souber, consultando novamente o texto e, se necessário, converse com o professor.

Perceba que aqui não apresentamos a lista das ideias principais deste capítulo. Que tal fazer sozinho a lista do que aprendeu e de quais são suas dúvidas ao final deste capítulo? Esse é um exercício para desenvolver seu autoconhecimento, que auxiliará você a decidir o que é preciso para enfrentar uma situação nova.

MATEMÁTICA E CIDADANIA

O objetivo principal desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes ao desenvolver habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propor que vivenciem um processo investigativo, desenvolvendo as competências específicas **1** e **2** da área de Matemática e suas Tecnologias.
A temática apresentada possibilita um trabalho em parceria com o professor de História e com o tema contemporâneo transversal Cidadania e Civismo, favorecendo o desenvolvimento das competências específicas **1** e **6** dessa área.

História do Imposto de Renda no Brasil

O objeto digital aborda marcos importantes da história do Imposto de Renda das Pessoas Físicas no Brasil desde sua criação, permitindo que os estudantes aprofundem o conhecimento sobre esse assunto.

Impostos e tributos

Você já se perguntou para que serve o imposto sobre a renda? O pagamento de impostos e tributos pelos cidadãos aos governos federal, estadual e municipal tem como finalidade a manutenção das instituições governamentais e a prestação de serviços de saúde, educação, entre outros, à população. Há impostos federais, como o Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF); impostos estaduais, como o Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços (ICMS); e municipais, como o Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU).

Nesta seção, vamos conhecer o IRPF. Para começar, leia os textos a seguir.

IRPF (Imposto sobre a renda das pessoas físicas)

Incide sobre a renda e os proventos de contribuintes residentes no País ou residentes no exterior que recebam rendimentos de fontes no Brasil. Apresenta alíquotas variáveis conforme a renda dos contribuintes, de forma que os de menor renda não sejam alcançados pela tributação.

BRASIL. Ministério da Fazenda. IRPF (Imposto sobre a renda das pessoas físicas). Gov.br. [Brasília, DF], 10 jul. 2015. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/orientacao-tributaria/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica. Acesso em: 8 ago. 2024.

Imposto devido

Sobre a renda de cada cidadão incide um valor, chamado de Imposto Devido. Quem recebe salários, aluguéis e outros tipos de rendas já quita uma parte deste tributo mês a mês, sob a forma de Imposto de Renda Retido na Fonte (IRRF). Quando o cidadão faz sua Declaração de Ajuste do Imposto de Renda, pode ser que a soma dos recolhimentos do IRRF não cubra o Imposto Devido e, neste caso, ele paga um valor adicional. Por outro lado, caso os recolhimentos do IRRF ultrapassem a soma do Imposto Devido, ele receberá uma Restituição.

Em qualquer caso, o Imposto Devido permanece o mesmo.

BRASIL. Ministério da Fazenda. *Destinação de Imposto de Renda*. [Brasília, DF], [202-]. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/passo-a-passo/destinacao-de-imposto-de-renda.pdf. Acesso em: 24 set. 2024.

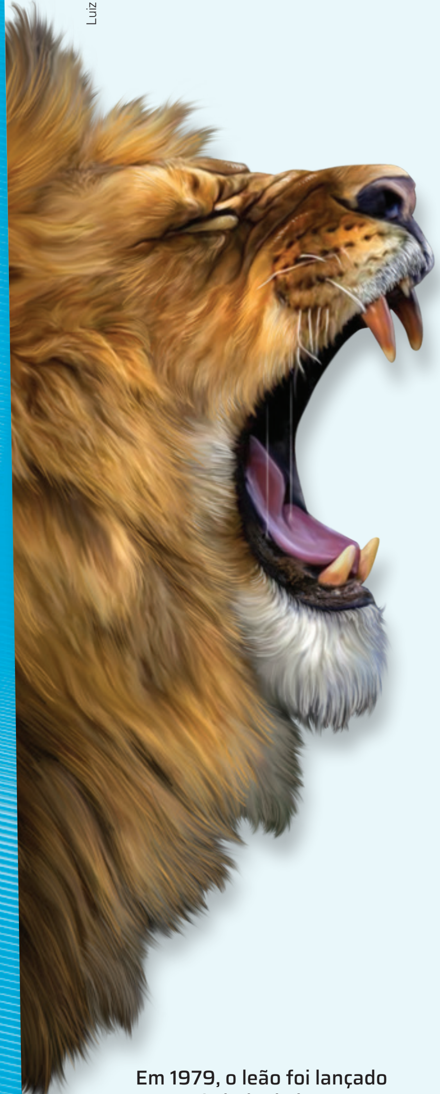
No exercício de 2025, ano-calendário de 2024, para calcular o valor anual do IRPF, utilizou-se a base de cálculo da tabela a seguir.

Tabela do Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas

Base de cálculo (R$)	Alíquota (%)	Quantia a deduzir do IRPF (R$)
Até 26 963,20	-	-
De 26 963,21 até 33 919,80	7,5	2 022,24
De 33 919,81 até 45 012,60	15	4 566,23
De 45 012,61 até 55 976,16	22,5	7 942,17
Acima de 55 976,16	27,5	10 740,98

Fonte de pesquisa: BRASIL. Ministério da Fazenda. *Tributação de 2024*. [Brasília, DF], 4 maio 2023. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/2024. Acesso em: 5 ago. 2024.

Luiz Iria/ID/BR



Em 1979, o leão foi lançado como símbolo do imposto sobre a renda.

Não escreva no livro.

PARA EXPLORAR

Site

Receita Federal. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br. Acesso em: 20 ago. 2024.

No *site* da Receita Federal, é possível consultar e atualizar o Cadastro de Pessoa Física (CPF). Além disso, há uma página exclusiva com informações sobre o Imposto sobre a Renda e a malha fiscal: o que é, quem deve fazer a declaração e as etapas desse processo.

Conectando ideias

1 A tabela a seguir mostra o salário mensal de cinco funcionários de uma empresa.

Salário mensal de cinco funcionários de uma empresa	
Funcionário	**Salário (R$)**
A	2 000,00
B	2 700,00
C	3 200,00
D	4 700,00
E	5 200,00

Dados fictícios.

Agora, considere a seguinte tabela, que mostra as alíquotas referentes ao IRPF desses cinco funcionários:

Cálculo do IRPF de cinco funcionários de uma empresa					
Funcionário	A	B	C	D	E
Salário anual (R$)	24 000,00	32 400,00	38 400,00	56 400,00	62 400,00
Alíquota (%)	-	7,5	15	27,5	27,5

Dados fictícios.

A política salarial da empresa utiliza percentuais de aumento anual de 7% para as faixas salariais de R$ 2 000,00 a R$ 3 800,00 e de 6% para as faixas salariais de R$ 3 801,00 a R$ 5 200,00. Com base nessas informações, faça o que se pede em cada item.

a) Qual será o novo salário mensal de cada funcionário após esse aumento percentual? **A:** R$ 2 140,00; **B:** R$ 2 889,00; **C:** R$ 3 424,00; **D:** R$ 4 982,00; **E:** R$ 5 512,00.

b) Haverá alteração na alíquota de cada funcionário depois do primeiro aumento? Apenas na do funcionário **B**.

2 **Você conhece outros tributos além dos citados nos textos? Quais são e sobre quais bens e setores incidem?** Respostas pessoais.

3 **O ICMS é um imposto cuja alíquota varia de uma unidade da federação para outra.**

Você sabe qual é o destino da arrecadação do ICMS?

- Reúna-se com os colegas para pesquisar qual é o destino que a unidade da federação em que vocês residem dá à arrecadação do ICMS.
- Qual é a alíquota do ICMS aplicada em unidade da federação? Para responder a essa questão, organizem-se de maneira que cada grupo fique responsável por pesquisar a alíquota de algumas unidades.
- Apresentem os resultados da pesquisa aos colegas e analisem as diferenças nas alíquotas encontradas por todos.
- Façam um infográfico com os resultados obtidos.

Você se manteve comprometido com as propostas acima, mesmo quando elas demoravam para serem resolvidas?

As respostas dos estudantes ao último item indicam evidências da competência socioemocional persistência.

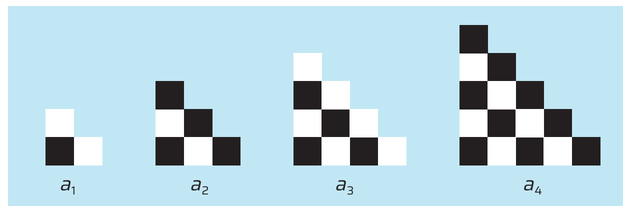
PROGRESSÕES

Neste capítulo, o objetivo é apoiar o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT507** e **EM13MAT508**, ao aprofundar o estudo das progressões aritméticas e geométricas. No entanto, mantemos o foco na resolução de situações-problema, na investigação de regularidades e nas diversas representações matemáticas, dando continuidade ao trabalho com as competências específicas **3**, **4** e **5** da área de Matemática e suas Tecnologias.

NESTE CAPÍTULO

- Progressão aritmética
- Progressão geométrica

Podemos encontrar sequências numéricas tanto na construção civil quanto em obras de arte. No ladrilhamento a seguir, em que são colocados azulejos pretos e, na etapa seguinte, azulejos brancos, e assim sucessivamente, podemos considerar as quantidades de azulejos colocados em cada etapa como duas sequências numéricas.

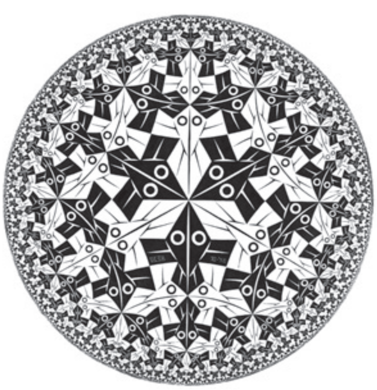


ID/BR

Repare que, na primeira etapa (a_1) de construção dessa sequência, há um azulejo preto e dois brancos. Na segunda etapa (a_2), são acrescentados três azulejos pretos. Na etapa seguinte (a_3), acrescentam-se quatro azulejos brancos. E na etapa a_4, mais cinco azulejos pretos. A quantidade de azulejos pretos aplicados nas etapas correspondentes pode ser representada pela sequência numérica (1, 3, 5, ...), enquanto a quantidade de azulejos brancos acrescentados em cada etapa correspondente pode ser representada pela sequência numérica (2, 4, 6, ...). Assim, saberemos dizer tanto a cor quanto a quantidade de azulejos na posição 12 dessa sequência.

Você já observou paredes ou pisos ladrilhados dessa maneira? Você consegue afirmar quantos e de que cor serão os azulejos colocados na etapa 12 dessa construção?

Já em obras de arte, alguns artistas costumam usar formas de mosaicos mais complexas, como é o caso da obra *Circle Limit I* (1958), do artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972), reproduzida nesta página. Nessa obra, repare apenas nas figuras brancas: há três no centro do mosaico. Cada uma delas se conecta a outras três figuras brancas que, a cada etapa, distanciam-se do centro, cada uma se conectando a outras três menores. Isso significa que a quantidade de figuras brancas segue a sequência numérica (3, 9, 27, 81, ...).



ESCHER, Maurits Cornelis. *Circle limit I*, 1958. Xilogravura, 48 cm × 48 cm.

Perceba que as sequências numéricas citadas seguem diferentes padrões de formação. Elas são chamadas **progressões aritméticas** e **progressões geométricas** e são o foco de estudo deste capítulo.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

O trabalho desenvolvido neste tópico contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT507**, ao permitir que os estudantes relacionem progressões numéricas a funções afins e apliquem esse conhecimento na resolução de problemas.

Entre todas as sequências numéricas, vamos destacar algumas em especial, pois elas apresentam propriedades e aplicações importantes.

Analise estas sequências:

- (2, 5, 8, 11, ...)
- (35, 30, 25, 20, 15, ...)

Pense em como você pode obter, em cada uma delas, o segundo termo a partir do primeiro, o terceiro termo a partir do segundo, o quarto termo a partir do terceiro, e assim por diante.

Você deve ter notado que, na primeira sequência, cada termo a partir do segundo é obtido pela adição do número 3 ao termo anterior a ele.

$$2 \underbrace{\quad}_{+3} 5 \underbrace{\quad}_{+3} 8 \underbrace{\quad}_{+3} 11 \ldots$$

Já na segunda sequência, cada termo a partir do segundo é obtido quando subtraímos o número 5, ou adicionamos o número −5, ao termo anterior a ele.

$$35 \underbrace{\quad}_{-5} 30 \underbrace{\quad}_{-5} 25 \underbrace{\quad}_{-5} 20 \underbrace{\quad}_{-5} 15 \ldots$$

Sequências desse tipo são chamadas de **progressões aritméticas**.

Progressão aritmética (P.A.) é toda sequência de números na qual cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante. Essa constante, que vamos indicar por r, é denominada **razão** da progressão aritmética.
$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$ é uma P.A. se, e somente se, $a_n = a_{n-1} + r$, com $n \geqslant 2$.

Note que:

$$\begin{aligned} r &= a_2 - a_1 \\ r &= a_3 - a_2 \\ &\vdots \\ r &= a_n - a_{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2 \end{aligned}$$

Ou seja, podemos determinar a razão de uma progressão aritmética obtendo a diferença entre qualquer um dos termos e seu antecessor.

Acompanhe alguns exemplos.

- (2, 4, 6, ...) é uma P.A. de razão 2 (pois $r = 4 - 2 = 2$).
- (99, 96, 93, ..., 6, 3) é uma P.A. de razão -3 (pois $r = 96 - 99 = -3$).
- (5, 5, 5, ...) é uma P.A. de razão 0 (pois $r = 5 - 5 = 0$).
- $(-20, -16, -12, ..., 16, 20)$ é uma P.A. de razão 4 (pois $r = -16 - (-20) = 4$).
- $\left(-\frac{5}{2}, -3, -\frac{7}{2}, ...\right)$ é uma P.A. de razão $-\frac{1}{2}$ $\left(\text{pois } r = -3 - \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}\right)$.

Classificação

Uma P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$ de razão r é:

- **crescente**, se cada termo é maior que o anterior $(a_n > a_{n-1})$;
- **decrescente**, se cada termo é menor que o anterior $(a_n < a_{n-1})$;
- **constante**, se todos os termos são iguais entre si $(a_n = a_{n-1})$.

Como a razão r é dada por $r = a_n - a_{n-1}$, podemos resumir:

P.A. crescente $r > 0$	P.A. decrescente $r < 0$	P.A. constante $r = 0$

Média aritmética

Em uma P.A. $(a_1, a_2, ..., a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, ..., a_n, ...)$ de razão r, os termos consecutivos a_{j-1}, a_j e a_{j+1} são tais que:

$$\left.\begin{aligned} a_j &= a_{j-1} + r \\ a_{j+1} &= a_j + r \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_j - a_{j+1} = a_{j-1} - a_j \Rightarrow a_j = \frac{a_{j-1} + a_{j+1}}{2}$$

Em qualquer P.A., cada termo, a partir do segundo, é a **média aritmética** entre os termos anterior e posterior.

Por exemplo, na P.A. (2, 5, 8, 11, 14, 17, ...), cada termo a partir do segundo é a média aritmética entre seu antecessor e seu sucessor.

$$5 = \frac{2+8}{2}; 8 = \frac{5+11}{2}; 11 = \frac{8+14}{2}; 14 = \frac{11+17}{2}; ...$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 Calcule a razão da P.A. cujo termo geral é dado por $a_n = 2n - 3$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Faça também uma representação gráfica dessa sequência.

Resolução

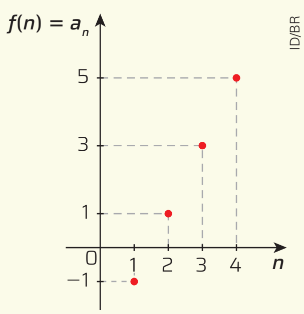
Para obtermos a razão r, são necessários dois termos consecutivos quaisquer.

Então, calculando a_1 e a_2, temos:

$$a_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$
$$a_2 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$
$$r = a_2 - a_1 = 1 - (-1) = 2$$

Como a lei $a_n = f(n) = 2n - 3$ é de uma função afim com $D(f) = \mathbb{N}^*$, temos:

n	1	2	3	4	...
$a_n = 2n - 3$	−1	1	3	5	...



Note que o gráfico de f é formado por pontos alinhados, mas não por uma reta, uma vez que $D(f) = \mathbb{N}^*$.

R2 Obtenha uma P.A. de três termos na qual a soma desses termos e a de seus quadrados sejam, respectivamente, 12 e 56.

Resolução

Vamos usar a seguinte representação especial para essa P.A.:

$$(x - r, x, x + r)$$

De acordo com o enunciado, sabemos que:

$$\begin{cases} (x - r) + x + (x + r) = 12 & (1) \\ (x - r)^2 + x^2 + (x + r)^2 = 56 & (2) \end{cases}$$

De (1), temos:

$$(x - r) + x + (x + r) = 12$$
$$3x = 12$$
$$x = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

Substituindo em (2) o valor de x obtido, temos:

$$(4 - r)^2 + 4^2 + (4 + r)^2 = 56$$
$$2r^2 + 48 = 56$$
$$r = -2 \text{ ou } r = 2$$

Para $r = 2$, temos a P.A. (2, 4, 6) e, para $r = -2$, a P.A. (6, 4, 2).

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Leia as atividades a seguir e identifique quais se assemelham aos exercícios **R1** e **R2**. Isso pode ajudar, caso você tenha dúvidas.

Socialize os exemplos dados pelos estudantes para a atividade **1**.

1 Dê um exemplo de sequência que não seja uma P.A.
Resposta pessoal.

2 Seja a P.A. $(a_1, a_2, a_3, ...)$, em que $a_1 = -16$ e $a_2 = -13$. Calcule a razão de cada P.A. a seguir.

a) $(a_1, a_3, a_5, ...)$ 6

b) $(a_2, a_4, a_6, ...)$ 6

3 Calcule a razão de cada P.A. e classifique-a em crescente, decrescente ou constante.

A razão é 4 e a sequência é crescente.

a) O termo geral da P.A. é $a_n = 3 + 4n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

b) A P.A. é dada por $a_1 = 6$ e $a_n = 2 \cdot a_{n-1} - 6$, com $n \geq 2$. A razão é 0 e a sequência é constante.

c) O termo geral da P.A. é $a_n = 13 - 3n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
A razão é −3 e a sequência é decrescente.

4. Para $x = 0$, a sequência é (0, 0, 0) e, para $x = 4$, a sequência é (8, 12, 16).

4 Seja $(2x, 3x, x^2)$ uma P.A. Determine a sequência de números que formam essa P.A.

5 $(x + 3, x - 4, 1 - 2x)$ é uma P.A. Calcule a razão dessa P.A. A razão é −7.

6 Em uma P.A. de três termos, a soma e o produto desses termos valem, respectivamente, 3 e −24. Determine essa sequência e faça sua representação gráfica.
A P.A. pode ser (−4, 1, 6) ou (6, 1, −4).

7 Obtenha uma P.A. de três termos na qual a soma dos extremos e a soma dos quadrados dos termos sejam, respectivamente, −4 e 30.
A P.A. pode ser (−5, −2, 1) ou (1, −2, −5).

8 Uma P.A. decrescente de cinco termos satisfaz as seguintes condições: (8, 4, 0, −4, −8)

I. a soma dos termos é zero;

II. o produto do segundo e do quarto termos é −16.

Determine essa sequência e represente-a graficamente.

Não escreva no livro.

A proposta da atividade **9** é que os estudantes elaborem um problema utilizando o repertório que adquiriram com as diversas situações que resolveram até o momento. Peça a eles que resolvam, em duplas, as atividades criadas.

9 Elabore uma atividade como a **8**. Resposta pessoal.

10 Em uma P.A. de quatro termos, a soma desses termos e a soma dos dois primeiros termos valem, respectivamente, 23 e 8,5. Obtenha essa sequência.
(3,5; 5; 6,5; 8)

11 Em um auditório, a primeira fila tem 18 assentos; a segunda, 21; a terceira, 24; e assim por diante. Quantos assentos tem a vigésima fila?
A vigésima fila tem 75 assentos.

12 Registre a alternativa correta no caderno.

(Enem) O gerente de uma fábrica pretende comparar a evolução das vendas de dois produtos similares (I e II). Para isso, passou a verificar o número de unidades vendidas de cada um desses produtos em cada mês. Os resultados dessa verificação, para os meses de abril a junho, são apresentados na tabela.

Produto	Vendas em abril (unidade)	Vendas em maio (unidade)	Vendas em junho (unidade)
I	80	90	100
II	190	170	150

O gerente estava decidido a cessar a produção do produto II no mês seguinte àquele em que as vendas do produto I superassem as do produto II.

Suponha que a variação na quantidade de unidades vendidas dos produtos I e II se manteve, mês a mês, como no período representado na tabela. Alternativa **d**.

Em qual mês o produto II parou de ser produzido?

a) Junho.
b) Julho.
c) Agosto.
d) Setembro.
e) Outubro.

Fórmula do termo geral de uma P.A.

Aplicando a definição de progressão aritmética à P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$, de razão r, temos:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r \\ a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r \\ \quad\vdots \\ a_{n-1} = a_{n-2} + r = a_1 + (n-2)r \\ a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r \end{cases}$$

Portanto:

$$a_n = a_1 + (n-1)r, \text{ com } n \geqslant 2$$

Essa relação é chamada de **fórmula do termo geral de uma P.A.** e possibilita calcular qualquer termo da sequência, desde que sejam conhecidos o primeiro termo a_1 e a razão r.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R3 Em uma P.A., determine:

a) o 20º termo, dados $a_1 = 2$ e $r = 3$.
b) a razão, dados $a_1 = -5$ e $a_5 = 3$.
c) o primeiro termo, dados $a_{10} = 8$ e $r = 2$.
d) a ordem do termo de valor 5, dados $a_1 = 20$ e $r = -3$.

Resolução

a) $a_{20} = a_1 + 19r$
$a_{20} = 2 + 19 \cdot 3$
$a_{20} = 59$

b) $a_5 = a_1 + 4r$
$3 = -5 + 4r$
$r = 2$

c) $a_{10} = a_1 + 9r$
$8 = a_1 + 9 \cdot 2$
$a_1 = -10$

d) $a_n = a_1 + (n-1)r$
$5 = 20 + (n-1) \cdot (-3)$
$n = 6$ (sexto termo)

R4 **Obtenha o n-ésimo termo da P.A. $(-4, -1, 2, ...)$.**

Resolução

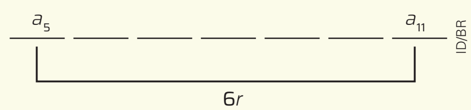
Vamos substituir o primeiro termo (a_1) por -4 e a razão r por 3 em $a_n = a_1 + (n - 1)r$. Assim, temos:

$$a_n = -4 + (n - 1) \cdot 3$$
$$a_n = 3n - 7, \text{ com } n \in \mathbb{N}^*$$

R5 **Obtenha a P.A. na qual o quinto e o décimo primeiro termos valem, respectivamente, 11 e 23.**

Resolução

Do quinto termo ao décimo primeiro há 6 termos:



Substituindo a_5 por 11 e a_{11} por 23 em $a_{11} = a_5 + 6r$, obtemos:

$$23 = 11 + 6r$$
$$r = 2$$

Substituindo r por 2 em $a_5 = a_1 + 4r$, obtemos:

$$11 = a_1 + 4 \cdot 2$$
$$a_1 = 3$$

Portanto, a P.A. é $(3, 5, 7, ...)$.

R6 **Quantos termos tem a P.A. (17, 26, 35, ..., 197)?**

Resolução

Sabemos que $a_1 = 17$ e $a_n = 197$ e que a razão dessa P.A. é $r = 26 - 17 = 9$.

Substituindo os valores na expressão do termo geral da P.A., obtemos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$197 = 17 + (n - 1) \cdot 9$$
$$180 = 9(n - 1)$$
$$\frac{180}{9} = n - 1$$
$$20 = n - 1$$
$$n = 21$$

Logo, a sequência tem 21 termos.

R7 **Quantos múltiplos de 7 existem entre 20 e 510?**

Resolução

Os múltiplos de 7 compreendidos entre 20 e 510 formam a sequência (21, 28, 35, ..., 504), que é uma P.A. com $a_1 = 21$, $r = 7$ e $a_n = 504$.

Substituindo esses valores na expressão do termo geral da P.A., obtemos:

$$504 = 21 + (n - 1) \cdot 7$$
$$n = 70$$

Portanto, existem 70 múltiplos de 7 entre 20 e 510.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13 Em uma P.A., determine:

a) o terceiro termo, dados $a_1 = 0$ e $r = 15$. 30

b) o décimo termo, dados $a_1 = -6$ e $r = 7$. 57

c) a razão, dados $a_1 = 8$ e $a_{20} = 32$. $\frac{24}{19}$

d) o primeiro termo, dados $a_{30} = -\frac{17}{2}$ e $r = \frac{1}{4}$. $-\frac{63}{4}$

e) a ordem do termo que vale -8, dados $a_1 = \frac{149}{2}$ e $r = -\frac{15}{2}$. 12

14 Quantos termos tem a P.A. (15, 20, 25, ..., 160)? 30 termos.

15 Imagine que você precise calcular a quantidade de cadeiras da 40ª fila de um auditório e sabe que a quantidade de cadeiras de cada fila pode ser descrita por uma progressão aritmética. Por qual método ficaria mais fácil resolver essa atividade: escrever a sequência termo a termo ou usar a fórmula do termo geral? Justifique. Resposta pessoal.

16 Calcule o n-ésimo número inteiro positivo que, dividido por 3, apresenta o maior resto possível. $a_n = 3n + 2$, $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$.

17 Qual é a razão da P.A. formada pelos números naturais cuja divisão por 5 deixa resto 2? 5

18 Obtenha a P.A. na qual o quarto e o sétimo termos sejam, respectivamente, 11 e 26. $(-4, 1, 6, 11, 16, \ldots)$

19 Em uma P.A., a soma do segundo e do quinto termos vale 8 e a soma do terceiro e do sétimo termos vale 20. Determine o 100º termo. 390

20 Na P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $a_2 \cdot a_3 = 28$ e $a_n - a_{n-2} = -6$, com $n \geqslant 3$. Determine essa sequência. $(10, 7, 4, 1, \ldots)$ ou $(-1, -4, -7, -10, \ldots)$.

21 Calcule a quantidade de múltiplos de 3 existentes entre 100 e 1 000. 300

22 Quantos inteiros positivos, com quatro algarismos, não são divisíveis por 6? 7 500

23 Interpolar (ou intercalar, inserir) m meios aritméticos entre os números A e B significa formar uma P.A. de $(m + 2)$ termos cujo primeiro termo seja A e o último seja B. **a)** (2, 8, 14, 20, 26, 32) **b)** $(1, k, 2k - 1, 3k, 4k - 1, \ldots, k^2 - k + 1, k^2)$

Interpole:

a) quatro meios aritméticos entre 2 e 32;

b) k meios aritméticos entre 1 e k^2, com $k \geqslant 2$.

As atividades **21** e **22** podem ser resolvidas de diferentes maneiras. Incentive a socialização das estratégias encontradas pelos estudantes.

24 Um atleta amador organizou seu treinamento diário de modo a correr 200 m a mais a cada dia do que no dia anterior até o décimo dia. No décimo dia, ele percorreu 4 000 m. Qual foi a distância percorrida por esse atleta no terceiro dia do treinamento? 2 600 m

25 Indique a alternativa correta no caderno.

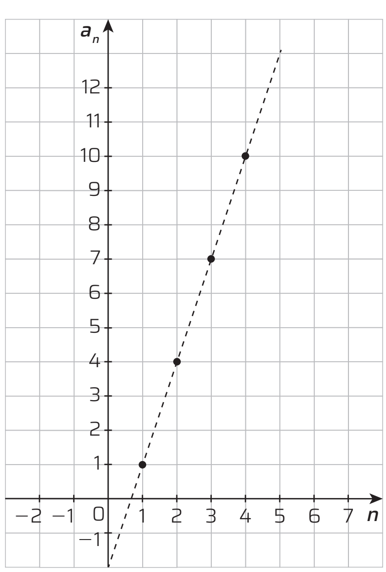
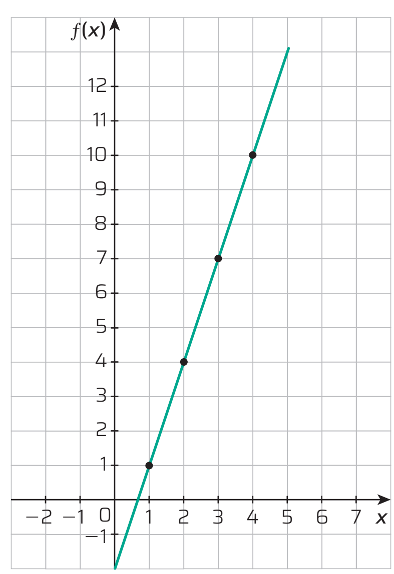
(Uerj) Um cliente, ao chegar a uma agência bancária, retirou a última senha de atendimento do dia, com o número 49. Verificou que havia 12 pessoas à sua frente na fila, cujas senhas representavam uma progressão aritmética de números naturais consecutivos, começando em 37.

Algum tempo depois, mais de 4 pessoas desistiram do atendimento e saíram do banco. Com isso, os números das senhas daquelas que permaneceram na fila passaram a formar uma nova progressão aritmética. Se os clientes com as senhas de números 37 e 49 não saíram do banco, o número máximo de pessoas que pode ter permanecido na fila é: Alternativa **b**.

a) 6 b) 7 c) 9 d) 12

Funções e progressões aritméticas

Muito do que estudamos sobre as progressões aritméticas pode ser relacionado com funções afins. Verifique o quadro a seguir.

	Progressão aritmética	Função afim
Lei de formação	$a_n = a_1 + (n - 1)r$	$f(x) = ax + b$, com $x = n$, $a = r$ e $b = a_1 - r$
Domínio	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$
Para ser crescente	$r > 0$	$a > 0$
Para ser decrescente	$r < 0$	$a < 0$
Para ser constante	$r = 0$	$a = 0$
Gráfico		

Ilustrações: ID/BR

No entanto, para as funções afins com domínio em $\mathbb{R}$, não podemos aplicar algumas propriedades que as progressões aritméticas têm, como a propriedade da média aritmética, já que ela define que cada termo de uma P.A. é a média aritmética entre os termos anterior e posterior. Para uma função afim, isso não teria nenhum sentido.

Sugerimos que solicite aos estudantes que se reúnam em grupos para ler o tópico "Soma dos termos de uma P.A.". Em seguida, peça a eles que socializem o que compreenderam e as dúvidas que tiveram. Por fim, esclareça todas as dúvidas. Esse trabalho favorece o desenvolvimento da competência geral **4**.

Bridgeman Images/Fotoarena

JENSEN, Christian Albrecht. *Retrato de Carl Friedrich Gauss*, 1840. Óleo sobre tela, 66 × 52 cm.

Soma dos termos de uma P.A.

Existem muitas histórias curiosas e inusitadas que envolvem matemáticos famosos. Conta-se em uma dessas histórias que o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), quando criança, frequentou uma escola em que seu professor era considerado bravo e exigente.

Dizem que, certa vez, para manter a classe ocupada e em silêncio, ele mandou que os estudantes somassem todos os números de 1 a 100. Gauss, que estava na época com aproximadamente 10 anos, terminou a atividade quase que imediatamente e foi o único a acertar o resultado (5 050), sem apresentar nenhum cálculo por escrito.

Surpreso com a rapidez do estudante, o professor quis saber como ele havia realizado o cálculo. Apesar de ainda não conhecer o conceito de P.A., Gauss percebeu que os números de 1 a 100 formavam uma progressão aritmética com o primeiro termo igual a 1 e razão 1. O que se desejava era a soma dos termos dessa progressão.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$

101

101

101

Gauss teria observado que a soma dos termos equidistantes dessa P.A. é sempre 101. Agrupando os números de dois em dois, Gauss observou que havia 50 parcelas iguais a 101. Assim, a soma seria igual a 50 · 101, ou seja, 5 050.

Essa ideia equivale a escrever a sequência dada, depois copiá-la "de trás para a frente" e, em seguida, efetuar as adições indicadas.

$$\begin{array}{r}1\\+\ 100\\\hline 101\end{array}\quad\begin{array}{r}2\\+\ 99\\\hline 101\end{array}\quad\begin{array}{r}3\\+\ 98\\\hline 101\end{array}\quad\ldots\quad\begin{array}{r}99\\+\ 2\\\hline 101\end{array}\quad\begin{array}{r}100\\+\ 1\\\hline 101\end{array}$$

Como são somados duas vezes os mesmos elementos (por exemplo, 1 + 100 e 100 + 1), após efetuar o produto (100 · 101), deve-se dividir o resultado por 2, o que resulta em 5 050, que é a soma dos termos da progressão.

É importante notar que 100 é o número de termos da sequência, e 101 é a soma do primeiro termo com o último.

Posteriormente, devido a seus trabalhos, Gauss foi considerado o maior matemático de sua época e talvez de todos os tempos, e essa forma de calcular a soma dos termos de uma P.A. acabou sendo desenvolvida e generalizada para qualquer P.A. finita.

Analisando, por exemplo, a P.A. finita (2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37), temos:

$$2,\quad 7,\quad 12,\quad 17,\quad 22,\quad 27,\quad 32,\quad 37$$

39

39

39

39

Perceba que a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

É possível provar que esse fato ocorre em qualquer P.A. finita.

Em toda P.A. finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Para provar essa afirmação, vamos considerar uma P.A. finita de razão r:

$$\left(a_1, a_2, a_3, ..., a_{k+1}, ..., a_{n-k}, ..., a_{n-1}, a_n\right)$$

em que a_{k+1} e a_{n-k} indicam dois termos genéricos equidistantes dos extremos.

Como $a_{k+1} = a_1 + (k + 1 - 1)r = a_1 + kr$ e $a_{n-1} = a_n - r$, $a_{n-2} = a_n - 2r$, ..., $a_{n-k} = a_n - kr$, obtemos:

$$a_{k+1} + a_{n-k} = (a_1 + kr) + (a_n - kr) = a_1 + a_n$$

Portanto:

$$a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ... = a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n$$

Podemos, agora, deduzir que:

A soma S_n dos n primeiros termos da P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$, de razão r, é dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Para comprovar que essa fórmula é válida, vamos escrever S_n de duas maneiras. Acompanhe.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

ou

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Adicionando essas igualdades membro a membro, obtemos:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Substituindo cada expressão contida nos parênteses por $a_1 + a_n$, temos:

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas iguais a } (a_1 + a_n)}$$

$$2 \cdot S_n = n \cdot \left(a_1 + a_n\right)$$

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R8 **Calcule a soma dos vinte primeiros termos da P.A. (4, 6, 8, ...).**

Resolução

Primeiro, vamos determinar a_{20}.

$$a_{20} = a_1 + 19r = 4 + 19 \cdot 2 = 42$$

Agora, vamos calcular a soma.

$$S_{20} = \frac{20 \cdot (a_1 + a_{20})}{2} = \frac{20 \cdot (4 + 42)}{2} = 460$$

Portanto, a soma dos vinte primeiros termos dessa P.A. é 460.

R9 **Calcule a soma dos dez primeiros termos de uma P.A., sabendo que a soma do segundo e do sétimo termos é 8 e que a soma do quarto e do oitavo termos é 14.**

Resolução

Devemos, inicialmente, obter a_1 e r.

$$\begin{cases} a_2 + a_7 = 8 \\ a_4 + a_8 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + r + a_1 + 6r = 8 \\ a_1 + 3r + a_1 + 7r = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 7r = 8 & (1) \\ 2a_1 + 10r = 14 & (2) \end{cases}$$

Subtraindo (1) de (2), obtemos:

$$3r = 6$$
$$r = 2$$

Substituindo r por 2 em (1), obtemos:

$$2a_1 + 7 \cdot 2 = 8$$
$$2a_1 = -6$$
$$a_1 = -3$$

Logo:

$$a_{10} = a_1 + 9r$$
$$a_{10} = -3 + 9 \cdot 2$$
$$a_{10} = 15$$

e

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (a_1 + a_{10})}{2}$$
$$S_{10} = \frac{10 \cdot (-3 + 15)}{2}$$
$$S_{10} = 60$$

Portanto, a soma dos dez primeiros termos dessa P.A. é 60.

R10 **A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por $n^2 - 4n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Obtenha o termo geral dessa P.A.**

Resolução

$$S_n = n^2 - 4n$$

Podemos encontrar o primeiro termo da sequência tomando $n = 1$, ou seja, calculando a soma na qual aparece somente o primeiro termo.

$$S_1 = 1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$$
$$a_1 = -3$$

Fazendo $n = 2$, podemos calcular a soma dos dois primeiros termos da P.A.

$$S_2 = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$$

Como $S_2 = a_1 + a_2$, temos:

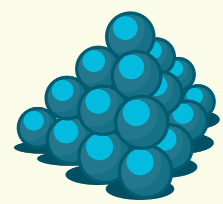
$$-4 = -3 + a_2$$
$$-4 + 3 = a_2$$
$$a_2 = -1$$

Assim, temos a P.A. $(-3, -1, ...)$, com $a_1 = -3$ e $r = 2$.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$a_n = -3 + (n - 1) \cdot 2$$
$$a_n = -3 + 2n - 2$$
$$a_n = 2n - 5$$

Portanto, o termo geral dessa P.A. é $a_n = 2n - 5$.

R11 **A construção a seguir lembra uma pirâmide de base triangular. Ela foi montada com esferas.**



ID/BR

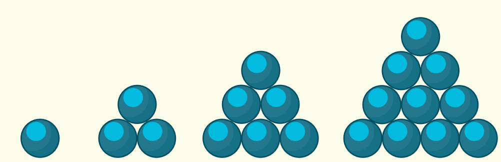
a) Sabendo que a construção tem quatro andares, quantas esferas há na base?

b) Se a construção tivesse 12 andares, quantas esferas haveria na base?

Resolução

a) Para responder a esse item, podemos fazer um esquema da base da pirâmide em cada caso.

1 andar | 2 andares | 3 andares | 4 andares



1 | 1 + 2 | 1 + 2 + 3 | 1 + 2 + 3 + 4

Ilustrações: ID/BR

Assim, há dez esferas na base.

b) Para saber o número de esferas da base de uma pirâmide de 12 andares, podemos desenhar ou observar pelo esquema anterior que o número de esferas da base corresponde à soma dos 12 primeiros termos de uma P.A., em que $a_1 = 1$, $a_n = n$ e $r = 1$. Assim:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (1 + 12)}{2}$$
$$S_{12} = 78$$

Logo, na base de uma pirâmide de 12 andares, haveria 78 esferas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Enquanto resolve as atividades desta seção, liste suas dúvidas para, depois, discuti-las com o professor e os colegas.

26 Qual é a soma dos cem primeiros termos da P.A. $(-3, 2, 7, ...)$? $S_{100} = 24\,450$

27 Determine o valor das somas a seguir.

a) $2 + 4 + 6 + ... + 100$ 2 550

b) $2 + 4 + 6 + ... + 2n$, com $n \in \mathbb{N}^*$ $n + n^2$

(Observação: A resposta deve ser dada em função de n.)

28 Determine, em função de n, o termo geral e a expressão da soma dos n primeiros termos da progressão aritmética em que:

a) $a_1 = -2$ e $r = 10$. $a_n = -12 + 10n$ e $S_n = -7n + 5n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$

b) $a_3 = 6$ e $a_5 = 20$. $a_n = -15 + 7n$ e $S_n = \dfrac{-23n + 7n^2}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

29 Considere a sequência $a_{n+1} = a_n + 3$, em que $a_1 = 10$, e faça o que se pede.

a) Mostre graficamente que essa sequência é uma progressão aritmética crescente. Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) Calcule S_{30}. $S_{30} = 1\,605$

30 Em uma P.A., o décimo termo e a soma dos trinta primeiros termos valem, respectivamente, 26 e 1 440. Obtenha essa sequência. $(-10, -6, -2, 2, 6, 10, ...)$

31 Qual é a soma dos números pares compreendidos entre 0 e 61? 930

32 A P.A. $(-20, -14, -8, ..., x)$ tem a soma de seus termos igual a 946. Determine o valor de x. $x = 106$

33 Obtenha a soma dos termos de uma P.A. com:

a) cinquenta termos, em que $a_{15} + a_{36} = 100$. $S_{50} = 2\,500$

b) trinta e um termos, em que $a_{16} = 50$. $S_{31} = 1\,550$

34 Obtenha a soma dos números inteiros positivos menores que 1000 que não são divisíveis por 6. 416 334

35 Na P.A. (28, 23, 18, ...), qual deve ser o menor valor de n para que S_n seja negativa? 13

36 Qual é o número mínimo de termos que devemos adicionar, a partir do primeiro, na sequência $(-15, -11, -7, ...)$, para que a soma desses termos seja positiva? 9

37 A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por $2n \cdot (n - 4)$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Qual é o termo geral dessa P.A.? $a_n = -10 + 4n$, $n \in \mathbb{N}^*$

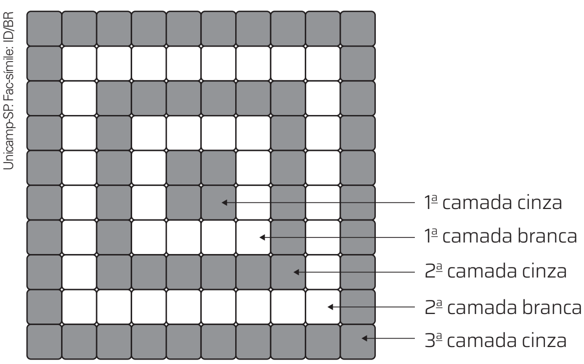
38 Elabore uma atividade que envolva uma P.A. cuja resposta seja $S_{15} = 13$. Resposta pessoal.

39 Um carpinteiro está calculando quantas telhas ele vai precisar para completar as quatro partes do telhado. Em cada uma dessas partes, as telhas são dispostas de modo que cada fileira fique com duas telhas a mais que a imediatamente superior. Ajude-o a calcular o número de telhas, sabendo que em cada parte, de cima para baixo, há 4 telhas na primeira fileira e 38 na última. 1 512 telhas.

40 Registre a resposta correta no caderno. Alternativa **d**.

(Unicamp-SP) No centro de um mosaico formado apenas por pequenos ladrilhos, um artista colocou 4 ladrilhos cinza. Em torno dos ladrilhos centrais, o artista colocou uma camada de ladrilhos brancos, seguida por uma camada de ladrilhos cinza, e assim sucessivamente, alternando camadas de ladrilhos brancos e cinza, como ilustra a figura a seguir, que mostra apenas a parte central do mosaico. Observando a figura, podemos concluir que a 10ª camada de ladrilhos cinza contém

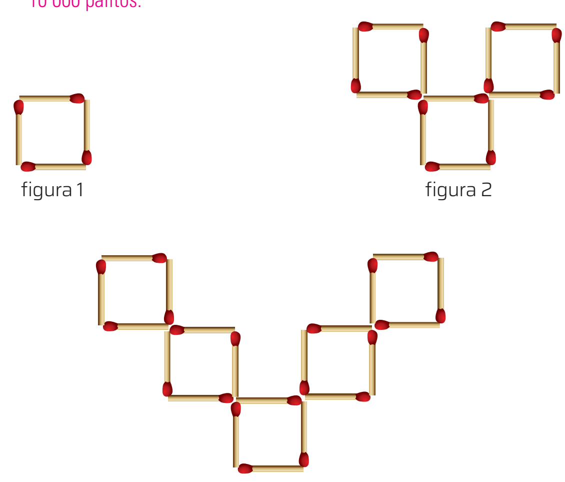
Unicamp-SP Fac-símile: ID/BR



a) 76 ladrilhos.
b) 156 ladrilhos.
c) 112 ladrilhos.
d) 148 ladrilhos.

41 Observe as três primeiras figuras de uma sequência. 10 000 palitos.

Ilustrações: ID/BR



Se as figuras são formadas com palitos de fósforo e seguem a mesma lei de formação, quantos palitos são necessários para construir, ao mesmo tempo, as cinquenta primeiras figuras dessa sequência?

A atividade **38** é um desafio mais complexo, pois são várias as possibilidades de sequência. Por isso, é preciso que os estudantes tenham mais tempo para realizá-la. Proponha a eles que se reúnam em duplas, para que um resolva o problema do outro e, se for preciso, façam juntos os ajustes, caso os textos estejam mal formulados ou com problemas que não levem à resposta solicitada.

O trabalho desenvolvido neste tópico contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT508**, pois os estudantes vão relacionar progressões numéricas a funções e aplicar esse conhecimento na resolução de problemas.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (P.G.)

Assim como as progressões aritméticas, outro tipo de sequência numérica merece um estudo especial. Considere as sequências a seguir.

- (2, 6, 18, 54, ...)
- (30; 15; 7,5; 3,75; ...)
- $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...\right)$

Pense em como você pode obter, em cada uma delas, o segundo termo a partir do primeiro, o terceiro termo a partir do segundo, o quarto termo a partir do terceiro, e assim por diante.

Você deve ter notado que cada termo não é mais obtido quando somamos um número constante ao termo anterior a ele, mas, sim, quando **multiplicamos** seu precedente por um valor constante.

Assim, na primeira sequência, cada termo a partir do segundo é obtido pela multiplicação de seu precedente por 3.

$$2 \underbrace{\quad}_{\times 3} 6 \underbrace{\quad}_{\times 3} 18 \underbrace{\quad}_{\times 3} 54 \; ...$$

Na segunda sequência, cada termo a partir do segundo é obtido quando multiplicamos o termo anterior a ele por $\frac{1}{2}$ ou 0,5.

$$30 \underbrace{\quad}_{\times 0{,}5} 15 \underbrace{\quad}_{\times 0{,}5} 7{,}5 \underbrace{\quad}_{\times 0{,}5} 3{,}75 \; ...$$

- Por fim, na terceira sequência, para obter qualquer termo a partir do segundo, multiplicamos seu precedente por $\frac{1}{3}$.

$$1 \underbrace{\quad}_{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{3} \underbrace{\quad}_{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{9} \underbrace{\quad}_{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{27} \; ...$$

Sequências desse tipo são chamadas de **progressões geométricas**.

> Progressão geométrica (P.G.) é toda sequência de números na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante. Essa constante, que vamos indicar por q, é denominada **razão** da progressão geométrica.
>
> $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$ é uma P.G. se, e somente se, $a_n = a_{n-1} \cdot q$, com $n \geqslant 2$.

Note que, em uma P.G. de termos não nulos:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Ou seja, podemos obter a razão de uma progressão geométrica dividindo qualquer um dos termos pelo seu antecessor, a partir do segundo termo da sequência.

Exemplos

- A sequência (3, 9, 27, 81, ...), apresentada na abertura deste capítulo, é uma P.G. de razão 3, pois: $q = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = 3$.
- A sequência $\left(-40, -20, -10, ..., -\frac{5}{16}, -\frac{5}{32}\right)$ é uma P.G. de razão $q = \frac{-20}{-40} = \frac{1}{2}$.
- A sequência (144, 48, 16, ...) é uma P.G. de razão $q = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$.
- A sequência $(-2, -6, -18, ..., -4\,374)$ é uma P.G. de razão $q = \frac{-6}{-2} = 3$.
- A sequência $(-72, 24, -8, ...)$ é uma P.G. de razão $q = \frac{24}{-72} = -\frac{1}{3}$.
- A sequência (5, 5, 5, ..., 5, 5, 5) é uma P.G. de razão $q = \frac{5}{5} = 1$ (é também uma P.A. de razão $r = 0$).
- A sequência (0, 0, 0, ...) é uma P.G. de razão **indeterminada** (é também uma P.A. de razão $r = 0$).
- A sequência (6, 0, 0, 0, ...) é uma P.G. de razão $q = 0$.

Classificação

Uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$ de razão q é:

- **crescente**, se cada termo é maior que o anterior. Uma P.G. crescente pode ser composta de termos positivos ou negativos.
  - Termos positivos com $a_n > a_{n-1}$ e $q > 1$. Por exemplo, (3, 9, 27, 81, ...).
  - Termos negativos com $a_n > a_{n-1}$ e $0 < q < 1$. Por exemplo, $\left(-40, -20, -10, ..., -\frac{5}{16}, -\frac{5}{32}\right)$
- **decrescente**, se cada termo é menor que o anterior. Uma P.G. decrescente pode ser composta de termos positivos ou negativos.
  - Termos positivos com $a_n < a_{n-1}$ e $0 < q < 1$. Por exemplo, (144, 48, 16, ...).
  - Termos negativos com $a_n < a_{n-1}$ e $q > 1$. Por exemplo, $(-2, -6, -18, ..., -4\,374)$.
- **alternante**, se cada termo tem sinal contrário ao do anterior. Ou seja, quando $q < 0$. Por exemplo, $(4, -12, 36, -108, ...)$ e $(-72, 24, -8, ...)$.
- **constante**, se cada termo é igual ao anterior. Uma P.G. constante pode ter termos:
  - todos nulos: $a_1 = 0$ e q pode ser qualquer número, exceto zero. Essa sequência é representada por (0, 0, 0, ...).
  - iguais e não nulos com $a_n = a_{n-1}$ e $q = 1$. Por exemplo, (5, 5, 5, ..., 5, 5, 5).
- **constante a partir do segundo termo**, se $a_1 \neq 0$ e os demais termos são nulos. Por exemplo, (6, 0, 0, 0, ...).

Média geométrica

A média geométrica simples m de dois números não negativos a e b é a raiz quadrada do produto deles. Assim, $m = \sqrt{a \cdot b}$, o que nos leva a $m^2 = a \cdot b$.

Por exemplo, a média geométrica entre 9 e 4 é 6, pois:

$$\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6 \text{ ou } 6^2 = 9 \cdot 4$$

Repare como a média geométrica está relacionada aos termos de uma P.G.

Em uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, ..., a_n, ...)$ de razão q, temos:

- $a_j = a_{j-1} \cdot q$
- $a_{j+1} = a_j \cdot q$

Considerando inicialmente termos não nulos, temos:

$$\frac{a_j}{a_{j-1}} = \frac{a_{j+1}}{a_j}$$

$$\boxed{(a_j)^2 = a_{j-1} \cdot a_{j+1}}$$

Essa última igualdade é válida para termos nulos e, a partir dela, temos:

$$|a_j| = \sqrt{a_{j-1} \cdot a_{j+1}}$$

Em qualquer P.G., o valor absoluto de cada termo, a partir do segundo, é a **média geométrica** dos termos anterior e posterior.

Acompanhe o exemplo a seguir.

Exemplo

Na P.G. (2, 6, 18, 54, 162, 486), a razão é 3 e temos:

- $6 = \sqrt{2 \cdot 18}$ ou $6^2 = 2 \cdot 18$
- $18 = \sqrt{6 \cdot 54}$ ou $18^2 = 6 \cdot 54$
- $54 = \sqrt{18 \cdot 162}$ ou $54^2 = 18 \cdot 162$
- $162 = \sqrt{54 \cdot 486}$ ou $162^2 = 54 \cdot 486$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R12 **Verifique se é P.G. a sequência cujo termo geral é:**

a) $a_n = 4^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $a_n = 5n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução

a) Substituindo n por números naturais diferentes de zero na expressão $a_n = 4^n$, obtemos a sequência $(4, 16, 64, ..., 4^{n-1}, 4^n, ...)$.

Como $\frac{16}{4} = \frac{64}{16} = ... = \frac{4^n}{4^{n-1}} = 4$, a sequência é uma P.G.

b) Substituindo n por números naturais diferentes de zero na expressão $a_n = 5n$, obtemos a sequência $(5, 10, 15, ...)$.

Como $\frac{10}{5} \neq \frac{15}{10}$, a sequência não é uma P.G.

R13 **Determine a razão da P.G. $(x - 2, x + 2, x - 1)$.**

Resolução

Como $x + 2$ é a média geométrica de $x - 2$ e $x - 1$, temos:

$$(x + 2)^2 = (x - 2) \cdot (x - 1)$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 3x + 2$$

$$x = -\frac{2}{7}$$

Portanto, a sequência é $\left(-\frac{16}{7}, \frac{12}{7}, -\frac{9}{7}\right)$ e a razão é $q = \frac{\frac{12}{7}}{-\frac{16}{7}} = -\frac{3}{4}$.

R14 **Determine uma P.G. de três termos reais na qual o produto e a soma dos termos sejam, respectivamente, 216 e 26.**

Resolução

Vamos usar uma representação especial para essa P.G.: $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$, com $q \neq 0$.

Do enunciado, sabemos que:

Discuta com os estudantes por que essa é uma boa escolha para representar três termos consecutivos de uma P.G., quando se quer calcular o produto desses termos.

$$\begin{cases} \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 216 & (1) \\ \frac{x}{q} + x + xq = 26 & (2) \end{cases}$$

De (1), obtemos:

$$x^3 = 216$$

$$x = \sqrt[3]{216}$$

$$x = 6$$

Substituindo x por 6 em (2), obtemos:

$$\frac{6}{q} + 6 + 6q = 26$$

$$6q^2 + 6q + 6 = 26q$$

$$6q^2 - 20q + 6 = 0$$

Podemos dividir os dois membros dessa equação por 2 e trabalhar com $3q^2 - 10q + 3 = 0$.

Resolvendo essa equação, obtemos: $q = 3$ ou $q = \frac{1}{3}$.

Para $q = 3$, temos a sequência (2, 6, 18) e, para $q = \frac{1}{3}$, temos (18, 6, 2).

42. a) A sequência não é uma P.G.
b) A sequência é uma P.G. de razão $-\frac{2}{3}$.
c) A sequência não é uma P.G.
d) A sequência é uma P.G. de razão $\frac{1}{10} = 0{,}1$.

46. b) 2 h: $(3^0 + 3^1 + 3^2)$ pessoas; 3 h: $(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)$ pessoas; 4 h: $(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$ pessoas; 5 h: $(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5)$ pessoas; 6 h: $(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6)$ pessoas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

42 **Verifique se cada sequência a seguir é uma P.G. e, em caso afirmativo, determine sua razão.**

a) $\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{8}, \frac{75}{16}, ...\right)$

b) $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right)$

c) $(1, 4, 9, 16, ...)$

d) $(0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; ...)$

43 **Qual é a razão de cada P.G.?**

a) $(4, -2\sqrt{2}, 2, ...)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $(\sqrt{2} - 1, 3 - 2\sqrt{2}, -7 + 5\sqrt{2}, ...)$ $\sqrt{2} - 1$

44 **Verifique se é uma P.G. a sequência cujo termo geral é dado por:**

a) $a_n = (-1)^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. É uma P.G. de razão -1.

b) $a_n = \frac{n + 1}{n^2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Não é uma P.G.

46. a) 39 pessoas sabiam da notícia às 3 h da tarde e 1 092 pessoas sabiam da notícia às 6 h da tarde.

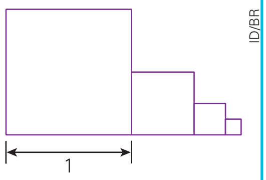
45 **Sejam a, b e c três termos consecutivos e positivos de uma P.G., em que $a < b < c$. Se $a = m - 1$, $b = m + 5$ e $c = 11m - 1$, calcule $a + b + c$.**
$a + b + c = 42$

46 **Ângela e seus amigos gostam de compartilhar notícias. Assim que Ângela soube de uma notícia, à 1 h da tarde, ela a contou a três amigos. Cada um desses amigos contou a notícia a três outras pessoas durante a segunda hora da tarde. E assim a notícia foi se espalhando até às 6 h da tarde.**

a) Além de Ângela, quantas pessoas sabiam da notícia às 3 h da tarde? E quantas sabiam da notícia às 6 h da tarde?

b) Usando potências, represente o número de pessoas que sabiam da notícia às 2 h, 3 h, 4 h, 5 h e 6 h da tarde. Discuta e analise com os estudantes as possibilidades de resolução da atividade **46**.

47 **Na sequência de figuras ao lado, a medida do lado de cada quadrado, a partir do segundo, é metade da medida do lado do quadrado anterior.**



a) Sendo 1 a medida do lado do primeiro quadrado, determine os primeiros termos da sequência das áreas dos quadrados. $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots\right)$

b) Obtenha, agora, os primeiros termos da sequência dos perímetros dos quadrados. $\left(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots\right)$

c) As sequências são progressões de que tipo? Ambas as sequências são progressões geométricas.

48 **Em uma P.G. de três termos reais, a soma e o produto deles são, respectivamente, -28 e -512. Determine essa sequência.** $(-16, -8, -4)$ ou $(-4, -8, -16)$.

49 **Elabore dois exemplos de sequências que não sejam P.G. e explique por que essas sequências não podem ser consideradas P.G.** Resposta pessoal.

Na atividade **49**, elaborar contraexemplos é uma excelente oportunidade para promover a reflexão dos estudantes sobre o significado de cada conceito e para que você também possa avaliar a compreensão deles. Isso implicará eventual retomada do que ainda não foi bem compreendido.

Fórmula do termo geral de uma P.G.

Aplicando a definição de progressão geométrica à P.G. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$ de razão q, temos:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \end{cases}$$

Portanto:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ com } n \geqslant 2$$

Essa relação é chamada de **fórmula do termo geral de uma P.G.** e possibilita calcular qualquer termo da sequência, desde que sejam conhecidos o primeiro termo a_1 e a razão q.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R15 **Considere a P.G. (2, 4, 8, ...) e faça o que se pede em cada item.**

a) Calcule o 11º termo.

b) Calcule a posição do termo de valor 256.

c) Represente graficamente essa sequência.

Resolução

a) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_{11} = 2 \cdot 2^{10}$

$a_{11} = 2\,048$

b) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$256 = 2 \cdot 2^{n-1}$

$128 = 2^{n-1}$

$2^7 = 2^{n-1}$

Logo:

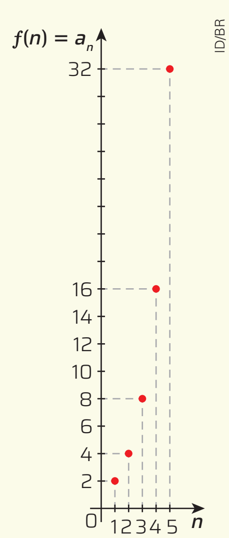
$7 = n - 1$

$n = 8$

c) $a_n = f(n) = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1+1} = 2^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Vamos utilizar um quadro para auxiliar na construção do gráfico dessa função.

n	$a_n = 2^n$
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
⋮	⋮



Note que o gráfico de f é formado por pontos não alinhados e que $D(f) = \mathbb{N}^*$.

R16 **Em uma P.G. crescente, o quinto e o sétimo termos são, respectivamente, 24 e 216. Obtenha o décimo termo.**

Resolução

Do enunciado, temos $a_5 = 24$ e $a_7 = 216$.

$$\_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, 24, \_\_\_, 216, \_\_\_$$
$$\times q \quad \times q$$

Podemos escrever:

$$a_7 = a_6 \cdot q = (a_5 \cdot q) \cdot q = a_5 \cdot q^2$$
$$a_7 = a_5 \cdot q^2$$
$$216 = 24 \cdot q^2$$
$$q^2 = 9$$
$$q = -3 \text{ ou } q = 3$$

Como a P.G. é crescente, $q = 3$.

Logo:

$$a_{10} = a_7 \cdot q^3$$
$$a_{10} = 216 \cdot 3^3$$
$$a_{10} = 5832$$

O décimo termo dessa P.G. é 5 832.

R17 **Em uma P.G., a soma do segundo e do quinto termos é 42 e a soma do quarto e do sétimo termos é 378. Determine essa progressão geométrica.**

Resolução

$$\begin{cases} a_2 + a_5 = 42 \\ a_4 + a_7 = 378 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^4 = 42 \\ a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^6 = 378 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q \cdot (1 + q^3) = 42 \\ a_1 \cdot q^3 \cdot (1 + q^3) = 378 \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação pela primeira, temos:

$$q^2 = 9 \Rightarrow q = -3 \text{ ou } q = 3$$

Há duas sequências possíveis:

Substituindo q por 3 em $a_1 \cdot q \cdot (1 + q^3) = 42$, obtemos $a_1 = \frac{1}{2}$ e a P.G. é $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \ldots\right)$.

Substituindo q por -3 em $a_1 \cdot q \cdot (1 + q^3) = 42$, obtemos $a_1 = \frac{7}{13}$ e a P.G. é $\left(\frac{7}{13}, -\frac{21}{13}, \frac{63}{13}, \ldots\right)$.

R18 **Se você depositar R\$ 1 000,00 em uma conta-poupança e o rendimento for 10% ao ano, quanto terá ao final de cinco anos?**

Resolução

Capital inicial: R\$ 1 000,00

Após um ano, 1 000 mais 10% de 1 000:

$$\begin{aligned} &1000 + 0{,}1 \cdot 1000 = \\ &= 1000 \cdot (1 + 0{,}1) = \\ &= 1000 \cdot 1{,}1 = \\ &= 1100 \end{aligned}$$

Após dois anos, 1 100 mais 10% de 1 100:

$$\begin{aligned} &1100 + 0{,}1 \cdot 1100 = \\ &= 1100 \cdot (1 + 0{,}1) = \\ &= 1100 \cdot 1{,}1 = \\ &= 1000 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 = \\ &= 1000 \cdot (1{,}1)^2 = \\ &= 1210 \end{aligned}$$

Após três anos, 1 210 mais 10% de 1 210:

$$\begin{aligned} &1210 \cdot (1 + 0{,}1) = \\ &= 1210 \cdot 1{,}1 = \\ &= 1000 \cdot (1{,}1)^2 \cdot 1{,}1 = \\ &= 1000 \cdot (1{,}1)^3 = \\ &= 1331 \end{aligned}$$

Note que os valores anuais formam uma P.G., em que $a_1 = 1000$ e a razão é 1,1 ou $(1 + 0{,}1)$, correspondendo a 10% a mais no valor dos rendimentos ao final de cada ano.

Então, podemos determinar o valor total a ser recebido calculando o sexto termo dessa P.G.:

$$a_6 = a_1 \cdot q^5$$
$$a_6 = 1000 \cdot (1{,}1)^5$$
$$a_6 = 1610{,}51$$

Portanto, ao final de cinco anos, você terá R\$ 1 610,51.

R19 **Ao observar uma bactéria ao microscópio, um técnico nota que ela se subdivide em duas ao fim de uma hora, e o mesmo ocorre com cada bactéria obtida nesse processo. Quantas bactérias são produzidas por esse processo ao final de um dia?**

Resolução

Número de bactérias ao final de cada hora do dia:

1 hora: $2 = 2^1$

2 horas: $4 = 2^2$

3 horas: $8 = 2^3$

4 horas: $16 = 2^4$

10 horas: 2^{10}

24 horas: 2^{24}

Note que a sequência $2^1, 2^2, 2^3, \ldots$ é uma P.G. de razão $q = 2$ e $a_1 = 2$.

Portanto, em 24 horas são produzidas 2^{24} bactérias.

Para resolver esse problema, também poderíamos ter recorrido à fórmula do termo geral de uma P.G.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

50 Dada a P.G. (3, 6, 12, ...), calcule:

a) o décimo termo; $a_{10} = 1\,536$

b) a ordem do termo de valor 6144. 12º termo.

51 Em uma P.G. de termos reais, calcule a razão, dados:

a) $a_1 = 6$ e $a_7 = 4\,374$. 3

b) $a_1 = 10$ e $a_6 = -320$. -2

52 Obtenha o número de termos da sequência $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, 3, ..., 12\,288\right)$. 15 termos.

53 Em uma P.G. de termos reais, o quarto e o sétimo termos são, respectivamente, 24 e -192. Quais são o décimo e o décimo primeiro termos?
$a_{10} = 1\,536$ e $a_{11} = -3\,072$.

54 Em uma P.G., a diferença entre o sexto e o segundo termos é 15 e a diferença entre o oitavo e o quarto termos é 60. Obtenha essa P.G. e represente-a graficamente. $\left(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots\right)$ ou $\left(-\frac{1}{2}, 1, -2, 4, \ldots\right)$.

55 Reveja o significado de "interpolar", na atividade **23** e, com base nesse conceito, interpole:

a) três meios geométricos entre 2 e 32;
(2, 4, 8, 16, 32) ou (2, -4, 8, -16, 32).

b) quatro meios geométricos entre -2 e 486.
(-2, 6, -18, 54, -162, 486)

56 A figura ao lado é conhecida como **curva do floco de neve de Koch**.


Encyclopaedia Britannica/UIG/ Getty Images

Representação do floco de neve de Koch.

O matemático sueco Helge von Koch (1870-1924), em 1904, obteve essa figura a partir de um triângulo equilátero de lado de medida 1. Analise as três primeiras figuras dessa sequência.

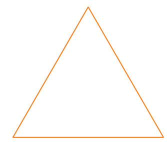


figura 1

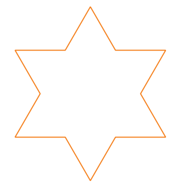


figura 2

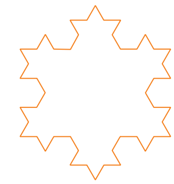


figura 3

Ilustrações: ID/BR

Qual é a fórmula do termo geral da sequência formada pelo número de lados de cada figura?
$a_n = 3 \cdot (4)^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$

57 Uma indústria produziu *k* unidades de um produto em janeiro. O aumento mensal de produção é 10%. Qual será a produção desse item em dezembro do mesmo ano? A produção será de $(1,1)^{11} \cdot k$.

58 Responda às questões a seguir.

a) Se em janeiro você investir R$ 1000,00 em determinada aplicação, a um rendimento de 2% por trimestre, quanto terá ao final de dois anos?
Aproximadamente R$ 1 171,66.

b) Compare o resultado obtido com o da atividade **R18**. Qual é a aplicação mais vantajosa ao final de cinco anos? A segunda aplicação é mais vantajosa.

59 Resolva novamente os itens **a** e **b** da atividade **46**, utilizando a fórmula do termo geral da P.G. Compare as duas soluções e analise as vantagens e as desvantagens de cada uma. Respostas pessoais.

As atividades **57** e **58** permitem que os estudantes percebam maneiras de usar os conhecimentos numéricos e algébricos em contextos da vida cotidiana.

Soma dos *n* primeiros termos de uma P.G.

Do mesmo modo que para a P.A., também para a P.G. é possível encontrar uma maneira de calcular a soma de seus termos, caso ela seja finita, ou de seus *n* primeiros termos, se ela for infinita.

Como exemplo, vamos considerar a P.G. (2, 6, 18, 54, 162), em que $a_1 = 2$ e $q = 3$.

Para calcular a soma de seus termos, fazemos:

$$S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 = 242$$

Multiplicando cada um dos termos dessa P.G. pela razão 3, temos:

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$6 \cdot 3 = 18$$

$$18 \cdot 3 = 54$$

$$54 \cdot 3 = 162$$

$$162 \cdot 3 = 486$$

Verifique que, se somarmos todos os produtos dessas multiplicações, vamos obter a soma *S* da P.G. multiplicada por 3:

$$6 + 18 + 54 + 162 + 486 = 3 \cdot S$$

Repare que em S e $3 \cdot S$ há muitas parcelas em comum. Assim, se subtrairmos S de $3 \cdot S$, essas parcelas se anularão:

$$\left.\begin{array}{r} 3 \cdot S = \cancel{6} + \cancel{18} + \cancel{54} + \cancel{162} + 486 \\ S = 2 + \cancel{6} + \cancel{18} + \cancel{54} + \cancel{162} \end{array}\right\} -$$

Logo, $3 \cdot S - S = 486 - 2 = 484$, o que nos fornece $S = \frac{484}{2} = 242$.

Vamos repetir esse mesmo raciocínio para deduzir uma fórmula geral que determine a soma dos n primeiros termos de uma P.G. qualquer.

Em uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$, indicamos por S_n a soma dos n primeiros termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

Multiplicando todos os membros de (1) pela razão q, com $q \neq 0$, temos:

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n \cdot q \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2), obtemos:

$$q \cdot S_n - S_n = a_n \cdot q - a_1$$

$$(q - 1)\, S_n = \overbrace{a_1 \cdot q^{n-1}}^{a_n} \cdot q - a_1$$

$$(q - 1) S_n = a_1\, (q^n - 1)$$

Para $q \neq 1$, obtemos:

$$S_n = \frac{a_1\, (q^n - 1)}{q - 1}$$

Para $q = 1$, temos a P.G. $(a_1, a_1, a_1, ..., a_1, ...)$ e:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1}_{n \text{ parcelas}}$$

$$S_n = n \cdot a_1$$

A soma S_n dos n primeiros termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$, de razão q, é dada por:

$S_n = \frac{a_1\, (q^n - 1)}{q - 1}$, para $q \neq 1$, ou por $S_n = n \cdot a_1$, para $q = 1$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R20 **Calcule a soma dos cinquenta primeiros termos da sequência (3, 6, 12, ...).**

Resolução

A sequência é uma P.G. de razão $q = 2$ e $a_1 = 3$. Assim:

$$S_{50} = \frac{a_1(q^{50} - 1)}{q - 1}$$

$$S_{50} = \frac{3 \cdot (2^{50} - 1)}{2 - 1}$$

$$S_{50} = 3 \cdot (2^{50} - 1)$$

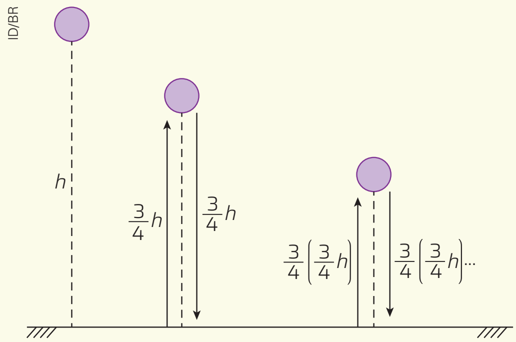
R21 **Uma bola elástica cai de uma altura h, em metro, elevando-se, em cada batida no mesmo lugar, a uma altura igual a $\frac{3}{4}$ da que caiu anteriormente. Calcule o espaço percorrido pela bola até bater no solo pela quinta vez.**

Resolução

Para chegar ao solo, a bola percorreu:

- na primeira vez, h metros;
- na segunda vez, $\frac{3}{4}h$ (subida) $+ \frac{3}{4}h$ (descida);

- na terceira vez, $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}h$ (subida) + $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}h$ (descida); etc.



Vamos calcular o espaço percorrido pela bola até bater no solo pela quinta vez (S_5):

$$S_5 = h + 2 \cdot \frac{3}{4}h + 2 \cdot \frac{9}{16}h + 2 \cdot \frac{27}{64}h + 2 \cdot \frac{81}{256}h =$$

$$= h + 2h\underbrace{\left(\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \frac{81}{256}\right)}_{\text{soma dos 4 termos de uma P.G. de razão } q = \frac{3}{4} \text{ e } a_1 = \frac{3}{4}} =$$

$$= h + 2h \cdot \left\{\frac{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^4 - 1\right]}{\frac{3}{4} - 1}\right\} = h + 2h \cdot \frac{175}{64} \cdot \frac{3}{4} =$$

$$= h + h \cdot \frac{175 \cdot 3}{64 \cdot 2} = h + h \cdot \frac{525}{128} =$$

$$= \left(1 + \frac{525}{128}\right)h = \frac{653h}{128}$$

Portanto, o espaço percorrido pela bola até cair pela quinta vez é $\frac{653}{128}h$ metros.

Proponha aos estudantes que se reúnam em duplas ou em pequenos grupos para resolver a atividade **68**. Essa atividade é um desafio lúdico que mobiliza os estudantes pelo inusitado da história. Pode ser grande a variedade de problemas e respostas, dependendo do valor atribuído a cada degrau da escada. Além disso, ao exercitar o diálogo e a cooperação, eles trabalham a competência geral **9**, pois momentos como este possibilitam aos estudantes exercitar a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

60 Dada a sequência (3, −3, 3, −3, 3, −3, ...), calcule:

a) a soma S_{100} dos 100 primeiros termos de ordem ímpar. $S_{100} = 300$

b) a soma S_{200} dos 200 primeiros termos de ordem par. $S_{200} = -600$

61 Simplifique: $\frac{2 + 4 + 8 + ... + 1024}{4 + 16 + 64 + ... + 1024}$ $\frac{3}{2}$

62 Em uma P.G. de razão 4, a soma dos dez primeiros termos é $\frac{2^{20} - 1}{6}$. Determine o segundo termo dessa progressão. $a_2 = 2$

63 A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é dada por $2 - 2^{n+1}$, para todo $n > 1$. Determine o termo geral dessa progressão. $a_n = -2^n, n \in \mathbb{N}^*$.

64 Uma bola elástica cai de uma altura de 16 metros. Após cada batida em um mesmo lugar no solo, ela se eleva a uma altura igual à metade da altura que caiu anteriormente. Com base nessas informações, calcule o espaço percorrido pela bola até o instante em que ela bate no solo pela décima vez. 48 metros.

65 Uma pessoa decide fazer uma corrente de mensagens desejando bom dia aos amigos em um aplicativo. Para isso, escreve um recado desejando bom dia e o encaminha a quatro amigos. Cada um desses amigos deve encaminhar uma cópia da mensagem a mais quatro amigos, acrescentando seu recado ao texto recebido. 1 431 655 764 pessoas.

Cada um dos novos destinatários deve encaminhar uma cópia a mais quatro amigos, acrescentando seu recado aos anteriores, e assim sucessivamente.

Quando as últimas mensagens recebidas tiverem 15 recados, quantas pessoas já terão participado dessa corrente? Suponha que as pessoas recebam a mensagem uma única vez e que ninguém quebre a corrente.

66 Uma árvore cresceu durante três anos seguindo o padrão esquematizado a seguir.

a) Quantos galhos novos surgirão no décimo ano? 59 049 galhos novos.

b) Quantos galhos haverá ao todo no oitavo ano? 9 840 galhos.

67 Um cliente muito exigente sempre aborrecia o vendedor de uma loja de roupas com pedidos insistentes de descontos. Certa vez, ao vender uma roupa de R$ 250,00, o vendedor, já cansado, disse ao cliente: A loja saiu ganhando.

— Leve a roupa de graça e me pague apenas os 12 botões que ela tem, da seguinte forma: 1 real pelo primeiro botão, 2 reais pelo segundo, 4 pelo terceiro, 8 pelo quarto e assim por diante.

O cliente ficou entusiasmado e aceitou o negócio. Quem saiu ganhando?

68 Usando o mesmo raciocínio da atividade **67**, elabore uma atividade que conte uma história a respeito da compra de uma casa que tenha uma escada de vinte degraus. Resposta pessoal.

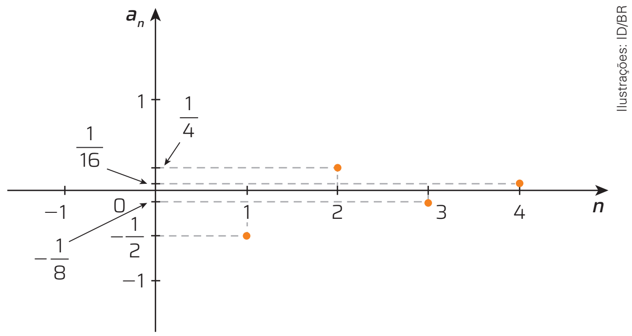
Soma dos termos de uma P.G. infinita

Considerando as progressões geométricas dadas pelas expressões gerais $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ e $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, vamos construir suas representações gráficas.

Primeiro, para cada uma dessas sequências utilizamos um quadro com alguns termos para nos auxiliar nessas construções.

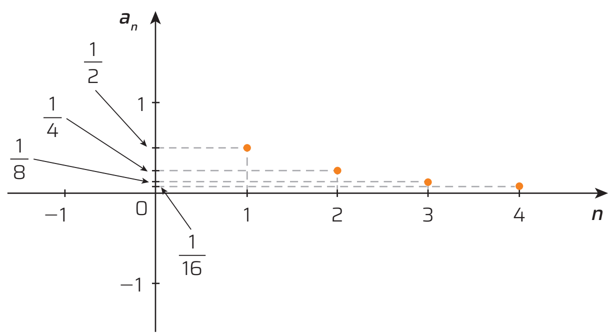
Para $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, temos:

n	$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
1	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$-\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{16}$



Para $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, temos:

n	$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{16}$



Observando as representações gráficas, notamos que, à medida que aumentamos o valor de n, os pontos de ordenada a_n vão se **aproximando do eixo horizontal**.

Nos dois casos apresentados, os termos da sequência se tornam arbitrariamente próximos de zero (e os pontos correspondentes do gráfico ficam cada vez mais próximos do eixo horizontal), embora nunca cheguem a ter valor igual a zero.

Dizemos, então, que $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tendem a zero ou têm limite zero quando n tende a infinito e representamos desta maneira: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Outros exemplos de sequências que têm limite zero para n tendendo a $+\infty$ são $\left(\frac{1}{3}\right)^n$; $-\left(\frac{1}{4}\right)^n$; $(0{,}6)^n$; $(-0{,}7)^n$.

De modo geral:

Se $-1 < q < 1$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Outra maneira de expressar isso é dizer que os termos da sequência $(1, q, q^2, \ldots)$, com $-1 < q < 1$, convergem para zero. Por exemplo, para $q = 0{,}7$, temos:

$$0{,}7^3 = 0{,}343$$
$$0{,}7^{10} \simeq 0{,}028$$
$$0{,}7^{25} \simeq 0{,}00013$$
$$0{,}7^{35} \simeq 0{,}000004$$

Agora, vamos analisar o que acontece com $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ quando n se torna arbitrariamente grande, ou seja, n tende ao infinito.

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \right), \text{ para } -1 < q < 1$$

Sabemos que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, então:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Em toda P.G. infinita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q, com $-1 < q < 1$, temos:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

O valor dessa expressão é definido como a **soma dos termos de uma P.G. infinita**:

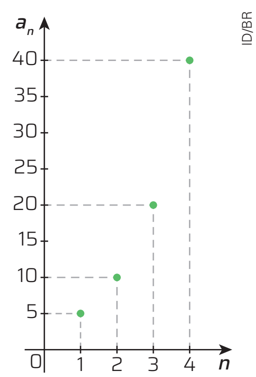
$$S = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ para } -1 < q < 1$$

Se $q \leqslant -1$ ou $q \geqslant 1$, não existe um número real que corresponda a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$, desde que $a_1 \neq 0$.

Exemplo 1

Considere a P.G. dada por $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, de razão $q = 2$.

Construindo sua representação gráfica com os 4 primeiros termos, obtemos a seguinte figura:

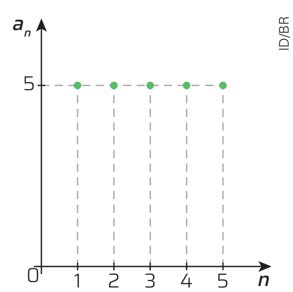


Pela observação do gráfico, notamos que não existe um valor que será o limite dos termos da sequência, uma vez que os valores de a_n são cada vez maiores e, como consequência, à medida que n cresce, a soma S_n também terá valores cada vez maiores.

Exemplo 2

Considere a P.G. dada por $a_n = 5 \cdot 1^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$, de razão $q = 1$.

Note que essa P.G. é constante. Verifique sua representação gráfica com os 5 primeiros termos.

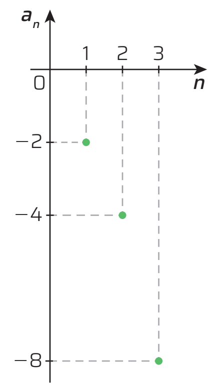


Pela observação do gráfico, notamos que S_n vai se tornando cada vez maior para n tendendo a $+\infty$, isto é, S_n não se aproxima de um valor real quando $n \to +\infty$.

Exemplo 3

Considere a P.G. dada por $a_n = -2^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, de razão $q = 2$.

Construindo sua representação gráfica, obtemos:

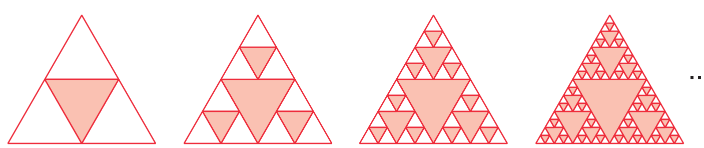


ID/BR

Pela observação do gráfico, também podemos notar que não existe valor real para a_n quando $n \to +\infty$, e, por isso, S_n assume valores negativos com valor absoluto cada vez maior, à medida que n cresce.

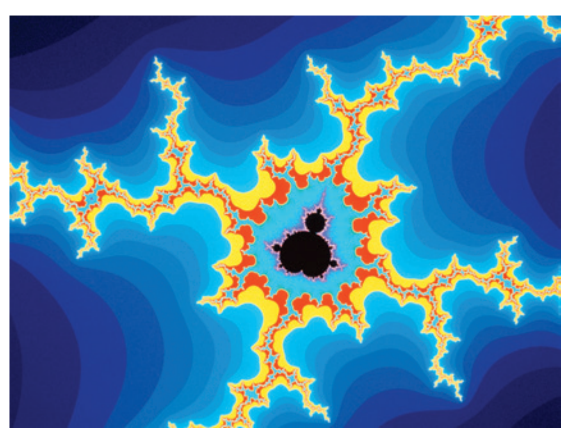
Sequências na era do computador

Verifique a sequência a seguir.



Ilustrações: ID/BR

Apesar de essa sequência ser obtida a partir de uma regra simples, quando a desenhamos à mão conseguimos obter apenas alguns termos, mesmo recorrendo aos melhores instrumentos de desenho. Mas, com um computador, o processo pode continuar indefinidamente, obtendo-se figuras com pormenores invisíveis a olho nu. A alta velocidade de processamento dos computadores, aliada à alta resolução da tela, torna possível visualizar os termos avançados dessas sucessões.



Gregory Sams/SPL/Fotoarena

Detalhe de um fractal de Mandelbrot.

O limite de uma sequência de figuras como a anterior é um fractal.

A geometria fractal é um ramo da Matemática, ou uma nova forma de encarar a ciência, que está permitindo explicar certos fenômenos de turbulência para os quais a geometria euclidiana e a física de Newton se mostraram ineficazes.

Uma imagem obtida por técnicas fractais pode se parecer, por exemplo, com um vírus ao microscópio ou com paisagens de outro planeta.

As aplicações da noção de fractal revelaram-se vastas em meteorologia, física, hidráulica, geologia, geografia e até em história, economia e medicina.

O objeto digital acrescenta conhecimentos sobre fractais contando sua história, como são gerados e como são utilizados para modelar a natureza.

Fractais: Como eles aparecem na natureza?

Converse com os estudantes sobre diferentes tipos de fractais e explique a eles que a ideia de fractal também se desenvolveu em outras culturas sem o conhecimento da ciência matemática. Se possível, apresente a eles o vídeo *Ron Eglash sobre os fractais africanos* (em inglês com legenda em português), em que o matemático Ron Eglash apresenta resultados de pesquisas sobre os padrões de fractais que ele identificou em todo o continente africano. Disponível em: https://www.ted.com/talks/ron_eglash_the_fractals_at_the_heart_of_african_designs?lng=pt-br&geo=pt-br&subtitle=pt-br. Acesso em: 2 out. 2024.

PARA EXPLORAR

Artigo

ROSSINI, Maria Clara. Padrão fractal é identificado pela primeira vez em escala molecular. *Superinteressante*, 13 abr. 2024. Disponível em: https://super.abril.com.br/ciencia/padrao-fractal-e-identificado-pela-primeira-vez-em-escala-molecular. Acesso em: 21 jun. 2024.

Esse artigo apresenta informações sobre uma pesquisa que identificou uma molécula de enzima com estrutura fractal que segue o padrão do triângulo de Sierpinski.

R22 Dada a P.G. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\right)$, calcule:

a) a soma dos dez primeiros termos;

b) o limite da soma dos infinitos termos da P.G.

Resolução

a) $S_{10} = \dfrac{a_1 \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = \dfrac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{1023}{512}$

Portanto, a soma dos dez primeiros termos dessa P.G. é $\frac{1023}{512}$.

b) Como $q = \frac{1}{2}$ e $-1 < \frac{1}{2} < 1$, temos:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Esse resultado significa que, quanto maior for o número de termos que tomarmos na P.G., a soma estará cada vez mais próxima de 2.

Usualmente, escrevemos: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... = 2$

R23 Resolva a equação: $x + \frac{2x^2}{5} + \frac{4x^3}{25} + ... = 3$

Resolução

O primeiro membro da equação é a soma dos termos de uma P.G. infinita com $a_1 = x$ e $q = \frac{2x}{5}$.

Então:

$$x + \frac{2x^2}{5} + \frac{4x^3}{25} + ... = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{x}{1 - \frac{2x}{5}}$$

Devemos ter como condição de existência $-1 < q < 1$.

Assim:

$$-1 < \frac{2x}{5} < 1$$

$$-\frac{5}{2} < x < \frac{5}{2}$$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$\frac{x}{1 - \frac{2x}{5}} = 3$$

$$x = \frac{15}{11}$$

Como $x = \frac{15}{11}$ satisfaz a condição de existência, o conjunto solução é $S = \left\{\frac{15}{11}\right\}$.

R24 Obtenha a fração geratriz da dízima periódica 0,2161616...

Resolução

$$0{,}2161616... = 0{,}2 + \underbrace{0{,}016 + 0{,}00016 + 0{,}0000016 + ...}_{\text{soma dos termos de uma P.G. infinita de razão } q = \frac{1}{100}} =$$

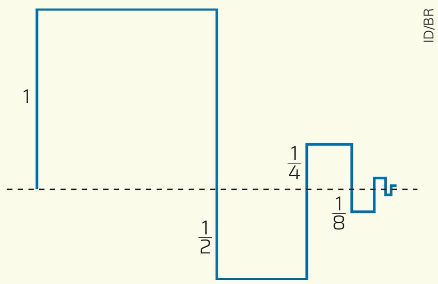
$$= 0{,}2 + \frac{0{,}016}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{2}{10} + \frac{16}{990} = \frac{107}{495}$$

Portanto, $0{,}2161616... = \frac{107}{495}$.

Após a leitura da atividade **R25**, pergunte aos estudantes qual é a importância da figura apresentada e por que a palavra "quadrado" aparece entre aspas.

R25 **A linha azul representada na figura a seguir é formada por três lados de quadrados que se alternam acima e abaixo da linha tracejada, formando uma "serpente".**

Cada "quadrado", a partir do segundo, tem como medida de lado a metade da medida do lado do "quadrado" anterior.



a) Qual é a medida do comprimento da "serpente" formada pelos dez primeiros "quadrados"?

b) Qual é o limite da medida do comprimento da "serpente"?

Resolução

a) A sequência dos comprimentos dos "quadrados" é dada por $\left(3 \cdot 1, 3 \cdot \frac{1}{2}, 3 \cdot \frac{1}{4}, 3 \cdot \frac{1}{8}, \ldots\right)$.

Essa sequência é uma P.G. de razão $\frac{1}{2}$ cujo décimo termo será $3 \cdot \frac{1}{2^9}$.

O comprimento da "serpente", formada pelos 10 "quadrados" iniciais, será obtido pelo cálculo da soma dos dez primeiros termos da sequência.

Assim:

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1}$$

$$S_{10} = \frac{3 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_{10} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2^{10}} - 1\right)}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = -6 \cdot \left(\frac{1}{2^{10}} - 1\right)$$

$$S_{10} = -\frac{6}{2^{10}} + 6$$

$$S_{10} = 6 - \frac{6}{1024}$$

$$S_{10} = \frac{6138}{1024} \simeq 5{,}99$$

b) O limite da medida do comprimento da "serpente" será dado pela soma dos termos da P.G. infinita.

Assim:

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

Logo, a medida do comprimento da "serpente" não poderá ser maior que 6 e nunca atingirá o valor 6.

73. a) $\frac{255}{32}\pi$
b) 8π
c) Resposta pessoal.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

69 Na sequência $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots\right)$, calcule:

a) a soma dos n primeiros termos; $S_n = -3^{-n} + 1, n \in \mathbb{N}^*$.

b) a soma dos infinitos termos. 1

70 Na sequência $\left(8, -4, 2, -1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$, calcule:

a) a soma dos infinitos termos; $\frac{16}{3}$

b) a soma dos infinitos termos de ordem ímpar; $\frac{32}{3}$

c) a soma dos infinitos termos de ordem par. $-\frac{16}{3}$

71 Simplifique: $\dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots}$ $\frac{3}{2}$

72 Obtenha a fração geratriz de cada decimal.

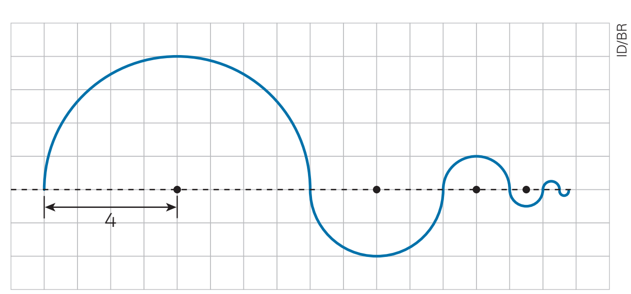
a) 0,888... $\frac{8}{9}$

b) 0,232323... $\frac{23}{99}$

c) 0,6232323... $\frac{617}{990}$

d) 0,14666... $\frac{11}{75}$

73 **Verifique a "serpente" a seguir, formada por semicircunferências. A medida do raio de cada semicircunferência, a partir da segunda, é a metade da medida do raio da semicircunferência anterior.**



a) Qual será a medida do comprimento dessa "serpente" quando ela tiver oito semicircunferências?

b) Se a "serpente" tiver infinitas semicircunferências, qual será a medida de seu comprimento?

c) Em sua opinião, qual é a importância da figura nesta atividade?

74 **Resolva cada equação a seguir.**

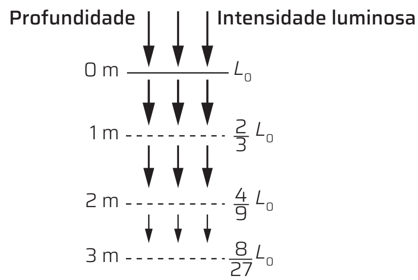
a) $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + ... = 4$ $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$

b) $\frac{x-1}{5} - \frac{x-1}{25} + \frac{x-1}{125} - ... = 6$ $S = \{37\}$

c) $x - 9 - \frac{x}{2} + 3 + \frac{x}{4} - 1 - \frac{x}{8} + \frac{1}{3} + ... = 2$ $S = \left\{\frac{105}{8}\right\}$

75 **Indique a resposta correta no caderno.**

(Enem) O esquema mostra como a intensidade luminosa decresce com o aumento da profundidade em um rio, sendo L_0 a intensidade na sua superfície. Alternativa **d**.



Enem. Fac-símile: ID/BR

Considere que a intensidade luminosa diminui, a cada metro acrescido na profundidade, segundo o mesmo padrão do esquema.

A intensidade luminosa correspondente à profundidade de 6 m é igual a

a) $\frac{1}{9}L_0$

b) $\frac{16}{27}L_0$

c) $\frac{32}{243}L_0$

d) $\frac{64}{729}L_0$

e) $\frac{128}{2187}L_0$

76 **Em um quadrado cujo lado mede 2*a*, inscreve-se um círculo; nesse círculo, um quadrado; nesse quadrado, um círculo; e assim sucessivamente. Calcule:**

a) a soma das medidas das áreas desses círculos; $2\pi a^2$

b) a soma das medidas das áreas desses quadrados. $8a^2$

TECNOLOGIA

O trabalho com esta seção favorece o desenvolvimento da competência geral **5**, ao levar os estudantes a utilizar uma tecnologia digital simples de forma reflexiva para produzir conhecimentos e resolver problemas.

JARIRIYAWAT/Shutterstock.com/ID/BR

Calculadora simples.

Você já conhece as principais teclas de uma calculadora. Em algumas, determinadas teclas, no entanto, têm mais do que uma função. Esse é o caso da tecla =.

A tecla = tem a propriedade de “memorizar” um valor e repetir uma operação com ele várias vezes. Vamos entender essa propriedade.

Suponha, por exemplo, que desejamos calcular $2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Utilizando a calculadora para realizar esse cálculo, devemos apertar a tecla 2, a tecla × e 9 vezes a tecla =.

2 × = = = = = = = = =

Aparece, assim, o número 1 024 no visor da calculadora.

Você concorda que essa propriedade ajuda no cálculo com potências?

Agora, utilize uma calculadora que tenha as teclas apresentadas anteriormente para realizar as atividades propostas.

Antes de começar, certifique-se de apagar todos os registros que estiverem nela. No visor, deve aparecer apenas 0.

Atividades

1 **Utilizando a estratégia apresentada no exemplo, calcule as potências a seguir.**

a) 2^5 32

b) 3^{12} 531 441

c) 6^9 10 077 696

d) 5^7 78 125

Proponha aos estudantes que calculem uma adição de parcelas iguais usando o mesmo tipo de estratégia apresentada para o cálculo de potências. Comente que, dependendo do modelo da calculadora utilizada, é possível que existam divergências nos resultados.

2. a) 2 × = = = =   **c)** 6 × = = = = = = = =

b) 3 × = = = = = = = = = = =   **d)** 5 × = = = = = =

2 Descreva as teclas da calculadora utilizadas para obter o resultado de cada item da atividade anterior.

3 Considere as funções $f(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ e $g(n) = -0{,}7^n$, de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$, e faça o que se pede a seguir.

a) Utilize uma calculadora para construir um quadro com alguns valores dessas funções. Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) Esboce o gráfico de cada uma dessas funções. Consulte o gráfico no Manual do Professor.

c) Mostre que cada uma dessas funções é o termo geral de uma progressão geométrica. Consulte a resposta no Manual do Professor.

d) Obtenha os dez primeiros termos de cada progressão geométrica.

e) Utilize uma calculadora para obter a soma dos dez primeiros termos de cada progressão geométrica.

4 Leia atentamente os itens a seguir e, com o auxílio de uma calculadora, verifique os fatos descritos e tente representá-los por meio de uma expressão geral.

Na sequência de Fibonacci:

a) a soma dos quadrados de dois números consecutivos da sequência é um número da sequência de Fibonacci;

b) somando, por exemplo, os quatro primeiros números e adicionando 1 à soma, o resultado será o sexto número da sequência de Fibonacci. Da mesma maneira, somando os sete primeiros números e adicionando 1, teremos o nono número da sequência de Fibonacci.

4. a) $(a_{n-1})^2 + (a_n)^2 = a_k$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$

b) $1 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$

3. d) $f(n)$: $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \frac{1}{2\,187}, \frac{1}{6\,561}, \frac{1}{19\,683}, \frac{1}{59\,049}, \frac{1}{177\,147}, \ldots\right)$

$g(n)$: (−0,7; −0,49; −0,343; −0,2401; −0,16807; −0,117649; −0,0823543; −0,05764801; −0,040353607; −0,028247524; ...)

3. e) f: $S_{10} \simeq 0{,}17$ e g: $S_{10} \simeq 2{,}27$.

CÁLCULO RÁPIDO

Ao final desta seção, avalie com os estudantes se eles reconhecem a habilidade de calcular mentalmente como um valor pessoal, útil na resolução de problemas.

A habilidade de resolver cálculos de maneira ágil é importante em diversas circunstâncias, pois possibilita que você se dedique a analisar ideias mais relevantes para resolver uma situação que os cálculos rotineiros.

1 Copie e complete cada igualdade a seguir no caderno, substituindo o ■ por um número.

a) $10^{■} = 1000$ 3

b) $■^{15} = 1$ 1

c) $7^3 = ■$ 343

d) $3^{■} = 3$ 1

e) $■^1 = 18$ 18

f) $2^{■} = \frac{1}{2}$ −1

2 Represente na forma de potência de base 3:

a) o triplo de 3^{10}. 3^{11}

b) $\frac{1}{3}$ de 3^{10}. 3^9

c) $\frac{1}{9}$ de 3^{10}. 3^8

d) o quadrado de 3^{10}. 3^{20}

3 A potência 3^4 pode ser escrita como o quadrado de um número? Se sim, de que modo? Sim; $3^4 = (3^2)^2 = 9^2$.

4 Represente cada uma das potências a seguir na forma de fração com numerador 1.

a) 2^{-4} $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

b) 5^{-2} $\left(\frac{1}{5}\right)^2$

c) 3^{-2} $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

d) 10^{-5} $\left(\frac{1}{10}\right)^5$

e) 7^{-3} $\left(\frac{1}{7}\right)^3$

5 Lembre-se de que $0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$. Agora, expresse os decimais a seguir na forma de potência com expoente inteiro negativo.

a) 0,01 10^{-2}

b) 0,0001 10^{-4}

c) 0,001 10^{-3}

d) 0,0000001 10^{-7}

e) 0,00001 10^{-5}

6 Calcule.

a) 10^{-1} 0,1

b) 10^{-2} 0,01

c) 12^{-2} $\frac{1}{144}$

d) 6^{-1} $\frac{1}{6}$

e) 4^{-2} $\frac{1}{16}$

f) $-(-2)^{-5}$ $\frac{1}{32}$

g) $(-3)^2$ 9

h) $(-3)^{-2}$ $\frac{1}{9}$

i) -1^6 −1

j) -5^3 −125

PARA RECORDAR

Os estudantes podem ser orientados a resolver as atividades desta seção aos poucos, no decorrer do estudo do capítulo, para que, durante esse período, apresentem suas dúvidas.

1 Uma empresa tem 60 funcionários, dos quais 12 foram treinados para o uso de um novo equipamento. Qual foi o percentual de funcionários que receberam o treinamento? 20% dos funcionários.

2 Uma empresa selecionou 578 funcionários para serem treinados no uso de um novo equipamento. Esses funcionários correspondem a 85% do total de empregados da empresa. Quantos funcionários tem a empresa? 680 funcionários.

3 Considere a seguinte a função: $p = 5$

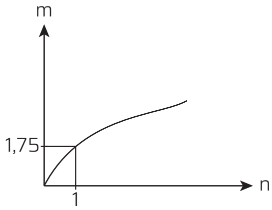
$f(x) = -x^2 - 2x + p$

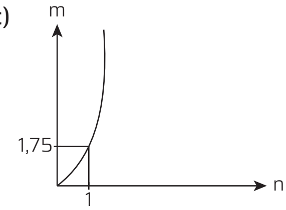
Qual o valor de p para que seu conjunto imagem seja $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 6\}$?

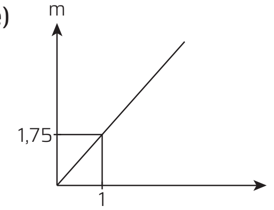
4 (UFPE) O valor da média salarial dos funcionários de uma empresa, com x anos de trabalhos prestados, é dado por $s(x) = 100\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+10}\right)$. Para quantos meses trabalhados na empresa, a média salarial será de R$ 700,00? 72 meses.

5 **Resolva a atividade e indique a alternativa correta no caderno.** Alternativa **e**.

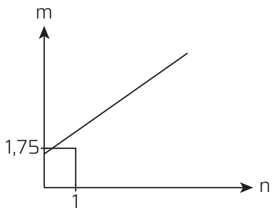
(Enem) As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma. Dos gráficos a seguir, o que representa o preço *m* pago em reais pela compra de *n* quilogramas desse produto é

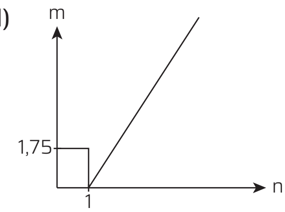
a) 

c) 

e) 

Enem. Fac-símile: ID/BR

b) 

d) 

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Essas atividades têm como foco o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo. Explicite aos estudantes o pensamento da forma "se ..., então ..." presente nas resoluções. Por exemplo, na atividade **2**: "se Guilherme não quer ser economista nem professor, então ele quer ser *designer* gráfico".

1 **Indique a resposta correta no caderno.**

(Obmep) Ana, Érica, Irene, Karina e Olga moram no mesmo edifício. Duas delas moram no primeiro andar, e as outras três moram no segundo andar. Olga não mora no mesmo andar que Érica e Karina. Ana não mora no mesmo andar que Irene e Karina. Quem mora no primeiro andar? Alternativa **e**.

a) Érica e Karina.
b) Érica e Irene.
c) Irene e Olga.
d) Irene e Karina.
e) Ana e Olga.

2 **Escreva a alternativa correta no caderno.** Alternativa **b**.

Três estudantes do Ensino Médio se formarão este ano e sonham em exercer profissões diferentes. As profissões sonhadas por eles são: professor, *designer* gráfico e economista. Atualmente, eles estudam no mesmo colégio e têm algo em comum: adoram praticar esportes. Cada um deles faz parte de um time diferente do colégio: futebol, basquetebol e voleibol.

Sabe-se que nem Guilherme nem Eduardo querem ser economistas. O esporte que João participa não tem goleiro. Guilherme não quer ser professor. Eduardo pratica voleibol. Com essas informações, é possível determinar corretamente que:

a) João pratica voleibol e quer ser *designer* gráfico.
b) Eduardo quer ser professor e pratica voleibol.
c) Guilherme quer ser professor e pratica basquetebol.
d) João quer ser economista e pratica futebol.
e) Guilherme quer ser *designer* gráfico e pratica basquetebol.

PALAVRAS-CHAVE

Agora, vamos retomar o que você aprendeu no capítulo. A proposta é que você reveja os conceitos centrais estudados, as expressões e as fórmulas e construa no caderno um quadro com três colunas e algumas linhas. Na primeira coluna, coloque as ideias centrais deste capítulo; na segunda, escreva a explicação do que é e de como se calcula; e na terceira, o modo de representar usando letras ou gráficos.

Na primeira coluna, escreva em cada linha uma destas expressões:

- P.A.
- Classificação dos diferentes tipos de P.A.
- Termo geral de uma P.A.
- Soma dos *n* primeiros termos de uma P.A.
- P.G.
- Termo geral de uma P.G.
- Soma dos *n* primeiros termos de uma P.G.
- Soma dos termos de uma P.G. infinita.

Com o quadro completo, analise os itens sobre os quais você tem dúvidas ou não se sente seguro sobre o que sabe. Essa é uma oportunidade para consultar novamente o texto e, se necessário, conversar com o professor.

Auxilie os estudantes na composição do quadro proposto. Essa produção é um valioso instrumento de avaliação formativa ou ipsativa da aprendizagem do grupo ou de cada um e pode apresentar informações sobre o que precisa ser retomado com todos os estudantes ou com alguns deles.

MATEMÁTICA E *FAKE NEWS*

O objetivo desta seção é desenvolver nos estudantes habilidades de leitura e produção de textos a partir de uma notícia de divulgação científica. A proposta inclui também a produção criativa de uma notícia, de modo a trabalhar simultaneamente habilidades de Linguagens e suas Tecnologias e as relacionadas às competências específicas **1** e **2** da área de Matemática e suas Tecnologias. Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **3**, **4** e **10** propostas pela BNCC, colaborando para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, exercitando a curiosidade intelectual dos estudantes e permitindo que eles possam agir, pessoal e coletivamente, com autonomia e responsabilidade, tomando decisões com base em princípios éticos e democráticos. Além disso, possibilita uma integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e trabalha os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia, Cidadania e Civismo, especificamente no que se refere à Vida Familiar e Social e à Educação em Direitos Humanos. Nesse sentido, para enriquecer a discussão proposta, avalie a possibilidade de convidar professores de Língua Portuguesa, Filosofia e Sociologia para explorar as competências específicas **1**, **2** e **3** da área de Linguagens e suas Tecnologias e **5** e **6** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Posso confiar antes de compartilhar?

Vamos ler o texto a seguir e conversar com os colegas e o professor sobre como a Matemática e a tecnologia podem auxiliar a combater a divulgação de notícias falsas em ambientes virtuais.

Modelo matemático mostra como notícias falsas viralizam

"Extraterrestres lotam quiosque da praia de Copacabana." O que faz com que uma notícia assim, por mais estapafúrdia que seja, alcance uma popularidade surpreendente? Excesso de ingenuidade? Não. Na verdade, excesso de informação, revela um trabalho publicado na *Nature Human Behaviour*, no qual um modelo matemático é usado para mostrar como as notícias se espalham nas redes sociais.

Segundo o texto, praticamente qualquer notícia falsa pode se tonar viral e alcançar até milhões de pessoas, mesmo em um cenário onde todos querem compartilhar histórias verídicas e são capazes de avaliar se elas são verossímeis ou não.

"Se você mora em um mundo onde é bombardeado com lixo, ainda que tenha discernimento, você só está vendo uma parte do que está lá fora. Então, você ainda pode compartilhar desinformação", explica, em entrevista à *Scientific American*, o cientista da computação Filippo Menczer, da Indiana University Bloomington, um dos coautores do modelo.

Menczer explica que três fatores podem explicar a incapacidade de uma rede social fazer a distinção entre o meme – termo usado para *link*, vídeo, frase ou qualquer outra

Davi Augusto/ID/BR

Não escreva no livro.

unidade de informação *on-line* – verdadeiro e o falso: a enorme quantidade de informação em circulação; a quantidade limitada de tempo que as pessoas gastam olhando os seus *feeds* de notícias e decidindo que histórias vão compartilhar; e a estrutura subjacente das redes sociais, criada pela interação entre os usuários, por interesse ou [por] relações afetivas.

Segundo o texto, os modelos matemáticos usados para analisar como os memes viralizam nas redes sociais são do tipo *agent-based*, ou seja, necessitam da participação ativa de agentes (indivíduos). Originariamente, eles foram usados em simulações que estudam a propagação de doenças em uma determinada comunidade.

Para compreender como isso se dá, basta imaginar que cada agente é um ponto vinculado a outros (amigos ou seguidores), por meio de linhas. Se [...] o agente A é "infectado" por um vírus da gripe ou notícia falsa, pode transmiti-lo apertando as mãos ou compartilhando o meme com eles, respectivamente. E os demais passariam para outros, sucessivamente.

Os modelos matemáticos levam em conta esse cenário imaginando que cada pessoa tem uma tela na qual vê os memes recebidos. É atribuído, então, um valor à probabilidade de que uma determinada pessoa compartilhe um novo meme produzido por ela. E também faz isso para todos os possíveis novos memes vindos de outros usuários. Como novos memes aumentam a quantidade total de informação na rede, é calculada a carga de informação experimentada pelas pessoas que visualizam suas telas.

No estudo, descobriu-se ainda o que acontece para aumentar o "contágio" de determinados memes em detrimento de outros. Eles descobriram que se a carga de informações for baixa, e o período de atenção, alto, os memes mais atrativos se destacam. Mas a análise do período de atenção e a carga de informações [...] indicam que, no mundo real, a grande quantidade de informação geralmente prevalece. Com isso, segundo Menczer, é possível supor que as pessoas sabem a diferença entre o falso e o verdadeiro, mas, ainda assim, o falso viraliza por causa do excesso de informação.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa). Modelo matemático mostra como notícias falsas viralizam. Impa, 24 ago. 2017. Disponível em: https://impa.br/noticias/modelo-matematico-mostra-como-noticias-falsas-viralizam-nas-redes/. Acesso em: 8 ago. 2024.

PARA EXPLORAR

Site

Monteiro, Rafael A.; Santos, Roney L. de S.; Pardo, Thiago A. S. *FakeCheck*. São Carlos, 2018. Disponível em: http://nilc-fakenews.herokuapp.com/. Acesso em: 14 out. 2024.

Detector de *fake news*. FakeCheck. Disponível em: http://nilc-fakenews.herokuapp.com/. Acesso em: 8 ago. 2024.

O sistema FakeCheck, desenvolvido por dois alunos do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da Universidade de São Paulo (USP), no *campus* São Carlos, sob supervisão do professor, utiliza uma tecnologia de análise de texto para verificar a possibilidade de determinada notícia ser falsa. Essa ferramenta pode ser um aliado importante na verificação da veracidade de uma notícia.

Conectando ideias

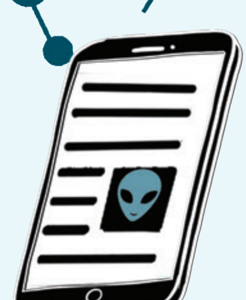
A notícia é caracterizada por um conjunto específico de elementos linguísticos e estruturais, como manchete, *lead*, corpo da notícia, fontes e citações, contexto e conclusão. Além desses elementos principais, a notícia caracteriza-se por uma linguagem formal, clara e imparcial. O uso de adjetivos é limitado e os fatos são apresentados de forma objetiva, evitando opiniões pessoais do jornalista.

1 Atualmente, já é possível utilizar um modelo matemático para analisar a estrutura dos textos e identificar se uma notícia é falsa. Você conhece o formato (elementos linguísticos, estrutura, etc.) que caracteriza uma notícia? Já teve contato com alguma notícia de procedência duvidosa? Faça uma pesquisa sobre como notícias falsas e verdadeiras são apresentadas e elabore uma breve notícia alertando sobre a importância de conferir a procedência da informação antes de compartilhá-la.

A estrutura de uma notícia é projetada para capturar a atenção do leitor rapidamente e fornecer informações essenciais de maneira eficiente e compreensível. Essa estrutura permite que as pessoas compreendam rapidamente o que está acontecendo e formem a própria opinião com base nos fatos apresentados.

2 Com base no texto lido e em seus conhecimentos sobre *fake news*, reflita sobre o seguinte questionamento: O compartilhamento de notícias em massa em meios digitais pode ser explicado como uma progressão aritmética ou uma progressão geométrica? Por quê? Explique seus argumentos aos colegas e ao professor.

3 Suponha que, em um dia, uma notícia tenha sido compartilhada por uma pessoa para outras duas e que cada uma dessas duas pessoas tenha compartilhado a notícia no dia seguinte para mais duas. O compartilhamento seguiu esse padrão por uma semana. Elabore um esquema que explique quantas pessoas receberam a notícia ao final desse período.



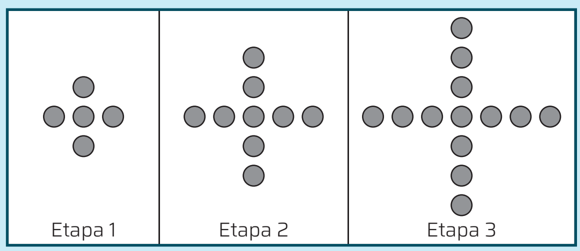
POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Você já deve ter percebido que muitas questões trazem textos acompanhados de imagens. Parte das informações está nessas imagens, o que mostra a importância de também saber ler esse tipo de representação.

Vamos analisar uma situação que apresenta figuras que precisam ser lidas. Leia com atenção a questão a seguir e tente descobrir a informação que lhe permite saber qual é o conteúdo matemático que será utilizado na sua resolução.

VESTIBULAR EM CONTEXTO

(UFRGS-RS) Considere o padrão de construção que fez uso de discos, conforme as figuras representadas nas etapas 1, 2 e 3, abaixo.



UFRGS-RS. Fac-símile: ID/BR

Na etapa 200, serão usados *n* discos. Seguindo esse padrão de construção, *n* é igual a

a) 783.

b) 792.

c) 801.

d) 810.

e) 819.

Resolução

Você conseguiu descobrir?

A questão fornece duas pistas. A primeira delas está no trecho do enunciado que nos orienta a considerar “o padrão de construção que fez uso de discos”. O que isso significa? A segunda pista está na imagem. O que você percebeu?

Ao ler o enunciado da questão, precisamos organizar as informações para que possamos pensar nos passos para a resolução.

Uma das pistas se refere à afirmação de que existe um padrão na construção das figuras com discos, ou seja, a figura em cada etapa é construída de acordo com alguma regra. Analisando a imagem, podemos notar que a quantidade de discos em cada figura aumenta 4 unidades de uma etapa para a seguinte, ou seja, varia de acordo com a progressão aritmética (5, 9, 13, ...), de razão 4 e primeiro termo 5.

Os estudantes podem questionar o uso do índice *i* em vez de *n*. Neste caso, explique a eles que no enunciado é apresentado "*n* discos" e, para evitar confusão na notação, foi escolhida a letra *i* para representar a posição do termo.

O que se deseja é saber é o termo a_{200}, que corresponde à quantidade de discos na figura representada na etapa 200. Assim, considerando a_n o termo geral da P.A., a_1 o primeiro termo, n a posição do termo a_n e r a razão, utilizamos a fórmula do termo geral de uma P.A. e realizamos os cálculos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

$$a_{200} = 5 + (200 - 1) \cdot 4 = 801$$

Logo, na figura representada na etapa 200, serão utilizados 801 discos.

Portanto, a alternativa **c** é a correta.

Note que a imagem forneceu a pista para que utilizássemos uma progressão. Em seguida, ao analisarmos a sequência, foi importante identificar que as figuras são construídas adicionando-se 4 discos à representação da figura anterior, o que nos levou a concluir que o problema estava relacionado a uma P.A.

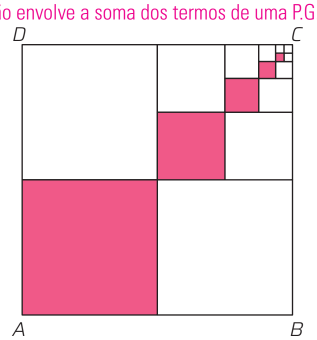
Explorando a estratégia

Agora, propomos três questões. O desafio é buscar no enunciado de cada uma as pistas para os conteúdos matemáticos envolvidos na resolução, para depois resolvê-las. Vamos lá!

1 Registre no caderno a alternativa correta.

(UPF) A região em rosa do quadrado ABCD se repete infinitamente de acordo com o padrão representado na figura, originando sempre mais quadrados. Dessa maneira, a parte do quadrado ABCD que ficará colorida é: Alternativa **c**.

Esta questão envolve a soma dos termos de uma P.G. infinita.



UPF. Fac-símile: ID/BR

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

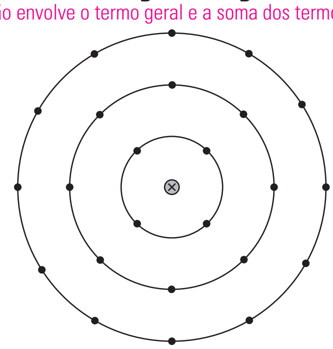
d) $\frac{5}{4}$

e) $1\frac{1}{2}$

2 Indique a alternativa correta no caderno.

(UFT-TO) Uma agricultora vai fazer um plantio circular de jiló, conforme imagem a seguir:

Esta questão envolve o termo geral e a soma dos termos de uma P.A.


UFT-TO. Fac-símile: ID/BR

A agricultora instalou no centro do canteiro um aspersor (equipamento de irrigação) giratório. As linhas de plantio são circunferências concêntricas ao ponto onde está localizado o aspersor. Na primeira linha de plantio a agricultora plantou 4 pés de jiló, na segunda plantou 8 pés, na terceira plantou 12 e assim sucessivamente até o limite máximo de alcance do aspersor, que é um raio de 10 metros.

Conforme ilustrado na imagem, neste sistema de plantio, a primeira linha de plantio é uma circunferência com um metro de raio, a segunda tem dois metros de raio, a terceira tem 3 metros de raio e assim sucessivamente.

Com base nessas informações, é **correto** afirmar que a quantidade de pés de jilós que podem ser plantados dentro do alcance do aspersor é: Alternativa **d**.

a) 40

b) 80

c) 110

d) 220

3 Escreva a alternativa correta no caderno.

(IME-RJ) Considere o quadrado de lado L apresentado na Figura A. Ao aplicar uma determinada operação de corte, obtém-se a Figura B e repetindo a operação, em cada quadrado remanescente, obtém-se a Figura C. Qual será a área remanescente, a partir do quadrado da Figura A, ao final de 10 operações?

Esta questão envolve o termo geral de uma P.G. Alternativa **b**.

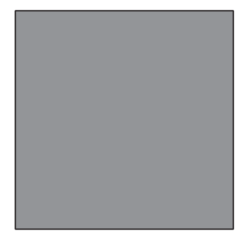

Ilustrações: IME-RJ. Fac-símile: ID/BR

Figura A

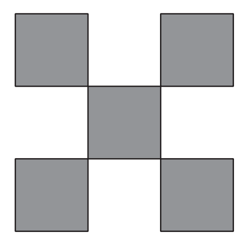


Figura B

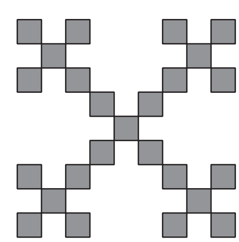


Figura C

a) $\frac{5^9 L^2}{9^9}$

b) $\frac{5^{10} L^2}{9^{10}}$

c) $\frac{5^{11} L^2}{9^{11}}$

d) $\left(\frac{9^{10} - 5^{10}}{9^{10}}\right) L^2$

e) $\left(\frac{5^{10} - 9^{10}}{9^{10}}\right) L^2$

EDUCAÇÃO FINANCEIRA E NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

Um dos pilares da Educação Financeira é o controle de gastos. Saber o quanto se ganha e o quanto se gasta é essencial para manter uma saúde financeira de qualidade. Uma boa estratégia para organizar as finanças pessoais é comparar e controlar os gastos mensais. Por exemplo, analisar as médias de gastos com algumas despesas fixas, como alimentação e faturas de água e de energia elétrica, e as atitudes que contribuem para o aumento ou para a diminuição dessas despesas.

Nesta unidade, você vai conhecer as medidas de tendência central para compreender dados estatísticos e resolver problemas. Além disso, vai compreender e interpretar algumas informações da área financeira, como as que envolvem cálculos de empréstimos e depreciação de bens, além de aprender a planejar sua vida financeira, a fazer um orçamento familiar e a refletir sobre hábitos de consumo e sobre o mundo do trabalho.

OBJETIVOS

- Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências.
- Compreender e utilizar medidas estatísticas.
- Identificar inconsistências em gráficos e pesquisas divulgados por diferentes meios de comunicação.
- Analisar situações relativas às finanças pessoais e saber se posicionar diante das demandas de consumo na sociedade atual.
- Elaborar argumentos e escrever conclusões.

DaniloAndjus/iStock/Getty Images

Familiares organizando as finanças.

UNIDADE 4

Neste capítulo, o objetivo é promover o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT202** e **EM13MAT316**, ao propor algumas das etapas do planejamento de pesquisa amostral e a resolução de problemas envolvendo medidas de tendência central. Além disso, as atividades de representação de dados e de compreensão de diferentes espaços amostrais favorecem a aquisição pelos estudantes das habilidades **EM13MAT406** e **EM13MAT511**.

ESTATÍSTICA: AMOSTRAGEM E MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

NESTE CAPÍTULO

- Amostra e amostragem
- Frequências absoluta e relativa
- Medidas de tendência central
- Agrupamentos em classes
- Representações gráficas: histograma e polígono de frequências

Etapas de uma pesquisa estatística

O objeto digital pode ser usado para introduzir o estudo da Estatística, apresentando as etapas de uma pesquisa estatística, para que os estudantes percebam como os conceitos apresentados no capítulo estão relacionados com tais pesquisas.

Você sabe o que é censo demográfico? A palavra “censo” vem do latim *census* e significa “conjunto dos dados estatísticos dos habitantes de uma cidade, de uma província, de um estado ou de uma nação”. No Brasil, por meio de pesquisas censitárias, é possível levantar dados e conhecer a situação de vida da população em cada um dos 5 565 municípios do país. Leia os textos a seguir, que apresentam mais informações sobre o censo demográfico.

[...]

O censo possibilita conhecer o país, os estados e os municípios. Com as informações do censo[,] o Governo pode identificar os locais onde é mais importante investir em saúde, educação etc.; descobrir lugares que necessitam de programas de incentivo ao crescimento econômico; distribuir melhor o dinheiro público.

A sociedade[,] em geral, também usa as informações dos censos para pedir [a] atenção dos governos para problemas específicos.

[...]

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). História dos censos: introdução. Memória IBGE, [20--]. Disponível em: https://memoria.ibge.gov.br/historia-do-ibge/historico-dos-censos/panorama-introdutorio.html. Acesso em: 17 ago. 2024.

[...]

A primeira contagem da população brasileira foi realizada em 1872, ainda durante o Império, mas foi a partir de 1890, já sob a República, que os censos se tornaram decenais. O Brasil mantém um excelente retrospecto dos censos regulares e inovadores; foi, por exemplo, o primeiro País a incluir o tema fecundidade e o único da América Latina a colher informações sobre renda.

Os Censos Demográficos são a única forma de informação sobre a situação de vida da população em cada um dos municípios e localidades do País. As demais pesquisas domiciliares são levantamentos por amostragem, que não são representativas para todos esses níveis geográficos.

[...]

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Comitê de Estatísticas Sociais. População: censo demográfico. IBGE, [20--]. Disponível em: https://ces.ibge.gov.br/home-ces?catid=0&id=1146. Acesso em: 17 ago. 2024.

Acervo IBGE/Governo Federal

Com base nessas informações, podemos concluir que um censo consiste no conjunto de dados de uma população. Quando não há tempo nem recursos disponíveis para realizar esse tipo de levantamento, pode-se optar por obter as informações de uma amostra.

Neste capítulo, vamos estudar alguns conceitos de Estatística que nos auxiliarão a analisar um conjunto de dados.

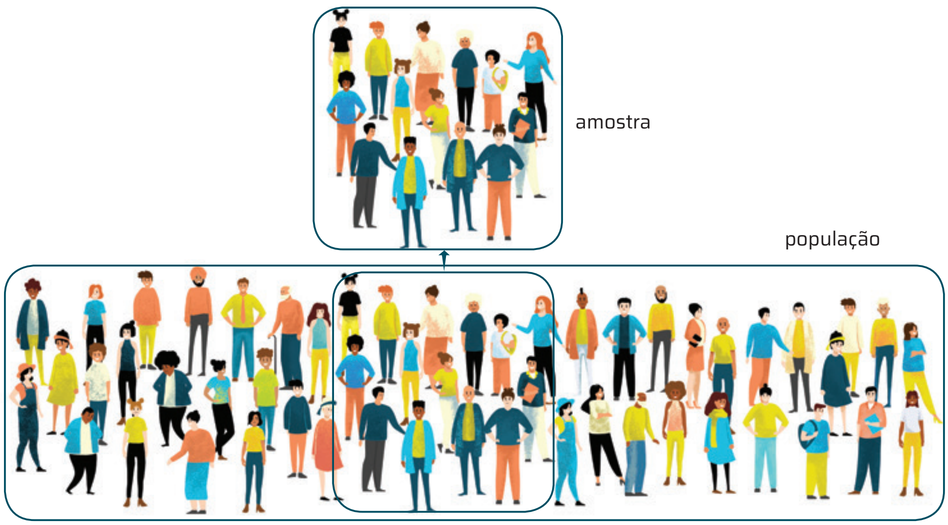
Recenseador do IBGE entrevista população indígena para coleta de dados do Censo Demográfico 2022. Foto de 2022.

Não escreva no livro.

AMOSTRA

Já estudamos que, em Estatística, população é o conjunto de todos os elementos a serem observados em uma pesquisa. Muitas vezes, em um estudo estatístico, não é possível analisar toda a população envolvida no fato que se pretende investigar. Quando isso ocorre, é possível utilizar uma **amostra** da população para obter os dados desejados.

Uma **amostra** é um subconjunto finito de uma população. O número de indivíduos da amostra é menor que o da população.



@mickart_/ID/BR

É necessário recorrer à técnica da amostragem quando:

- o número de elementos da população a ser analisada for muito grande – por exemplo: peixes do mar, número de vezes que é possível lançar um dado, número de habitantes de um município;
- houver limitação de recursos como tempo e dinheiro, pois a investigação de certas variáveis em uma população muito numerosa – como um estudo da massa de recém-nascidos ou uma pesquisa de intenção de voto entre eleitores – envolve altos custos e longos períodos de tempo, podendo tornar-se inviável;
- houver intenção de realizar uma pesquisa mais detalhada e com maior precisão, visto que, em razão do menor número de indivíduos, pode-se examinar uma amostra com mais cuidado do que em um estudo de toda a população.

Validade de uma amostra

Com base nos dados obtidos a partir de amostras de determinada população, podemos tirar conclusões ou fazer inferências sobre o conjunto dessa população. No entanto, para que tais inferências sejam confiáveis, é preciso garantir que a amostragem seja representativa e não tendenciosa.

Um primeiro cuidado nesse sentido é assegurar que a amostra ou as amostras utilizadas tenham as mesmas características básicas da população no que diz respeito aos fenômenos que se quer investigar.

Há casos em que a obtenção da amostra é simples. Por exemplo, no controle de qualidade de peças produzidas por uma indústria, basta selecionar determinada quantidade de peças para analisar. Em outros casos, o estabelecimento da amostra é extremamente complexo, como ocorre nas pesquisas sociais e de opinião. Tendo isso em mente, um segundo cuidado necessário diz respeito ao processo utilizado para selecionar a amostra.

Existem técnicas de seleção de amostra que garantem, tanto quanto possível, que cada elemento da população tenha a mesma chance de ser escolhido para compor a amostra, o que confere um grau de representatividade importante, uma vez que as conclusões relativas à população serão realizadas com base nos resultados da pesquisa amostral.

Para exemplificar algumas técnicas de amostragem – casual ou simples, sistemática e estratificada proporcional –, consideramos a seguinte situação:

O proprietário de uma cantina de um colégio deseja melhorar o atendimento aos estudantes. Para isso, pensa em realizar uma pesquisa a fim de saber a opinião deles quanto à atuação dos funcionários que ali trabalham. Como ele não tem tempo para entrevistar os 800 estudantes matriculados no colégio, de que maneira poderá escolher uma amostra?

Amostragem casual ou simples: nesse caso, todos os elementos da população têm igual possibilidade de serem selecionados para constituir a amostra. A maneira de seleção desses elementos é o sorteio.

Na prática, esse tipo de amostragem pode ser realizado numerando-se a população de 1 a *n*, em que *n* é o número de elementos da população, e sorteando-se a seguir, por meio de um dispositivo qualquer (urna, cartões, bolas numeradas, etc.), uma quantidade de números dessa sequência, os quais corresponderão aos elementos da amostra.

No caso de o proprietário da cantina optar por uma amostra casual, ele deverá dar um número a cada estudante do colégio e escolher ao acaso alguns desses números até atingir determinada quantidade de estudantes – por exemplo, 15% –, com os quais fará a pesquisa que deseja.

Amostragem sistemática: ocorre quando os elementos da amostra são selecionados por um critério preestabelecido pelo pesquisador. Em geral, essa estratégia é utilizada quando os elementos já estão ordenados de alguma forma. Vejamos alguns exemplos: nos prontuários médicos e nas listas de estudantes das turmas de um colégio, os nomes são dispostos em ordem alfabética; já nas linhas de produção, os elementos são arranjados segundo a ordem do processo de fabricação.

Assim, para obter uma amostra sistemática, o proprietário da cantina poderá selecionar os elementos diretamente das listas de chamada dos estudantes de cada turma, escolhendo apenas os números pares, ou os múltiplos de 5 ou os de 8, etc.

Amostragem estratificada proporcional: é utilizada sempre que a população estiver dividida em subgrupos ou faixas, também chamadas de estratos, uma vez que o comportamento da variável em estudo pode modificar-se de um estrato para outro. Nesse caso, o número de elementos da amostra deve ser proporcional ao número de elementos de cada estrato.

Na situação da cantina, a maneira mais simples de estratificar a população de 800 estudantes do colégio é dividi-los entre sexo masculino e sexo feminino. Imagine que o proprietário da cantina queira estabelecer uma amostra de 15% dos estudantes que seja proporcional à quantidade de estudantes do sexo masculino e de estudantes do sexo feminino.

Supondo que haja 431 meninas e 369 meninos, a amostra poderá ser determinada como apresenta o quadro a seguir.

Sexo	População	15%	Amostra
Masculino	369	$0{,}15 \cdot 369 = 55{,}35$	55
Feminino	431	$0{,}15 \cdot 431 = 64{,}65$	65
Total	**800**	$\mathbf{0{,}15 \cdot 800 = 120{,}00}$	**120**

Outra estratificação possível é considerar os estudantes por ano escolar. A escolha dos elementos da amostra de 120 estudantes pode ser feita por um dos procedimentos anteriores, mas respeitando-se as proporções, de modo que os estratos sejam devidamente considerados na composição desejada.

Esta seção tem como objetivo desenvolver a habilidade **EM13MAT202** e a competência geral **5**, na medida em que os estudantes têm oportunidade de conhecer como utilizar uma tecnologia digital para obter informações e vivenciar de modo criativo uma das etapas de uma pesquisa estatística.

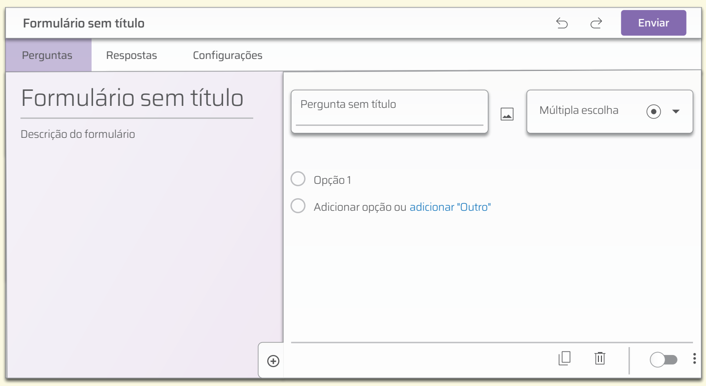
TECNOLOGIA

Há diversos tipos de *sites* ou de aplicativos de gerenciamento de pesquisas *on-line*; as etapas apresentadas foram elaboradas com base no Google Forms.

Você já ouviu falar em *sites* ou em aplicativos de gerenciamento de pesquisas *on-line*? Neles, podemos criar pesquisas para coletar informações de determinado assunto de modo totalmente digital.

Observe a seguir como realizar uma pesquisa, por meio de um *site* de gerenciamento de pesquisas, sobre a opinião dos professores do colégio em relação ao tema de uma feira.

1ª etapa: Depois de escolher e cadastrar uma conta no *site* ou no aplicativo de gerenciamento de pesquisas *on-line*, podemos criar a pesquisa inserindo, inicialmente, informações como título e descrição da pesquisa, apresentando a proposta aos entrevistados.

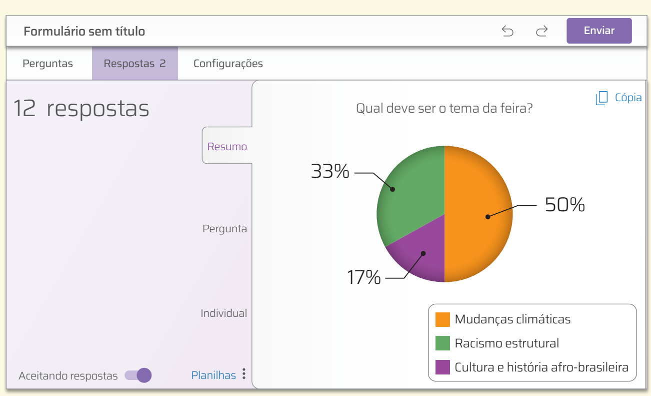


Nelson Matsuda

2ª etapa: Adicionamos cada pergunta elaborada e identificamos o tipo, que pode ser objetiva ou discursiva. Se, por exemplo, uma pergunta for do tipo "Múltipla escolha" ou "Caixas de seleção", também é necessário adicionar todas as opções de respostas, sendo que no primeiro cada pessoa pode escolher apenas uma das opções e, no segundo tipo, é possível escolher mais de uma opção.

3ª etapa: Ao finalizar a criação do formulário de pesquisa, clicamos em "Enviar" para mandar a pesquisa aos destinatários. Para isso, é necessário digitar os endereços de *e-mail* de todas as pessoas ou compartilhar o *link* da pesquisa em redes sociais.

4ª etapa: Após as pessoas responderem ao formulário, é possível observar e analisar os resultados da pesquisa. Para isso, bastar clicar na aba "Respostas".



Nelson Matsuda

ATIVIDADES

1 **De acordo com o resultado da pesquisa apresentada na quarta etapa, responda às questões a seguir.**

a) Qual é a pergunta feita aos entrevistados dessa pesquisa? "Qual deve ser o tema da feira?".

b) Qual foi o público-alvo dessa pesquisa? Os professores de uma escola.

c) Até o momento, quantas pessoas responderam a essa pesquisa? 12 pessoas.

d) Qual é a opção de resposta mais votada até o momento? Mudanças climáticas.

2 **Reúna-se com dois colegas. Pensem em um tema de pesquisa para realizar com os demais colegas. Em seguida, elaborem até três perguntas para essa pesquisa. Em um *site* de gerenciamento de pesquisas *on-line*, criem essa pesquisa e enviem-na aos colegas e ao professor de Matemática. Por fim, compartilhem com a turma os resultados do trabalho.** Resposta pessoal.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **Em um colégio, os professores de Educação Física resolveram fazer um estudo sobre a massa dos estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Sabendo que há 400 estudantes nessa série, selecione uma amostra de 40 estudantes pelo método:**

a) casual;

b) sistemático;

c) estratificado proporcional.

Resolução

a) Para construir uma amostra pelo método casual, podemos:

- fazer uma lista completa dos estudantes, objeto do estudo estatístico, numerada de 1 a 400;
- sortear ao acaso 40 números. Os 40 estudantes sorteados serão os identificados na lista por esses números.

b) Para selecionar uma amostra pelo método sistemático, podemos:

- fazer uma lista completa dos estudantes, objeto do estudo estatístico, numerada de 1 a 400;
- sortear um número de 1 a 10; se o número sorteado for 5, por exemplo, os estudantes sorteados serão os identificados na lista pelos 40 primeiros múltiplos de 5 maiores que zero, ou seja, os números: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, ..., 200.

c) Para a amostragem estratificada proporcional, podemos considerar o número de estudantes por turma e sortear os que participarão da pesquisa em quantidades proporcionais ao número de estudantes de cada turma de 1º ano.

Suponhamos que a quantidade de estudantes por turma seja esta:

Turma	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Número de estudantes	35	40	45	30	42	36	45	42	45	40

Sabemos que a amostra deve ter 40 estudantes tomados das 10 turmas, proporcionalmente. Para constituí-la, precisamos primeiro calcular a porcentagem de estudantes de cada turma em relação à população de 400 estudantes.

Turma	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	**Total**
Número de estudantes	35	40	45	30	42	36	45	42	45	40	**400**
Porcentagem (%)	8,75	10	11,25	7,5	10,5	9	11,25	10,5	11,25	10	**100**

O 1º ano A, com 35 estudantes, tem 8,75% dos elementos da população; logo, na amostra, 8,75% dos elementos deverão ser dessa turma. O mesmo raciocínio deve ser utilizado para as demais turmas.

Como desejamos uma amostra de 40 estudantes, calculamos:

- A: 8,75% de 40 = 3,5
- B: 10% de 40 = 4
- C: 11,25% de 40 = 4,5
- D: 7,5% de 40 = 3
- E: 10,5% de 40 = 4,2
- F: 9% de 40 = 3,6
- G: 11,25% de 40 = 4,5
- H: 10,5% de 40 = 4,2
- I: 11,25% de 40 = 4,5

3. b) Resposta pessoal.
Resposta possível: Amostra simples: Escolher alguns estudantes do colégio de várias classes.
Amostra sistemática: Escolher por classe, na lista de chamada de cada classe.

- J: 10% de 40 = 4

Depois, arredondamos esses dados para o número inteiro mais próximo, porque, como indicam o número de estudantes, consistem em variável discreta.

Em Estatística ou em situações do cotidiano, frequentemente recorremos ao **arredondamento de dados**.
Para arredondar um número, podemos usar a seguinte regra:
- se o algarismo que será eliminado for maior que ou igual a 5, acrescentamos 1 ao primeiro algarismo à sua esquerda;
- se o algarismo que será eliminado for menor que 5, não fazemos nenhuma alteração no primeiro algarismo à sua esquerda.

Turma	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	**Total**
Número de estudantes	35	40	45	30	42	36	45	42	45	40	**400**
Porcentagem (%)	8,75	10	11,25	7,5	10,5	9	11,25	10,5	11,25	10	**100**
Número de estudantes para a amostra	4	4	5	3	4	4	5	4	5	4	**42**

Como queremos uma amostra com 40 estudantes, é preciso retirar 2 deles, que se originaram dos arredondamentos para valores superiores. Podemos fazer isso reduzindo para 4 o número de estudantes selecionados nas turmas C e G, por exemplo.

Finalmente, estabelecida a quantidade de estudantes a serem selecionados em cada turma, a escolha efetiva desses estudantes poderá ser feita por um dos processos citados anteriormente.

A sequência de atividades a seguir auxilia no desenvolvimento das habilidades de argumentação e de tomada de decisão, contribuindo para que se desenvolva a competência geral **7**.

4. b) É necessário escolher uma amostra, pois não é viável testar todas as louças nem escolher louças aleatoriamente, sem nenhum critério.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

A escolha de uma amostra é uma das etapas mais importantes em uma pesquisa de opinião. Por isso, se tiver dúvida nestas atividades, releia o problema resolvido **R1**.

1 Imagine que se pretenda fazer um estudo de opinião para verificar se as pessoas são a favor da entrada de torcidas uniformizadas nos jogos de futebol ou contra essa prática.
Pense em duas maneiras distintas de escolher uma amostra: uma que leve a uma resposta negativa e outra que leve a uma resposta positiva. Resposta pessoal.

2 Em uma pesquisa de opinião sobre o consumo de um suplemento alimentar, realizada por um clube, foram entrevistadas 232 pessoas na entrada da academia. Discuta com os colegas se esse foi um bom método de escolha da amostra, apontando falhas e sugerindo melhorias, se for o caso. Resposta pessoal.

3 Em um colégio com 1200 estudantes, foi feito um recenseamento no qual se coletaram dados referentes às seguintes variáveis:

- idade dos estudantes;
- anos de escolaridade;
- meio de transporte utilizado para ir ao colégio;
- local de almoço;
- número de irmãos;
- local de nascimento;
- número de televisores em casa;
- local de moradia.

a) Das variáveis observadas, quais são quantitativas e quais são qualitativas?
b) Se, em vez de fazer um recenseamento, for feita uma pesquisa amostral, diga como organizar uma amostra simples e uma amostra sistemática.

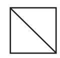
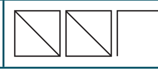
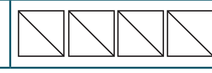
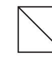
4 O proprietário de uma fábrica de louças deseja realizar um estudo para verificar o tempo de duração das louças, quando expostas a certa temperatura. Para isso, dispõe de um forno que se mantém a uma temperatura fixa durante um tempo preestabelecido. Resposta pessoal.
a) Explique como você faria esse estudo.
b) Para esse estudo, seria necessário ou apenas aconselhável escolher uma amostra?

3. a) Variáveis quantitativas: idade dos estudantes; anos de escolaridade; número de irmãos, número de televisores em casa.
Variáveis qualitativas: meio de transporte utilizado para ir ao colégio; local de almoço, local de nascimento; local de moradia.

FREQUÊNCIA ABSOLUTA

A professora de Geografia do Ensino Médio resolveu fazer uma pesquisa para saber qual região do país os estudantes da turma do 1º ano B gostariam de visitar. Cada estudante escolheu apenas uma região.

Terminada a pesquisa, a professora obteve os seguintes resultados:

Região	Centro-Oeste	Nordeste	Norte	Sudeste	Sul
Número de estudantes					

As informações coletadas foram posteriormente organizadas em uma tabela de **frequências absolutas**.

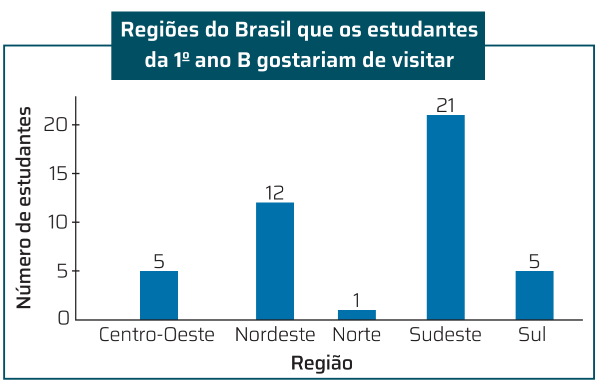
Regiões do Brasil que os estudantes do 1º ano B gostariam de visitar					
Região	Centro-Oeste	Nordeste	Norte	Sudeste	Sul
Número de estudantes	5	12	1	21	5

Dados obtidos pela professora de Geografia.

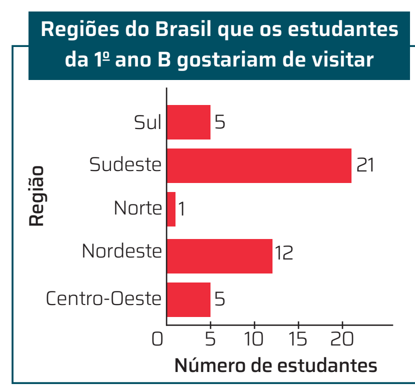
A **frequência absoluta** de um acontecimento é o número de vezes em que ele é observado. Representamos a frequência absoluta por **f**.

Gráfico de frequências absolutas

Outra maneira de organizar essas informações é representá-las em gráficos de barras verticais ou de barras horizontais. Observe.



Dados obtidos pela professora de Geografia.



Dados obtidos pela professora de Geografia.

Em um **gráfico de frequência absoluta** são indicadas, em um dos eixos, a frequência absoluta do acontecimento em estudo, e no outro, a variável que está sendo estudada.

FREQUÊNCIA RELATIVA

Em um colégio onde há duas turmas de 1º ano do Ensino Médio (1º A e 1º B), foi feita uma pesquisa sobre o esporte favorito dos estudantes. Cada estudante escolheu apenas um esporte.

O 1º ano A tem em sua turma 32 estudantes, e o 1º ano B, 24 estudantes.

A pesquisa com essas duas populações revelou os resultados expressos na tabela a seguir.

Esportes preferidos dos estudantes do 1º ano do Ensino Médio					
Turma \ **Esporte**	Futebol	Basquete	Vôlei	Outros	**Total**
A	11	12	4	5	**32**
B	10	9	4	1	**24**

Dados fornecidos pela direção do colégio.

Comparando os resultados nas duas turmas, o que podemos concluir sobre as preferências por futebol?

Verificamos que há 11 estudantes no 1º ano A e 10 estudantes no 1º ano B que preferem futebol. Será que isso quer dizer que o futebol é mais popular no 1º ano A que no 1º ano B?

Não obrigatoriamente, porque as turmas não têm o mesmo número de elementos.

Para essa investigação, é necessário calcular que fração do 1º ano A representa os 11 estudantes que optaram por futebol e que fração do 1º ano B representa os 10 estudantes que também optaram por futebol. Isto é, para cada caso, devemos calcular a **frequência relativa** ou **frequência percentual**.

Obtemos a **frequência relativa** de um acontecimento dividindo a frequência absoluta pelo número de elementos da população ou amostra considerada.

$$\text{frequência relativa (fr)} = \frac{\text{frequência absoluta (f)}}{\text{número de elementos}}$$

Representamos a frequência relativa por **fr**.

É conveniente determinarmos a frequência relativa quando desejamos comparar dados obtidos em populações cujos números de elementos são diferentes. Voltando à pesquisa sobre os esportes preferidos do 1º ano A e do 1º ano B, temos:

- 1ª ano A: 32 estudantes ao todo, dos quais 11 preferem futebol.

  A frequência relativa da preferência dos estudantes por futebol é dada por:

  $$\text{fr} = \frac{11}{32}$$

  $$\text{fr} \simeq 0{,}344$$

  Isso significa que, aproximadamente, 34,4% dos estudantes do 1º ano A preferem futebol.

- 1º ano B: 24 estudantes ao todo, dos quais 10 preferem futebol.

  A frequência relativa da preferência dos estudantes por futebol é dada por:

  $$\text{fr} = \frac{10}{24}$$

  $$\text{fr} \simeq 0{,}417$$

  Isso significa que, aproximadamente, 41,7% dos estudantes do 1º ano B preferem futebol.

Podemos, então, concluir que, apesar de no 1º ano A ter mais estudantes que optaram por futebol, esse esporte é mais popular no 1º ano B, já que nessa turma a porcentagem de estudantes que o citaram como esporte favorito é maior.

Agora é sua vez! Analise as preferências pelos outros esportes em cada turma.

Espera-se que os estudantes percebam que, embora o basquete seja o esporte preferido de 12 estudantes do 1º ano A e de 9 estudantes do 1º ano B, as frequências relativas são iguais, sendo esse esporte o preferido de 37,5% dos estudantes de ambas as turmas. Quanto ao vôlei, embora tenha sido apontado como preferido por 4 estudantes de cada turma as frequências relativas são diferentes, ou seja, esse esporte é o favorito de 12,5% dos estudantes do 1º ano A e de, aproximadamente, 16,7% dos estudantes do 1º ano B. Isso significa que o vôlei tem mais aceitação nesta última turma.

Gráfico de frequências relativas

Quando calculamos frequências relativas, podemos utilizar gráficos para representar os resultados obtidos. Utilizaremos aqui dois tipos de gráfico: de barras múltiplas e de setores.

Tomando como base a pesquisa anterior, a respeito da predileção por esportes entre estudantes de duas turmas de 1º ano do Ensino Médio, vamos organizar uma tabela na qual apareçam as respectivas frequências relativas.

Frequências relativas dos esportes preferidos dos estudantes do 1º ano do Ensino Médio

Esporte \ Turma	A	B
Futebol	34,4%	41,7%
Basquete	37,5%	37,5%
Vôlei	12,5%	16,7%
Outros	15,6%	4,2%
Total	**100%**	**100,1%**

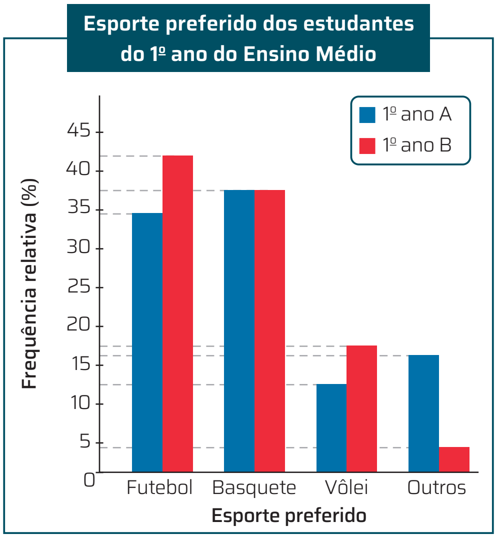
Dados fornecidos pela direção do colégio.

Observe que, se somarmos as frequências relativas obtidas no 1º ano B, teremos o total de 100,1%. Isso ocorre devido aos arredondamentos feitos para determinar essas frequências. Assim, desprezamos 0,1% na construção dos gráficos.

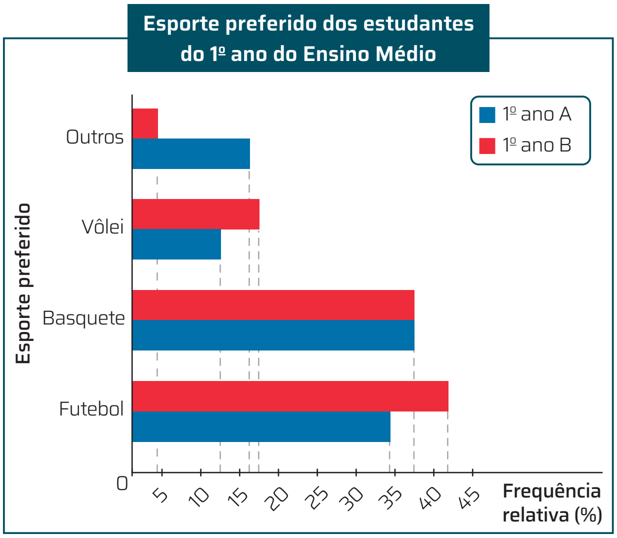
Gráfico de barras múltiplas

Para construir gráficos de barras múltiplas, devemos traçar dois eixos perpendiculares. No caso do gráfico de barras verticais, marcamos, no eixo horizontal, os esportes preferidos, e no eixo vertical, as frequências relativas; no caso do gráfico de barras horizontais, indicamos, no eixo horizontal, as frequências relativas, e no eixo vertical, os esportes preferidos. Em seguida, escolhemos uma escala conveniente para o eixo das frequências relativas.

Feito isso, traçamos as barras utilizando cores distintas para indicar cada turma, garantindo que todas as barras tenham a mesma largura, se for um gráfico de barras verticais, ou a mesma altura, se for um gráfico de barras horizontais. Incluímos, ainda, outras informações: uma legenda, para distinguir os dados referentes a cada turma de 1º ano analisada; um título, para identificar o tema da pesquisa; e a fonte, que indica onde os dados foram coletados ou quem os coletou.



Dados fornecidos pela direção do colégio.



Dados fornecidos pela direção do colégio.

Ilustrações: ID/BR

Gráficos de setores

Uma das principais vantagens de representarmos frequências relativas utilizando gráfico de setores é a possibilidade de comparar um mesmo fenômeno em populações diferentes e, ao mesmo tempo, analisar a variação de cada um dos dados em relação ao todo de cada população.

Para representarmos em um gráfico de setores as informações sobre o esporte preferido dos estudantes, inicialmente, precisamos calcular a medida do ângulo central de cada setor circular correspondente às porcentagens que foram obtidas. Para isso, consideramos que o círculo completo, cujo ângulo central é 360°, representa o total dos dados (100%). Acompanhe os cálculos a seguir.

- Para o 1º ano A, temos:

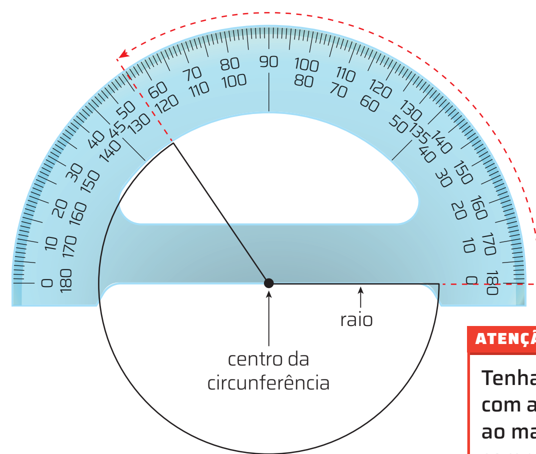
Esporte	Frequência relativa (%)	Medida do ângulo central (em grau)
Futebol	34,4	34,4% de 360° $\rightarrow \frac{34,4}{100} \cdot 360° \simeq 124°$
Basquete	37,5	37,5% de 360° $\rightarrow \frac{37,5}{100} \cdot 360° = 135°$
Vôlei	12,5	12,5% de 360° $\rightarrow \frac{12,5}{100} \cdot 360° = 45°$
Outros	15,6	15,6% de 360° $\rightarrow \frac{15,6}{100} \cdot 360° \simeq 56°$
Total	**100**	**360°**

- Para o 1º ano B, temos:

Esporte	Frequência relativa (%)	Medida do ângulo central (em grau)
Futebol	41,7	$41{,}7\%$ de $360° \rightarrow \dfrac{41{,}7}{100} \cdot 360° = 150°$
Basquete	37,5	$37{,}5\%$ de $360° \rightarrow \dfrac{37{,}5}{100} \cdot 360° = 135°$
Vôlei	16,7	$16{,}7\%$ de $360° \rightarrow \dfrac{16{,}7}{100} \cdot 360° \simeq 60°$
Outros	4,2	$4{,}2\%$ de $360° \rightarrow \dfrac{4{,}2}{100} \cdot 360° \simeq 15°$
Total	**100,1**	**360°**

Para construirmos o gráfico de setores referente a cada turma do 1º ano, com um compasso, traçamos uma circunferência e marcamos um raio qualquer. Em seguida, com um transferidor, traçamos um ângulo, com vértice no centro da circunferência, correspondente à frequência relativa de estudantes que preferem cada esporte. Observe na imagem como podemos traçar o setor do gráfico com ângulo central de 124°.

Para marcar o próximo ângulo, tomamos o raio traçado, referente à porcentagem anterior, como um de seus lados e o centro da circunferência como seu vértice. Repetimos esse procedimento sucessivamente para a marcação de todos os ângulos correspondentes à frequência relativa de estudantes que preferem cada um dos demais esportes.



ID/BR

ATENÇÃO!

Tenha cuidado com a ponta-seca ao manusear o compasso.

Depois, colorimos cada setor do gráfico, indicamos as respectivas porcentagens e incluímos a legenda correspondente.

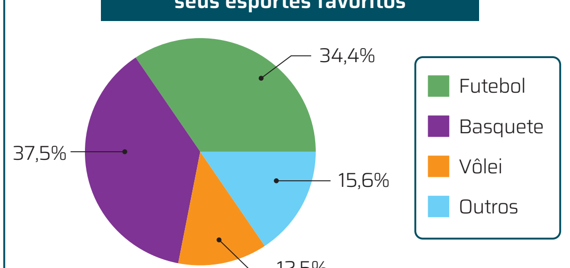
Prontos os gráficos, indicamos a fonte, que, nesse caso, é “Dados fornecidos pela direção do colégio” e escolhemos um título relacionado ao tema da pesquisa que cada gráfico representa. Observe os exemplos de títulos que foram usados nos gráficos a seguir.

1º ano A: Basquete em alta

1º ano B: Gol de placa

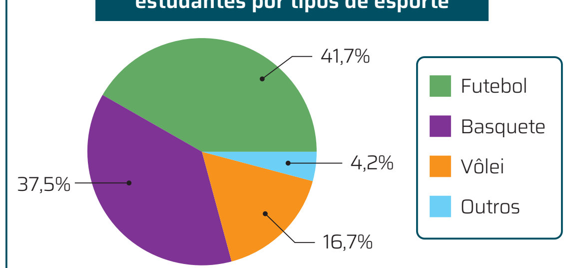
Em ambos os casos, é interessante acrescentar, abaixo do título, uma frase que auxilie o leitor a compreender melhor as informações apresentadas. Veja como ficam os dois gráficos de setores após a indicação de título, texto explicativo, fonte e legenda.

Basquete em alta
Estudantes do 1º ano A escolheram seus esportes favoritos



Dados fornecidos pela direção do colégio.

Gol de placa
1º ano B pesquisa as preferências dos estudantes por tipos de esporte



Dados fornecidos pela direção do colégio.

Ilustrações: ID/BR

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R2 A tabela a seguir mostra o número de horas que os 40 estudantes do 1º ano C de um colégio dormem por noite. Observe.

Quantidade de horas que os estudantes do 1º ano C dormem por noite					
Quantidade de horas	10	4	6	8	12
Número de estudantes	14	5	5	3	13

Dados fictícios.

a) Construa uma tabela para as frequências relativas.
b) Construa um gráfico de setores que represente as frequências relativas.

Resolução

a) Inicialmente, calculamos as frequências relativas. Para isso, dividimos as frequências absolutas pelo número de elementos da população (40):

- $fr = \frac{14}{40} = 0{,}35$ ou 35%
- $fr = \frac{3}{40} = 0{,}075$ ou 7,5%
- $fr = \frac{5}{40} = 0{,}125$ ou 12,5%
- $fr = \frac{13}{40} = 0{,}325$ ou 32,5%

Agora, para construirmos a tabela de frequências relativas, organizamos, em uma linha, a quantidade de horas em ordem crescente, e na outra, as respectivas frequências relativas.

Quantidade de horas que os estudantes do 1º ano C dormem por noite						
Quantidade de horas	4	6	8	10	12	**Total**
fr (%)	12,5	12,5	7,5	35	32,5	**100**

Dados fictícios.

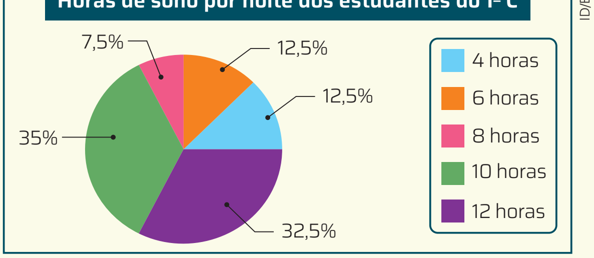
b) Para construirmos o gráfico de setores, primeiro calculamos a medida de ângulo central correspondente a cada grupo de dados da tabela.

- 12,5% de 360° $\rightarrow \frac{12{,}5}{100} \cdot 360° = 45°$
- 35% de 360° $\rightarrow \frac{35}{100} \cdot 360° = 126°$
- 7,5% de 360° $\rightarrow \frac{7{,}5}{100} \cdot 360° = 27°$
- 32,5% de 360° $\rightarrow \frac{32{,}5}{100} \cdot 360° = 117°$

Quantidade de horas	4	6	8	10	12	**Total**
fr (%)	12,5	12,5	7,5	35	32,5	**100**
Medida do ângulo central (em grau)	45°	45°	27°	126°	117°	**360°**

Com esses dados, construímos o gráfico e, em seguida, adicionamos a legenda, o título e a fonte.

Sono bom
Horas de sono por noite dos estudantes do 1º C



Dados fictícios.

5 Escolha vinte colegas de sua turma e pesquise o mês de nascimento de cada um. Faça um gráfico de frequências absolutas com os dados que você obteve. Lembre-se de incluir o título, a fonte e, se necessário, um texto explicativo. Resposta pessoal.

6 A tabela a seguir representa a precipitação atmosférica média e a temperatura média anuais em diferentes municípios.

Precipitação atmosférica média e temperatura média anuais em alguns municípios

Município	Precipitação atmosférica média (cm^3)	Temperatura (°C)
A	80	9
B	75	9,5
C	70	8
D	70	16
E	75	12,5
F	30	14
G	75	9,5
H	90	10
I	95	14,5
J	80	9
K	40	16
L	95	9,5

Dados fictícios.

6. c) Não, municípios com o mesmo valor de precipitação podem apresentar temperaturas médias diferentes.

6. d) Não. A precipitação não está relacionada à temperatura do município.

a) Construa um gráfico que represente as precipitações atmosféricas médias anuais registradas nesses municípios.

b) Construa um gráfico que represente a temperatura média anual registrada em cada município.

c) Nos municípios em que a precipitação atmosférica média é a mesma, a temperatura média também é igual? Explique.

d) De acordo com esses dados, é possível afirmar que o município em que foi registrada a maior precipitação atmosférica média é o mesmo em que ocorreu a menor medida de temperatura média? E o município em que foi registrada a menor precipitação média é o mesmo em que foi registrada a maior medida de temperatura média? Justifique.

7 No campeonato de futebol de uma escola, a equipe dos Ases alcançou estes resultados:

Total de jogos	Vitórias	Empates	Derrotas
20	13	5	2

Vitórias: 13; empates: 5; derrotas: 2.

a) Quantas vitórias obtiveram os Ases? Quantos empates? Quantas derrotas?

b) Com esses dados, faça um gráfico que represente as frequências absolutas das vitórias, dos empates e das derrotas da equipe. Consulte a resposta no Manual do Professor.

c) Calcule as frequências relativas e represente-as também graficamente. Consulte a resposta no Manual do Professor.

8 Um atleta de salto em distância obteve, em 30 tentativas, as seguintes marcas, em metro:

6,82	7,10	6,67
6,82	7,05	6,82
6,90	6,82	6,67
6,67	6,82	6,90
6,82	6,90	6,67
6,90	7,10	7,05
6,90	6,90	6,90
7,10	7,05	6,82
7,05	7,05	6,82
6,90	7,10	6,82

a) Organize esses dados em uma tabela de frequências relativas. Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) Represente graficamente essas frequências. Consulte a resposta no Manual do Professor.

c) Qual foi a porcentagem de saltos superiores a 7 metros? 30%

9 Antônio e Ana realizaram uma pesquisa para saber qual é a fruta preferida dos colegas de turma. Sabe-se que cada colega votou em uma única fruta. Antônio obteve 100 respostas e Ana obteve 125, distribuídas como indica a tabela a seguir.

Frutas preferidas entre os colegas de turma

	Banana	Laranja	Cereja	Morango
Antônio	50	25	25	0
Ana	50	25	25	25

Dados obtidos por Antônio e Ana.

Construa dois gráficos de setores: um para representar os resultados obtidos por Antônio, e o outro, os resultados obtidos por Ana.

Na atividade **10**, ao trabalhar a temática *bullying* nas escolas, é possível explorar como esse problema pode afetar a vida e a saúde mental dos estudantes, contribuindo para a aquisição da competência geral **8**.

10 **Leia o texto e faça o que se pede a seguir.**

Você já se sentiu intimidado por algum colega na sua escola? O *bullying* tem sido um dos maiores problemas encarados no ambiente escolar e a principal forma de violência praticada nesse espaço. Mas, afinal, o que é *bullying* nos dias de hoje? Antes de qualquer coisa, precisamos ter em mente que qualquer tipo de agressão e constrangimento, com a intenção de inferiorizar alguém, é indiscutivelmente errado e gera consequências péssimas para a saúde mental das pessoas – e, se você conhece alguém que disse que sofreu *bullying* e que isso não impactou sua vida, [isso] não quer dizer que não existe sofrimento com essa forma de violência. Precisamos falar sobre o tema e ficar atentos, [pois] as consequências são muitas e só podem ser enxergadas ao ser discutidas.

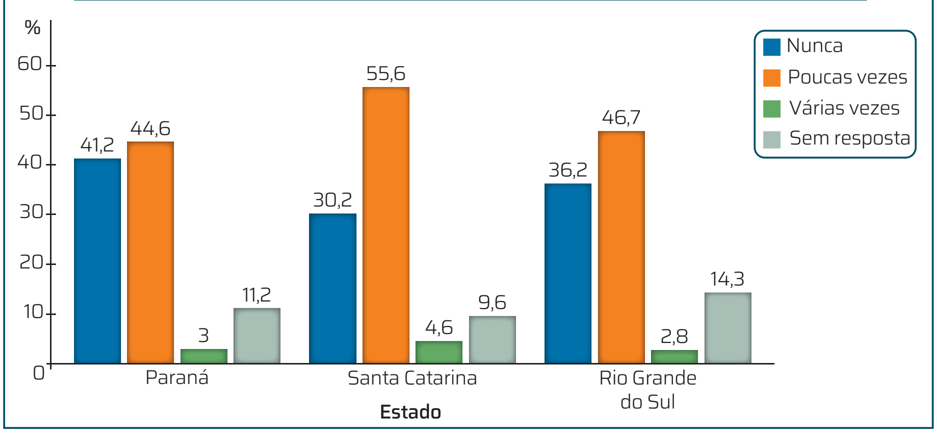
Segundo a Fundação Oswaldo Cruz (Fiocruz), a palavra *bullying* é um termo em inglês para descrever um ato de violência física, verbal e/ou psicológica, sendo intencional e repetitiva. Tal prática na maioria dos casos está ligada ao contexto escolar, representado por violências físicas, verbais e atitudes pejorativas, que buscam prejudicar a imagem de outra pessoa.

[...]

PITANGA, Giovanna *et al.* *Bullying* e violência escolar: suas consequências e como combatê-las. *Unicef para cada criança*, 18 jul. 2023. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/blog/bullying-e-violencia-escolar. Acesso em: 16 jul. 2024.

Agora, analise os dados deste gráfico e, depois, responda às questões.

Percepção de diretores, sobre a ocorrência de situações de *bullying* na escola em que trabalham, na Região Sul do Brasil, em 2021 (em porcentagem)



ID/BR

Fonte de pesquisa: FÓRUM BRASILEIRO DE SEGURANÇA PÚBLICA. Tabela 105: percepção de diretores sobre a ocorrência de situações de violência na escola em que trabalham: *bullying*. *Anuário Brasileiro de Segurança Pública*, São Paulo, Fórum Brasileiro de Segurança Pública, ano 17, p. 346, 2023. Disponível em: https://forumseguranca.org.br/wp-content/uploads/2023/07/anuario-2023.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.

a) Responda à pergunta do início do texto: "Você já se sentiu intimidado por algum colega na escola?". Converse com o professor e os colegas. Resposta pessoal.

b) Em sua opinião, o que deve ser feito quando se vivencia ou quando se vê alguém vivenciando uma situação de *bullying*? Resposta pessoal.

c) De acordo com os dados do gráfico, suponha que uma instituição vai ampliar as campanhas de prevenção ao *bullying* no estado em que obteve, em 2021, o percentual mais elevado de diretores que tiveram a percepção de que ocorriam "várias vezes" situações de *bullying* na escola em que trabalham. Qual dos estados da Região Sul deve-se escolher para intensificar as campanhas? Santa Catarina

d) Escolha um dos estados apresentados no gráfico e construa um pictograma com os dados. Lembre-se de indicar o título e a fonte. Resposta pessoal.

11 **De acordo com o Comitê Olímpico do Brasil (COB), nos Jogos Olímpicos de Paris 2024, pela primeira vez em sua história, a quantidade de atletas mulheres na delegação brasileira superou a de homens. Para essa edição dos jogos, o Brasil teve 277 atletas classificados, dos quais 153 eram mulheres.**

Com base nos dados apresentados, construa um gráfico de setores. Depois, elabore uma questão e troque-a com um colega para que um resolva a do outro. Após a resolução da questão elaborada pelo colega, juntem-se e verifiquem as respostas. Resposta pessoal.

FREQUÊNCIA ABSOLUTA ACUMULADA E FREQUÊNCIA RELATIVA ACUMULADA

Uma professora registrou os seguintes resultados obtidos em uma prova.

Desempenho dos estudantes na prova							
Nota	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	**Total**
Número de estudantes	5	3	2	3	2	10	**25**

Dados obtidos pela professora.

Como vimos anteriormente, o número de vezes em que um dado aparece em uma pesquisa é denominado frequência absoluta (f) desse dado. Por exemplo, na tabela anterior, a frequência absoluta da nota 4,0 é 5, e a da nota 9,0 é 10.

A professora poderia também calcular o percentual que o número de estudantes para cada nota representa do total. Nesse caso, ela estaria calculando a frequência relativa (fr) de cada nota.

Quando a variável estudada é quantitativa ou qualitativa nominal, além da frequência absoluta e da frequência relativa, há também a **frequência absoluta acumulada**, ou somente **frequência acumulada**, e a **frequência relativa acumulada**. Os dados observados devem estar em ordem crescente para o cálculo das frequências acumuladas.

A **frequência absoluta acumulada** até certo dado em uma distribuição de frequência é a soma da frequência absoluta desse dado com a frequência absoluta dos dados anteriores. Representamos essa frequência por **fa**.

No exemplo anterior, a frequência absoluta acumulada da nota 7,0, por exemplo, é a soma das frequências das notas 4,0; 5,0; 6,0; e 7,0:

$$\text{fa} = 5 + 3 + 2 + 3 = 13$$

Isso significa que 13 estudantes tiraram nota menor ou igual a 7,0.

A **frequência relativa acumulada** de um dado é a razão entre a frequência absoluta acumulada até esse dado e a frequência absoluta total. Ou, ainda, é a soma das frequências relativas dos dados anteriores. Representamos essa frequência por **fra**.

A frequência relativa acumulada da nota 7,0 pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\text{fra} = \frac{\text{fa (nota 7,0)}}{\text{frequência absoluta total}} = \frac{13}{25} = 0{,}52 \text{ ou } 52\%$$

Isso significa que 52% dos estudantes tiveram nota igual ou inferior a 7,0.

Observe a seguir a tabela de frequências para essa situação.

Frequências das notas dos estudantes					
Nota	**f**	**fa**	**fr (%)**	**fra (%)**	
4,0	5	5	20	20	
5,0	3	8	12	32	← 32% (20 + 12) com nota menor ou igual a 5,0
6,0	2	10	8	40	← 40% (20 + 12 + 8) com nota menor ou igual a 6,0
7,0	3	13	12	52	← 52% (20 + 12 + 8 + 12) com nota menor ou igual a 7,0
8,0	2	15	8	60	← 60% (20 + 12 + 8 + 12 + 8) com nota menor ou igual a 8,0
9,0	10	25	40	100	← 100% (20 + 12 + 8 + 12 + 8 + 40) com nota menor ou igual a 9,0
Total	**25**	—	**100**	—	

Dados obtidos pela professora.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Depois de ler a atividade **R3**, reproduza-a no caderno para verificar se você compreendeu o modo de resolução.

R3 O gerente de uma loja de produtos de informática resolveu fazer uma pesquisa com 200 clientes adolescentes, entre 11 e 17 anos, para saber a idade da maioria deles. Para isso, selecionou, de maneira aleatória, uma amostra de 25 clientes. As idades dos componentes da amostra eram:

12	13	14	13	12
13	12	13	14	14
14	15	13	14	15
15	16	12	13	14
14	16	13	14	12

a) Qual é a idade mais frequente, segundo a amostra?

b) Construa um gráfico de setores para representar a frequência relativa das idades registradas.

c) Analisando o gráfico que você construiu, o que poderemos inferir sobre a idade dos clientes se a pesquisa for repetida com uma amostra maior (dessa mesma população), formada, por exemplo, por 50 clientes?

d) Quantos clientes têm idade inferior a 15 anos?

e) Qual é a porcentagem de clientes com idade igual ou inferior a 15 anos?

Resolução

a) Para responder a essa questão, podemos organizar uma tabela de frequências absolutas.

Idade dos clientes da loja de informática

Idade	12	13	14	15	16	Total
Número de clientes	5	7	8	3	2	**25**

Dados obtidos pelo gerente da loja.

Analisando a tabela, observamos que a idade mais frequente é 14 anos.

b) Para construir o gráfico de setores, precisamos calcular as frequências relativas.

Idade	12	13	14	15	16	Total
f	5	7	8	3	2	**25**
fr (%)	20	28	32	12	8	**100**

Construímos o gráfico calculando a medida de cada ângulo central correspondente a cada frequência. Podemos determinar essas medidas de duas maneiras.

No item **b**, os estudantes podem apresentar outros modos de calcular a medida dos ângulos correspondentes aos setores do gráfico.
Se possível, incentive-os a discutir as diversas possibilidades de cálculo; assim, eles ampliarão o repertório de conhecimentos deles.

- **1ª maneira**

  Pela regra de três:

Graus		%
360	———	100
x	———	20

  Então:

$$100x = 360 \cdot 20$$

$$x = \frac{7200}{100} = 72$$

  Esse processo pode ser repetido para cada uma das frequências relativas determinadas anteriormente.

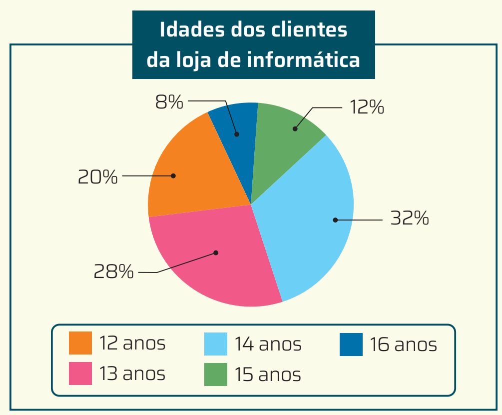
- **2ª maneira**

  Como 100% corresponde a 360°, temos que 1% corresponde a 3,6°. Assim:

  $20 \cdot 3{,}6° = 72°$ $\quad$ $12 \cdot 3{,}6° \simeq 43°$

  $28 \cdot 3{,}6° \simeq 101°$ $\quad$ $8 \cdot 3{,}6° \simeq 29°$

  $32 \cdot 3{,}6° \simeq 115°$



Dados obtidos pelo gerente da loja.

c) Analisando o gráfico, observamos que 32% dos clientes têm 14 anos. Esse dado nos permite inferir que, qualquer que seja o número de clientes da amostra, é provável que 32% deles tenham essa idade. Assim, em uma amostra de 50 clientes, 16 deles possivelmente terão 14 anos.

d) Para determinar o número de clientes com idade inferior a 15 anos, devemos calcular a frequência absoluta acumulada, somando as frequências absolutas dos dados anteriores à idade de 15 anos.

$$fa = 5 + 7 + 8 = 20$$

Portanto, 20 clientes têm idade inferior a 15 anos.

e) Para responder a esse item, calculamos a frequência relativa acumulada.

$$fra = \frac{5 + 7 + 8 + 3}{25} = 0{,}92 \text{ ou } 92\%$$

Portanto, 92% dos clientes da amostra têm idade igual ou inferior a 15 anos.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

12 Um dado comum foi lançado 50 vezes, obtendo-se as seguintes frequências para cada resultado:

Face	1	2	3	4	5	6
f	8	7	12	10	8	5

a) Com que frequência saiu a face 3? 12 vezes

b) Qual é a porcentagem de saída da face 6? 10%

c) Quantas vezes saiu uma face menor que ou igual a 5? 45

d) Qual é a porcentagem de saída de faces menores que 6? 90%

13 A partir da avaliação de uma marca de suco por uma amostra de clientes de um supermercado, foram obtidos os resultados a seguir.

Muito bom	Bom	Regular	Ruim
60%	20%	15%	♦

a) Qual é a porcentagem de clientes que consideraram o suco ruim? 5%

b) Construa um gráfico para representar todos os resultados da avaliação.

c) Se essa mesma pesquisa fosse feita em outros supermercados, qual seria a porcentagem de consumidores que provavelmente considerariam o suco bom? Provavelmente 20%.

14 Selecionou-se uma amostra de estudantes do 1º ano do Ensino Médio para pesquisar a marca de tênis que usavam. Sabe-se que cada estudante escolheu apenas uma marca. Feita a pesquisa, foram obtidos os dados apresentados na tabela a seguir.

Marca de tênis preferida dos estudantes do 1º ano do Ensino Médio

Marca	f	fr (%)
Mile	36	18
Dipas	34	17
Rupanor	48	24
Outras marcas	82	41

Dados fictícios.

a) Qual é o total de elementos da amostra? 200

b) No caderno, copie e complete a tabela, indicando a frequência relativa de cada marca.

c) Qual é a soma de todas as porcentagens? Justifique sua resposta. A soma é 100%, pois 100% correspondem ao total de porcentagens da amostra.

15 Após a realização de uma pesquisa com 60 funcionários de uma empresa de transporte sobre o número de filhos de cada um deles, foram obtidos os resultados representados na tabela a seguir.

Número de filhos dos funcionários da empresa de transporte

Número de filhos por funcionário	0	1	2	3	4	5	6
Número de funcionários	18	10	23	4	3	1	1
fa	18	28	51	55	58	59	60
fr (%)	30	16,7	38,3	6,7	5	1,7	1,7
fra (%)	30	46,7	85	91,7	96,7	98,3	100

Dados fictícios.

a) Copie essa tabela no caderno e complete-a.

b) Quantos funcionários da empresa têm menos de três filhos? 51

c) Que percentual dos funcionários da empresa tem no máximo três filhos? 91,7%

d) Que percentual dos funcionários da empresa não tem filhos? 30%

e) Quantos funcionários da empresa têm mais de três filhos? Que percentual isso representa do total? 5 funcionários; 8,4%

16 Do levantamento de dados referentes a uma amostra de automóveis em circulação em uma cidade, durante o ano de 2025, derivaram estes resultados:

Automóveis em circulação em 2025

Marca	A	B	C	D
f	175	115	95	115
fr	0,35	0,23	0,19	0,23

Dados fictícios.

a) Copie a tabela no caderno e complete-a.

b) Quantos automóveis da marca C participaram da amostra? 95

c) Qual é o total de elementos da amostra? 500

e2dan/Shutterstock.com/ID/BR

Veículos circulando por uma avenida.

O trabalho nesta seção permite que os estudantes mobilizem conhecimentos e habilidades relacionados às competências gerais **4** e **5**, pois permite que os estudantes utilizem diferentes linguagens, bem como conhecimentos matemáticos, para se expressar e partilhar informações, compreendendo e utilizando tecnologias digitais de informação. Além disso, nas atividades aqui propostas, eles serão convidados a realizar uma pesquisa em grupo e, então, utilizar uma planilha eletrônica para organizar e analisar os resultados obtidos. Isso contribuirá para que desenvolvam a habilidade **EM13MAT202**. Momentos como esse possibilitam aos estudantes exercitar a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.

TECNOLOGIA

Já estudamos que as planilhas eletrônicas são um recurso que pode facilitar a visualização e a análise de diversos dados. Porém, pelo fato de elas utilizarem códigos próprios, só será possível utilizá-las se você souber elaborar tabelas e gráficos manualmente. Ou seja, ao utilizar uma planilha eletrônica, você deve recorrer a um raciocínio bastante parecido com o que estudamos até aqui, mas traduzido para uma linguagem que a planilha compreenda. O que acontece é que, em muitas situações, construir tabelas e gráficos à mão não é viável. Além disso, as planilhas eletrônicas oferecem outra vantagem: nelas, você pode incluir, corrigir e até mesmo excluir dados, e as informações relacionadas a eles serão atualizadas automaticamente.

Nesta seção, vamos organizar dados, construir uma tabela com as frequências absolutas e relativas e construir gráficos utilizando a planilha eletrônica Calc.

Agora, vamos utilizar a planilha eletrônica para trabalhar os dados da tabela a seguir, coletados no *site* do Tribunal Superior Eleitoral (TSE). Acompanhe as etapas a seguir.

1ª etapa:

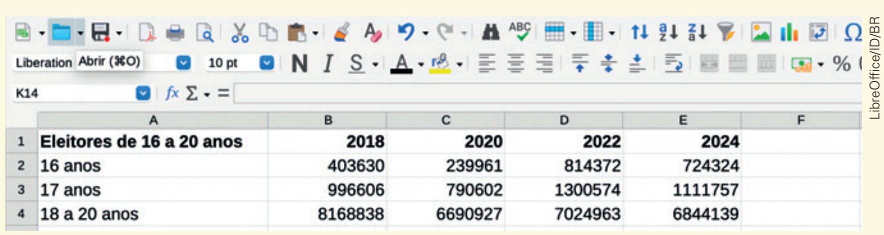
Se possível, permita que os estudantes acompanhem as etapas desta seção, realizando-as em computadores. Assim, eles poderão verificar se há dúvidas e, em caso afirmativo, saná-las antes da realização das atividades.

Depois de selecionar os dados da tabela a seguir, que queremos estudar, vamos organizá-los como indicado na imagem.

Eleitorado brasileiro de acordo com a faixa etária

	2018	2020	2022	2024
16 anos	403 630	239 961	814 372	724 324
17 anos	996 606	790 602	1 300 574	1 111 757
18 a 20 anos	8 168 838	6 690 927	7 024 963	6 844 139

Fontes de pesquisa: Tribunal Superior Eleitoral (TSE). Estatísticas de eleição. *Cruzamento de dados do eleitorado 2018*. Brasília, DF, 2021. Disponível em: https://sig.tse.jus.br/ords/dwapr/r/seai/sig-eleicao-eleitorado/cruzamento-de-eleitorado1?p0_ano=2018&session=215975126056649; *Cruzamentos de dados do eleitorado 2020*. Brasília, DF, 2022. Disponível em: https://sig.tse.jus.br/ords/dwapr/r/seai/sig-eleicao-eleitorado/cruzamento-de-eleitorado1?p0_ano=2020&session=215975126056649; *Cruzamento de dados do eleitorado 2022*. Brasília, DF, 2022. Disponível em: https://sig.tse.jus.br/ords/dwapr/r/seai/sig-eleicao-eleitorado/cruzamento-de-eleitorado1?p0_ano=2022&session=215975126056649; *Cruzamentos de dados do eleitorado 2024*. Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://sig.tse.jus.br/ords/dwapr/r/seai/sig-eleicao-eleitorado/cruzamento-de-eleitorado1?p0_ano=2024&session=215975126056649. Acessos em: 2 set. 2024.



	A	B	C	D	E	F
1	Eleitores de 16 a 20 anos	2018	2020	2022	2024	
2	16 anos	403630	239961	814372	724324	
3	17 anos	996606	790602	1300574	1111757	
4	18 a 20 anos	8168838	6690927	7024963	6844139	

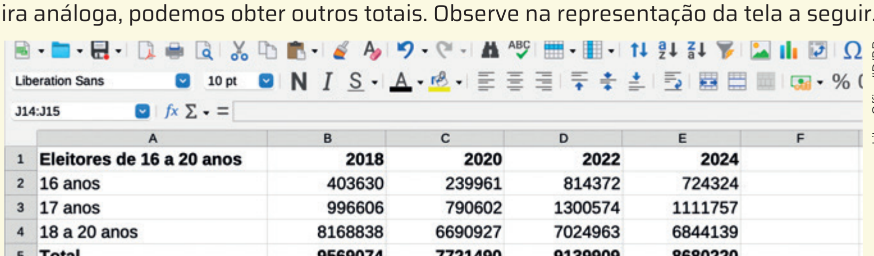
LibreOffice/ID/BR

Em algumas situações, os dados a serem indicados em uma célula são maiores que a largura dessa célula. Então, é necessário ajustar a largura da coluna. Isso pode ser feito de duas maneiras: uma é feita no menu "Formatar", selecionando "Largura" e, em seguida, "Coluna"; a outra é manual, arrastando a borda direita do respectivo cabeçalho com o *mouse*.

2ª etapa:

Para calcular o total de eleitores de 16 a 20 anos em 2018, por exemplo, clicamos na célula B5 e digitamos "=SOMA(B2:B4)". Quando pressionamos a tecla "*Enter*", a planilha adiciona os valores que estão nas células B2, B3 e B4 e mostra o resultado em B5.

De maneira análoga, podemos obter outros totais. Observe na representação da tela a seguir.



	A	B	C	D	E	F
1	Eleitores de 16 a 20 anos	2018	2020	2022	2024	
2	16 anos	403630	239961	814372	724324	
3	17 anos	996606	790602	1300574	1111757	
4	18 a 20 anos	8168838	6690927	7024963	6844139	
5	Total	9569074	7721490	9139909	8680220	

LibreOffice/ID/BR

Leve os estudantes a perceber que os dados apresentados na planilha eletrônica correspondem a uma tabela de dupla entrada. Entretanto, como na planilha eletrônica não há como dividir uma célula na diagonal para inserir os títulos, estes são apresentados de outra maneira, igualmente compreensível.

Não escreva no livro.

3ª etapa: Calculando frequências

Para isso, copiamos parte da tabela anterior.

LibreOffice/ID/BR

J15

	A	B	C	D	E	F
1	**Eleitores de 16 a 20 anos**	**2018**	**2020**	**2022**	**2024**	
2	16 anos	403630	239961	814372	724324	
3	17 anos	996606	790602	1300574	1111757	
4	18 a 20 anos	8168838	6690927	7024963	6844139	
5	**Total**	**9569074**	**7721490**	**9139909**	**8680220**	
6						
7	**Eleitores de 16 a 20 anos**	**2018**	**2020**	**2022**	**2024**	
8	16 anos					
9	17 anos					
10	18 a 20 anos					
11						
12						

Na célula B8, digitamos a fórmula "=B2/$B$5", que calculará a frequência relativa dos eleitores com 16 anos em 2018, e pressionamos a tecla "Enter".

Depois, selecionando B8, clicamos no quadradinho do canto inferior direito dessa célula e, com o *mouse*, o arrastamos para as linhas seguintes, até B10. Assim, obtemos as demais frequências relativas.

Na fórmula "=B2/$B$5", o símbolo $ torna fixo o valor da célula B5, correspondente ao total do respectivo ano.

Utilizando o mesmo raciocínio, completamos a tabela de frequências relativas.

LibreOffice/ID/BR

L23:P23

	A	B	C	D	E	F
1	**Eleitores de 16 a 20 anos**	**2018**	**2020**	**2022**	**2024**	
2	16 anos	403630	239961	814372	724324	
3	17 anos	996606	790602	1300574	1111757	
4	18 a 20 anos	8168838	6690927	7024963	6844139	
5	**Total**	**9569074**	**7721490**	**9139909**	**8680220**	
6						
7	**Eleitores de 16 a 20 anos**	**2018**	**2020**	**2022**	**2024**	
8	16 anos	0,04218067	0,03107703	0,08910067	0,08344535	
9	17 anos	0,10414864	0,10238982	0,14229617	0,12807936	
10	18 a 20 anos	0,85367069	0,86653314	0,76860317	0,78847529	
11						
12						
13						

Incentive os estudantes a eliminar da fórmula o símbolo $ e a verificar o que ocorre ao arrastá-la para as demais linhas da tabela.

Observe se os estudantes entenderam o significado da fórmula "=B2/$B$5". Espera-se que eles percebam que só conseguirão saber o que deve ser dividido se compreenderem com clareza como esse procedimento é realizado manualmente. O objeto de aprendizagem, aqui, é apenas o código de como representar os dados na planilha eletrônica. Reforce que de nada vale conhecer esse código se eles não souberem como calcular a frequência relativa.

4ª etapa: Construindo um gráfico

Por fim, vamos construir um gráfico com base nas frequências absolutas. Para isso, selecionamos os dados da tabela e clicamos no ícone "Gráfico", na barra de ferramentas.

LibreOffice/ID/BR

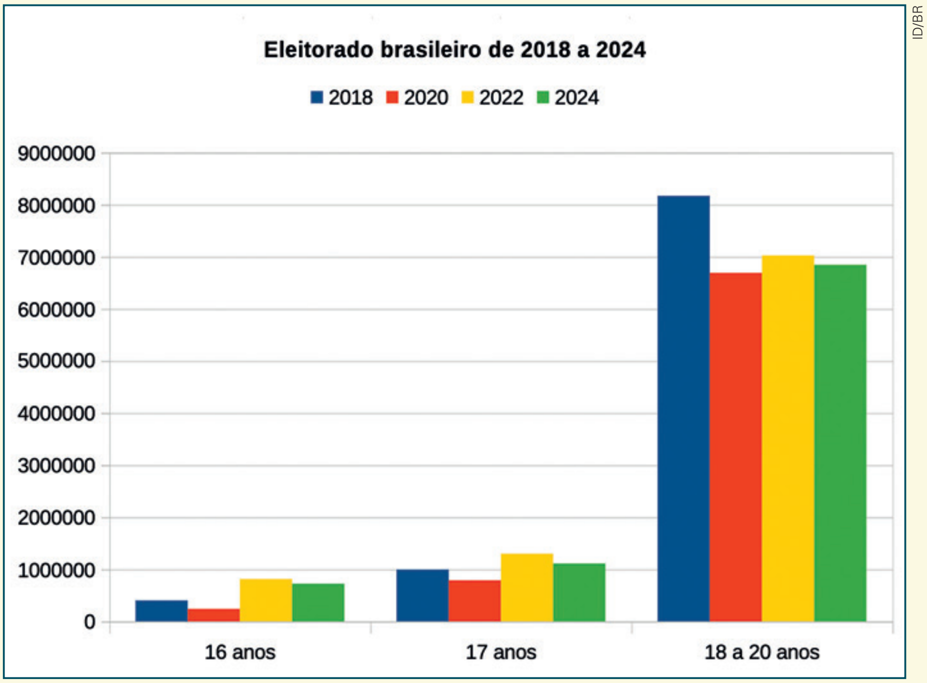
A1:E4 — Eleitores de 16 a 20 anos

	A	B	C	D	E	F
1	**Eleitores de 16 a 20 anos**	**2018**	**2020**	**2022**	**2024**	
2	16 anos	403630	239961	814372	724324	
3	17 anos	996606	790602	1300574	1111757	
4	18 a 20 anos	8168838	6690927	7024963	6844139	
5	**Total**	**9569074**	**7721490**	**9139909**	**8680220**	
6						

Observe que, ao fazermos isso, o programa sugere um tipo de gráfico, mas é possível escolher outro.

Seguindo a sugestão de tipo de gráfico do aplicativo Planilha Calc, clicamos no item "4. Elementos do gráfico", à esquerda, para dar um título ao trabalho, escolher a posição da legenda e definir outros detalhes.

Depois, clicamos em "Finalizar" e obteremos um gráfico parecido com o da imagem na próxima página.



Fontes de pesquisa: TRIBUNAL SUPERIOR ELEITORAL (TSE). Estatísticas de eleição. *Cruzamento de dados do eleitorado 2018*. Brasília, DF, 2021. Disponível em: https://sig.tse.jus.br/ords/dwapr/r/seai/sig-eleicao-eleitorado/cruzamento-de-eleitorado1?p0_ano=2018&session=215975126056649; *Cruzamentos de dados do eleitorado 2020*. Brasília, DF, 2022. Disponível em: https://sig.tse.jus.br/ords/dwapr/r/seai/sig-eleicao-eleitorado/cruzamento-de-eleitorado1?p0_ano=2020&session=215975126056649; *Cruzamento de dados do eleitorado 2022*. Brasília, DF, 2022. Disponível em: https://sig.tse.jus.br/ords/dwapr/r/seai/sig-eleicao-eleitorado/cruzamento-de-eleitorado1?p0_ano=2022&session=215975126056649; *Cruzamentos de dados do eleitorado 2024*. Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://sig.tse.jus.br/ords/dwapr/r/seai/sig-eleicao-eleitorado/cruzamento-de-eleitorado1?p0_ano=2024&session=215975126056649. Acessos em: 2 set. 2024.

ATIVIDADES

Sugerimos que, enquanto os estudantes estiverem resolvendo as atividades, você aproveite para avaliá-los e verificar o que é preciso retomar ou esclarecer.

1 **De acordo com o exemplo apresentado, resolva os itens a seguir.**

a) Qual é o tipo de gráfico escolhido para representar os dados do exemplo? Gráfico de barras múltiplas.

b) Em sua opinião, essa foi uma boa escolha? Justifique. Resposta pessoal.

c) Qual outro tipo de gráfico poderia ter sido escolhido para representar esses dados? Gráfico de linhas.

d) Utilizando a tabela de frequências relativas, construa um gráfico de setores que represente a distribuição da idade dos eleitores de 16 a 20 anos em algum dos anos pesquisados. Consulte a resposta no Manual do Professor.

2 **Use uma planilha eletrônica para construir os gráficos solicitados nas atividades indicadas em cada item.**

a) Item **b** da atividade **R2**.

b) Item **a** da atividade **6**.

3 **Com a orientação do professor, reúna-se com quatro colegas. Vocês devem fazer uma pesquisa cujos resultados possam ser analisados com o auxílio de uma planilha eletrônica. Para isso, escolham em comum acordo um tema que seja do interesse de vocês (pode ser relacionado a música, ciência, tecnologia, meio ambiente, finanças, sociedade, etc.).** Resposta pessoal.

- Vocês devem registrar todos as etapas dessa pesquisa, desde a coleta de dados até a confecção das tabelas e dos gráficos, em uma planilha eletrônica.
- Feito isso, é hora de apresentar os resultados da pesquisa. A apresentação deve ter tabelas de frequências absoluta e relativa e gráficos que representem os dados das tabelas. Vocês devem elaborar, ainda, três ou quatro perguntas a serem respondidas pela turma após a apresentação. É importante que essas perguntas sejam formuladas de modo a verificar se os colegas compreenderam como a pesquisa foi feita, quais foram os dados obtidos e a que conclusões é possível chegar quanto ao tema abordado.

ERROS E ENGANOS EM GRÁFICOS

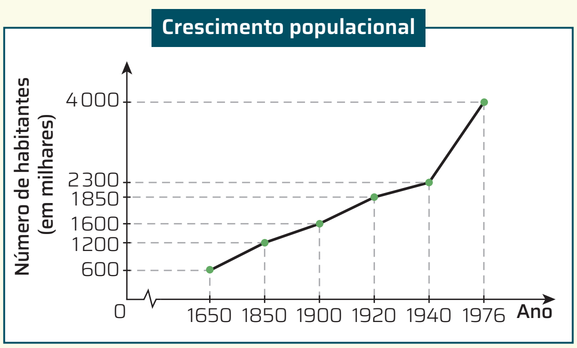
Uma crítica frequente que se faz à apresentação de dados mediante gráficos estatísticos é que eles podem, além de conter erros, induzir a erros também. Isso pode ocorrer quando as informações não são devidamente analisadas ou quando a pesquisa é conduzida sem rigor.

No entanto, ainda que estejamos certos de que as informações são legítimas e os resultados foram obtidos por método rigoroso, há casos em que a representação gráfica pode ter sido malfeita e, assim, levar a interpretações equivocadas.

Este tópico permite o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT102**, pois explora dados estatísticos representados em gráficos com inadequações que podem induzir a erro de interpretação do leitor.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R4 **Ao pesquisar o crescimento populacional do país onde vive, um estatístico deparou-se com este gráfico:**



Dados fictícios.

Depois de analisar atentamente os dados representados, o estatístico concluiu que havia um erro na construção do gráfico, mais especificamente nos eixos que representam as grandezas estudadas.

a) Que erro seria esse?

b) Após a descoberta do erro, construa corretamente o gráfico.

c) Qual é o erro de interpretação a que somos induzidos pelo gráfico original?

Resolução

a) O erro percebido pelo estatístico refere-se à escala utilizada para marcar os dados nos eixos. Observe o eixo horizontal no qual estão marcados os anos e veja que os intervalos entre um ano e outro não são constantes:

- entre 1650 e 1850, há um período de 200 anos;
- entre 1850 e 1900, há um período de 50 anos;
- entre 1900 e 1920 e entre 1920 e 1940, os períodos são de 20 anos;
- entre 1940 e 1976, há um período de 36 anos.

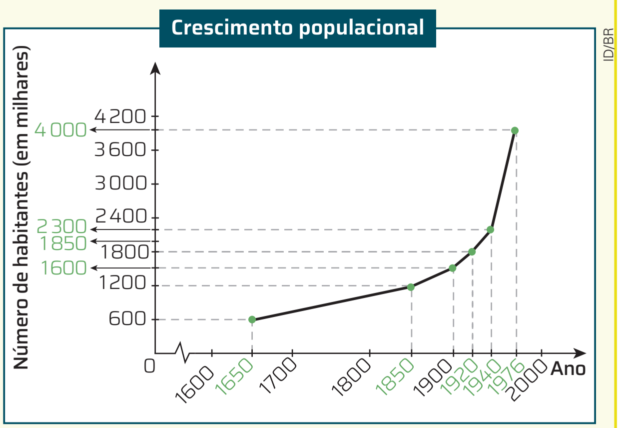
Apesar dessa diferença, quem fez o gráfico não considerou a distância entre esses períodos, fez como se os intervalos fossem iguais.

No eixo vertical, que representa os milhares de habitantes, ocorre erro parecido.

b) Vamos utilizar escalas mais adequadas para representar os dados.

No eixo horizontal, marcaremos intervalos de 100 anos a partir de 1600. Nesses intervalos, efetuaremos marcações aproximadas dos anos mostrados no gráfico original.

Para o eixo vertical, que representa o número de habitantes, vamos utilizar uma escala com intervalos de 600 mil habitantes e efetuar as demais marcações também por aproximação. Observe, a seguir, o gráfico corrigido.



Dados fictícios.

Com essas escalas, ainda que o gráfico construído não tenha marcações precisas, como ocorre em representações manuais, ele ao menos respeita melhor os intervalos entre os anos nos quais o crescimento da população foi estudado.

Se você dispuser de um computador, poderá construir um gráfico preciso, a exemplo do que reproduzimos aqui, utilizando um *software* apropriado de planilha eletrônica. Essa é uma vantagem de usar o computador na representação de dados estatísticos.

c) O gráfico original mostra um crescimento populacional mais lento e bem menos acentuado do que um gráfico que representaria o que realmente ocorreu entre 1900 e 1976.

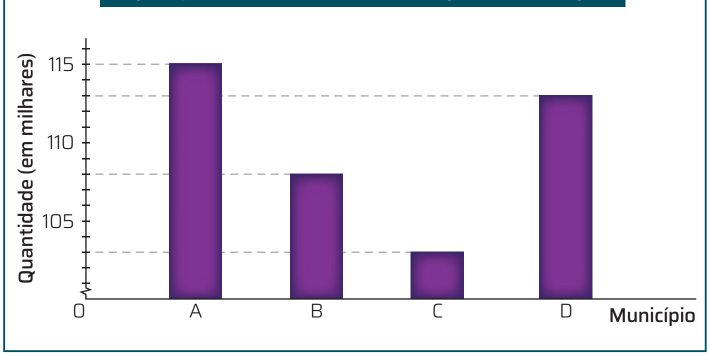
Estas atividades auxiliam os estudantes a desenvolver uma análise mais crítica em relação às informações que recebem pela mídia.

17 Este gráfico representa a população do sexo masculino em quatro municípios (em valores aproximados).

a) Observando o gráfico, podemos afirmar que a população do sexo masculino do município C é a quinta parte da população do sexo masculino do município A? Por quê?

a) Não, pois os valores nos eixos mostram que essa relação não é verdadeira, apesar da altura das barras mostrar que sim.

População do sexo masculino em quatro municípios



Dados fictícios.

b) Copie a tabela a seguir no caderno e preencha-a tendo como base os dados do eixo vertical desse gráfico.

População do sexo masculino em quatro municípios				
Município	A	B	C	D
Quantidade (em milhar)	115 /////////////////	108 /////////////////	103 /////////////////	113 /////////////////

Dados fictícios.

c) Construa outro tipo de gráfico e compare-o com o primeiro. O que você pode concluir?

Resposta pessoal.

18 Registre no caderno a alternativa correta.

(Enem) Para convencer a população local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de linhas, um político publicou no jornal local o gráfico I [...]. A Companhia Vilatel respondeu publicando dias depois o gráfico II, onde pretende justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 novas linhas telefônicas. Alternativa **d**.

Gráfico I

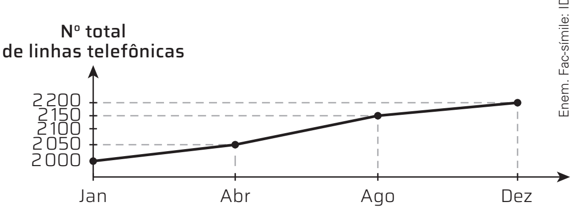
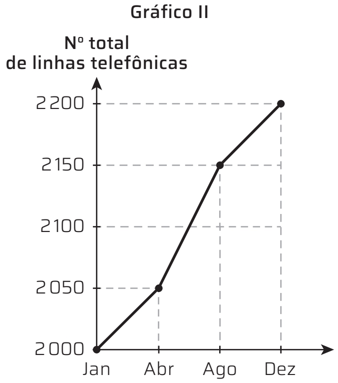


Gráfico II



Analisando os gráficos, pode-se concluir que

a) o gráfico II representa um crescimento real maior do que o do gráfico I.

b) o gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o II incorreto.

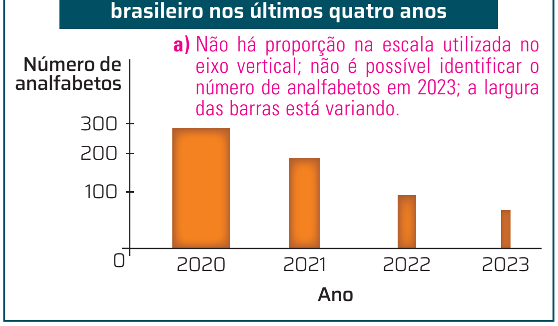
c) o gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o gráfico I incorreto.

d) a aparente diferença de crescimento nos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas.

e) os dois gráficos são incomparáveis, pois usam escalas diferentes.

19 Observe o gráfico e, depois, responda às questões.

Número de analfabetos em um município brasileiro nos últimos quatro anos



a) Não há proporção na escala utilizada no eixo vertical; não é possível identificar o número de analfabetos em 2023; a largura das barras está variando.

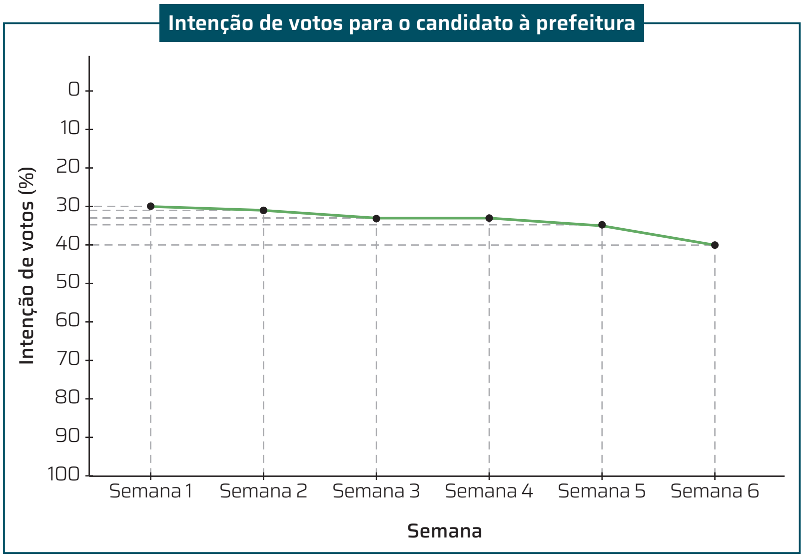
Dados fictícios.

a) Que erros pode-se notar nessa representação?

b) Refaça corretamente o gráfico no caderno.

Não escreva no livro.

20 O gráfico a seguir apresenta o resultado da pesquisa de intenção de votos para um candidato a prefeito nas seis semanas que antecedem as eleições municipais.



ID/BR

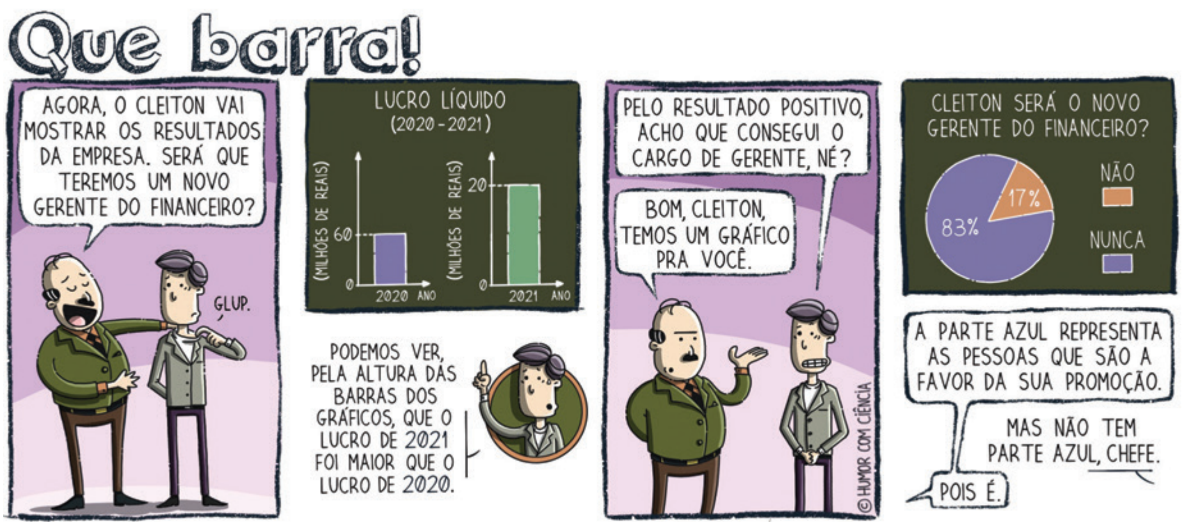
Dados fictícios.

a) Ao analisar esse gráfico, podemos afirmar que a intenção de votos para esse candidato aumentou em relação à da semana anterior? Justifique. Sim.

b) Você reconhece alguma incoerência no gráfico apresentado? Em caso afirmativo, expresse sua opinião sobre o motivo de esse recurso ter sido utilizado. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que os valores do eixo vertical estão ordenados de modo incorreto.

21 Leia a tira a seguir e, depois, responda às questões no caderno.

©Humor com Ciência/Acervo do cartunista



Will. Que barra! *Humor com Ciência*, 28 dez. 2012. Disponível em: https://www.humorcomciencia.com/blog/131-matematica/. Acesso em: 14 out. 2024.

a) Quais dados estão sendo representados nos gráficos de barras verticais? Lucro líquido.

b) No gráfico de barras verticais, é possível observar um engano na apresentação dos dados. Qual é esse engano? A altura das barras entre os gráficos não é compatível com os valores apresentados no eixo vertical porque a escala usada é diferente nos dois gráficos.

c) Em sua opinião, Cleiton utilizou algum recurso para manipular as informações apresentadas nesses gráficos? Explique. Sim, utilizou o elemento visual do gráfico para manipular as informações.

d) Quais dados estão sendo representados no gráfico de setores? A possibilidade de Cleiton ser o novo gerente financeiro.

e) Cleiton conseguiu a vaga para ser o novo gerente financeiro? Em sua opinião, por que isso ocorreu? Não. Resposta pessoal.

f) No caderno, construa os gráficos de barras verticais que Cleiton elaborou, de modo a corrigir o engano cometido por ele. Resposta pessoal.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

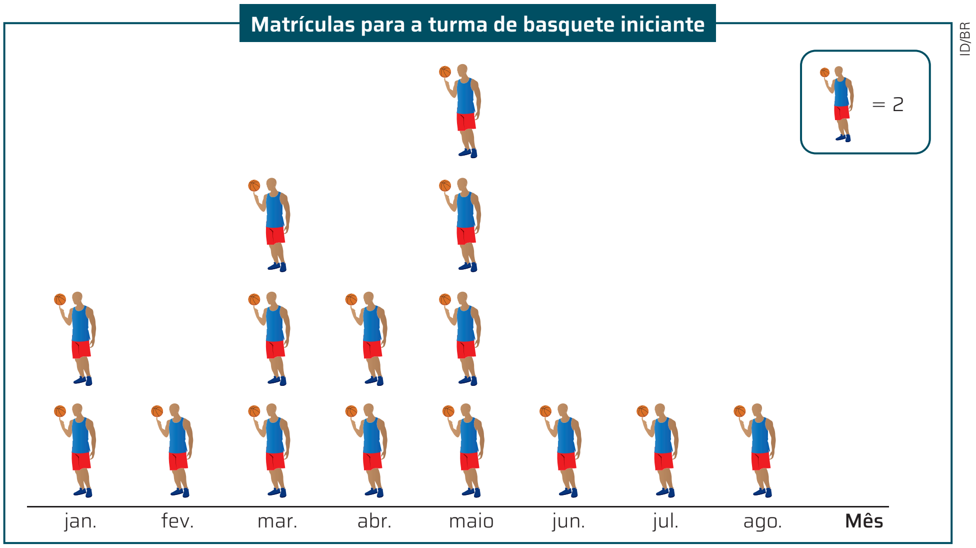
Neste tópico, lembre-se de que, mais do que apenas conhecer essas medidas, os estudantes precisam saber como e onde podem usá-las.

Quando dispomos de diversos valores de uma variável, é comum analisarmos as tendências desse conjunto de valores. Em Estatística, são definidas algumas medidas que revelam essas tendências.

As mais utilizadas são as de tendência central, que têm esse nome pelo fato de os dados observados tenderem, em geral, a se agrupar em torno de valores centrais. As medidas de tendência central são a moda, a mediana e a média aritmética. Vamos estudá-las?

Moda

O pictograma a seguir mostra o número de novas matrículas em um curso de basquete para iniciantes, a cada mês, nos primeiros oito meses de um ano.



Dados fictícios.

O número de estudantes inscritos em cada mês variou consideravelmente. Maio foi o mês com mais estudantes matriculados: 8. Podemos afirmar que maio é a **moda** desse conjunto de meses.

> **Moda** de um conjunto finito de dados é o elemento que ocorre **mais frequentemente** dentro desse conjunto. Representamos a moda por **Mo**.

A moda pode ser calculada para qualquer tipo de variável. Sua função é possibilitar a percepção de uma tendência, de uma preferência ou de uma rejeição evidente.

Um conjunto de dados pode não ter moda por não ter um elemento específico que ocorra mais frequentemente que os outros ou, ainda, pode ter mais de uma moda, por ter mais de um elemento que ocorra com maior frequência.

Em cada linha do quadro a seguir, há um conjunto de dados, e na última coluna indicamos o valor mais frequente nesse conjunto.

Conjuntos de dados									Valores mais frequentes
7	9	9	9	10	10	12	7	12	9
3	5	8	10	12	15	16	1	13	Não há
3	4	4	4	5	5	7	7	7	4 e 7

Observe que, no primeiro conjunto de dados, o valor mais frequente é 9. Portanto, a moda desse conjunto de dados é 9. No segundo conjunto de dados, não há um valor específico que seja mais frequente. Assim, dizemos que não há moda, ou seja, que é um conjunto de dados amodal. No terceiro conjunto, há dois valores mais frequentes: 4 e 7. Temos, então, um caso de situação bimodal, ou seja, esse conjunto de dados tem duas modas.

Média aritmética

A soma das medidas das alturas de 13 atletas de uma equipe de basquete é:

$$1{,}85 + 1{,}95 + 1{,}98 + 1{,}98 + 1{,}98 + 2{,}01 + 2{,}01 + 2{,}07 + 2{,}07 + 2{,}07 + 2{,}07 + 2{,}10 + 2{,}13 = 26{,}27$$

Se dividirmos esse valor pelo número total de jogadores, obteremos a média aritmética das alturas:

$$\text{média} = \frac{26{,}27}{13} \simeq 2{,}02$$

Média aritmética de um conjunto finito de números é o valor que se obtém dividindo a soma dos seus elementos pelo número de elementos do conjunto. Representamos a média aritmética por $\overline{\boldsymbol{X}}$.

A **média aritmética** das alturas dos jogadores é 2,02 m.

A média pode ser calculada apenas se a variável envolvida na pesquisa for quantitativa. Não faz sentido calcular a média aritmética para variáveis qualitativas. Você já imaginou o que significaria calcular a cor média de camiseta preferida por um grupo de pessoas ou o time médio de futebol para o qual torce a maioria dos estudantes de sua turma?

A média é mais representativa quanto menor for a variação dos dados.

Na realização de uma mesma pesquisa estatística entre diferentes grupos, ficará mais fácil estabelecer uma comparação entre esses grupos e perceber tendências se for possível calcular a média.

Mediana

Para compreender o conceito de mediana, acompanhe a situação descrita a seguir.

Os 13 atletas de uma equipe de basquete foram organizados em fila, por ordem crescente de medida de altura.

1,85	1,95	1,98	1,98	1,98	2,01	2,01	2,07	2,07	2,07	2,07	2,10	2,13

6 jogadores

posição central

6 jogadores

Observe que o jogador que ocupa a posição central tem 2,01 m de altura. Nesse caso, podemos afirmar que 2,01 é a **mediana** desse conjunto de dados.

Mediana de um conjunto finito de valores, dispostos em ordem crescente ou decrescente de grandeza, é:

- o **valor central**, se o conjunto tiver um número ímpar de elementos;
- a **média aritmética dos dois valores centrais**, se o conjunto tiver um número par de elementos.

Representamos a mediana por **Md**.

A mediana pode ser estabelecida para variáveis qualitativas ordenáveis e para variáveis quantitativas. Uma das vantagens da mediana é ela ser menos sensível a valores discrepantes, que causam grande variação na média, mas não na mediana.

Todos os conjuntos finitos de números têm mediana.

Se o conjunto tiver um número ímpar de elementos, a mediana será sempre um valor do próprio conjunto – por exemplo, a mediana do conjunto de dados {1, 2, 2, 3, 4, 4, 5} é 3.

Entretanto, se o conjunto tiver um número par de elementos, a mediana poderá, ou não, ser um elemento desse conjunto.

Exemplos

- Para obter a mediana do conjunto {1, 2, 3, 3, 3, 5, 6, 7}, devemos calcular a média aritmética dos elementos que ocupam a quarta e a quinta posição: $\frac{3 + 3}{2} = 3$ (pertence ao conjunto).

- Para obter a mediana do conjunto {1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 7}, devemos calcular a média aritmética dos elementos que ocupam a quarta e a quinta posição: $\frac{3 + 4}{2} = 3{,}5$ (não pertence ao conjunto).

Das três medidas de tendência central, a que mais utilizamos no dia a dia é a média aritmética, e podemos encontrá-la em várias situações. Costumamos calcular a média dos resultados dos testes, a média de quilômetros rodados por um automóvel com um litro de combustível, a média de temperaturas, a média de salários, entre outros exemplos.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R5 A tabela a seguir mostra a temperatura máxima (em °C) registrada em uma cidade de 14 a 20 de julho.

Temperatura máxima registrada	
Data	**Temperatura (°C)**
14/7	4,6
15/7	10,4
16/7	9,9
17/7	15,1
18/7	12,4
19/7	17,5
20/7	15,1

Dados fictícios.

a) Qual é a moda das temperaturas?
b) Qual é a média aritmética das temperaturas?
c) Calcule a mediana dos dados da tabela.

Resolução

a) A moda das temperaturas é 15,1 °C, porque essa foi a temperatura mais frequente (registrada duas vezes).

b) Para calcular a média aritmética das temperaturas, fazemos:

$$\overline{X} = \frac{4{,}6 + 10{,}4 + 9{,}9 + 15{,}1 + 12{,}4 + 17{,}5 + 15{,}1}{7} \simeq 12{,}14 \simeq 12$$

Portanto, a média das temperaturas é, aproximadamente, 12 °C.

c) Para calcular a temperatura mediana, primeiramente ordenamos o conjunto de dados:

4,6; 9,9; 10,4; 12,4; 15,1; 15,1; 17,5

Como o número de elementos do conjunto é ímpar, vamos observar o valor central.

$$\underbrace{4{,}6;\ 9{,}9;\ 10{,}4}_{\text{3 elementos}}\quad \underbrace{12{,}4}_{\text{valor central}}\quad \underbrace{15{,}1;\ 15{,}1;\ 17{,}5}_{\text{3 elementos}}$$

Portanto, a mediana é 12,4 °C.

R6 (Enem) Os 100 funcionários de uma empresa estão distribuídos em dois setores: Produção e Administração. Os funcionários de um mesmo setor recebem salários com valores iguais. O quadro apresenta a quantidade de funcionários por setor e seus respectivos salários.

Setor	Quantidade de funcionários	Salário (em real)
Produção	75	2 000,00
Administração	25	7 000,00

A média dos salários dos 100 funcionários dessa empresa, em real, é

a) 2 000,00
b) 2 500,00
c) 3 250,00
d) 4 500,00
e) 9 000,00

Resolução

A média $\overline{X}$ dos salários dos 100 funcionários da empresa pode ser calculada somando-se todos os salários (multiplicando-se o número de funcionários por seus respectivos salários) e dividindo esse valor pela quantidade total de funcionários. Ou seja:

$$\overline{X} = \frac{75 \cdot 2000 + 25 \cdot 7000}{75 + 25}$$

$$\overline{X} = \frac{150\,000 + 175\,000}{100}$$

$$\overline{X} = \frac{325\,000}{100}$$

$$\overline{X} = 3\,250$$

Portanto, a alternativa **c** é a correta.

Nas atividades **22** a **35**, os estudantes desenvolvem a habilidade **EM13MAT316** ao resolver problemas que envolvem o cálculo e a interpretação de média, moda e mediana.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

22 A fábrica Docinhos vende doces em embalagens de vários tamanhos. A tabela mostra a quantidade de cada tipo de embalagem utilizada no último ano.

Embalagens usadas no último ano	
Tipos de embalagem	**Número de embalagens**
125 g	10 000
250 g	35 000
500 g	50 000
1 kg	10 000

Dados fornecidos pela fábrica.

Se a gerência da fábrica decidir vender doces em um só tipo de embalagem, qual deverá escolher? Justifique sua resposta. A embalagem de 500 g. Justificativa pessoal.

23 **Faça, no caderno, o que se pede a seguir.**

a) Calcule a moda, a mediana e a média aritmética das idades dos pais dos estudantes de sua turma.

b) Construa um gráfico da frequência absoluta e outro da frequência relativa das idades.

c) Responda: Há alguma idade cuja frequência relativa seja superior a 40%? E a 60%?
As respostas dependem das idades dos pais dos estudantes da turma.

24 **As notas de Flávio, estudante do 3º ano, nas provas de Matemática foram: 8,5, 6 e 8.**

a) Qual é a média aritmética dessas notas? 7,5

b) Quanto Flávio precisa obter em uma quarta prova para que sua média seja 8,0? 9,5

25 **Em uma pequena empresa de tecnologia, trabalham 13 pessoas, cujos salários por função estão indicados a seguir.**

6 digitadores	R$ 1 400,00
1 supervisor	R$ 1 500,00
3 técnicos	R$ 1 600,00
1 encarregado	R$ 1 900,00
1 diretor	R$ 3 100,00
1 presidente	R$ 5 000,00

Use as medidas de tendência central para analisar a distribuição de salários e responda: A maioria dos funcionários recebe salário próximo à média?
Não, a maioria recebe salário inferior à média.

26 **Em uma seleção para ascensoristas e recepcionistas de uma grande empresa, compareceram 500 candidatos para ascensoristas e 100 para recepcionistas. No processo seletivo, a média de todos os candidatos foi 4, mas a média dos candidatos a ascensorista foi 3,8. Nessas condições, qual foi a média dos candidatos à recepcionista?** 5 candidatos.

27 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) O técnico de um time de basquete pretende aumentar a estatura média de sua equipe de 1,93 m para, no mínimo, 1,99 m. Para tanto, dentre os 15 jogadores que fazem parte de sua equipe, irá substituir os quatro mais baixos, de estaturas: 1,78 m, 1,82 m, 1,84 m e 1,86 m. Para isso, o técnico contratou um novo jogador de 2,02 m. Os outros três jogadores que ele ainda precisa contratar devem satisfazer à sua necessidade de aumentar a média das estaturas da equipe. Ele fixará a média das estaturas para os três jogadores que ainda precisa contratar dentro do critério inicialmente estabelecido. Qual deverá ser a média mínima das estaturas, em metro, que ele deverá fixar para o grupo de três novos jogadores que ainda irá contratar? Alternativa **d**.

a) 1,96
b) 1,98
c) 2,05
d) 2,06
e) 2,08

28 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(UFJF-MG) Realizou-se um experimento, no qual oito pessoas foram pesadas no primeiro dia. Suas massas, em kg, estão dadas na tabela [...][a seguir]:

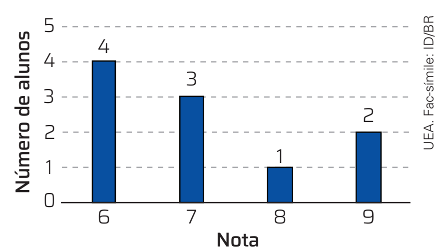
Pessoa	A	B	C	D	E	F	G	H
Massa (kg)	71	67	81	55	51	74	56	85

Após 20 dias de observação, notou-se que as pessoas cuja massa era menor que 70 kg engordaram 6 kg e as pessoas cuja massa era maior que 70 kg emagreceram 10 kg. Em relação a esse experimento que durou 20 dias, pode-se afirmar que a mediana da distribuição inicial das massas em relação à mediana da distribuição final das massas: Alternativa **d**.

a) diminuiu 2.
b) diminuiu 4.
c) aumentou 4.
d) diminuiu 6.
e) não se alterou.

29 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UEA-AM) As notas obtidas por 10 alunos foram registradas no gráfico:



Em relação às notas obtidas pelos alunos, a média, a moda e a mediana são, respectivamente, Alternativa **c**.

a) 8; 6; 7.
b) 7,1; 7; 8.
c) 8; 7,1; 7.
d) 7; 6; 7.
e) 7,1; 6; 7.

30 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(UFSCar-SP) Em uma pesquisa, foram consultados 600 consumidores sobre sua satisfação em relação a uma certa marca de sabão em pó. Cada consumidor deu uma nota de 0 a 10 para o produto, e a média final das notas foi 8,5. O número mínimo de consumidores que devem ser consultados, além dos que já foram, para que essa média passe para 9, é igual a Alternativa **b**.

a) 250.
b) 300.
c) 350.
d) 400.
e) 450.

31 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Um tipo de semente necessita de bastante água nos dois primeiros meses após o plantio. Um produtor pretende estabelecer o melhor momento para o plantio desse tipo de semente, nos meses de outubro a março. Após consultar a previsão do índice mensal de precipitação de chuva (ImPC) da região

Não escreva no livro.

onde ocorrerá o plantio, para o período chuvoso de 2020-2021, ele obteve os seguintes dados: Alternativa **c**.

- outubro/2020: ImPC = 250 mm;
- novembro/2020: ImPC = 150 mm;
- dezembro/2020: ImPC = 200 mm;
- janeiro/2021: ImPC = 450 mm;
- fevereiro/2021: ImPC = 100 mm;
- março/2021: ImPC = 200 mm.

Com base nessas previsões, ele precisa escolher dois meses consecutivos em que a média mensal de precipitação seja a maior possível.

No início de qual desses meses o produtor deverá plantar esse tipo de semente?

a) Outubro.
b) Novembro.
c) Dezembro.
d) Janeiro.
e) Fevereiro.

32 **Em um exame com 100 questões, é necessário obter 50% de acertos para ser aprovado. Os resultados de duas turmas, cada uma com 11 estudantes, foram estes:**

Turma A	
Antônio	48
Bianca	45
Carla	45
Daniel	98
Eduarda	45
Fernando	46
Gisele	48
Helena	48
Inês	45
Jorge	48
Luísa	45

Turma B	
Ana	51
Bernardo	53
Carlos	51
Diana	53
Enzo	7
Fátima	51
Guilherme	51
Heitor	53
Isabel	53
Joana	53
Miguel	52

$Mo_A = 45$, $Mo_B = 53$; $Md_A = 46$, $Md_B = 52$; $\overline{X}_A = 51$, $\overline{X}_B = 48$.

a) Quais são a moda, a mediana e a média dos resultados de cada turma?
b) Calcule as frequências relativas de cada turma e construa dois gráficos de setores para representar os resultados. Consulte a resposta no Manual do Professor.
c) Escreva um texto no caderno comparando os resultados de cada turma. Resposta pessoal.

33 **Em uma empresa, foram escolhidos ao acaso cinco funcionários para participar de um estudo sobre salários, obtendo-se estes resultados:**

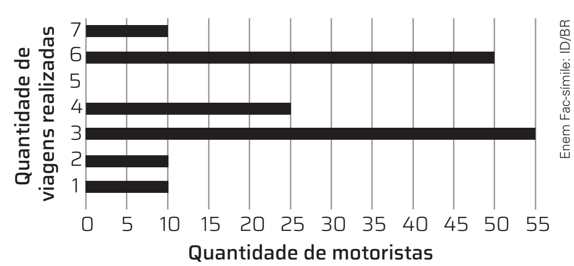
33. c) Porque os salários reais não estão próximos do salário médio. Exemplo de resposta: aproximar os valores dos cinco salários do salário médio.

Funcionário	Salário (R$/mês)
A	1 620,00
B	1 260,00
C	1 800,00
D	1 440,00
E	5 400,00

a) Qual é o salário médio $(\overline{X})$ desses funcionários? R$ 2 304,00
b) É possível afirmar que a maioria desses cinco funcionários tem um salário de $\overline{X}$ reais por mês? Quantos funcionários, entre os cinco, não concordarão com essa afirmação? Não. Quatro funcionários.
c) Por que a média não é representativa nesse caso? O que você mudaria no texto da atividade, para que a média fosse representativa?

34 **Registre a resposta correta no caderno.**

(Enem) Uma empresa de transporte faz regularmente um levantamento do número de viagens realizadas durante o dia por todos os 160 motoristas cadastrados em seu aplicativo. Em um certo dia, foi gerado um relatório, por meio de um gráfico de barras, no qual se relacionaram a quantidade de motoristas com a quantidade de viagens realizadas até aquele instante do dia.



Comparando os valores da média, da mediana e da moda da distribuição das quantidades de viagens realizadas pelos motoristas cadastrados nessa empresa, obtém-se Alternativa **e**.

a) mediana = média < moda.
b) mediana = moda < média.
c) mediana < média < moda.
d) moda < média < mediana.
e) moda < mediana < média.

35 **Em uma turma de Matemática formada por 25 moças e 5 rapazes, a média aritmética das notas do primeiro trimestre é igual a 7. Identifique a(s) pergunta(s) que pode(m) ser respondida(s) com base nessas informações e resolva a questão no caderno.**

a) Qual é a média aritmética das notas dos rapazes?
b) Qual é a média aritmética das notas das moças?
c) Qual é a média aritmética das notas das moças, sabendo que a média aritmética das notas dos rapazes é igual a 6? Pergunta do item **c**: 7,2.
d) Qual é a média aritmética dessa classe, nesse bimestre?

AGRUPAMENTOS EM CLASSES

Em uma coleta de dados quantitativos para uma amostra, sempre que houver grande variedade de resultados, é conveniente agrupar os valores da variável para analisar as informações. Os valores são organizados em classes que correspondem a intervalos escolhidos de acordo com o critério de quem vai agrupar os dados. Os intervalos de classe são representados pelo símbolo ⊢, usado para indicar que apenas o limite inferior está incluído na classe representada. O limite superior de uma classe deve ser igual ao limite inferior da classe seguinte. É comum escolher todas as classes com a mesma amplitude. Vejamos um exemplo.

Durante um trabalho de Biologia sobre o tempo (em dia) de gestação dos animais, um grupo de estudantes coletou, de diferentes fontes, os dados relativos a 42 mamíferos e os organizou na tabela a seguir.

Tempo de gestação de alguns animais

Animal	Tempo de gestação (em dia)	Animal	Tempo de gestação (em dia)	Animal	Tempo de gestação (em dia)
Alce	250	Chimpanzé	231	Porco	112
Alce americano	240	Coelho	37	Porquinho--da-índia	68
Babuíno	187	Esquilo americano	31	Puma	90
Baleia	365	Esquilo	44	Raposa	52
Búfalo	278	Gambá	17	Rato	21
Burro	365	Gato	63	Rinoceronte	496
Cabra doméstica	151	Girafa	425	Texugo	60
Cabra--montesa	184	Gorila	257	Tigre	105
Camelo	406	Leão	100	Urso-pardo	225
Canguru	42	Leão-marinho	350	Urso-polar	240
Cão	61	Leopardo	98	Urso-negro	219
Carneiro	154	Lobo	63	Vaca	284
Castor	122	Macaco	165	Veado	201
Cavalo	330	Morcego	50	Zebra	265

Dados obtidos pelos estudantes.

O quadro a seguir apresenta a organização, em classes, do tempo de gestação dos animais da amostra e as frequências absolutas dessas classes.

Tempo de gestação (em dia)	17 ⊢ 77	77 ⊢ 137	137 ⊢ 197	197 ⊢ 257	257 ⊢ 317	317 ⊢ 377	377 ⊢ 437	437 ⊢ 497
Frequência absoluta	13	6	5	7	4	4	2	1

A noção de como obter a frequência relativa, a frequência acumulada e a frequência relativa acumulada a partir de intervalos de classe é parecida com o que fizemos anteriormente para dados não agrupados. A notação utilizada também é a mesma. Acompanhe a seguir os problemas e exercícios resolvidos para compreender como fazer esses cálculos.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R7 **Considere o quadro organizado para o tempo de gestação dos animais da página anterior.**

a) Calcule a frequência relativa das classes.

b) Calcule a frequência absoluta acumulada e a frequência relativa acumulada de cada classe.

Resolução

a) Para obter as frequências relativas (fr), calculamos as razões entre as frequências absolutas de cada classe e o total de elementos da amostra.

Assim, a frequência relativa da primeira classe é dada por:

$$fr = \frac{13}{42} \simeq 0{,}31 = 31\%$$

A da segunda classe é dada por:

$$fr = \frac{6}{42} \simeq 0{,}14 = 14\%$$

A da terceira classe é dada por:

$$fr = \frac{5}{42} \simeq 0{,}12 = 12\%$$

A da quarta classe é dada por:

$$fr = \frac{7}{42} \simeq 0{,}17 = 17\%$$

A da quinta classe é dada por:

$$fr = \frac{4}{42} \simeq 0{,}10 = 10\%$$

A da sexta classe é dada por:

$$fr = \frac{4}{42} \simeq 0{,}10 = 10\%$$

A da sétima classe é dada por:

$$fr = \frac{2}{42} \simeq 0{,}05 = 5\%$$

A da oitava classe é dada por:

$$fr = \frac{1}{42} \simeq 0{,}02 = 2\%$$

Observe que, se somarmos todas as frequências relativas, vamos obter um valor maior que 100%. Isso se deve aos arredondamentos feitos.

b) Para calcular a frequência absoluta acumulada (fa) de uma classe, somamos a frequência absoluta (f) dessa classe com as frequências absolutas de todas as classes anteriores.

Para obter a frequência relativa acumulada (fra) de uma classe, calculamos a razão entre a frequência absoluta acumulada dessa classe e a frequência total da distribuição.

Na primeira classe, temos:

$$fa = 13 \text{ e } fra = \frac{13}{42} \simeq 0{,}31 = 31\%$$

Na segunda classe, temos:

$$fa = 13 + 6 = 19$$

$$fra = \frac{19}{42} \simeq 0{,}45 = 45\%$$

Na terceira classe, temos:

$$fa = 13 + 6 + 5 = 24$$

$$fra = \frac{24}{42} \simeq 0{,}57 = 57\%$$

Na quarta classe, temos:

$$fa = 13 + 6 + 5 + 7 = 31$$

$$fra = \frac{31}{42} \simeq 0{,}74 = 74\%$$

Na quinta classe, temos:

$$fa = 13 + 6 + 5 + 7 + 4 = 35$$

$$fra = \frac{35}{42} \simeq 0{,}83 = 83\%$$

Na sexta classe, temos:

$$fa = 13 + 6 + 5 + 7 + 4 + 4 = 39$$

$$fra = \frac{39}{42} \simeq 0{,}93 = 93\%$$

Na sétima classe, temos:

$$fa = 13 + 6 + 5 + 7 + 4 + 4 + 2 = 41$$

$$fra = \frac{41}{42} \simeq 0{,}98 = 98\%$$

Na oitava classe, temos:

$$fa = 13 + 6 + 5 + 7 + 4 + 4 + 2 + 1 = 42$$

$$fra = \frac{42}{42} = 1 = 100\%$$

Organizando todos os resultados em um novo quadro, temos:

Classe	Tempo de gestação (em dia)	f	fa	fr (%)	fra (%)
1ª	17 ⊢ 77	13	13	31	31
2ª	77 ⊢ 137	6	19	14	45
3ª	137 ⊢ 197	5	24	12	57
4ª	197 ⊢ 257	7	31	17	74
5ª	257 ⊢ 317	4	35	10	83
6ª	317 ⊢ 377	4	39	10	93
7ª	377 ⊢ 437	2	41	5	98
8ª	437 ⊢ 497	1	42	2	100
//////////	**Total**	**42**	///	**101**	//////

R8 **Analise o quadro da atividade R7 e responda às questões.**

a) Quantas espécies de animais têm um tempo de gestação no intervalo entre 17 e 257 dias?

b) Qual é a porcentagem de animais cujo tempo de gestação é inferior a 197 dias?

c) Qual é a porcentagem de animais cujo tempo de gestação é superior a 377 dias?

Resolução

a) Observando a distribuição em classes, percebemos que os animais com tempo de gestação no intervalo entre 17 e 257 dias são aqueles que se encontram na 1ª, 2ª, 3ª e 4ª classes. Verificando a frequência acumulada da 4ª classe, temos o valor 31. Devemos, porém, excluir os dois limites (17 e 257), pois eles não estão no intervalo desejado. Como o tempo de 257 dias de gestação não está incluído nos intervalos até a 4ª classe, temos de excluir somente os animais cujo tempo de gestação seja 17 dias, que é o caso do gambá. Então, das 42 espécies de animais, 30 têm um tempo de gestação no intervalo entre 17 e 257 dias.

b) Na coluna de frequências relativas acumuladas da 3ª classe, encontramos a resposta: 57%.

c) Observe que o valor 377 é extremo superior do intervalo da 6ª classe. O valor da frequência relativa acumulada dessa classe é 93%. Assim, se 93% dos animais têm tempo de gestação inferior a 377 dias, então 7% deles têm tempo de gestação superior a 377 dias.

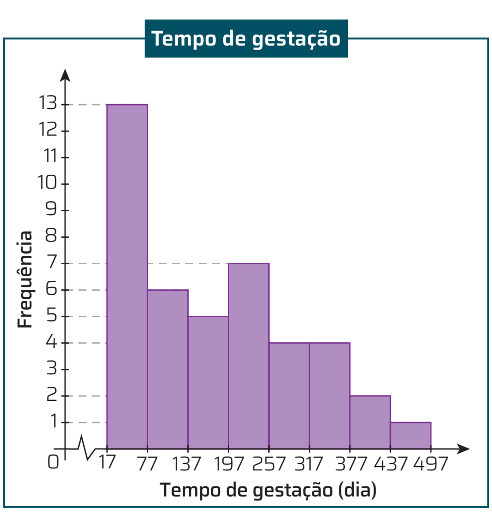
Representação gráfica

A representação gráfica das frequências dos intervalos de classe de uma pesquisa pode ser feita por meio de um histograma ou de um polígono de frequências.

Histograma é um gráfico formado por um conjunto de retângulos justapostos, cujas bases se localizam sobre um dos eixos de tal modo que seus pontos médios coincidam com os pontos médios dos intervalos de classe. As larguras das bases dos retângulos correspondem às amplitudes dos intervalos de classe, e as alturas referem-se às frequências de cada classe.

Polígono de frequências é um gráfico de linha no qual as frequências são marcadas sobre retas perpendiculares ao eixo sobre o qual as bases dos retângulos estão apoiadas, traçadas sobre os pontos médios dos intervalos de classe.

Observe o histograma e o polígono de frequências relativos à tabela com oito classes sobre o tempo de gestação dos 42 mamíferos.



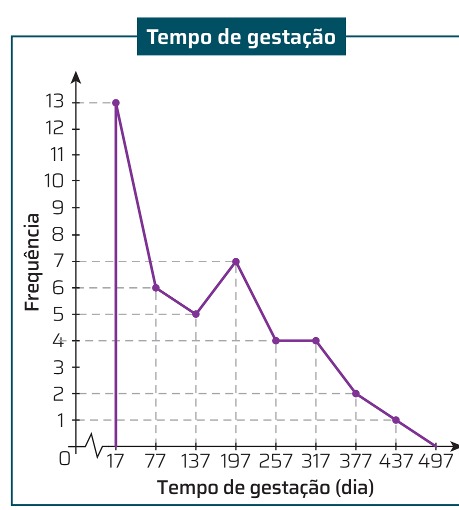
Dados obtidos pelos estudantes.

ID/BR

Tempo de gestação

Tempo (em dia)	f
17 ⊢ 77	13
77 ⊢ 137	6
137 ⊢ 197	5
197 ⊢ 257	7
257 ⊢ 317	4
317 ⊢ 377	4
377 ⊢ 437	2
437 ⊢ 497	1

Dados obtidos pelos estudantes.



Dados obtidos pelos estudantes.

ID/BR

A diferença entre um histograma e um gráfico de barras verticais está na eliminação do espaço entre as colunas, porque o ponto final de uma classe coincide com o ponto inicial da próxima classe. Além disso, um histograma pode ser traçado sem as linhas de separação entre as colunas verticais.

Já o polígono de frequências é um gráfico de linhas cujos pontos têm abscissa no valor médio de cada classe e que se fecha em linhas com pontos no eixo horizontal cujas abscissas estão a uma mesma distância dos demais valores médios das classes. Acompanhe os exemplos de como construir um histograma e um polígono de frequências nas atividades resolvidas a seguir.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

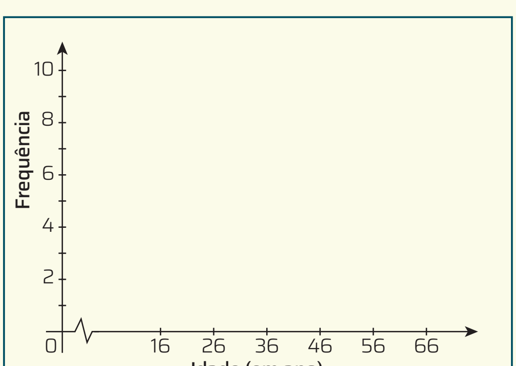
R9 Com base nas informações da tabela a seguir, construa um histograma para representar os dados indicados.

Distribuição dos empregados de uma empresa, segundo a idade (em ano)	
Idade	**Frequência**
16 ⊢ 26	3
26 ⊢ 36	7
36 ⊢ 46	10
46 ⊢ 56	6
56 ⊢ 66	4

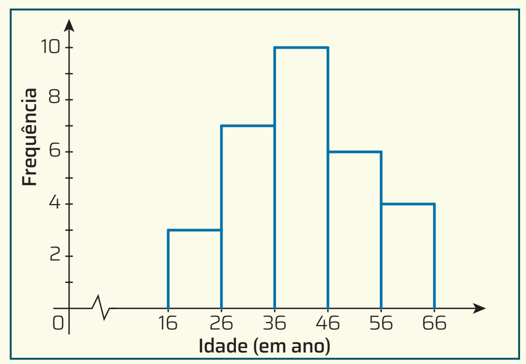
Dados fornecidos pela empresa.

Resolução

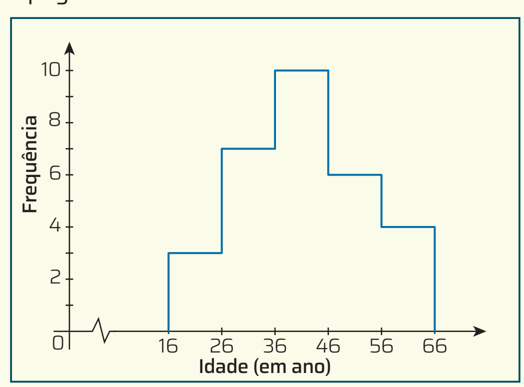
1º passo: Traçamos o sistema de eixos coordenados e escrevemos os intervalos de classe no eixo das abscissas e as frequências no eixo das ordenadas, escolhendo uma escala adequada para cada eixo.



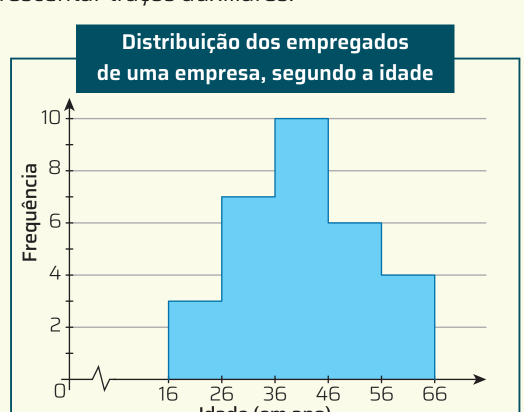
2º passo: Traçamos os retângulos justapostos de modo que a medida da base de cada um corresponda à amplitude das classes. As medidas das alturas de cada retângulo correspondem às frequências das respectivas classes.



3º passo: Os traços no interior do histograma podem ser apagados.



4º passo: Para finalizar, colocamos o título e a fonte do gráfico e, para facilitar a leitura, podemos acrescentar traços auxiliares.



Dados fornecidos pela empresa.

Note que a principal diferença entre um histograma e um gráfico de barras é que, neste último, cada retângulo, ou barra, representa apenas um valor, enquanto no histograma cada barra representa um intervalo de valores.

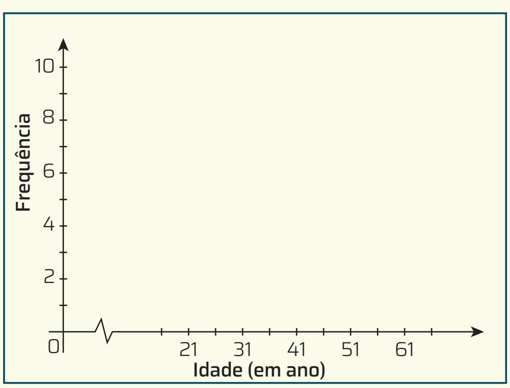
R10 **Construa um polígono de frequências para representar a distribuição dada pela tabela da atividade R9.**

Resolução

1º passo: Calculamos os pontos médios das classes.

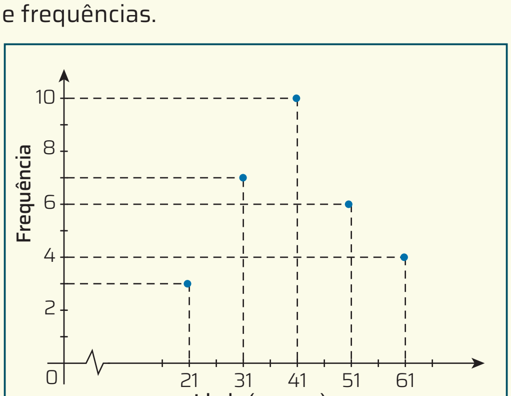
Idade (em ano)	Ponto médio
16 ⊢ 26	21
26 ⊢ 36	31
36 ⊢ 46	41
46 ⊢ 56	51
56 ⊢ 66	61

2º passo: Traçamos o sistema de eixos cartesianos e marcamos os pontos médios dos intervalos de classe no eixo das abscissas e as frequências no eixo das ordenadas.



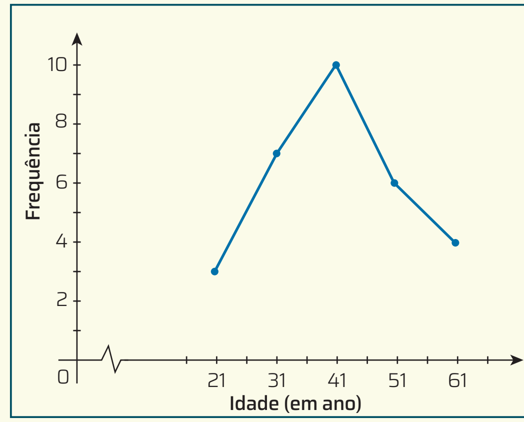
ID/BR

3º passo: No cruzamento entre as retas verticais (tracejadas) que passam pelos pontos médios no eixo das abscissas e as retas horizontais (tracejadas) que passam pelas frequências de classe no eixo das ordenadas, marcamos os pontos do polígono de frequências.



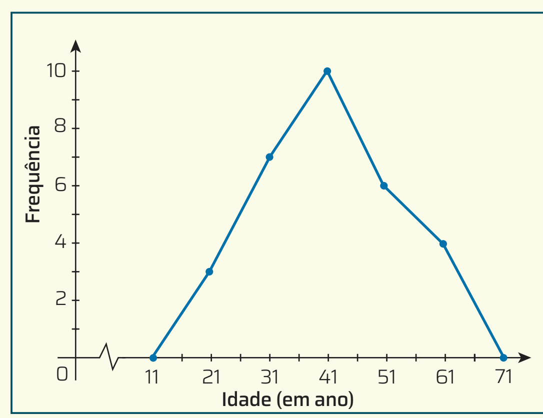
ID/BR

4º passo: Unimos os pontos marcados com segmentos de reta.



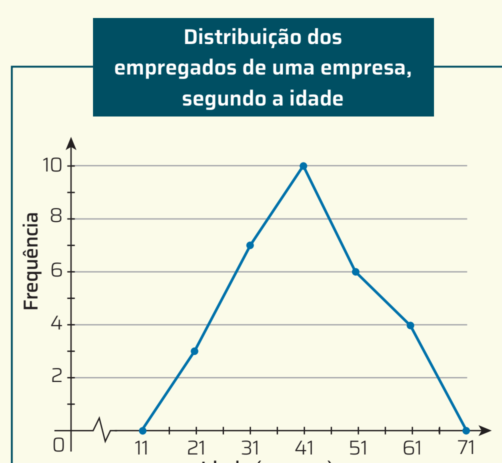
ID/BR

5º passo: Unimos o conjunto de pontos e segmentos de retas traçados ao eixo das abscissas. Para isso, consideramos dois pontos de ordenada zero cujas abscissas sejam o valor médio de um intervalo imediatamente inferior ao primeiro intervalo e o valor médio de um intervalo imediatamente superior ao último intervalo.



ID/BR

6º passo: Colocamos o título e a fonte do gráfico e, se quisermos, acrescentamos traços auxiliares.



ID/BR

Dados fornecidos pela empresa.

Média, moda e mediana de dados agrupados em classes

Para calcular a média, a moda e a mediana de dados agrupados em classes, o processo é o mesmo que você aprendeu anteriormente, mas considerando agora o valor médio de cada classe como representante de todos os valores agrupados em cada intervalo.

Observe o exemplo a seguir.

Um nutricionista registrou as massas de cem indivíduos do sexo masculino nesta tabela:

Massa de indivíduos (em kg)								
Massa (kg)	55 ⊢ 60	60 ⊢ 65	65 ⊢ 70	70 ⊢ 75	75 ⊢ 80	80 ⊢ 85	85 ⊢ 90	90 ⊢ 95
f	5	12	19	25	20	10	7	2

Dados obtidos pelo nutricionista.

Para calcular a média aritmética, devemos somar todos os produtos dos pontos médios das classes por suas respectivas frequências absolutas e dividir o resultado pela soma das frequências.

$$\overline{X} = \frac{57{,}5 \cdot 5 + 62{,}5 \cdot 12 + 67{,}5 \cdot 19 + 72{,}5 \cdot 25 + 77{,}5 \cdot 20 + 82{,}5 \cdot 10 + 87{,}5 \cdot 7 + 92{,}5 \cdot 2}{100}$$

$$\overline{X} = 73{,}05 \simeq 73$$

Assim, a média aritmética desse conjunto de dados é aproximadamente 73 kg.

Para encontrar a moda desse conjunto de dados, procuramos a classe com a maior frequência absoluta. Ela será a classe modal. Nesse caso, a classe modal é 70 ⊢ 75.

Em seguida, encontramos o ponto médio da classe modal: $\frac{70 + 75}{2} = 72{,}5$.

Portanto, 72,5 kg é a moda procurada.

Já a mediana dos cem valores é a média das massas nas posições 50 e 51, dos dados em ordem crescente. Isso acontece na classe 70 ⊢ 75, cujo ponto médio é 72,5 kg; daí a mediana das massas desses indivíduos ser 72,5 kg.

Isso significa que podemos estimar que há cinquenta indivíduos com massa inferior ou igual a 72,5 kg e outros cinquenta indivíduos com massa superior ou igual a 72,5 kg.

As atividades **36** a **40** contribuem para que os estudantes desenvolvam a habilidade **EM13MAT316**, ao propor que elaborem e resolvam problemas que requerem o cálculo e a interpretação de média, de moda e de mediana.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

36 **Uma organização de consumidores pesquisou o preço de um mesmo aparelho eletrodoméstico em 35 pontos de venda. Os resultados obtidos, em real, foram estes.**

234	355	238	345	248	274	328
280	225	299	254	350	280	280
300	332	345	285	296	252	315
275	285	299	285	283	324	310
300	294	285	349	320	300	285

a) Qual é a diferença entre o maior e o menor preço? R$ 130,00

b) A diferença encontrada representa qual porcentagem em relação ao menor preço? 58%

c) Organize os dados em classes de duas maneiras diferentes. Resposta pessoal.

d) Calcule as frequências relativa, absoluta acumulada e relativa acumulada das classes nos dois casos.
As respostas dos itens d e e dependem das classes que foram organizadas.

e) Construa um histograma para representar as distribuições de frequências em cada caso do item **c**.

f) Compare os dois histogramas construídos no item **e** e aponte as semelhanças e as diferenças entre eles. Resposta pessoal.

37 **As medidas das alturas dos quarenta estudantes de uma turma estão indicadas no quadro a seguir.**

Altura (cm)	Ponto médio	f	fr (%)
146 ⊢ 150	148	4	10
150 ⊢ 154	152	7	17,5
154 ⊢ 158	156	10	25
158 ⊢ 162	160	5	12,5
162 ⊢ 166	164	8	20
166 ⊢ 170	168	6	15

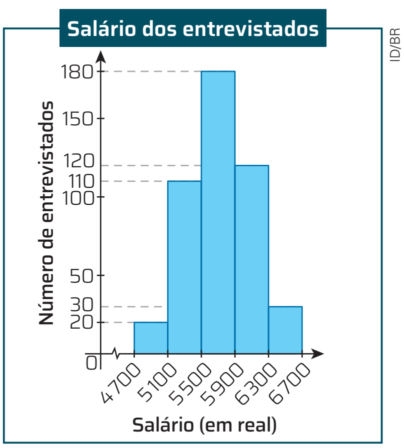
a) No caderno, copie e complete o quadro com os dados que faltam.

b) Construa o polígono de frequência para representar esses dados.

c) Quantos estudantes têm altura até 1,62 m? E até 1,70 m? 26; 40.

d) Calcule a média, a moda e a mediana das alturas dos quarenta estudantes. $\overline{X} = 158{,}4$ cm; Mo = 156 cm; Md = 156 cm.

38 **Para representar os resultados de uma pesquisa estatística sobre os salários mensais de um grupo de pessoas, foi elaborado o histograma a seguir.**



Dados obtidos na pesquisa.

a) Construa uma tabela de frequências absolutas. Consulte a resposta no Manual do Professor.

b) Quantos entrevistados recebem menos de R$ 5 500,00? Aproximadamente 130 entrevistados.

c) Calcule a média, a moda e a mediana dos salários desse grupo de pessoas. $\overline{X} \simeq$ R$ 5 726,00; Mo = R$ 5 700,00; Md = R$ 5 700,00.

39 **O quadro a seguir mostra o montante de pagamentos efetuados em um banco durante um dia.**

Montante em real	f
500 ⊢ 1 000	28
1 000 ⊢ 1 500	12
1 500 ⊢ 2 000	32
2 000 ⊢ 2 500	50
2 500 ⊢ 3 000	38
3 000 ⊢ 3 500	32
3 500 ⊢ 4 000	7

a) Construa um polígono de frequências para representar esses dados.

b) Calcule as frequências absolutas acumuladas e as frequências relativas acumuladas. Consulte a resposta no Manual do Professor.

c) Quantos foram os pagamentos inferiores a R$ 2 000,00? 72 pagamentos.

d) Qual é a porcentagem aproximada de pagamentos inferiores a R$ 3 500,00? 96,48%

40 **Faça uma pesquisa sobre as alturas ou as idades dos colegas e elabore uma atividade como a anterior.** Resposta pessoal.

CÁLCULO RÁPIDO

Vamos relembrar um pouco as porcentagens, que são muito úteis no dia a dia.

1 **Sabendo que 5% de 120 é 6, calcule mentalmente:**

a) 15% de 120; 18
b) 20% de 120; 24
c) 35% de 120; 42
d) 50% de 120; 60
e) 75% de 120; 90
f) 80% de 120. 96

2 **Com auxílio de uma calculadora, determine 0,02%, 0,2%, 2%, 20% e 200% de 70 e de 150.**
0,014; 0,14; 1,4; 14; 140 e 0,03; 0,3; 3; 30; 300.

3 **Utilize os resultados da atividade 2 e calcule mentalmente as porcentagens a seguir.**

a) 2,2% de 150 3,3
b) 2,2% de 70 1,54
c) 220% de 150 330
d) 22,2% de 300 66,6
e) 22,2% de 150 33,3
f) 220% de 70 154

PARA RECORDAR

1 Em um colégio com 3 800 estudantes, 35% deles acessam a internet pelo computador e 55%, pelo *smartphone*. Sabendo-se que 25% dos estudantes não têm nenhum dos dois dispositivos, quantos estudantes acessam a internet pelo computador e pelo *smartphone*?
570 estudantes.

2 Em uma cidade, no início do ano passado, 90% da população economicamente ativa estava empregada. Ao fim do primeiro semestre do ano, 30% dos empregados deixaram seus empregos e 10% dos desempregados conseguiram emprego. Durante o segundo semestre do ano, 20% dos trabalhadores foram demitidos, enquanto 50% dos desempregados foram admitidos. Ao fim do ano, qual era o percentual aproximado de desempregados dessa cidade?
Aproximadamente 31%.

3 Responda às questões.

a) Escolha um número natural compreendido entre 1 e 5. É possível indicar um número natural entre o número que você escolheu e 5? Resposta pessoal.

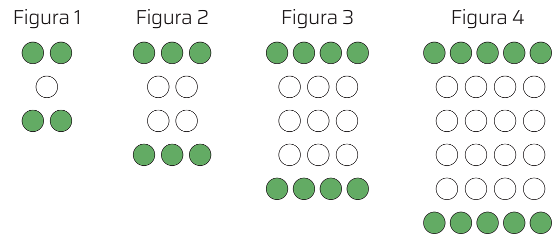
b) Será sempre possível encontrar um número natural entre dois números naturais diferentes? Não.

c) Escolha um número inteiro compreendido entre −2 e 3. É possível indicar um número inteiro entre o número que você escolheu e 3? Resposta pessoal.

d) Será sempre possível encontrar um número inteiro entre dois números inteiros diferentes? Não.

4 Indique a alternativa correta no caderno.

(Famerp-SP) Observe o padrão da sequência de figuras.



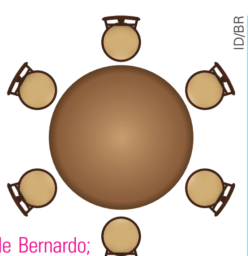
Famerp. Fac-símile: ID/BR

Mantido o padrão, a figura que terá a quantidade de bolas brancas superando a de bolas verdes em 286 será a de número Alternativa **b**.

a) 13. b) 18. c) 14. d) 16. e) 21.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

1 Durante o jantar, Ana sentou-se imediatamente à esquerda de Bernardo. Camila não ficou ao lado de Daniel nem imediatamente à direita de Estela. Em compensação, ficou de frente para Fernando. Qual era a posição de cada um ao redor da mesa? Daniel sentou-se na frente de Bernardo; Estela sentou-se na frente de Ana; Camila sentou-se na frente de Fernando.



ID/BR

2 Registre no caderno a alternativa correta.

(Fatec) As brincadeiras passam de uma geração a outra, resgatando traços da cultura e da história de um povo. No Brasil, um exemplo seriam as brincadeiras de roda.

Se, em uma brincadeira de roda, Letícia é a sexta à esquerda de Gustavo e a sétima à direita de Gustavo, assinale a alternativa que apresenta exatamente o número total de crianças nessa brincadeira de roda.
Alternativa **c**.

a) 11 c) 13 e) 15
b) 12 d) 14

3 João iniciou uma corrente enviando pela internet uma mensagem para dez pessoas, que, por sua vez, enviaram, cada uma, a mesma mensagem a outras dez pessoas. E estas finalizaram a corrente enviando a mesma mensagem a outras dez pessoas. Quantas pessoas, no máximo, receberam a mensagem de João? 1 110 pessoas.

PALAVRAS-CHAVE

Para estudar e aprender mais, retome os conteúdos apresentados neste capítulo e releia suas anotações. Feito isso, elabore um resumo das ideias centrais abordadas.

As principais palavras e expressões indicadas nessa síntese serão:

- amostra;
- frequência absoluta e frequência relativa;
- média, moda e mediana;
- agrupamento em classes;
- histograma e polígono de frequências.

Escreva sobre elas no caderno, explicando com suas palavras o que cada uma significa. Ilustre sua explicação com desenhos e exemplos.

Aproveite a oportunidade para tirar as dúvidas que você ainda tiver. Para isso, releia o capítulo ou consulte o professor.

MATEMÁTICA E SAÚDE

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **4**, **8**, **9** e **10** da BNCC, pois valoriza e utiliza os conhecimentos historicamente construídos e recorre à abordagem própria das ciências, utiliza diferentes linguagens para se expressar e partilhar informações que levem ao entendimento mútuo, permite que os estudantes cuidem da própria saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, exercita a empatia e a cooperação, promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, agindo pessoal e coletivamente. Além disso, possibilita uma integração com as áreas de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Ciências da Natureza e suas Tecnologias, bem como com os temas contemporâneos transversais Saúde, Cidadania e Civismo e Meio Ambiente. Você pode conversar com os professores de História, Geografia e Biologia para explorar a competência específica **1** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e a competência específica **2** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Esta seção contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT102**, pois permite que os estudantes representem dados estatísticos em gráficos.

- Ao trabalhar esta seção, trate o tema nela abordado com respeito e sensibilidade, observando a reação dos estudantes. Por ser um acontecimento que impactou a vida de todos, é possível que as discussões tragam à tona memórias dolorosas para alguns deles. Incentive o respeito e a empatia durante as conversas. Durante a leitura do primeiro texto, auxilie os estudantes a identificar os dados para que realizem a atividade. Espera-se que eles concluam que o gráfico de barras é o mais adequado para essa representação e que houve um aumento significativo no número de reclamações contra os planos de saúde do Brasil.
- Auxilie os estudantes na leitura do segundo texto. Por ser um texto técnico-científico, eles podem ter dificuldade em entendê-lo. Contudo, enfatize a importância de entrarem em contato com diferentes gêneros textuais. A leitura de trechos do boletim epidemiológico da covid-19 possibilitam aos estudantes observar, mais uma vez, a matemática aplicada de maneira prática, além de promover a alfabetização científica e desenvolver o interesse da turma pelo saber científico. As respostas dos estudantes ao penúltimo item apresentam evidências da competência socioemocional autogestão.
- Se julgar pertinente, liste algumas pandemias que podem ser pesquisadas pelos estudantes, como gripe espanhola, H1N1 e peste bubônica. Espera-se que eles compreendam, durante a realização da pesquisa, que os impactos são muito diferentes dependendo do contexto histórico em que ocorreu a pandemia. Os avanços técnico-científicos permitiram o desenvolvimento de tratamentos e uma resposta muito mais rápida e eficiente às pandemias.


Davi Augusto/ID/BR

O acesso à saúde em tempos de crise

Você se lembra da pandemia de covid-19? Um dos inúmeros desafios que essa pandemia trouxe foi a intensa pressão sobre os sistemas de saúde, tanto públicos quanto privados, devido à grande quantidade de pessoas que necessitavam de atendimento. Você, ou alguém que você conhece, precisou de serviços médicos nesse período? Se sim, houve dificuldade para receber atendimento? As reclamações contra os planos de saúde aumentaram muito após a pandemia. Leia o trecho a seguir.

Queixas contra planos de saúde que negam cobertura crescem 374% em 10 anos

As reclamações de pacientes contra planos de saúde que negaram alguma cobertura aumentaram 374% nos últimos dez anos, revelam dados da ANS (Agência Nacional de Saúde) [...].

- **Reclamações dispararam de 2014 para 2023.** Passaram de 61,5 mil para 292 mil queixas em apenas uma década.
- **Até 2018, as objeções às negativas de cobertura somavam entre 60 mil e 70 mil por ano.** A partir de 2019 – um ano antes da pandemia –, esse número saltou para 91 mil, e seguiu crescendo ano a ano, chegando ao recorde de 2023.
- **Em comparação com 2022, as queixas aumentaram 54%: passaram de 189 mil para 291 mil.**

[...]

- **Essas queixas continuam crescendo em 2024.** Foram 104 mil reclamações por esse motivo apenas de janeiro a abril deste ano, contra 77 mil nos quatro primeiros meses do ano passado [2023] – alta de 35%.

[...]

Preite Sobrinho, Wanderley. Queixas contra planos de saúde que negam cobertura crescem 374% em 10 anos. *UOL Notícias*, 2 jun. 2024. Disponível em: https://noticias.uol.com.br/saude/ultimas-noticias/redacao/2024/06/02/planos-de-saude-convenios-operadoras-negativa-de-cobertura-ans.htm. Acesso em: 20 ago. 2024.

Você imaginou a dificuldade de contabilizar casos de uma nova doença em um país tão grande quanto o Brasil? Outro desafio da pandemia de covid-19 foi justamente a sistematização de dados e a divulgação de informações. Para centralizar os números relacionados à doença, a partir do primeiro semestre de 2020, o Ministério da Saúde passou a divulgar boletins epidemiológicos com vários dados estatísticos sobre a covid-19. Leia o trecho a seguir.

INDICADORES EPIDEMIOLÓGICOS

Para a análise dos dados foi utilizada a estatística descritiva com base em medidas de frequências relativa e absoluta, bem como o cálculo de indicadores epidemiológicos [...] sendo:

- taxa de incidência: número de novos casos notificados de covid-19 pelas Secretarias Estaduais de Saúde (SES) sobre a população residente multiplicado por 100 mil;
- taxa bruta de mortalidade: número de óbitos notificados de covid-19 pelas Secretarias Estaduais de Saúde (SES) sobre a população residente multiplicado por 100 mil;
- taxa de letalidade: número de óbitos por covid-19 sobre o número de doentes notificados de covid-19 pelas Secretarias Estaduais de Saúde (SES) multiplicado por 100;

[...]

ANÁLISES ESTATÍSTICAS

- **Taxa de transmissão (Rt):** número de reprodução efetivo da doença utilizado para entender como a doença está se propagando em uma população. Representa o número médio de pessoas para as quais uma pessoa infectada provavelmente transmitirá a doença no momento da análise t (período).

[...]

A média do período de infecção foi de 3,8 dias, e o desvio-padrão foi de 1,2 dias para o ano de 2023.

[...]

Em relação ao coeficiente de variação apresentado entre os meses analisados, utiliza-se para o cálculo a seguinte fórmula:

$$\text{Variação percentual} = \left(\frac{Vf}{Vi} - 1\right) \times 100$$

onde:

Vf = valor do mês atual

Vi = valor do mês anterior

[...]

[...] Em relação às métricas, a análise mostra uma redução de 65,7% dos casos novos de covid-19 reportados no mês de abril no País em comparação com março de 2024, e uma queda dos óbitos reportados em 30,9%. A redução também foi observada no número de hospitalizações por **Srag** (67,5%). [...]

[...]

Os indicadores básicos utilizados na vigilância da covid-19 pelos três entes federados são as taxas de incidência, mortalidade e letalidade [...]. Em março de 2024[,] observou-se uma redução da taxa de incidência em relação a fevereiro de 2024 de 30,5%, e um aumento da taxa de letalidade em 50%. A taxa de mortalidade não sofreu variação entre os dois meses [março e abril de 2024] analisados.

[...]

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde e Ambiente. *Boletim Epidemiológico*, Brasília, DF, n. 162, p. 7-10, abr. 2024. Boletim Epidemiológico Especial: covid-19. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/boletins/epidemiologicos/covid-19/2024/boletim-epidemiologico-no-162-coe.pdf/view. Acesso em: 20 ago. 2024.

Davi Augusto/ID/BR

Srag: síndrome respiratória aguda grave decorrente da covid-19.

Conectando ideias

1 **De acordo com os dados apresentados no primeiro texto, faça o que se pede.**

a) Escolha o melhor gráfico para representar os dados das reclamações: gráfico de colunas ou gráfico de setores. Justifique sua escolha. Em seguida, construa o gráfico escolhido. Resposta pessoal.

b) O que você pode concluir com base nesses dados e nessas representações? Resposta pessoal.

2 **Você já entendeu o impacto que a pandemia de covid-19 representou para o sistema de saúde e como a matemática contribuiu para a compilação de dados sobre essa doença. Agora, é sua vez de montar um boletim epidemiológico mais atualizado sobre a covid-19!** Respostas pessoais.

Como criar um conjunto de dados estatísticos sobre a covid-19?

- Em grupo, pesquisem o número de casos de covid-19 em seu lugar de vivência. Pode ser no município ou na unidade da federação onde moram. Escolham um período de dois meses para comparação. Cada grupo da turma deverá escolher um período diferente.
- A partir da leitura do segundo texto, o grupo deverá calcular: taxa de incidência, taxa bruta de mortalidade e taxa de letalidade. Em seguida, deve calcular o coeficiente de variação entre os meses analisados.
- Elaborem um boletim epidemiológico para entregar ao professor com os dados calculados e apresentem suas conclusões: Os casos estão crescendo, diminuindo ou permanecem estáveis?

! Como estão os registros de vocês para os itens propostos? Estão organizados de modo que todos possam consultá-los quando necessário?

- Compartilhem os resultados coletivamente e organizem uma linha do tempo com os boletins de todos os grupos. Com todos reunidos analisem o panorama apresentado e discutam coletivamente: Por que é importante ter dados atualizados e sistematizados para o controle e manejo de uma doença? Ao final, criem uma campanha de conscientização alertando como as doenças infecto--contagiosas são disseminadas e como preveni-las.

Este capítulo está voltado às competências gerais da BNCC, no sentido de estabelecer elos significativos entre a Matemática desenvolvida até aqui e a formação integral do jovem. A competência geral **10** é o foco na medida em que os estudantes têm oportunidade de tomar decisões com base em princípios éticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA E PROJETO DE VIDA

O tema deste capítulo e a abordagem escolhida naturalmente incentivam a interdisciplinaridade com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

NESTE CAPÍTULO

- Sustentabilidade: consumismo e consumerismo
- Endividamento no Brasil
- Organização financeira
- Mundo do trabalho e projeto de vida

Este capítulo apresenta uma proposta diferente da dos demais e foi pensado para que você possa aplicar conhecimentos matemáticos tratados anteriormente para refletir sobre sustentabilidade, hábitos de consumo e organização das finanças pessoais. Além disso, propõe uma reflexão acerca do mundo do trabalho e de seu futuro.

Para orientar seus estudos neste capítulo, tenha em mente a seguinte reflexão: Como construir um projeto de vida que, além de ser importante para você, impacte positivamente a sociedade e o mundo?

PUBLICIDADE NAS REDES SOCIAIS

Proponha uma leitura coletiva dos textos de abertura e do texto “Os algoritmos nas redes sociais”. Ao final, organize uma conversa em grupo; incentive os estudantes a compartilhar suas ideias e opiniões, como jovens que vivem expostos à publicidade e ao *marketing* digital.

Já aconteceu com você de acessar alguma de suas redes sociais, ou entrar em algum *site*, e deparar com anúncios de produtos que, por “coincidência”, você estava mesmo pensando em adquirir? Como acha que isso ocorre?

Essas propagandas não surgem milagrosamente. Os algoritmos das redes sociais e dos *sites* de busca são aprimorados constantemente e hoje já conseguem compreender e avaliar nossos gostos e hábitos de consumo com facilidade. Com esses dados em mãos, a publicidade e o *marketing* digital nos enchem de anúncios dos produtos de nosso interesse. Mas será que tanta exposição a esse tipo de publicidade nos ajuda ou nos atrapalha?

A sociedade de consumo produz carências e desejos (materiais e simbólicos) incessantemente. Nesse ambiente, os indivíduos e as identidades passam a ser reconhecidos, avaliados e até mesmo julgados por aquilo que consomem, isto é, pelo que vestem, pelos lugares que frequentam, pelo *smartphone* que utilizam, enfim, o próprio indivíduo passa a se ver e autoavaliar pelo que tem e pelo que consome.

Os algoritmos das redes sociais

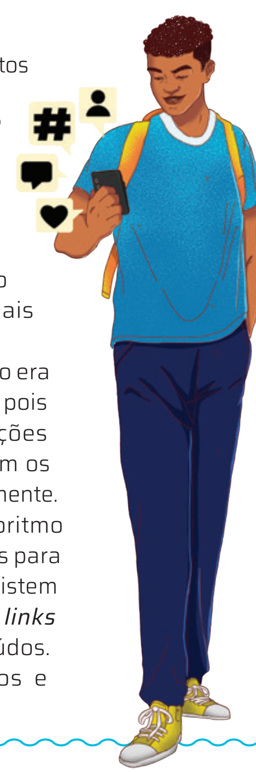
Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permitem resolver um problema.

E o que seriam os algoritmos das redes sociais? São as regras aplicadas para selecionar os conteúdos considerados mais relevantes para cada usuário.

Quando as redes sociais surgiram, esses algoritmos nem existiam. Os *posts* apareciam na linha do tempo dos usuários, de maneira cronológica: dependendo da rede, o usuário via primeiro as postagens mais recentes ou as mais antigas.

Com o passar do tempo, percebeu-se que essa não era uma maneira eficiente de apresentar os conteúdos, pois os usuários deixavam de ver muitas informações relevantes para eles. Diante desse cenário, surgiram os algoritmos das redes sociais como conhecemos atualmente.

Cada rede social ou *site* de busca tem um algoritmo próprio, que leva em consideração diferentes fatores para determinar quais conteúdos exibir para o usuário. Existem algoritmos, por exemplo, que consideram os *links* acessados no passado para sugerir novos conteúdos. Entre esses conteúdos estão também anúncios e propagandas.



@mickart_/ID/BR

Não escreva no livro.

O estudo realizado neste tópico contribui para o desenvolvimento da competência geral **1**, pois introduz conhecimentos acerca do mundo para explicar a realidade e colaborar para a criação de uma sociedade melhor.

SUSTENTABILIDADE: ENTRE O CONSUMISMO E O CONSUMERISMO

É provável que você já tenha se deparado com termos como "sustentabilidade" e "consumismo". Mas você conhece a palavra "consumerismo"?

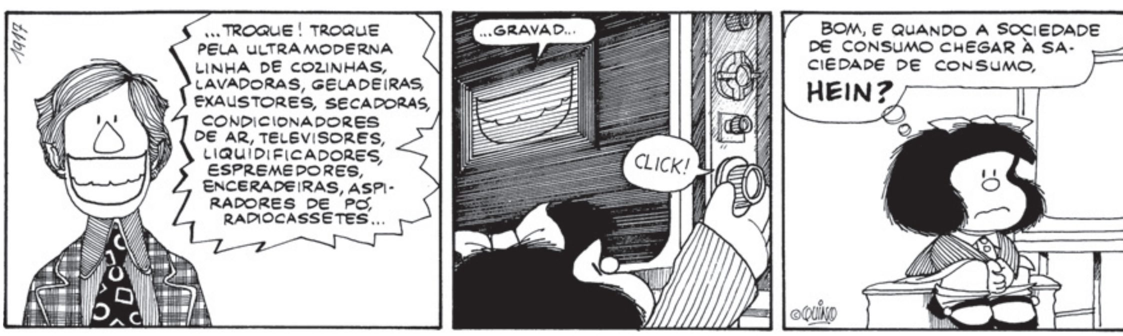
Vamos estudar esses três termos e compreender a relação entre eles.

Consumismo

Entender o que se quer dizer por "sociedade de consumo" auxilia na compreensão de muitas mudanças que vêm ocorrendo nas sociedades contemporâneas. Essa expressão refere-se, sobretudo, à importância que o consumo tem ganhado na formação e no fortalecimento da nossa identidade e na construção das relações sociais.

O consumismo é a ação de consumir de maneira exagerada e desnecessária, sendo motivado, na maioria das vezes, pelo impulso ou pelo desejo de comprar. Assim, a sociedade de consumo é marcada pela abundância de bens de consumo, e a aquisição desses bens é vista como um símbolo de sucesso.

Frequentemente, a felicidade, a qualidade de vida e os projetos pessoais têm sido associados e reduzidos às conquistas materiais. As pessoas trabalham cada vez mais para manter e ostentar um estilo de vida e um nível de consumo, reduzindo o tempo dedicado às relações sociais e ao lazer. Aliás, as próprias atividades que seriam consideradas "tempo livre" e o bem-estar que elas proporcionam acabam sendo convertidas em mercadorias que alimentam esse ciclo de consumo.



QUINO. *Toda Mafalda*. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

Consumismo e cultura juvenil

A sociedade de consumo inclui pessoas de todas as idades. As propagandas e os produtos são pensados para atingir desde crianças até idosos. Você tem ideia de como isso afeta seu dia a dia e suas relações sociais? Para refletir sobre esse tema, leia o texto a seguir.

Cultura juvenil

Os jovens se expressam culturalmente de diversas formas como consumidores dos bens culturais, bem como criadores das suas próprias expressões com o intuito de mostrar à sociedade e ao mundo a importância dos seus valores e da sua cultura no processo de transformação da realidade vigente.

A juventude constrói todos os dias a sua história no presente com os olhos no futuro, tendo em vista que o passado faz parte de uma história oficial, mas que muitas vezes não corresponde à realidade vivida nos dias atuais.

A herança do passado tem sido, muitas vezes, o principal obstáculo para o surgimento de novas formas de expressão e convívio social típicos dos jovens.

Entre os confrontos do "antigo" e do "novo" os jovens fazem suas escolhas. Estas escolhas, muitas vezes, se dão a partir do contato com as diferentes ideologias, que às vezes são influenciadas pela mídia e os seus apelos de consumo.

A cultura juvenil se expressa por meio da música, do cinema, do teatro e das artes em geral e encontra um grande desfio porque a indústria da cultura tenta transformar estas expressões contestatórias em produtos prontos para o consumo.

[...]

CULTURA juvenil. *Infojovem*, [*s. l.*], [2008]. Disponível em: https://www.infojovem.org.br/infopedia/descubra-e-aprenda/tempo-livre/cultura-juvenil/. Acesso em: 26 jun. 2024.

PARA EXPLORAR

Vídeo

***Unravel*. Direção: Meghna Gupta. Índia, 2012 (13 min 35 s).**

Para algumas sociedades, é difícil compreender a cultura do desperdício. Todos os anos, toneladas de roupas descartadas no Ocidente são levadas até a Índia para serem recicladas. O documentário *Unravel* (termo que significa "desenrolar", em tradução livre) mostra um pouco da história de mulheres que trabalham reciclando roupas, além de nos fazer refletir sobre a indústria da moda.

A moda é um dos temas relacionados à cultura juvenil. Você conhece a expressão *fast fashion*?

O *fast fashion* é um modelo de negócios da indústria da moda no qual os produtos são fabricados, consumidos e descartados rapidamente. Nesse modelo, as empresas produzem itens em larga escala para serem distribuídos e comercializados para o mundo todo.

Além disso, como produtos novos são fabricados a todo instante, é comum as "sobras" (produtos não vendidos) também serem destinadas ao descarte. Assim, o *fast fashion* causa grande impacto ambiental, seja pelo uso intensivo de recursos naturais na produção, seja pelo aumento significativo de resíduos. Observe a quantidade de roupas usadas descartadas no deserto de Atacama em 2021.

O deserto de Atacama, no Chile, é conhecido como "cemitério de roupa usada". Foto de 2021.

Martin Bernetti/AFP

Calcula-se que uma peça de roupa de *fast fashion* seja utilizada, em média, menos de cinco vezes e que, para ser produzida, gere cerca de 400% mais emissões de carbono do que as peças mais duráveis, utilizadas em média cinquenta vezes.

Além do estímulo ao descarte, ao desperdício e ao esbanjamento, no *fast fashion*, muitas das mercadorias são fabricadas por trabalhadores em condições análogas às de escravizados.

Consumismo e resíduos sólidos urbanos

Os resíduos sólidos urbanos (RSU) são o lixo proveniente de residências e dos serviços de limpeza urbana. O consumo exagerado resulta em grandes volumes de RSU. A sociedade atual é constantemente estimulada a consumir o que há de novo, principalmente produtos. Da mesma maneira, descarta-se o modelo ultrapassado, mesmo que ainda esteja em bom estado ou funcionando.

Em 2022, foram geradas no Brasil 81,1 milhões de toneladas de RSU no ano, o que equivale a aproximadamente 224 mil toneladas de RSU por dia, e coletadas 76,1 milhões de toneladas. Analise as tabelas a seguir.

Como atividade complementar, solicite aos estudantes que construam um gráfico de linhas múltiplas para fazer uma análise comparativa da geração de RSU nas regiões do Brasil em 2021 e em 2022. Depois, pergunte a eles se é mais fácil analisar esses dados apresentados em tabela ou em gráfico.

GERAÇÃO DE RSU NO BRASIL E REGIÕES (EM TONELADA POR ANO)
Comparativo 2021 e 2022

Região	2021	2022
Norte	6177019	6173684
Nordeste	20365442	20200385
Centro-Oeste	6184989	6127414
Sudeste	41034420	40641166
Sul	8902343	8668857
Brasil	82664213	81811506

Fonte de pesquisa: Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (Abrelpe). *Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2022*. São Paulo: Abrelpe, 2022. Disponível em: https://www.abrema.org.br/panorama/. Acesso em: 14 out. 2024.

COLETA DE RSU NO BRASIL E REGIÕES (EM TONELADA POR ANO) Comparativo 2021 e 2022		
Região	**2021**	**2022**
Norte	5058979	5110575
Nordeste	16699662	16705718
Centro-Oeste	5844815	5821043
Sudeste	40317887	40072190
Sul	8564054	8408791
Brasil	76485397	76118317

Fonte de pesquisa: Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (Abrelpe). *Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2022*. São Paulo: Abrelpe, 2022. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7960898/mod_resource/content/1/Panorama%20da%20ABRELPE.pdf. Acesso em: 5 jul. 2024.

De acordo com as informações das tabelas, em 2022 o Sudeste foi a região do Brasil que mais gerou resíduos sólidos urbanos do país, sendo também a que mais coletou.

Para realizar o comparativo de geração de RSU por região referente a 2022, podemos explorar os dados das tabelas para relativizar algumas informações. Na última linha da primeira tabela, temos o total de RSU gerados no Brasil e, na última linha da segunda tabela, temos o total coletado. Com essa informação, acompanhe como podemos obter a porcentagem de cobertura de coleta de RSU.

$$\frac{76\,118\,317}{81\,811\,506} \simeq 0{,}9304$$

Portanto, em 2022, o Brasil coletou aproximadamente 93,04% de todo o RSU gerado.

Se considerar necessário, retome com os estudantes o cálculo de porcentagem.

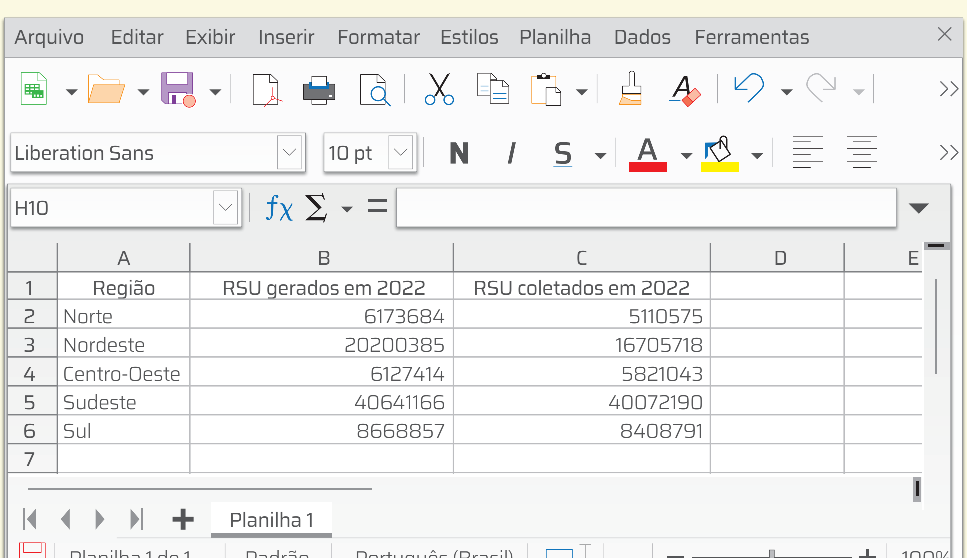
TECNOLOGIA

Nesta seção, damos continuidade ao trabalho com a competência geral **5**, levando os estudantes a utilizar tecnologias digitais de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais para resolver problemas e vivenciar de forma criativa situações semelhantes às do mundo do trabalho.

Para calcular o percentual de RSU gerados foi coletado em 2022, em cada região do Brasil, podemos fazer os cálculos à mão ou contar com o apoio de ferramentas tecnológicas, como calculadora ou planilha eletrônica.

Nesta seção, optamos por utilizar uma planilha eletrônica, pois ela é mais eficiente que a calculadora para essa situação. Acompanhe as etapas.

1ª etapa: Abra a planilha eletrônica Calc e reproduza a tabela com o total de RSU gerados e o total de RSU coletados em cada região do Brasil em 2022.



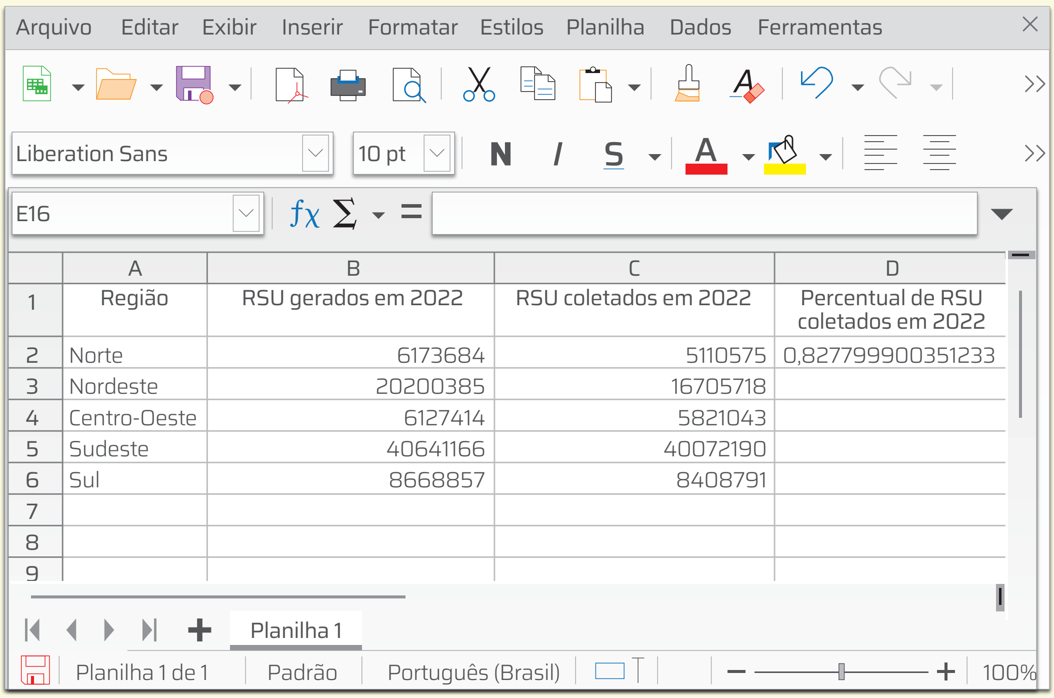
	A	B	C	D	E
1	Região	RSU gerados em 2022	RSU coletados em 2022		
2	Norte	6173684	5110575		
3	Nordeste	20200385	16705718		
4	Centro-Oeste	6127414	5821043		
5	Sudeste	40641166	40072190		
6	Sul	8668857	8408791		
7					

Nelson Matsuda/ID/BR

2ª etapa: Na coluna D, indique o percentual de RSU coletados em cada região do Brasil em 2022. Para isso, é preciso escrever um título na célula D1, por exemplo, “Percentual de RSU coletados em 2022”. Na célula D2, digite:

=C2/B2

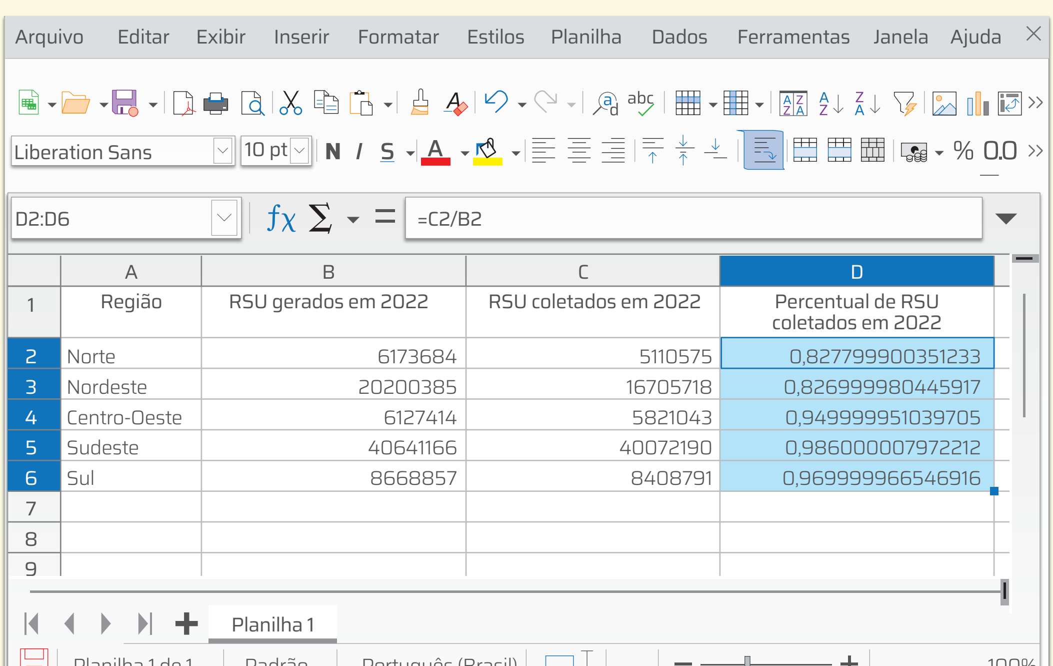
Por fim, aperte a tecla “Enter”. Você obterá uma tela parecida com a mostrada a seguir.



	A	B	C	D
1	Região	RSU gerados em 2022	RSU coletados em 2022	Percentual de RSU coletados em 2022
2	Norte	6173684	5110575	0,827799900351233
3	Nordeste	20200385	16705718	
4	Centro-Oeste	6127414	5821043	
5	Sudeste	40641166	40072190	
6	Sul	8668857	8408791	
7				
8				
9				

Nelson Matsuda/ID/BR

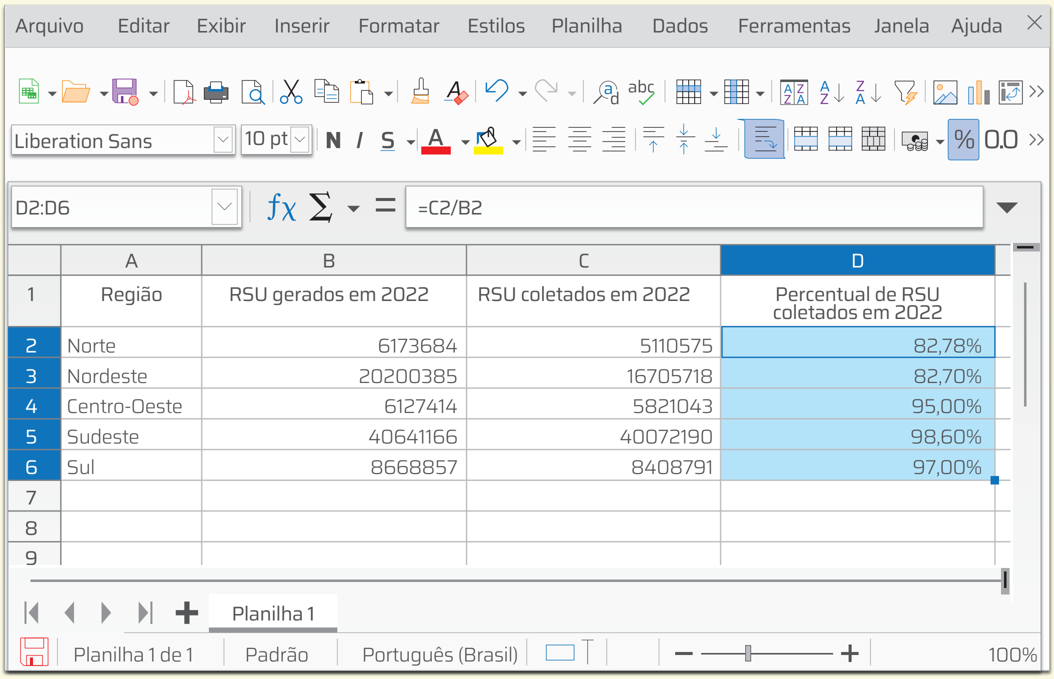
3ª etapa: Clique sobre a célula D2 e, com a opção autopreenchimento, complete os cálculos nas células D3:D6. Você vai obter uma tela parecida com esta:



	A	B	C	D
1	Região	RSU gerados em 2022	RSU coletados em 2022	Percentual de RSU coletados em 2022
2	Norte	6173684	5110575	0,827799900351233
3	Nordeste	20200385	16705718	0,826999980445917
4	Centro-Oeste	6127414	5821043	0,949999951039705
5	Sudeste	40641166	40072190	0,986000007972212
6	Sul	8668857	8408791	0,969999966546916
7				
8				
9				

Nelson Matsuda/ID/BR

4ª etapa: Para converter os valores obtidos na coluna D em porcentagem, selecione as células D2:D6 e clique em "Formatar como porcentagem".



	A	B	C	D
1	Região	RSU gerados em 2022	RSU coletados em 2022	Percentual de RSU coletados em 2022
2	Norte	6173684	5110575	82,78%
3	Nordeste	20200385	16705718	82,70%
4	Centro-Oeste	6127414	5821043	95,00%
5	Sudeste	40641166	40072190	98,60%
6	Sul	8668857	8408791	97,00%
7				
8				
9				

Nelson Matsuda/ID/BR

ATIVIDADES Consulte as respostas às atividades **2**, **3** e **4** no Manual do Professor.

1 **De acordo com as etapas realizadas no exemplo apresentado, responda às questões a seguir.**

a) O que a fórmula digitada na célula D2, na 2ª etapa, indica? Indica o cálculo do percentual de RSU coletados em 2022.

b) Qual das regiões do Brasil coletou o maior percentual de RSU gerados em 2022? Sudeste.

c) E qual das regiões do Brasil coletou o menor percentual de RSU gerados em 2022? Nordeste.

d) Qual percentual de RSU gerados em 2022 foi coletado na região onde você mora? A resposta depende de onde o estudante mora.

2 **Escreva o passo a passo de como você faria para calcular, em uma planilha eletrônica, o percentual coletado de RSU gerados no Brasil em 2022. Depois, faça o que se pede em cada item.**

a) Compare sua resposta com a de um colega. Vocês escreveram os mesmos passos?

b) Com esse colega, escrevam outro passo a passo que represente esse cálculo.

3 **Reproduza o exemplo apresentado na planilha eletrônica Calc e, em seguida, execute o que se pede em cada item a seguir.**

a) Na coluna E, faça uma cópia dos dados da coluna D, mas complemente o título com a indicação "aproximação para porcentagens inteiras".

b) Utilize os botões a seguir, disponíveis na planilha eletrônica, para que, na coluna E, apareçam apenas porcentagens inteiras.

Nelson Matsuda/ID/BR

c) Compare os dados da coluna D com os da coluna E. A planilha fez as aproximações utilizando as regras que você conhece?

4 **Analise a planilha eletrônica com os dados sobre RSU gerados e coletados em cada região do Brasil em 2022, compare e analise as informações dadas. Em seguida, escreva um texto com suas observações e conclusões.**

PARA EXPLORAR

Texto

Brasil. [Constituição de 1988]. *Constituição da República Federativa do Brasil*. Brasília, DF: Presidência da República, [2023]. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 9 ago. 2024.

Entre outros direitos, o artigo 5º da Constituição brasileira, encontrada na íntegra no *link* indicado, trata da defesa dos direitos dos consumidores.

Consumerismo

Na contramão do consumo desenfreado, o consumerismo refere-se à prática de consumo responsável, ético e sustentável. Os consumidores adeptos dessa prática são mais críticos e seletivos em relação às suas escolhas e, consequentemente, estão sempre alertas quanto aos impactos que podem causar no meio ambiente e em sua vida.

Instituto Akatu. Fac-símile: ID/BR

O movimento do consumerismo surgiu como uma reação à situação de desigualdade entre fornecedores e consumidores.

Fornecedor × consumidor

Você sabe a diferença entre fornecedores e consumidores?

Consumidor é a pessoa que compra um produto ou contrata um serviço. Também pode ser entendido como quem utiliza um produto comprado por outra pessoa. Por exemplo, uma criança não tem condições de comprar as próprias roupas, mas é consumidora das roupas que foram compradas por alguém.

Fornecedor é a pessoa ou a empresa que fabrica e/ou que oferece produtos e serviços. Uma observação importante: o funcionário da loja de roupas não é um produtor, porque não é o proprietário. Em contrapartida, a fábrica de roupas e o proprietário da loja são considerados produtores ou fornecedores.

Para entender o que queremos dizer com “situação de desigualdade”, é preciso compreender que os consumidores não são necessariamente indivíduos alienados e que podem ser facilmente manipulados. Nesse sentido, da mesma maneira que o consumismo exagerado pode levar as pessoas a não se importar com o bem comum, o consumerismo pode contribuir para a organização de novas maneiras de articular reivindicações e a conquista de novos direitos.

A prática do consumo acontece porque gera satisfação, que pode ser biológica ou simbólica. Entretanto, também pode ser responsável por trazer decepção e insatisfação.

Que decepção!

Você sabe o que fazer se não estiver satisfeito com um produto ou serviço?

Imagine que você tenha comprado um celular novo e ele não veio funcionando direito. O que fazer? Ou que seus pais ou responsáveis compraram um guarda-roupa novo e as medidas não são exatamente as mesmas que estavam no *site*. Ou, ainda, que a geladeira que era para ter sido entregue em até dez dias úteis ainda não chegou, apesar de já terem se passado dois meses da data prevista?

Primeiro, é preciso tentar contatar diretamente o fornecedor. Se o problema for resolvido e você ficar satisfeito com a solução, ótimo!

Não escreva no livro.

O que você faria se recebesse um produto que não é compatível com a propaganda? Iria se calar e usar o produto ou tentaria conversar com os produtores e pediria devolução do valor pago?

Quando uma pessoa se decepciona ao comprar ou contratar algo, ela pode reagir de diferentes formas. Uma delas é se lamentar e cruzar os braços. Outra é devolver o produto e solicitar reembolso ou troca. No caso de um serviço, pode-se registrar uma reclamação formal e solicitar que seja refeito. Essas reações, porém, são individuais.

Agora, imagine que a pessoa descubra que o serviço ou o produto não é seguro ou, ainda, que é tóxico ou prejudicial ao meio ambiente. Perceba que esses itens ultrapassam o individual e passam a ser de interesse coletivo. Assim, ao expor e compartilhar essas questões, é possível que haja uma mobilização e uma politização. Essa organização, em muitas circunstâncias, faz uma pressão para que regras, leis e políticas sejam revistas ou fiscalizadas.

Você consegue perceber que muitas das questões relacionadas ao consumo se referem tanto à esfera pública como à privada?

Código de Defesa do Consumidor

O consumerismo deu origem ao Direito do Consumidor, que é um campo jurídico que estuda as relações de consumo e atua com o objetivo de ajustar as desigualdades entre consumidores e fornecedores.

A Constituição brasileira de 1988 promove, no artigo 5º, inciso XXXII, a defesa do consumidor. Assim, em 11 de setembro de 1990, foi criado o Código de Defesa do Consumidor (CDC).

Desde que entrou em vigor, em março de 1991, o CDC ajuda a população a se defender de injustiças. Utilizado exclusivamente em situações de consumo, esse documento apresenta as normas que regulam as relações entre consumidores e fornecedores de produtos e serviços, definindo responsabilidades, padrões de conduta, prazos, mecanismos para reparação de danos, etc.

O CDC também estabelece as normas de conduta que devem ser seguidas pelos fornecedores de produtos e serviços de consumo. A intenção é, além de preservar a vida, a saúde, a segurança e a dignidade do consumidor, responsabilizar o fornecedor pelos produtos e serviços que ele oferece à população, exigindo informações sobre esses itens e garantindo a reparação de possíveis danos causados ao consumidor, ao meio ambiente ou à comunidade.

O que é o Procon?

É um órgão do Poder Executivo municipal ou estadual ou do Distrito Federal destinado à proteção e à defesa dos direitos e interesses dos consumidores. É ele que mantém contato mais direto com os cidadãos e suas solicitações. Competem a esse órgão as funções de acompanhamento e fiscalização das relações de consumo ocorridas entre fornecedores e consumidores.

Caso não chegue a um acordo que solucione a questão, registre na ouvidoria da loja ou do fornecedor que o problema não foi resolvido.

Se ainda assim o problema não for solucionado, registrar uma queixa no Procon é uma alternativa que pode ajudar a, enfim, estabelecer um acordo.

O Procon pode, ainda, orientar o consumidor a encaminhar o caso à Justiça; nessa situação, os advogados entram em ação para tentar reparar o prejuízo causado.

Ilustrações: Tael Gomes/ID/BR

PARA EXPLORAR

Documento

São Paulo (Estado). Secretaria de Justiça e Cidadania. Fundação de Proteção e Defesa do Consumidor (Procon-SP). *Código de Proteção e Defesa do Consumidor*. São Paulo: Procon, 2023. Disponível em: https://www.procon.sp.gov.br/wp-content/uploads/2023/01/CDC-jan2023SuperSAC.pdf. Acesso em: 26 jun. 2024.

No *link* indicado, você encontra, na íntegra, o documento que determina as normas para as relações de consumo que visam proteger os direitos dos consumidores.

Cuidados ao contratar um serviço

1. Peça ao prestador de serviço que elabore um orçamento ou um contrato descrevendo o trabalho a ser realizado, os custos, os valores a serem pagos, os prazos e as formas de pagamento, entre outras informações.

2. Sempre que possível, busque recomendações de pessoas que já usaram o serviço. Apesar disso, não deixe de tomar as devidas precauções e registrar tudo por escrito.

Tael Gomes/ID/BR

Não escreva no livro.

Diversos conteúdos deste capítulo possibilitam o desenvolvimento da competência específica **1** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Este tópico, em especial, pode ser trabalhado em parceria com um professor da área mencionada, preferencialmente de Biologia ou de Química.

Pressens Bild/AFP/Getty Images

Vista geral da Conferência das Nações Unidas sobre o Ambiente Humano, em Estocolmo. Foto de 1972.

Sustentabilidade

A preocupação com a preservação do meio ambiente começou séculos atrás, como uma resposta à industrialização. Anos depois, após a Segunda Guerra Mundial (1939-1945), novas preocupações com o meio ambiente surgiram devido à poluição radioativa.

Diversos outros marcos impulsionaram o movimento ambientalista até que, em 1972, a Organização das Nações Unidas (ONU) convocou a Conferência das Nações Unidas sobre o Ambiente Humano, em Estocolmo, na Suécia. Foi nesse encontro que as primeiras ideias relacionadas a desenvolvimento sustentável global começaram a ser debatidas mundialmente.

Em 1983, a ONU indicou a então primeira-ministra da Noruega Gro Harlem Brundtland (1939-) para chefiar uma comissão que deveria aprofundar propostas mundiais na área ambiental. Em 1987, ficou pronto o documento *Nosso futuro comum*, conhecido como relatório Brundtland, em que o termo "desenvolvimento sustentável" foi definido pela primeira vez.

Leia a seguir alguns trechos desse documento.

"O desenvolvimento sustentável é o desenvolvimento que encontra as necessidades atuais sem comprometer a habilidade das futuras gerações de atender suas próprias necessidades."

"Um mundo onde a pobreza e a desigualdade são endêmicas estará sempre propenso às crises ecológicas, entre outras… O desenvolvimento sustentável requer que as sociedades atendam às necessidades humanas tanto pelo aumento do potencial produtivo como pela garantia de oportunidades iguais para todos."

"Muitos de nós vivemos além dos recursos ecológicos, por exemplo, em nossos padrões de consumo de energia… No mínimo, o desenvolvimento sustentável não deve pôr em risco os sistemas naturais que sustentam a vida na Terra: a atmosfera, as águas, os solos e os seres vivos."

"Na sua essência, o desenvolvimento sustentável é um processo de mudança no qual a exploração dos recursos, o direcionamento dos investimentos, a orientação do desenvolvimento tecnológico e a mudança institucional estão em harmonia e reforçam o atual e futuro potencial para satisfazer as aspirações e necessidades humanas."

Comissão Brundtland. *Nosso futuro comum*. *Apud* Nações Unidas Brasil. A ONU e o meio ambiente. Nações Unidas Brasil, Brasília, DF, 16 set. 2020. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/91223-onu-e-o-meio-ambiente. Acesso em: 26 jun. 2024.

Joel Saget/AFP/Getty Images

Gro Harlem Brundtland é uma importante líder internacional em desenvolvimento sustentável e saúde pública. Foto de 2017.

Com o passar dos anos, o termo "sustentabilidade" foi adquirindo outros sentidos e, atualmente, abrange o combate à pobreza e o controle do crescimento populacional global.

Uma maneira efetiva de contribuir para o desenvolvimento sustentável é consumir de maneira crítica, ética e responsável. Isso quer dizer estar de acordo com as propostas consumeristas, diferentemente do que ocorre quando o consumo é feito de modo desenfreado e sem critérios. Consumir de maneira sustentável significa refletir sobre a ação de consumir: questionar-se sobre a real necessidade de aquisição dos produtos e também sobre todos os processos da cadeia de produção, desde a origem até o descarte. O consumidor que reflete antes da compra pode reduzir os impactos negativos na natureza.

Existem diversas atitudes que podem ser tomadas e que vão ao encontro das ideias sustentáveis. Por exemplo, atualmente, já existem diversos aplicativos em que é possível divulgar mercadorias já usadas e que não são mais necessárias para uma pessoa, mas podem ser úteis para outra. Desse modo, peças que ficariam encostadas ou que iriam para o lixo podem ganhar uma nova morada. Existem também feiras de troca de objetos, grupos de escambo virtual e brechós. Outra prática que tem ganhado espaço são as iniciativas de compartilhamento de bens e serviços. Perceba que essas ações contribuem não só para a proteção do meio ambiente, mas para o equilíbrio das finanças pessoais.

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

Durante a cúpula das Nações Unidas sobre o Desenvolvimento Sustentável, em setembro de 2015, estabeleceram-se 17 objetivos a serem alcançados até 2030. Esses objetivos compõem uma agenda que corresponde a um plano de ação para pessoas, para o planeta e para a prosperidade. Além disso, essa agenda busca fortalecer a paz universal.

Verifique a seguir quais são os objetivos previstos.

Nações Unidas no Brasil/ONU

Note que o objetivo de número 12 trata de assegurar padrões de produção e de consumo sustentáveis.

PARA EXPLORAR

Site

NAÇÕES UNIDAS BRASIL. Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil. Nações Unidas Brasil, Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 26 jun. 2024.

Esse *site* apresenta cada um dos objetivos prescritos na Agenda 2030. Vale a pena verificar quais ações você pode realizar a fim de contribuir para que esses objetivos sejam alcançados.

A atividade **1** permite o desenvolvimento das competências gerais **7** e **9**, ao possibilitar o compartilhamento de opiniões elaboradas com argumentos embasados e o diálogo com respeito e valorização de diferentes saberes. Além disso, contribui para a aquisição da competência específica **3** da área de Linguagens e suas Tecnologias e da competência específica **3** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 **Com a orientação do professor, reúna-se com dois colegas para fazer o que se pede em cada item.**

Consulte as respostas no Manual do Professor.

a) Leiam o texto a seguir.

Pegada ecológica é um indicador desenvolvido pelo professor canadense William Rees (1969-) e pelo advogado ambientalista suíço Mathis Wackernagel (1962-), que quantifica o impacto das atividades humanas sobre o meio ambiente. Ela mede a quantidade de recursos naturais necessários para sustentar nosso estilo de vida, como consumo de alimentos, de água, energia, além de lidar com os resíduos e as emissões gerados.

A organização World Wildlife Fund (WWF) – Fundo Mundial da Natureza, em tradução livre – apresenta em seu *site* uma calculadora de pegada ecológica, disponível em https://www.footprintcalculator.org/sponsor/wb/wb_pt (acesso em: 9 ago. 2024). Ao acessá-la, o usuário deve responder a questões relacionadas a diversos aspectos, como moradia, alimentação, bens e transporte. Com base nessas respostas, a ferramenta faz os cálculos e apresenta os resultados relacionados ao impacto de suas ações no meio ambiente ou, em outras palavras, sua pegada ecológica.

Acompanhem a seguir um possível resultado.

Global Footprint Network. Disponível em: https://www.footprintnetwork.org. Acesso em: 5 ago. 2024.

Dados obtidos em: World Wildlife Fund. *Pegada ecológica*. [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://www.footprintcalculator.org/sponsor/wb/wb_pt. Acesso em: 27 jun. 2024.

Na opinião de vocês, a pegada ecológica retratada acima revela hábitos de um indivíduo que age de maneira sustentável? Expliquem como vocês chegaram a essa conclusão.

b) Acessem o *link* indicado no item **a** e calculem, cada um, a própria pegada ecológica.

c) Comparem os resultados individuais obtidos no item **b**. O que vocês perceberam? Todos têm a mesma pegada ecológica? Elas são parecidas?

d) Elaborem um texto para sugerir práticas que sejam compatíveis com um consumo sustentável e, consequentemente, permitam diminuir a pegada ecológica de uma pessoa. Registrem também se essas atitudes podem ter impacto no orçamento pessoal.

e) Com o professor, decidam como compartilhar os textos elaborados com os demais grupos. Esse trabalho pode ser feito virtual ou presencialmente.

ENDIVIDAMENTO

O estudo deste tópico trabalha a competência específica **1** da área de Matemática e suas Tecnologias, ao desenvolver a utilização de conceitos matemáticos para interpretar contextos da vida cotidiana.

Uma das possíveis consequências do consumismo, que nos leva ao exagero e a aquisições desnecessárias, é o desequilíbrio financeiro. No entanto, o consumismo não é o único fator que contribui para o endividamento. A ele se somam outros, como a falta de educação financeira e o desemprego.

O texto a seguir traz uma breve explicação sobre a Pesquisa Nacional de Endividamento e Inadimplência do Consumidor (Peic Nacional), que faz um mapeamento importante para o monitoramento da economia do país.

Economia

A palavra "economia" tem origem no termo grego *oikonomia*, que, por sua vez, vem de *oikos*, que significa "casa, lar, morada, meio ambiente". Assim, *oikonomia* significava "a arte de administrar bem uma casa".

Com o tempo, o sentido dessa palavra foi ampliado e hoje se refere à ciência que trata da produção, da distribuição e do consumo de bens e serviços.

Sobre a Peic

A Pesquisa Nacional de Endividamento e Inadimplência do Consumidor (Peic) é apurada mensalmente pela CNC [Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo] desde janeiro de 2010. Os dados são coletados em todas as capitais dos Estados e no Distrito Federal, com cerca de 18 mil consumidores.

São apurados importantes indicadores de endividamento e inadimplência, que possibilitam traçar um perfil do endividamento, acompanhar o nível de comprometimento do consumidor com dívidas e sua percepção em relação a sua capacidade de pagamento.

Com o aumento da importância do crédito na economia brasileira, sobretudo o crédito ao consumidor, o acompanhamento desses indicadores é fundamental para analisar a capacidade de consumo futura.

Os principais indicadores da Peic são:

- Percentual de famílias endividadas – consumidores que declaram ter dívidas na família nas principais modalidades;

- Principais tipos de dívida – entre cartão de crédito, cheque especial, cheque pré-datado, crédito consignado, crédito pessoal, carnês, financiamento de carro, financiamento de casa e outras dívidas;
- Nível de endividamento – entre muito, mais ou menos ou pouco endividados;
- Tempo de comprometimento com dívidas – até três meses, de três a seis meses, de seis meses a um ano e maior que um ano;
- Percentual de famílias com contas/dívidas em atraso – consumidores com contas ou dívidas atrasadas no mês;
- Percentual que não terá condições de pagar dívidas – percentual dos que afirmam que não terão condições de pagar as contas e/ou dívidas em atraso no próximo mês e, portanto, permanecerão inadimplentes;
- Tempo de atraso no pagamento – até 30 dias, de 30 a 90 dias e mais [...] [de] 90 dias.

Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC). *Pesquisa de endividamento e inadimplência do consumidor*. [*S. l.*]: CNC, maio 2024. Disponível em: https://portal-bucket.azureedge.net/wp-content/2024/06/Relatorio_Peic_maio_2024.pdf. Acesso em: 26 jun. 2024.

Portabilidade

Quando uma pessoa tem um contrato de financiamento ou um empréstimo em uma instituição financeira, ela pode migrar esse contrato para outra instituição que ofereça taxas de juros menores e condições de pagamentos mais favoráveis. Dessa forma, a pessoa pode trocar uma dívida por outra, mais "barata". Na página do *site* do Serasa, disponível em https://www.serasa.com.br/limpa-nome-online/blog/portabilidade-de-divida (acesso em: 28 jun. 2024), é possível encontrar mais informações sobre essa transação.

Antes de continuarmos a falar de endividamento, é preciso explicar um conceito importante: renda. Renda corresponde ao valor que é recebido periodicamente, tanto por pessoas físicas quanto por pessoas jurídicas, como remuneração de trabalho ou por prestação de serviços, aluguel de imóveis ou investimentos, por exemplo.

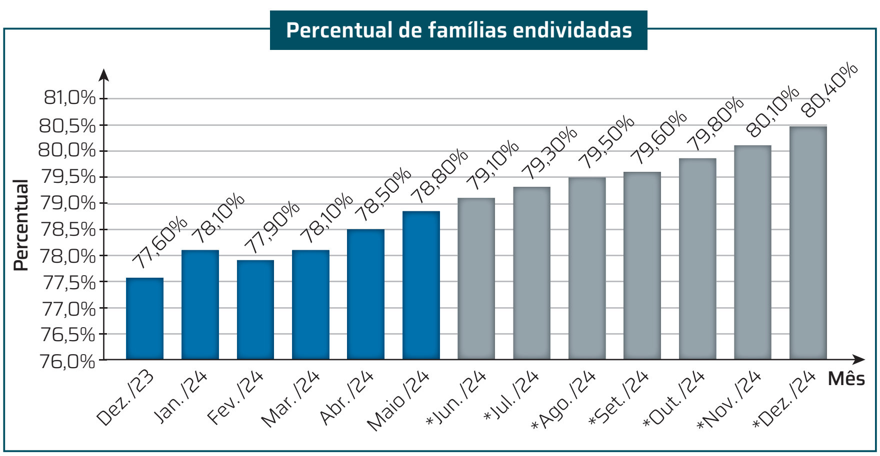
Isso significa que ter uma boa administração da renda pode contribuir para minimizar ou resolver problemas de endividamento.

Agora, analise alguns gráficos sobre endividamento que foram elaborados com os dados coletados na Peic de maio de 2024.

Alguns destaques da pesquisa Peic e os relatórios atualizados encontram-se no *site* da Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC), na página disponível em https://www.portaldocomercio.org.br/publicacoes/categoria/pesquisas/ (acesso em: 28 jun. 2024).

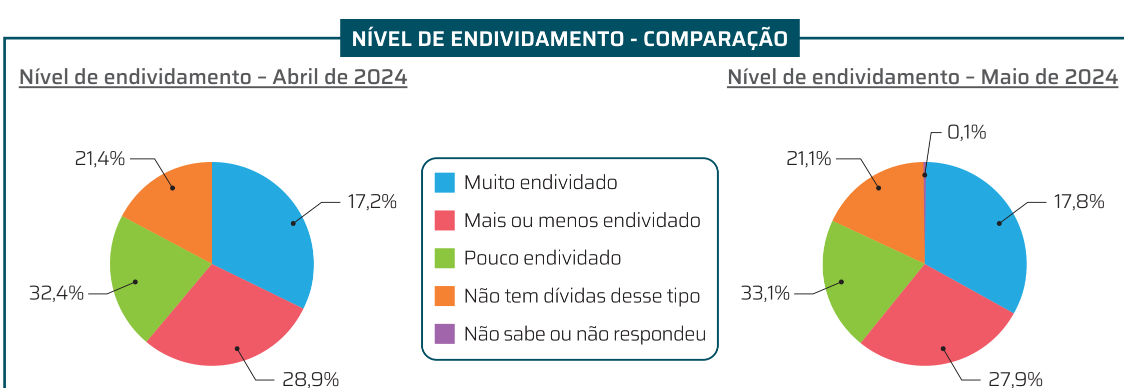
Se julgar pertinente, comente com os estudantes que alguns gráficos de setores não somam 100%, por questões de arredondamento.

Ilustrações: ID/BR



*Projeções.

Fonte de pesquisa: Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC). *Pesquisa de endividamento e inadimplência do consumidor*. [*S. l.*]: CNC, maio 2024. Disponível em: https://portal-bucket.azureedge.net/wp-content/2024/06/Relatorio_Peic_maio_2024.pdf. Acesso em: 28 jun. 2024.



Fonte de pesquisa: Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC). *Pesquisa de endividamento e inadimplência do Consumidor*. [*S. l.*]: CNC, maio 2024. Disponível em: https://portal-bucket.azureedge.net/wp-content/2024/06/Relatorio_Peic_maio_2024.pdf. Acesso em: 28 jun. 2024.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

As atividades deste bloco contribuem para a aquisição das competências gerais **7** e **9**, pois possibilitam o compartilhamento de opiniões elaboradas a partir de argumentos embasados e a promoção de um diálogo respeitoso, com a valorização de diferentes saberes.

Além disso, a atividade **2** permite o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT102**, pois trabalha a interpretação de dados estatísticos e de diferentes representações. As atividades **4**, **5** e **6**, por sua vez, mobilizam as habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT104** ao propor que os estudantes interpretem dados, posicionem-se frente a situações contextualizadas e argumentem com base em fatos expressos por índices de outra área do conhecimento.

Consulte as respostas das atividades **2** a **6** no Manual do Professor.

2 **Com a orientação do professor, reúna-se com dois colegas. A tarefa de vocês será analisar os dois gráficos apresentados anteriormente e refletir sobre eles. Para isso, é importante que vocês levem em consideração os aspectos descritos a seguir.**

- De qual tipo é cada um dos gráficos apresentados?
- Qual é a relação entre o tipo de gráfico e as informações que ele traz?
- O que significam as cores das barras do primeiro gráfico?
- O modo como o último gráfico foi elaborado permite que as informações sejam lidas com facilidade? Expliquem.
- Quais modalidades de dívidas vocês conhecem?
- Na opinião de vocês, quais modalidades de dívidas cobram os juros mais altos? Com base em quais conhecimentos vocês têm essa opinião?
- Vocês acreditam que as porcentagens de endividamento apresentadas sejam relevantes? Por quê?

3 **Ainda em grupo, discutam os fatores que interferem no endividamento das famílias brasileiras. Se for necessário, pesquisem mais sobre o assunto. Depois, elaborem um texto que sintetize as ideias dessa discussão e da pesquisa.**

4 **Agora que vocês têm um panorama do endividamento das famílias brasileiras, vamos aprofundar esse estudo. Primeiro, analisem a tabela a seguir.**

Taxas de juros ao mês e ao ano praticadas pelo maior banco comercial brasileiro no período de 11/6/2024 a 17/6/2024

Tipo de empréstimo \ Taxa de juros	Ao mês	Ao ano
Crédito pessoal consignado público	1,67%	21,97%
Crédito pessoal consignado privado	2,84%	39,91%
Aquisição de veículos	1,92%	25,66%
Cheque especial	8,27%	159,40%
Cartão de crédito	10,04%	215,05%

Fonte de pesquisa: BRASIL. Banco Central do Brasil. *Taxas de juros*. Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/estatisticas/txjuros. Acesso em: 2 jul. 2024.

Com o mesmo grupo das atividades anteriores, construam um gráfico que represente o crescimento do valor de uma dívida de R$ 3 000,00, considerando ao menos dois tipos de empréstimo (por exemplo, cartão de crédito e cheque especial). O gráfico deverá mostrar qual será o valor da dívida após 6 meses e após 12 meses.

5 **Considerando o gráfico elaborado na atividade anterior, façam uma análise comparativa entre as duas modalidades escolhidas e registrem as observações que vocês fizerem.**

6 **Com a orientação do professor, organizem uma roda de conversa para apresentar aos demais colegas o gráfico que vocês fizeram e para compartilhar o que perceberam ao realizar essa atividade.**

Não escreva no livro.

ORGANIZANDO MINHA VIDA FINANCEIRA

Neste tópico, você vai refletir sobre sua vida financeira e estudar como seus hábitos de consumo podem interferir nela. Para isso, você pode contar com o auxílio de diferentes tecnologias: uma delas é a planilha eletrônica. Informe aos estudantes que, além das planilhas eletrônicas, existem diversos *sites* e aplicativos que auxiliam na organização financeira pessoal ou familiar.

TECNOLOGIA

O assunto abordado nesta seção envolve a utilização de planilhas eletrônicas para ajudar na organização familiar, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT203**.

As planilhas eletrônicas têm diferentes funcionalidades, e você já conhece algumas delas. Elas também podem ser utilizadas para você registrar sua renda e suas despesas.

Acompanhe a seguir um exemplo de como uma pessoa organizou uma planilha para controle financeiro familiar utilizando a planilha eletrônica Calc do LibreOffice.

1	**Controle financeiro – fevereiro 2024**				
2					
3	**Despesas**	**Valor (em R$)**		**Receitas**	**Valor (em R$)**
4	Financiamento da casa	1.100,00		Salário mãe	1.800,00
5	Energia elétrica	180,00		Salário vó	2.300,00
6	Água	80,00		Renda – motorista de aplicativo	800,00
7	Gás	100,00		Renda – venda de geleias	350,00
8	Telefone e internet	210,00			
9	Combustível	400,00		**Total**	**5.250,00**
10	IPTU	68,00			
11	IPVA	80,00			
12	Transporte público	150,00			
13	Mercado	900,00			
14	Refeições fora de casa	550,00			
15	Ingressos de cinema e futebol	90,00			
16	Roupas	220,00		**Diferença entre receitas e despesas**	
17	Medicamentos	180,00		−378,00	
18	Presentes	120,00			
19	Pagamento de contas em atraso	1.200,00			
20					
21	**Total**	**5.628,00**			
22					
23					

LibreOffice. Fac-símile: ID/BR

Essa planilha é referente ao mês de fevereiro de 2024. Para os demais meses, é possível copiá-la e ajustar tanto os valores quanto as linhas que indicam as despesas e as receitas.

A vantagem de usar a tecnologia, nesse caso, é que os totais das despesas e das receitas e a diferença entre eles são atualizados automaticamente. Para isso, podemos usar fórmulas predefinidas que a planilha contém. No exemplo acima, foi utilizada a fórmula "SOMA". Nesse caso, na célula B21 digitamos:

=SOMA(B4:B19)

Do mesmo modo, na célula E9 digitamos:

=SOMA(E4:E7)

Note que B4:B19 e E4:E7 indicam o intervalo dos valores que se deseja adicionar. Também é possível digitar "=SOMA(" e, em seguida, clicar sobre o primeiro valor a ser somado e arrastar o cursor até o último valor; assim, a fórmula esperada será preenchida automaticamente.

Já na célula D17 digitamos:

=E9−B21

Depois de digitar uma fórmula em uma célula e pressionar "Enter", aparece na célula o resultado calculado pela função informada.

ATIVIDADE

1 **Com o auxílio de seus pais ou responsáveis, realize uma pesquisa em sua residência sobre os gastos do mês atual, como aluguel ou parcela de financiamento imobiliário, gasto com veículo ou com outro meio de transporte, contas de energia elétrica, de água e de internet, alimentação, entre outros, bem como das receitas nesse mesmo mês. Em seguida, de modo semelhante ao realizado no exemplo, construa, na planilha eletrônica Calc, uma planilha de controle para sua família ou para você mesmo.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

As atividades **7** e **8** mobilizam as competências gerais **4**, **5**, **7** e **9**, pois possibilitam que os estudantes utilizem a linguagem digital, promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos. A atividade **7** também favorece o desenvolvimento da competência específica **3** da área de Linguagens e suas Tecnologias. Incentive os estudantes a compartilhar com os colegas maneiras de rever alguns aspectos da vida financeira. Essa conversa contribui para a aquisição da competência específica **3** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

7 **Com a orientação do professor, organizem-se em grupos. Depois, façam o que se pede em cada item.**

a) Pesquisem aplicativos e *sites* que tratam de organização financeira pessoal. Lembrem-se de que muitos *sites* apresentam informações interessantes, mas que sempre é importante verificar se as fontes de pesquisa são confiáveis. Priorizem aplicativos gratuitos. Em seguida, troquem ideias com os demais grupos e compartilhem as descobertas feitas.

b) Cada grupo deverá focar o estudo de um dos aplicativos ou *sites* pesquisados. Explorem as funcionalidades e registrem o que considerarem mais relevante. É interessante anotar também possíveis limitações que perceberem.

c) Combinem um momento para compartilhar os registros com os demais colegas. Vocês podem fazer uma apresentação oral ou produzir um vídeo. Sejam criativos! Ao final, conversem sobre: o que os recursos oferecem de parecido e de diferente; principais atrativos de cada um deles; dificuldades ao utilizá-los.

Consulte as respostas no Manual do Professor.

d) Conversem e elejam qual dos recursos é o mais conveniente para o contexto da maioria de vocês.

8 **Agora é com você! Faça o que se pede em cada item.**

a) Use o aplicativo ou o *site* que vocês escolheram no item **d** da atividade anterior e siga as instruções para começar a planejar sua vida financeira. Para preencher determinados campos, é possível que você precise consultar dados dos seus pais ou responsáveis. Não se esqueça de avisá-los sobre a finalidade para a qual serão utilizadas essas informações.

b) Depois de preencher a ferramenta, faça uma análise sobre as informações fornecidas pelo aplicativo ou *site*. Quais aspectos estão indo bem? Quais precisam ser revistos? Existem gastos que podem ser reduzidos? O que você pode melhorar em seus hábitos de consumo, tendo em vista a sustentabilidade?

c) Usando o LibreOffice, faça uma planilha para controlar seus gastos. Em seguida, compare-a com o aplicativo ou com o *site* que você utilizou nos itens anteriores. Qual deles lhe possibilitou uma análise melhor? Por quê? Faça uma lista das vantagens e desvantagens de cada recurso.

A organização dos conteúdos deste capítulo contribui para a aquisição da competência geral **6**, apresentando aos estudantes conhecimentos que lhes permitem entender as relações do mundo do trabalho e fazer escolhas de acordo com seu projeto de vida. Neste tópico, esse trabalho fica ainda mais evidente. Além disso, esse momento propicia o desenvolvimento da competência específica **3** da área de Linguagens e suas Tecnologias.

O MUNDO DO TRABALHO E MEU PROJETO DE VIDA

Bruna Barbosa/Acervo da fotógrafa

Lígia Zotini, fundadora do Instituto Voicers. Foto de 2024.

Saber como administrar suas receitas (ganhos) e suas despesas é muito importante para evitar diversas situações negativas, como o endividamento, que já estudamos neste capítulo. Mas outra questão fundamental é: Afinal, como obter renda?

A resposta a essa pergunta pressupõe uma série de reflexões, por exemplo, sobre o mercado de trabalho, sobre as infinitas possibilidades ao escolher uma profissão e, consequentemente, sobre seu projeto de vida.

Para começar a trabalhar essas reflexões, leia a seguir trechos da entrevista realizada pelo *site Consumidor Moderno* com Ligia Zotini, fundadora do Instituto Voicers, que pesquisa essas tendências de mercado. Ao acessar o *link* da fonte desse texto, é possível encontrar, também, o áudio da entrevista. Durante sua leitura, anote no caderno os trechos que chamaram sua atenção ou dos termos que você desconhece.

CONSUMIDOR MODERNO – Por que você acha que [o] tema Futuro do Trabalho tem ganhado tanta atenção nos últimos tempos? Os avanços tecnológicos são mesmo os grandes responsáveis por esse interesse de como vamos trabalhar nos próximos anos?

LIGIA ZOTINI – O Futuro do Trabalho ganhou relevância com as novas tecnologias, que alteraram profundamente a maneira de fazer as coisas. Tudo isso começou com a chegada da internet, na virada do milênio, e depois em 2012, quando passamos a ter celulares inteligentes e pacotes de dados capazes de conectar os humanos de forma massiva. Conforme eu, como indivíduo, consigo transmitir meus desejos e meus pensamentos em tempo real, maior é a possibilidade de criar novos negócios digitais. Todas as empresas unicórnios nascem dessa economia de *mobile first* (mobilidade em primeiro lugar), como a gente bem sabe. E aí você precisa acrescentar mais alguns elementos a esse cenário: como a inteligência artificial, a realidade imersiva, a internet das coisas em todas as coisas... Indo ainda mais no futuro, tem o *top chain*, a computação quântica e a conexão homem-máquina. Isso tudo acelerou muito o processo de desenvolvimento da nossa civilização. [...] Todas essas grandes mudanças não têm 10 anos consolidados. As mídias sociais todas idem. O termo Futuro do Trabalho vem da maturidade dessas tecnologias e de quanto mais próximas elas vão ficando da gente. [...]

CM – Dentro desse cenário, você poderia explicar o que é a *Soft Economy*?

LZ – É o conjunto das novas economias – e como existe uma pirâmide de maturidade econômica no planeta. Nesse cenário, precisamos entender que já saímos da economia mais clássica, chamada "Economia Dura" (ou *Hard Economy*), onde toda a produção era física e começou na Revolução Industrial. Isso significava estar na linha de montagem, ter uma vida dura, o homem usado como máquina – como bem mostrou Charles Chaplin no filme *Tempos Modernos*. Estamos migrando desse modelo – de tudo físico, do próprio humano fisicamente preso em um lugar só – para uma coisa mais sutil, mais leve. E o primeiro caminho para isso foi dado com a Economia Digital, que desmaterializou um monte de coisas. O que eu precisava mover no tempo e no espaço hoje está à disposição no mundo digital, que democratiza tudo mais fácil, tem acesso amplo. E uma vez que a gente tem muito acesso digital, a Economia Criativa cresce. [...]

CM – Diversos especialistas indicam que a robotização engolirá uma grande parcela de profissões e, por consequência, de trabalhadores. Como o profissional pode estar preparado para isso? É preciso ter medo?

LZ – O trabalho do futuro tem, sim, a máquina como protagonista. A gente fala que esse é o paradigma da Economia Dura: não terão somente desempregados, existirão também pessoas que nunca mais vão conseguir se restabelecer nas profissões que exerciam antes. Empregos serão perdidos (seja pela automação, robotização, inteligência artificial, virtualidades reais, etc.). Mas ver apenas isso é algo muito distópico. É óbvio que terá gente com mais dificuldade de migração – e ela está altamente ligada ao tipo de acesso que cada um terá às novas economias. De uma forma geral, esse paradigma de fim de mundo, de fim de trabalho, tem a ver com as tecnologias tomando o lugar dos homens, desse indivíduo que faz o trabalho da máquina, que é o que acontece hoje. Existe outra estatística, no entanto, que é a de que 60% dos novos empregos ainda não foram criados e isso é muito bacana. Significa que mais da metade das coisas serão recriadas e isso a gente só vai saber quando começarmos a usá-las. O exemplo do motorista de aplicativo é um caso desses. Há 15 anos não poderíamos supor que ele seria possível. Como íamos descobrir que seria possível vender algo por *stories* do Instagram, por exemplo. As mesmas tecnologias que são vilãs na *Hard Economy*, na *Soft Economy* são as possibilitadoras de novas matrizes de trabalho, renda e visão de mundo – e de uma forma mais abundante. Como vamos fazer para migrar as pessoas é uma responsabilidade nossa – seja fazendo isso em nosso próprio ecossistema, seja pedindo políticas públicas que nos avancem mais rápido no tempo. Talvez a gente não tenha mais o trabalho com CLT, como se conhece, mas isso não quer dizer necessariamente que vai faltar trabalho.

CM – Sua visão é otimista sobre o que a *Soft Economy* pode fazer no que se refere às mudanças de comportamento na sociedade. Isso acontecerá com todos ou apenas com a parte da sociedade que já é privilegiada em termos de acessos e poder aquisitivo?

LZ – Como sociedade brasileira, a gente divide um espaço no globo, mas não o mesmo tempo de outros países. Existem lugares mais avançados na *Soft Economy* – seja por questões políticas, acesso tecnológico ou simplesmente por já se tratar de um país desenvolvido. O futuro tem a ver com acesso, até mais do que apenas com dinheiro. Quem estuda o Futurismo acredita que a concentração de riqueza não será a concentração de futuro. Existe uma linha de pensamento futurista (não distópico) que é a de acompanhar o desenvolvimento tecnológico junto com o social. A gente tem que usar essas duas vertentes o tempo todo porque a tecnologia é usada pelas pessoas. Vamos pegar como exemplo a geração dos *Millennials* [...]. Essa geração é a que foi lá e criou realidades paralelas. E por que eles conseguem se utilizar dessas novas economias? Não só porque viajaram mais, estudaram, tiveram acesso à internet, mas também porque são pessoas mais sutis, mais leves, por causa dessa exposição toda. Imagina o que esses indivíduos de agora, a Gen Z, que é nativa digital, o que ela vai trazer, entende? O que me faz ficar mais positiva com relação a esse futuro é que as lideranças nunca foram tão sustentáveis quanto o que a gente está vendo agora. Nunca esteve tão em pauta essa discussão do lucro máximo × o progresso da humanidade como com as novas gerações. Quero acreditar que não levaremos tanto tempo assim para incluir todo mundo, o desenvolvimento social será mais rápido. Existe uma correlação muito forte entre melhores humanos usando melhores tecnologias. [...]

ZOTINI, Ligia. BORGES, Luciana. O que é *Soft Economy*? O termo mudará o mercado de trabalho nos próximos anos. *Consumidor Moderno*, São Paulo, 12 fev. 2020. Disponível em: https://www.consumidormoderno.com.br/2020/02/12/soft-economy-mercado-trabalho/. Acesso em: 16 jun. 2024.

O trabalho proposto na atividade **10** contribui de maneira significativa para a aquisição da competência específica **3** da área de Linguagens e suas Tecnologias. Sugerimos que você utilize uma metodologia de aprendizagem colaborativa, como o *fishbowl* (método aquário). Nas *Orientações específicas* deste capítulo, apresentamos uma explicação sobre essa metodologia.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Consulte as respostas no Manual do Professor.

9 **Ao ler a entrevista, você deve ter anotado alguns termos cujo significado você desconhece. Pesquise e registre a que se refere cada um deles.**

10 **Com a orientação do professor, organizem uma roda de conversa para discutir os assuntos abordados na entrevista. Para conduzir essa conversa, tenham em mente os seguintes aspectos:**

- O que vocês entendem por "temos de ser eternos aprendizes"?
- Existem perspectivas de emprego diante do cenário atual? Se sim, quais?
- A separação entre funções realizadas por humanos e por robôs muda rapidamente?
- Para ser um bom profissional, é importante ter características como autoconhecimento, saber trabalhar em equipe e ser flexível? Por quê?
- Tarefas que antes não existiam estão impulsionando a demanda por novas habilidades?

Amplie o repertório dos estudantes em relação às mudanças provocadas pelo impacto da tecnologia no mundo do trabalho, exibindo a eles o vídeo da entrevista com o historiador israelense Yuval Noah Harari, que trata das empresas de tecnologia no mundo contemporâneo. Disponível em: https://globoplay.globo.com/v/6025158/. Acesso em: 26 jun. 2024.

O modo como este capítulo foi organizado permite que várias competências gerais sejam desenvolvidas. Neste tópico, enfatiza-se o trabalho com as competências gerais **6**, **8** e **10**, valorizando a diversidade de saberes e vivências culturais e promovendo a apropriação de conhecimentos e experiências, incentivando os estudantes a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade. Além disso, permite que os estudantes desenvolvam o autoconhecimento e atuem pessoal e coletivamente com autonomia e responsabilidade.

Refletindo sobre seu projeto de vida


@mickart_/ID/BR

Quais serão as profissões do futuro? Embora não seja possível prever com precisão, especialistas conseguem apontar algumas tendências. O que é certo é que muitas carreiras estão e estarão relacionadas ao uso de ferramentas digitais. Cada vez mais têm se expandido as áreas que envolvem serviços *on-line* e compartilhamento de conteúdo a distância, por exemplo.

Além disso, aumenta a demanda por profissionais éticos, atentos aos processos colaborativos e com propósitos e práticas sustentáveis.

Com tantas opções e possibilidades, sonhos e desejos, é natural ter dúvidas e inseguranças ao refletir e elaborar o projeto de vida, principalmente quando se trata da escolha de uma profissão.

Incertezas sobre o futuro sempre vão surgir, por isso é importante aprender a lidar com elas, pois podem tanto nos levar a refletir, a planejar e a agir quanto paralisar a nossa tomada de decisões. É importante lembrar que as profissões e as formas tradicionais de trabalho estão em constante transformação, e isso tende a acontecer com mais frequência nos próximos anos.

Após os estudantes realizarem a atividade **11**, peça que compartilhem as informações que encontraram. Para instigá-los, faça perguntas como: "O que vocês pensavam sobre as profissões escolhidas coincidiu com o resultado das pesquisas?"; "Falando na questão de remuneração, o que vocês descobriram sobre essas profissões?". Essa discussão contribui para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de Linguagens e suas Tecnologias.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Consulte as respostas no Manual do Professor.

11 **Escolha duas profissões que despertam seu interesse. Caso você queira explorar mais o assunto, sugerimos que consulte os textos indicados a seguir.**

- GRANATO, Luísa. Estas são as 96 profissões do futuro, segundo o Fórum Econômico Mundial. *Exame*, São Paulo, 24 jan. 2020. Disponível em: https://exame.com/carreira/estas-sao-as-96-profissoes-do-futuro-segundo-o-forum-economico-mundial/. Acesso em: 27 jun. 2024.
- PROFISSÕES do futuro: 21 possíveis carreiras para conhecer hoje. *Na Prática*, [*s. l.*], 4 jul. 2023. Disponível em: https://www.napratica.org.br/possiveis-profissoes-do-futuro/. Acesso em: 26 jun. 2024.

Faça uma pesquisa para responder aos itens a seguir.

a) Que habilidades e conhecimentos são necessários para exercer essas profissões?

b) Qual é o salário médio de cada uma dessas profissões? Se possível, converse sobre isso com pessoas que exercem essas profissões.

c) De que modo essas profissões podem contribuir para a sustentabilidade e para a responsabilidade socioambiental?

12 **Organize uma apresentação com as informações obtidas na atividade anterior. Compartilhe suas descobertas com os colegas e com membros da comunidade que também podem estar refletindo sobre o próprio projeto de vida. Essa apresentação pode ser feita usando *slides*, cartazes, vídeos e até mesmo na forma de um *podcast*.**

13 **Retome a reflexão inicial deste capítulo:**

> Como construir um projeto de vida que, além de ser importante para você, impacte positivamente também a sociedade e o mundo?

Responda à questão acima, justificando seus pontos de vista.

O produto da atividade **12** pode ser divulgado no *site* da escola ou se tornar um guia de profissões que poderá ficar disponível na biblioteca. Além disso, o trabalho proposto nessa atividade contribui para a aquisição das competências gerais **4** e **5**, ao usar tecnologias digitais e diferentes linguagens, como verbal, corporal, visual, sonora e digital, e das competências específicas **3** e **7** da área de Linguagens e suas Tecnologias.

CÁLCULO RÁPIDO

1 **Calcule mentalmente o que se pede em cada item.**

a) O produto entre 2, 3, -4 e 0,5. -12

b) O valor de 6,3 km em metro. 6 300 m

c) A área de um terreno retangular de 9 metros por 2,5 metros. 22,5 m²

d) A raiz quadrada de 80 em valor aproximado. 8,9

e) O valor de x em $9^x = 3$. $\frac{1}{2}$

2 **Considere o valor 2 000 e calcule quanto vale:**

a) 10% dessa quantia. 200

b) 5% dessa quantia. 100

c) 1% dessa quantia. 20

d) 0,5% dessa quantia. 10

e) 5% de 10% dessa quantia. 10

PARA RECORDAR

1 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Uerj) Uma família comprou água mineral em embalagens de 20 L, de 10 L e de 2 L. Ao todo, foram comprados 94 L de água, com o custo total de R$ 65,00. Veja na tabela os preços da água por embalagem:

Volume da embalagem (L)	20	10	2
Preço (R$)	10,00	6,00	3,00

Nessa compra, o número de embalagens de 10 L corresponde ao dobro do número de embalagens de 20 L, e a quantidade de embalagens de 2 L corresponde a *n*.

O valor de *n* é um divisor de: Alternativa **c**.

a) 32 b) 65 c) 77 d) 81

2 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(ESPM-SP) A composição de uma certa população, por faixa etária, é verificada na tabela abaixo:

Crianças (0 a 14 anos)	32%
Jovens (15 a 24 anos)	24%
Adultos (25 a 60 anos)	38%
Idosos (+ de 60 anos)	6%

Num gráfico de setores, o ângulo central correspondente à população de jovens medirá, aproximadamente: Alternativa **a**.

a) 86° b) 54° c) 78° d) 67° e) 94°

3 **Uma herança de R$ 6 000 000,00 seria dividida em partes iguais entre os integrantes de uma família. Porém, verificou-se que havia mais dois herdeiros e, por isso, seria necessário realizar uma nova divisão em partes iguais. Desse modo, os herdeiros receberam R$ 100 000,00 a menos do que esperavam receber anteriormente. Qual era o número total de herdeiros?** 12

4 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(EPCAr-MG) Para a reforma do Ginásio de Esportes da EPCAr foram contratados 24 operários. Eles iniciaram a reforma no dia 19 de abril de 2010 (segunda-feira) e executaram 40% do trabalho em 10 dias, trabalhando 7 horas por dia. No final do 10º dia, 4 operários foram dispensados.

No dia seguinte, os operários restantes retomaram o trabalho, trabalhando 6 horas por dia, e concluíram a reforma. Sabendo-se que o trabalho foi executado nos dois momentos sem folga em nenhum dia, o dia da semana correspondente ao último dia do término de todo o trabalho é Alternativa **d**.

a) domingo.
b) segunda-feira.
c) terça-feira.
d) quarta-feira.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

1 **Ana, Bia, Mariana e Carla foram questionadas pela mãe, pois uma delas entrou em casa com os sapatos sujos, deixando a sala cheia de terra.**

- Ana disse: Foi a Bia.
- Bia disse: Foi a Mariana.
- Mariana disse: Bia mente ao dizer que fui eu.
- Carla disse: Eu não fui.

Se a mãe sabe que apenas uma das meninas disse a verdade, qual delas entrou em casa com os sapatos sujos? Carla.

PALAVRAS-CHAVE As produções dos estudantes são importantes instrumentos de avaliação formativa. As respostas às questões finais apresentam evidências do desenvolvimento socioemocional dos estudantes em relação às habilidades autoconhecimento e autoconfiança.

Este capítulo foi um pouco diferente dos demais e chegou o momento de você refletir sobre o que aprendeu e avaliar a trilha percorrida. Sugerimos que revise este capítulo sob dois aspectos.

1. A Matemática envolvida - faça uma lista com os conhecimentos obtidos.
2. As ideias relativas a consumo e renda - componha um breve texto para cada um destes tópicos: Consumo e sustentabilidade; Agenda 2030 e pegada ecológica; Endividamento e renda; Profissões do futuro.

Agora, faça uma reflexão sobre sua trajetória até aqui e responda a essas perguntas finais, que permitem que você se conheça melhor e fique mais confiante para continuar aprendendo.

- Você reconhece o esforço que fez para enfrentar e responder às situações novas propostas neste capítulo?
- Você está satisfeito com o resultado que obteve nas atividades? Faltou entusiasmo e energia?

MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO FINANCEIRA

O objetivo desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes, desenvolver suas habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propor que vivenciem um processo investigativo, trabalhando assim as competências específicas **1** e **2** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Desmistificando a inflação

Você já percebeu como os preços de produtos e serviços mudam ao longo do tempo? Pense em um produto que você comprou anos atrás e verifique quanto esse mesmo produto custa hoje. Os preços de produtos que consumimos no dia a dia, como os alimentos nos supermercados, e os de serviços, como internet, telefonia e transporte público, estão sempre sujeitos à inflação.

Jack_the_sparow/Shutterstock.com/ID/BR

Para ampliar os conhecimentos dos estudantes sobre o tema trabalhado nesta seção, convide um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para participar das discussões. O tema discutido nesta seção possibilita uma integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Educação Financeira. Trabalhos com os professores de História e Geografia podem ser propostos a fim de explorar as competências específicas **1** e **6** dessa área. Segundo a BNCC, a educação financeira é um desafio também das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

O texto a seguir, publicado no portal do Banco Central do Brasil, aborda o que é inflação, suas causas e consequências.

O que é inflação

Inflação é o aumento dos preços de bens e serviços. Ela implica diminuição do poder de compra da moeda. A inflação é medida pelos índices de preços. O Brasil tem vários índices de preços. O Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) é o índice utilizado no sistema de metas para a inflação.

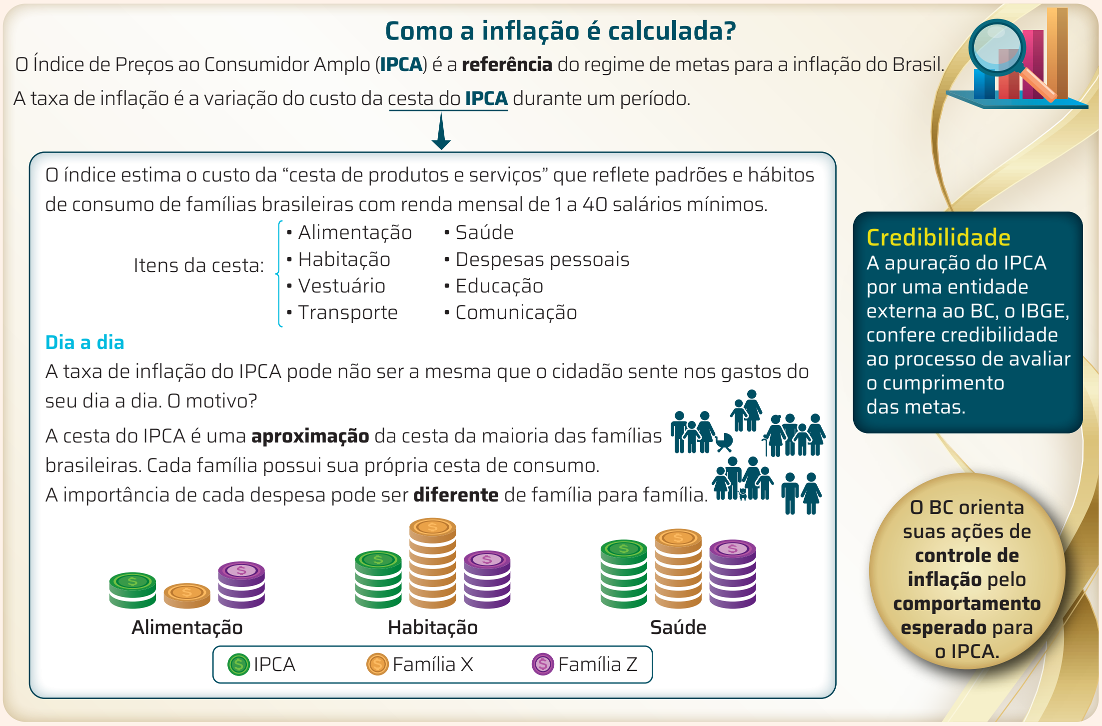
Causas da inflação

A inflação pode ter várias causas, que podem ser agrupadas em:

1. pressões de demanda
2. pressões de custos
3. inércia inflacionária e
4. expectativas de inflação.

Consequências da inflação

A inflação gera incertezas importantes na economia, desestimulando o investimento e, assim, prejudicando o crescimento econômico. Os preços relativos ficam distorcidos, gerando várias ineficiências na economia. As pessoas e as firmas perdem noção dos preços relativos e, assim, fica difícil avaliar se algo está barato ou caro. A inflação afeta particularmente as camadas menos favorecidas da população, pois essas têm menos acesso a instrumentos financeiros para se defender da inflação. Inflação mais alta também aumenta o custo da dívida pública, pois as taxas de juros da dívida pública têm de compensar não só o efeito da inflação mas também têm de incluir um prêmio de risco para compensar as incertezas associadas com a inflação mais alta.



Brasil. Banco Central do Brasil. O que é inflação. Banco Central do Brasil, [20--]. Disponível em https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/oqueinflacao. Acesso em: 11 jul. 2024.

A inflação reduz nosso poder de compra porque, diante de produtos e serviços mais caros, precisamos de mais dinheiro para ter acesso a necessidades básicas, como alimentação, transporte, lazer, saúde e educação.

Mas como a inflação é calculada? O indicador utilizado para medir a inflação é o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), reconhecido como o índice de inflação oficial do Brasil. O IPCA faz parte do Sistema Nacional de Índices de Preços ao Consumidor (SNIPC), elaborado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Para o cálculo do IPCA, o instituto considera o perfil de consumo de famílias com renda entre 1 e 40 salários mínimos das principais regiões metropolitanas e cidades brasileiras, em oito categorias: alimentação, habitação, vestuário, transportes, saúde, despesas pessoais, educação e comunicação.

São observadas as variações nos gastos das famílias nessas categorias, analisando a participação de cada categoria no consumo total. Essa participação é medida em porcentagem, estabelecendo gastos médios por região ou cidade. Com base nessas porcentagens, é possível ponderar a influência das categorias no cálculo do índice, ou seja, elencar os produtos e serviços por ordem de importância ou de utilização. Depois disso, são feitos os cálculos referentes às regiões e cidades e, então, o cálculo do índice nacional.

Se considerar oportuno, mostre aos estudantes o infográfico "O Brasil antes e depois do Plano Real", disponível em https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/planoreal (acesso em: 11 jul. 2024).

Conectando ideias Consulte as respostas no Manual do Professor.

1 **Converse com o professor de História ou de Sociologia sobre como a população é protegida em relação aos aumentos no IPCA, levando em consideração a história do país antes e depois da implementação do Plano Real.**

A atividade **2** é uma oportunidade para a exploração de aspectos práticos do *marketing* e do consumo, e também promove habilidades de análise comparativa e apresentação de resultados. Ao examinar como os folhetos de supermercado evoluíram, os estudantes ganham uma compreensão mais profunda das dinâmicas do mercado e das mudanças culturais ao longo do tempo.

2 **Os folhetos de supermercado são um meio comumente utilizado para informar os consumidores sobre promoções e preços de produtos. Ao longo do tempo, esses folhetos refletem mudanças nos hábitos de consumo, nas preferências dos consumidores e nas estratégias de mercado das empresas.**

<u>Como os folhetos de supermercado mudaram ao longo dos anos em termos de oferta de produtos e preços?</u>

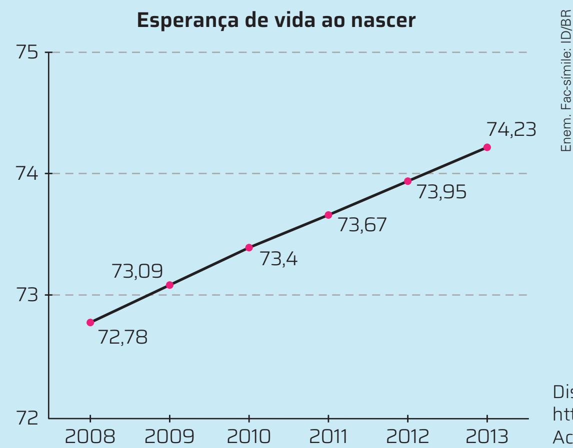
- Pesquisem na internet folhetos antigos e atuais de supermercados.
- Em duplas, organizem os folhetos em pares (um antigo e um atual).
- Comparem os folhetos, observando a oferta de produtos e os preços.
- Registrem suas observações e conclusões em relação às mudanças identificadas nos folhetos.
- Organizem uma sessão de apresentação para compartilhar suas descobertas com a turma.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Gráficos são textos que exigem uma forma particular de leitura. Dependendo da informação que desejamos obter, precisamos selecionar certos dados do gráfico. No entanto, às vezes não basta apenas lê-lo, pois o enunciado da questão e as alternativas trazem outras informações decisivas para que possamos resolvê-la.

ENEM EM CONTEXTO

(Enem) A esperança de vida ao nascer é o número médio de anos que um indivíduo tende a viver a partir de seu nascimento, considerando dados da população. No Brasil, esse número vem aumentando consideravelmente, como mostra o gráfico.



Disponível em: http://cod.ibge.gov.br. Acesso em: 6 mar. 2014 (adaptado).

Pode-se observar que a esperança de vida ao nascer em 2012 foi exatamente a média das registradas nos anos de 2011 e 2013. Suponha que esse fato também ocorreu com a esperança de vida ao nascer em 2013, em relação às esperanças de vida de 2012 e de 2014.

Caso a suposição feita tenha sido confirmada, a esperança de vida ao nascer no Brsil no ano de 2014 terá sido, em ano, igual a

a) 74,23.
b) 74,51.
c) 75,07.
d) 75,23.
e) 78,49.

Resolução

Com base no gráfico, podemos identificar que a esperança de vida ao nascer em 2012 era 73,95 anos e em 2013, e 74,23 anos. Considerando que, em 2014, a esperança de vida ao nascer tenha sido x e que a de 2013 seja a média das registradas em 2012 e 2014, temos:

$$\frac{73{,}95 + x}{2} = 74{,}23$$

$$73{,}95 + x = 148{,}46$$

$$x = 74{,}51$$

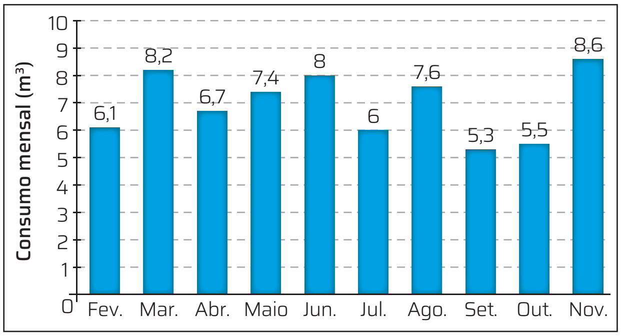
Portanto, a alternativa **b** é a correta.

Observe que parte das informações estava no enunciado da questão e parte estava no gráfico, e que você precisou ler e relacionar os dois para construir a resolução. Essa habilidade é complexa e exige mais que a simples leitura, visto que envolve a capacidade de analisar dados e de decidir como relacioná-los.

Explorando a estratégia

1 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Unip-SP) O gráfico apresenta o consumo mensal de água, em m^3, de certa residência ao longo dos meses de fevereiro a novembro em determinado ano.



Unip-SP. Fac-símile: ID/BR

Sabendo que, nesse ano, o consumo médio mensal no período de janeiro a maio foi igual ao consumo médio mensal no período de junho a dezembro e que o consumo no mês de dezembro foi 1,8 m^3 superior ao do mês de janeiro, o consumo no mês de dezembro foi: Alternativa **b**.

a) 9,3 m^3.

b) 9,4 m^3.

c) 9,6 m^3.

d) 9,5 m^3.

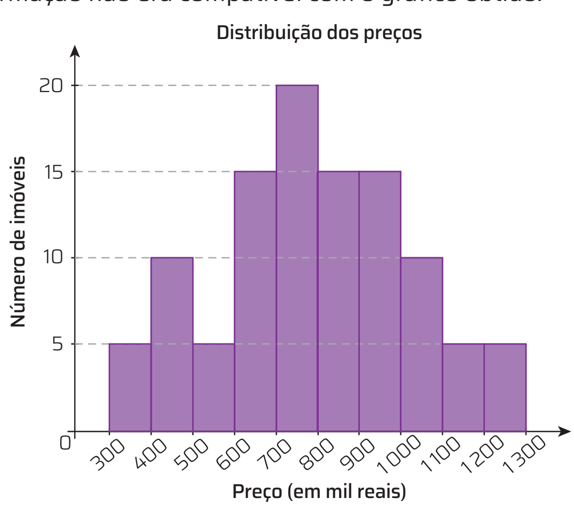
e) 9,2 m^3.

2 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Um casal está planejando comprar um apartamento de dois quartos num bairro de uma cidade e consultou a página de uma corretora de imóveis, encontrando 105 apartamentos de dois quartos à venda no bairro desejado. Eles usaram um aplicativo da corretora para gerar a distribuição dos preços do conjunto de imóveis selecionados.

O gráfico ilustra a distribuição de frequência dos preços de venda dos apartamentos dessa lista (em mil reais), no qual as faixas de preço são dadas por]300, 400],]400, 500],]500, 600],]600, 700],]700, 800],]800, 900],]900, 1000],]1000, 1100],]1100, 1200],]1200, 1300].

A mesma corretora anuncia que cerca de 50% dos apartamentos de dois quartos nesse bairro, publicados em sua página, têm preço de venda inferior a 550 mil reais. No entanto, o casal achou que essa última informação não era compatível com o gráfico obtido.



Enem. Fac-símile: ID/BR

Com base no gráfico obtido, o menor preço, p (em mil reais), para o qual pelo menos 50% dos apartamentos apresenta preço inferior a p é: Alternativa **c**.

a) 600.

b) 700.

c) 800.

d) 900.

e) 1000.

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES DE CÁLCULO

UNIDADE 1 – Números, análise de dados e funções

CAPÍTULO 1 – Conjuntos numéricos e intervalos na reta real

Tecnologia – (página 17)

2. a)

Números inteiros mais próximos	Números mais próximos com uma casa decimal	Números mais próximos com duas casas decimais
$2 < \sqrt{5} < 3$	$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$	$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$
$2 < \sqrt{8} < 3$	$2{,}8 < \sqrt{8} < 2{,}9$	$2{,}82 < \sqrt{8} < 2{,}83$
$4 < \sqrt{23} < 5$	$4{,}7 < \sqrt{23} < 4{,}8$	$4{,}79 < \sqrt{23} < 4{,}80$
$6 < \sqrt{48} < 7$	$6{,}9 < \sqrt{48} < 7{,}0$	$6{,}92 < \sqrt{48} < 6{,}93$
$16 < \sqrt{281} < 17$	$16{,}7 < \sqrt{281} < 16{,}8$	$16{,}76 < \sqrt{281} < 16{,}77$
$33 < \sqrt{1\,111} < 34$	$33{,}3 < \sqrt{1\,111} < 33{,}4$	$33{,}33 < \sqrt{1\,111} < 33{,}34$
$8 < \sqrt{67{,}3} < 9$	$8{,}2 < \sqrt{67{,}3} < 8{,}3$	$8{,}20 < \sqrt{67{,}3} < 8{,}21$
$8 < \sqrt{71{,}17} < 9$	$8{,}4 < \sqrt{71{,}17} < 8{,}5$	$8{,}43 < \sqrt{71{,}17} < 8{,}44$

Problemas e exercícios propostos (p. 21)

1. Alternativa **e**.

6. a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $-\frac{5}{3}$

8. b) 8 °C; 8 °C; 7,5 °C

9. a) $\frac{1}{8}; \frac{1}{4}$ b) 4 pedaços.

10. a) $\frac{9}{25}$ b) $-\frac{17}{8}$ c) $\frac{26}{99}$ d) $\frac{2\,174}{999}$ e) $\frac{839}{990}$ f) $\frac{19}{150}$

11. a) $\frac{1}{15}$ b) $\frac{69}{70}$ c) $\frac{137}{90}$ d) $\frac{160}{473}$

12. $\frac{41}{90}$

14. a)

a	1	10	100	4	40	400	9	90	900
$\sqrt{a}$	1	$\sqrt{10}$	10	2	$2\sqrt{10}$	20	3	$3\sqrt{10}$	30

16. 100 m; $10\sqrt{10}$ m

17. $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{9}$.

18. $2\sqrt{34}$ m

20. a) 2,8
b) 3,2
c) 32
d) 6,2

Problemas e exercícios propostos (p. 26)

34.]2, 12[

35. a) $A \cap B = \{-1, 0, 4\}$; $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$;
$A - B = \{-2, 2\}$; $B - A = \{1\}$
b) $A \cap B = \{-3, 3, 5\} = B$; $A \cup B = \{-3, -1, 1, 3, 5\} = A$;
$A - B = \{-1, 1\}$; $B - A = \varnothing$
c) $A \cap B = [-1, 2[$; $A \cup B = [-3, 4[$; $A - B = [-3, -1[$;
$B - A = [2, 4[$
d) $A \cap B = \left]-\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right] = A$; $A \cup B = [-\sqrt{2}, \sqrt{3}[= B$;
$A - B = \varnothing$; $B - A = \left[-\sqrt{2}, -\frac{5}{6}\right] \cup \left]\frac{2}{3}, \sqrt{3}\right[$
e) $A \cap B = \{2\}$; $A \cup B = \left]-2, \sqrt{6}\right[$; $A - B =]-2, 2[$; $B - A = \left]2, \sqrt{6}\right[$
f) $A \cap B = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[= B$; $A \cup B = \left]-\infty, \frac{3}{2}\right] = A$;
$A - B = \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$; $B - A = \varnothing$
g) $A \cap B = \left[-\frac{5}{6}, +\infty\right[= A$; $A \cup B = \left]-\frac{6}{7}, +\infty\right[= B$;
$A - B = \varnothing$; $B - A = \left]-\frac{6}{7}, -\frac{5}{6}\right[$

38. Alternativa **c**.

Problemas e exercícios propostos (p. 30)

39. Alternativa **e**.
40. Alternativa **a**.
41. Alternativa **c**.
42. Alternativa **b**.
43. Alternativa **b**.
44. Alternativa **b**.

Cálculo rápido (p. 31)

1. a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{3}{10}$ g) 1,7 h) 1,25 i) 1,5 j) 0,5 k) 1,975 l) 6,6

2. a) 0,5 b) 0,13 c) 0,76 d) 9,3 e) 0,011 f) 4,53 g) 72,5 h) 3,361

3. a) 0,1 b) 0,01 c) $\frac{1}{25}$ d) $\frac{1}{16}$ e) $-\frac{1}{15}$ f) $-\frac{1}{27}$ g) 1 h) $\frac{1}{16}$ i) 144 j) 81 k) $\frac{1}{25}$ l) $\frac{1}{216}$

4. Alternativa **d**.

5. a) 12 b) 5,4 c) 0,69 d) 3 060

Para recordar (p. 31)

1. 25 cm e 10 cm.

2.

Número inicial	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	2,5	b
Adicione 2	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	$2+\sqrt{2}$	4	4,5	$b+2$
Eleve ao quadrado	9	4	1	0	$\frac{1}{4}$	1	2	4	6,25	b^2
Multiplique por 2	-6	-4	-2	0	1	2	$2\sqrt{2}$	4	5	$2b$
Divida por −1	3	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	-2	$-2{,}5$	$-b$

3. R$ 85 950,00

4. a) $S = \left\{\frac{22}{3}\right\}$ b) $S = \{3\}$ c) $S = \left\{\frac{6}{5}\right\}$ d) $S = \{4{,}41\overline{6}\}$

5. Quadro A.

Foco no raciocínio lógico (p. 33)

2. $x + y = 4$

CAPÍTULO 2 – Estatística: dados, variáveis e gráficos

Problemas e exercícios propostos (p. 43)

1. e) 12 Terras Indígenas a menos.
3. a) A aproximadamente 1168 831 campos de futebol.
b) Aproximadamente 22 campos de futebol.
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **a**.
6. Alternativa **d**.
8. Alternativa **a**.
9. b) Aproximadamente 43,36 kg.

Cálculo rápido (p. 46)

1. a) 60; 30; 24; 12
b) 44; 88; 22; 110
c) 18; 54; 90; 180
d) 40; 20; 16; 4

Para recordar (p. 47)

1. 6
2. 360 anúncios.
3. 9 km
4. Milena.
5. Nesse grupo, há 40 estudantes ao todo.
6. 22,8; 13,8

Foco no raciocínio lógico (p. 47)

1. 60 metros. 2. 3 gatos. 3. 2 minutos.

CAPÍTULO 3 – Relações entre grandezas: funções

Problemas e exercícios propostos (p. 54)

7. a) $m = \frac{9}{2}$ e $n = 1$. b) $m = -\frac{1}{2}$ e $n = \frac{5}{2}$.

Problemas e exercícios propostos (p. 60)

10. $f(0) = 1$; $f(2) = 3$; $f(0{,}666...) = \frac{5}{3}$; $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ e $f(1 - \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$

14. a) $f(-1) = -2$; $f(-2{,}1) = -4{,}2$; $f(1{,}2) = 2{,}4$; $f(\pi) = 2\pi$ e $f(1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$
b) $x = 50$

15. a) $f(n) = n + 1$
b) $f(n) = n + 3$
c) $f(n) = n^2$

17. a) $D(f) = \{4, 5, 6, 7, 8\}$
b) $Im(f) = \{84; 67{,}2; 56; 48; 42\}$
c) $y = \frac{336}{x}$, com x assumindo os valores 4, 5, 6, 7 ou 8.

19. a) Não existe elemento no domínio cuja imagem é -64.
b) $x = 0$

20. Alternativa **c**. 21. Alternativa **c**.

Problemas e exercícios propostos (p. 66)

22. a) $f(5) = 7$ c) $D(f) = [-2, 5]$
b) $x = 3$ d) $Im(f) = [0, 7]$

23. c) $y = x^2 - 1$
d) $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; $Im(f) = \{-1, 0, 3, 8\}$

24. c) Em 6 336 milhões de litros.

26. a) $D(f) = [-4, 6]$; $Im(f) = [-2, 4]$
b) $D(f) = \left\{1, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$; $Im(f) = \left\{-1, -\frac{3}{4}, 0, \frac{5}{4}, 3\right\}$

27. a)

Litro	0	0,5	1	1,5	2	4	10	25	40
Quilômetro rodado	0	5	10	15	20	40	100	250	400

d) $D(f) = [0, 40]$; $Im(f) = [0, 400]$
f) $y = 10x$
g) $A = [0, 40]$

28. a) $C(0{,}5) = \pi$ cm; $C(1) = 2\pi$ cm; $C(1{,}5) = 3\pi$ cm; $C(2) = 4\pi$ cm; $C(2{,}5) = 5\pi$ cm; $C(3) = 6\pi$ cm
f) $D(f) = \{0{,}5; 1; 1{,}5; 2; 2{,}5; 3\}$
$Im(f) = \{\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi\}$

29. Alternativa **a**.

31. a)

ℓ	1	2	3	4	5	6	7
P	4	8	12	16	20	24	28

33. a) Nada podemos dizer sobre os pontos dos demais quartos.
b) Correta.
c) Nada podemos dizer sobre o gasto nos demais minutos.
d) Correta.

Tecnologia (p. 69)

1. c) $f(-3) = -2$; $f(-1) = 0$; $f(0) = 1$; $f(0{,}5) = 1{,}5$; $f(2) = 3$; $f(4) = 5$
e) $D(f) = [-4, 4]$ e $Im(f) = [-3, 5]$.
2. a) $D(f) = [-3, 3]$ e $Im(f) = [-12, 18]$.

Problemas e exercícios propostos (p. 76)

36. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\} = \mathbb{R} - \{4\}$
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\} = [5, +\infty[$
c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\} =]-\infty, 3]$
d) $D(f) = \mathbb{R}$
e) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{5}{2}\right\} = \left]-\frac{5}{2}, +\infty\right[$
f) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
g) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\} = [0, 1[$
h) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geqslant -\frac{5}{2} \text{ e } x \neq 2\right\}$

39. a) $D = \mathbb{R}$ c) $D = \mathbb{R} - \{0\}$ e) $D = \mathbb{R}$
b) $D = \mathbb{R} - \{0\}$ d) $D = \mathbb{R} - \{0\}$ f) $D = \mathbb{R} - \{0\}$

40. $S = \{-7, 4\}$

Tecnologia (p. 76)

2. 11

Cálculo rápido (p. 77)

1. a) 0 d) $3x + 1$ g) $5x - y$
b) $-x + 5$ e) $3x + 3$ h) $x + 3y + 14$
c) $2 + x$ f) $x - 2y$

2. a) $t = 95$ e) $a = -95$ i) $y = 115$
b) $y = -35$ f) $x = 95$ j) $r = -45$
c) $z = 35$ g) $b = 95$
d) $n = -35$ h) $m = 115$

3. a) 12 700 m; 18 750 m; 2 000 m c) 348 cm; 2 410 cm; 150 cm
b) 3,758 km; 12 km; 0,75 km d) 2,58 m; 1,75 m; 0,15 m

4. a) 600 min; 90 min; 440 min; 75 min; 4 320 min
b) 180 s; 3 600 s; 363 s; 90 s; 3 600 s; 270 s

5. a) $2x$ g) $-2x + 4$, com $x \neq 0$
b) $3x - 1$ h) $\frac{x}{2}$
c) x, com $x \neq 0$ i) $\frac{3x - 1}{4}$
d) $x + 2$, com $x \neq 0$ j) $-\frac{x}{2}$, com $x \neq 0$
e) x k) $\frac{x + 2}{2}$, com $x \neq 0$
f) $\frac{3x - 1}{2}$ l) $x^2 + 3$, com $x \neq 0$

6. a) $2a$ e) $2a + 2$ i) $a^2 - 2^2$
b) a^2 f) $2a - 2$ j) $(a - 2)^2$
c) $a - 2$ g) $a^2 + 2^2$ k) $2(2 + a)$
d) $\frac{a}{2}$ h) $(a + 2)^2$

Para recordar (p. 77)

1. a) $[0, 1[$ b) $]-1, 5[$ c) $]-1, 0[$ d) $]1, 5[$

3. a) 800 d) 120 000 g) 6
b) 1 000 e) 480 000 h) 1,5
c) -200 f) 120 000

4. a) $V(m) = 0{,}97m$

5. a) $S = \{(1, 2)\}$ b) $S = \{(-1, 3)\}$

8. Alternativa **c**. 9. Alternativa **a**.

10. 49

11. 1 e 0,5; ângulo menor mede 50°; ângulo maior mede 130°.

Foco no raciocínio lógico (p. 79)

1. 21
2. a) Opção B. b) Sim.
4. Alternativa **e**.

CAPÍTULO 4 – Função afim

Tecnologia (p. 90)

1. $D(f) = D(g) = D(h) = \mathbb{R}$; $Im(f) = Im(g) = \mathbb{R}$; $Im(h) = \{-1\}$

Problemas e exercícios propostos (p. 93)

2. a) $x = -5$
b) $x = 3$
c) $x = \frac{7}{5}$
d) $x = 0$
4. $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$
6. a) $f(x) = -4x$ c) 48
7. a) $f(x) = x + 3$ c) $f(x) = \frac{7}{3}x$
b) $f(x) = 3x + 3$ d) $f(x) = -3x$
9. a) $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$
b) $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$
c) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 2$
10. a) $m = 3$ e $n = -4$.
b) $m = 0$ e $n = 5$.
11. a) $f(x) = 3x$ b) $f(x) = \frac{2}{3}x$
13. Alternativa **b**.
14. a) $P(1) = 22$ cm; $P(1{,}5) = 23$ cm; $P(2) = 24$ cm; $P(3) = 26$ cm; $P(4) = 28$ cm
c) $f(x) = 20 + 2x$
15. Alternativa **b**.
16. a) $V(x) = 200 + 30x$
b) Foram produzidas 20 peças.
17. a) $y = 3x + 70$ b) 1,66 m
18. a) $F(x) = \frac{5}{2}x$
19. Antes de serem acesas, a vela A tinha 8 cm e a vela B tinha 6 cm.
26. Alternativa **c**.

Problemas e exercícios propostos (p. 98)

27. a) Crescente. c) Decrescente.
b) Decrescente. d) Crescente.
28. a) $m > \frac{3}{2}$ c) $m < 3$
b) $m > -2$ d) $m < 4$
29. a) $m < \frac{3}{2}$ c) $m > 3$
b) $m < -2$ d) $m > 4$

Problemas e exercícios propostos (p. 99)

31. b) $\frac{11}{2}$ c) $f(4) = \frac{29}{3}$
33. Alternativa **d**.
34. Alternativa **a**.
35. Alternativa **a**.
36. Alternativa **c**.
37. a) Ida: 5,5 horas. Volta: 5 horas.
b) 13,5 km/h

Problemas e exercícios propostos (p. 104)

39. a)

Número de triângulos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
Número de palitos	3	5	7	9	11	13	15	17	19	$2n + 1$

b) $p(n) = 2n + 1$
d) $D(p) = \mathbb{N}^*$; $Im(p) = \{p \in \mathbb{N} \mid p = 2n + 1, n \geqslant 1\}$
f) 179 palitos.
g) 50 triângulos.

40. a)

Número de triângulos	1	2	3	4	5	6	7	n
Perímetro da figura	3	4	5	6	7	8	9	$n + 2$

b) $P(n) = n + 2$
c) $D(P) = \mathbb{N}^*$; $Im(P) = \{P \in \mathbb{N} \mid P = n + 2, n \geqslant 1\}$

43. a) $-\frac{7}{4}$ c) -3
b) -2 d) -1
44. a) $1 < x < 5$ c) $\frac{5}{2} < x < \frac{11}{2}$
b) $x > \frac{5}{2}$ d) $1 < x < 5$
45. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 16\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \geqslant -\frac{11}{3}\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x > -\frac{7}{2}\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -29\}$
46. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 1\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$
47. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 6\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \geqslant \frac{4}{3}\right\}$
c) $S = \varnothing$
48. a) 12 minutos.
b) 10 minutos.
49. a) 33 minutos.
b) 32 minutos.
50. O plano beta é mais vantajoso a partir de 72 minutos, até 140 minutos.
51. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x < -\frac{5}{2} \text{ ou } x > 0\right\}$
b) $p \leqslant -3$

Cálculo rápido (p. 105)

1. a) $x = 0$ g) $x = 3$
b) $x = 1$ h) $x = -\frac{1}{3}$
c) $x = -2$ i) $x = -\frac{1}{3}$
d) $x = -1$ j) $x = -2$
e) $x = -\frac{1}{2}$ k) $x = 2$
f) $x = -2$ l) $x = -2$
2. a) $y = 8$ d) $b = 5$
b) $a = 20$ e) $z = 6$
c) $m = 3$ f) $t = -3$

3. a) $x = \frac{2}{3}$
b) $n = 4$
c) $t = 1$
d) $m = 0$
4. a) -2
b) 1,5
c) 3
d) -1
5. a) • 2 000 g
• 3 500 g
• 1 750 000 g
• 500 g
b) • 150 kg
• 0,75 kg
• 0,5 kg
• 1,3 kg
c) • 17 000 mg
• 1 800 mg
• 500 mg
• 30 200 mg
d) • 6 g
• 0,5 g
• 1,75 g
• 0,65 g

Para recordar (p. 106)

1. Aproximadamente 33 h 20 min.

Foco no raciocínio lógico (p. 107)

1. Sim, o número é 7 744.

Matemática e meio ambiente (p. 108)

1. a) $C(t) = 4{,}5t$ b) 270 kWh

CAPÍTULO 5 – Função quadrática

Problemas e exercícios propostos (p. 122)

2. a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$; é uma função quadrática.
b) $f(x) = 2x + 1$; não é uma função quadrática (é uma função afim).
3. $k \neq 3$ e $k \neq -3$.
4. $m = -3$ e $n = -7$.
5. a) $\frac{1}{10}$ e 1 d) 6 e -6
b) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{7}{3}$ e 0
c) Não há raiz real. f) 0
6. a) Eixo das ordenadas: $(0, -9)$; Eixo das abscissas: $(3, 0)$ e $(-3, 0)$.
b) Eixo das ordenadas: $(0, -6)$; Eixo das abscissas: $(2, 0)$ e $(-3, 0)$.
c) Eixo das ordenadas: $(0, 10)$; Eixo das abscissas: não há ponto de intersecção.
d) Eixo das ordenadas: $(0, 10)$; Eixo das abscissas: $(-5, 0)$ e $(2, 0)$.
7. a) $x = 0$ ou $x = 2$.
b) $x = -3$ ou $x = 1$.
8. $\sqrt{10}$ s
9. a) $x_1 + x_2 = -2$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{5}$
b) $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4}$
c) $x_1 + x_2 = 0$; $x_1 \cdot x_2 = -4$
d) $x_1 + x_2 = 0$; $x_1 \cdot x_2 = 0$
15. a) $(0, 0)$; $(0, 2)$; $(0, -2)$
b) Para cima, pois em todas as funções $a = 1$, ou seja, $a > 0$.
c) Sim, o eixo de simetria é Oy.
d) Transladando os gráficos.
17. $f(x) = -7x^2 + 12x + 3$
18. a) Teríamos infinitas funções quadráticas.
b) Não teríamos uma função.
19. $(0, 0)$ e $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{4}\right)$.
20. a) $f(x) = x^2 - 2x$ b) $f(x) = -x^2 + 1$
21. b) $(1, 5)$ e $(9, 21)$.
22. Alternativa **a**.

Problemas e exercícios propostos (p. 128)

23. $x = 1$

24. $m = -7$

26. Não são válidas: **a**, **b** e **d**.

27. $m = 4$ e $n = 8$.

28. a) $\text{Im}(f) = \left[-\frac{25}{8}, +\infty\right[$

b) $\text{Im}(f) = \left]-\infty, \frac{37}{12}\right]$

c) $\text{Im}(f) = [-5, +\infty[$

d) $\text{Im}(f) =]-\infty, 4]$

e) $\text{Im}(f) = \left[\frac{1}{5}, +\infty\right[$

f) $\text{Im}(f) =]-\infty, 0]$

29. a) $m < 2$

b) $m > 2$

30. 6 e 6.

31. $v_0 = 10$ m/s

32. 1 A

33. d) O quadrado de lado de medida a, pois $a^2 > a^2 - 4$ para $a > 2$.

34. b) $y = 20 - 2x$

e) $A(x) = 20x - 2x^2$

g) 50 m²

35. Alternativa **a**.

36. O retângulo deve ser um quadrado de lado de medida 7 m.

37. a) $\begin{cases} f(x) < 0, \text{ para } \frac{1}{2} < x < 3 \\ f(x) = 0, \text{ para } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 3 \\ f(x) > 0, \text{ para } x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) > 0, \text{ para } \frac{2}{5} < x < 1 \\ f(x) = 0, \text{ para } x = \frac{2}{5} \text{ ou } x = 1 \\ f(x) < 0, \text{ para } x < \frac{2}{5} \text{ ou } x > 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x) > 0, \text{ para } x \neq -\frac{1}{2} \\ f(x) = 0, \text{ para } x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} f(x) < 0, \text{ para } x \neq \frac{4}{3} \\ f(x) = 0, \text{ para } x = \frac{4}{3} \end{cases}$

38. Alternativa **d**.

39. Alternativa **c**.

40. a) 6 m **b)** 4 s **c)** 10 m

Problemas e exercícios propostos (p. 133)

41. a) $S = \mathbb{R} - \{2\}$ **b)** $S = \varnothing$

42. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < -2 \text{ ou } x > -\frac{1}{5}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{3}{2} \leq x \leq 0\right\}$

c) $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

43. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \text{ e } x \neq 0\right\}$

44. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 0 \text{ ou } 2 \leq x < 3\}$

45.
- f terá duas raízes reais se $\Delta > 0$: então $m < \frac{29}{5}$.
- f terá uma raiz real se $\Delta = 0$: então $m = \frac{29}{5}$.
- f não terá raiz real se $\Delta < 0$: então $m > \frac{29}{5}$.

46. Para quaisquer valores reais de m.

47. $m = 4$

48. $\{k \in \mathbb{R} \mid -4 < k < 4\}$

49. a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -3 \leq x \leq -\frac{1}{2}\right\}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$

50. a) $S = \{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$

b) $S = \left\{k \in \mathbb{R} \,\middle|\, 6 - 2\sqrt{2} < k < 6 + 2\sqrt{2}\right\}$

51. Se $0 < x < 10$, então $35 < y < 45$. Se $x > 35$, então $0 < y < 10$.

Problemas e exercícios propostos (p. 138)

54. a) 2,001 **c)** $\pi - 3$

b) $\sqrt{5} - 2$ **d)** $\frac{1}{2}$

55. a) $\begin{cases} x - 3, \text{ para } x \geq 3 \\ 3 - x, \text{ para } x < 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + 8, \text{ para } x \leq 4 \\ 2x - 8, \text{ para } x > 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 - x, \text{ para } x \leq 1 \\ x - 1, \text{ para } x > 1 \end{cases}$

d) x^2

e) $x^2 + 1$

f) $\begin{cases} x^2 - 1, \text{ para } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 1 - x^2, \text{ para } -1 < x < 1 \end{cases}$

59. a) $y = |2x|$

60. a) $y = |-x^2 + 1|$

b) $\text{Im}(f) = [0, +\infty[$

62. b) 4 soluções.

63. Alternativa **a**.

64. Alternativa **a**.

Cálculo rápido (p. 139)

1. a) $t^2 + 16t + 64$

b) $4y^4 - 16y^2 + 16$

c) $9m^8 + 30m^4 + 25$

d) $100 - 80x + 16x^2$

e) $\frac{1}{4} + z + z^2$

f) $\frac{9}{16}m^4 - 9m^2 + 36$

g) $25z^4 - 30z^2m^3 + 9m^6$

h) $2\sqrt{14} + 9$

2. a) $y^2 + 8y + 12$ **e)** $t^2 - 4t - 45$

b) $t^2 + 4t + 4$ **f)** $x^2 - 7x + 6$

c) $m^2 + 8m + 15$ **g)** $y^2 - 6y + 9$

d) $n^2 - 3n - 10$ **h)** $z^2 - 12z + 20$

3. a) $x = \pm 1$ **g)** $x = \pm 2$

b) $x = \pm 1$ **h)** $x = \pm 3$

c) $x = \pm 2$ **i)** $x = \pm 4$

d) $x = \pm 2$ **j)** $x = \pm 7$

e) $x = \pm\sqrt{2}$ **k)** $x = \pm 9$

f) $x = \pm\sqrt{2}$ **l)** $x = \pm 10$

4. a) $S = \{0, 1\}$ **d)** $S = \{0, 3\}$

b) $S = \{0, -1\}$ **e)** $S = \{0, -3\}$

c) $S = \{0, -2\}$ **f)** $S = \{0, 2\}$

g) $S = \{0, 8\}$ **j)** $S = \{0, 15\}$

h) $S = \{0, -8\}$ **k)** $S = \{0, -15\}$

i) $S = \{0, -6\}$ **l)** $S = \{0, 3\}$

5. a) $z = 0$ ou $z = 3$.

b) $m = 0$ ou $m = \frac{1}{5}$.

c) $t = 0$ ou $t = \frac{3}{4}$.

d) $x = 0$ ou $x = -1{,}5$.

e) $k = 0$ ou $k = 2{,}8$.

f) $n = 0$ ou $n = -0{,}8$.

g) $x = 0$ ou $x = -6$.

h) $z = 0$ ou $z = \frac{4}{7}$.

i) $y = 0$ ou $y = -3{,}34$.

j) $x = 0$ ou $x = 5$.

6. a) $t = -\frac{1}{5}$ ou $t = 2$.

b) $m = 5$ ou $m = -\frac{2}{3}$.

c) $y = -1$ ou $y = 3{,}8$.

d) $n = -6$ ou $n = -\frac{7}{2}$.

e) $b = 4{,}5$ ou $b = \frac{3}{7}$.

f) $t = -10$ ou $t = 10$.

g) $x = 2{,}6$ ou $x = 7$.

h) $k = 8$ ou $k = -1$.

i) $y = \sqrt{2}$ ou $y = -\sqrt{3}$.

Para recordar (p. 140)

1. a) Os números pares.

b) 5

c) 6

d) 1, 9 e 1.

e) Sendo k esse último algarismo da potência 9^n: $k = 1$, se n é par; $k = 9$, se n é ímpar.

3. 560 estudantes.

4. Paulo: 24%; Carlos: 14%; João: 43%; Luiz: 13%; Marcelo: 6%

5. a) R$ 0,55 **b)** R$ 2,16

Foco no raciocínio lógico (p. 141)

1. a) 120 **b)** 24

2. 382

3. Alternativa **d**.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 144)

1. Alternativa **d**.

2. Alternativa **c**.

3. Alternativa **b**.

4. Alterativa **a**.

UNIDADE 2 – Grandezas em geral e áreas

CAPÍTULO 6 – Grandezas e medidas

Problemas e exercícios propostos (p. 152)

1. Alternativa **d**.

2. Alternativa **c**.

3. Alternativa **b**.

5. Alternativa **d**.

6. Alternativa **c**.

7. a) $104{,}5 \cdot 10^{12}$ km

b) $7{,}761 \cdot 10^{14}$ kg

8. Alternativa **c**.

Problemas e exercícios propostos (p. 156)

10. a) 44 199 975,23 Mbps

b) 44 199 949,8 Mbps

11. Alternativa **c**.

Problemas e exercícios propostos (p. 159)

12. a) $2{,}5 \cdot 10^{-10}$ **c)** $9{,}87 \cdot 10^{-14}$

b) $4{,}32 \cdot 10^{11}$ **d)** $1{,}235 \cdot 10^{-11}$

13. $2{,}628 \cdot 10^6$ L
14. $9{,}7 \cdot 10^7$ m ou $9{,}7 \cdot 10^9$ cm.
15. $2{,}75 \cdot 10^{13}$ glóbulos vermelhos.
16. $9{,}88 \cdot 10^{19}$ km
17. Alternativa **c**.
18. Alternativa **a**.
19. a) Exatos: 5 e 8; duvidoso: 4.
    b) Exatos: 8 e 0; duvidoso: 6.
    c) Exato: 3; duvidoso: 9.
    d) Exatos: 3 e 9; duvidoso: 0.
20. Alternativa **b**.

Cálculo rápido (p. 160)

1. a) $\dfrac{1}{0{,}00001} = 100\,000$
   b) $\dfrac{1}{10\,000} = 0{,}0001$
   c) $\dfrac{1}{0{,}0001} = 10\,000$
   d) $\dfrac{1}{10\,000\,000} = 0{,}0000001$
   e) $\dfrac{1}{0{,}0000001} = 10\,000\,000$
2. a) $n = 6$ d) $n = -6$
   b) $n = 9$ e) $n = -6$
   c) $n = 8$ f) $n = -5$
3. a) $4 \cdot 10^6 = 4\,000\,000$ e $400\,000 = 4 \cdot 10^5$.
   b) $3\,500\,000\,000 = 35 \cdot 10^8$ e $35 \cdot 10^9 = 35\,000\,000\,000$.
   c) $0{,}000000021 = 2{,}1 \cdot 10^{-8}$ e $2{,}1 \cdot 10^9 = 2\,100\,000\,000$.
   d) $1\,600\,000 = 1{,}6 \cdot 10^6$ e $1{,}6 \cdot 10^5 = 160\,000$.
   e) $8\,000\,000\,000 = 8 \cdot 10^9$ e $8^9 = 134\,217\,728$.
   f) $4{,}8 \cdot 10^{-5} = 0{,}000048$ e $0{,}00048 = 4{,}8 \cdot 10^{-4}$.

Para recordar (p. 160)

1. Acima de 40 km rodados.
2. Alternativa **c**. 3. $100°$
4. a) 12 b) 5 c) $2\sqrt{11}$ d) 2
5. 10 km 6. 18 cm

Foco no raciocínio lógico (p. 161)

1. Alternativa **b**. 3. Alternativa **e**.
2. Alternativa **a**.

Matemática e unidades de medida (p. 162)

1. Velocidade da luz: 299 792 458 m/s; 17 987 547 480 m/min ou 25 902 068 371 200 m/dia ou 9 454 254 955 488 000 m/ano-luz.

Medida de distância	Tempo que a luz leva para percorrer
Entre o Sol e a Terra (150 milhões de quilômetros)	500 segundos (cerca de 8 minutos)
Entre a Lua e a Terra (384 400 quilômetros)	1,3 segundo
Entre o Sol e Plutão (5,9 bilhões de quilômetros)	19 680 segundos (cerca de 5,5 horas)

CAPÍTULO 7 – Áreas de figuras planas

Problemas e exercícios propostos (p. 166)

1. a) $6\sqrt{2}$ cm 2. a) $4\sqrt{3}$ m
   b) 3 cm b) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ m
3. a) 11 cm² b) 24,5 cm²

Problemas e exercícios propostos (p. 171)

4. a) 18 cm²
   b) 54 cm²
   c) 40 cm²
   d) 96 cm²
   e) 35 cm²
5. Alternativa **e**.
6. Alternativa **a**.
7. Alternativa **b**.

Problemas e exercícios propostos (p. 177)

10. Alternativa **a**. 13. Alternativa **b**.
11. Alternativa **d**.

Cálculo rápido (p. 179)

1. a) 78° 2. a) 143°
   b) 63° b) 101°
   c) 55° c) 82°
   d) 49° d) 75°
   e) 31° e) 24°
   f) 22° f) 138°
   g) 14° g) 93°
   h) 6° h) 56°
   i) 87° i) 19°
   j) $90° - x$ j) $180° - y$
3. 30° e 60°. 4. 60° e 120°.
5. $\text{med}(\hat{a}) = 160°$; $\text{med}(\hat{b}) = 20°$; $\text{med}(\hat{c}) = 20°$; $\text{med}(\hat{d}) = 140°$; $\text{med}(\hat{e}) = 140°$; $\text{med}(\hat{f}) = 40°$

Para recordar (p. 180)

1. $-0{,}007$ 4. Alternativa **a**.
2. Alternativa **b**. 5. Alternativa **a**.
3. Alternativa **a**.

Foco no raciocínio lógico (p. 181)

2. Alternativa **a**.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 184)

1. Alternativa **d**. 2. Alternativa **d**.

UNIDADE 3 – Sequências e progressões

CAPÍTULO 8 – Sequências numéricas

Problemas e exercícios propostos (p. 194)

1. Respostas possíveis:
   a) Do primeiro para o segundo termo foi adicionado 10. O segundo termo é o dobro do primeiro termo.
   b) (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100); (10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120).
2. Respostas possíveis:
   a) Cada termo, a partir do segundo, tem 3 unidades a mais que o termo anterior: (5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32)
   b) Cada termo, a partir do segundo, é o triplo do anterior; (5, 15, 45, 135, 405, 1215, 3645, 10 935, 32 805, 98 415).
   c) Cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando $\frac{1}{7}$ ao termo anterior; $\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, 1, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}\right)$.
   d) Cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando 0,2 ao termo anterior; (0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2; 2,2; 2,4).
3. Respostas possíveis:
   a) Cada termo, a partir do segundo, tem 3 unidades a mais que o termo anterior; 28.
   b) Cada termo, a partir do segundo, é a metade do termo anterior; $\frac{1}{128}$.
   c) Cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando por 10 o termo anterior; 100 000 000.
4. a) $a_7 = 35$; $a_{10} = 50$
   b) $a_n = 5n, n \in \mathbb{N}^*$
5. Respostas possíveis:
   a) $a_n = -n - 1, n \in \mathbb{N}^*$; $a_{20} = -21$.
   b) $a_n = 4 \cdot n, n \in \mathbb{N}^*$; $a_{20} = 80$.
   c) $a_n = 2 \cdot n, n \in \mathbb{N}^*$; $a_{20} = 40$.
6. a) (3, 6, 9, 12, 15, ...)
   b) (5, 6, 7, 8, 9, ...)
   c) (2, 6, 10, 14, 18, ...)
   d) (2, 5, 10, 17, 26, ...)
   e) (4, 12, 24, 40, 60, ...)
   f) (9, 99, 999, 9 999, 99 999, ...)
   g) $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, ...\right)$
   h) (1, 11, 111, 1 111, 11 111, ...)
   i) (−2, 1, 4, 7, 10, ...)
   j) (16, 8, 4, 2, 1, ...)
   k) (1, 4, 5, 9, 14, ...)
7. Itens **a** e **c**.
8. a) (1, 4, 9, 16)
   b) $a_n = n^2$, com $n \in \mathbb{N}^*$.
   c) Figura com 25 quadradinhos.
   d) 55 quadradinhos.
   e) 81 quadradinhos; 144 quadradinhos.
9. a) 91 e 127 pontos.
10. a) 76 cubinhos.
    b) O 20º elemento da sequência.
12. a) (0, 1, 3, 6, 10) b) (1, 2, 2, 3, 2, 4)
13. a) Decrescente; crescente.
    b) Crescente; decrescente.

Cálculo rápido (p. 196)

1. a) $S = \{2\}$ d) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
   b) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ e) $S = \{-1\}$
   c) $S = \{-6\}$ f) $S = \{1\}$
2. a) $S = \{2\}$
   b) $S = \{5\}$
   c) $S = \{-2\}$
   d) $S = \{-4, 0\}$
   e) $S = \{-3, 3\}$
   f) $S = \{\ \}$.

3. a) $S = \{-5, 6\}$
   b) $S = \{-10, 30\}$
   c) $S = \{-2, 0, 2, 4\}$
   d) $S = \left\{-2, -\frac{1}{5}\right\}$

4. a) $S = \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$ b) $S = \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$

Para recordar (p. 196)

1. Não, pois p não está entre 14 e 15.
2. a) 96 pessoas. b) 64 pessoas.
3. $f(x) = -4$
4. Alternativa **c**.
5. a) (3, 2) b) Sim.
6. $f(x) = -11x - 20$; $x = -\frac{20}{11}$
8. 0 e 1.
9. a) $f(x) = -\frac{3}{5}x + 3$
   b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}$

Foco no raciocínio lógico (p. 197)

3. 6 crianças.

Matemática e cidadania (p. 198)

1. a) A: R$ 2 140,00; B: R$ 2 889,00;
   C: R$ 3 424,00; D: R$ 4 982,00;
   E: R$ 5 512,00.
   b) Apenas na do funcionário B.

CAPÍTULO 9 – Progressões

Problemas e exercícios propostos (p. 202)

2. a) 6 b) 6
3. a) A razão é 4 e a sequência é crescente.
   b) A razão é 0 e a sequência é constante.
   c) A razão é -3 e a sequência é decrescente.
4. Para $x = 0$, a sequência é (0, 0, 0) e para $x = 4$, a sequência é (8, 12, 16).
5. A razão é -7.
6. A P.A. pode ser $(-4, 1, 6)$ ou $(6, 1, -4)$.
7. A P.A. pode ser $(-5, -2, 1)$ ou $(1, -2, -5)$.
8. $(8, 4, 0, -4, -8)$
10. (3,5; 5; 6,5; 8)
11. A vigésima fila tem 75 assentos.
12. Alternativa **d**.

Problemas e exercícios propostos (p. 204)

13. a) 30 d) $-\frac{63}{4}$
    b) 57 e) 12
    c) $\frac{24}{19}$
14. 30 termos.
16. $a_n = 3n + 2, n \geqslant 1, n \in \mathbb{N}$
17. 5
18. $(-4, 1, 6, 11, 16, \ldots)$
19. 390
20. $(10, 7, 4, 1, \ldots)$ ou $(-1, -4, -7, -10, \ldots)$.
21. 300
22. 7 500
23. a) (2, 8, 14, 20, 26, 32)
    b) $(1, k, 2k - 1, 3k, 4k - 1, \ldots, k^2 - k + 1, k^2)$
24. 2 600 m
25. Alternativa **b**.

Problemas e exercícios propostos (p. 209)

26. $S_{100} = 24\,450$
27. a) 2 550 b) $n + n^2$
28. a) $a_n = -12 + 10n$;
    $S_n = -7n + 5n^2, n \in \mathbb{N}^*$
    b) $a_n = -15 + 7n$;
    $S_n = \frac{-23n + 7n^2}{2}, n \in \mathbb{N}^*$
29. b) $S_{30} = 1605$
30. $(-10, -6, -2, 2, 6, 10, \ldots)$
31. 930
32. $x = 106$
33. a) $S_{50} = 2\,500$
    b) $S_{31} = 1550$
34. 416 334
35. 13
36. 9
37. $a_n = -10 + 4n$, $n \in \mathbb{N}^*$
39. 1 512 telhas.
40. Alternativa **d**.
41. 10 000 palitos.

Problemas e exercícios propostos (p. 212)

42. a) A sequência não é uma P.G.
    b) A sequência é uma P.G. de razão $-\frac{2}{3}$.
    c) A sequência não é uma P.G.
    d) A sequência é uma P.G. de razão $\frac{1}{10} = 0{,}1$.
43. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2} - 1$
44. a) É uma P.G. de razão -1.
    b) Não é uma P.G.
45. $a + b + c = 42$
46. a) 39 pessoas sabiam da notícia às 3 h da tarde e 1 092 pessoas sabiam da notícia às 6 h da tarde.
47. a) $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\right)$
    b) $\left(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$
    c) Ambas as sequências são progressões geométricas.
48. $(-16, -8, -4)$ ou $(-4, -8, -16)$.

Problemas e exercícios propostos (p. 215)

50. a) $a_{10} = 1536$ b) 12º termo.
51. a) 3 b) -2
52. 15 termos.
53. $a_{10} = 1536$; $a_{11} = -3\,072$
54. $\left(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots\right)$ ou $\left(-\frac{1}{2}, 1, -2, 4, \ldots\right)$.
55. a) (2, 4, 8, 16, 32) ou $(2, -4, 8, -16, 32)$.
    b) $(-2, 6, -18, 54, -162, 486)$
56. $a_n = 3 \cdot (4)^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$
57. A produção será de $(1{,}1)^{11} \cdot k$.
58. a) Aproximadamente R$ 1 171,66.
    b) A segunda aplicação é mais vantajosa.

Problemas e exercícios propostos (p. 217)

60. a) $S_{100} = 300$
    b) $S_{200} = -600$
61. $\frac{3}{2}$
62. $a_2 = 2$
63. $a_n = -2^n, n \in \mathbb{N}^*$
64. 48 metros.
65. 1 431 655 764 pessoas.
66. a) 59 049 galhos novos.
    b) 9 840 galhos.
67. A loja saiu ganhando.

Problemas e exercícios propostos (p. 222)

69. a) $S_n = -3^{-n} + 1, n \in \mathbb{N}^*$
    b) 1
70. a) $\frac{16}{3}$ b) $\frac{32}{3}$ c) $-\frac{16}{3}$
71. $\frac{3}{2}$
72. a) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{617}{990}$
    b) $\frac{23}{99}$ d) $\frac{11}{75}$
73. a) $\frac{255}{32}\pi$ b) 8π
74. a) $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$ c) $S = \left\{\frac{105}{8}\right\}$
    b) $S = \{37\}$
75. Alternativa **d**.
76. a) $2\pi a^2$ b) $8a^2$

Tecnologia (p. 223)

1. a) 32 c) 10 077 696
   b) 531 441 d) 78 125
2. a) 2 × = = = =
   b) 3 × = = = = = = = = = = =
   c) 6 × = = = = = = = =
   d) 5 × = = = = = =
3. d) $f(n)$: $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \frac{1}{2187}, \frac{1}{6561}, \frac{1}{19683}, \frac{1}{59049}, \frac{1}{177147}\right)$
   e $g(n)$: $(-0{,}7; -0{,}49; -0{,}343; -0{,}2401; -0{,}16807; -0{,}117649; -0{,}0823543; -0{,}05764801; -0{,}040353607; -0{,}028247524)$.
   e) f: $S_{10} \simeq 0{,}17$ e g: $S_{10} \simeq 2{,}27$.
4. a) $(a_{n-1})^2 + (a_n)^2 = a_k, n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}^*$
   b) $1 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_{n+2}, n \in \mathbb{N}^*$

Cálculo rápido (p. 224)

1. a) 3 d) 1
   b) 1 e) 18
   c) 343 f) -1
2. a) 3^{11} c) 3^8
   b) 3^9 d) 3^{20}
3. Sim; $3^4 = (3^2)^2 = 9^2$.

4. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ e) $\left(\frac{1}{7}\right)^3$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ d) $\left(\frac{1}{10}\right)^5$

5. a) 10^{-2} b) 10^{-4} c) 10^{-3} d) 10^{-7} e) 10^{-5}

6. a) 0,1 c) $\frac{1}{144}$ e) $\frac{1}{16}$ g) 9 i) -1

b) 0,01 d) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{1}{32}$ h) $\frac{1}{9}$ j) -125

Para recordar (p. 224)

1. 20% dos funcionários.
2. 680 funcionários.
3. $p = 5$
4. 72 meses.
5. Alternativa **e**.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 228)

1. Alternativa **c**. 2. Alternativa **d**. 3. Alternativa **b**.

UNIDADE 4 – Educação Financeira e noções de Estatística

CAPÍTULO 10 – Estatística: amostragem e medidas de tendência central

Problemas e exercícios propostos (p. 243)

7. c)

Resultados	Vitórias	Empates	Derrotas	Total
fr (%)	65	25	10	**100**

8. c) 30%

Problemas e exercícios propostos (p. 247)

12. a) 12 vezes. b) 10% c) 45 vezes. d) 90%

13. a) 5% c) Provavelmente 20%.

14. a) 200

b)

Marca de tênis preferida dos estudantes do 1º ano do Ensino Médio		
Marca	**f**	**fr (%)**
Mile	36	18
Dipas	34	17
Rupanor	48	24
Outras marcas	82	41

Dados fictícios.

c) A soma é 100%, pois 100% correspondem ao total de porcentagens da amostra.

15. a)

Número de filhos dos funcionários da empresa de transporte							
Número de filhos por funcionário	0	1	2	3	4	5	6
Número de funcionários	18	10	23	4	3	1	1
fa	18	28	51	55	58	59	60
fr (%)	30	16,7	38,3	6,7	5	1,7	1,7
fra (%)	30	46,7	85	91,7	96,7	98,3	100

Dados fictícios.

b) 51 c) 91,7% d) 30% e) 5 funcionários; 8,4%.

16. a)

Automóveis em circulação em 2025				
Marca	A	B	C	D
f	175	115	95	115
fr	0,35	0,23	0,19	0,23

Dados fictícios.

b) 95 c) 500

Problemas e exercícios propostos (p. 252)

18. Alternativa **d**.

Problemas e exercícios propostos (p. 257)

22. A embalagem de 500 g.

24. a) 7,5 b) 9,5

25. $\overline{X} = 1900$. Não, a maioria recebe salário inferior à média.

26. 5

27. Alternativa **d**.

28. Alternativa **d**.

29. Alternativa **c**.

30. Alternativa **b**.

31. Alternativa **c**.

32. a) $Mo_A = 45$, $Mo_B = 53$; $Md_A = 46$, $Md_B = 52$; $\overline{X}_A = 51$, $\overline{X}_B = 48$.

b)

Turma A				
Acertos	45	46	48	98
Quantidade	5	1	4	1
Frequência relativa	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$

Turma B				
Acertos	7	51	52	53
Quantidade	1	4	1	5
Frequência relativa	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{5}{11}$

33. a) R$ 2 304,00 b) Não. Quatro funcionários.

34. Alternativa **e**.

35. Pergunta do item **c**: 7,2.

Problemas e exercícios propostos (p. 265)

36. a) R$ 130,00 b) 58%

37. a)

Altura (cm)	Ponto médio	f	fr (%)
146 ⊢ 150	148	4	10
150 ⊢ 154	152	7	17,5
154 ⊢ 158	156	10	25
158 ⊢ 162	160	5	12,5
162 ⊢ 166	164	8	20
166 ⊢ 170	168	6	15

c) 26; 40

d) $\overline{X} = 158{,}4$ cm; Mo = 156 cm; Md = 156 cm.

38. a)

Salários	f
4 700 ⊢ 5 100	20
5 100 ⊢ 5 500	110
5 500 ⊢ 5 900	180
5 900 ⊢ 6 300	120
6 300 ⊢ 6 700	30

b) Aproximadamente 130 entrevistados.

c) $\overline{X} \simeq$ R$ 5 726,00; Mo = R$ 5 700,00; Md = R$ 5 700,00.

39. b)

Montante	f	fa	fr (%)	fra (%)
500 ⊢ 1 000	28	28	14,1	14,1
1 000 ⊢ 1 500	12	40	6	20,1
1 500 ⊢ 2 000	32	72	16,1	36,2
2 000 ⊢ 2 500	50	122	25,1	61,3
2 500 ⊢ 3 000	38	160	19,1	80,4
3 000 ⊢ 3 500	32	192	16,1	96,5
3 500 ⊢ 4 000	7	199	3,5	100

c) 72 pagamentos.
d) 96,48%

Cálculo rápido (p. 266)

1. a) 18 b) 24 c) 42 d) 60 e) 90 f) 96
2. 0,014; 0,14; 1,4; 14; 140 e 0,03; 0,3; 3; 30; 300.
3. a) 3,3 b) 1,54 c) 330 d) 66,6 e) 33,3 f) 154

Para recordar (p. 267)

1. 570 estudantes.
2. Aproximadamente 31%.
4. Alternativa **b**.

Foco no raciocínio lógico (p. 267)

2. Alternativa **c**.
3. 1 110 pessoas.

CAPÍTULO 11 – Educação Financeira e projeto de vida

Cálculo rápido (p. 286)

1. a) -12 b) 6 300 m c) 22,5 m^2 d) 8,9 e) $\frac{1}{2}$
2. a) 200 b) 100 c) 20 d) 10 e) 10

Para recordar (p. 287)

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **a**.
3. 12
4. Alternativa **d**.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 290)

1. Alternativa **b**.
2. Alternativa **c**.

TRANSCRIÇÃO DOS ÁUDIOS

UNIDADE 1

***Podcast* – Mitos acerca do número de ouro**

Página 16

Um, dois, três, cinco, oito, treze, vinte e um fazem parte de uma sequência conhecida como sequência de Fibonacci.
Eu sou o William e esse é o *podcast* Humor Com Ciência.
Responda à seguinte pergunta: O número de ouro está presente em tudo?
Não sei se você já ouviu falar nisso, mas o número de ouro, também chamado de proporção divina, seção áurea, razão de ouro, entre outros nomes, nada mais é do que uma constante, o resultado da divisão de duas grandezas.
Esse número, tradicionalmente representado pela letra grega fi, recebeu essa notação por causa do escultor grego Fídias, que teria utilizado o número de ouro ao conceber o Partenon.
Essa é a informação que corre por aí, mas não há registros de que esse cara, o Fídias, concebeu o Partenon. Parece que ele participou só da decoração interna e da elaboração de uma estátua de culto a Atena. Enfim, fizeram uma homenagem para o cara errado.
Tá, mas o que esse número tem de tão especial?
Muitas pessoas, inclusive professores universitários, dizem que podemos encontrar o número de ouro em muitos lugares: nos galhos de uma árvore, no girassol, em construções antigas, nas abelhas, no corpo humano, nas obras de arte, enfim, em muitas coisas.
Mas tudo isso é verdade?
Sinto muito decepcioná-lo, mas muito do que se diz por aí a respeito do número de ouro é falso. Ouça um trecho do artigo "Equívocos sobre a razão áurea", escrito por George Markowsky, PhD em Matemática pela Universidade Harvard:
"Geralmente, suas propriedades matemáticas são enunciadas corretamente, mas muito do que é apresentado sobre ele em artes, arquitetura, literatura e estética é falso ou seriamente enganador. Infelizmente, essas afirmações sobre o número de ouro alcançaram *status* de senso comum e são amplamente repetidas.".
Vou listar cinco dos vários equívocos apontados por este professor.

- Número um: Acreditar que os gregos usaram o número de ouro na construção do Partenon, em Atenas.
- Número dois: Achar que a Grande Pirâmide de Quéops, no Egito, foi construída seguindo as proporções áureas.
- Número três: Dizer que o retângulo áureo é o mais agradável em termos estéticos.
- Número quatro: Achar que o corpo humano exibe proporções áureas.
- Número cinco: Afirmar que Leonardo da Vinci usou a razão áurea no desenho da *Mona Lisa* e do *Homem vitruviano*.

É isso aí que você ouviu. Não existem registros que indiquem que Leonardo da Vinci tenha usado o número de ouro ao pintar a *Mona Lisa*. O *Homem vitruviano*, que muitos livros didáticos dizem ter proporções áureas, foi criado por Leonardo da Vinci no século XV, para ilustrar suas notas sobre o trabalho do arquiteto romano Marcus Vitruvius. O número de ouro nem é citado nessas notas.
Além de tudo isso, até hoje ainda não encontramos nenhuma árvore, girassol, abacaxi ou alguma concha de *Nautilus* que tenha o número de ouro.
E aí, sua cabeça explodiu?
Calma, a culpa não é do número de ouro. Ele de fato está presente em algumas coisas. Sabe aquela sequência que eu cantei no início do *podcast*? Então, note que os números seguintes da sequência sempre são a soma dos dois anteriores. Pegue um número, por exemplo 3, ele é o resultado da soma dos dois números anteriores, 2 mais 1. O próximo da sequência, o 5, é o resultado da soma de 3 mais 2. O 8 é a soma de 5 mais 3, o 13 é a soma de 8 mais 5 e assim por diante.
O número de ouro começa a dar as suas caras quando dividimos o número da sequência pelo anterior. Experimente dividir o 8 por 5. Agora, divida o 13 por 8. Continue e divida 21 por 13. Perceba que o resultado dessas divisões vai se aproximando de um número, e esse número é o número de ouro.
Ele também aparece em figuras planas, como o pentágono regular e o decágono regular.
E aí, você ainda acredita que o número de ouro está presente em tudo?
Bem, por hoje é só! Até a próxima, pessoal!
Podcast Humor com Ciência. Episódio "O número de ouro está em tudo?". Crédito: Humor com Ciência/Arquivo. Locução: Jader Cardoso/ID/BR.

PODCAST Humor com Ciência: O número de ouro. [Locução de]: William. [*S. l.*]: Humor com Ciência, 18 set. 2015. *Podcast*. Disponível em: https://www.humorcomciencia.com/podcasts/humor-com-ciencia-s01e02/. Acesso em: 30 set. 2024.

Podcast – Leonhard Euler e John Venn, conheça mais esses dois matemáticos!

Página 27

Narrador: Olá! Bem-vindos ao nosso *podcast*. No episódio de hoje, vamos explorar a vida e as contribuições de dois brilhantes matemáticos: Leonhard Euler e John Venn. As representações de conjuntos que eles desenvolveram se perpetuaram e, hoje, são conhecidas por diagramas de Euler-Venn.

Para começar, vamos conhecer um pouco a vida de Leonhard Euler, um dos maiores matemáticos e cientistas da história.

Ele nasceu em Basileia, ao norte da Suíça, em 1707 e é considerado o principal matemático do século XVIII. Euler provou teoremas e resolveu problemas que já eram conhecidos na época. Além disso, mostrou que algumas demonstrações já conhecidas estavam erradas.

Ingressou na faculdade aos 16 anos, onde obteve o título de mestre em Filosofia. Sim! A opção inicial de Euler não foi pela Matemática, mas seu interesse em estudar as ciências exatas o levou a ser professor de Física na Academia de Ciências da Rússia, em São Petersburgo e, posteriormente, de Matemática.

Anos depois, ele morou na Alemanha, onde escreveu a maioria dos tratados e obras de sua vida.

É conhecido por criar notações matemáticas que usamos até hoje, como $f(x)$, para representar funções.

Você já ouviu falar nelas?

Também é famoso por ter popularizado o uso de símbolos, como a letra grega π, que até hoje é usada para indicar a razão entre o comprimento de uma circunferência e o diâmetro dela. Essa representação foi usada pela primeira vez um ano antes do nascimento de Euler, mas só foi realmente aceita depois que Euler a adotou.

Ele foi o primeiro a usar a letra grega Σ como a indicação de uma soma de termos e deu sua inicial a um número irracional.

Pois é, ele tinha um número irracional para chamar de seu!

Esse número se tornou um dos números irracionais mais importantes, assim como o π, e é, até hoje, representado pela letra *e*.

Aos 31 anos, Euler perdeu a visão do olho direito e aos 59 ficou completamente cego. Mas isso não o impediu de continuar suas pesquisas e publicações, mantendo seu ritmo de trabalho por mais 17 anos.

Ele passou a realizar cálculos mentalmente e ditava tudo para que seus assistentes registrassem. Assim, escreveu alguns livros e publicava cerca de um artigo por semana!

Euler é considerado a pessoa com mais publicações, estudos e tratados realizados até hoje, o matemático mais produtivo da história, em quantidade e qualidade. Escreveu cerca de 800 páginas por ano e publicou mais de 500 obras e artigos durante toda a sua vida.

Em seus estudos, trouxe contribuições para diversas áreas da Matemática, Física, Engenharia, Química e Astronomia.

Certamente, você já ouviu falar dele por aí e ainda vai ouvir muito mais.

Em anos anteriores, você já deve ter estudado a famosa relação de Euler, que relaciona o número de vértices, faces e arestas de todo poliedro convexo: o número de vértices mais o número de faces é igual ao número de arestas mais 2. Você se lembra disso?

São tantas informações e tantas contribuições, mas não podemos esquecer que estamos aqui para falar dos diagramas de Euler!

Ele desenvolveu um modo de representar conjuntos que podia ser usado para testar raciocínios dedutivos. A primeira referência desses diagramas foi registrada por Euler em uma de suas cartas a uma princesa, sobrinha de Frederico, o Grande, durante a Guerra dos Sete Anos.

Agora que já conhecemos tanto sobre Leonhard Euler, vamos falar um pouco sobre o matemático inglês John Venn!

Ele nasceu pouco depois de um século do nascimento de Euler, cerca de 50 anos após o falecimento dele.

John Venn contribuiu de modo muito significativo para o desenvolvimento da Lógica e da Estatística e, além disso, era inventor! Uma de suas invenções foi uma máquina de lançar bolas de críquete que conseguiu derrubar o craque do time australiano da época.

Mas você deve estar se perguntando: E seus tão famosos diagramas, onde entram nisso tudo?

Vou te contar agora mesmo quando eles surgiram e por que são importantes até hoje!

Quando Venn apresentou os famosos diagramas pela primeira vez, em 1894, ele aplicou uma representação já utilizada anteriormente, que ele chamava de diagramas eulerianos. Aqueles mesmos que Euler desenvolveu!

Mas Venn fez a representação dos diagramas de um modo que ficou mais fácil de compreender. Enquanto Euler estabelecia um conceito inicial para a representação gráfica de conjuntos, Venn expandiu essa ideia, incluindo todas as possíveis intersecções entre conjuntos.

O que isso quer dizer exatamente?

Os diagramas de Euler mostram apenas as intersecções que realmente existem, omitindo as que são vazias.

Os diagramas de Euler-Venn são ferramentas visuais simples que nos permitem entender e representar relações lógicas entre diferentes conjuntos de dados. Eles constituem um recurso importante quando precisamos representar intersecções, uniões e diferenças entre conjuntos.

Esses diagramas se tornaram importantes não só na Matemática, mas também em diversas outras áreas, como Estatística, Lógica e Ciências da Computação.

A razão pela qual os diagramas de Euler-Venn são tão relevantes até hoje é justamente por sua capacidade de transformar conceitos abstratos em algo visualmente fácil de entender. Eles podem ser usados para organizar o raciocínio e para solucionar problemas de maneira lógica.

As contribuições de John Venn e Leonhard Euler são exemplos de como ideias matemáticas podem aprofundar o entendimento de conceitos já formulados por outros.

Esperamos que esses dois matemáticos brilhantes sirvam de inspiração para seus estudos!

E, assim, chegamos ao fim deste episódio! Muito obrigado por nos acompanhar até aqui. Até o próximo episódio!

Podcast criado para fins didáticos. Produção de Audioman.

Para compor as informações deste *podcast*, foram consultados o *site Clubes de Matemática da Obmep* e o livro *Introdução à história da Matemática*, de Howard Eves.

Fontes de pesquisa:

Equipe Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep). John Venn. *Clubes de Matemática da Obmep*, Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/b_john-venn/. Acesso em: 17 set. 2024.

Eves, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

Podcast – Engenharia de _prompt_

Página 53

Narrador: Olá, pessoal! Bem-vindos ao nosso *podcast*! Hoje vamos conversar um pouco sobre os comandos que damos à inteligência artificial, os famosos *prompts*!

Se você já utilizou a tecnologia de inteligência artificial, deve ter notado que a maneira como você formula uma pergunta pode alterar bastante a resposta que ela fornece, não é mesmo?

A engenharia de *prompts* é o processo em que você orienta uma inteligência artificial generativa para obter os resultados desejados. Pronto! Explicado!

Ei, mas, espera aí... O que é inteligência artificial generativa? E o que é um *prompt*?
Eu vou explicar. Vamos lá!
A inteligência artificial generativa é um ramo da inteligência artificial dedicado à criação de conteúdo, que pode ter formato de histórias, conversas, vídeos, imagens ou músicas.
Prompt, ou comando, é um texto usado para solicitar a execução de tarefas pela inteligência artificial. Em outras palavras, é uma instrução em linguagem natural pela qual pedimos à inteligência artificial generativa que execute uma tarefa específica.
E tem mais!
Para esses dois conceitos, a regra é clara: quanto melhor a qualidade do seu *prompt*, melhor será o retorno que você obterá da inteligência artificial!
É aqui que entram os engenheiros de *prompt*! Eles desempenham um papel essencial na elaboração dessas instruções, ajudando os modelos de inteligência artificial generativa a entender não apenas a linguagem, mas também a intenção por trás do comando. Eles utilizam técnicas para guiar o que a inteligência artificial vai gerar, garantindo respostas mais adequadas e reduzindo o risco de alucinações.
Opa, espera aí... Você deve estar se perguntando: O que são alucinações da inteligência artificial?
Eu explico: alucinação é quando a inteligência artificial gera respostas incorretas.
Agora, retomando o ponto anterior, o engenheiro de *prompt* é um profissional que usa a criatividade para refinar os *prompts* e, assim, obter resultados mais precisos e corretos da inteligência artificial.
Alguns aspectos são muito importantes para criar bons *prompts* e, dessa forma, obter melhores resultados.
Vamos falar um pouco de cada um!

- A especificidade ajuda a reduzir ambiguidades na resposta dada pela inteligência artificial.
- A contextualização orienta a inteligência artificial sobre o contexto em que a instrução está inserida.
- Quando falamos de iteratividade, nos referimos à prática de ajustar o *prompt* com base na resposta anterior da inteligência artificial.
- Palavras-chave relevantes ajudam a direcionar a inteligência artificial para a área de interesse.
- E, por fim, a estruturação lógica do *prompt* facilita a compreensão da solicitação, resultando em respostas mais assertivas.

Quer um exemplo? Se você quer que a inteligência artificial melhore o texto de um *e-mail* que precisa enviar, você pode apenas pedir "Melhore o texto do *e-mail* a seguir", mas este não será um bom *prompt*. Em um bom *prompt*, você deve incluir para que o *e-mail* se destina, o tom da linguagem que gostaria e algumas características, como a quantidade de parágrafos ou caracteres que deseja que o *e-mail* tenha.
Um bom *prompt* é específico, fornece o contexto, usa palavras-chave adequadas, tem uma estrutura clara e é refinado com base nos resultados obtidos anteriormente.
Muito interessante, não é?!
Pois bem, meus amigos, a engenharia de *prompt* é a arte e a ciência de criar o pedido ideal para receber da inteligência artificial a resposta mais próxima possível da que você espera ou deseja. Ela envolve a formulação de perguntas, comandos ou instruções para orientar a inteligência artificial de maneira eficaz. A chave para uma boa engenharia de *prompt* é a clareza e a especificidade. Ao fornecer detalhes suficientes e direcionamentos claros, você pode guiar a inteligência artificial para focar em aspectos específicos do tópico ou até mesmo seguir um determinado estilo de resposta. Por exemplo, se vc deseja uma resposta concisa e técnica, seu *prompt* deve refletir esta expectativa, talvez incluindo palavras-chave ou requisitos de formato. Por outro lado, se você busca uma resposta mais criativa ou narrativa, seu *prompt* pode ser mais aberto e descritivo.
A habilidade em ajustar e refinar os *prompts*, muitas vezes através de um processo iterativo, permite explorar o potencial da inteligência artificial e obter respostas que atendam com precisão às suas necessidades. A engenharia de *prompt*, portanto, não é apenas sobre o que você pergunta, mas como você pergunta.
Além disso, é importante lembrar que a inteligência artificial está em constante evolução. Isso significa que os *prompts* que funcionam bem hoje podem precisar de ajustes no futuro. Manter-se atualizado é extremamente útil para continuar obtendo bons resultados. Outra dica valiosa é colaborar com outras pessoas. A troca de experiências e conhecimentos na utilização de inteligência artificial pode proporcionar *insights* valiosos.
Antes de encerrar, gostaria de compartilhar uma dica prática: experimente criar diferentes versões de um mesmo *prompt* e veja como a inteligência artificial responde a cada uma delas. Isso pode ajudar a entender melhor como ajustar as suas instruções para obter os melhores resultados.
E agora eu pergunto a você: Qual seria um bom *prompt* para pedir mais episódios do nosso *podcast*?
Chegamos ao fim deste episódio! Muito obrigado por nos acompanhar até aqui. Espero que você tenha gostado e aprendido algo novo! Até o próximo episódio!

Podcast criado para fins didáticos. Produção de Audioman.
Para compor as informações deste *podcast*, foi consultado o documento chamado *Engenharia de prompt*, de André Luiz Monteiro da Rocha, que está disponível no *site* da Controladoria Geral da União.

Fonte de pesquisa:

ROCHA, André Luiz Monteiro da. *Engenharia de* prompt. Campo Grande: Controladoria Geral da União Regional MS, 2024. Disponível em: https://www.cnj.jus.br/wp-content/uploads/2024/04/15-08-14h30-andre-rocha-pdf.pdf. Acesso em: 17 set. 2024.

LISTA DE SIGLAS

Cederj: Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
Comvest-Unicamp: Comissão Permanente para os Vestibulares da Universidade Estadual de Campinas
Enem: Exame Nacional do Ensino Médio
EPCAr-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar
ESPM-SP: Escola Superior de Propaganda e Marketing
Famerp-SP: Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto
Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia de São Paulo
FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular
Ifal: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas
IFPE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco
IME-RJ: Instituto Militar de Engenharia
Insper-SP: Instituto de Ensino e Pesquisa
Obmep: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
Prova Brasil (Avaliação Nacional do Rendimento Escolar)
PUC-RJ: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas
Uece: Universidade Estadual do Ceará
UEFS-BA: Universidade Estadual de Feira de Santana
UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina
Uerj: Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UERR: Universidade Estadual de Roraima
Ufam: Universidade Federal do Amazonas
UFG-GO: Universidade Federal de Goiás
UFGD-MS: Universidade Federal da Grande Dourados
UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora
UFPA: Universidade Federal do Pará
UFPE: Universidade Federal de Pernambuco
UFPR: Universidade Federal do Paraná
UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFSCar-SP: Universidade Federal de São Carlos
UFT-TO: Universidade Federal do Tocantins
Unesp: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas
Unifor-CE: Universidade de Fortaleza
Unit-SE: Universidade Tiradentes
Univesp: Universidade Virtual do Estado de São Paulo
UPE: Universidade de Pernambuco
Vunesp: Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

Berlinghoff, W. P.; Gouvêa, F. Q. *A Matemática através dos tempos*: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução: Elza F. Gomide; Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

A obra apresenta 25 textos curtos que contam a história da Matemática. Enriquecido com questões e projetos que possibilitam aprofundar o conhecimento nessa área, esse livro inspirou a concepção deste volume sempre que a história da Matemática foi abordada no estudo de determinados conceitos.

Borba, M. de C.; Penteado, M. G. *Informática e educação matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Nesse livro, encontram-se exemplos do uso da informática para fins educativos. Muitas das abordagens apresentadas serviram de inspiração para a concepção das seções *Tecnologia* desta coleção.

Boyer, C. B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Blucher, 1996.

O livro apresenta a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. As informações nele contidas foram utilizadas na introdução ao estudo de conjuntos numéricos, assunto estudado no capítulo 1.

Brasil. [Constituição (1988)]. *Emenda constitucional n. 59, de 11 de novembro de 2009*. [...] dá nova redação aos incisos I e VII do art. 208, de forma a prever a obrigatoriedade do ensino de quatro a dezessete anos [...]. Brasília, DF: Presidência da República, [2009]. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/Emendas/Emc/emc59.htm. Acesso em: 8 out. 2024.

A emenda constitucional determina a Educação Básica obrigatória e gratuita das crianças a partir de 4 anos de idade aos jovens até 17 anos.

Brasil. Lei n. 13 415, de 16 de fevereiro de 2017. [...] institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, ano 154, n. 35, p. 1-3, 17 fev. 2017.

A lei implementou reformas no Ensino Médio, como a ampliação progressiva da carga horária anual, visando à implantação do período integral nas escolas.

Brasil. Ministério do Desenvolvimento, Indústria, Comércio e Serviços. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro). *Resumo do Sistema Internacional de Unidades*: SI. Duque de Caxias: Inmetro, 2006. Tradução da publicação do BIPM. Disponível em: http://www.inmetro.gov.br/consumidor/pdf/Resumo_SI.pdf. Acesso em: 8 out. 2024.

Além de descrever a metrologia, o resumo apresenta, de maneira detalhada, as tabelas das unidades de medida de base e seus respectivos múltiplos, submúltiplos e símbolos. Esses dados foram utilizados para abordar as unidades de medida e os tópicos “O sistema métrico decimal” e “Sistema Internacional de Unidades”, no capítulo 6.

Brasil. Ministério do Desenvolvimento, Indústria, Comércio e Serviços. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro). *Sistema Internacional de Unidades*: SI. 1. ed. bras. da 8. ed. do BIPM. Duque de Caxias: Inmetro/Cicma/Sepin, 2012. Disponível em: http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/si_versao_final.pdf. Acesso em: 8 out. 2024.

A publicação define e estabelece conceitos e usos da medição, de acordo com o Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM), em práticas adotadas em relações internacionais, no ensino e no trabalho científico. As informações foram utilizadas para abordar as unidades de medida e os tópicos “O sistema métrico decimal” e “Sistema Internacional de Unidades”, no capítulo 6.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica*: diversidade e inclusão. Brasília, DF: MEC/CNE/Secadi, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/etnico_racial/pdf/diretrizes_curriculares_nacionais_para_educacao_basica_diversidade_e_inclusao_2013.pdf. Acesso em: 18 set. 2024.

O documento apresenta as diretrizes curriculares nacionais da Educação Básica em diversas modalidades de ensino.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília, DF: MEC/SEB, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 10 out. 2024.

Esse documento normativo, elaborado pelo Ministério da Educação de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1996, estabelece os conhecimentos, as competências e as habilidades que todos os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica, incluindo o Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC/SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

Os temas contemporâneos transversais têm o objetivo de “explicitar a relação entre os diferentes componentes curriculares de forma integrada, bem como de fazer sua conexão com situações vivenciadas pelos estudantes”. O documento considera os contextos escolar e social, visando à formação dos jovens para o trabalho, a cidadania e a democracia e respeitando as características regionais e locais de tais contextos.

BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. Secretaria de Políticas para o Desenvolvimento Sustentável; Ministério da Educação. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade; Instituto de Defesa dos Consumidores (Idec). *Consumo sustentável*: manual de educação. Brasília, DF: Consumers International/MMA/MEC/Idec, 2005. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/publicacao8.pdf. Acesso em: 8 out. 2024.

O manual convida os cidadãos ao debate e à reflexão para que atuem de maneira sustentável no dia a dia, em suas práticas de consumo. As discussões contidas nesse manual foram utilizadas no capítulo 11.

BUSHAW, D. *et al. Aplicações da matemática escolar*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

Coletânea de artigos de especialistas na área da educação matemática que tratam de exemplos de aplicação da Matemática em diferentes áreas do conhecimento. Alguns desses exemplos foram utilizados na elaboração de problemas e exercícios deste volume.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (org.). *As ideias da álgebra*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

O livro trata de diversos conceitos algébricos, traz problemas com resoluções e aborda o uso de computadores e de calculadoras no aprendizado da álgebra. Os conteúdos dessa obra serviram de base para a concepção de muitos temas tratados neste volume.

DAMON, W. *O que o jovem quer da vida?* Como pais e professores podem orientar e motivar os adolescentes. Tradução: Jaqueline Valpassos. São Paulo: Summus Editorial, 2009.

Fundamentada em pesquisas e entrevistas, a obra orienta pais e professores a ajudar os jovens na elaboração de um projeto de vida, para que eles se sintam motivados a planejar o futuro. O material foi uma importante referência para a elaboração de parte do capítulo 11.

DEMARTINI, F. “Internet da Nasa” tem taxa de transferência de até 91 gigabits por segundo. *Canaltech*, 23 jun. 2014. Disponível em: https://canaltech.com.br/internet/Internet-da-NASA-tem-transferencias-de-ate-91-Gbits-por-segundo/. Acesso em: 8 out. 2024.

O artigo aborda alguns aspectos das novas tecnologias de transmissão de dados utilizadas pela Nasa, a agência espacial estadunidense, como a velocidade da taxa de transmissão por segundo e as contribuições dessa tecnologia para os estudos científicos e para a comunicação, além da falta de infraestrutura para usuários domésticos. Informações contidas nesse artigo contribuíram para a elaboração de atividades e textos deste volume.

FONSECA, M. da C. F. R. (org.). *Letramento no Brasil*: habilidades matemáticas. São Paulo: Ação Educativa: Global: Instituto Paulo Montenegro, 2004.

O livro apresenta um levantamento de dados sobre habilidades de leitura e escrita matemática da população brasileira. O conteúdo fundamentou a escolha de metodologias utilizadas neste volume e em outros livros desta coleção.

GARDNER, H. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Tradução: Maria Adriana Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

A obra explica as principais ideias relacionadas à aprendizagem e evidencia como elas podem ser aplicadas em sala de aula. Muitas das propostas desse livro consideram as diferentes maneiras de aprender correspondentes às múltiplas possibilidades da inteligência humana.

HOWARD, E. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

O livro apresenta a história da Matemática, desde a Antiguidade até os dias atuais, contextualizada pela observação da cultura de cada época retratada. Algumas informações dessa obra contribuíram para a introdução do estudo de todos os conjuntos numéricos apresentados no capítulo 1 deste volume.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar,* v. 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

O livro apresenta diversas definições e demonstrações que contribuíram para a fundamentação e a elaboração da unidade 3.

IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. *Fundamentos de matemática elementar,* v. 11: matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva. 2. ed. São Paulo: Atual, 2013.

As várias definições e demonstrações propostas no livro auxiliaram na fundamentação e na concepção das unidades 3 e 4.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar,* v. 1: conjuntos e funções. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.

A obra apresenta definições e demonstrações que contribuíram para a fundamentação e a elaboração de vários conceitos desenvolvidos neste volume.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de matemática elementar,* v. 9: geometria plana. São Paulo: Atual, 2013.

O livro aborda a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. As informações apresentadas contribuíram para a fundamentação e para a elaboração de conteúdos trabalhados neste volume.

INSTITUTO de Física da Universidade de São Paulo. *e-física*: ensino de Física *on-line*. Recursos do tema. Algarismos significativos. Disponível em: https://efisica2.if.usp.br/course/view.php?id=1781. Acesso em: 18 set. 2024.

Nessa aula virtual, são explorados alguns exemplos que envolvem medidas de comprimento de seres vivos, do raio de um átomo e de um objeto, expressas em notação científica. Esses exemplos contribuíram para as demonstrações de valores e respectivas incertezas apresentadas no capítulo 6.

Krulik, S.; Reys, R. E. (org.). *A resolução de problemas na matemática escolar*. Tradução: Hygino H. Domingues; Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

Coletânea de artigos que discutem metodologias de ensino da Matemática. Algumas ideias apresentadas nesse livro contribuíram para a concepção deste volume.

Lindquist, M. M.; Shulte, A. P. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

O livro apresenta vinte artigos de especialistas da área que tratam de rever a metodologia do ensino de Matemática. Esses textos contribuíram para a fundamentação e para a elaboração de conceitos explorados neste volume.

Mankiewicz, R. *The history of Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press, 2000.

Esse livro apresenta a história da Matemática com reproduções de imagens da Pré-História, da Idade Média e das tábuas de barro babilônicas, além de imagens computacionais. Essas informações contribuíram para explorar a história do diagrama de Euler-Venn utilizado no capítulo 1.

Morettin, P. A.; Bussab, W. O. *Estatística básica*. São Paulo: Saraiva, 2010.

A obra fornece conceitos de Estatística destinados a estudantes e profissionais de diversas áreas do conhecimento. A primeira parte, que trata da análise de dados unidimensionais e bidimensionais, bem como de métodos gráficos, foi utilizada como referência para a elaboração de textos e atividades dos capítulos que trabalham a Estatística.

Neves, I. C. B. *et al*. (org.). *Ler e escrever:* compromisso de todas as áreas. Porto Alegre: Ed. da UFRGS, 2011.

Esse livro foi estruturado de maneira coletiva, com o intuito de propor situações direcionadas ao trabalho integrado de professores de diversas áreas do conhecimento. As ideias e os saberes apresentados nessa obra fundamentaram a concepção de algumas atividades sugeridas neste volume, bem como das seções *Matemática e...*.

Onis, M. de *et al*. (coord.). *WHO child growth standards*: growth velocity based on weight, length and head circumference – methods and development. Geneva: World Health Organization, 2009. Disponível em: https://www.who.int/publications/i/item/9789241547635. Acesso em: 8 out. 2024.

O estudo apresenta dados do padrão de crescimento infantil, de acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), que foram utilizados no capítulo 3 deste volume, na elaboração de um gráfico de função que mostra a altura máxima e a mínima de acordo com a idade da criança.

Pais, M. J. *et al*. *Educação financeira*. São Paulo: Leya, 2016.

O livro explora princípios básicos da Economia que podem ser úteis na formação cidadã e conduz à reflexão sobre os hábitos de consumo pessoais e as decisões relacionadas ao dinheiro, além de auxiliar na compreensão de como esse recurso circula na sociedade. As informações apresentadas na obra foram utilizadas na elaboração de conteúdos tratados na unidade 4.

Powell, A.; Bairral, M. *A escrita e o pensamento matemático*: interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2014 (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

Os autores abordam a importância da escrita na exploração de ideias e raciocínios matemáticos. As ideias desse material foram utilizadas na concepção deste volume.

Pozo, J. I. (org.). *A solução de problemas*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O autor defende a ideia de que a resolução orientada de problemas promove o ensino de procedimentos para esse fim e ressalta o papel fundamental do docente, ao incentivar os estudantes a criar estratégias para isso. A reflexão proposta no livro contribuiu para a concepção geral deste volume.

Rozenberg, I. M. *O Sistema Internacional de Unidades*: SI. 3. ed. rev. e ampl. São Paulo: Instituto Mauá de Tecnologia, 2006. Disponível em: https://maua.br/files/arquivos/o-sistema-internacional-de-unidades-si-3.a-edicao.pdf. Acesso em: 8 out. 2024.

A obra apresenta um breve histórico do desenvolvimento de padrões e técnicas de medição desde a Antiguidade e aborda conceitos e tabelas com fatores de conversão, além de medidas de uso local. Essas informações foram utilizadas para abordar as unidades de medida e os tópicos “O sistema métrico decimal” e “Sistema Internacional de Unidades”, no capítulo 6.

Sallum, E. M. *Ladrilhamentos*. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2015. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2015/10/monografia2.pdf. Acesso em: 8 out. 2024.

A monografia discorre sobre a arte do ladrilhamento do ponto de vista matemático, explorando a elaboração de mosaicos formados por polígonos regulares e de outros tipos. O conteúdo foi utilizado na elaboração do tópico “Ladrilhamento”, estudado no capítulo 7.

Smole, K. S.; Diniz, M. I. (org.). *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

A obra levanta reflexões com base nas diferentes teorias contemporâneas de ensino e de aprendizagem e apresenta propostas pedagógicas inovadoras e exemplos de produções de estudantes. As informações contidas nesse livro contribuíram para a concepção geral deste volume.

Stephens, P. R. S. *et al*. Virologia. *In*: Molinaro, E. M.; Caputo, L. F. G.; Amendoeira, M. R. R. (org.). *Conceitos e métodos para formação de profissionais em laboratórios de saúde*. Rio de Janeiro: EPSJV: IOC, 2009. v. 4. Disponível em: https://www.arca.fiocruz.br/bitstream/icict/13725/2/Conceitos%20e%20Metodos%20V4_Virologia.pdf. Acesso em: 8 out. 2024.

O capítulo apresenta um estudo científico de virologia que explora o tamanho de diversos tipos de vírus. O material contribuiu para a abordagem da medida de massa aproximada de um vírus, tema do tópico “Notação científica”, estudado no capítulo 6.

Strasburger, V. C. *Os adolescentes e a mídia*: impacto psicológico. Tradução: Dayse Batista. Porto Alegre: Artmed, 1999.

O autor investiga a interação entre os jovens e as mídias, além de discutir a influência dos meios de comunicação na saúde pública. As ideias apresentadas no livro contribuíram para a concepção geral deste volume.

Tomaz, V. S.; David, M. M. M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

A obra apresenta algumas vivências em sala de aula para contextualizar diferentes abordagens interdisciplinares no ensino da Matemática. O conteúdo foi utilizado para a criação de atividades e para a concepção das seções *Matemática e...*.

MANUAL DO PROFESSOR

APRESENTAÇÃO

OLÁ, PROFESSOR. BEM-VINDO!
OLÁ, PROFESSORA. BEM-VINDA!

Escrevemos estas orientações com o objetivo de apresentar a você como pensamos ao desenvolver esta coleção e como ela pode contribuir para que os estudantes aprendam mais e melhor.

Sabemos que o livro didático é apenas um recurso no processo dinâmico e complexo que envolve o ensino. Acreditamos que ele pode orientar um percurso e dar apoio com atividades que conduzam os estudantes ao longo dessa caminhada para a aprendizagem.

Com foco no desenvolvimento de competências e de habilidades preciosas para a vida dos estudantes tanto na escola quanto fora dela, os temas e os conceitos apresentados nesta coleção compõem um cenário de significados intencionalmente elaborados dentro de uma lógica de sentidos que pode facilitar conexões entre ideias e, assim, favorecer a formação matemática dos jovens em sua última etapa da Educação Básica.

Por outro lado, temos consciência de que esse desenvolvimento depende não apenas do livro em si, mas também da maneira como ele é trabalhado em sala de aula. Por isso, as orientações a seguir apresentam sugestões didáticas e metodológicas – testadas e aprimoradas por nós ao longo de muitos anos de pesquisa em sala de aula – que constroem a relação entre o conhecimento específico e a formação integral dos estudantes.

Esperamos que a leitura dessas orientações colabore com seu trabalho, não só no sentido da sua formação profissional, mas especialmente para que o estudo da Matemática que idealizamos se torne instrumento transformador para os jovens, proporcionando a eles modos valiosos e potentes de pensar, além de posturas críticas, determinadas e reflexivas acerca da vida e do mundo.

Bom trabalho!

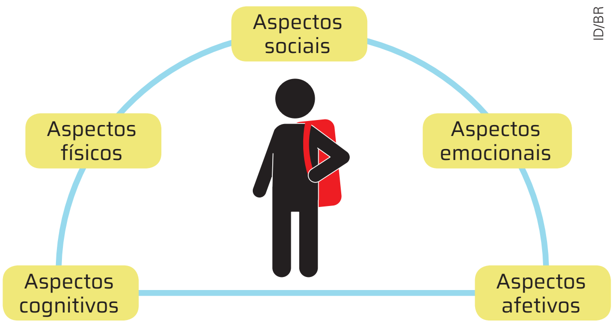
Os autores

SUMÁRIO

PARTE 1 • FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA E ORGANIZAÇÃO DA OBRA

Esta coleção se insere como uma proposta para assegurar uma das principais premissas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018a) para a etapa do Ensino Médio: o protagonismo do jovem em fazer escolhas e ter voz ativa e responsável na construção de sua formação nesta fase final da Educação Básica.

Alguns princípios da BNCC, presentes também nas Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM) (DCNEM/2011), orientaram a construção dessa proposta de ensino, tanto em seu conteúdo, quanto no modo como foi estruturada. Um desses princípios é a formação integral do estudante, a qual abrange valores e aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais. O jovem do século XXI deve ser considerado por inteiro, em especial no que diz respeito a seu direito, assegurado por lei, de ter formação ampla. Assim, a escola se constitui como espaço privilegiado de aprendizado, no qual ele tem acesso a novos conhecimentos, com a possibilidade de ampliar seus horizontes e vivenciar um mundo de descobertas. Ou seja, a escola deve ser o lugar para pensar, projetar, questionar, fazer-se ouvir, aprender a argumentar, a conviver e a desenhar seu futuro, como indivíduo e como parte da coletividade.



Um outro princípio se fundamenta na concepção da juventude como fase importante da vida, percebe os jovens como sujeitos sociais, reconhece a diversidade entre eles como valor e cria condições para que construam sua identidade e estruturem seu projeto de vida. Por isso, esta obra busca propiciar o desenvolvimento de jovens protagonistas que conheçam seus interesses e anseios e se posicionem com fundamento em suas escolhas, decisões e ações, tanto no ambiente escolar quanto fora dele.

Nesta coleção, deu-se também atenção ao contexto educacional contemporâneo, com suas características e seus desafios, levando em consideração as seguintes questões: Como garantir aprendizagens significativas, promover o desenvolvimento de competências e, ao mesmo tempo, dialogar com os interesses dos jovens estudantes, de modo a proporcionar uma relação positiva com o conhecimento? Como construir uma coleção que responda de maneira não fragmentada aos princípios estabelecidos? Como preparar as novas gerações para conduzir com autonomia situações de grande complexidade, seja no contexto escolar, seja em outros âmbitos da vida?

A inserção dos jovens do Ensino Médio no espaço e no tempo da vida social implica permitir que eles vivenciem situações próximas da realidade e do mundo do trabalho. Isso ultrapassa o conjunto de competências da cognição, uma vez que inclui a oportunidade de aprender a se colocar de modo participativo, em cenários intencionalmente planejados para seu desenvolvimento integral. Também é importante que esse desenvolvimento ocorra em um ambiente em que errar, tentar novamente e rever decisões façam parte do processo de aprender e de se preparar para o futuro, com conhecimento e espírito crítico.

O JOVEM DO ENSINO MÉDIO

Considerando as diferentes culturas juvenis, é interessante destacar que o princípio para a concepção desta obra visa compreender o jovem em suas peculiaridades para desenvolver um trabalho pedagógico cujo propósito é a formação integral dos estudantes do Ensino Médio.

> A juventude é, ao mesmo tempo, uma condição social e um tipo de representação. De um lado há um caráter universal, dado pelas transformações do indivíduo numa determinada faixa etária. De outro, há diferentes construções históricas e sociais relacionadas a esse tempo/ciclo da vida (Dayrell; Carrano; Maia, 2014, p. 111).

É preciso considerar cada jovem como sujeito de direitos (muitas vezes negligenciados tanto pela escola quanto pela sociedade), com identidade própria, levando em conta suas diferentes vivências, trajetórias familiares, escolares e comunitárias, moradias, experiências e rotinas. E tudo isso faz parte do que planejamos para sua formação, de modo que os estudantes consigam lidar com a complexidade da vida contemporânea, com todas as incertezas próprias do futuro para o qual precisam se preparar.

Ao longo do Livro do Estudante e das orientações deste manual, o professor conta com orientações práticas para o ensino direcionado a esse jovem. Sempre que pertinente, recomenda-se que o estudante participe de atividades nas quais ele se encontre cognitivamente ativo e integralmente mobilizado, para que se perceba como produtor de conhecimentos e bens culturais, deixando de ser apenas um consumidor de informações.

O JOVEM NA ESCOLA DO ENSINO MÉDIO: SEUS PROJETOS E SUA INDIVIDUALIDADE

A área de Matemática não pode considerar o estudante apenas do ponto de vista deste componente. Uma visão mais ampla nos mostra que, para os jovens brasileiros, a escola ganha diferentes sentidos em função da diversidade de juventudes. Para alguns, ela é parte das expectativas e do planejamento familiar: percebem-na como um passo essencial para acessar a universidade e o mundo do trabalho. Para outros, estar na escola é um desafio cotidiano, em razão de demandas pessoais e familiares, como trabalhar para produzir renda e ajudar a sustentar a família. Há também os que buscam na escola uma possibilidade de ter acesso a outros direitos, como a alimentação e a segurança. Esses e outros tantos sentidos marcam a heterogeneidade de projetos e de posturas dentro da vivência escolar.

Reconhecer as tensões e os desafios presentes nas relações e nas expectativas entre os jovens e deles com seus professores e demais integrantes da comunidade escolar é o primeiro passo para construir pontes entre os interesses juvenis e a própria escola. Trata-se de repensar a escola e seus sujeitos, considerando o contexto contemporâneo, com suas complexidades, possibilidades, limitações e dilemas.

Um caminho apontado pelas DCNEM e pela BNCC refere-se à promoção da participação significativa dos jovens na escola, de modo que eles possam expressar conhecimentos, anseios e necessidades e fazer escolhas. Isso significa romper com a visão de que cabe aos estudantes o exclusivo papel de assistir às aulas e realizar as tarefas propostas, a fim de percebê-los como protagonistas nos processos de tomada de decisão e do processo educativo.

Em relação ao ensino de Matemática, é preciso observar que cada uma das competências específicas e muitas das habilidades associadas a elas apontam para o estudante que se espera formar ao longo do Ensino Médio, não apenas no sentido cognitivo, mas também como indivíduo com um projeto de vida em construção, conquistando saberes para o exercício consciente da cidadania, o que inclui a possibilidade de avançar em seus estudos após o Ensino Médio. A Matemática, especificamente, traz um conjunto importante de saberes e de maneiras de pensar que tanto capacita o estudante para aprender em diferentes áreas quanto favorece a autoconfiança e a determinação para enfrentar os desafios da vida e a realização de seus projetos pessoais.

Por tudo isso, as escolhas metodológicas são essenciais para promover o aprendizado de estudantes com diferentes perfis e modos de aprender, propiciando várias oportunidades para que eles assumam o papel de protagonistas na aquisição de conhecimentos.

Nesta coleção, as orientações apresentadas para o desenvolvimento das atividades e as propostas das seções proporcionam aos estudantes a vivência de diferentes situações e permitem que o professor identifique potencialidades, dificuldades, repertórios prévios e preferências em sua turma. Desse modo, torna-se possível que todos os estudantes sejam valorizados e acolhidos em suas particularidades, tendo o professor como mediador de seu processo de aprendizagem e os colegas como parceiros nessa construção.

As propostas didáticas da problematização e da comunicação favorecem a integração de estudantes com diferentes perfis, pois todos podem contribuir com o que sabem, com o que entenderam e até mesmo com suas incompreensões para rodas de conversa produtivas e colaborativas. Assim, cada um pode contribuir com as capacidades de que já dispõe (uns são bons oradores; outros, bons produtores de texto; outros lidam bem com tecnologias; outros gostam de pesquisar; outros preferem construir esquemas e desenhar) e tem a oportunidade de desenvolver outras capacidades à medida que participa de trabalhos colaborativos e integrados.

Cada livro desta coleção foi idealizado para ser lido pelo estudante. O texto fala com ele e traz atividades com diferentes níveis de complexidade, de modo que todos possam participar. E, por meio da **avaliação formativa**, os estudantes podem ser acolhidos em suas diferenças, personalidades, interesses, estilos e ritmos, sendo encaminhados para saber atuar no mundo, interagindo com outras pessoas e aprendendo na relação que estabelecem com elas, sempre de maneira respeitosa e ética.

INCLUSÃO DE ESTUDANTES COM DEFICIÊNCIA

Para aprofundar as percepções sobre a múltipla diversidade de condições dos estudantes do Ensino Médio, é importante identificar as especificidades das deficiências e dos transtornos. De acordo com o artigo 2º da Lei n. 13 146, de julho de 2015, que instituiu o Estatuto da Pessoa com Deficiência, "Considera-se pessoa com deficiência aquela que tem impedimento de longo prazo de natureza física, mental, intelectual ou sensorial".

Por sua vez, aqueles com transtornos do neurodesenvolvimento podem apresentar alterações no desenvolvimento psicomotor, movimentos estereotipados, além de apresentar dificuldades relativas à comunicação e à interação social. Esses transtornos englobam uma diversidade de condições que podem variar em nível e em grau, como ocorre com o transtorno do espectro autista (TEA), a deficiência intelectual (DI), o transtorno do déficit de atenção e hiperatividade (TDAH) e os transtornos de aprendizagem, dos quais os mais comuns são a dislexia, a discalculia e a disgrafia.

É necessário compreender os desafios enfrentados pelos jovens que têm transtornos dessa ordem. Muitos também podem apresentar dificuldades relativas à compreensão das emoções dos outros e ao aprendizado acadêmico, além de dificuldades comportamentais, o que demanda a adoção de abordagens pedagógicas específicas para atender às necessidades de cada um.

Outra estratégia eficaz é trabalhar com os jovens habilidades de resolução de problemas e conflitos. Aqueles que apresentam tais transtornos podem se sentir desafiados em situações de conflito, o que pode ser sanado ou amenizado mediante o ensino de habilidades de negociação, escuta e empatia.

Por outro lado, as deficiências agrupam grande diversidade de condições humanas e podem se apresentar em diferentes dimensões, como a intelectual e a física (no caso de pessoas com deficiência auditiva ou visual, de pessoas em cadeiras de rodas, etc.).

Assim como ocorre com os transtornos, é importante garantir ambientes que possam receber estudantes em tais condições e preparar-se para incentivá-los de maneira específica, adaptando propostas pedagógicas e ampliando o repertório escolar relacionado a esse cenário. Desse modo, a arquitetura inclusiva é essencial para facilitar o acesso à escola não só aos estudantes com condições físicas específicas, mas também a outras pessoas que tenham dificuldade de locomoção.

A inclusão desses jovens requer uma política de gestão escolar que garanta a formação deles de acordo com seus direitos e suas possibilidades. É preciso incluir a disponibilização de material didático adaptado, a implementação de estratégias de ensino diferenciadas, como currículo individualizado, o suporte emocional e comportamental (se necessário), a tutoria e o uso de recursos digitais e até mesmo visuais (como cartões de emoções, que ajudam a identificar os próprios sentimentos e compartilhá-los com outras pessoas).

Especificamente em relação à Matemática, pautada na problematização e na comunicação, é preciso destacar que algumas das orientações vão ao encontro das necessidades desses jovens, como é o caso das propostas de trabalho colaborativo, em duplas ou em grupos; a expressão oral ou a dramatização como recursos para entender ou explicar o pensamento; e ainda, o painel de soluções (descrito mais adiante), no qual diferentes formas de pensar e de registrar são válidas e valorizadas.

No entanto, não bastam as estratégias de ensino: é necessário repensar o que ensinar a esse jovem em função de suas possibilidades, estabelecendo um currículo individualizado em relação a todos os componentes. Algumas orientações que podem auxiliar seu planejamento para esses estudantes são:

- **Organizar o trabalho**, de modo que todos saibam o que se espera de cada um. Comece a aula combinando com a turma o que será feito, as tarefas e, se for o caso, as expectativas específicas para os estudantes com deficiência.
- **Selecionar conteúdos** relacionando os conceitos matemáticos ao contexto e às experiências dos estudantes.
- **Utilizar recursos digitais e ferramentas *on-line*** que os estudantes possam acessar de qualquer lugar, inclusive permitindo retomadas ou preparação prévia. As plataformas de aprendizagem *on-line*, os vídeos educativos e os aplicativos interativos podem ser muito úteis.
- **Planejar o ensino colaborativo** por meio do trabalho em grupo e a aprendizagem colaborativa. Diferentes estudantes podem se beneficiar ao compartilhar seus conhecimentos e habilidades.

Por fim, para a real inclusão de estudantes com deficiência, deve-se ter sempre em mente que a ideia é evidenciar, bem como assegurar e promover, em condições de igualdade, que a pessoa com deficiência faz parte do grupo social e deve ser aceita do modo como se apresenta e que o território escolar deve ser um espaço de acolhimento e de cidadania.

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

No contexto da educação integral, de acordo com a BNCC, competência pode ser entendida como:

> […] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 2018a, p. 8).

Isso significa que o desenvolvimento de competências envolve a articulação dos conhecimentos aprendidos, das habilidades desenvolvidas, das atitudes praticadas e dos valores assimilados, tendo em vista os aspectos pessoais, sociais e profissionais de cada indivíduo. Tais competências abrangem as dimensões cognitivas e socioemocionais, entre outras.

Cabe explicitar os múltiplos aspectos relacionados à dimensão socioemocional mencionada pela BNCC:

Dimensão socioemocional

- **Relacionar-se consigo mesmo, desenvolvendo o autoconhecimento e aprendendo a lidar com emoções.**
- **Colaborar com o outro (colegas, professores, etc.), aprendendo conhecimentos significativos.**
- **Fazer escolhas com base em valores e em seu projeto de vida.**
- **Resolver problemas de modo criativo, relacionando conhecimentos, pontos de vista, ideias e contextos diversos.**
- **Definir objetivos e persistir em alcançá-los, em um exercício de projetar-se no futuro e seguir na direção desejada.**
- **Abrir-se para o novo, com curiosidade.**
- **Conectar-se com outros, sejam eles pares, adultos, grupos ou coletivos.**

Ao relacionar as competências cognitivas e socioemocionais à formação integral do sujeito ao longo de toda a Educação Básica, a BNCC formaliza e legitima uma educação comprometida em integrar esses conhecimentos. Eles devem ultrapassar os muros escolares e dialogar com a realidade e a vida de cada estudante, para que – com base em princípios éticos, estéticos e políticos – ele participe da construção de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva.

A BNCC menciona, ainda, a necessidade de a escola do Ensino Médio garantir aos jovens "a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática" (Brasil, 2018a, p. 467). Para isso, é importante:

- perceber a aprendizagem como um trabalho contínuo, a ser aprimorado permanentemente;
- promover situações que possibilitem aos estudantes "compreender e utilizar os conceitos e teorias que compõem a base do conhecimento científico-tecnológico, bem como os procedimentos metodológicos e suas lógicas" (Brasil, 2018a, p. 467);
- conhecer e utilizar as linguagens científicas, de modo a compreender e compartilhar conhecimentos;
- aprender e praticar múltiplos usos de tecnologias digitais.

AS COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Esta coleção cumpre a função de assegurar que o Ensino Médio não descuide do desenvolvimento das dez competências gerais correspondentes às demandas da Educação Básica (Brasil, 2018a). Essas competências gerais resumem os conhecimentos, as habilidades, as atitudes e os valores essenciais que devem ser garantidos na formação escolar dos estudantes, a fim de que eles se desenvolvam como pessoas éticas e justas, respeitando os direitos humanos e promovendo a sustentabilidade ambiental.

Espera-se, assim, que os estudantes sejam capazes de refletir e de buscar soluções para desafios individuais e coletivos, construindo novos saberes e novas formas de pensar e de atuar. Nesse sentido, essas competências sinalizam não apenas o que os estudantes devem aprender na escola do ponto vista cognitivo, mas qual perfil de estudante se pretende formar nas escolas brasileiras, com capacidades cognitivas, sociais e emocionais importantes para a construção de seu projeto de vida e para sua atuação como cidadão.

De fato, são essas dez competências, apresentadas a seguir, que geram a **interdisciplinaridade** em toda a Educação Básica, quando os componentes curriculares e as áreas de conhecimento têm como meta o desenvolvimento de todos os estudantes em direção a essas competências.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(Brasil, 2018a, p. 9-10.)

A concepção de educação preconizada pela BNCC acarreta algumas questões importantes para a organização dos currículos e da escola, e é nesse cenário que esta coleção se insere com intencionalidade e metodologia que vão ao encontro do jovem do século XXI, colocando-o como centro das escolhas curriculares e do planejamento. Nesse contexto, as competências cognitivas e socioemocionais são inseparáveis, do ponto de vista da aprendizagem, em todas as áreas do conhecimento.

Esta coleção privilegia a aquisição das competências gerais, com a certeza de que são particularmente adequadas ao desenvolvimento do pensamento crítico, da argumentação, da criatividade, da colaboração e da capacidade de resolver problemas. Desse modo, temos como objetivo e entendemos:

- o pensamento crítico como a capacidade de analisar, relacionar e sintetizar ideias, fatos e situações, assumindo posicionamentos fundamentados. Saber posicionar-se e assumir a decisão tomada pressupõe o conhecimento, mas não se confunde com ele;
- a argumentação como parte da comunicação em toda atividade humana e nas práticas socioculturais. Isso significa ser capaz de exteriorizar o pensamento para se fazer entender pelo outro. A troca recíproca de argumentos consistentes permite o avanço e a construção de ideias, ações e emoções novas e mais bem estruturadas;
- a criatividade como a capacidade de conectar de modo diferente conhecimentos anteriores ou de buscar soluções novas para situações diversas, ou, ainda, a habilidade de relacionar fatos, ideias e processos na elaboração de algo inédito. A criatividade não deve ser confundida com a genialidade nem com a criação a partir do zero. Trata-se de um esforço interno para pensar de forma diferente do que já está estabelecido, visando alcançar um objetivo;
- a colaboração, essencial no século XXI, como a capacidade de atuar em sinergia com os outros, de modo respeitoso e responsável. Ser colaborativo envolve a empatia e o respeito às diferenças, assim como saber ceder, liderar e ser liderado;
- a capacidade de resolver problemas como a prática de identificar situações que merecem ou precisam ser resolvidas nos mais diversos aspectos, dentro e fora do espaço escolar. A resolução de problemas exige conhecimentos e maneiras de pensar na construção de estratégias e na busca de soluções, assim como o aprendizado no processo de resolução e de transposição e adaptação desses saberes a outros contextos e situações.

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS E HABILIDADES DA ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Além de possibilitar o trabalho com as competências gerais da BNCC, a coleção contribui para o desenvolvimento das competências específicas e das habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias.

Indicamos para o professor as competências específicas e as habilidades que serão desenvolvidas ao trabalhar cada capítulo, bem como as competências específicas das outras áreas de conhecimento que também serão favorecidas.

A seguir, estão as competências específicas relativas à área de Matemática e suas Tecnologias previstas na BNCC.

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

(Brasil, 2018a, p. 531.)

CONEXÃO ENTRE AS COMPETÊNCIAS GERAIS E AS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS E AS HABILIDADES DA ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Quando se assume uma concepção de ensino e aprendizagem pautada no desenvolvimento de competências e habilidades, adota-se uma nova maneira de olhar para como se ensina e para como se aprende. Assim, o "como fazer" possibilita o desenvolvimento de processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas.

No contexto das competências e habilidades, a atuação pedagógica não pode ser meramente transmissiva e restrita a um conjunto de conteúdos tradicionalmente estabelecidos desde o século XX. Ao contrário, é preciso que ela seja uma prática orgânica, dinâmica, interativa, colaborativa, em que os estudantes atuem como protagonistas, considerando que o desenvolvimento das competências é, em última instância, o objetivo da Educação Básica.

A prática pedagógica que se espera do professor, portanto, não pode ser meramente instrucional; ela deve se pautar em situações de aprendizagem nas quais os objetos de conhecimento, objetivos de aprendizagem e conteúdos específicos da área estejam relacionados e a serviço das habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes, favorecendo a construção de novos saberes por meio da apropriação ativa e da transferência dos conhecimentos.

As habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias são desenvolvidas ao longo dos três volumes por meio da compreensão de determinados conceitos, do entendimento e da análise de como se dá a resolução de uma atividade e da resolução efetiva de atividades de diferentes tipos. Dessa forma, os estudantes expandem suas opiniões, confrontando-as com o que professores e outros estudantes pensam. A situação conflituosa passa a contar com ferramentas científicas que favorecem a reflexão e podem ser fatores de mediação, diálogo e respeito para com o diferente.

A maneira de ensinar é o ponto-chave para o desenvolvimento das competências gerais e específicas propostas pela BNCC. A metodologia de ensino é o elo entre as diversas habilidades e a formação integral dos estudantes. Por exemplo, ao propor a aprendizagem colaborativa em atividades em duplas ou em grupos, trabalhamos especificamente as competências gerais **8** e **9**, ajudando o jovem a conhecer a si mesmo e ao outro e a lidar com o diferente de modo respeitoso e colaborativo, independentemente de qual seja a habilidade específica da área que é o foco da atividade. Por outro lado, no desenvolvimento de competências específicas, como a **1** e a **2**, propícias a contextos mais significativos, ao conhecimento matemático relacionado a ciências em geral e também a questões socioeconômicas, de saúde ou sustentabilidade, favorecemos a pesquisa e a ampliação de conhecimentos dos jovens, fomentando também o desenvolvimento da competência geral **2** ao levá-los a investigar e se posicionar diante de diferentes questões do mundo atual. Ou, ainda, nas atividades com apoio ou investigação de um recurso tecnológico, os estudantes têm oportunidade de desenvolver as competências gerais **5** e **6** ao utilizar procedimentos e conceitos matemáticos para interpretar e construir modelos e ao utilizar diferentes representações e linguagens da Matemática para buscar ou comunicar soluções para determinadas situações.

Para isso, a coleção propõe o uso de **metodologias ativas**, como a aprendizagem colaborativa e entre pares e a aprendizagem a partir de problemas, não apenas para o desenvolvimento de habilidades, mas também para integrar saberes e promover uma atitude crítica, reflexiva e positiva diante do conhecimento, envolvendo atividades que coloquem os estudantes em situações de cooperação, interação, diversidade e responsabilidade pelo que fazem e pelo que aprendem.

CONEXÃO ENTRE AS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DA ÁREA DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E A ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Entre outras ações voltadas à promoção de uma educação global e abrangente, que envolva educadores, familiares e comunidade escolar, a BNCC propõe:

> [...] decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem (Brasil, 2018a, p. 16).

No contexto da formação integral dos jovens e da promoção de habilidades, a interdisciplinaridade vai além, construindo oportunidades para que o estudante mobilize aprendizados de múltiplas áreas para desenvolver novas formas de pensar e resolver problemas, sem que cada tema ou procedimento fique restrito a um único componente curricular.

Especificamente na área de Matemática e suas Tecnologias, os temas e os contextos abordados ao longo desta coleção propiciam uma integração com as competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. As ciências, ao utilizar a linguagem matemática para descrever e interpretar fenômenos naturais e sociais, apresentam maneiras de pensar e habilidades que se assemelham às da Matemática, como análise crítica, interpretação de dados e de textos verbais, a investigação e o posicionamento diante de questões e fenômenos em diversos contextos.

A implementação dessa importante perspectiva de atuação interdisciplinar envolve, assim, a colaboração entre professores de diferentes áreas visando a uma abordagem mais ampla e integrada do aprendizado, sempre com o objetivo comum de fomentar nos estudantes habilidades como pensamento crítico, argumentação, criatividade e resolução de situações-problema e de capacitá-los a aplicar conhecimentos diversos para analisar e enfrentar desafios do mundo real de maneira eficiente e inovadora.

A ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

O reconhecimento da relação entre a Matemática e a formação integral dos estudantes implica propostas de ensino, atividades e planejamento das aulas com intencionalidade, de modo a contemplar toda a complexidade de aprendizagens que essa área pode promover.

O ensino da Matemática, visando a uma formação integral ao longo da Educação Básica, deve considerar o tempo em que vivemos e responder às questões que a sociedade nos coloca, o que impõe uma mudança significativa no modo de ensinar. Isso requer escolhas metodológicas que considerem um mundo sem fronteiras para o conhecimento, no qual a aprendizagem só pode ocorrer de modo colaborativo.

Nesse cenário, a comunicação e o enfrentamento de situações-problema complexas mostram-se comprovadamente eficazes para o desenvolvimento de múltiplas capacidades cognitivas e de posturas mais críticas e criativas. Do mesmo modo, a possibilidade de vivenciar diferentes maneiras de ver, dizer e compreender conceitos e ideias abre caminho para o convívio respeitoso e o autoconhecimento, tão necessários na construção de cada identidade e nas escolhas para a vida.

Considerando que as competências cognitivas e socioemocionais são indissociáveis na aprendizagem de Matemática, as metodologias sugeridas e que integram esta coleção foram selecionadas exatamente por sua potencialidade para a formação integral. O objetivo é dar consistência a essa proposta unindo todas as áreas e promover a aprendizagem dos conceitos e das ideias importantes de cada área do conhecimento, inclusive da Matemática.

Na escola, a Matemática passa a ser entendida também como uma ciência com características próprias de pensar e de investigar a realidade e com linguagem específica para descrevê-la. Ao mesmo tempo, colabora com as demais áreas de conhecimento, como a de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e a de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, para que, juntas, possam desenvolver seus modelos e analisar informações.

A Matemática aplicada e também como ciência pura utiliza, em sua linguagem, códigos e símbolos, desenhos, algoritmos, fórmulas e gráficos desenvolvidos ao longo da história. Esse caráter a aproxima da área de Linguagens quando se torna ferramenta para a representação de fenômenos e informações e a quantificação de dados em diferentes áreas do conhecimento.

Ao analisar a BNCC e as facetas da Matemática na escola, é preciso destacar que essa área assume o compromisso com o **letramento matemático** na seguinte perspectiva:

> Letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias (Brasil, 2012, p. 1).

Por isso, o ensino de Matemática deve ir além dos objetos de conhecimento e das habilidades estabelecidas pela BNCC e assumir, por meio de escolhas metodológicas, a meta de ensinar a linguagem, os conceitos e os procedimentos da Matemática para a resolução de situações-problema nos mais diversos contextos e campos do conhecimento humano.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICO-METODOLÓGICAS PARA A ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

A BNCC traz orientações importantes sobre processos de ensino mais adequados para o letramento matemático dos estudantes no Ensino Médio. São eles: a problematização, a modelagem, a investigação e os projetos.

> **[...] Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem** podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (Brasil, 2018a, p. 266, grifo nosso).

Essas orientações devem ser entendidas como uma possível proposta para o ensino coerente com os processos de resolução de problemas e de investigação na forma da problematização; o desenvolvimento de projetos, presente em propostas que ampliam o livro-texto; e a utilização da linguagem matemática para expressar ideias, conceitos e procedimentos, parte importante da formação de leitores e produtores de texto nessa área.

As abordagens metodológicas que inspiraram a concepção desta coleção fundamentam-se na finalidade de contribuir para o processo de ensino-aprendizagem de Matemática numa perspectiva problematizadora, que busca favorecer o trabalho coletivo e colaborativo, bem como promover a autonomia dos estudantes estimulando o constante exercício de reflexão sobre suas aprendizagens.

Algumas dessas abordagens metodológicas para a formação integral dos estudantes podem ser descritas da maneira que se segue.

Problematização: aulas problematizadoras

O desenvolvimento da resolução de problemas depende de as aulas de Matemática serem planejadas intencionalmente para constituir um ambiente repleto de situações-problema, ou seja, uma aula problematizadora – uma aula em que o desafio é constante, na qual experimentar, formular hipóteses, investigar e até mesmo errar são ações frequentes. Esse tipo de ambiente pedagógico possibilita integrar todos os estudantes, convidando-os a usar a Matemática para conhecer a si mesmos, enquanto desenvolvem suas capacidades intelectuais, bem como as habilidades de observação, exploração, análise e reflexão. Além disso, os estudantes com baixa motivação para a Matemática perdem o medo de enfrentar matematicamente situações que lhes são propostas e se tornam mais capazes de controlar os próprios mecanismos de pensamento.

De acordo com Vila e Callejo (2007), são três os fatores que influem em maior grau na efetividade do raciocínio matemático: o conhecimento dos conteúdos matemáticos, a competência no uso dos processos de investigação matemática e a confiança na capacidade de enfrentar e vencer os desafios propostos.

A confiança é fruto da experiência constante de resolver problemas, da presença pedagógica dos professores e de uma avaliação formativa que acompanha e intervém sempre no sentido de promover a aprendizagem.

Raciocinar matematicamente permite desenvolver algumas maneiras de pensar muito próprias da Matemática, entre as quais destacamos o pensar indutivo, o dedutivo, o espacial e o não determinístico. Os jovens aprendem a raciocinar nessas diversas modalidades a partir das evidências que encontram em suas explorações e investigações, baseando-se no que já sabem que é verdade. Aprendem, ainda, a reconhecer as características de um argumento aceitável em Matemática.

Eles desenvolvem raciocínios cada vez mais elaborados, envolvendo análise, comprovação, avaliação, explicação, inferência, justificativa e generalização, se expostos a um ambiente que valoriza a comunicação matemática. Esse ambiente, propício ao desenvolvimento, é criado quando os estudantes têm a oportunidade de debater pontos de vista, explicar e justificar a resolução de um problema, uma inferência ou uma regularidade identificada; deduzir e justificar estratégias usadas e conclusões obtidas; adaptar o conhecido ao desconhecido; transferir uma aprendizagem de um contexto para outro; provar que algo é verdadeiro ou refutar uma hipótese, buscando um contraexemplo para uma conclusão falsa; entre outras possibilidades.

Mobilizar a turma propondo problemas e questões não é o suficiente para o desenvolvimento integral. Essa formação depende também do respeito à diversidade dos estudantes e de suas formas de aprender. Daí a necessidade de complementar ou de utilizar as propostas do livro didático de modo diversificado, promovendo a aprendizagem colaborativa por meio de pesquisas e projetos, com apoio da tecnologia e de textos complementares que podem despertar o interesse de estudantes com diferentes perfis. Alguns exemplos podem ser identificados nas orientações de cada capítulo e nas seções ***Para explorar*** e ***Matemática e...*** presentes no Livro do Estudante. A aula problematizadora se completa com uma estratégia de ensino muito efetiva para a aprendizagem, parte integrante da metodologia ativa de aprendizagem entre pares, denominada painel de soluções.

Painel de soluções

No painel de soluções, os estudantes apresentam diferentes soluções para um problema ou apenas parte delas, com estratégias de resolução. Fisicamente, esse painel pode ser feito na lousa, de modo coletivo, promovendo um debate entre o estudante que apresenta sua solução e os demais colegas. Assim, o painel de soluções é um espaço de discussão no qual os estudantes podem contar aos colegas as escolhas que fizeram para resolver um problema e a maneira que utilizaram para representar suas ideias. Podem também analisar em profundidade duas ou três resoluções com estratégias diferentes para verificar características comuns e diferenças entre elas, posicionando-se em relação a cada resolução.

Assegurar esse espaço é uma maneira de intervenção didática que contribui para a formação integral dos jovens e para o desenvolvimento das habilidades de argumentação e colaboração. Com isso, é possível que a turma conheça diferentes caminhos para a resolução de uma situação e vivencie um momento valioso no qual as estratégias incorretas podem ser discutidas de modo que todos percebam em que erraram e como podem avançar.

Cabe ao professor, como mediador e coordenador da atividade, incentivar a argumentação e o respeito por opiniões diferentes. Isso pode ser feito pela problematização, levantando questões como: Como os dados foram organizados? Todos resolveram da mesma maneira? Quais semelhanças e diferenças vocês identificam nas resoluções?

A problematização, portanto, pode ser feita também no caso de incorreções. Não se trata de detectar erros, mas de aprender com eles, orientando os estudantes para que investiguem e reflitam em um ambiente de confiança, sem julgamentos. Nesse sentido, esse recurso é muito inclusivo, pois nele todos podem colaborar e os erros são bem-vindos como oportunidades de reflexão e de novas aprendizagens.

Para o professor, o painel de soluções é um recurso que permite a observação e o registro das aprendizagens e de eventuais dificuldades de cada estudante, à medida que maneiras diversas de pensar ou de registrar ideias são expostas e discutidas.

Apesar do destaque dado à problematização como forma específica e central das aulas de Matemática, ela se potencializa e se complementa com os demais processos matemáticos para o ensino, uma vez que são eles que estabelecem o ambiente e o conjunto de relações pessoais que favorecem o desenvolvimento de todas as habilidades socioemocionais. Merece especial atenção a metodologia ativa denominada aprendizagem colaborativa.

Aprendizagem colaborativa: o eu e o outro

Aprender com o outro é essencial para a formação do jovem em direção às competências gerais presentes na BNCC, necessárias para as demandas complexas da vida cotidiana ou para o pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. A interação entre os estudantes desempenha papel fundamental no desenvolvimento das capacidades cognitivas, afetivas e de inserção social.

A aprendizagem colaborativa exige a comunicação entre estudantes e entre eles e o professor, o que pode implicar inclusive rever a organização do espaço na sala de aula.

Ao participar de atividades em grupo ou com toda a turma, como sugerido nas orientações ao professor contidas no Livro do Estudante, é natural que o jovem encontre interlocutores com linguagem próxima à sua, mas com habilidades e conhecimentos que podem ser diferentes dos seus. A comunicação e a vivência com o diverso e o semelhante permitem o exercício constante da análise e da reflexão, essenciais à aprendizagem efetiva.

Por isso, o trabalho em grupo, mais do que um tipo de metodologia ativa para o ensino, pode ser considerado um fator imprescindível na relação entre as interações sociais e o desenvolvimento cognitivo; no exercício da postura crítica; na exigência da reflexão por parte do estudante, envolvendo a análise cuidadosa de seus erros; no respeito ao pensamento de outras pessoas que podem divergir de seu raciocínio ou complementá-lo.

Principais contribuições do trabalho em grupo

- **Promover a interação entre os jovens do grupo e entre os grupos.**
- **Favorecer a construção do conhecimento.**
- **Evidenciar diferentes modos de pensar presentes nas ideias matemáticas.**
- **Desenvolver habilidades de raciocínio como investigação, inferência, reflexão e exploração.**

Toda tarefa ou atividade complexa em que um estudante não consegue, individualmente, obter todas as informações e/ou analisá-las, favorece a aprendizagem colaborativa. Como exemplos propostos no livro estão a leitura e a discussão de textos, a resolução de situações-problema, pesquisas sobre a história e a utilização atual de determinado conceito ou a exploração dos recursos e usos de um aplicativo ou de um *software*.

A comunicação e a modelagem matemática

Segundo a *Matriz de avaliação de Matemática: Pisa 2012*, o letramento matemático estabelecido como meta para a formação dos estudantes inclui "utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos" (Brasil, 2012, p. 1).

Por sua vez, entende-se por modelagem matemática o processo de fazer Matemática aplicada, ou seja, partindo-se de um problema complexo, construir uma representação matemática (modelo matemático) capaz de gerar uma solução. Há, ainda, a compreensão da modelagem matemática como a construção de modelos que descrevam situações e fenômenos para explicá-los e fazer previsões ou inferências.

Percebe-se que, no letramento matemático, a modelagem está interligada com a problematização e com a aquisição da linguagem matemática em um sentido amplo. Isso significa que a linguagem e os textos próprios dessa área precisam ser aprendidos nas aulas do componente curricular. Ler e construir gráficos, tabelas, desenhos de objetos em perspectiva ou em forma de desenhos técnicos, como aparecem nos livros didáticos, e ler fórmulas e símbolos de modo correto, assim como produzir textos utilizando esses recursos da linguagem matemática, devem fazer parte do planejamento das aulas e das atividades propostas aos estudantes. A linguagem no sentido completo precisa fazer parte da aprendizagem, e isso se dá pela forma de exposição e pela variedade de textos apresentados e analisados com os estudantes.

Para romper com a prática pedagógica tradicional, pautada pela oralidade do professor e pela escrita do estudante como únicas estratégias de aquisição da linguagem, é necessário trabalhar com os estudantes textos de divulgação científica, manuais técnicos, textos didáticos, vídeos e obras de arte, como será destacado mais adiante na descrição da estrutura do Livro do Estudante.

Além disso, nos momentos de trabalho colaborativo e no painel de soluções, os estudantes têm a oportunidade de (e podem ser incentivados a) desenvolver a comunicação por meio da linguagem oral e escrita, explorando as habilidades de descrição, explicação e questionamento. Isso possibilita melhor organização do pensamento para o desenvolvimento de estruturas conceituais com base nas relações entre os diversos significados de um mesmo conceito. Adicionalmente, há o aprimoramento da capacidade de compreensão de representações e de textos variados, bem como o progressivo incremento das habilidades relacionadas à produção textual.

A construção de modelos exige a linguagem, mas não se restringe a ela. Construir exige repertório, compreensão e oportunidade para exercer esse tipo de produção. Nesse sentido, os livros desta coleção trazem propostas diversificadas como:

- propor problemas de diferentes tipos e níveis de complexidade, de modo que o estudante se sinta confiante para enfrentar desafios maiores;
- trabalhar com problemas abertos, como aqueles que dão origem a pesquisas e projetos, sugeridos ao longo dos capítulos. Esse tipo de proposta solicita do estudante a análise da situação e a elaboração de perguntas possíveis e razoáveis para serem respondidas;
- envolver os estudantes na criação de problemas para determinada situação, ainda que, de início, suas produções sejam imprecisas ou mal formuladas. Essa é uma tarefa que envolve a linguagem e o raciocínio matemático, além dos conhecimentos específicos que podem estar relacionados àquela situação;
- utilizar a abertura de cada unidade como maneira de mobilizar os estudantes para o tema. Propiciar que todos apresentem suas ideias iniciais, seus conhecimentos prévios e até mesmo o que sabem do senso comum, criando condições para que os estudantes valorizem o conhecimento matemático presente em cada capítulo como ferramenta para se posicionar de modo fundamentado nos diversos temas abordados ao mesmo tempo que o professor faz uma avaliação diagnóstica de sua turma.

Ainda como sugestão para a prática pedagógica que visa favorecer o desenvolvimento da comunicação e da modelagem, propomos substituir a ação de responder imediatamente aos estudantes pela ação de fazer novas questões, como: Você pode me explicar como pensou? Como você pode ter certeza de que sua resposta está correta? Será que o que vimos na aula ou o que está no livro-texto pode ajudar você? Que tal escrever do seu modo e depois discutirmos como escrever com a linguagem matemática? Isso desloca o estudante da posição passiva para a responsabilidade de pensar de novo, argumentar e avançar, partindo de questões mais simples que o levem a encontrar as respostas para questões mais complexas.

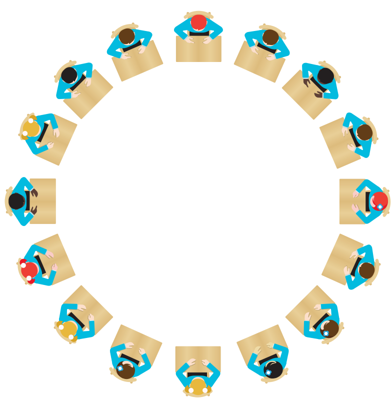
Maneiras de organizar a turma

A aula problematizadora e a aprendizagem colaborativa requerem pensar a organização do espaço na sala de aula, o que, segundo Miguel Arroyo (2004, p. 207), é "a materialização das concepções e práticas inovadoras de educar". Pensar a escola é pensar em um espaço, pois é por meio das relações, reações, vivências e convivências nesses ambientes que professores e estudantes se formam juntos. A organização das carteiras de maneiras distintas em sala de aula tem como objetivo melhor atender às necessidades diversas dos estudantes, promover interações mais significativas e facilitar métodos de ensino mais dinâmicos e participativos.

Organizar as carteiras em círculo ou em U, por exemplo, permite que todos os estudantes se vejam e se ouçam bem, facilitando discussões em grupo e a colaboração e o compartilhamento de ideias. Isso não apenas enriquece a experiência de aprendizagem, mas também ajuda a desenvolver habilidades sociais e comunicativas essenciais para o sucesso dentro e fora da sala de aula. Outra opção para trabalhos em grupo ou para projetos colaborativos com mais de quatro estudantes é organizar as carteiras em ilhas ou em grupos menores, para fomentar um ambiente mais cooperativo. Para atividades que exigem foco individual, como testes ou tarefas de escrita, a organização das carteiras em filas ou em L pode ser mais adequada para reduzir distrações e aumentar a concentração. Observe a seguir a representação de algumas dessas disposições.

Em círculo

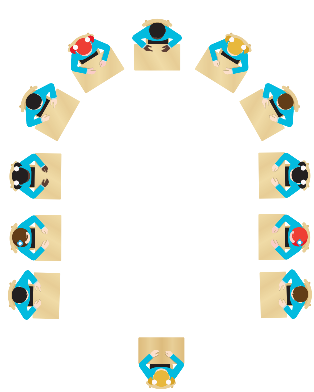
É adequada para debates, discussões em grupo e atividades de compartilhamento.



ID/BR

Em forma de U

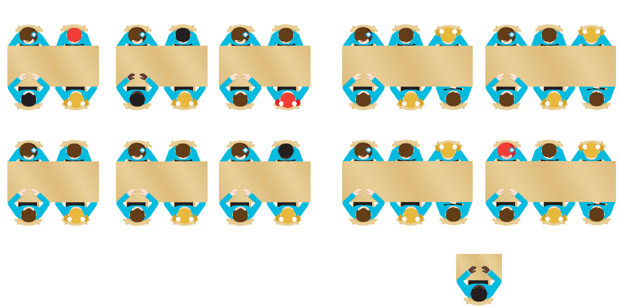
É apropriada para aulas expositivas, discussões e apresentações, permitindo uma boa interação com o professor.



ID/BR

Em grupos ou ilhas

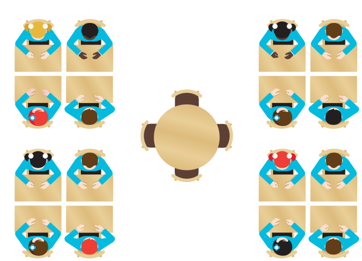
Facilita a realização de projetos e atividades em grupo.



ID/BR

Em estações

É indicada para a aprendizagem baseada em centros de interesse, projetos e rotação por estações.



ID/BR

A flexibilidade na organização das carteiras permite que os professores adaptem o ambiente de acordo com os objetivos específicos de cada aula ou atividade. Essa adaptabilidade é crucial em um mundo educacional em constante mudança, onde as metodologias e as abordagens pedagógicas estão sempre evoluindo para melhor atender às necessidades dos estudantes.

Há, ainda, a possibilidade de utilizar espaços externos à sala de aula, de modo que os estudantes possam experimentar diferentes arranjos em um ambiente mais dinâmico e inclusivo.

A modelagem e a linguagem matemática no Ensino Médio

A aquisição da linguagem matemática é parte importante da construção de modelos para explicar fenômenos ou para estudar ou aplicar uma propriedade.

Uma das competências que se esperam dos estudantes que terminam o Ensino Médio é o domínio das linguagens. Em Matemática, a meta é que o estudante seja capaz de ler, interpretar e produzir textos específicos dessa área. De fato, se tomarmos como propósito que o estudante continue aprendendo após a escola básica, que utilize o que aprendeu para enfrentar situações e problemas da vida real e que produza conhecimentos, a capacidade de comunicar-se matematicamente é um fator que adquire cada vez mais importância ao longo desse percurso.

A Matemática dispõe de um sistema notacional próprio, construído ao longo da história para representar ideias e conceitos. Assim, quando escrevemos algo como $\operatorname{sen} x = 1$ ou $\operatorname{sen} x > 1$, para compreender o que as frases significam não basta lê-las em língua materna ("seno de *x* é igual a um" ou "seno de *x* é maior que um"), visto que há noções, conceitos e procedimentos implicados nessa escrita:

- saber o que exatamente significa $\operatorname{sen} x$;
- entender que o símbolo *x* representa um valor desconhecido ou indeterminado;
- compreender que o sinal de igualdade ou de desigualdade nessas expressões indica que há algo a ser calculado, mas que, ainda que haja alguma "semelhança" entre as escritas, o uso de $=$ ou $>$ modifica significativamente a natureza da resposta que se busca;
- realizar os cálculos indicados;
- saber interpretar os resultados em um contexto específico e expressar a resolução encontrada seguindo as regras que norteiam a escrita matemática.

Pelo exemplo, é possível perceber que um componente essencial da linguagem matemática é que ela apresenta terminologia e simbologia próprias, que, especialmente no Ensino Médio, são de uso quase exclusivo da escola e da ciência. Certamente, para ler os textos em Matemática e para falar sobre essa área do conhecimento, nos valemos da Língua Portuguesa. No entanto, até mesmo essa leitura não implica uma transposição imediata, uma vez que há termos que, no dia a dia, têm sentidos bem diferentes de seu uso em Matemática, como é o caso de agudo, plano, módulo, grau, diferença, expoente, função ou total. Isso sem falar nas palavras que quase não são mencionadas fora da escola, como cotangente, polinômio e subtraendo.

É comum considerar que, ao ingressar no Ensino Médio, o estudante já tenha fluência na representação e na comunicação matemática por ter cursado o Ensino Fundamental. Também é frequente que se atribuam as dificuldades sentidas pelo estudante para ler e interpretar textos de Matemática a uma baixa fluência na leitura e na interpretação de textos em Língua Portuguesa. Mas, de maneira geral, não é isso que ocorre.

Por outro lado, por melhores que tenham sido as aulas de Matemática no Ensino Fundamental, elas não terão sido suficientes para desenvolver no estudante a competência da comunicação matemática. Ainda que uma parte dessa compreensão tenha se iniciado nos anos escolares anteriores, o estudante precisará do tempo do Ensino Médio para continuar aprendendo a se comunicar matematicamente e ampliar seu repertório.

Considerando que, de modo geral, o contato dos estudantes com a linguagem matemática se dá primariamente na escola e que essa linguagem tem características muito particulares, dominá-la não é simples, e as aulas de Matemática precisam ter espaço para que o estudante se aproprie cada vez mais das formas específicas de expressão nessa área do conhecimento. Para isso, é importante que:

- haja análise e discussão de diferentes representações matemáticas (convencionais ou criadas pelos estudantes), o que é possível, por exemplo, com a elaboração de um painel com diferentes representações para uma dada situação-problema;
- ocorram momentos para discutir os diferentes significados de um símbolo matemático, nos quais o professor – usuário fluente da comunicação matemática – interaja com os estudantes e seja exemplo para eles;
- sejam analisados erros nas escritas produzidas em sala de aula, de modo que os estudantes percebam o que é válido, ou não, em uma escrita matemática;
- haja momentos de leitura de textos matemáticos, para que os estudantes tenham contato com uma escrita matemática produzida por um escritor mais experiente;
- ocorram discussões com base no que os estudantes sabem de expressões matemáticas, para ampliar a compreensão a partir desse levantamento inicial;
- sejam usados dicionários nas aulas de Matemática;
- haja rodas de conversa sobre enunciados de problemas ou termos matemáticos sobre os quais os estudantes tenham dúvidas;
- os estudantes sejam incentivados a escrever uma explicação para um termo ou uma expressão da Matemática;
- haja análise do uso de uma mesma palavra em Matemática e em um contexto não matemático (por exemplo: Onde mais você já ouviu a palavra “domínio”? Que outros significados você conhece para a palavra “diferença” que não seja o da subtração? O que significa “face” em Geometria e fora dela?);
- os estudantes sejam incentivados a identificar em que contextos não matemáticos utilizam certas ideias matemáticas, como a ideia de função.

Essas estratégias favorecem a criação de um ambiente de comunicação matemática e contribuem para o aprimoramento do estudante com relação às regras que orientam as representações matemáticas. Afinal, como se sabe, o domínio de uma linguagem implica saber pensar nessa linguagem, e isso só ocorre quando vivemos em um ambiente que propicia e demanda tal forma de pensamento.

Atividades de pesquisa: investigação e integração

Trabalhos relacionados à pesquisa e à investigação favorecem novas aprendizagens; permitem que os estudantes ordenem conceitos e habilidades previamente dominados de modo a atingir um objetivo; possibilitam ações de planejamento e o desenvolvimento de estratégias de execução; requerem organização, gestão de tempo, análise de limites e possibilidades de ação, tratamento de informações e avaliação das ações empreendidas. Exigem, ainda, cooperação e esforço pessoal, constituindo-se em um verdadeiro exercício de autonomia.

A seção ***Matemática e...*** apresenta a maioria das propostas de pesquisa para a formação integral dos estudantes. Diferentemente da pesquisa acadêmica, que tem por objetivo a produção de novos conhecimentos, a pesquisa escolar até pode gerar novos conhecimentos, mas trabalha também com a reconstrução de conhecimentos já disponíveis e sempre visa à aprendizagem de procedimentos e ao desenvolvimento de habilidades. Buscar, selecionar, tratar, analisar, (re)publicar, redistribuir e remixar informações e conceitos são algumas das muitas habilidades necessárias para o desenvolvimento desse processo.

A pesquisa envolve o acesso a uma diversidade de fontes e à leitura de gêneros variados. Em breves orientações ao longo do Livro do Estudante, e em especial na seção ***Palavras-chave***, esta coleção propõe o uso de comandos como grifar, anotar e fazer sínteses, resumos, mapas mentais, entre outros, de tal maneira que os estudantes possam determinar, registrar e organizar ideias, informações, propriedades e outros pontos de interesse. Nesse processo, espera-se que eles aprendam procedimentos de paráfrase e de citação/menção ao discurso do outro (no caso, o discurso presente no texto de cada capítulo).

Tudo isso compõe um conjunto de ações didáticas e de expectativas de aprendizagem que não combina com o simples “recorta e cola” ou a cópia, mas, sim, com a formação do estudante como produtor de conhecimentos com autonomia e confiança em sua capacidade de aprender.

Ao longo da coleção, por exemplo, em algumas das seções ***Matemática e...***, ***Tecnologia*** e ***Palavras-chave***, bem como em algumas atividades, há sugestões e orientações de projetos de criação ou de construção, pesquisas de opinião, pesquisas visando à melhoria de condições ou à resolução de problemas na escola ou na comunidade, além de propostas que visam analisar como modelos matemáticos podem ajudar a resolver problemas cotidianos. Essas propostas permitem integração com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. A área de Linguagens pode contribuir com a adequação e a qualidade da produção dos estudantes, dependendo de como essa produção deva ser apresentada.

TECNOLOGIA E PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Na BNCC, encontramos uma referência explícita e aprofundada à participação cada vez maior das tecnologias digitais e da computação na vida de todos – no ambiente de trabalho, na escola, em casa, etc. Considerando as diferentes dimensões que caracterizam a computação e as tecnologias digitais – pensamento computacional, mundo digital, cultura digital (Brasil, 2018a) –, a BNCC descreve os conhecimentos, as habilidades, as atitudes e os valores esperados em cada uma dessas perspectivas, desde as competências gerais até os desdobramentos em habilidades em cada área do conhecimento.

Assim, em Matemática é preciso considerar o valor dos recursos tecnológicos para uma formação mais alinhada ao que se espera dos estudantes do século XXI. Celulares, calculadoras, computadores, com todos os seus recursos, inclusive os de Inteligência Artificial, podem ser incorporados às estratégias didáticas nas aulas de Matemática com os seguintes objetivos: favorecer a participação ativa dos estudantes; permitir fácil e rápido acesso a diversas fontes de informação; possibilitar a articulação do texto escrito com imagem, som e movimento; facilitar a simulação de situações e o desenvolvimento de habilidades, como selecionar, organizar e analisar as informações, para utilizá-las adequadamente; auxiliar na abordagem de novas ideias e conceitos; entre outros. A seção ***Tecnologia*** deste livro assume o compromisso de trazer as máquinas e alguns de seus recursos para a aprendizagem de Matemática, visando à maior inserção dos jovens do Ensino Médio no mundo digital, com suas maneiras de acessar, produzir e comunicar informações.

No Livro do Estudante, está presente também o boxe ***Para explorar***, que amplia as possibilidades de abordagem com sugestões de textos, *sites* e vídeos para que o estudante vivencie diferentes tecnologias e os conteúdos de diversas manifestações culturais relacionados ao tema em estudo, de modo que ele possa se posicionar em relação a esses conteúdos de modo fundamentado, tendo como ferramentas os conhecimentos adquiridos no próprio livro.

No entanto, tratando-se da área de Matemática, é preciso ir além. A tecnologia pode desenvolver algumas maneiras próprias de pensar, marcadas pelo raciocínio algorítmico e pela linguagem específica da tecnologia computacional utilizada para descrever processos regrados por etapas bem definidas. Entre esses recursos de linguagem estão os fluxogramas e os algoritmos destacados nas habilidades da BNCC para descrever o processo de resolução de problemas. Ou seja, o desenvolvimento do pensamento computacional extrapola o uso de quaisquer aparelhos. Como esclarece a pesquisadora Jeannette Wing:

> é o processo de pensamento envolvido na formulação de um problema e na expressão de sua(s) solução(ões) de tal forma que um computador – humano ou máquina – possa executá-la(s) (Wing, 2014, tradução nossa).

Em outras palavras, o pensamento computacional pode ser entendido como uma habilidade e um processo para identificar e resolver problemas, de modo que a solução proposta possa ser executada por um computador. Para isso, são utilizados conceitos e práticas comuns à computação (mas não restritos a ela), como a simplificação de situações-problema a partir da identificação de seus elementos essenciais e de similaridades com contextos anteriores (também definida como abstração), a decomposição de problemas em partes menores e a definição de sequência de ações para a realização e automação de tarefas (Grover; Pea, 2013).

Nesse sentido, lembrando que a problematização é a metodologia que favorece diferentes maneiras de pensar, compreender e analisar um mesmo problema, a aliança entre tecnologia e resolução de problemas colabora para o desenvolvimento das seguintes habilidades que compõem o pensar computacional:

- formulação de problemas;
- análise de dados de forma lógica e organizada;
- representação da realidade por meio de abstrações;
- proposição de soluções por meio de identificações e análises críticas dos problemas;
- transferência da solução encontrada para a resolução de problemas análogos.

Compreendendo a lógica que aproxima a resolução de problemas ao pensamento computacional, esta coleção assume intencionalmente experiências didáticas para que esse modo de pensar possa cada vez mais integrar a formação dos estudantes do Ensino Médio, tornando-os aptos a intervir de forma cidadã no meio em que vivem. Como exemplos dessas práticas, temos: a análise necessária para identificar padrões em situações-problema, estabelecendo relações entre os exemplos dados na seção ***Problemas e exercícios resolvidos*** e as atividades da seção ***Problemas e exercícios propostos***; a identificação de características de problemas na *seção* ***Por dentro do Enem e dos vestibulares***; e o encadeamento de processos como o de construção de gráficos de funções ou estatísticos.

ARGUMENTAÇÃO E NÍVEIS INFERENCIAIS DE LEITURA

Compreender a linguagem é entender as relações entre o que está explícito no texto e aquilo que o leitor pensa, conclui e infere por conta própria, com base em seu conhecimento de mundo e em suas experiências de vida. Fazer inferências possibilita ao leitor refletir e gerar novos conhecimentos com base em informações presentes no texto, que passam a fazer parte do conjunto de saberes desse leitor e se tornam a base para suas argumentações. A capacidade de realizar uma leitura em níveis inferenciais é uma característica essencial para a compreensão da linguagem, pois assim, do mesmo modo que o leitor memoriza as informações óbvias no texto, ele também incorpora em si as informações inferidas.

A inferência é um processo cognitivo que vai além da leitura e passa pelo entendimento ou pela suposição de algo desconhecido, fundamentado na observação e no repertório cultural do leitor. Trata-se, então, da conclusão de um raciocínio ou do levantamento de um indício com base no estabelecimento de relações.

A compreensão de um texto depende da qualidade e da quantidade de inferências geradas durante a leitura, visto que os textos contêm informações explícitas e implícitas, sempre deixando lacunas a ser preenchidas pelo leitor. Ao associar informações explícitas a seus conhecimentos prévios, o estudante dá sentido ao que está sendo dito no texto e pratica a apreensão de detalhes, sequências e relações de causa e efeito. Portanto, a inferência ocorre com a interação do leitor com o texto, ou seja, por meio da leitura.

As capacidades de concluir, deduzir, levantar hipóteses, ressignificar informações, formular novos sentidos e argumentar de modo consistente são essenciais para a atuação consciente e responsável do jovem na sociedade, já que assim ele estará preparado para entender contextos históricos, compreender o que está por trás de uma disputa política ou mesmo projetar soluções para problemas reais e cotidianos. Ao gerar uma nova informação partindo de uma anterior, o estudante desenvolve sua capacidade de “ler” os diversos pontos de uma situação e de propor resoluções factíveis que beneficiem a maioria dos envolvidos.

Em sala de aula, o exercício da leitura inferencial e o desenvolvimento da argumentação podem ser feitos de diversas maneiras, tanto na abordagem dos conteúdos como na execução das atividades. É possível formular perguntas que motivem o estudante a antecipar informações e verificar se suas hipóteses são plausíveis, instigando-o a acessar seus conhecimentos prévios nesse processo. Pode-se levar o estudante a explicar o que está implícito em um texto, a preencher lacunas de informação com base em pistas já dadas e a excluir ou confirmar hipóteses levantadas durante a leitura.

Por isso, em diversas seções e textos nas orientações no Livro do Estudante, sugerimos a leitura individual pelo estudante, seguida de discussão com os colegas e o professor do que foi compreendido, o que inclui sanar dúvidas. Assim, propomos o trabalho colaborativo, o painel de soluções e as apresentações das conclusões de pequenos projetos em Matemática como estratégias privilegiadas para o exercício da argumentação.

O PAPEL PRIVILEGIADO DO PROFESSOR

Para que todos os pressupostos apresentados aqui atinjam o propósito de garantir a formação integral dos estudantes enquanto aprendem Matemática, é essencial a ação do professor com uma adequada gestão da aula. Afinal, é no espaço escolar que todas as intenções pedagógicas têm a chance de se tornarem realidade. A mediação focada na aprendizagem de todos vê a aula como processo de interação em que todos devem ser acolhidos e participantes. Por isso, o planejamento das aulas é fundamental para que a escolha das atividades propicie boas experiências de aprendizagem aos estudantes.

No livro *Mentalidades matemáticas* (Boaler, 2018), ao apresentar os resultados de um trabalho de pesquisa prolongado com estudantes em risco de fracasso escolar em Matemática, a pesquisadora estadunidense Jo Boaler afirma que, depois do professor, as tarefas propostas na aula são o recurso mais importante para que os estudantes aprendam Matemática.

As pesquisas conduzidas por Boaler mostram que as propostas didáticas de uma aula ajudam a desenvolver mentalidades matemáticas de crescimento e a criar condições para uma compreensão profunda dos conceitos e dos procedimentos matemáticos.

Para saber se a atividade que se está propondo vai ajudar o estudante a aprender, é preciso compreender o que se deseja ensinar. Então, um bom planejamento, com objetivos bem definidos, é essencial. Um segundo ponto a ser levado em consideração é que a atividade proposta combine duas ou mais das seguintes características: possibilidade de despertar curiosidade e engajamento intelectual; permitir conexões entre temas próprios de Matemática (por exemplo, entre Álgebra e Geometria); envolver colaboração entre pares; e ser desafiadora.

Jo Boaler afirma ainda que **desafio**, **engajamento**, **curiosidade**, **criatividade** e **colaboração** são elementos essenciais para aulas produtivas em Matemática.

Propostas mais elaboradas, como o desenvolvimento de um projeto ou até mesmo a aprendizagem de um novo conceito ou procedimento, não podem ser feitas sem o devido cuidado do professor, desde a escolha do conteúdo até a maneira como a proposta será apresentada aos estudantes, considerando as particularidades e capacidades encontradas em sua turma. O olhar do professor para cada estudante e a escuta atenta do que lhe é dito, buscando entender a razão de cada pergunta, de cada desvio de rota e de cada erro, evidenciam a presença de um educador que busca a formação de pessoas reais, sem idealizações (que em nada contribuem para a aprendizagem efetiva).

O professor preparado para as demandas geradas para a formação integral dos estudantes precisa, assim como eles, estar aberto para aprender e se posicionar criticamente em relação ao que se sabe hoje sobre currículo, aprendizagem, natureza e ensino do conhecimento matemático e de sua aplicabilidade, bem como sobre políticas educacionais do país e de sua região. Nesta coleção, nossa contribuição está nas seções deste manual e na ***Bibliografia comentada*** ao fim deste volume, que buscam explicitar as razões das escolhas e a melhor maneira de utilizar este livro com seus estudantes.

PLANEJAR E AVALIAR EM MATEMÁTICA

O trabalho nos diferentes espaços e momentos de ensino na escola está diretamente associado à gestão do complexo ambiente da sala de aula. Ele exige planejamento e saber lidar com imprevistos que surgem na dinâmica de cada turma. Gerenciar essas questões com sabedoria para resolver impasses transforma cada aula em um momento de aprendizagem tanto para o estudante quanto para o professor.

Embora o planejamento seja fundamental para a aprendizagem efetiva e para o processo de avaliação, ele não pode ser rígido, mas, sim, um instrumento orientador da gestão da aula. Deve ser um norte que sinalize os conhecimentos que serão trabalhados, as diferentes habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes, as atividades idealizadas e os instrumentos para avaliar o que foi de fato construído na realização das atividades propostas.

A base para o planejamento das aulas é o currículo da rede em que cada unidade escolar está inserida. É ele que apresenta a fundamentação para um processo educacional que será vivenciado na escola, visando à formação integral dos estudantes. Tendo-o como norteador, o professor detalha a rota, estabelece objetivos de ensino, determina tempos, espaços e processos. Planejar significa, portanto, organizar e racionalizar a ação docente visando à articulação entre a prática da sala de aula e as problemáticas inerentes ao contexto social e cultural em que a escola está inserida.

É importante que, para cada caso, o professor considere em seu planejamento de aula pontos como: O que se quer ensinar? O que se espera que os estudantes aprendam na aula? Que recursos serão utilizados? Quanto tempo de aula deve estar disponível? Como será feita a organização dos estudantes no espaço da sala? Como iniciar a aula? O que os estudantes farão durante a aula? Como os estudantes vão elaborar seus registros? Como será a finalização da aula? O que será feito como avaliação da aprendizagem dessa aula?

Um aspecto que precisa ser cuidadosamente considerado no planejamento é a escolha das habilidades de aprendizagem que estarão no foco de cada aula, pois são elas que orientam aonde se quer chegar com o processo planejado e, consequentemente, a avaliação da aprendizagem.

Outro desafio é o ensino em salas de aula com muitos estudantes, onde é provável que haja grupos com necessidades e características diversas, sendo necessário planejar uma mesma atividade, ou atividades específicas para cada um desses grupos.

Esta coleção procura auxiliar nessa tarefa de gestão da aula com comentários direcionados ao professor ao longo do Livro do Estudante, propondo:

- a leitura de textos introdutórios e dos problemas resolvidos de cada capítulo de diferentes maneiras: leitura individual e discussão coletiva ou em grupos; leitura compartilhada, em que cada estudante lê uma parte do texto e outro explica o que compreendeu; leitura pelo professor como modelo de leitura de texto matemático; leitura com destaque das ideias centrais ou anotação dessas ideias com as palavras dos estudantes;
- a resolução dos problemas propostos em grupos produtivos, organizados em função de seus conhecimentos ou dificuldades, de modo que o professor possa acompanhar mais de perto um ou dois desses grupos;
- o uso do painel de soluções, que, como descrito anteriormente, é um recurso valioso para a aprendizagem de estratégias, maneiras diversas de registro e de pensamento, que ocorre pela análise coletiva da resolução ou produção de um colega, e pode ser proposto na análise das resoluções dos estudantes em cada seção ***Problemas e exercícios propostos***;
- pesquisas em grupo, com diferentes contribuições e níveis de aprofundamento, de acordo com os conhecimentos dos estudantes, como proposto na seção ***Matemática e...***;
- a abordagem da seção ***Para recordar*** não só como um momento de retomada, mas também como um roteiro de estudo em função das dificuldades apresentadas por alguns estudantes;
- a motivação dos estudantes que têm em seu projeto de vida o Ensino Superior, investigando algumas propostas de questões de provas seletivas de universidades e aplicando os conhecimentos deles na seção ***Por dentro do Enem e dos vestibulares***;
- indicações no boxe ***Para explorar***, que traz uma diversidade de possibilidades para os estudantes ampliarem seus conhecimentos;
- as propostas da seção ***Tecnologia***, em que todos, independentemente de seus saberes, podem rever ou aprofundar a Matemática ao aprender a utilizar planilha eletrônica, calculadora, *software* de geometria dinâmica e outros recursos.

Outra função importante do planejamento é apoiar o professor na avaliação de sua gestão da aula. Após a implementação do que foi pensado, o professor pode reconhecer os pontos positivos e os que precisam ser mais bem elaborados, como: O planejamento proposto abrangeu todas as questões relevantes? Os recursos providenciados foram adequados? Os objetivos da aula e as expectativas em relação aos estudantes foram explicitados? Foram feitas perguntas que mobilizaram aprendizagens? Algumas perguntas deveriam ser alteradas? Se sim, quais? Esses registros permitirão reflexões sobre o planejamento proposto e como foi desenvolvido. A análise é essencial para a qualificação de outros momentos de ensino-aprendizagem no decorrer das aulas em cada turma.

Ainda em relação à Matemática no Ensino Médio, a quantidade de aulas e o tempo mais prolongado podem ser utilizados para o alcance de cada habilidade, em uma crescente de aprendizagem a cada série. Isso significa que o planejamento para o desenvolvimento de cada competência e suas habilidades pressupõe um processo de aprendizagem sem a limitação usual de um bimestre ou um trimestre de ensino.

Além disso, não existe uma ordem de prioridade para o desenvolvimento das competências específicas e das correspondentes habilidades. Essa ordem será estabelecida pelo planejamento do professor, de acordo com os propósitos de seu plano ou das situações didáticas desenvolvidas com os estudantes e, de preferência, em **planejamento integrado** com todos os professores de Matemática e até mesmo com docentes das demais áreas, especialmente das áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Ainda assim, há que considerar que alguns temas ou objetos de conhecimento são prévios a outros, servindo de ferramentas para aprendizagens mais complexas. Um exemplo disso são as funções do 1º grau e a geometria plana. Não se trata de uma ordem rígida, mas de uma sequência lógica, para que os conceitos e procedimentos se construam sobre bases sólidas e coerentes para novas aprendizagens. Apesar de alguns temas, como Estatística e Probabilidade, permitirem maior flexibilidade, eles não devem ser vistos como independentes de outras unidades temáticas, pois as funções, os números e algumas operações entre conjuntos também estão presentes nesses temas, embora pertençam a outra unidade temática. A percepção dessas relações não traz implicações apenas para o planejamento do professor: deve corresponder também à aprendizagem dos estudantes, uma vez que o estabelecimento de conexões entre conceitos, representações e procedimentos constitui aprendizagem mais aprofundada e desejável, como descrito nas competências específicas **3** e **4** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Nas orientações para este livro, para as atividades do capítulo ou uma atividade específica estão descritos os objetos de conhecimento, as habilidades que se pretende desenvolver, as competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias e as competências gerais propostas pela BNCC. Encontram-se também as **expectativas de aprendizagem**, ou seja, o que se espera dos estudantes e que pode orientar a forma de ensino e a avaliação de cada um deles. Além disso, há uma sugestão de cronograma para um planejamento bimestral, trimestral e semestral, que pode ser adequado de acordo com a quantidade de aulas estabelecidas no ano letivo para a área de Matemática e suas Tecnologias. Todas essas indicações visam auxiliar na elaboração do planejamento das aulas com apoio deste material.

AVALIAÇÃO EM UMA PERSPECTIVA AMPLA

Planejar e avaliar são faces de uma mesma moeda, indissociáveis. A avaliação é, sem dúvida, um dos aspectos mais sensíveis e complexos de qualquer planejamento. Na perspectiva da formação integral, a avaliação passa a ser um instrumento de comunicação com o estudante, com os demais professores, com as equipes da escola responsáveis pela formação do jovem e até mesmo com a família.

A avaliação assume o papel de dialogar com o estudante, fornecendo-lhe informações como “isso é o que você sabe agora” ou “isso é o que você ainda não sabe”, construindo com ele um projeto de progressão por meio de respostas a questões como: Como vamos seguir daqui para a frente? Com o que e como você se compromete? Como eu, professor, me comprometo e pretendo contribuir para isso? Esse diálogo estabelece um pacto de compromisso recíproco que desvia o foco da nota para o conhecimento e para o autoconhecimento, visto que cada jovem passa a ter consciência do que aprendeu e do que falta aprender, das competências que já desenvolveu e daquelas que serão foco de trabalho, em um ambiente de confiança, e não de mera cobrança.

Quando a avaliação é entendida como parte importante da formação integral dos estudantes, ela deixa de ser considerada uma simples nota atribuída ao final de um período de ensino (um bimestre ou um trimestre, por exemplo), quando cada estudante recebe um número ou um conceito como medida de aprendizagem. A nota, por si só, exclui muitos dos fatores determinantes do processo de aprender. O jovem, sua história, o momento das avaliações, os recursos e o tempo para o estudo individual e até mesmo o instrumento de avaliação utilizado podem ser fatores decisivos para uma nota, sem necessariamente corresponder ao que o estudante aprendeu de fato.

Além disso, um currículo alinhado com a BNCC, ou seja, pautado pelo desenvolvimento de competências e habilidades, visando ao aprofundamento e à consolidação das aprendizagens, não pode se sustentar em processos de avaliação pontuais e meramente numéricos. Ainda que gere uma nota, a avaliação deve corresponder ao projeto da escola no sentido da formação do estudante. Se há um projeto de educação e a escola assume seu papel formador, a avaliação deve sinalizar se o estudante está, ou não, alinhado ao projeto traçado para ele. Nesse sentido, a avaliação deve corresponder aos efeitos da escola na formação do jovem.

Na perspectiva da formação integral dos estudantes, a avaliação é o processo de coletar, organizar, sistematizar e interpretar dados e informações que ajudam a acompanhar o ensino e a aprendizagem e a tomar decisões a respeito do que fazer para planejar ou replanejar as ações do ensino para a aprendizagem. Esse processo se divide em três etapas: **diagnóstico**, **análise** e **intervenção**.

Um processo avaliativo efetivo da aprendizagem começa com a coleta de dados, ou seja, com um diagnóstico proveniente da observação e do registro do professor, além das diversas produções dos estudantes. Antes de atribuir uma nota ou de emitir qualquer parecer sobre o que o estudante aprendeu, ou não, o professor prossegue com a avaliação realizando a análise das informações coletadas, pautada pela reflexão sobre as aprendizagens esperadas, a atividade proposta e seu desenvolvimento. Essa análise possibilita o terceiro passo da avaliação, que corresponde à tomada de decisão sobre como continuar, o que retomar e como agir em face das aprendizagens dos estudantes. É a fase da intervenção. Completa-se, assim, o ciclo avaliativo.

A intervenção pode ser imediata, quando se identifica algo que os estudantes deveriam saber e essa lacuna pode impedir a continuidade de seu percurso de aprendizagem. Outras vezes, a análise e o planejamento permitem antever que o conhecimento ausente nesse momento pode ser retomado mais adiante em outro tema, tempo ou situação. Nesses casos, a intervenção é pensada e planejada, sem ser imediata. Algumas vezes a intervenção precisa ser realizada com toda a turma; em outras, deve ser aplicada a um grupo específico. Pode-se realizar uma retomada utilizando novos recursos ou elaborando planos de estudo para pequenos grupos, aproveitando recursos da tecnologia (como vídeos), tarefas e leituras.

A intervenção derivada da análise corresponde à recuperação em processo, entendida como um conjunto de ações necessárias para que o estudante se aproprie do conhecimento, e não para simplesmente recuperar o conteúdo. Essa abordagem da recuperação da aprendizagem é formativa no sentido de respeitar o fato de que nem tudo que se ensina é realmente aprendido e muito menos pode ser avaliado de imediato. Na perspectiva da formação integral, é preciso respeitar o tempo do estudante, uma vez que o tempo do ensino pode não ter sido suficiente para que ele aprendesse tudo o que precisava. Portanto, o professor precisa decidir se a avaliação do conteúdo, naquele momento, é justificável. O que não foi aprendido deve ser registrado e incorporado ao planejamento do professor nos próximos períodos de ensino.

Cada intervenção requer nova coleta de dados, um novo diagnóstico e a consequente análise de informações para determinar se a intervenção realizada foi efetiva ou precisa ser repensada. Dessa forma, completa-se o ciclo avaliativo, em constante retroalimentação em direção à aprendizagem de cada estudante.

ID/BR

Quando a avaliação visa à formação integral do estudante, as situações de **erro** são vistas como etapas do processo de aprendizagem. É essencial pensar a intervenção a partir dos erros: pesquisar o percurso que levou a um erro; analisar com o estudante o que falta aprender; ou os cuidados necessários para evitar novos enganos são ações que devem permear o processo de avaliação, uma vez que errar é inerente ao processo de aprender, tanto na escola quanto na vida. O erro é corrigido quando se reflete sobre ele, e não pela simples eliminação da dúvida ou pela punição por algo que ainda não foi aprendido. Na proposta metodológica deste livro, evidenciamos o painel de soluções como um importante aliado para o trabalho consistente com o erro e para a construção de um ambiente propício à aprendizagem.

PARA EXPLORAR

Vídeo

A RELAÇÃO entre currículo e avaliação para promoção da aprendizagem. [*S. l.*: *s. n.*], 2021. 1 vídeo (18 min 17 s). Publicado pelo canal Instituto Reúna. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=V9jJREEjhfE&list=PLYVu0c7CEIRHvH_ON_VX0zfpl_37YydjR&index=6. Acesso em: 27 set. 2024.

No vídeo em inglês legendado em português, o especialista australiano Philip Lambert aborda a relação entre currículo e avaliação, aprofundando a reflexão sobre como construir estruturas avaliativas a partir dos currículos, evitando que elas se tornem instrumentos isolados das práticas pedagógicas.

SOBRE OS INSTRUMENTOS E AS MANEIRAS DE AVALIAR

Não existe processo de avaliação sem a coleta de dados para serem analisados; daí a importância dos instrumentos de avaliação, sua escolha e seus critérios de uso. A seleção e a elaboração de um instrumento de avaliação começam ainda durante o planejamento, quando o professor questiona: O que ensino? Por que ensino? Os estudantes podem aprender isso? Tais questionamentos já apontam para a necessidade de refletir sobre as ações didáticas a fim de garantir o aprendizado dos estudantes.

É importante que a avaliação forneça dados que possibilitem ao professor compreender o que foi aprendido, ou não, e fazer intervenções que permitam ao estudante avançar. Dessa forma, os instrumentos de avaliação podem guiar o olhar do professor nesse sentido. A variedade de instrumentos de avaliação favorece a individualização do processo de ensino e aprendizagem, permitindo que esta seja uma experiência que, embora se realize no coletivo, se torne única para cada estudante.

Há instrumentos a serem utilizados que estão mais diretamente relacionados à obtenção de dados pelo professor. Embora o estudante seja chamado a colaborar, é o professor que centraliza as ações de coleta e análise de dados. É o caso da observação e do registro, da análise da produção dos estudantes, das provas e da análise de erros, instrumentos que podem ser usados em vários momentos.

Na correção de uma tarefa ou de um trabalho em grupo, por exemplo, é possível observar e registrar o que os estudantes aprenderam e permitir que eles apresentem aos colegas suas resoluções, suas dúvidas ou suas imprecisões de linguagem. Essa dinâmica pode ser um bom contexto para uma intervenção ou um acompanhamento desses estudantes nas próximas atividades.

Há situações no próprio Livro do Estudante – quando se propõe ao estudante que organize o que aprendeu, elabore problemas, produza textos após atividades e analise problemas e exercícios com erros na resolução – que podem ser utilizadas com finalidade avaliativa, não necessariamente para que lhe seja atribuída uma nota, mas para obter dados e planejar intervenções. Nessa análise, a oralidade, os desenhos, os gráficos, os esquemas e as escritas pessoais são importantes para acompanhar as percepções e os avanços de cada um. Relembrando que o letramento matemático é uma meta na Educação Básica, avaliar a leitura, a escrita e a utilização da linguagem em diferentes contextos é tão importante quanto assegurar os objetos de conhecimento específicos.

A **autoavaliação** é outro instrumento que pode ser usado com a finalidade de atribuir ao estudante a responsabilidade de avaliar a si mesmo, incentivando a reflexão sobre sua participação e aprendizagem. Cabe ao professor garantir as condições para que esse instrumento cumpra seu objetivo, o que certamente gerará dados valiosos sobre os estudantes e o processo de ensino.

A autoavaliação pode começar de modo muito simples, e até mesmo com salas de aula com muitos estudantes, na forma de uma lista feita pelos estudantes ao final da aula, registrando o que consideram importante em suas aprendizagens. Essa lista pode ser lida por aqueles que o desejarem fazer, como aquecimento para a aula seguinte. O que for mencionado pelos estudantes pode ser registrado como aprendido, e o que não constar das listas precisa ser retomado.

Outro recurso é a **caixa de dúvidas**: os estudantes escrevem suas dúvidas em uma folha de papel e depositam-nas em uma caixa. De posse dessas informações, o professor pode fazer intervenções com a turma ou com alguns estudantes, dependendo do que considera melhor retomar. Esse tipo de instrumento fornece indícios da aprendizagem em processo, sem que seja preciso esperar uma prova, em um momento pontual, para identificar dúvidas e só então intervir.

Com o tempo, é possível propor autoavaliações mais estruturadas, incluindo as habilidades para o século XXI, mas não sem antes construir um ambiente de confiança, no qual os jovens possam falar de si, sem julgamento de valor.

O professor pode, por exemplo, planejar com a turma os itens que devem compor uma autoavaliação ou utilizar propostas do Livro do Estudante que têm essa função, como a seção ***Palavras-chave***.

A seção ***Por dentro do Enem e dos vestibulares*** também pode ser utilizada como instrumento de avaliação. O trabalho com essa seção será explicado mais adiante. Nela, são apresentados diferentes procedimentos de resolução de atividades de exames oficiais e, em seguida, propostas outras atividades que podem ser resolvidas com o uso da estratégia apresentada. Os registros feitos pelos estudantes podem servir de instrumento de avaliação de caráter preparatório para os exames de larga escala. Além disso, vale observar com atenção se os estudantes conseguem aplicar os conhecimentos adquiridos nessa seção na resolução das outras questões desse tipo distribuídas ao longo do volume nas seções ***Problemas e exercícios propostos***.

Esse trabalho pode ser complementado com simulados organizados pelo professor para que os estudantes estejam preparados não apenas em termos de conteúdo, mas também para que eles vivenciem o ambiente e o clima em que essas provas acontecem. No primeiro momento em que os estudantes forem viver uma experiência como essa, transmita a eles orientações como as indicadas a seguir e, sempre que possível, reforce-as.

- Identifique e resolva as questões mais fáceis primeiro. Dessa maneira, você resolve o maior número possível de atividades no tempo estipulado.
- Identifique as questões médias e difíceis para voltar a elas depois.
- Não perca muito tempo tentando resolver uma questão que exige um conceito do qual você não se recorda no momento. Passe para outra atividade e, depois, retome as questões que ficaram para trás. Ao lidar com outras atividades, você pode se lembrar dos conteúdos necessários para resolver essas questões.
- Se as questões exigirem a leitura de textos, primeiro leia a pergunta e, depois, leia o texto com o olhar direcionado. Dessa maneira, você consegue identificar as respostas enquanto realiza a leitura e interpreta o texto.
- Controle o tempo de resolução das questões para que, se você considerar necessário, possa fazer uma pausa e voltar renovado para resolver as demais questões.

O último instrumento é o **portfólio**, uma maneira de documentar os trabalhos realizados pelo estudante, como pesquisas, gráficos, textos, problemas resolvidos, etc., e arquivá-los em uma pasta. O portfólio pode ser entendido como um articulador dos demais instrumentos de avaliação, pois sua organização, realização e utilização o tornam o representante mais adequado para fazer da avaliação um processo compartilhado entre professor e estudante.

Em outra direção, é preciso reconhecer que todo professor deve observar seus estudantes. Trata-se, então, de validar essa **observação** em um instrumento concreto. Um caderno físico ou um arquivo virtual pode conter essas observações, para ser utilizado em momentos de análise pelo professor ou para confrontar suas percepções com as dos estudantes em suas autoavaliações, produções e provas. Breves anotações e comentários sobre a aula podem apoiar intervenções mais assertivas e intencionais.

Nessa perspectiva, o essencial é a decisão de colocar a avaliação a serviço do processo de aprendizagem. Isso faz com que os diversos instrumentos utilizados se organizem em torno de atividades que tenham sentido e relevância para o estudante, em detrimento de exercícios pontuais e artificiais. Dessa maneira, a avaliação se torna, simultaneamente, uma situação de ensino e de aprendizagem.

A meta desse processo de planejamento e avaliação é que os registros do professor, em conjunto com os de seus estudantes, componham a trajetória do trabalho realizado, iluminem o caminhar, criem a memória da vida do grupo e de cada estudante em particular e legitimem as decisões tomadas para a aprendizagem de todos.

Vale ressaltar que grupos numerosos de estudantes podem apresentar desafios para diagnósticos e acompanhamentos individuais, mas favorecem o debate e a troca de ideias. Nesse caso, é proveitoso que os estudantes participem da organização das discussões coletivas ou em grupo em diversos momentos ao longo da coleção. Durante essas vivências, é possível avaliar a interação entre os estudantes e o empenho e o comportamento de cada um deles.

Além disso, é importante promover e favorecer a aprendizagem de estudantes com diferentes perfis e modos de aprender – uma vez que eles são o centro da ação pedagógica – com várias oportunidades para serem protagonistas na aquisição de seus conhecimentos. Os estudantes vivenciam situações diversas que permitem identificar suas potencialidades, suas dificuldades, seus repertórios prévios e suas preferências. Nesse contexto, é possível que todos os estudantes sejam valorizados e acolhidos, porque podem experimentar os fazeres propostos, tendo o professor como mediador de seu processo de aprendizagem e os colegas como parceiros nessa construção.

É fundamental realizar uma avaliação continuada dos estudantes e promover a colaboração entre educadores e educandos, incentivando-se uma postura ativa de ambas as partes no processo de ensino e aprendizagem. Assim, criam-se condições para que o professor possa identificar, combater e, principalmente, prevenir comportamentos que coloquem em risco a saúde mental dos estudantes, como mediador em ocorrências de *bullying* e em ações de prevenção à violência autoprovocada. Além de promover discussões sobre o assunto, é fundamental que os educadores saibam identificar situações de calúnia, constrangimento e ameaça verbal ou física, incentivando o respeito mútuo, a empatia entre os estudantes, o autocuidado e a valorização da vida. Os estudantes precisam se sentir amparados pelos adultos, ter seus problemas reconhecidos e ouvidos e, se necessário, ser encaminhados a um profissional da área da saúde.

O papel do educador é estar alerta, ser empático e contribuir para que os estudantes se sintam emocionalmente confiantes e preparados para lidar com os desafios. Também pode desempenhar um papel na resolução dos conflitos e na conciliação dos envolvidos. Ao proporcionar um ambiente emocionalmente seguro, respeitoso e de confiança entre os estudantes, os educadores podem promover a convivência pautada pela ética e por atitudes e valores essenciais para a vida em sociedade. Com isso em mente, é possível orientá-los sobre a importância do autorrespeito, do respeito ao próximo, da consciência e da responsabilidade em relação aos próprios atos, bem como da necessidade de se colocar no lugar do outro.

Para obter mais informações sobre como prevenir e mediar o *bullying* na escola e evitar ações de violência autoprovocada, os educadores podem procurar cartilhas elaboradas pela Organização Mundial da Saúde (OMS), pela Ordem dos Advogados do Brasil (OAB) e pelo Centro de Valorização da Vida (CVV).

MODELOS AVALIATIVOS

Como foi apresentado anteriormente, a avaliação é o processo de coletar, organizar, sistematizar e interpretar dados e informações que ajudam a acompanhar o processo de ensino e aprendizagem e a tomar decisões sobre o que será necessário fazer para planejar e replanejar as ações de ensino e aprendizagem. Em estreita relação com o que se deseja que os estudantes aprendam, a avaliação tem diferentes funções e é um importante instrumento de regulação das relações entre estudantes e educadores e do processo de ensinar e aprender e um poderoso instrumento de comunicação. A finalidade do processo avaliativo é sempre garantir que as aprendizagens aconteçam. Toda avaliação tem caráter orientador e deve estar associada à garantia de que os estudantes avancem em sua trajetória escolar aprendendo o que se espera no ano em que se encontram.

Há diferentes tipos de avaliação com finalidades distintas e complementares, visando apoiar o professor a tomar suas decisões. Vamos tratar dos modelos diagnóstico, formativo, somativo, comparativo e ipsativo.

Avaliação diagnóstica ou inicial

A **avaliação diagnóstica ou inicial** é utilizada antes do início do processo de ensino para identificar os conhecimentos prévios, as habilidades e as necessidades dos estudantes. Ela costuma ser aplicada no início do ano, mas conceitualmente toda avaliação pode ser considerada diagnóstica e, em essência, todo processo de ensino que se inicia deveria ter um momento em que os estudantes pudessem utilizar seus conhecimentos prévios e reconhecer o que sabem a respeito daquilo que aprenderão.

Esse tipo de avaliação tem como objetivo identificar pontos fortes e fracos dos estudantes antes de se iniciar um novo ano, uma unidade do livro ou um conceito, permitindo um planejamento mais eficaz do ensino. Por exemplo, se o professor vai iniciar um capítulo que trata de Estatística, é interessante propor aos estudantes que escrevam o que sabem a respeito de gráficos e tabelas, uma vez que esses elementos são essenciais para o estudo. Isso servirá para eles como "aquecimento" e dará ao professor uma ideia do que precisará retomar e quão profunda, ou não, deverá ser essa retomada. Os estudantes podem fazer isso em grupo ou produzir uma apresentação de *slides* ou, ainda, citar exemplos.

A avaliação diagnóstica não precisa ser longa e pode ser realizada por meio dos seguintes recursos:

- **Entrevistas individuais** com os estudantes, para discutir seus conhecimentos prévios e identificar áreas de dificuldade.
- **Questionários**, com a utilização de plataformas *on-line*, para diagnosticar as habilidades e os conhecimentos da turma antes de iniciar uma nova unidade do Livro do Estudante.

Prefira avaliações diagnósticas mais curtas, porém frequentes, considerando apenas os conhecimentos pregressos necessários para trabalhar um tema de um mês ou do primeiro trimestre letivo, por exemplo. Isso permite fazer um plano mais focado do conteúdo que precisa ser retomado de imediato. Muitas vezes, o aquecimento inicial e as aulas posteriores tornam desnecessárias grandes revisões iniciais. O texto introdutório e as primeiras atividades do Livro do Estudante podem servir para criar um teste diagnóstico. Elabore questionários com base em tópicos principais do Livro do Estudante dos quais a turma já deveria ter se apropriado.

Avaliação formativa

A **avaliação formativa** é realizada durante o processo de ensino e aprendizagem e tem como objetivo acompanhar o progresso dos estudantes, fornecendo *feedback* contínuo que possibilite melhorar esse processo. Essa avaliação é feita pelo professor e pelos estudantes, pode contar com diversos instrumentos e redireciona continuamente o planejamento. As informações obtidas pela avaliação formativa, portanto, ajudam o professor e os estudantes a identificar áreas que necessitam de melhoria e ajustar o ensino e a aprendizagem em tempo real.

Os instrumentos da avaliação formativa podem incluir, por exemplo: a própria produção dos estudantes durante a aula; pequenas atividades ao final da aula para verificar se a principal ideia desenvolvida foi aprendida, ou não (e, assim, identificar o que eventualmente é necessário retomar na aula seguinte); momentos de autoavaliação dos estudantes. Os instrumentos de avaliação podem divididos em algumas categorias:

- **Observação e registro** – Consiste no registro das observações constantes que o professor faz dos estudantes nas situações de aula, bem como de suas próprias impressões sobre as aulas. Em um caderno, o professor pode organizar um diário de bordo e fazer anotações que o ajudem na tomada de decisões a respeito de suas aulas e apoiem o aprendizado de seus estudantes.
- **Avaliação entre pares** – Constituem sessões de revisão entre pares, nas quais os estudantes avaliam o trabalho dos colegas e fornecem *feedback* sobre isso, por exemplo, com a troca de cadernos entre eles, para que corrijam as atividades uns dos outros, ou pela leitura da seção ***Palavras-chave***.
- **Provas** – Esse instrumento é adequado para avaliar procedimentos específicos, a capacidade do estudante de organizar ideias, sua capacidade de expressão e sua habilidade de apresentar soluções originais. É possível propor provas com consulta ou sem consulta, em duplas ou em grupos maiores, etc. A prova pode ser dissertativa, de múltipla escolha, com itens de resposta construída ou uma combinação de todos esses formatos. As provas, porém, têm suas limitações quando se quer, por exemplo, analisar como os estudantes utilizam conhecimentos em situações em que precisam argumentar com outras pessoas, como em debates ou outras circunstâncias de discussão de ideias.
- **O que aprendi sobre** – Um incentivo para que os estudantes mantenham registros escritos de aprendizagem sobre o que estudaram, sobre dúvidas que tiverem e sobre como se sentem em relação ao próprio progresso. Isso pode ser feito em forma de lista, história em quadrinhos, pequenos textos, tanto em papel quanto em meios digitais.
- **Livro didático** – Os problemas e exercícios de cada seção propostos no Livro do Estudante podem orientar a avaliação formativa se os estudantes, juntamente com o professor, analisarem erros cometidos durante a resolução. A seção ***Palavras-chave***, pensada como um momento de síntese e autoavaliação, pode ser discutida ou realizada em duplas, e o professor pode recolher e ler as produções, dando aos estudantes um retorno sobre erros e acertos, retomando com eles o que julgar necessário. Essa seção pode, ainda, ser uma ferramenta interessante para um portfólio. Também pode ser reservada uma aula quinzenal para que os estudantes se dediquem a revisar o que aprenderam ou pode ser realizado um *quiz* semanal em que eles criem sessões de revisão entre pares, usando a seção ***Para recordar*** do Livro do Estudante.

Avaliação somativa

A **avaliação somativa** ocorre ao fim de um período de ensino, como um bimestre, um semestre ou um ano letivo, e tem o intuito de consolidar o aprendizado dos estudantes em relação aos objetivos estabelecidos. De modo geral, essa avaliação pode ser uma síntese feita com base na avaliação formativa.

O objetivo da avaliação somativa, portanto, é indicar o nível de conhecimento adquirido pelos estudantes ao final de um período de instrução, contendo aspectos burocráticos como atribuição de nota ou conceito exigidos pelo sistema, que são geralmente usados para certificar a conclusão de um curso. Alguns diferentes instrumentos podem ser usados como avaliação somativa:

- **Simulados** – É possível organizar testes que simulem processos seletivos (como os do Enem e de vestibulares) com questões de múltipla escolha, abrangendo noções e conceitos estudados em determinado período do ano letivo. Os estudantes precisam aprender a lidar com esse tipo de processo, com regras mais rígidas de realização, e assim é possível analisar a autonomia e o preparo deles para esse tipo de avaliação. Devemos frisar que é importante que esse não seja o único tipo de instrumento avaliativo do período.
- **Projetos finais** – Projeto final a ser realizado pelos estudantes que englobe diversos conceitos aprendidos ao longo do semestre, como a criação de um modelo matemático, a resolução de um problema complexo ou a aplicação de conceitos matemáticos em um contexto real.
- **Portfólios** – Consistem em um conjunto (físico ou digital) de atividades e trabalhos realizados ao longo do período letivo, incluindo trabalhos corrigidos, reflexões sobre o aprendizado e autoavaliações. Os portfólios devem ser organizados e mantidos pelos estudantes.
- **Livro didático** – As atividades propostas ao longo de cada capítulo do Livro do Estudante podem compor pequenos testes quinzenais mais abrangentes e ter um fechamento conjunto com outros instrumentos de avaliação ao final de um período letivo.

Avaliação comparativa

A **avaliação comparativa** é utilizada para comparar o desempenho de diferentes grupos de estudantes ou de um mesmo grupo de estudantes em diferentes momentos. Ou seja, o objetivo da avaliação comparativa é analisar diferenças no desempenho entre grupos de estudantes (como turmas ou mesmo escolas) ou, ao longo do tempo, buscar entender tendências e efetividade de métodos de ensino.

Em Matemática, o professor pode aplicar os mesmos testes da avaliação somativa em todas as turmas de uma mesma série. Após a aplicação dos testes, é indispensável que sejam realizadas as seguintes etapas:

- **Análise de dados** – Prevê a utilização de ferramentas de análise de dados, como planilhas e gráficos, para comparar os resultados das avaliações (entre diferentes turmas ou períodos letivos) e entender o desempenho dos estudantes.
- **Produção de gráficos de progresso** – Servem para gerar uma visualização eficaz de melhorias ou de declínios no desempenho dos estudantes ao longo do tempo.

Caso sua rede já conte com avaliações comparativas, não há necessidade de criar outra; utilize os dados já existentes para essa comparação e análise.

Avaliação ipsativa

A **avaliação ipsativa** compara o desempenho atual de um estudante com o próprio desempenho anterior, em vez de compará-lo com o desempenho dos colegas. Esse tipo de avaliação pode ser utilizado em Matemática para manter registros das avaliações dos estudantes ou pedir a eles que façam autoavaliações e estabeleçam metas de aprendizagem, revisando essas metas periodicamente para monitorar seu progresso pessoal.

O objetivo principal da avaliação ipsativa é acompanhar o progresso individual e a melhoria contínua dos estudantes, incentivando o desenvolvimento pessoal.

Tanto nas avaliações comparativas quanto nas ipsativas é importante o registro do professor, por meio de anotações constantes ou de gráficos ou mapas, para obter uma visão mais holística do aprendizado dos estudantes/das turmas, o que lhe permitirá fazer ajustes mais precisos no ensino, promovendo um ambiente de aprendizagem mais eficaz e personalizado.

ESTRUTURA DA COLEÇÃO

Esta coleção é composta de três volumes da área de Matemática e suas Tecnologias destinados ao Ensino Médio. Cada volume está organizado em quatro unidades, que, por sua vez, estão divididas em capítulos. Na concepção de cada volume, cuidamos para que os conteúdos fossem distribuídos de maneira organizada e equilibrada, de modo que fossem contempladas todas as unidades temáticas da Matemática previstas na BNCC: Números e Álgebra; Grandezas e Medidas; Estatística e Probabilidade.

Organização geral da obra

Cada volume é composto de quatro unidades e cada volume aborda todas as áreas da Matemática (números e áreas, geometria e medidas, probabilidade e estatística).

VOLUME 1

Unidade 1: Números, análise de dados e funções

- Capítulo 1 – Conjuntos numéricos e intervalos na reta real
- Capítulo 2 – Estatística: dados, variáveis e gráficos
- Capítulo 3 – Relações entre grandezas: funções
- Capítulo 4 – Função afim
- Capítulo 5 – Função quadrática

Unidade 2: Grandezas em geral e áreas

- Capítulo 6 – Grandezas e medidas
- Capítulo 7 – Áreas de figuras planas

Unidade 3: Sequências e progressões

- Capítulo 8 – Sequências numéricas
- Capítulo 9 – Progressões

Unidade 4: Educação financeira e noções de Estatística

- Capítulo 10 – Estatística: amostragem e medidas de tendência central
- Capítulo 11 – Educação financeira e projeto de vida

VOLUME 2

Unidade 1: Matemática Financeira e funções: exponencial e logarítmica

- Capítulo 1 – Função exponencial
- Capítulo 2 – Logaritmo e função logarítmica
- Capítulo 3 – Matemática Financeira

Unidade 2: Geometria plana

- Capítulo 4 – Geometria euclidiana
- Capítulo 5 – Geometria das transformações

Unidade 3: Trigonometria

- Capítulo 6 – Relações trigonométricas no triângulo retângulo
- Capítulo 7 – Relações trigonométricas em um triângulo qualquer
- Capítulo 8 – Arcos de circunferência e ciclo trigonométrico
- Capítulo 9 – Funções trigonométricas

Unidade 4: Análise combinatória e probabilidade

- Capítulo 10 – Análise combinatória
- Capítulo 11 – Probabilidade

VOLUME 3

Unidade 1: Probabilidade e Estatística

- Capítulo 1 – Estatística: medidas de dispersão
- Capítulo 2 – Probabilidade e Estatística

Unidade 2: Geometria espacial

- Capítulo 3 – Sólidos geométricos: poliedros
- Capítulo 4 – Sólidos geométricos: corpos redondos
- Capítulo 5 – Geometria métrica espacial
- Capítulo 6 – Projeções cartográficas

Unidade 3: Programação e pensamento computacional

- Capítulo 7 – Pensamento computacional
- Capítulo 8 – Algoritmos e fluxogramas

Unidade 4: Sistemas lineares e matrizes

- Capítulo 9 – Sistemas lineares
- Capítulo 10 – Matrizes

ESTRUTURA DO LIVRO DO ESTUDANTE

Cada volume da coleção está organizado em unidades e capítulos. Os textos e as atividades foram idealizados para auxiliar o professor no desenvolvimento das aulas, especialmente no que diz respeito à fundamentação teórica de cada tema e também para permitir que o estudante desenvolva autonomia em relação à leitura e à compreensão dos assuntos abordados. Para isso, o texto tem uma linguagem precisa, sem formalismos excessivos. Os exemplos e as atividades resolvidas complementam as explicações e permitem que o estudante reflita sobre a teoria apresentada.

Ao planejar as aulas, o professor pode analisar as orientações que são direcionadas a ele e também aquelas que se destinam ao estudante; assim, poderá compreender melhor e otimizar a proposta pedagógica desta coleção.

Como sugestão, o professor pode diversificar sua aula organizando a turma em duplas ou em grupos e pedindo aos estudantes que leiam o texto sobre o assunto que será abordado. Eles devem procurar entender o que o material explica sobre o tema, discutir o texto, anotar dúvidas e procurar no dicionário palavras cujo significado desconheçam. Além disso, podem produzir, em grupo ou individualmente, um pequeno relatório de leitura, que será apresentado à turma para uma discussão final mediada pelo professor, que pode realizar intervenções necessárias para sanar dúvidas e complementar informações.

A seguir, apresentamos como cada item do Livro do Estudante está organizado.

Abertura de unidade

A abertura de unidade é o primeiro contato dos estudantes com os temas a serem abordados na unidade e com os capítulos que dela fazem parte. Uma imagem e um texto introdutório instigam os estudantes a refletir sobre os temas em questão e a resgatar o que já sabem desses temas. Dessa maneira, o trabalho com a abertura é uma oportunidade de explorar as expectativas e os conhecimentos prévios dos estudantes, tornando-se um primeiro momento de avaliação diagnóstica.

Sempre que possível, é interessante perguntar aos estudantes o que eles conhecem e entendem sobre os temas propostos e o que a imagem lhes sugere. Com base nas respostas, é possível ter os primeiros indícios dos conhecimentos prévios deles e de sua motivação. Esses dados iniciais permitem rever ou aprimorar o planejamento para o trabalho com os objetos de conhecimento de cada capítulo.

Abertura de capítulo

A abertura de cada capítulo foi idealizada tendo como base a metodologia ativa da aprendizagem baseada em problemas (ABP). O texto se inicia com uma questão instigadora cuja resolução nem sempre é possível com o conhecimento matemático anterior. Essa mobilização para aprender se completa com a retomada da questão inicial no próprio texto do estudante. A decisão dessa retomada depende do planejamento do professor, mas há sempre uma sugestão de como fazer isso no texto do estudante.

Um painel de soluções pode ser feito nessa retomada permitindo que o estudante perceba se seu conhecimento de matemática é suficiente para a resolução eficaz do problema, e para que o professor possa avaliar a aprendizagem dos estudantes.

Problemas e exercícios resolvidos

As atividades resolvidas permitem que os estudantes ampliem o repertório de estratégias utilizadas na resolução de problemas e analisem a escrita na linguagem da Matemática, explorando mais de um registro de representação, para que, assim, se apropriem da linguagem e da modelagem matemática e possam se preparar para realizar as atividades propostas.

Problemas e exercícios propostos

Para que os estudantes desenvolvam habilidades que lhes permitam resolver uma variedade de problemas, essa seção traz diversas atividades que os levam a refletir sobre os temas abordados, a praticar o que aprenderam e a estabelecer relações entre os diferentes assuntos tratados no Livro do Estudante e, progressivamente, desenvolver raciocínios mais elaborados.

A quantidade de problemas e exercícios propostos pode variar dependendo da complexidade e das habilidades a serem desenvolvidas por meio do estudo do tema de cada etapa do capítulo. Sempre que o tema permite, o material apresenta problemas relacionados com outras áreas do conhecimento ou com assuntos do dia a dia.

Em alguns momentos, ao longo das atividades propostas, os estudantes são incentivados a:

- retomar um exercício resolvido que possa auxiliá-los na resolução de um problema proposto, de modo a desenvolver o raciocínio por analogia;
- relacionar dois ou mais exercícios, buscando alguma regularidade entre eles;
- deter-se em um exercício por sua complexidade ou por permitir alguma aplicação interessante.

Nesse processo, exigem-se dos estudantes reflexões mais profundas, a fim de que adquiram ferramentas mais valiosas que a simples busca da resposta correta.

O professor pode propor à turma que as atividades sejam resolvidas individualmente, ou colaborativamente em duplas ou em grupos, selecionando algumas para serem feitas em sala de aula, sob sua supervisão, e outras como tarefa extraclasse, a fim de que os estudantes ganhem autonomia.

Como citado anteriormente, o painel de soluções é um importante recurso para a socialização das resoluções de um mesmo problema, com discussão de diferentes estratégias ou maneiras de registro, incentivando-se, assim, a troca de pontos de vista, a construção de argumentos consistentes e o respeito ao outro. Também é importante incluir a análise e a verificação da razoabilidade das respostas obtidas.

O planejamento das aulas e as características de cada turma determinarão se será realizada a resolução de todos os problemas e exercícios propostos ou a seleção de uma parte deles. Além disso, a distribuição das atividades em diferentes aulas é uma estratégia que pode facilitar a manutenção de ideias importantes e centrais e ajudar na recuperação de eventuais dificuldades.

Um aspecto que merece atenção é a proposta de que o estudante, sozinho ou em grupos, elabore problemas. Essa é uma habilidade mais complexa e é solicitada algumas vezes ao longo da coleção, em geral entre os últimos problemas de cada série. Ela está presente na BNCC repetidas vezes entre as habilidades relacionadas à competência específica **3** – "Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente" (Brasil, 2018a, p. 531) – sempre relacionada com a resolução de problemas ligados aos temas e aos conceitos matemáticos explicitados em cada habilidade.

Desse modo, o estudante não só deve se tornar capaz de resolver os problemas propostos no Livro do Estudante ou pelo professor, mas também deve desenvolver a habilidade de elaborar exercícios. Por meio desse procedimento, ele se percebe em um processo criativo do fazer matemático e adquire noções sobre a maneira de utilizar a linguagem matemática, reflete acerca de seus procedimentos e escreve sobre o que é significativo para ele. O professor, por sua vez, obtém elementos para avaliar dúvidas, progressos e necessidades do estudante.

As atividades propostas no Livro do Estudante são diversificadas para que o estudante elabore problemas parecidos com outros já resolvidos por ele, tendo como base uma expressão, uma pergunta, uma resposta ou uma imagem, por exemplo. Esse tipo de atividade permite também que o estudante perceba a relação entre dados, perguntas e respostas, bem como a maneira de articular esses três elementos em um problema.

Certamente, com o objetivo de desenvolvimento da linguagem do letramento matemático é preciso planejar também o que fazer com os problemas elaborados pelos estudantes. Algumas possibilidades são:

- sortear alguns problemas formulados e propor à turma que os resolva;
- distribuir os problemas entre os estudantes de modo que cada um resolva um problema elaborado por um colega;
- organizar uma lista com todos os problemas para que os estudantes os resolvam;
- escolher um problema cuja formulação esteja incompleta ou malfeita para trabalhar como texto a ser reelaborado em conjunto com a turma.

Se os problemas produzidos forem expressos em uma linguagem confusa, não tiverem perguntas ou não apresentarem dados suficientes para a resolução, isso será percebido quando outro estudante for resolvê-lo, e o professor poderá discutir cada problema com a turma, tratando-o como um texto que necessita de reformulação. O mais importante nesse processo é que o estudante sinta que escreve para qualquer leitor, e não apenas para o professor, pois isso incentiva o aperfeiçoamento das produções.

A elaboração de problemas pelo estudante pode compor a avaliação formativa.

Tecnologia

Faz parte da formação em Matemática contribuir para um uso refletido da tecnologia da comunicação e informação, a fim de que o jovem utilize esse recurso como ferramenta de investigação, pesquisa, aprendizagem colaborativa e, muito particularmente, na resolução de problemas.

Ao longo dos volumes desta coleção, sempre que necessário e possível, propusemos atividades variadas que utilizam recursos diversos do computador e da rede mundial de informações (*web*), de modo a favorecer simultaneamente a aprendizagem da Matemática e dos recursos tecnológicos.

A ideia é utilizar as novas mídias e tecnologias educacionais para favorecer as aprendizagens. Optamos por recomendar recursos que são de acesso gratuito ou de distribuição gratuita na internet, de modo que não haja impedimento para resolver os problemas propostos. Assim, buscamos evitar dificuldades para aqueles que não têm familiaridade com o computador.

Nessa seção, o estudante tem contato com textos semelhantes ao de manuais técnicos, na medida em que conhece e explora os recursos de um aplicativo, de um *software* e até, de uma calculadora. O uso da calculadora nesta coleção busca tanto aumentar a eficácia do ensino quanto desenvolver no estudante o senso crítico, o pensamento hipotético e dedutivo, a capacidade de observação e de pesquisa e as estratégias de comunicação. Nossa experiência indica que, quando usada de modo planejado, a calculadora não inibe o pensamento matemático; pelo contrário, tem efeito motivador na resolução de problemas, mobiliza processos de estimativa e cálculo mental, dá aos professores a chance de propor problemas com dados mais reais e auxilia na elaboração de conceitos e na percepção de regularidades.

O emprego da calculadora humaniza e atualiza as aulas e permite que o estudante ganhe mais confiança para trabalhar com problemas e buscar novas experiências de aprendizagem. Portanto, o letramento matemático no âmbito da tecnologia se amplia com a utilização da calculadora, não para que o estudante faça cálculos rotineiros, mas para que domine minimamente as tecnologias presentes em sua realidade cotidiana. Por isso, é importante que as atividades propostas que envolvem o uso de calculadora sejam analisadas pelo professor, para que perceba que o foco são as relações apresentadas e não os cálculos em si, que, em sua maioria, são complexos, envolvem muitos números e podem desviar a atenção do estudante do real objetivo da atividade.

Finalmente, ao professor cabe ainda a tarefa de propor outras situações nas quais as máquinas possam ser úteis, elaborando atividades cujo objetivo seja que o estudante se concentre nos conceitos e nas estratégias, e não nos cálculos propriamente ditos. Ao professor preocupado com o estudante que não tem calculadora, lembramos que uma por grupo de quatro ou cinco estudantes é suficiente para a realização do trabalho e que hoje existem calculadoras nos celulares e nos computadores.

Para explorar

Com foco no letramento no sentido amplo e não apenas matemático, mas também nessa área, ao longo do Livro do Estudante, esse boxe traz sugestões complementares de textos, vídeos, filmes ou *sites*. Os materiais selecionados são apresentados como complementos, e os estudantes podem se organizar para buscá-los em momentos diversos, e não necessariamente em aula. A ideia é despertar no estudante o prazer de conhecer e aprofundar um assunto, bem como para ampliar o conhecimento matemático.

Os livros e os textos curtos (como artigos) sugeridos são de natureza diversa: há textos jornalísticos, narrativos, de divulgação científica, de livros paradidáticos, entre outros. Eles têm a intenção de valorizar a leitura nas aulas de Matemática.

Os vídeos e os filmes, geralmente disponíveis na internet, têm praticamente o mesmo objetivo dos textos, mas ampliam o repertório do estudante ao apresentar novos espaços do mundo digital além dos que ele usualmente acessa.

Os *sites* indicados são sempre de fontes confiáveis e podem se tornar uma ferramenta de aprofundamento autônomo do estudante em determinados assuntos e um meio de descoberta de novos conteúdos correlacionados, uma vez que muitos *sites* contêm *links* e indicações para outros textos e outras páginas da internet que podem expandir ainda mais esse processo de busca de informação de qualidade.

A utilização dessas sugestões pode ser incentivada de diferentes maneiras:

- o professor faz comentários sobre os materiais sugeridos, de modo a instigar a curiosidade dos estudantes para conhecer esses conteúdos;
- os estudantes buscam os materiais individualmente, sem que haja necessidade de qualquer outra intenção pedagógica além de levá-los a conhecer essas sugestões;
- os estudantes podem, em uma data previamente combinada com o professor, conversar sobre as aprendizagens, as dúvidas e as impressões a respeito do material que exploraram;
- os estudantes podem escrever um comentário sobre o que aprenderam ou sobre suas impressões, no jornal ou no blogue da escola, por *e-mail* ou até mesmo por um aplicativo de mensagens. Eles podem emitir suas opiniões críticas sobre o material indicado, inclusive recomendando, ou não, esse material para outras pessoas;
- a turma pode criar um perfil em uma rede social para registrar resenhas ou críticas aos conteúdos sugeridos que eles exploraram;
- ao longo de um semestre, a turma pode criar um jornal de resenhas de textos e vídeos que envolvam a Matemática.

Uma observação importante é que essa ampliação de horizontes com as leituras e os vídeos não seja utilizada para elaborar provas ou para premiar os estudantes com acréscimos nas notas. A intenção é que essa proposta seja vista como opção para saber mais, como forma de a Matemática contribuir para a cultura geral do estudante e que, portanto, seja valorizada pelo conhecimento que propicia.

Cálculo rápido

Ao longo da Educação Básica, os estudantes precisam adquirir habilidades em diferentes modalidades de cálculo: estimativa, com algoritmos pessoais ou convencionais, uso de calculadora e cálculo mental. Para que eles desenvolvam habilidades com cálculo mental e possam perceber seu valor, é preciso que se reserve um tempo da aula para essa finalidade.

É importante compreender que o cálculo mental, como habilidade pessoal, desenvolve-se progressivamente, muitas vezes utilizando o apoio do cálculo escrito para etapas intermediárias até obter o resultado final. À medida que essa habilidade se aprimora, as etapas escritas se abreviam até que ele seja feito quase exclusivamente “de cabeça”. Mesmo que os procedimentos apresentados e vivenciados pelo estudante não sejam totalmente incorporados como ferramentas mentais, eles conferem maior flexibilidade para lidar com números, grandezas e operações, além de aumentar a confiança na própria maneira de pensar.

Para recordar

Uma vez que o objetivo maior do ensino de Matemática é contribuir para o desenvolvimento autônomo dos estudantes, entendemos que não basta que aprendam os conceitos presentes em cada capítulo; é preciso que eles mobilizem conhecimentos diversos a qualquer tempo, em função de situações-problema que devam ou desejem enfrentar. Por isso, as atividades propostas nessa seção têm como objetivo fundamental manter vivas as principais ideias já estudadas, como maneira de aprender a estudar e aprender o que é mais relevante em relação a objetos, procedimentos e maneiras de pensar que foram explorados nos capítulos e até em anos anteriores.

Essa seção pode também acolher dificuldades em turmas heterogêneas, uma vez que esses problemas podem ser resolvidos em duplas ou em grupos produtivos. Além disso, na retomada de ideias centrais já estudadas, os estudantes têm a oportunidade de recuperação em processo.

No planejamento das aulas, é aconselhável verificar se há problemas que envolvem habilidades que serão necessárias na abordagem do próximo capítulo a ser trabalhado ou se há problemas que possam servir para o estudante sanar dúvidas identificadas pelo professor em suas observações.

Foco no raciocínio lógico

Essa seção tem como propósito levar os estudantes a resolver problemas não convencionais. De maneira geral, esses problemas não estão relacionados diretamente ao tema do capítulo em que se encontram e não podem ser resolvidos com a aplicação direta de uma equação ou outro processo algorítmico, exigindo sempre do estudante dose considerável de reflexão, criatividade e originalidade.

Os problemas propostos envolvem as mais diversas habilidades e estratégias de resolução, como: tentativa e erro; resolução com apoio de tabelas, diagramas ou desenhos; busca de regularidades; conjectura e levantamento de hipóteses.

Nos três volumes, há uma grande variedade de problemas para o estudante resolver, entre os quais destacamos os chamados problemas de lógica e os de estratégia, cuja resolução requer raciocínio dedutivo e depende do levantamento de hipóteses e de sua checagem imediata. Sugerimos que os problemas sejam trabalhados em duplas.

Mais do que em outros momentos, o **painel de soluções** pode ser usado para a análise dos enunciados, pois a confrontação das soluções e a discussão das possibilidades de resolução são elementos essenciais na abordagem dos problemas.

Inicialmente, os estudantes podem estranhar resolver problemas tão diferentes, especialmente aqueles que não envolvem números. No entanto, com o incentivo e o auxílio do professor, eles podem se desafiar, e é comum que passem a resolver os problemas dessa seção antes mesmo que o professor lhes sugira.

O trabalho com esses problemas torna-se mais eficaz se for constante; por isso, eles não precisam ser propostos todos de uma vez, mas podem ser explorados ao longo do estudo do capítulo. O professor pode, por exemplo, selecionar algum dentre os mais complexos como o “problema da semana” e desafiar os estudantes a resolvê-lo no prazo de uma semana, ao longo da qual podem entregar soluções parciais, consultar os colegas e buscar diferentes estratégias. Em uma data combinada, os estudantes apresentam seus registros e analisam as diversas soluções.

Palavras-chave

Essa seção foi concebida para levar os estudantes a tomar consciência de fatos, conceitos e procedimentos aprendidos ao longo do capítulo, ensinando-os a estudar. Para isso, os estudantes precisam revisar o tema, identificar as ideias centrais e explicá-las com as próprias palavras, acompanhadas de exemplos.

Individualmente, em duplas ou em pequenos grupos, é proposto que os estudantes resumam as principais ideias do capítulo, ilustrem seus resumos com exemplos e outras informações relevantes e façam um balanço de seus conhecimentos.

Eles podem ser incentivados a fazer o resumo ao longo do desenvolvimento do capítulo ou ao final dele. Esse resumo pode ser estruturado como um texto, um quadro-síntese ou uma tabela de dupla entrada que relacione as palavras-chave com suas definições e exemplos correspondentes. Essa atividade pode ser realizada de maneira interdisciplinar com a área de Linguagens para que os estudantes compreendam o que é e como se faz um resumo, um quadro-síntese, um texto informativo, um mapa mental e outros gêneros textuais propostos em cada uma dessas seções.

Essa seção serve também como instrumento ao qual o professor pode recorrer para compor a avaliação formativa e ipsativa, analisando as necessidades e o progresso dos estudantes: ao ler os resumos, poderá identificar dúvidas e incompreensões, conhecimentos adquiridos e extrapolações que cada estudante conseguiu fazer, o que lhe fornecerá uma visão das conquistas e das dificuldades de sua turma.

Matemática e...

O foco dessa seção é levar os estudantes a perceber a Matemática em contextos significativos, relacionando o que está sendo estudado no capítulo com outras áreas do conhecimento e com temas contemporâneos transversais. Ao final de cada capítulo, por meio de um breve artigo de divulgação científica ou um texto informativo, pretendemos estabelecer relações entre a Matemática e diversas situações do dia a dia, outras áreas do conhecimento e alguns dos temas contemporâneos transversais, como educação ambiental, educação financeira e educação para o consumo, educação alimentar e nutricional, educação em direitos humanos, ciência e tecnologia (Brasil, 2018a). A leitura dessa seção precisa ser incentivada para posterior discussão sobre o que foi lido. O eventual interesse dos jovens – ou de um grupo em especial – pode levar ao aprofundamento do tema, com novas pesquisas e produções.

Após o texto principal dessa seção, no item "Conectando ideias", há propostas para que os estudantes explorem situações ou realizem pesquisas para intervenção em sua realidade próxima ou, ainda, se engajem em processos criativos e colaborativos de produção de objetos, textos, imagens e outras formas de comunicação de ideias e aprendizagens.

Com isso, espera-se fomentar neles a curiosidade e a motivação para querer aprender mais, compartilhando suas descobertas e discutindo sobre elas com os colegas. Os estudantes podem ser incentivados a se posicionar sobre o tema, trazendo suas próprias opiniões e conclusões, exercendo sua postura crítica, mas sempre de modo fundamentado e ético.

Todo esse material pode ser divulgado em outras turmas da escola ou em eventos para a comunidade escolar. Também pode ser aproveitado em artigos para o jornal da escola ou em pequenas monografias que alguns professores solicitam aos estudantes.

Essa seção, assim como as demais, exige planejamento, para que os estudantes tenham tempo de refletir e, se necessário, buscar mais informações para se posicionar quanto às questões nela propostas.

Por dentro do Enem e dos vestibulares

Essa seção está localizada ao fim de cada unidade e traz diferentes propostas com orientações e estratégias de como resolver questões de provas oficiais do Enem e de vestibulares, para que os estudantes possam praticar o que aprenderam e mobilizar diversos conhecimentos que foram explorados nos capítulos e até mesmo em outras unidades ou em anos anteriores.

As questões selecionadas para essa seção exigem a leitura de diferentes formas textuais – verbais ou gráficas – e permitem que o estudante aplique diferentes estratégias de resolução apresentadas ao longo do volume.

Antes de demonstrar uma questão resolvida, são apresentadas orientações que podem auxiliar na busca da resolução. Em seguida, o estudante encontra a solução completa da questão inicial, podendo compará-la com a estratégia que utilizou para chegar à resposta. Ao final, são propostas questões parecidas, seja no enunciado, seja na maneira de resolver, para que o estudante aplique o que aprendeu.

As questões finais dessa seção podem ser utilizadas como instrumento de avaliação ou como tarefas extraclasse ou, ainda, serem discutidas em sala de aula, em duplas, em pequenos grupos ou em um painel de soluções, com a contribuição de todos, de modo a trazer mais evidências da turma e de cada estudante para compor a avaliação formativa, comparativa ou ipsativa, de acordo com o planejamento do professor.

É importante ressaltar que, ao longo do volume, é possível encontrar informações adicionais e complementares ao conteúdo. Esse trabalho é feito no Livro do Estudante com o uso de boxes semelhantes a esse.

Recursos digitais

A obra apresenta, em sua versão digital, 12 objetos digitais para cada volume, totalizando 36 objetos, entre *podcasts*, vídeos, carrosséis de imagens, mapas clicáveis e infográficos clicáveis.

As indicações desses objetos visam valorizar de maneira significativa a apresentação de informações, acrescentando conhecimentos sobre o conteúdo abordado. Esses objetos podem ser localizados no sumário presente no início do Livro do Estudante ou ao longo dos capítulos, por este ícone:

Além disso, as transcrições de todos os áudios estão disponíveis no fim do Livro do Estudante.

PARTE 2 • ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS

Este livro tem como principal objetivo o letramento matemático dos estudantes do Ensino Médio, tendo em vista que essa etapa da Educação Básica deve:

> Garantir a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental [...]. Além de possibilitar o prosseguimento dos estudos a todos aqueles que assim o desejarem, o Ensino Médio deve atender às necessidades de formação geral indispensáveis ao exercício da cidadania e construir "aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea", como definido na Introdução desta BNCC [...] (Brasil, 2018a, p. 464-465).

Considerando esse cenário, estas orientações didáticas têm como objetivo compartilhar com você sugestões que explicitam, com algum detalhamento, a metodologia proposta e as possibilidades de ampliação de um conteúdo que, embora limitado pelas páginas de um livro, pode ser uma sala de aula com estudantes com diferentes perfis e aperfeiçoado com seu conhecimento como profissional da educação.

Na elaboração deste livro, em estreita relação com os fundamentos da BNCC, foi feita a escolha de alguns objetos de conhecimento usuais dos currículos de Ensino Médio, sempre na perspectiva do desenvolvimento de competências, e não apenas na aquisição do conhecimento em si. Daí a importância da maneira como o livro será utilizado, para que ele possa de fato contribuir para a formação integral dos estudantes.

Para cumprir esse propósito, este manual é parte do Livro do Estudante e deve ser explorado de modo a colaborar efetivamente para o melhor uso do livro junto aos estudantes.

O ENSINO ARTICULADO PARA A FORMAÇÃO INTEGRAL DOS ESTUDANTES

Os pressupostos descritos nas orientações gerais deste manual buscam mostrar que a formação integral é um processo dinâmico e complexo, diferenciado e único para cada estudante. No ensino em turma, no entanto, essa individualização é praticamente impossível; por isso, compreender como se articulam as competências e habilidades selecionadas para cada aula e os objetivos que se deseja alcançar pode ser a resposta para que todos os jovens possam aprender, ainda que em seu tempo e ritmo próprios.

Na **parte 1** deste manual, também destacamos propostas didático-metodológicas que favorecem o trabalho simultâneo com objetos de conhecimento e com o desenvolvimento de competências e habilidades, ressaltando, sempre que possível, a interdisciplinaridade, orientada pelo planejamento integrado com os professores das áreas de Ciências da Natureza e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Por isso, a proposta é que, durante a leitura dessas orientações, você, ciente do objeto de conhecimento tema do capítulo e dos objetivos de aprendizagem que devem ser acompanhados pela avaliação, perceba nas sugestões metodológicas como as habilidades e as competências estão interligadas, em um processo contínuo e progressivo.

O trabalho com a leitura de textos e de partes da teoria pelos estudantes ou com eles e a solicitação de que elaborem situações-problema, pesquisem, desenvolvam estratégias de resolução para problemas mais complexos e discutam em grupos ou em duplas, construindo argumentações consistentes para que se comuniquem com o uso adequado da linguagem, são marcas desta proposta para desenvolver tanto as competências e as habilidades da área de Matemática quanto as competências gerais da BNCC.

ORGANIZAÇÃO GERAL DOS CONTEÚDOS DO VOLUME

O objetivo principal do quadro apresentado a seguir é descrever e organizar os principais objetos de conhecimento, habilidades e expectativas de aprendizagem previstas ao final do estudo apoiado no material deste livro didático. Conforme orientações da BNCC, a forma de ensino e os temas selecionados nas diferentes seções propostas nesta obra permitem a interdisciplinaridade e o desenvolvimento de habilidades de outras áreas do conhecimento. Além disso, apresenta uma sugestão de organização dos conteúdos deste volume em cronogramas – bimestral, trimestral e semestral. A sequência lógica e progressiva do ensino depende do planejamento do professor, por isso a indicação do número de aulas é apenas uma sugestão para organizar o planejamento e não significa necessariamente que as aulas sejam sucessivas, uma vez que a cada semana ou mês, de acordo com o planejado, mais de um tema/capítulo pode ser trabalhado.

Na coluna das expectativas de aprendizagem estão os pontos de chegada esperados na aprendizagem – são indicadores para a elaboração de instrumentos de avaliação e orientadores da análise do professor sobre o que cada estudante alcançou em relação às habilidades previstas para sua formação em Matemática.

SUGESTÃO DE CRONOGRAMA			CAPÍTULO	Nº DE AULAS	COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS E HABILIDADES DA BNCC	OBJETOS DE CONHECIMENTO
1º bimestre	1º semestre	1º trimestre	1	14		• Conjuntos numéricos • Reta real • Intervalos reais • Operações com conjuntos numéricos: intersecção, reunião e diferença de conjuntos • Diagramas de Euler-Venn
1º bimestre	1º semestre	1º trimestre	2	10	• CE 1 EM13MAT102	• Tabelas e gráficos estatísticos
1º bimestre	1º semestre	1º trimestre	3	16	• CE 1 EM13MAT101 EM13MAT104 EM13MAT105 • CE 4 EM13MAT404 • CE 5 EM13MAT501 EM13MAT502	• Plano cartesiano • Funções: relação entre duas grandezas • Gráficos de funções • Simetria de reflexão
2º bimestre	1º semestre	1º trimestre	4	16	• CE 1 EM13MAT101 EM13MAT105 • CE 3 EM13MAT302 EM13MAT315 • CE 4 EM13MAT401 EM13MAT404 • CE 5 EM13MAT501 EM13MAT510	• Funções afins, expressão algébrica e gráficos • Crescimento e decrescimento de funções afins • Funções definidas por partes • Inequações e estudo do sinal da função afim
2º bimestre	1º semestre	2º trimestre	5	16	• CE 1 EM13MAT101 EM13MAT105 • CE3 EM13MAT302 EM13MAT315 • CE4 EM13MAT402 EM13MAT404 • CE 5 EM13MAT501 EM13MAT502 EM13MAT503	• Funções quadráticas: expressão algébrica e gráfico • Crescimento e decrescimento de funções quadráticas • Estudo do sinal da função quadrática • Máximos, mínimos e imagem da função quadrática • Função modular • Inequações do 2º grau
3º bimestre	2º semestre	2º trimestre	6	12	• CE 1 EM13MAT103 • CE 3 EM13MAT313 EM13MAT314	• Grandezas e medidas • Unidades de medida • Sistema métrico decimal e Sistema Internacional de Unidades (SI) • Notação científica
3º bimestre	2º semestre	2º trimestre	7	16	• CE 1 EM13MAT103 • CE 2 EM13MAT201 • CE 3 EM13MAT307 • CE 5 EM13MAT505 EM13MAT506	• Área • Unidades de medida de área • Ladrilhamento
3º bimestre	2º semestre	2º trimestre	8	10		• Sequências e funções • Lei de formação algébrica • Termo geral e recorrência em sequências
4º bimestre	2º semestre	3º trimestre	9	16	• CE 5 EM13MAT507 EM13MAT508	• Progressões aritméticas: termo geral e propriedades • Progressões geométricas: termo geral e propriedades
4º bimestre	2º semestre	3º trimestre	10	12	• CE 1 EM13MAT102 • CE 2 EM13MAT202 • CE 3 EM13MAT316 • CE 4 EM13MAT406 • CE 5 EM13MAT511	• Amostra estatística • Frequência: absoluta, relativa e acumuladas • Medidas de tendência central • Agrupamento em classes • Histograma
4º bimestre	2º semestre	3º trimestre	11	16	• CE 1 EM13MAT101 EM13MAT102 EM13MAT104 • CE 2 EM13MAT203	• Hábitos de consumo: consumismo e consumerismo • Planejamento financeiro • Planilhas eletrônicas • Interpretação de gráficos e tabelas • Análise de juros • Mercado de trabalho • Projeto de vida

CE – Competência específica de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio
LGG – Linguagens e suas Tecnologias
CHSA – Ciências Humanas e Sociais Aplicadas
CN – Ciências da Natureza e suas Tecnologias

	OBJETIVOS E EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM/ INDICADORES PARA AVALIAÇÃO	COMPETÊNCIAS GERAIS DA BNCC	INTERDISCIPLINARIDADE E COMPETÊNCIAS DE OUTRAS ÁREAS DA BNCC
	• Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e das operações. • Operar em diferentes campos numéricos. • Ler e interpretar representações diversas de conjuntos numéricos. • Compreender a noção e a notação de intervalos numéricos. • Representar intervalos numéricos na reta numerada. • Resolver problemas numéricos.	1, 2, 4, 7, 9 e 10	**Área LGG** • Competência específica 1 **Área** CHSA • Competências específicas 3 e 5
	• Representar dados em tabelas e gráficos de barras, linhas ou setores. • Interpretar informações de caráter estatístico representadas na forma de tabelas ou gráficos.	1, 2, 4, 5, 6, 7 e 9	**Área CHSA** • Competências específicas 1 e 5
	• Identificar a relação de dependência entre duas grandezas. • Interpretar gráficos de funções. • Expressar algebricamente a função que relaciona duas grandezas. • Utilizar adequadamente a linguagem matemática. • Resolver situações-problema que envolvem a variação entre duas grandezas.	1, 5, 7, 9 e 10	**Área CHSA** • Competências específicas 1 e 5 **Área LGG** • Competências específicas 1, 3 e 6
	• Reconhecer uma função afim por meio de sua forma algébrica ou de seu gráfico. • Construir, ler e interpretar gráficos de função constante, afim ou linear. • Estabelecer relações entre os coeficientes e o gráfico da função afim. • Analisar o crescimento da função afim. • Resolver situações-problema relacionadas à função afim. • Utilizar equações ou inequações do 1º grau para modelar e resolver problemas.	2, 4 , 5, 9 e 10	**Área LGG** • Competência específica 5 **Área CN** • Competência específica 3
	• Relacionar uma função quadrática a seu gráfico ou à sua forma algébrica. • Construir, ler e interpretar gráficos de funções quadráticas. • Estabelecer relações entre os coeficientes e o gráfico da função quadrática. • Determinar o sinal, o crescimento, o conjunto imagem e as raízes de uma função quadrática. • Utilizar equações ou inequações do 2º grau na resolução de problemas. • Utilizar os conhecimentos sobre a função quadrática na construção de argumentação e na avaliação de situações modeladas por esse tipo de função.	1, 2, 4 e 5	**Área LGG** • Competência específica 5 **Área CN** • Competência específica 3
	• Diferenciar grandezas de suas medidas. • Identificar unidades de medida do SI. • Realizar conversões entre unidades de medida da mesma grandeza. • Resolver problemas que envolvam medidas de grandezas de base e grandezas derivadas, além das utilizadas pela Informática. • Utilizar a notação científica para expressar uma medida.	1, 2, 5 e 9	**Área CN** • Competências específicas 1, 2 e 3
	• Calcular área de polígonos, de círculos e de outras figuras. • Resolver problemas em contextos diversos que envolvam área e propriedades de figuras planas. • Utilizar propriedades de lados e ângulos de polígonos em mosaicos.	1, 2, 4, 5, 6, 7 e 9	**Área CN** • Competência específica 3 **Área CHSA** • Competências específicas 1 e 3
	• Relacionar sequências numéricas a funções com domínio discreto ($\mathbb{N}$). • Reconhecer regularidades em sequências e expressá-las algébrica e graficamente.	2, 5, 7 e 9	**Área CHSA** • Competências específicas 1 e 6
	• Determinar termo geral, razão e soma de *n* termos de uma progressão aritmética ou geométrica. • Determinar a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. • Resolver problemas que envolvem progressões.	1, 2, 3, 4, 5, 9 e 10	**Área CHSA** • Competências específicas 5 e 6 **Área LGG** • Competências específicas 1, 2 e 3
	• Identificar e determinar diferentes tipos de amostra estatística. • Calcular a frequência de um evento. • Determinar as medidas moda, média e mediana de dados absolutos e relativos. • Organizar dados em classes. • Construir histogramas. • Analisar informações em gráficos e tabelas, incluindo aqueles com erros. • Realizar pesquisas simples.	1, 2, 4, 5, 7, 8, 9 e 10	**Área CN** • Competência específica 2 **Área CHSA** • Competência específica 1
	• Conhecer mais de si próprio, identificando hábitos de consumo e modo de vida em relação a escolhas sustentáveis e éticas. • Relacionar hábitos de consumo e orçamento doméstico. • Saber fazer um planejamento pessoal das finanças. • Refletir e dialogar sobre os interesses em relação à inserção no mundo do trabalho, bem como à ampliação dos conhecimentos sobre os contextos, as características, as possibilidades e os desafios do trabalho no século XXI.	1, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10	**Área CN** • Competência específica 1 **Área CHSA** • Competências específicas 1, 3 e 6 **Área LGG** • Competências específicas 3 e 7

ORIENTAÇÕES PARA OS CAPÍTULOS

É importante lembrar que as orientações específicas para cada capítulo funcionam apenas como um roteiro didático. O desenvolvimento das competências que contribuem para a formação integral dos estudantes depende da maneira como você vai conectar essas orientações com outras metodologias.

No início das orientações específicas das unidades, convidamos os estudantes a ler o texto de apresentação do Livro do Estudante para que externem suas percepções sobre a Matemática, que, muitas vezes, é vista como difícil e sem utilidade. Com esse texto, buscamos mostrar a eles a principal contribuição dessa área para a formação de cada estudante, que é aprender a resolver problemas. As técnicas e os conceitos específicos, aliados a uma maneira de pensar característica da Matemática, precisam ser vistos pelos estudantes como ferramentas cognitivas que podem ser transpostas para resolver situações tanto na escola quanto na vida imediata e futura.

A problematização, a leitura e a escrita em Matemática são essenciais para esse desenvolvimento. Daí a importância de elas estarem sempre presentes no planejamento de suas aulas, como parte do processo de letramento matemático e, consequentemente, da formação do pensar em Matemática.

Saber organizar uma situação-problema e elaborar estratégias para resolvê-la, bem como avaliar se a resposta obtida é de fato adequada, são habilidades que se desenvolvem com o estudo da Matemática. Aliado a uma metodologia que favorece a formação integral, o conhecimento matemático será o contexto para muitas situações em que o estudante terá de argumentar, trocar conhecimentos com outras pessoas, utilizar a linguagem matemática e tomar decisões.

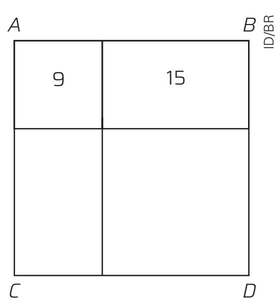
Por isso, sugerimos que a capacidade de resolver problemas seja o objetivo central do planejamento das aulas, acompanhada da observação e de registros do desempenho e dos avanços de cada estudante ao longo das aulas e da utilização deste livro.

Assim, é fundamental compreender como se dá a organização dos objetos de conhecimento neste volume. Todo o material foi estruturado de modo a possibilitar que, ao final do volume, os estudantes tenham desenvolvido parte das competências específicas da área e algumas das competências gerais da BNCC.

UNIDADE 1 NÚMEROS, ANÁLISE DE DADOS E FUNÇÕES

Antes de iniciar esta unidade, retome o texto de apresentação dela no Livro do Estudante e, então, proponha aos estudantes que resolvam o problema a seguir. Nesse momento, não se preocupe se eles não responderem corretamente. Observe como organizam as informações e como relacionam os conhecimentos que já detêm para a construção de uma estratégia de resolução.

- O quadrado *ABCD* da figura a seguir foi dividido em dois quadrados e dois retângulos. A área de um dos quadrados e a área de um dos retângulos estão indicadas na figura. Com base nessas informações, determine a área do quadrado *ABCD*.



Dê um tempo para que os estudantes resolvam o problema e, ao final, pergunte-lhes como foi essa experiência. Verifique se eles perceberam que uma possibilidade para resolver esse problema é: inicialmente, pensar na pergunta que ele faz; segundo, analisar as informações que estão no texto e na imagem; e, finalmente, combinar esses dados com os procedimentos de cálculo de área, que já conhecem, para resolver o problema.

Incentive-os a explicar o raciocínio empregado na resolução desse problema e verifique se, de fato, seguiram as etapas de pensamento descritas anteriormente. Caso contrário, peça a eles que compartilhem o modo que encontraram para resolvê-lo.

Explique aos estudantes que a realização dessas etapas permite que desenvolvam estratégias para a resolução de problemas e que é dessa maneira que a Matemática colabora para que se tornem protagonistas do saber pensar, dando-lhes a possibilidade de aplicar esses conhecimentos em outras áreas da vida pessoal e profissional.

Sempre que possível, retome essa conversa com os estudantes para que percebam que, a cada etapa concluída, a cada novo conhecimento adquirido, eles estarão mais preparados para resolver situações-problema.

CAPÍTULO 1 CONJUNTOS NUMÉRICOS E INTERVALOS NA RETA REAL

Por ser o primeiro capítulo, é importante prever no planejamento das aulas um tempo maior para que os estudantes se familiarizem com a estrutura do livro e com sua linguagem.

Sugerimos que você os aconselhe a produzir, a cada capítulo, textos curtos sobre os principais tópicos estudados, em forma de lista ou de esquemas. Desse modo, ao final do capítulo, terão conteúdo para realizar a síntese dele, solicitada na seção ***Palavras-chave***. Esses textos e a síntese final serão valiosos instrumentos de avaliação em processos que poderão orientar seu planejamento em eventuais retomadas, aprofundamentos e propostas individualizadas para os estudantes que queiram saber mais.

Este capítulo faz uma retomada do estudo dos campos numéricos, tema que vem sendo abordado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. No entanto, alguns estudantes podem trazer incompreensões ou dúvidas, especialmente em relação ao significado de números fracionários e números irracionais, por isso, sugerimos uma atenção especial a esses temas.

Os textos que introduzem cada um dos tópicos relativos aos campos numéricos trazem uma breve contextualização histórica que pode ser assunto de interesse para alguns estudantes. Incentive-os a pesquisar mais sobre a história de cada conjunto numérico e a compartilhar as descobertas com os colegas.

Investigações desse tipo podem ser realizadas em parceria com o professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e configuram excelente oportunidade para que os estudantes percebam a Matemática como uma construção humana repleta de idas e vindas, erros e contradições. Além disso, eles podem assimilar que a construção dos números foi ditada pela necessidade humana de encontrar soluções para diferentes problemas e de aperfeiçoá-las constantemente.

A linguagem específica para representar conjuntos de números e algumas operações entre conjuntos é um dos itens abordados no capítulo. No Livro do Estudante, são propostas algumas sugestões para que você trabalhe com a leitura e a escrita simbólica dos conjuntos.

Com relação aos campos numéricos, é possível que os estudantes apresentem algumas dificuldades, especialmente ao realizar operações com números racionais. Por isso, propomos um jogo que favorece essa revisão. Nesse sentido, vale ressaltar que isso não impede que outros jogos sejam apresentados por você.

Em Matemática, os jogos constituem um recurso lúdico e mobilizador para criar situações que exigem soluções originais e rápidas. O processo de jogar envolve habilidades de planejamento e de busca por melhores jogadas enquanto os estudantes utilizam conhecimentos adquiridos anteriormente e elaboram novas ideias. Os jogos intencionalmente planejados para objetivos bem definidos favorecem também a aquisição de novos conhecimentos, bem como o desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico envolvidas no processo de jogar, entre elas e inferência e a dedução.

Os jogos em sala de aula exigem tempo e precisam ser realizados mais de uma vez, até que os estudantes estruturem as propriedades matemáticas que são os objetivos da atividade.

A seguir, listamos sugestões ao utilizar jogos.

- Realizar o jogo algumas vezes, em dias diferentes, para que os estudantes possam assimilar a presença da Matemática por trás da atividade lúdica.
- Deixar que os estudantes leiam, interpretem e discutam as regras do jogo.
- Pedir a eles que produzam algum registro escrito após o jogo ou que resolvam e elaborem problemas com base no jogo.
- Propor aos estudantes que, em grupos, após o jogo sugerido, criem jogos que envolvam os conceitos estudados.

Jogo Labirinto

Esse jogo tem o objetivo de revisar cálculos com frações e decimais, bem como desenvolver habilidades de cálculo mental e de estimativa, incentivando a antecipação, o levantamento e a checagem de hipóteses, e poderá ser aplicado após o primeiro bloco de atividades da seção ***Problemas e exercícios propostos***.

Na primeira vez que aplicar o jogo, explore com os estudantes a leitura e a compreensão das regras e do tabuleiro. Peça-lhes que analisem o tabuleiro: o que observam; quais tipos de número aparecem; qual é a finalidade do jogo; entre outras questões.

Relembre-os, escrevendo no quadro, das operações com frações, da transformação de número decimal em fração e vice-versa. Analisem juntos em quais situações essas operações e transformações são úteis.

Proponha, então, que leiam as regras do jogo e auxilie-os com as possíveis dúvidas. Depois, deixe-os jogar uma ou duas vezes para que todos se familiarizem com a dinâmica do jogo. Reserve o final da aula para conversar sobre outras possíveis dúvidas e dificuldades com o jogo e como resolvê-las.

Na segunda vez que propuser o jogo, observe os estudantes enquanto jogam e os registros que fazem. Pode-se solicitar a um estudante que explique aos colegas por que optou por um caminho ou por que tomou determinada decisão no decorrer do jogo. Isso possibilita que você analise as aprendizagens e identifique as possíveis dificuldades dos estudantes. Peça a eles que anotem o que observarem durante as jogadas: suas percepções a respeito do jogo; se é possível prever quem vai ganhar; se existe um caminho mais curto para ganhar. Ao final, alguns estudantes podem comentar suas anotações e todos vão analisar juntos as previsões de jogada, as decisões sobre o caminho a seguir, as formas de impedir as jogadas do adversário, as dúvidas que surgirem. Problematize, perguntando a eles se alguém tem alguma dica para ser bem-sucedido no jogo e o que pode desfavorecer alguém ou ajudar a ganhar. Se houver dificuldades com as operações, aproveite para planejar com eles maneiras de superá-las. Isso permite uma revisão/recuperação durante o processo do jogo.

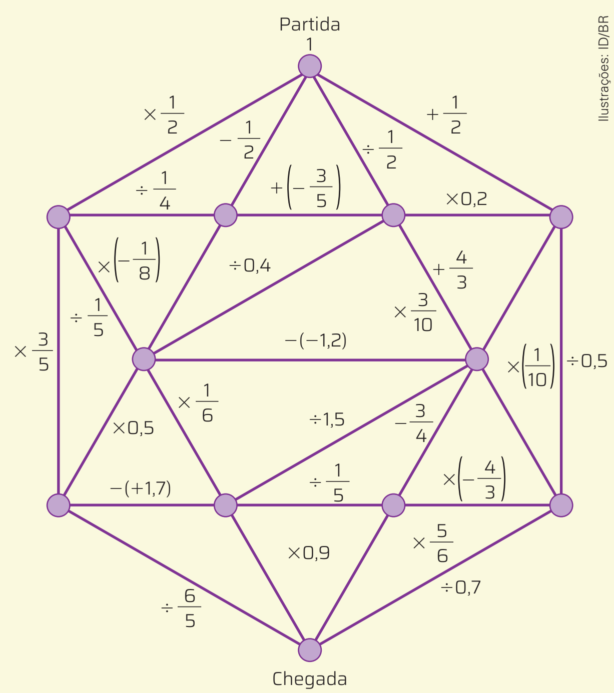
Para finalizar, é possível que os estudantes, individualmente ou em duplas, registrem as aprendizagens feitas no decorrer do jogo.

- **Número de participantes**

  2 jogadores
- **Material**
  - 1 tabuleiro (ver modelo adiante)
  - marcadores diferentes para cada jogador (como um peão de xadrez ou um grão de feijão)
  - 1 folha de papel em branco para que cada jogador registre os cálculos
- **Regras**
  - Os jogadores registram, cada um em sua folha, o número 1 e decidem, como preferirem, quem começa.
  - O primeiro jogador desloca, à sua escolha, seu marcador da posição **Partida** para outra posição adjacente e efetua a operação indicada no segmento percorrido, registrando o resultado em sua folha. O resultado representa seu total de pontos na jogada.
  - O segundo jogador faz o mesmo procedimento, iniciando sua jogada com o valor 1, mas deverá mover seu marcador para outra posição.
  - O jogo continua sucessivamente, com cada participante, em sua vez, usando o valor de pontos da jogada anterior para efetuar um novo cálculo.
  - O percurso pode ser feito em qualquer direção e em qualquer sentido, mas o mesmo segmento não pode ser percorrido duas vezes consecutivas.
  - Todas as jogadas devem ser registradas.
  - O jogo acaba quando um dos jogadores alcançar a posição de **Chegada**, mas ganhará quem tiver o maior número de pontos.
- **Simulação do registro das jogadas e dos resultados**

1º JOGADOR	2º JOGADOR
$1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1 : \frac{1}{2} = 2$
$\frac{1}{2} : \frac{1}{5} = \frac{5}{2}$	$2 : 0{,}4 = 5$
$\frac{5}{2}$...	5...

- **Modelo de tabuleiro**



Ilustrações: ID/BR

Dê atenção especial ao boxe "O número de ouro". Ao final da leitura do texto, incentive os estudantes a realizar a investigação nele proposta. Para concluir a atividade, combine com eles uma data para que as duplas compartilhem suas descobertas.

Na seção ***Tecnologia***, propomos utilizar uma calculadora simples, para que os estudantes possam experimentar e se familiarizar com as funções das teclas e desenvolver estratégias ao usar esse instrumento para calcular raízes quadradas de maneira aproximada, bem como observar as regularidades numéricas em operações com radicais.

Optamos por trabalhar a linguagem dos conjuntos neste capítulo e em outros momentos em que ela for necessária, sem formalismos excessivos, de modo que os estudantes sejam capazes de utilizá-la para resolver operações entre conjuntos, problemas que envolvam intervalos da reta real e, ainda, problemas que utilizam diagramas de Euler-Venn.

Com relação a esses diagramas, é importante destacá-los como recursos interessantes para a resolução de problemas que solicitam o raciocínio lógico dedutivo. De fato, a capacidade de identificar relações entre conjuntos de dados, de organizar essas relações e de tirar conclusões é uma maneira de pensar valiosa e que deve ser desenvolvida pelos estudantes para enfrentar diversas situações.

A primeira seção ***Cálculo rápido*** do livro merece atenção especial. Os estudantes precisam entender a função dessa proposta para evitar que considerem que certos cálculos sejam muito fáceis ou até desnecessários. Nesse sentido, é importante convencê-los da utilidade de fazer determinados cálculos com destreza para que não se atrapalhem nos cálculos mais complexos ou na resolução de situações-problema, bem como de aprender com os colegas estratégias de cálculo rápido que muitos talvez desconheçam.

Nessa primeira proposta, estão as operações entre frações e números decimais simples. Espera-se que, após a execução dos exercícios propostos, os estudantes aprendam a efetuar, sem o registro no papel, adições simples entre frações, apenas reduzindo as frações a outras equivalentes. Por exemplo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ equivale a $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Se o trabalho proposto na seção for feito com uma discussão coletiva das estratégias usadas, essa aprendizagem acontecerá de modo natural pela troca entre os estudantes. Dependendo de sua avaliação, esses conhecimentos sobre as operações podem ser retomados.

Na seção ***Para recordar***, encontramos vários objetos de conhecimento e habilidades trabalhados no Ensino Fundamental. No entanto, apesar de tais saberes serem esperados, essa é uma oportunidade para avaliar e intervir caso seja necessário. Observe que, na atividade **5**, há uma síntese com as definições de grandezas direta e inversamente proporcionais, objeto importante para o estudo das funções, tema dos próximos capítulos.

Em um primeiro momento, as atividades propostas na seção ***Foco no raciocínio lógico*** podem causar estranhamento em parte dos estudantes, pois alguns acreditam que não se trata de problemas que envolvam Matemática. Então, reforce que resolver problemas vai além de apenas resolver operações numéricas, ou seja, abrange toda situação que exija raciocínio e estratégia para ser solucionada. Como indicado nas orientações da parte 1 deste manual, sugerimos que o painel de soluções seja usado para ampliar o repertório dos estudantes em termos de estratégias e de formas de registro para as soluções de diversos problemas, dos mais simples aos mais complexos, que aparecerem ao longo de todas as seções do Livro do Estudante.

Matemática e inclusão

O trabalho proposto nesta seção possibilita uma integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com o tema contemporâneo transversal Cidadania e Civismo, especificamente a Educação em Direitos Humanos. Um trabalho em parceria com os professores dos componentes curriculares Língua Portuguesa e Sociologia pode ser proposto a fim de auxiliar no desenvolvimento das competências específicas **1** e **3** da área de Linguagens e suas Tecnologias e da competência específica **5** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Além disso, o trabalho com esta seção possibilita o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **9** e **10** propostas pela BNCC.

Pessoas com algum tipo de deficiência enfrentam diversos desafios no dia a dia. Esses desafios aparecem, por exemplo, na locomoção, na qualificação para o mercado de trabalho e na educação. É preciso que haja medidas práticas e resolutivas para que esses desafios sejam superados com mais facilidade. Uma das maneiras de avançar nesse sentido é garantir educação de qualidade a todas as pessoas, sem distinções. Portanto, a educação inclusiva, sobretudo a educação matemática (por ter desafios específicos), representa, além de um direito, uma necessidade, para que os estudantes com e sem deficiência consigam ler e interpretar as situações que acontecem ao seu redor.

O texto discutido na seção reforça a importância da tecnologia, principalmente o desenvolvimento de *softwares* e de outros recursos auxiliares para atender às demandas de pessoas com deficiência visual no aprendizado de Matemática e no acesso ao Ensino Superior.

No final do século XIX, com a criação do sistema braile, houve a possibilidade de acesso a um código escrito em relevo com os caracteres necessários para a escrita de palavras e expressões, inclusive numéricas. Porém, apenas a partir de 2006 o Ministério da Educação (MEC) elaborou a simbologia do Código Matemático Unificado para a Língua Portuguesa (CMU), tendo como base o documento *Grafia braille para a língua portuguesa*, indicado na seção ***Para explorar*** a seguir.

Como vimos, os avanços tecnológicos para a democratização da educação ainda são recentes. Trabalhos como o desenvolvido nesta seção podem contribuir para o aumento do interesse pelo tema e, consequentemente, propiciar a criação de novas estratégias que garantam a todos o acesso à educação.

Além disso, se houver a na turma algum estudante com deficiência visual, por exemplo, verifique se ele está confortável ao discutir essa temática. Em caso afirmativo, é possível questionar se ele se sente inserido e incentivado na escola e nas atividades desenvolvidas. Aproveite, também, para discutir com a turma se o espaço físico da escola é adaptado às necessidades de pessoas com deficiência, visual ou não, e quais melhorias podem ser realizadas para otimizar as instalações da escola para a educação. Aproveite e pergunte se conhecem alguém com algum tipo de deficiência. Proponha que compartilhem como é o dia a dia dessas pessoas, ressaltando que não devem ser mencionadas apenas as dificuldades mas também as conquistas e os pontos positivos. Desse modo, eles podem se aproximar da problemática discutida, conscientizar uns aos outros sobre a importância das pessoas com deficiência na sociedade e, assim, trabalhar a competência específica **5** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Também é um momento oportuno para conversar sobre o combate ao *bullying* e qualquer outra violência ou indiferença. É importante levantar estratégias de enfrentamento do problema e de prevenção contra qualquer discriminação. Nesse momento, explique aos estudantes o que é capacitismo e as expressões que são discriminatórias para as pessoas que têm deficiência.

O capacitismo é uma forma de preconceito contra pessoas com deficiência, que envolve uma preconcepção sobre as capacidades que uma pessoa tem ou não devido a uma deficiência, e geralmente reduz uma pessoa a essa deficiência.

Souza, Ludmilla. Capacitismo: expressões são discriminatórias com quem tem deficiência. *Agência Brasil*, São Paulo, 21 set. 2021. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2021-09/capacitismo-expressoes-sao-discriminatorias-com-quem-tem-deficiencia# . Acesso em: 29 ago. 2024.

PARA EXPLORAR

Textos

Anjos, Daiana Z. dos. Código matemático unificado: da definição às diferenças semióticas na conversão da tinta ao braille. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12., 2016, *Anais* [...]. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem), 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5413_2991_ID.pdf. Acesso em: 2 out. 2024.

A pesquisa desenvolvida nesse artigo busca apresentar e analisar o Código Matemático Unificado para a Língua Portuguesa (CMU), elaborado pelo MEC, e como ele pode ser aplicado nas escolas. Também são apresentados os desafios para professores e estudantes da educação básica para garantir a inclusão em diversos níveis.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. *Grafia*

braille para a língua portuguesa. 3. ed. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/ibc/pt-br/pesquisa-e-tecnologia/materiais-especializados-1/livros-em-braille-1/o-sistema-braille-arquivos/grafia-braille-para-a-lingua-portuguesa-pdf.pdf. Acesso em: 2 out. 2024.

Nesse documento, elaborado pelo Ministério da Educação, é feita a apresentação do sistema de escrita braile, sua correspondência com os caracteres da língua portuguesa e os numerais indo-arábicos, além de operações matemáticas e outros símbolos, incluindo indicações de como utilizá-los.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. *Normas técnicas para a produção de textos em braille.* 3. ed. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2018-pdf/105451-normas-tecnicas-para-a-producao-de-textos-em-braille-2018/file. Acesso em: 2 out. 2024.

Nesse documento, elaborado pelo Ministério da Educação, são descritas as recomendações e a normatização de documentos transcritos da língua portuguesa para o sistema braile. Para complementar a atividade **1**, da seção *Matemática e inclusão*, por exemplo, utilize esse documento para mostrar aos estudantes de que maneira as representações das figuras geométricas planas são adaptadas para esse formato.

Viginheski, Lúcia Virgínia Mamcasz *et al*. O sistema Braille e o ensino da matemática para pessoas cegas. *Ciência* & *Educação*, Bauru, v. 20, n. 4, p. 903-916, 2014. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/wDwPFckG73sFgxrtQsDvwSS/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 2 out. 2024.

O artigo descreve estratégias, ferramentas e recursos que podem ser empregados na aprendizagem de Matemática por pessoas com deficiência visual, com a perspectiva de usar o sistema braile como referência.

CAPÍTULO 2 *ESTATÍSTICA: DADOS, VARIÁVEIS E GRÁFICOS*

Este capítulo tem como objetivo discutir alguns conceitos básicos de Estatística e favorecer a leitura, a interpretação e a construção de gráficos, inclusive com a utilização de planilhas eletrônicas. Como as noções e habilidades relacionadas à Estatística devem ser o centro desse trabalho, sugerimos que seja autorizado o uso da calculadora para que os estudantes possam concentrar-se nas ideias fundamentais do capítulo.

Em diversos momentos do capítulo, os estudantes precisarão utilizar conhecimentos sobre arredondamento de números. No quadro a seguir, apresentamos uma breve retomada desse assunto. Se considerar oportuno, reserve um tempo para apresentar-lhes esse material.

Arredondamento de números na forma decimal

Em Estatística, ou em situações do cotidiano, frequentemente recorremos ao arredondamento de dados. Por exemplo, na construção de um gráfico de setores, se a medida de um ângulo é 150,3°, nós a arredondamos para 150°.

Para efetuar o arredondamento de um número na forma decimal, podemos usar, entre outras, as seguintes regras:

- se o algarismo que vai ser eliminado for maior ou igual a 5, acrescentamos 1 ao primeiro algarismo imediatamente à sua esquerda;
- se o algarismo que vai ser eliminado for menor que 5, não fazemos nenhuma alteração no algarismo à sua esquerda.

Acompanhe como arredondar números na forma decimal para o milésimo mais próximo.

- 9,8629

+1

$9{,}862\boxed{9} \simeq 9{,}863$

Esse algarismo vai ser eliminado e é maior que 5.

- 3,9841

$3{,}984\boxed{1} \simeq 3{,}984$

Esse algarismo vai ser eliminado e é menor que 5.

De maneira análoga, podemos arredondar números na forma decimal para o centésimo mais próximo.

No início do capítulo, os estudantes são convidados a ler e interpretar os dados de um infográfico, representação gráfica com que estão familiarizados desde o Ensino Fundamental. Se considerar necessário, retome brevemente em que consiste esse recurso, reforçando que nele se combinam textos, gráficos, imagens, quadros e/ou tabelas com a finalidade de comunicar informações de maneira rápida e visual. Se julgar oportuno, apresente aos estudantes outros infográficos ou sugira uma pesquisa para que observem a variedade desse tipo de representação.

Aproveite o tema do infográfico para discutir com os estudantes a participação feminina na política, que vai além da questão da justiça ou da representatividade, pois é um imperativo para o desenvolvimento de sociedades equitativas e mais justas. É importante destacar que, ao aumentar a quantidade de mulheres na política, é possível ampliar políticas públicas em prol dessa parte da população de modo a priorizar questões como saúde, educação, direitos reprodutivos, combate à violência contra a mulher, entre outras, bem como trazer mudanças estruturais. Nesse sentido, promova um debate, a fim de que os estudantes exponham suas opiniões sobre a inclusão de mais mulheres na política.

Ao longo do capítulo, os estudantes têm contato com diferentes tipos de gráfico; ainda assim, a turma pode ser incentivada a pesquisar gráficos semelhantes em jornais e revistas e na internet. Outro trabalho interessante que pode ser feito é a atualização dos dados representados em alguns dos gráficos mostrados no Livro do Estudante, especialmente aqueles cujo tema desperte mais interesse na turma. Dados sobre variação populacional no Brasil e desmatamento da Amazônia Legal, entre outros, estão disponíveis em *sites* como o do IBGE e em outras fontes confiáveis, e podem ser revistos, atualizados e, eventualmente, revelar mudanças significativas, passíveis de discussão em sala de aula.

Ao abordar o tópico “Gráfico de setores”, se julgar conveniente, aproveite a temática e proponha um trabalho integrado com o professor da Área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para explorar informações sobre identificação étnico-racial da população. Os dados da população brasileira, por cor ou raça, do Censo 2022, são fundamentais, por exemplo, para o conhecimento da diversidade étnica e para o estudo das relações inter-raciais. Explique aos estudantes que, de acordo com o gráfico apresentado, o porcentual de brasileiros que se declaram pardos representa mais da metade da população brasileira, o que torna, pela primeira vez, esse grupo o maior do país. E, se considerarmos o porcentual da população brasileira preta e parda, obtemos mais de 50% da população. Esses dados significam a expressão de uma conscientização racial que está em curso no país.

Atuar no desenvolvimento da conscientização histórica e social dos estudantes é uma das responsabilidades da escola. Assim, sempre que possível, promova a reflexão e o diálogo com a turma sobre assuntos como a conceituação de raça, preconceito e desigualdade, o que certamente valorizará a formação de cidadãos mais éticos e críticos, capazes de contribuir para o desenvolvimento social, econômico e cultural do país.

Ao final, se julgar oportuno, realize uma pesquisa com a turma sobre como se declaram em relação a cor ou raça. Os resultados obtidos podem gerar a construção de um gráfico de setores ou de barras a ser exposto na sala de aula.

Proponha aos estudantes que verifiquem se, na turma, na escola ou no bairro, a distribuição racial aproxima-se dos dados publicados e peça que justifiquem o resultado encontrado.

Recomendamos especial atenção à seção ***Tecnologia***. O desenvolvimento das etapas dessa seção e das atividades propostas deve ser realizado de acordo com a realidade da escola. Uma possibilidade é levar os estudantes ao laboratório de informática, ou trazer para a sala de aula um projetor, para que a turma acompanhe cada etapa executada pelo professor ou, ainda, propor como atividade extraclasse.

O objetivo do trabalho de construção de tabelas e gráficos em uma planilha eletrônica é contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes. Após a construção proposta, se considerar pertinente, informe à turma que programas desse tipo dispõem de recursos para aumentar ou diminuir o tamanho da fonte, destacar informações com negrito, alinhar elementos, entre outras funções.

A seção ***Para recordar*** dá início a uma revisão que será útil na sequência dos capítulos dessa unidade, trazendo a linguagem dos conjuntos na atividade **2**, o conceito de grandezas diretamente proporcionais na atividade **3** e noções de variação de grandezas na atividade **4**.

Na seção ***Palavras-chave***, sugere-se que os estudantes expressem as ideias mais importantes abordadas no capítulo utilizando diferentes recursos em sua produção. Após a troca entre as duplas, promova um momento de compartilhamento com a turma, a fim de que eles analisem as produções dos outros colegas e ampliem, assim, o próprio repertório.

Matemática e envelhecimento da população

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2** e **4** propostas pela BNCC e possibilita uma integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com o tema contemporâneo transversal Cidadania e Civismo, especificamente relacionado com o Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso. Podem ser propostos trabalhos com os professores dos componentes História e Geografia a fim de explorar a competência **1** de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, além de contribuir para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT102**.

Certifique-se de que os estudantes compreenderam as informações apresentadas na pirâmide etária e como analisá-las, além de entender quais dados são relevantes na construção de um histograma desse tipo. Você pode pedir a eles, por exemplo, que comparem os dados referentes a 2010 e a 2022 em relação ao aumento da população e que observem a mudança no formato das pirâmides etárias. Em seguida, pode-se organizar uma roda de conversa com o auxílio dos professores de História e de Geografia, analisando com os estudantes os dados apresentados no texto e de que maneira essas informações podem ser úteis para compreender as dinâmicas da população brasileira no período estabelecido.

Na resolução da atividade **1**, auxilie e oriente os estudantes durante o debate na roda de conversa para que aproveitem a presença dos professores e discutam questões relevantes para o contexto. Nesse momento, podem ser feitos os seguintes questionamentos: "O que o envelhecimento da população representa em termos de saúde pública?"; "Qual é o impacto da mudança no perfil da população para o mercado de trabalho?"; "Como a população lida com essas questões?". Solicite aos estudantes que compartilhem suas dúvidas também a respeito da construção do gráfico proposto na atividade **2**. Além disso, reforce a necessidade de eles criarem um título para o gráfico e colocarem a fonte dos dados.

PARA EXPLORAR

Site

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). *Sistema IBGE de Recuperação Automática (Sidra)*. Banco de Tabelas Estatísticas. [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/home/pimpfbr/brasil. Acesso em: 2 out. 2024.

No banco de tabelas estatísticas do IBGE, é possível ter acesso a vários dados referentes a censos e pesquisas, como a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (Pnad).

CAPÍTULO 3 RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS: FUNÇÕES

Este capítulo introduz o conceito de função como uma relação específica entre duas grandezas.

Optamos por não seguir o percurso tradicional por meio de conjuntos, relações e pares ordenados, para que fosse possível trabalhar esse conceito central da Matemática no Ensino Médio diretamente em contextos diversos. Possivelmente, no Ensino Fundamental, os estudantes já tiveram contato com essas ideias e conheceram a representação de pontos no plano cartesiano, o que nos permite uma aproximação mais direta, ainda que não tão formal, das ideias centrais que definem as funções.

O capítulo se inicia com três situações-problema (ponto de equilíbrio entre lucro e prejuízo, numeração de calçados e dosagem de medicamento) que constroem o contexto para a definição de função, ao mesmo tempo que se introduzem as expressões algébricas que caracterizam a relação entre duas grandezas. Sugerimos que, inicialmente, esse texto seja lido individualmente pelos estudantes e, em seguida, seja feita uma discussão coletiva. Eles podem comentar o que compreenderam do texto e os momentos em que tiveram dúvidas e, então, discutir esses aspectos. A terceira situação permite verificar se reconhecem a variação diretamente proporcional presente na relação massa do paciente e quantidade de medicamento. Se julgar conveniente, aproveite o momento para reforçar a diferença entre "peso" e "massa".

No tópico "Plano cartesiano", retome com os estudantes algumas características do plano cartesiano. Além disso, destaque com eles algumas situações em que são utilizadas as ideias de plano cartesiano: o jogo batalha naval, o jogo de xadrez, a localização de uma rua em um guia do município, o sistema de coordenadas geográficas, entre outras.

No estudo do tópico "Função", verifique se os estudantes compreendem a relação de dependência entre as duas grandezas, ou seja, a variação de uma grandeza depende da variação da outra.

Na primeira seção ***Tecnologia*** deste capítulo, os estudantes vão trabalhar com planilhas eletrônicas, propondo-se a construção de um gráfico a partir de uma tabela com valores para a variável independente. Depois, calculam-se os valores correspondentes para a variável dependente e, obtidos os pares, constrói-se o gráfico da função. Sugerimos que essa atividade seja realizada em duplas ou em trios, para que a leitura do texto e a execução da atividade possam acontecer colaborativamente. A proposta ao final da seção pode ser compartilhada de modo que os estudantes sejam valorizados em suas aprendizagens.

Ao propor a resolução da atividade **3**, converse com os estudantes especialmente sobre o gráfico do item **c** da atividade **15**. Incentive-os a utilizar outros pares que não os indicados e a estudar o comportamento dos gráficos obtidos.

No tópico "Simetria e funções", a ideia de simetria será utilizada no trabalho com gráficos de funções afins e quadráticas no plano cartesiano. O tema simetria também permite que seja desenvolvido um trabalho com a área de Linguagens e suas Tecnologias, especificamente com o componente Arte. Essa integração pode ser feita com uma pesquisa ou um projeto que proponha aos estudantes analisar obras de arte com simetria e discutir outras aplicações desse conceito nas artes. O modo como eles apresentarão o resultado dessa pesquisa também pode estar integrado à área de Linguagens. Eles podem, por exemplo, ser convidados a produzir um vídeo no estilo documentário e, então, trabalhar tanto na produção de roteiros como na de documentários.

As atividades da seção ***Cálculo rápido*** têm foco em expressões e equações simples e, em algumas, transformações de unidades de medida de comprimento e de tempo que são úteis na resolução de problemas de Matemática e de outras ciências.

Na seção ***Para recordar***, há atividades que envolvem habilidades e objetos de conhecimento abordados no Ensino Fundamental e também no capítulo anterior. Sugerimos especial atenção para a atividade **7**. Com ela, é possível identificar a percepção visual dos estudantes em uma representação plana de um paralelepípedo e de retas no espaço.

Os problemas propostos da seção ***Foco no raciocínio lógico*** podem ser usados na estratégia de “problema da semana”, como descrito na parte geral deste manual.

Na seção ***Palavras-chave***, espera-se que os estudantes façam um breve resumo dos conceitos estudados no capítulo. Eles podem compartilhar os resumos e exemplos com os colegas, de maneira que estes possam verificar possíveis enganos e sugerir correções. Feito isso, pode ser interessante propor uma avaliação em forma de prova. Durante essa avaliação, se julgar oportuno, você pode sugerir aos estudantes que consultem seus registros e produções, de modo a valorizar o estudo prévio e a sistematização do que foi aprendido.

Vale considerar uma breve reflexão sobre **a prova como instrumento de avaliação**. Ela pode ter outros formatos além do convencional, como a prova em duplas, na qual as duplas são determinadas pelo professor com critério de observação sobre as interações e colaboração entre os estudantes, ou a prova com consulta aos livros e cadernos ou ao resumo feito pelo estudante na seção ***Palavras-chave*** (este pode ser anexo à prova e analisado pelo professor junto às respostas do estudante).

Há, ainda, a prova em dois tempos, muito mobilizadora dos jovens, que se constitui na aplicação de uma prova convencional, mas devolvida ao estudante para que possa completá-la e até mesmo corrigir os erros, de modo que o professor possa avaliar o conhecimento do estudante durante a prova e depois dela, sem a pressão marcada pelo tempo.

Matemática e sociedade

Esta seção possibilita uma integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com o tema contemporâneo transversal Cidadania e Civismo. Um trabalho em parceria com os professores de Sociologia e Geografia pode ser proposto para explorar as competências específicas **1** e **5** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Além disso, o trabalho desenvolvido na seção contribui para a aquisição pelos estudantes das competências gerais **1**, **7**, **9** e **10**, mobilizando as habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT104**, ao interpretar e argumentar fatos expressos por taxas/índices de outra área do conhecimento.

A desigualdade social no Brasil pode ser um tema bastante comum no cotidiano dos estudantes. Desse modo, sugerimos que, antes de iniciar a leitura do texto, organize uma roda de conversa para que eles digam o que sabem desse assunto.

Os estudantes podem ler o texto desta seção individualmente, mas sugerimos que as reflexões e a resolução das atividades propostas sejam realizadas em duplas ou em pequenos grupos, para posterior discussão coletiva. O importante é que, após o trabalho, seja organizada outra roda de conversa para que os estudantes relatem suas experiências, que podem ser relevantes para a ampliação do repertório científico e social, além de discutir o que aprenderam na atividade e expor eventuais dúvidas que tenham surgido.

É interessante e necessário destacar a importância da Matemática como instrumento de estudo em diversas áreas, incluindo a de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Dessa maneira, os estudantes poderão perceber essa ligação também em outras situações do cotidiano, inclusive no enfrentamento de desafios em variados contextos sociais.

PARA EXPLORAR

Site

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Condições de vida, desigualdade e pobreza. [*S. l.*], [202-]. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/multidominio/condicoes-de-vida-desigualdade-e-pobreza.html. Acesso em: 2 out. 2024.

O *site* apresenta publicações sobre a condição de vida da população brasileira, abrangendo medidas de desigualdade e pobreza; inclusão ou exclusão social; indicadores de situação social, qualidade de vida e de vulnerabilidade ambiental, entre outros.

Texto

Pinheiro, Nilcéia Aparecida Maciel. Formar cidadãos crítico-reflexivos: a contribuição da matemática. *Semina: Ciências Sociais e Humanas*, Londrina, v. 28, n. 1, p. 81-92, 2007. Disponível em: https://ojs.uel.br/revistas/uel/index.php/seminasoc/article/view/3777/3035. Acesso em: 2 out. 2024.

O artigo discute como o conhecimento e, especificamente, a educação matemática em sala de aula podem contribuir para a formação de cidadãos críticos, reflexivos e questionadores.

CAPÍTULO 4 FUNÇÃO AFIM

Neste capítulo, tem início a sistematização das funções, especificamente as funções afins. O planejamento das aulas pode ser feito de modo integrado com componentes de outras áreas, uma vez que essas funções são muito utilizadas para descrever fenômenos da Física e da Química. Muitas fórmulas utilizadas por essas áreas usam a função afim, mesmo sem ser de modo explícito.

Tenha em mente que o estudo da função afim e, no próximo capítulo, das funções quadráticas utiliza os conhecimentos tratados no capítulo anterior, entre eles os conceitos de domínio e imagem e de construção e leitura de gráficos. Por isso, durante as aulas sobre funções afins, eventuais lacunas nas aprendizagens anteriores serão revistas para que você acompanhe os avanços dos estudantes que podem ter apresentado dificuldades anteriormente, tornando, assim, a avaliação um processo contínuo e efetivo em favor da aprendizagem.

PARA EXPLORAR

Texto

Lage, Maria Auxiliadora. *Mobilização das formas de pensamento matemático no estudo de transformações geométricas no plano*. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008. Disponível em: https://bib.pucminas.br/teses/EnciMat_LageMA_1.pdf. Acesso em: 2 out. 2024.

Para complementar o trabalho realizado com o tópico “Construção do gráfico de uma função afim”, sugerimos a leitura do texto “Funções e transformações” (páginas 63 a 75).

O tópico “Algoritmo, fluxograma e função afim” utiliza o processo de construção de gráficos de funções afins para apresentar o significado de algoritmo e de linguagem de programação, além de explorar a linguagem dos fluxogramas.

Na seção ***Tecnologia*** deste capítulo, apresentamos uma calculadora gráfica, que permite traçar gráficos de funções de maneira prática e dinâmica. É importante que você escolha um *software* de sua preferência e verifique se há necessidade de ajustar alguma das etapas apresentadas no Livro do Estudante. Um dos objetivos dessa seção é que os estudantes analisem os gráficos obtidos, levantem hipóteses e resolvam problemas.

É importante ressaltar que o uso do computador como ferramenta de aprendizagem pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional.

A proposta de uso desse *software* é feita antes da formalização de propriedades das funções afins, para que os estudantes possam, pela comparação entre diversos gráficos, inferir as propriedades de crescimento ou decrescimento de uma função afim a partir do sinal do coeficiente do termo de 1º grau da função.

Criar situações em que os estudantes possam “compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções” vai ao encontro das prescrições da BNCC

(Brasil, 2018a, p. 474). Para o planejamento das aulas que envolvem uma ferramenta digital com o intuito de desenvolver o pensamento computacional, sugerimos a leitura de dois textos que trazem a importância e o significado dessa maneira de pensar, entendida como uma estratégia para modelar soluções, resolver problemas de forma eficiente e, com isso, encontrar soluções genéricas para classes inteiras de problemas.

PARA EXPLORAR

Textos

Instituto Ayrton Senna. ***Os benefícios da programação computacional em práticas pedagógicas*****. [*S. l.*]: Instituto Ayrton Senna, [20--]. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/app/uploads/2022/11/instituto-ayrton-senna-os-beneficios-da-programacao-computacional-em-praticas-pedagogicas.pdf. Acesso em: 2 out. 2024.**

Esse documento apresenta o que é programação e pensamento computacional, bem como práticas pedagógicas que podem favorecer o desenvolvimento desses conhecimentos.

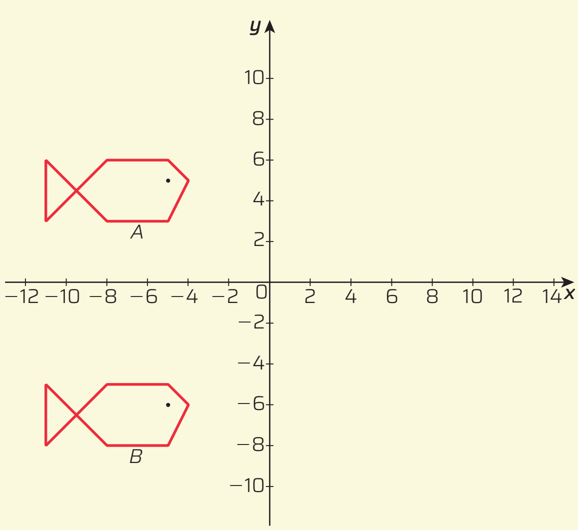
Wing, Jeannette. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711/pdf. Acesso em: 2 out. 2024.

Wing é a precursora do pensamento computacional como capacidade de modelagem e resolução de problemas de grande valor para a formação dos jovens do século XXI.

Antes de prosseguir com as atividades propostas na seção ***Tecnologia***, sugerimos a intervenção a seguir.

Vamos retomar o significado de simetria de translação no plano cartesiano, bem como as funções que correspondem às translações na direção dos eixos coordenados.

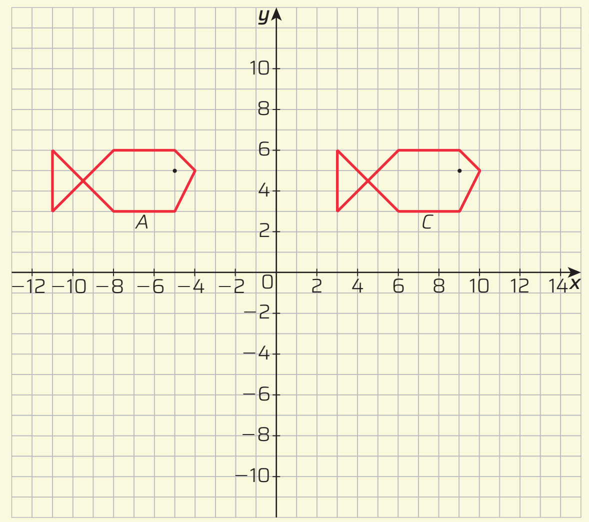
- $V(x, y) = (x, y + b)$ corresponde a transladar uma figura na direção do eixo Oy em um valor b, que pode ser para cima se $b > 0$ ou para baixo se $b < 0$. Observe.



Nesse plano, a figura B corresponde à translação da figura A em 11 unidades para baixo, ou seja, em A foi aplicada a função $V_1(x, y) = (x, y - 11)$, para x e y reais.

Por sua vez, a figura A pode ser entendida como a translação da figura B em 11 unidades para cima, o que significa que A é a imagem de B pela função $V_2(x, y) = (x, y + 11)$, para x e y reais.

- $H(x, y) = (x + c, y)$ corresponde a transladar uma figura na direção do eixo Ox em um valor c, que pode ser para a direita, se $c > 0$, ou para a esquerda, se $c < 0$. Observe.



A figura C corresponde à translação da figura A em 14 unidades para a direita, ou seja, em A foi aplicada a função $H_1(x, y) = (x + 14, y)$, para x e y reais.

Por sua vez, a figura A pode ser entendida como a translação da figura C em 14 unidades para a esquerda, o que significa que A é a imagem de C pela função $H_2(x, y) = (x - 14, y)$, para x e y reais.

Uma vez retomada a simetria de translação e após os estudantes terem entendido a transformação em cada ponto (x, y) do plano cartesiano para cada uma das translações em relação aos eixos cartesianos, é possível questionar a relação existente entre o gráfico de uma função da forma $A(x) = ax$ e o gráfico de uma função da forma $B(x) = ax + b$.

Após a experiência com a construção dos gráficos na calculadora gráfica, com a retomada de translação e algumas perguntas propostas por você, espera-se que os estudantes possam deduzir que o gráfico de $B(x)$ é a translação do gráfico de $A(x)$ na direção do eixo vertical em b unidades. O sentido dessa translação depende de b ser positivo ou negativo. Esse processo investigativo permite que os estudantes estabeleçam conjecturas pela observação e experimentação, pois ele reduz o traçado de funções afins aos gráficos das funções da forma $x = ax$ com x real. Por sua vez, o gráfico de qualquer função $y = ax$ passa pela origem $O(0, 0)$, o que significa que é necessário encontrar apenas mais um ponto do gráfico para traçar a reta.

Esse conhecimento pode ser utilizado na resolução de algumas atividades, quando é possível fazer o reconhecimento da posição relativa de duas retas no plano pela análise dos coeficientes das equações dessas retas. A seção ***Cálculo rápido*** propicia atividades intencionalmente preparadas para que os estudantes pensem a respeito de procedimentos básicos de Álgebra e transformações entre unidades de medidas.

Merecem destaque as propostas de simetria de reflexão da atividade **2** da seção ***Para recordar***, pois serão bastante úteis no próximo capítulo, quando estudaremos funções quadráticas.

A atividade da seção ***Palavras-chave*** pode ser feita no decorrer do trabalho com o capítulo, de modo que os estudantes organizem as principais ideias aprendidas. Se possível, solicite a produção de um mapa conceitual do estudo realizado.

Um **mapa conceitual** ou **mapa das aprendizagens** é uma produção gráfica pessoal que busca revelar os temas ou as ideias centrais e os temas secundários relacionados ao que o produtor do mapa considera mais relevante. Ao redor desses temas, podem estar tópicos de menor importância, e as linhas de ligação devem revelar as relações entre cada parte do mapa.

Os estudantes devem ser incentivados a fazer a própria representação do que identificam como importante neste capítulo, partindo do que é mais central para o que é apoio e, finalmente, para o que é secundário do ponto de vista de quem faz o mapa.

Não existem mapas certos ou errados, visto que são construções pessoais que permitem a conscientização de quem o faz sobre o que aprendeu e uma hierarquização muito pessoal desses conhecimentos. Cada parte desse mapa pode ser acompanhada de um breve comentário. Com o consentimento do estudante, o mapa que ele construir pode ser socializado com os colegas para que, juntos, possam aprender ao comparar o que cada um considera mais importante neste capítulo. Com base nessa discussão, alguns estudantes podem fazer modificações ou ampliações de seus mapas.

PARA EXPLORAR

Vídeo

Introdução aos mapas conceituais aplicados à educação. [*S. l.*: *s. n.*], 2013. 1 vídeo (37 min 47 s). Publicado pelo canal do professor Henrique Cristovão. Disponível em: https://youtu.be/4lBT37SJ42c. Acesso em: 2 out. 2024.

O vídeo ajuda a entender o que são e como aplicar mapas conceituais na educação, com a fundamentação teórica e a história desse recurso.

Matemática e meio ambiente

Esta seção possibilita a integração com as áreas de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Ciências da Natureza e suas Tecnologias, além de trabalhar com o tema contemporâneo transversal Meio Ambiente, especificamente a Educação para o Consumo. Nesse sentido, sugere-se que seja realizado um trabalho com professores das duas áreas, para analisar o consumo de energia elétrica e os impactos socioambientais e, com isso, explorar a competência específica **3** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e a competência específica **1** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

O trabalho nesta seção permite que os estudantes exercitem a curiosidade intelectual, investiguem, utilizem diferentes linguagens e tecnologias digitais, pratiquem a argumentação, tenham autonomia e defendam pontos de vista no que diz respeito à consciência socioambiental, mobilizando, assim, as competências gerais **2**, **9** e **10**.

Antes de realizar as atividades propostas, incentive os estudantes a navegar pelo *site* indicado no boxe ***Para explorar*** do Livro do Estudante para que eles utilizem o simulador de consumo de aparelhos elétricos desenvolvido pela Copel.

As informações apresentadas podem ampliar o debate sobre consumo consciente, uma vez que a energia elétrica também é um bem de consumo que precisa ser utilizado de maneira adequada. Questione se os estudantes concordam com as informações apresentadas ou discordam delas. Solicite que justifiquem suas escolhas com informações dos textos ou que comentem o dia a dia deles em relação ao consumo de energia elétrica e ao uso consciente dos eletrodomésticos em casa.

Em seguida, pergunte se acreditam que a distribuição de energia no território nacional atende à demanda energética do país atualmente, ou de que modo essa distribuição poderia ser feita no futuro. Com isso, é possível promover um debate sobre outras fontes de energia e como elas atenderão à demanda energética em diversos países, não apenas no Brasil. Nesse momento, se julgar oportuno, promova uma roda de conversa e convide os professores de Geografia, de História ou de Física para que sejam levantadas hipóteses sobre o percurso das novas fontes de energia.

PARA EXPLORAR

Textos

Brasil. Ministério de Minas e Energia. *Atlas da eficiência energética Brasil 2023*. [Brasília, DF]: MME, 2023. Disponível em: https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-788/Atlas_Brasil_2023_PT_rev_set2024.pdf. Acesso em: 2 out. 2024.

Esse atlas traz um panorama do consumo de energia no Brasil e mostra que esse é um dos principais indicadores do desenvolvimento econômico e do nível de qualidade de vida de qualquer sociedade.

Goes, Roberto Aparecido de. O consumo sustentável de energia elétrica no ensino de funções por meio da modelagem matemática. *In*: Paraná. Secretaria da Educação. *Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE*: produções didático-pedagógicas. Curitiba: Secretaria da Educação, 2013. v. VII (Cadernos PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_fecilcam_mat_pdp_roberto_aparecido_de_goes.pdf. Acesso em: 2 out. 2024.

Esse caderno tem o objetivo de verificar a contribuição da modelagem matemática no aprendizado de funções, mediante atividades que contextualizem a questão do consumo consciente de energia elétrica e permitam que estudantes do Ensino Médio analisem as próprias práticas no dia a dia.

Santos, Cláudia Barbosa dos; Reis, Daniela Crestani. Aplicação da Matemática no consumo consciente da energia elétrica para redução de gastos. Universidade Estadual de Goiás, [20--]. Disponível em: http://aprender.posse.ueg.br:8081/jspui/bitstream/123456789/168/1/ARTIGO%20CIENT%c3%8dFICO%20CL%c3%81UDIA%20VERS%c3%83O%20FINAL.pdf. Acesso em: 2 out. 2024.

Esse artigo científico elucida como alguns conteúdos matemáticos podem ser utilizados na economia de energia elétrica, além de discutir como valorizar o recurso natural utilizado no processo para a geração desse tipo de energia no Brasil.

Tortola, Emerson; Rezende, Veridiana. O estudo de função afim na fatura de energia elétrica por meio da modelagem matemática e da engenharia didática. *In*: Conferência Interamericana de Educação Matemática (Ciaem), 13., 2011, Recife. *Anais* [...]. Recife: [*s. n.*], 2011. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1131/114. Acesso em: 2 out. 2024.

Esse trabalho visa contribuir para o estudo de função afim buscando, na modelagem matemática e na engenharia didática, alternativas para aproximar esse conteúdo do cotidiano dos estudantes. Para isso, propõe uma sequência de atividades com base em uma conta de energia elétrica.

CAPÍTULO 5 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Este capítulo tem como tema central as funções polinomiais de 2º grau, mais conhecidas como funções quadráticas. Assim como no capítulo anterior, esse estudo pode ser muito mais significativo para os estudantes se planejado em consonância com outras áreas, especialmente se relacionado a exemplos de fenômenos estudados pela Física.

Lembramos mais uma vez a importância de conferir, no decorrer do capítulo, as aprendizagens que, eventualmente, não tenham sido efetivadas por todos os estudantes. Sua observação constante é um instrumento valioso para a avaliação formativa, demonstrando seu interesse de que cada jovem aprenda de fato.

O exemplo que introduz esse capítulo pode extrapolar um simples contexto que apresenta relações quadráticas entre grandezas. O incentivo à curiosidade intelectual dos jovens pode ser feito questionando-os sobre como é possível encontrar uma expressão da forma $L(x) = -x^2 + 1\,000x - 160\,000$ para o lucro da empresa com a venda de seu produto a um preço x.

Um exercício interessante é apresentar em uma planilha eletrônica a função que faz o ajuste de um conjunto de pontos obtidos experimentalmente.

No caso do exemplo da loja de bicicletas, queremos obter o preço de venda das bicicletas visando ao lucro máximo. Vamos usar alguns pontos significativos para fazer a análise.

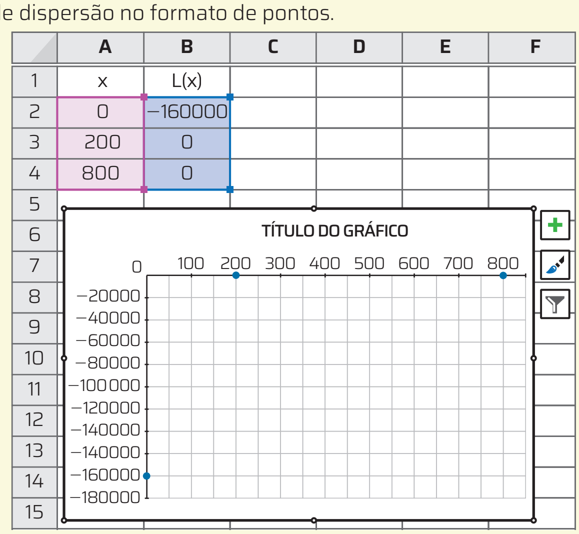
- Se cada bicicleta for vendida a 0 real, a loja terá prejuízo de R$ 160 000,00. Esses dados são indicados pelo ponto $(0, -160\,000)$.
- Se cada bicicleta for vendida a R$ 200,00 (o preço de custo), a loja terá lucro de R$ 0,00. Esses dados são indicados pelo ponto $(200, 0)$.
- Como R$ 800,00 é o preço máximo pelo qual cada bicicleta desse modelo pode ser vendida (tendo em vista que o interesse dos consumidores varia de acordo com o preço de cada bicicleta e da relação custo-benefício), se a loja adotar esse preço para a venda de cada bicicleta, terá lucro de R$ 0,00. Esses dados são indicados pelo ponto $(800, 0)$.

Na planilha eletrônica, escrevemos esses três pontos em uma tabela.

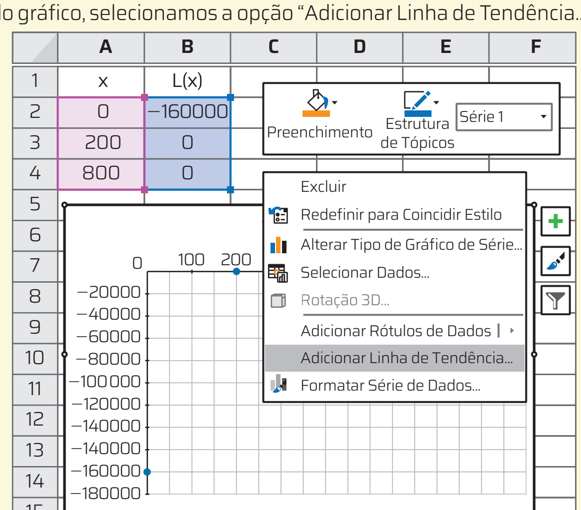
	A	B	C	D	E	F
1	x	L(x)				
2	0	−160000				
3	200	0				
4	800	0				

Ilustrações: ID/BR

Em seguida, selecionamos os dados e construímos o gráfico de dispersão no formato de pontos.

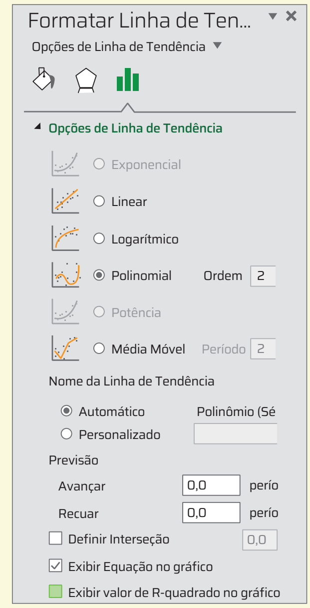


Clicando com o botão direito do *mouse* sobre um dos pontos do gráfico, selecionamos a opção “Adicionar Linha de Tendência...”.

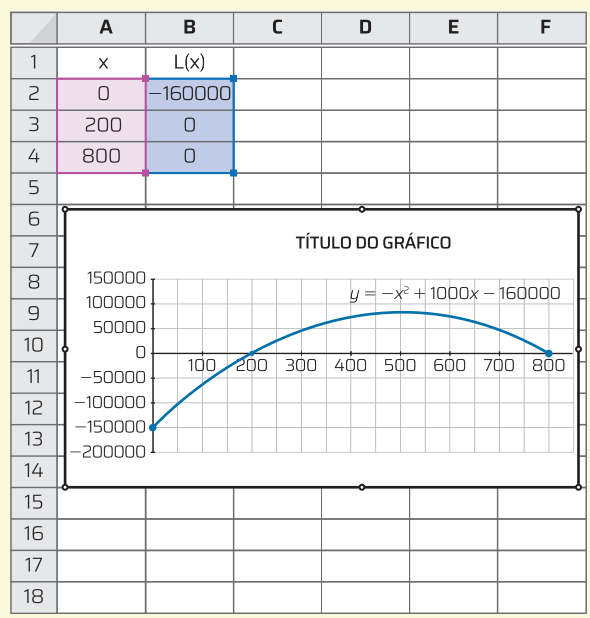


Formatamos a linha de tendência escolhendo a opção “Polinomial” (de ordem 2) e clicando na caixa “Exibir Equação no gráfico”.

A tela obtida é a seguinte:



Ilustrações: ID/BR



Observe que o ajuste resultou na função quadrática de equação $y = -x^2 + 1\,000x - 160\,000$, que é a mesma apresentada no Livro do Estudante.

Definida a função quadrática, toda a proposta para o gráfico desse tipo de função se baseia na simetria de reflexão existente no gráfico de parábolas. Por isso, é importante que os estudantes possam experimentar o processo para o traçado de parábolas, como proposto no tópico “Gráfico da função quadrática”.

No tópico “Construção do gráfico de uma função quadrática”, é possível observar uma aplicação das fases do pensamento computacional para construir o gráfico de uma função.

- Decomposição do problema em partes menores: podemos pensar no cálculo das coordenadas do vértice, na observação dos coeficientes da função, no traçado do eixo de simetria, etc.
- Observação de padrões: já sabemos que é possível determinar a concavidade de acordo com o coeficiente *a*, calcular as coordenadas do vértice com uso de fórmulas, etc.

- Abstração: podemos ignorar os detalhes irrelevantes, como a construção de uma tabela de valores, já que é possível usar somente os pontos importantes para construir o gráfico.
- Algoritmo: por fim, conseguimos escrever as regras necessárias para construir o gráfico de uma função quadrática.

Na sequência, o tópico "Algoritmo, fluxograma e função quadrática" relaciona algoritmos e fluxogramas para que os estudantes pensem no algoritmo envolvido no processo de construção de gráficos de funções quadráticas. Neste capítulo, o fluxograma apresentado aos estudantes introduz um conceito da programação que é a remissão a um fluxograma já construído (no caso, a construção do gráfico de uma função afim).

Um aspecto das funções quadráticas que merece atenção é o estudo de seu comportamento em termos de concavidade, crescimento e decrescimento, razão pela qual essas funções têm pontos extremos (de máximo ou de mínimo). Isso requer aplicações interessantes em contextos diversos, alguns deles descritos nos problemas propostos.

No tópico "Função modular", é importante destacar a função modular como mais um procedimento para definir novas funções a partir de funções conhecidas, o que serve para modelar fenômenos que mudam de comportamento em diferentes intervalos de seu domínio.

Na primeira seção ***Tecnologia*** do capítulo, apresentamos as etapas para a construção de gráficos utilizando um *software* de calculadora gráfica. Ao realizar a atividade **2**, direcione os estudantes e peça a eles que formulem hipóteses sobre a relação entre os gráficos dessas funções e o gráfico da função mais simples delas, que é $y = x^2$. Assim, espera-se que identifiquem a translação como a transformação geométrica que permite construir o gráfico de qualquer função da forma $y = x^2 + c$, sendo c qualquer número real.

Para complementar, peça aos estudantes que construam os gráficos de $y = x^2$ e de $y = -x^2$ e formulem hipóteses sobre a relação entre esses dois gráficos. Espera-se que relacionem os gráficos pela reflexão em relação ao eixo Ox.

A segunda seção ***Tecnologia*** desse capítulo apresenta um trabalho análogo com o mostrado na primeira seção, explorando dessa vez a função modular. É importante que, ao resolver as atividades, os estudantes levantem hipóteses e concluam que a translação de gráficos de funções modulares pode ser realizada de maneira horizontal ou vertical. A translação horizontal ocorre quando a função é definida por $f(x) = |x + b|$ ou $f(x) = |x - b|$. Dessa maneira, o gráfico da função $f(x)$ pode ser obtido por uma translação horizontal de b unidades. Já a translação vertical ocorre quando a função é definida por $f(x) = |x| + a$ ou $f(x) = |x| - a$. Dessa maneira, o gráfico da função $f(x)$ pode ser obtido por uma translação vertical de a unidades.

Jogo Tiras de propriedades para funções

Este jogo tem como objetivo reforçar o que os estudantes já aprenderam e corrigir possíveis falhas na aprendizagem de funções afins e quadráticas para que desenvolvam a linguagem matemática relacionada a essas funções e compreendam as propriedades dos gráficos que correspondem às propriedades dos coeficientes das expressões algébricas dessas funções.

Este jogo é um contexto interessante para a proposição de situações-problema como:

- Quais das características apresentadas a seguir estão relacionadas à função $f(x) = x^2 - 2x + 4$?
  - Assume valor máximo.
  - Tem raiz única.
  - A função f é decrescente em $]-\infty, 1]$ e crescente em $[1, +\infty[$.
  - A função tem concavidade para cima.
- **Número de participantes**
  3 ou 4 jogadores
- **Material**
  Uma cópia das tiras de propriedades e das cartas de funções como mostrado mais adiante (as tiras e cartas dessa cópia devem ser recortadas).
- **Regras**
  - As cartas de funções são embaralhadas e dispostas em um monte com as faces voltadas para baixo sobre uma carteira.
  - As tiras de propriedades também são embaralhadas e distribuídas em número igual entre os jogadores. Cada um deve receber pelo menos quatro tiras. Nem todas as tiras precisam ser distribuídas.
  - Para a primeira função retirada do monte, cada jogador seleciona, entre suas tiras, aquelas que correspondem a propriedades dessa função. Depois, os jogadores discutem entre si se as propriedades selecionadas são realmente válidas para a função em questão.
  - Cada tira de propriedade corretamente escolhida representa um ponto para o jogador.
  - Depois, as tiras de propriedades são novamente reunidas, embaralhadas e distribuídas aos jogadores, e outra função é retirada do monte. Os jogadores mais uma vez escolhem, entre suas tiras, as que apresentam propriedades da função selecionada.
  - O jogo continua nessa dinâmica, em quatro ou cinco jogadas, conforme combinado com os jogadores.
  - Vence quem ao final tiver obtido o maior número de pontos.
- **Modelo de tiras de propriedades**

Tem uma raiz negativa.
Tem uma raiz positiva.
Não tem raízes.
É crescente à esquerda do vértice e decrescente à direita desse ponto.
Corta o eixo Oy acima do eixo Ox.
Tem duas raízes com sinais distintos.
Seu valor máximo é positivo.
Seu valor mínimo é positivo.
Tem duas raízes com o mesmo sinal.
Tem concavidade para cima.
É crescente à direita do vértice e decrescente à esquerda desse ponto.
É decrescente em seu domínio.
Tem concavidade para baixo.
Assume um valor mínimo.
Tem raiz única.
Seu valor máximo é negativo.

Seu valor mínimo é negativo.

Tem uma raiz nula.

Tem duas raízes distintas.

É crescente em seu domínio.

Assume um valor máximo.

Corta o eixo Oy abaixo do eixo Ox.

- **Modelo de cartas de funções**

$y = 2x + 1$

$y = 3x - \frac{1}{4}$

$y = -2x - 1$

$y = -x^2 - 3x + 4$

$y = \frac{1}{2}x + 1$

$y = -x^2 - 2x - 4$

$y = -\frac{1}{2}x + 1$

$y = x^2 + 3x + 2$

$y = x^2 - 2x + 5$

$y = -2x^2 + 5x - 2$

$y = 2x - 1$

$y = -2x + 1$

$y = \frac{1}{4}x - 3$

$y = -x^2 - 3x - 2$

$y = \frac{1}{2}x - 1$

$y = 4x^2 - 4x + 1$

$y = -\frac{1}{2}x - 1$

$y = 2x^2 - 5x + 2$

$y = x^2 + 3x - 4$

$y = -4x^2 + 21x - 9$

A seção ***Cálculo rápido*** deste capítulo foi planejada para que os estudantes relembrem o desenvolvimento de alguns produtos notáveis e fatoração, além de resolverem equações simples sem a utilização da fórmula resolutiva do 2º grau.

A atividade **1** da seção ***Foco no raciocínio lógico*** envolve o trabalho com contagem e requer alguma organização para a quantificação dos casos possíveis, o que pode gerar várias estratégias e maneiras de registros que merecem ser analisadas coletivamente para que todos ampliem seus repertórios de resolução.

A seção ***Palavras-chave*** traz uma proposta diferente, que é a da autoavaliação. Por isso, sugerimos que, após uma partida do jogo "Tiras de propriedades para funções", proponha aos estudantes que retomem o que estudaram neste capítulo e respondam às perguntas propostas nessa seção. Depois de resolver as dúvidas da turma, eles podem continuar a jogar para consolidar os conhecimentos sobre o conteúdo deste capítulo.

Matemática e esporte

Esta seção possibilita a integração com as áreas de Linguagens e suas Tecnologias e Ciências da Natureza e suas Tecnologias, bem como com o tema contemporâneo transversal Saúde. Um trabalho em parceria com professores de Educação Física e de Física pode ser proposto para explorar a competência específica **5** da área de Linguagens e suas Tecnologias e a competência específica **3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Além disso, o trabalho desenvolvido na seção contribui para a aquisição das competências gerais **1** e **2**.

Aproveite o momento para conversar com os estudantes sobre a relação entre Física e Matemática. Comente casos históricos que evidenciam que problemas da Física são motivadores da criação de objetos matemáticos e que conceitos abstratos são comumente interpretados sob a perspectiva da Física. Nesta seção, ambas as áreas são articuladas como ferramentas para o desenvolvimento do esporte.

Na temática apresentada, podemos destacar as ideias relacionadas ao lançamento oblíquo, objeto de conhecimento da Física, que pode ser explorado em diversas modalidades esportivas.

Os estudantes podem realizar a proposta desta seção individualmente, em duplas ou coletivamente. É importante que, após o trabalho, seja organizada uma roda de conversa para que discutam o que aprenderam e resolvam as dúvidas que possam ter surgido. Se possível, pode-se também propor a prática de alguns dos lançamentos apresentados nessa seção em uma aula de Educação Física, para que os estudantes tentem executar esses movimentos.

Para complementar, a fim de desenvolver o tema contemporâneo transversal Saúde, promova um debate com a turma sobre os benefícios do esporte na vida dos adolescentes. Peça que se posicionem sobre o fato de que a prática esportiva vai além da atividade física e impacta positivamente a saúde, a interação social e até mesmo o desempenho escolar. Se necessário, peça-lhes que realizem uma pesquisa sobre o assunto.

PARA EXPLORAR

Texto

Duarte, Marcelo. O salto de Daiane dos Santos. Laboratório de Biomecânica e Controle Motor (BMClab), São Bernardo do Campo, 2004. Disponível em: http://pesquisa.ufabc.edu.br/bmclab/o-salto-de-daiane-do-santos/. Acesso em: 2 out. 2024.

Esse trabalho faz uma análise biomecânica do salto duplo *twist* carpado executado por Daiane dos Santos, ex-atleta olímpica da ginástica artística, com animações que mostram a trajetória parabólica desse salto.

Livro

Rodrigues, Maria Inês Ribas; Pimenta, Natália (org.). *Matemática e Física*: nos caminhos das ciências. São Paulo: Ed. da UFABC, 2017 (Coleção O Que É Ser Cientista?).

Nesse livro, foram selecionados alguns assuntos atrativos das áreas da Matemática e da Física, trazendo em cada um dos capítulos autores interessados em pesquisar maneiras de melhorar o ensino e a aprendizagem das disciplinas em questão.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Apesar de esta seção ter sido apresentada na parte geral deste manual, vale lembrar que ela tem como objetivos principais desenvolver a habilidade de leitura e ampliar o repertório dos estudantes com estratégias importantes para a resolução de questões em processos seletivos e exames de larga escala. Assim, ao final de cada unidade, apresentamos propostas diferentes enfatizando mais a reflexão sobre o processo de ler e de interpretar as questões do que a resolução em si.

O texto inicial, que deve ser lido atentamente, sempre traz algumas pistas dos pontos principais que devem ser analisados nas questões, e os estudantes são desafiados a encontrar na resolução apresentada aquilo que se quer destacar como nova aprendizagem de leitura ou de processo de resolução.

Solicite aos estudantes que leiam o texto inicial da seção e o enunciado do problema no tópico "Vestibular em contexto" e avalie a compreensão deles sobre como é feita a cobrança mensal de consumo de água. Pergunte-lhes como fariam para resolver a questão. Em seguida, peça que leiam e analisem a resolução proposta no texto do Livro do Estudante discutindo cada uma das etapas. Ao final, é interessante que eles confrontem a maneira como resolveriam a questão com a que é apresentada no livro.

Nos problemas propostos, espera-se que os estudantes não só apliquem o que aprenderam sobre funções, mas, especialmente, que exercitem a estratégia de resolução sugerida, que apresenta um modo de ler textos de problemas, com destaque para os dados e a pergunta. Esse processo auxilia os estudantes na construção de uma estratégia para a resolução.

Ao compartilharem as resoluções, verifique se fizeram o mesmo procedimento nas demais questões. Se isso não tiver acontecido, analise com eles cada parte da estratégia de leitura de problemas.

UNIDADE UNIDADE

2 GRANDEZAS EM GERAL E ÁREAS

CAPÍTULO 6 GRANDEZAS E MEDIDAS

Neste capítulo, diferenciamos grandezas de suas medidas para que os estudantes percebam que um segmento terá comprimento maior ou menor que outro, independentemente da unidade de medida usada para expressar esse comprimento na forma de números. Do mesmo modo, a área de uma figura plana independe da unidade de medida escolhida para expressá-la.

Sugerimos pedir aos estudantes que leiam individualmente o tópico "Grandezas" e também os seguintes textos a ele vinculados: "Grandezas e suas medidas", "Sistemas de medida", "O sistema métrico decimal", "Sistema Internacional de Unidades" e "Grandezas de base e grandezas derivadas". Depois, solicite que formem duplas ou pequenos grupos para conversarem sobre o que leram. O objetivo é que a aprendizagem colaborativa ocorra depois que todos tenham refletido sobre a diferença entre grandezas e medidas e tenham conhecido o sistema métrico e o SI. Recomendamos que finalize essa etapa questionando-os, em uma roda de conversa, sobre o que já conheciam do assunto e o que aprenderam na leitura dos textos. Peça-lhes, então, que façam uma lista de outras grandezas derivadas que conhecem. É possível que eles citem as seguintes grandezas: concentração de soluções, densidade demográfica, aceleração de um objeto em movimento, vazão de uma torneira, entre outras.

Com relação à conversão entre unidades, deixe claro aos estudantes que não se trata de memorizar regras, tampouco de decorar "vírgulas que andam" para a direita ou para a esquerda, mas, sim, de realizar a conversão aplicando sempre a relação entre as unidades que estão sendo trabalhadas e, se for preciso, usar a regra de três, uma vez que toda mudança de unidade é uma relação de proporcionalidade.

Por exemplo, para transformar 5 400 decímetros em quilômetros, as relações utilizadas podem ser:

$1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m e } 1 \text{ m} = \frac{1}{1\,000} \text{ km, então: } 1 \text{ dm} = \frac{1}{10\,000} \text{ km}$

$5\,400 \cdot \frac{1}{10000} = 0{,}54$

Logo, 5 400 dm = 0,54 km.

Usando a representação decimal, temos: 1 dm = 0,0001 km

$5\,400 = 5\,400 \cdot 0{,}0001 = 0{,}54$

Logo, 5 400 dm = 0,54 km.

As atividades da primeira seção ***Problemas e exercícios resolvidos*** e ***Problemas e exercícios propostos*** trazem unidades de medidas provavelmente pouco utilizadas pelos estudantes. Se julgar oportuno, peça a eles que pesquisem sobre essas e outras unidades de medida, com aprofundamento no contexto histórico de seu surgimento e uso.

O texto "Unidades de informática" traz uma explicação sobre como realizar conversões entre *bits* e *bytes*. É possível que os estudantes tenham dificuldade ao realizar conversões entre essas unidades, por serem de base 2. Caso isso aconteça, auxilie-os explicando o passo a passo de como realizá-las.

Se julgar oportuno, depois de os estudantes realizarem a atividade **10**, proponha que testem a velocidade da internet que usam na residência deles e comparem-na com a velocidade média para usuários no Brasil. Outra sugestão é que realizem uma pesquisa sobre a qualidade da internet no bairro ou município onde vivem.

O tópico "Notação científica" apresenta essa forma de representação de medidas para valores muito grandes ou muito pequenos e trata de questões importantes, como ordem de grandeza de um valor numérico, algarismos significativos e incertezas no processo de medição.

Sugerimos que o Jogo Scino, apresentado a seguir, seja aplicado após o bloco de atividades da seção ***Problemas e exercícios propostos*** referente ao tópico "Notação cientifica". Consideramos que os jogos criam situações que exigem soluções originais e rápidas. Nesse processo, o planejamento, a busca por melhores jogadas e a utilização de conhecimentos adquiridos anteriormente propiciam o surgimento de novas ideias e a aquisição de novos conhecimentos, bem como o desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico envolvidas no processo de jogar. Os jogos exigem tempo e precisam ser realizados mais de uma vez, até que os estudantes assimilem as propriedades matemáticas que são os objetivos dessas atividades.

A seguir, listamos algumas sugestões na utilização de jogos.

- Realizar o jogo algumas vezes, em dias diferentes, para que os estudantes tenham tempo para assimilar a matemática por trás do jogo.
- Deixar que os estudantes leiam, interpretem e discutam as regras do jogo.
- Pedir a eles que produzam algum registro escrito após o jogo ou que resolvam problemas com base nele.
- Propor aos estudantes que, em grupos, após o jogo sugerido, criem jogos que envolvam os conceitos estudados.

Jogo Scino

Esse jogo foi elaborado para retomar o conceito de notação científica e auxiliar os estudantes no desenvolvimento de um senso numérico relacionado a representações por meio da notação científica.

Os estudantes deverão ler as instruções e fazer suas jogadas, discutindo, analisando as regras e resolvendo entre eles as possíveis dúvidas. Ao final de duas jogadas, um participante de cada grupo deve relatar se houve dificuldade, ou não, na análise das regras e no desenrolar do próprio jogo. Se julgar necessário, converse com eles sobre as dúvidas e ajude-os a resolvê-las.

Após o jogo, algumas questões podem ser levantadas: "João gostaria de ganhar o jogo. Alguém poderia lhe dar uma dica? Existe alguma estratégia que possa ajudá-lo?"; "Esse jogo é um jogo de sorte? O jogador pode escolher aleatoriamente a ordem dos números e depois marcar no tabuleiro? Explique."; "Se um jogador tirar 1, 2 e 3 nos dados, é possível marcar a casa de letra E? Se é possível, em que situação? E se ele tirar 4, 5 e 6, quais chances ele tem de marcar a casa de letra L? E a de letra M?"; "O jogador tem mais chances no tabuleiro tirando números maiores ou menores no lançamento do dado? Por quê?"; "Que números precisam sair no dado para formar o maior número? E o menor?"; "Após observar o tabuleiro e examinar cada quadro de letras com seus intervalos de valores, quais números precisam sair no dado para marcar a letra A, depois a letra B, e assim sucessivamente?".

- **Número de participantes**

  2 ou 3 jogadores
- **Material**
  - 1 tabuleiro (ver o modelo adiante)
  - 3 dados comuns
  - marcadores diferentes para cada jogador (como fichas de cores diferentes ou com sinais do tipo **X**, **O** e **V**)
  - 1 folha de papel para cada jogador registrar suas jogadas
  - 1 folha de papel branco para cada jogador fazer seus cálculos
- **Regras**
  - Os jogadores decidem, como preferirem, a ordem em que cada um vai jogar.
  - Na sua vez, cada jogador lança os três dados e usa os números que saírem para substituir cada um dos símbolos no esquema a seguir.

$$\triangle , \bigcirc \cdot 10^{\square}$$

  - Em seguida, registra sua jogada, calcula o resultado e coloca um de seus marcadores no tabuleiro, na casa cujo intervalo contém o valor obtido. Depois, anota em sua folha de cálculo a letra correspondente à casa marcada. Por exemplo, se nos dados saírem os números 1, 3 e 5, o jogador terá, entre outras, estas opções:

Opção 1: calcular $3{,}5 \cdot 10^{1}$ e marcar a letra A
Opção 2: calcular $1{,}3 \cdot 10^{5}$ e marcar a letra I
Opção 3: calcular $5{,}1 \cdot 10^{3}$ e marcar a letra F

  - O jogo prossegue dessa maneira, sem que uma casa do tabuleiro ocupada por um jogador possa ser simultaneamente ocupada por outro. Se todas as casas possíveis com os números tirados por um jogador já estiverem ocupadas, ele perde a vez.
  - Vence o jogo o primeiro jogador que alinhar três de suas marcas na horizontal ou na vertical, sem nenhuma marca de seu(s) oponente(s) intercalada.
- **Modelo de tabuleiro**

A Entre 1 e 50	**B** Entre 51 e 100	**C** Entre 101 e 500	**D** Entre 501 e 1 000
E Entre 1 001 e 5 000	**F** Entre 5 001 e 10 000	**G** Entre 10 001 e 50 000	**H** Entre 50 001 e 100 000
I Entre 100 001 e 500 000	**J** Entre 500 001 e 1 000 000	**K** Entre 1 000 001 e 5 000 000	**L** Entre 5 000 001 e 10 000 000

Na seção ***Cálculo rápido*** apresentamos a escrita de números decimais e potências de base 10. Dependendo de sua avaliação, esses conhecimentos podem ser retomados, em especial os relacionados às operações que envolvem potências com expoentes inteiros presentes nos exercícios.

As atividades **1** e **2** da seção ***Para recordar*** retomam a função afim e o conceito de proporcionalidade numérica. A atividade **3** trabalha a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero. Depois de relembrar o teorema de Pitágoras, propomos três atividades em que ele será utilizado em cálculos diversos. Caso julgue necessário, considere a possibilidade de revisões mais ampliadas, uma vez que esses conhecimentos são essenciais aos estudantes para avançar e resolver problemas, como os de trigonometria propostos mais adiante na coleção.

Ao avaliar as produções dos estudantes na seção ***Palavras-chave***, acrescente breves anotações caso alguma ideia importante não tenha sido citada por eles, de modo que tenham oportunidade de rever e completar o que escreveram. De posse dessas informações, sugerimos que planeje uma aula para retomar algum ponto que não tenha sido bem compreendido pelos estudantes. Esse é um bom momento para compartilhar com eles suas anotações sobre o desenvolvimento da turma, sempre destacando os pontos positivos, para depois estabelecer em que sentido todos podem avançar ou melhorar em relação a métodos de estudo e aprendizagens.

Lembramos que, assim como nesta seção, todas as propostas para que os estudantes elaborem ou criem algo, que se encontram na seção ***Problemas e exercícios propostos***, podem ser momentos valiosos de avaliação de aprendizagens, uma vez que, para criar, eles precisam organizar o que sabem, estabelecer relações com o que aprenderam e produzir algo novo que responda ao que foi solicitado.

Matemática e unidades de medida

Esta seção contempla as competências gerais **1** e **2** da Educação Básica propostas pela BNCC e possibilita uma integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e com o tema contemporâneo transversal Ciência e Tecnologia. Pode ser proposto um trabalho integrado com os professores de Física ou de Química a fim de explorar a competência específica **3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e as respectivas habilidades **EM13MAT103** e **EM13MAT313**.

Peça aos estudantes que façam a leitura individual do texto. Em seguida, sobre a estrutura do texto, pergunte: "Que tipo de texto vocês acabaram de ler? Quem o escreveu e qual foi o veículo de comunicação utilizado?" (Texto de divulgação científica, escrito por Bruno Martín, veiculado pela edição brasileira do jornal espanhol *El País*). Depois, questione-os sobre o conteúdo do texto: "Como o texto contribuiu para que vocês compreendessem a importância da padronização das unidades de medida?"; "O que vocês já sabem e o que querem saber a respeito da constante de Planck? Como podem obter essas informações? Que tipo de *site* pode ser considerado confiável para obter essas informações?". Um grupo de estudantes pode se aprofundar no assunto e transformar suas descobertas em uma apresentação para a turma, por exemplo. Incentive iniciativas desse tipo para que os estudantes possam ver relações entre o que estudam em Matemática e em outras áreas do conhecimento, ao mesmo tempo que são valorizados por sua curiosidade investigativa.

A constante de Planck ($h = 6{,}62607015 \cdot 10^{-34}$ J · s) é fundamental para a mecânica quântica. Ela recebe esse nome em homenagem a Max Planck, um dos criadores da teoria quântica. A constante relaciona a energia dada em Joule (J) com o tempo em segundo (s). Uma de suas aplicações é o cálculo de energia multiplicando-a por alguma frequência, com a unidade de medida de segundo no denominador.

PARA EXPLORAR

Textos

Sociedade Brasileira de Metrologia; Sociedade Brasileira de Física. *O novo Sistema Internacional de Unidades (SI)*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Metrologia, 2019. Disponível em: https://metrologia.org.br/wpsite/wp-content/uploads/2019/07/Cartilha_O_novo_SI_29.06.2029.pdf. Acesso em: 10 out. 2024.

Essa cartilha, com texto adaptado do documento original, Brasil. Ministério do Desenvolvimento, Indústria, Comércio e Serviços. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro). *The new International System of Units (SI)*, apresenta um breve histórico da origem das unidades de medida, abordando temas como a adoção das primeiras unidades padronizadas e as mudanças das unidades de medida ao longo do tempo.

Brasil. Ministério do Desenvolvimento, Indústria, Comércio e Serviços. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro). *Sistema Internacional de Unidades (SI)*. Brasília, DF: Inmetro, Disponível em: https://www.gov.br/inmetro/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/documentos-tecnicos-em-metrologia/si_versao_final.pdf/view. Acesso em: 10 out. 2024.

Consulte a versão brasileira do SI para conhecer o histórico de uso e de padronização das unidades de medida pelo Bureau International des Poids et Mesures (Bureau Internacional de Pesos e Medidas).

Site

Brasil. Ministério do Desenvolvimento, Indústria, Comércio e Serviços. Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro). *Serviços e Informações do Brasil*. [*S. l.*], 2021. Disponível em: https://www.gov.br/pt-br/orgaos/instituto-nacional-de-metrologia-qualidade-e-tecnologia. Acesso em: 10 out. 2024.

No portal do Inmetro, responsável pela metrologia no Brasil, é possível conhecer o trabalho desse instituto com o estudo e a descrição dos pesos e das medidas utilizados nacional e internacionalmente.

CAPÍTULO 7 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Neste capítulo, a grandeza área é o centro dos estudos. Considerando-se que os estudantes já tiveram contato com esse objeto de conhecimento no Ensino Fundamental, o capítulo tem como foco apresentar a eles algumas maneiras de realizar o cálculo de área.

Inicialmente, o tópico “A grandeza área” apresenta a definição formal de área e o cálculo de área na malha quadriculada, incluindo a área de figuras irregulares por aproximação.

O tópico “Áreas de figuras planas” apresenta as expressões usuais que permitem calcular a área de algumas figuras planas. Ainda nesse tema, o tópico “Área de um polígono regular” trata de polígonos regulares inscritos em uma circunferência para definir o apótema de uma figura, conceito que será usado para calcular a área de um polígono regular.

Em seguida, no tópico “Unidades de medida de área” são tratadas algumas unidades de medida de área, incluindo o hectare e o alqueire, unidades usadas na medição de grandes extensões de terra e que podem ser desconhecidas de muitos estudantes.

No tópico “Ladrilhamento”, sugerimos a você que organize os estudantes em pequenos grupos e peça a eles que leiam o texto e conversem com os colegas sobre o que entenderam, compartilhando dúvidas que tenham surgido. Incentive-os a utilizar a linguagem matemática na discussão com o grupo.

É comum encontrarmos mosaicos como os mostrados a seguir. Se as peças que compõem alguns desses tipos de mosaico fossem justapostas, elas não seguiriam à risca a condição de não existência de buraco entre elas ou de sobreposição delas.

Observe estes exemplos, usados na construção civil.

Nigel Jarvis/Shutterstock.com/ID/BR

Azulejos da Universidade de Coimbra, Portugal. Foto de 2023.

JHVEPhoto/Alamy/Fotoarena

Calçada da praia de Copacabana no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2023.

Comente com os estudantes que, na Matemática, os mosaicos são estudados do ponto de vista geométrico, em que as figuras geométricas são regulares, mas que, na aplicação prática, esse princípio nem sempre é seguido fielmente, pois muitos tipos de mosaico são montados com peças de formatos irregulares.

A resolução de problemas de áreas e ladrilhamentos envolvem propriedades das figuras geométricas que podem não ser lembradas por alguns estudantes. Sugerimos a você que, pela observação sistemática da turma, identifique a necessidade de retomar conhecimentos, propriedades ou características das figuras geométricas. Com essa retomada, é possível tornar esses conhecimentos significativos, devido a sua utilidade na resolução de situações-problema diversas, e ampliar a confiança dos estudantes em si mesmos ao mostrar que eles não serão punidos por esquecer determinados conteúdos, mas, sim, acolhidos sempre que precisarem.

A seção ***Tecnologia*** explora o uso de um *software* de geometria dinâmica para auxiliar os estudantes na construção de mosaicos compostos de polígonos regulares. Como nesse tipo de *software* não há uma ferramenta que agrupe dois ou mais polígonos, explique aos estudantes que eles precisam encaixar os vértices e os lados das figuras o mais perfeitamente possível. Caso a turma tenha conhecimento suficiente de transformações geométricas, comente que é possível encaixar as figuras usando essa estratégia. Por exemplo, começando com um hexágono, os demais podem ser construídos com rotações de 120º em torno dos vértices.

A seção ***Cálculo rápido*** retoma operações simples com medidas de ângulos complementares, suplementares e opostos pelo vértice, que podem ser utilizadas na resolução de problemas mais elaborados.

Se julgar oportuno, proponha aos estudantes que resolvam as atividades da seção ***Para recordar*** em duplas ou em grupos pequenos. De acordo com sua avaliação e a necessidade dos estudantes, organize uma roda de conversa para discutir as estratégias utilizadas, as dúvidas e as dificuldades que tenham surgido durante a execução dos exercícios.

A seção ***Foco no raciocínio lógico*** apresenta um problema de lógica e um problema que pode ser resolvido com um sistema de equações, por tentativa e erro ou, ainda, por esquema. Assim, para os dois problemas, o painel de soluções propicia novas aprendizagens, uma vez que os estudantes podem aprender, com os colegas, novas estratégias de resolução e outras formas de registro.

Matemática e meio ambiente

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **4**, **7** e **9** propostas pela BNCC e possibilita integração com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, além de trabalhar com os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Meio Ambiente, especificamente na educação ambiental, favorecendo o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT103** e **EM13MAT201**. Pode ser proposto um trabalho integrado com os professores de Biologia e de Geografia a fim de explorar a competência específica **3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e as competências específicas **1** e **3** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Os textos podem ser lidos e discutidos com os estudantes, reforçando que, na atualidade, o desmatamento é um dos maiores problemas ambientais no território brasileiro, sobretudo pela degradação de grandes extensões de cobertura vegetal, causando a destruição de biomas e a perda de biodiversidade.

Explique que a Matemática serve como ferramenta para a compreensão da dinâmica do desmatamento, possibilitando a análise de informações e de dados coletados para calcular o impacto do desmatamento nas áreas afetadas. Essa análise pode ser feita e registrada, por exemplo, por meio de gráficos, pesquisas e relatórios, de modo a orientar a tomada de decisões na busca por um desenvolvimento sustentável e pela conservação e preservação do meio ambiente.

Com a discussão proposta, espera-se que os estudantes entendam que identificar índices de desmatamento no Brasil equivalentes a duas vezes a área de uma das maiores cidades do país (o Rio de Janeiro) é um sinal alarmante para que sejam tomadas medidas imediatas de preservação do meio ambiente e de combate severo ao desmatamento no país.

PARA EXPLORAR

Sites

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/pt/inicio.html. Acesso em: 10 out. 2024.

O portal do IBGE disponibiliza informações estatísticas demográficas, sociais e econômicas sobre o país, além de apresentar pesquisas e estudos sobre população, trabalho, educação, renda e habitação, entre outras atividades científicas.

Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis (Ibama). [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://www.gov.br/ibama/pt-br. Acesso em: 10 out. 2024.

O governo brasileiro disponibiliza no portal do Ibama informações e notícias sobre o meio ambiente e recursos naturais.

MapBiomas. *MapBiomas Alerta.* São Paulo, 2024. Disponível em: https://alerta.mapbiomas.org/relatorio/. Acesso em: 10 out. 2024.

Nesse portal, é possível consultar o *Relatório anual do desmatamento do Brasil 2023* (documento que embasou um dos textos da seção) e encontrar mais informações sobre a iniciativa do projeto MapBiomas e seu campo de atuação.

Nações Unidas Brasil. Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil. Nações Unidas Brasil, [20--]. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 10 out. 2024.

Nesse *site*, são descritos os 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) para atingir a Agenda 2030 no Brasil e as principais atividades realizadas pela ONU em todo o país.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Antes de explorar a resolução do problema inicial, incentive os estudantes a falar como o resolveriam. Em seguida, peça a eles que leiam a resolução apresentada de modo a confrontar as informações do enunciado com as características de cada gráfico.

Ao final, sugira que comparem a maneira como eles próprios resolveriam a questão com a resolução que foi apresentada, de modo a ampliar o repertório de estratégias de resolução da turma.

O objetivo é que os estudantes resolvam as duas questões propostas aplicando o que aprenderam. Elas podem ser utilizadas como instrumento de avaliação, como tarefa extraclasse ou como objeto de discussão na sala de aula, em duplas ou em pequenos grupos.

A resolução dos problemas propostos envolve a leitura do gráfico e do texto das alternativas.

Em um painel de soluções, é provável que eles apresentem diferentes maneiras de pensar, mas devem reconhecer, ao final, que a capacidade de leitura e de transformação de um tipo textual em outro (texto não verbal × texto verbal) são as habilidades mais solicitadas aqui.

UNIDADE 3 SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES

CAPÍTULO 8 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Neste capítulo, apresentamos a linguagem específica das sequências matemáticas e sua respectiva nomenclatura, com diversos exemplos, tanto de sequências numéricas quanto figurais. Note que muitas das observações ao longo do texto didático servem para destacar conexões entre as sequências e as funções e aperfeiçoar o uso da linguagem matemática.

Para despertar a curiosidade dos estudantes, optamos por iniciar o capítulo com a sequência de Fibonacci, uma vez que eles poderão demonstrar interesse em saber mais dessa sequência na natureza, possibilitando não apenas um interessante trabalho de pesquisa e de colaboração como a aquisição das competências gerais **2** e **9** da BNCC.

Durante o estudo das sequências, caso julgue necessário, retome com os estudantes o assunto "funções", estudado na unidade 1 deste volume.

Na seção ***Cálculo rápido***, propomos atividades que envolvem a resolução de equações. De acordo com o desempenho dos estudantes, avalie a necessidade de retomar esse conceito.

Na seção ***Para recordar***, apresentamos alguns objetos de conhecimento e habilidades relacionados a números e funções. Apesar de se esperar que esses saberes já sejam dominados pelos estudantes, trata-se de uma ótima oportunidade para avaliar os conhecimentos da turma e intervir, caso seja necessário.

Na seção ***Foco no raciocínio lógico***, reforçamos a importância de problemas contextualizados com situações que exijam raciocínio e estratégia em sua resolução, e não somente exercícios que apresentem operações numéricas.

Na seção ***Palavras-chave***, avalie as produções textuais dos estudantes acrescentando breves anotações, caso alguma ideia importante não tenha sido citada por eles, de modo que eles tenham a oportunidade de rever e completar a síntese que escreveram.

De posse dessas informações e das autoavaliações dos estudantes, sugerimos a você que reserve uma aula para retomar algum ponto mais frequente de dúvida. Compartilhe suas anotações sobre o desempenho da turma, sempre destacando os pontos positivos para, em seguida, estabelecer em que sentido todos podem avançar ou melhorar nos métodos próprios de estudo e aprendizagem.

Todas as seções que, assim como essa, apresentam propostas para que os estudantes elaborem algo, como a seção ***Problemas e exercícios propostos***, podem proporcionar momentos valiosos de avaliação das aprendizagens, uma vez que, no ato de criação, eles precisam organizar o que sabem, estabelecer relações com o que aprenderam e produzir algo novo que responda ao que foi solicitado.

Matemática e cidadania

Esta seção possibilita integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com o tema contemporâneo transversal Cidadania e Civismo. Um trabalho em conjunto com os professores de História e Geografia pode auxiliar o desenvolvimento das competências específicas **1** e **6** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

A cobrança de impostos e tributos é algo presente em todas as sociedades e é importante para a manutenção da máquina estatal. Identificar os tributos que compõem os preços das mercadorias e saber a destinação dos valores arrecadados nos torna cidadãos mais conscientes de nossos direitos e deveres fiscais e mais aptos a exigir dos governantes que esses valores sejam aplicados corretamente nos serviços públicos e na distribuição de renda, de modo a melhorar o bem-estar da população.

O trabalho proposto nesta seção pode ser feito individualmente, em duplas ou em grupos maiores. Sempre que possível, incentive a troca de ideias entre os estudantes para que eles compartilhem experiências em relação ao que sabem sobre o tema.

CAPÍTULO 9 *PROGRESSÕES*

Pode lhe causar estranhamento, professor, o fato de abordarmos progressões antes de funções exponencial e logarítmica. As progressões, quando tratadas como um tipo particular de função, constituem uma forma interessante de os estudantes conhecerem funções cujo gráfico é um conjunto discreto de pontos.

Na medida do possível, durante o estudo das propriedades das progressões aritméticas, proponha associações com as funções afins e a relação entre coeficientes, o que permite retomadas e novas aprendizagens uma vez que os estudantes precisam lidar com dois modelos (sequências de domínio em e funções de domínio em) que mantêm semelhanças e algumas diferenças.

Atenção especial deve ser dada ao problema resolvido **R18**, uma vez que ele aborda a Matemática no contexto financeiro. Assegure-se de que os estudantes compreendam que o acréscimo de 10% ao ano para o valor inicial de R$ 1 000,00 corresponde, ao final de 5 anos, a R$ 1 610,51. Esse cálculo precisa ser feito com cuidado, pois sabemos que o raciocínio utilizado é mais complexo. Avalie o entendimento dos estudantes e acompanhe aqueles que tiverem dúvidas, pois essa modalidade de cálculo será retomada em momentos posteriores.

Na seção ***Tecnologia***, propomos um trabalho com a calculadora simples, para que os estudantes se familiarizem com as funções das teclas e usem esse instrumento para calcular potências. Se desejar, proponha outros cálculos de potências utilizando a tecla =.

Na seção ***Cálculo rápido***, propomos atividades de potenciação que relacionam a escrita decimal com a fracionária de números. De acordo com o desempenho dos estudantes, avalie a necessidade de retomar as operações, em especial as potências com expoentes inteiros das atividades **3** e **5**.

Na seção ***Para recordar***, apresentamos alguns objetos de conhecimento e habilidades relacionados com porcentagem, proporcionalidade, funções e interpretação de gráficos. Apesar de se esperar que os estudantes já detenham esses saberes, essa é uma ótima oportunidade para avaliar e intervir, caso considere necessário.

A seção ***Palavras-chave*** tem dois objetivos: ensinar os estudantes a estudar e auxiliá-los na autoavaliação. Sugerimos que o trabalho seja conduzido da seguinte maneira: inicialmente, incentive os estudantes a rever as anotações sobre o que estudaram no livro didático e, depois, oriente-os a escrever um resumo das ideias e informações para cada um dos termos listados. Em seguida, analisando os registros, cada um escreverá o que aprendeu e as dúvidas que porventura ainda tiver. Por fim, avalie as produções dos estudantes, acrescentando breves anotações, caso algum conceito importante tenha sido omitido, de modo que eles revejam e complementem o texto.

De posse dessas informações e das autoavaliações dos estudantes, sugerimos a você que reserve uma aula para retomar algum ponto que tenha surgido com mais frequência como dúvida. Compartilhe suas anotações sobre o desenvolvimento da turma, sempre destacando os pontos positivos para, depois, estabelecer em que sentido todos podem avançar ou melhorar em relação aos métodos de estudo e aprendizagem.

Matemática e *fake news*

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **3**, **4** e **10** propostas pela BNCC. Ela também possibilita a integração com a área de Linguagens e suas Tecnologias e com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, além de trabalhar os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia, Cidadania e Civismo, especificamente no que se refere aos itens Vida familiar e social e Educação em direitos humanos. Assim, para enriquecer a discussão proposta na seção, avalie a possibilidade de convidar professores de Língua Portuguesa, Filosofia e Sociologia para explorar as competências específicas **1**, **2** e **3** da área de Linguagens e suas Tecnologias e **5** e **6** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Atualmente, o acesso às várias ferramentas de comunicação e o compartilhamento de informações são cada vez maiores e mais velozes. A internet contribui para a divulgação e a troca de diversos tipos de conteúdo. Entre esses conteúdos, estão as notícias, que podem ser escritas e divulgadas por jornais, *sites*, blogues, etc. Ocorre que nem sempre as notícias escritas e compartilhadas, sobretudo em ambientes virtuais, são verdadeiras. Muitas delas até utilizam elementos de uma informação real, mas, modificadas propositalmente, transformam-se notícias distorcidas e falsas. Geralmente, esse tipo de informação é criado para divulgar uma ideia, convencer o leitor e até mesmo manipular opiniões. Esses são alguns dos elementos que caracterizam o que conhecemos hoje por *fake news*, que têm se tornado cada vez mais comuns em todo o mundo à medida que as tecnologias de comunicação avançam e surgem temas que despertam o interesse e a curiosidade da população.

Diante desse cenário, portanto, é cada vez mais importante discernir o que é verdadeiro do que pode ser falso, para evitar o compartilhamento e a disseminação de *fake news.* Você pode utilizar o trabalho proposto na seção para incentivar os estudantes a exercitar a leitura crítica de textos de todos os tipos, de maneira que aprendam a filtrar as informações que recebem diariamente e percebam a importância de conferir as fontes das informações, bem como a intenção que motivou a publicação e a divulgação de determinada informação.

Nesse momento, você pode organizar uma roda de conversa com o professor de Língua Portuguesa (para que os estudantes relembrem as características do gênero notícia e compreendam a importância da análise crítica do discurso) e com os professores de Filosofia e Sociologia (para que reflitam sobre as implicações da divulgação de *fake news* nos diversos setores da sociedade).

No debate, reforce que é fundamental o respeito a todas as opiniões sobre o assunto – ainda que sejam divergentes –, para o exercício da participação ética e da empatia nos processos da vida íntima, familiar e social.

PARA EXPLORAR

Vídeo

Ron Eglash sobre os fractais africanos. [*S. l.*: *s. n.*], 2007. Publicado pelo canal TED. 1 vídeo (16 min 37 s). Disponível em: https://www.ted.com/talks/ron_eglash_the_fractals_at_the_heart_of_african_designs?lng=pt-br&geo=pt-br&subtitle=pt-br. Acesso em: 11 out. 2024.

Nesse vídeo (em inglês com possibilidade de legenda em português), o etnomatemático Ron Eglash apresenta resultados de pesquisas sobre os padrões de fractais que ele identificou em todo o continente africano, mostrando como a Matemática e as culturas se inter-relacionam.

Texto

Guarise, Lucas. *Detecção de notícias falsas usando técnicas de deep learning.* Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia de Computação) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019. Disponível em: https://bdta.abcd.usp.br/directbitstream/494173d1-2375-4063-8b9c-8146811ffe6f/lucas%20guarise.pdf. Acesso em: 11 out. 2024.

O trabalho discute a aplicação de um método específico de análise que utiliza um modelo matemático na detecção de notícias de teor duvidoso ou mesmo falso, observando as escolhas linguísticas dos textos.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Proponha aos estudantes que leiam o texto introdutório e o enunciado da questão resolvida (quadro "Vestibular em contexto") e analisem as informações. Verifique se eles identificam o conteúdo matemático envolvido no problema. Nesse caso, espera-se que apontem que se trata de um problema que envolve sequências. Pergunte a eles como fariam para resolver a questão. Em seguida, incentive a leitura da resolução proposta de modo que analisem a imagem para compor a progressão aritmética.

Ao final, é interessante orientar os estudantes a confrontar a maneira como resolveriam a questão com a resolução apresentada no Livro do Estudante. Nessa conversa, é importante que eles percebam que são capazes de analisar o enunciado e buscar as pistas para construir uma estratégia de resolução.

Nas atividades propostas, caso os estudantes tenham efetivamente percebido que o texto traz indícios para a resolução, observe se eles aplicam o que aprenderam. Essas questões podem ser utilizadas como instrumento de avaliação, tarefa extraclasse ou objeto de discussão na sala de aula em um painel de soluções.

UNIDADE 4 EDUCAÇÃO FINANCEIRA E NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

CAPÍTULO 10 ESTATÍSTICA: AMOSTRAGEM E MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Este capítulo continua o trabalho que se iniciou no capítulo **2**, com a discussão de alguns conceitos básicos de Estatística.

O capítulo começa apresentando a diferença entre população e amostra e, na sequência, exemplifica algumas técnicas de seleção de amostra: amostragem casual ou simples; amostragem sistemática; amostragem estratificada proporcional. Sugira aos estudantes que, organizados em duplas, um explique ao outro o que entendeu a respeito de cada uma das amostragens.

Antes de iniciar o trabalho com os exercícios da primeira seção ***Problemas e exercícios propostos***, retome com os estudantes o que são variáveis quantitativas e variáveis qualitativas.

Na atividade **2** da primeira seção ***Tecnologia***, referente à pesquisa *on-line*, organize com a turma os temas escolhidos, a fim de que cada grupo fique responsável por um tema.

A atividade **3** da segunda seção ***Tecnologia*** deste capítulo pode ser utilizada na proposta de um projeto (feita a seguir) que poderá se desenvolver ao longo do estudo do capítulo. No caso de esse projeto não se realizar, sugerimos uma breve investigação sobre um assunto de livre escolha dos grupos, para que possam vivenciar a execução de uma pesquisa e utilizar a planilha eletrônica na organização dos dados coletados.

Para que os estudantes explorem bastante essa ferramenta, oriente cada grupo a fazer um gráfico de tipo distinto, utilizando recursos de cores, fontes, grades, etc. O objetivo é que cada grupo apresente os resultados de uma pesquisa amostral justificando a escolha dos elementos estudados. Não se trata de ensinar a eles o que é certo ou errado nesse sentido, mas de levá-los a refletir sobre a necessidade de reduzir uma pesquisa a uma amostra e, ao mesmo tempo, possibilitar que experimentem tarefas atribuídas à Estatística, entre elas a determinação de amostras significativas e representativas. Assim, à medida que exercitam o que aprendem, os estudantes percebem que os processos estatísticos envolvem mais do que simples empirismo.

Esse projeto favorece a manutenção dos conceitos mais importantes do eixo da Matemática ao qual se relacionam a leitura e a construção de gráficos e tabelas, as operações com números racionais e as atividades que envolvem proporcionalidade numérica.

Essa é uma boa oportunidade de integrar Matemática, História e Geografia em torno de uma investigação a respeito do município. Além dos conceitos matemáticos e da vivência das etapas de uma pesquisa estatística, é possível explorar histórias de vida e fazer análises críticas do ambiente com elementos da geografia social e econômica.

Projeto – Um mundo de informações: infográficos

O texto do começo do capítulo pode ser o início de um projeto interessante. A ideia é que, aplicando os conhecimentos de Estatística que os estudantes já têm e os que aprenderam ao longo deste capítulo, elaborem uma pesquisa sobre um tema do interesse deles, cujo resultado seja apresentado na forma de um infográfico.

Para isso, desde a leitura do texto inicial do capítulo, convém propor aos estudantes o levantamento de temas que interessem à turma e que contribuam para o próprio desenvolvimento pessoal e para melhorias relacionadas à comunidade escolar. Cada um dos temas apresentados deve ser analisado por todos com criticidade, de modo a considerar sua relevância, pertinência e viabilidade para ser investigado pelos estudantes.

Selecionados os focos de investigação, a turma pode ser organizada em grupos, cada um responsável por uma parte da pesquisa, para, ao final, ser composto um conjunto de resultados que permitirá aprofundar o olhar de todos sobre as informações e chegar a conclusões de maneira autônoma.

Para começar, leve os jovens a conhecer melhor o que é um infográfico, orientando-os a procurar definições e exemplos de infográficos em *sites* de busca confiáveis. Nessa busca, os estudantes podem encontrar ferramentas como aplicativos próprios para a produção desse tipo de material, com recursos gráficos muito interessantes.

A atividade pode ser realizada da seguinte maneira: no começo, reserve uma aula por semana, durante três ou quatro semanas, para orientar as ações iniciais do projeto. Auxilie os estudantes no levantamento bibliográfico inicial, sugerindo alguns *sites* confiáveis para que eles procedam à pesquisa. Estabeleça o que se espera que eles realizem a cada semana e o que deverão apresentar ao final de cada fase da pesquisa.

Combine com a turma uma data para a conclusão do projeto e a entrega do produto final. Isso permitirá determinar quanto tempo durarão a coleta e a organização dos dados, como isso será feito e, consequentemente, qual será o grau de complexidade do projeto.

A avaliação final deve conter uma autoavaliação dos estudantes sobre o que aprenderam no decorrer desse estudo e sobre as conquistas que alcançaram no que diz respeito à prática de pesquisar e trabalhar em grupo.

Se implementado, o projeto desenvolve a competência geral **10** da BNCC, uma vez que os estudantes enveredam por temas de interesse comum, tomam decisões e assumem posicionamentos para elaborar conclusões que devem revelar ética, respeito e contribuição para a turma, para a escola e, dependendo das escolhas feitas, também para a comunidade.

Proposta de plano de aulas para o projeto

Um mundo de informações: infográficos

Competências gerais da BNCC: 2, 4, 5, 7, 9 e 10.

Competências específicas de Matemática: EM13MAT102, EM13MAT202, EM13MAT406, EM13MAT407.

Cronograma: a critério do professor.

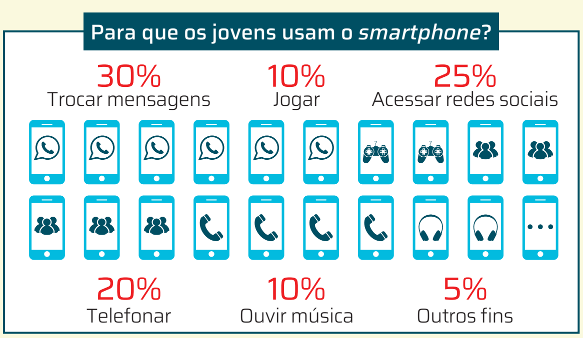
Espaços e recursos necessários: dependerão das possibilidades da unidade escolar.

Plano de ações

1. Orientar os estudantes na formação dos grupos e na escolha do tema que vão investigar. Em seguida, eles devem planejar cada etapa da pesquisa. Se for preciso, para motivá-los, apresente-lhes uma pesquisa entre estudantes de Ensino Médio de uma escola fictícia:

   Uma turma da Escola de Ensino Médio Professor Xavier decidiu fazer uma pesquisa sobre os hábitos dos estudantes dessa escola quanto ao uso do *smartphone*. Os estudantes perceberam que era preciso planejar cada etapa da pesquisa, uma vez que corriam o risco de entrevistar a mesma pessoa duas vezes e/ou deixar de consultar outras.
   Notaram, ainda, que precisavam:
   - formular a pergunta de modo que as respostas possíveis atendessem ao objetivo da pesquisa, tornando-a assertiva e compreensível, evidenciando aos entrevistados o que se desejava saber;
   - construir o instrumento de entrevista respondendo às perguntas: O que ele deverá conter? Como garantir a precisão e a isenção na coleta de dados? As informações do entrevistado (idade, etapa escolar, acesso à internet, etc.) devem constar dos dados da pesquisa?;
   - organizar, representar e interpretar os dados obtidos;
   - elaborar o infográfico síntese dos resultados;
   - apresentar a pesquisa ao público, respondendo: A quem interessaria fazer uma pesquisa como essa? Para que e para quem essas informações seriam úteis?;
   - organizar as informações em tabelas e gráficos e, ao final, sintetizar os resultados em infográficos a serem afixados no mural da escola e/ou publicados em um blogue criado pela turma.

   A seguir, o infográfico produzido com os dados coletados por um grupo dessa turma de estudantes para a pergunta: “Para que você mais utiliza o *smartphone*: trocar mensagem, jogar, acessar redes sociais, ouvir música, telefonar ou realizar outra atividade?”.



Ilustrações: ID/BR

Dados fictícios.

2. Conversar com os estudantes sobre a importância de elaborar cada etapa da pesquisa, uma vez que o processo de planejar é uma oportunidade para que vivenciem os procedimentos que caracterizam as pesquisas estatísticas.
3. Concluída a etapa da discussão, orientar os estudantes na organização e na distribuição das tarefas entre os grupos e entre os estudantes de cada grupo.
4. Acompanhar a coleta de dados, a tabulação das informações e a escolha do melhor tipo de gráfico para representá-las (sugerir que cada grupo produza um tipo de gráfico).
5. Organizar os grupos para que utilizem uma planilha eletrônica, conforme descrito na seção ***Tecnologia***.
6. Solicitar aos estudantes, após a realização da pesquisa, que compartilhem com os colegas de turma os resultados obtidos, as experiências mais importantes, as dificuldades enfrentadas durante o trabalho e o que aprenderam, para que, em uma próxima pesquisa, possam realizá-la com mais qualidade.
7. Pedir uma autoavaliação.

No tópico “Erros e enganos em gráficos”, o foco é a análise mais apurada de gráficos, de modo a desenvolver a criticidade dos estudantes em relação a esse recurso de comunicação amplamente utilizado na mídia e no mundo do trabalho. No desenvolvimento desse tópico, os estudantes devem ser incentivados a se posicionar, para que, ao expor suas percepções sobre os gráficos com erros, tomem consciência de que as informações apresentadas podem ser manipuladas com uso de recursos gráficos incorretos.

Antes de iniciar o tópico “Medidas de tendência central”, verifique o que os estudantes sabem sobre média, moda e mediana, de modo que os conhecimentos prévios sirvam como base para a ampliação que será feita dessas medidas para dados agrupados em classes e a representação gráfica por histogramas ou por polígonos de frequências.

Na seção ***Cálculo rápido*** deste capítulo, o foco são os diversos procedimentos para tornar mais ágil o cálculo de porcentagens.

Na seção ***Para recordar***, apresentamos um conjunto de problemas diversos para que os estudantes retomem ideias e conteúdos já trabalhados.

A seção ***Foco no raciocínio lógico*** apresenta três problemas que envolvem estratégias distintas. Propomos que as atividades sejam realizadas em duplas e que depois sejam organizados painéis de discussão sobre os problemas. O importante é que todos resolvam os três problemas, ou pelo menos tentem resolvê-los, para que os pontos de vista sejam socializados com toda a turma.

Na seção ***Palavras-chave***, sugere-se que os estudantes resumam as ideias mais importantes abordadas no capítulo e tirem as dúvidas que ainda restarem. Feito isso, pode ser interessante propor uma avaliação em forma de prova. Durante essa avaliação, se julgar oportuno, você pode sugerir aos estudantes que consultem seus registros e produções, de modo a valorizar o estudo prévio e a sistematização do que foi aprendido. Vale considerar uma breve reflexão sobre **a prova como instrumento de avaliação**. Ela pode ter outros formatos além do convencional, como a prova em duplas, na qual as duplas são determinadas pelo professor com critério de observação sobre as interações e a colaboração entre os estudantes, ou a prova com consulta aos livros e cadernos ou ao resumo feito pelo estudante na seção ***Palavras-chave*** (este último pode ser anexado à prova e analisado pelo professor com as respostas dos estudantes).

Matemática e saúde

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **4**, **8**, **9** e **10** da Educação Básica propostas pela BNCC e possibilita uma integração com as áreas de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e Ciências da Natureza e suas Tecnologias, bem como com os temas contemporâneos transversais Saúde, Cidadania e Civismo e Meio Ambiente. Você pode propor um trabalho em conjunto com os professores de História, Geografia e Biologia para explorar a competência específica **1** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e a competência específica **2** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Esta seção também contribui para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT316** e **EM13MAT406**.

Após os estudantes terem lido o texto, retome conhecimentos a respeito do contexto político, econômico e social do Brasil durante a pandemia de covid-19 ao longo do ano de 2020. Incentive a discussão sobre como se deram as formas de prevenção e o tratamento da doença na região onde vivem, considerando os âmbitos municipal, estadual e nacional, e nos desafios enfrentados pelos sistemas de saúde público e privado, no Brasil e no mundo, em relação à capacidade de atendimento de muitos pacientes de uma vez. Dessa forma, foi necessário que os governos adotassem medidas específicas para combater a covid-19, entre elas o decreto de quarentena ou o *lockdown* em algumas cidades, reforçando a importância do isolamento social como estratégia para diminuir a disseminação da doença. Destaque os dados apresentados e evidencie o intuito do texto de mostrar como o enfrentamento de uma pandemia apresenta complexidade para todos os setores do país.

Para a realização das atividades, auxilie os estudantes e oriente-os sempre que preciso, direcionando as discussões e analisando como a pandemia gerou a situação descrita. Na elaboração da tabela e do gráfico, reforce a necessidade de criar um título e colocar a fonte dos dados. Para a atividade final, pergunte a eles quais doenças ou epidemias conhecem e anote-as no quadro. Assim, cada grupo poderá escolher a doença ou epidemia que desejar pesquisar.

PARA EXPLORAR

Texto

Food and Agriculture Organization of the United Nations (FAO). *World livestock 2013*: changing disease landscapes. Rome: FAO, 2013. Disponível em: http://www.fao.org/3/i3440e/i3440e.pdf. Acesso em: 12 out. 2024.

O texto em inglês, da Organização das Nações Unidas para a Alimentação e a Agricultura (FAO), relaciona as doenças que enfrentamos com os modos de produção.

CAPÍTULO 11 EDUCAÇÃO FINANCEIRA E PROJETO DE VIDA

Este capítulo foi idealizado e organizado de uma maneira diferente em comparação com os demais. A ideia é que ele leve os estudantes a refletir sobre alguns aspectos de seu projeto de vida relacionados à educação financeira e ao mercado de trabalho.

Ele pode ser desenvolvido de duas maneiras: como uma sequência didática, com aulas encadeadas e produções dos estudantes que permitem a avaliação em processo, ou como um projeto no qual, a cada etapa, os estudantes podem propor novas questões e percursos em função de seus interesses, sejam estes de toda a turma, sejam de apenas parte dela.

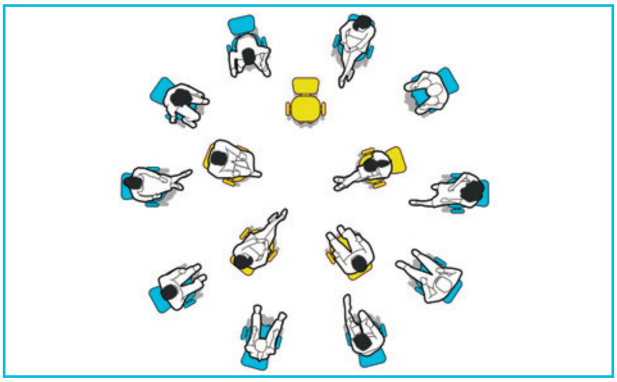
A decisão de como o capítulo será trabalhado é sua, professor, uma vez que você é quem melhor conhece os estudantes, o tempo disponível e as demais condições para a realização dessa proposta de ensino. O importante é não perder de vista que a Matemática e a tecnologia aqui presentes se colocam a serviço de aprendizagens mais formativas que específicas.

A proposta gira em torno desta questão: "Como construir um projeto de vida que, além de ser importante para você, impacte positivamente também a sociedade e o mundo?". Sempre que possível, a cada etapa, relembre os estudantes desse questionamento. Assim, todo o percurso terá maior significado, e eles poderão saber se continuam em direção à resposta da questão inicial.

Espera-se que, ao final, os estudantes sejam capazes de fazer a autocrítica referente aos próprios hábitos de consumo, percebendo suas responsabilidades tanto em âmbito individual como coletivo, e que estejam com seu projeto de vida mais bem estruturado, principalmente em relação às escolhas profissionais. Além disso, espera-se que eles desenvolvam e aprimorem a habilidade de fazer análises com base em evidências, de modo a inicialmente avaliar as situações e, então, passar a atuar socialmente na busca de seus objetivos de vida.

Outro aspecto recorrente neste capítulo diz respeito ao incentivo à pesquisa, presente em diversas atividades. Sempre que considerar oportuno, enfatize, em suas intervenções, a importância de se usarem fontes de pesquisa confiáveis e variadas e a necessidade de apresentar devidamente as referências dessas fontes no registro das descobertas decorrentes da pesquisa.

A leitura da parte inicial do capítulo, voltada à sensibilização para o tema, pode ser realizada coletivamente e seguida da dinâmica de aprendizagem colaborativa *fishbowl*, ou "método aquário", como sugerida nas atividades **1** e **2** da seção ***Problemas e exercícios propostos***. Essa dinâmica consiste em dispor, no centro da sala de aula, cinco cadeiras formando um círculo (esse será o aquário). As demais cadeiras disponíveis devem ser colocadas em torno do aquário, também em disposição circular. Observe a ilustração a seguir.



Davi Augusto/ID/BR

No aquário, sempre haverá uma cadeira desocupada e quatro estudantes sentados, conversando. Os demais estudantes devem apenas observar. Quando um dos estudantes que estiver fora do aquário quiser se pronunciar, ele ocupará a cadeira vazia e, no mesmo momento, um dos quatro estudantes no aquário deverá se retirar. O estudante que se retirar não precisa falar nada, apenas levantar e sair, sentando-se em uma cadeira no entorno.

O tópico "Sustentabilidade: entre o consumismo e o consumerismo" traz informações que contribuem para a reflexão dos jovens sobre a própria postura diante do consumo.

Na primeira seção ***Tecnologia***, os estudantes são desafiados a explorar e a conhecer alguns recursos das planilhas eletrônicas, como o recurso de autopreenchimento.

O tópico "Consumerismo" tem como objetivo a educação do consumidor. Muito se fala dos direitos do consumidor, mas, afinal, quais são eles? Como exercê-los? Esse é o foco dessa parte do capítulo. Organize um tempo para ler com os estudantes o infográfico disposto na dupla de páginas e reforce que esse tipo de representação permite transmitir diversas ideias pela integração entre textos e imagens.

Na atividade **1** da seção ***Problemas e exercícios propostos***, os estudantes são convidados a verificar a "pegada ecológica" deles. Incentive-os a compartilhar e a divulgar essa atividade a colegas, pais, familiares, vizinhos, etc. Enfatize que, além de incentivar as pessoas a verificar a "pegada ecológica" delas, é importante que os jovens conversem com elas sobre o consumo consciente. Esse material e os textos que abordam a Agenda 2030 possibilitam uma reflexão mais profunda sobre o significado de consumir e as ideias relacionadas a esse tema.

No tópico "Endividamento", o capítulo examina outro fator intimamente relacionado ao consumo: a renda. O objetivo é analisar alguns dos aspectos financeiros envolvidos no consumo. Os estudantes terão de mobilizar muitos conhecimentos de Matemática Financeira, que serão aplicados em contextos de empréstimo (como financiamentos, cartão de crédito e cheque especial).

Você pode ampliar o trabalho com as atividades da segunda seção ***Problemas e exercícios propostos*** solicitando aos estudantes que consultem o *site* do Banco Central e pesquisem se existem taxas de juros mais atrativas que as que foram utilizadas no exemplo da atividade.

No tópico "Organizando minha vida financeira", os estudantes são convidados a investigar *sites* e aplicativos que podem ser utilizados para a organização pessoal de finanças. Na seção ***Tecnologia***, eles terão a oportunidade de criar uma planilha pessoal de controle financeiro com o suporte do *software* LibreOffice. Após a elaboração desse material, organize a turma para que os estudantes troquem informações sobre aspectos da vida financeira que podem ser revistos, como consumo de água e de energia elétrica. Aproveite e relembre que o consumo desses itens tem impactos ambientais significativos.

Esta é a etapa final da Educação Básica; assim, entendemos que é fundamental proporcionar oportunidades para que os estudantes pensem sobre o próprio futuro. O tópico "O mundo do trabalho e meu projeto de vida" tem como meta favorecer essa reflexão. Os textos foram escolhidos para desenhar o cenário dinâmico que espera os jovens, qualquer que seja a formação profissional que escolherem.

Na atividade **11** da seção ***Problemas e exercícios propostos***, eles são convidados a pensar e a analisar o próprio projeto de vida e focar em duas profissões de seu interesse.

A proposta final é que as descobertas feitas sejam compartilhadas por cada estudante com os demais colegas e com outros integrantes da comunidade. No Livro do Estudante, são apresentadas algumas sugestões de formato para isso: *slides*, cartazes, vídeos e *podcast*. Caberá a cada estudante a decisão sobre a melhor maneira de apresentar a produção final. Sugerimos que esse trabalho seja desenvolvido integralmente em parceria com um professor da área de Linguagens e suas Tecnologias.

Terminado o capítulo, recomendamos que seja organizada uma roda de conversa com a turma para que todos possam se manifestar sobre as respostas encontradas para a questão inicial. Isso permite uma conscientização acerca das aprendizagens feitas e do avanço de todos em relação ao ponto de partida desse percurso formativo.

Nas seções ***Cálculo rápido*** e ***Para recordar***, há uma coletânea de atividades com cálculos, conceitos e procedimentos que remetem a diferentes unidades temáticas da Matemática. É importante reforçar que as habilidades exigidas nessas seções serão solicitadas aos jovens em processos seletivos, como vestibulares, e, por isso, devem ser exercitadas, tendo-se em mente que o Ensino Superior pode fazer parte do projeto de vida dos estudantes.

Na seção ***Foco no raciocínio lógico***, apresentamos um problema não convencional que exige percepção visual para ser resolvido.

A avaliação deste capítulo é processual, e os instrumentos não devem ficar restritos às respostas dos estudantes para as atividades propostas. Suas observações como orientador desse processo e uma autoavaliação dos estudantes podem compor o acompanhamento das aprendizagens e contribuir para o aperfeiçoamento do ensino das outras turmas.

As respostas dos estudantes à seção ***Palavras-chave*** sinalizam tanto a capacidade de escrita e de produção de textos quanto a argumentação com base no que aprenderam no capítulo.

Matemática e educação financeira

O tema discutido nesta seção possibilita integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Economia, especialmente em Educação Financeira. Trabalhos com os professores de História e Geografia podem ser propostos a fim de explorar as competências específicas **1** e **6** dessa área. Segundo a BNCC, a educação financeira é um desafio também das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, uma vez que:

> [...] cresce a importância da educação financeira e da compreensão do sistema monetário contemporâneo nacional e mundial, imprescindíveis para uma inserção crítica e consciente no mundo atual (Brasil, 2018a, p. 568).

Nesse sentido, o debate entre os vários componentes curriculares é importante para complementar e enriquecer o trabalho realizado com a habilidade **EM13MAT104** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Compreender como a inflação está diretamente relacionada com o dinheiro que se tem e com os gastos com produtos e serviços é muito importante, pois ajuda a criar criticidade para a organização do projeto de vida e o planejamento financeiro dos estudantes. Discussões como a proposta nesta seção também contribuem para a aquisição das competências gerais **1** e **7**.

Como as informações divulgadas pela mídia e pelas instituições públicas sobre a forma de cálculo da inflação nem sempre são compreensíveis ou suficientes, é comum encontrar pessoas que não se interessem em entender as dinâmicas e os impactos que os índices e cálculos têm no dia a dia. Contudo, ao compreender as variações nas áreas de análise, as variações em seus pesos e as variações dos pesos das regiões e municípios, o cálculo da inflação torna-se algo mais próximo da realidade, o que pode contribuir para que os hábitos de consumo das pessoas sejam repensados no futuro, colaborando para o desenvolvimento da educação financeira de todos e em diferentes níveis.

É possível que a introdução do assunto desperte a curiosidade dos estudantes para outros temas ligados à economia, ampliando suas áreas de interesse. Assim, procure sempre discutir ações que contribuam para a formação de cidadãos críticos e informados sobre o que regula a relação de cada um com o mercado econômico.

PARA EXPLORAR

Textos

Cunha, Márcia Pereira. O mercado financeiro chega à sala de aula: educação financeira como política pública no Brasil. *Educação & Sociedade*, v. 41, 2020. Disponível em: https://www.scielo.br/j/es/a/L9qwW5jc6b5qrfFgxDbgyxt/?lang=pt. Acesso em: 12 out. 2024.

Esse artigo discute de que maneira as novas políticas públicas em educação (material didático e atividades de formação da comunidade escolar) têm contribuído para a expansão dos conhecimentos sobre educação financeira nas escolas brasileiras.

Federação Brasileira de Bancos (Febraban). 12 jogos de educação financeira que te ensinam a poupar. Meu Bolso em Dia – Febraban Educação, 8 fev. 2019. Disponível em: https://meubolsoemdia.com.br/Materias/12-games-que-ensinam-a-poupar. Acesso em: 12 out. 2024.

O texto apresenta dicas de jogos de diversos tipos que ajudam a trabalhar a educação financeira de maneira lúdica e descontraída com estudantes de diversas faixas etárias.

Lima, Ivan Cordeiro. *Educação fiscal para a cidadania*. São Paulo: Egesp, 2019. Disponível em: https://www.educacaofiscal.sp.gov.br/atividades-oferecidas/Cartilhas%20e%20Folders/Apostila%20-%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20Fiscal%20para%20a%20Cidadania_Vers%C3%A3oFinal.pdf. Acesso em: 12 out. 2024.

Essa apostila apresenta informações relacionadas à educação fiscal no Brasil e no mundo, bem como a classificação e os tipos de tributos, questões ligadas a orçamento público, políticas públicas, entre outras.

Vídeo

O que é inflação: IBGE Explica IPCA e INPC. [*S. l.*: *s. n.*], 2015. Publicado pelo canal IBGE. 1 vídeo (5 min 38 s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=JVcDZOlIMBk. Acesso em: 12 out. 2024.

Esse vídeo da série IBGE Explica mostra, de forma descontraída, a importância de dois índices essenciais (IPCA e INPC) para entender o que é a inflação e de que maneira ela é medida no Brasil.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Nesta seção, apresentamos propostas diferentes cuja ênfase está mais na reflexão sobre o processo de ler e de resolver as questões que na resolução em si. Nessa proposta, há problemas que exigem uma maneira diferente de ler, ora com atenção voltada para a parte textual, ora com foco nos gráficos.

Incentive a leitura tanto do texto inicial como da resolução do problema resolvido e promova uma roda de conversa sobre as percepções que os estudantes têm da estrutura textual dessas questões e o que, de fato, precisam saber para resolvê-las. Esse exercício reflexivo permite que eles se sintam mais confiantes no enfrentamento dessas questões e persistam na resolução delas.

Nas atividades propostas, espera-se que os estudantes apliquem a leitura reflexiva que aprenderam. Em um painel de soluções, eles podem falar como pensaram para resolver cada problema e, eventualmente, conhecer formas diferentes de resolução, ampliando, assim, o repertório de estratégias e de registro matemático.

PARTE 3 • RESOLUÇÕES COMENTADAS

UNIDADE 1 NÚMEROS, ANÁLISE DE DADOS E FUNÇÕES

CAPÍTULO 1 CONJUNTOS NUMÉRICOS E INTERVALOS NA RETA REAL

TECNOLOGIA (P. 17)

1. **a)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes indiquem o número que considerem mais próximo do valor de cada quociente, levando em consideração a quantidade de algarismos de cada número e a posição da vírgula.

b) Primeira coluna: aproximadamente 8; segunda coluna: 3,2; terceira coluna: 0,03.

2. **a)**

Números inteiros mais próximos	Números mais próximos com uma casa decimal	Números mais próximos com duas casas decimais
$2 < \sqrt{5} < 3$	$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$	$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$
$2 < \sqrt{8} < 3$	$2{,}8 < \sqrt{8} < 2{,}9$	$2{,}82 < \sqrt{8} < 2{,}83$
$4 < \sqrt{23} < 5$	$4{,}7 < \sqrt{23} < 4{,}8$	$4{,}79 < \sqrt{23} < 4{,}80$
$6 < \sqrt{48} < 7$	$6{,}9 < \sqrt{48} < 7{,}0$	$6{,}92 < \sqrt{48} < 6{,}93$
$16 < \sqrt{281} < 17$	$16{,}7 < \sqrt{281} < 16{,}8$	$16{,}76 < \sqrt{281} < 16{,}77$
$33 < \sqrt{1\,111} < 34$	$33{,}3 < \sqrt{1\,111} < 33{,}4$	$33{,}33 < \sqrt{1\,111} < 33{,}34$
$8 < \sqrt{67{,}3} < 9$	$8{,}2 < \sqrt{67{,}3} < 8{,}3$	$8{,}20 < \sqrt{67{,}3} < 8{,}21$
$8 < \sqrt{71{,}17} < 9$	$8{,}4 < \sqrt{71{,}17} < 8{,}5$	$8{,}43 < \sqrt{71{,}17} < 8{,}44$

b) Resposta pessoal.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 21)

1. Como 1 bilhão = 1 000 000 000, então, para expressar R$ 1,35 bilhão, escrevemos: 1,35 bilhão de reais = R$ 1 350 000 000,00.
Alternativa **e**.

2. **a)** $\frac{4}{4} + \frac{2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ (II)

b) $1{,}25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$ (III)

c) $\frac{3}{5} + \frac{7}{3} = \frac{9}{15} + \frac{35}{15} = \frac{44}{15}$ (IV)

d) $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (I)

3. **a)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que sim, pois 2 é um número racional entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{2}$.

b) Sim. Como Daniel informou a Pedro que ele errou por três quartos, significa que o número era $\frac{3}{4}$ menor ou maior que 2, que foi o palpite de Pedro. Ao subtrair $\frac{3}{4}$ de 2, Pedro obteria $2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$, que é um número entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{2}$, ou seja, maior que $\frac{3}{4}$ e menor que $\frac{5}{2}$. Entretanto, ao adicionar $\frac{3}{4}$ a 2, ele obteria $2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$, que é um número maior que $\frac{3}{4}$, mas também é maior que $\frac{5}{2}$. Portanto, Pedro poderia adivinhar o número pensado por Daniel.

4. **a)** $16 = \frac{32}{2}$

b) $16 = 2 \cdot 8$

c) $16 = 4^2$

d) $16 = 2^4$

e) $16 = 5^2 - 3^2$

f) $16 = 2 \cdot 2 \cdot 4$ (existem outras respostas)

g) $16 = 20 - 4$ (existem outras respostas)

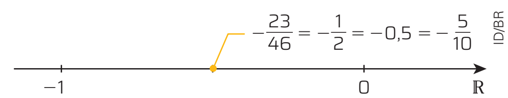
5. $-100 = -10^2$; $-100 = -\frac{1\,000}{10}$; $-100 = (-10) \cdot (+10)$
Existem outros modos de representar o número −100.

6. Para que o produto de dois números seja 1, os números de cada item devem ser multiplicados pelos respectivos números inversos.

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $-\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{5}{2}$

d) Como $-0{,}6 = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$, então o número racional pelo qual deverá ser multiplicado para que o produto seja 1 é $-\frac{5}{3}$.

7. **a)**



b) Obtendo a fração irredutível equivalente a cada número, conclui-se que os números do item anterior são todos iguais.

8. **a)**

Variação de temperaturas mínimas em um município	
Mês	**Temperatura (°C) em valores aproximados**
Janeiro	−5
Fevereiro	0
Março	3
Abril	2
Maio	5
Junho	8
Julho	10
Agosto	9
Setembro	6
Outubro	2,5
Novembro	2
Dezembro	−2,5

Dados fictícios.

b) Entre janeiro e março, a variação da temperatura foi: $3 - (-5) = 8$. Portanto, a temperatura subiu 8 °C.
Entre abril e julho, foi: $10 - 2 = 8$. Portanto, também subiu 8 °C.
Entre julho e outubro, foi: $2{,}5 - 10 = -7{,}5$. Portanto, caiu 7,5 °C.

c) Pelo gráfico, a temperatura mais alta foi 10 °C, registrada em julho, e a mais baixa foi −5 °C, registrada em janeiro.

9. **a)** Como a *pizza* foi dividida em 8 pedaços, uma fatia é representada pela fração $\frac{1}{8}$, e duas fatias, $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

b) A metade de 8 pedaços são 4 pedaços.

10. **a)** $0{,}36 = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$

b) $-2{,}125 = -\frac{2\,125}{1\,000} = -\frac{17}{8}$

c) $x = 0{,}262626...$ (I)
$100x = 26{,}262626...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$99x = 26 \Rightarrow x = \frac{26}{99}$

d) $x = 2{,}176176176...$ (I)
$1\,000x = 2\,176{,}176176...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$999x = 2\,174 \Rightarrow x = \frac{2\,174}{999}$

e) $x = 0{,}8474747...$
$10x = 8{,}474747...$ (I)
$1\,000x = 847{,}4747...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$990x = 839 \Rightarrow x = \frac{839}{990}$

f) $x = 0{,}12666...$
$100x = 12{,}666...$ (I)
$1\,000x = 126{,}666...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$900x = 114 \Rightarrow x = \frac{19}{150}$

11. **a)** $x = 0{,}666...$ (I)
$10x = 6{,}666...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
Assim, temos:
$0{,}666... - 0{,}6 = \frac{2}{3} - \frac{6}{10} = \frac{1}{15}$

b) $x = 0{,}2333...$
$10x = 2{,}3333...$ (I)
$100x = 23{,}3333...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$90x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$
Assim, temos:
$0{,}23 : 0{,}2333... = \frac{23}{100} \cdot \frac{30}{7} =$
$= \frac{69}{70}$

c) $x = 0,1777...$
$10x = 1,777...$ (I)
$100x = 17,777...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$90x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}$
Assim, temos:
$-0,1777... + 1,7 = -\frac{8}{45} + \frac{17}{10} =$
$= -\frac{16}{90} + \frac{153}{90} = \frac{137}{90}$

d) $x = 0,161616...$ (I)
$100x = 16,161616...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$99x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{99}$
$y = 0,4777...$
$10y = 4,777...$ (III)
$100y = 47,777...$ (IV)
Subtraindo (III) de (IV), obtemos:
$90y = 43 \Rightarrow y = \frac{43}{90}$
Assim, temos:
$0,161616... : 0,47777... = \frac{16}{99} : \frac{43}{90} =$
$= \frac{16}{99} \cdot \frac{90}{43} = \frac{160}{473}$

12. $x = 0,2222...$ (I)
$10x = 2,222...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos: $x = \frac{2}{9}$
$y = 0,23333...$
$10y = 2,3333...$ (III)
$100y = 23,3333...$ (IV)
Subtraindo (III) de (IV), obtemos:
$90y = 21 \Rightarrow y = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$
Assim, temos:
$0,2222... + 0,23333... = \frac{2}{9} + \frac{7}{30} =$
$= \frac{20 + 21}{90} = \frac{41}{90}$

13. a) I) 15,32958 IV) 39,653465
II) 29,458 V) 3,0505263
III) 22,6125

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes tenham considerado não só a adição e a subtração da quantidade de casas decimais, respectivamente, na multiplicação e na divisão de números decimais, mas também as aproximações da multiplicação ou da divisão das partes inteiras dos números decimais em cada resposta.

c) Resposta pessoal. Como a proposta do item **a** era que os estudantes não fizessem contas para determinar a posição da vírgula em cada resposta, é possível que, com base apenas na quantidade de casas decimais dos números multiplicados ou divididos, tenham encontrado dificuldade para determinar a posição da vírgula em cada caso.

14. a)

a	1	10	100	4	40	400	9	90	900
$\sqrt{a}$	1	$\sqrt{10}$	10	2	$2\sqrt{10}$	20	3	$3\sqrt{10}$	30

b) Números racionais: 1, 10, 2, 20, 3, 30.
Números irracionais: $\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$.

c) São todos números inteiros.

15. a) $\sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \sqrt{11}$
b) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}$

16. $A_1 = \ell_1^2$ | $A_2 = \ell_2^2$
$10000 = \ell_1^2$ | $1000 = \ell_2^2$
$\ell_1 = \sqrt{10000}$ | $\ell_2 = \sqrt{1000}$
$\ell_1 = 100$ m | $\ell_2 = 10\sqrt{10}$ m

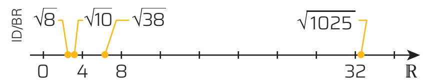
17. Para determinar quais frações representam dízimas periódicas infinitas, dividimos o numerador pelo denominador.
a) 0,142857142... c) $0,\bar{1}$
b) 0,125 d) 0,1

Então, as frações $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{9}$ são dízimas periódicas infinitas.

18. A maior distância que uma pessoa pode andar em linha reta em uma sala retangular é a diagonal dessa sala.
Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$d^2 = 6^2 + 10^2 \Rightarrow d = \sqrt{136} \Rightarrow d = 2\sqrt{34}$ m

19. Existem várias respostas possíveis.
a) π b) $\frac{\sqrt{2}}{7}$ c) $-\sqrt{5}$ d) $\sqrt{57}$

20. a) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \simeq 2 \cdot 1,41 \simeq 2,8$
b) $\sqrt{10} \simeq 3,2$
c) $\sqrt{1025} \simeq 32$
d) $\sqrt{38} \simeq 6,2$



21. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq -\frac{1,73}{2} \simeq -0,865$
$-\frac{5}{6} \simeq -0,83$
$-\frac{\pi}{4} \simeq -\frac{3,14}{4} \simeq -0,785$
Logo, $-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{5}{6}; -\frac{\pi}{4}$.

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq \frac{1,41}{2} \simeq 0,705$
$\frac{\pi}{5} \simeq \frac{3,14}{5} \simeq 0,628$
$\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq \frac{1,73}{3} \simeq 0,577$
Logo, $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{5}, \frac{\sqrt{3}}{3}$.

22. a) O resultado é um número racional, pois trata-se de uma divisão entre dois números inteiros *a* e *b*, em que *b* é diferente de zero.

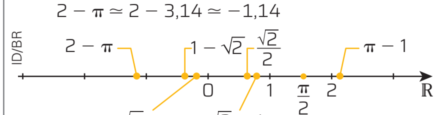
b) $x = 0,232323...$ (I)
$100x = 23,2323...$ (II)
Subtraindo (I) de (II), obtemos:
$99x = 23 \Rightarrow x = \frac{23}{99}$
$y = 0,666...$ (III)
$10y = 6,666...$ (IV)
Subtraindo (III) de (IV), obtemos:
$9y = 6 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$
Portanto:
$\frac{0,232323...}{0,666...} = \frac{23}{99} \cdot \frac{3}{2} = \frac{23}{66} = 0,348484...$
O resultado é uma dízima periódica, portanto, um número racional.

c) $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = 2\sqrt{2} + 2 - 2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}$
O resultado é um número irracional.

d) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$
O resultado é um número irracional.

e) Como π é irracional, o resultado dessa subtração será um número irracional.

23. $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq \frac{1,41}{2} \simeq 0,705$
$\sqrt{3} - 1 \simeq 1,73 - 1 \simeq 0,73$
$\frac{\pi}{2} \simeq \frac{3,14}{2} \simeq 1,57$
$1 - \sqrt{2} \simeq 1 - 1,41 \simeq -0,41$
$\sqrt{3} - 2 \simeq 1,73 - 2 \simeq -0,27$
$\pi - 1 \simeq 3,14 - 1 \simeq 2,14$
$2 - \pi \simeq 2 - 3,14 \simeq -1,14$



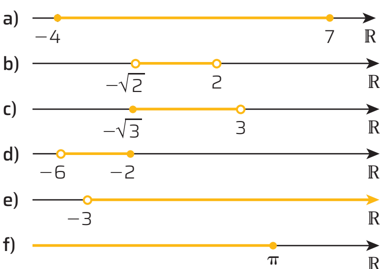
24. a) Verdadeira.
b) Falsa; os números inteiros negativos não são naturais.
c) Verdadeira.
d) Falsa; os números reais podem ser racionais ou irracionais.
e) Verdadeira.
f) Falsa; *a* e *b* devem ser números inteiros, com *b* não nulo.

25. Resposta pessoal. Resposta possível: Determine a medida do lado de um quadrado cuja área é igual a 2 m². (Resposta: $\sqrt{2}$)

26. Resposta pessoal. Resposta possível: Como podemos representar o saldo da conta de Juliana sabendo que ela tinha 200 reais nessa conta e foi debitado um cheque de 250 reais? (Resposta: −50 reais)

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 26)

27. Como $\sqrt{2} \simeq 1,414$, ele pertence aos intervalos]0; 1,42[e]1,41; 1,42[.

28.


Ilustrações: ID/BR

29. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 7\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x \leqslant -2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < 2\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leqslant x < 3\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \pi\}$

30. a)]−2, 5] g) [−1,5; $\sqrt{2}$]
b)]2; 2,5[h)]−∞, 3[
c)]−∞, 7[i)]−∞, −2]w
d)]−1,3] j)]−1, +∞[
e) [−4, 0[k) [−π, +∞[
f)]−6,3; 2[

31. a) Não é possível indicar todas as alturas; podemos representar um intervalo indicando o conjunto de alturas obtidas:]1,68; 1,87[.
b)]14, 18[(há outros modos de representar).

32. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

Previsão do tempo nas capitais brasileiras em 10 outubro de 2024				
Município	Temperatura (°C)		Intervalo	Amplitude térmica
	mínima	máxima		
Aracaju	24	30	[24, 30]	6 °C
Curitiba	15	18	[15, 18]	3 °C
Palmas	25	39	[25, 39]	14 °C
Vitória	23	25	[23, 25]	2 °C

Dados obtidos em: Instituto Nacional de Meteorologia. *Previsão para capitais de 10 a 14 out. 2024*. Disponível em: https://previsao.inmet.gov.br/. Acesso em: 10 out. 2024.

33. a) Como a menor soma obtida no lançamento de dois dados é 2, e a maior é 12, sendo S_2 a soma dos números de dois dados lançados, temos: $2 \leqslant S_2 \leqslant 12$.
b) Como a menor soma obtida no lançamento de três dados é 3, e a maior é 18, sendo S_3 a soma dos números de três dados lançados, temos: $3 \leqslant S_3 \leqslant 18$.

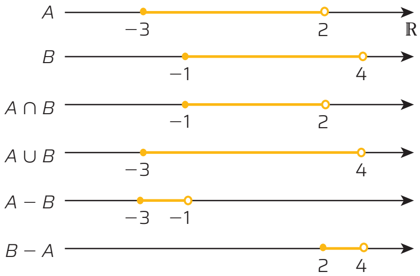
34. Área $= \ell^2 \Rightarrow 4 < \ell^2 < 144 \Rightarrow 2 < \ell < 12$
Logo, ℓ pertence a]2, 12[.

35. a) $A \cap B = \{-1, 0, 4\}$;
$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$;
$A - B = \{-2, 2\}$; $B - A = \{1\}$
b) $A \cap B = \{-3, 3, 5\} = B$;
$A \cup B = \{-3, -1, 1, 3, 5\} = A$;

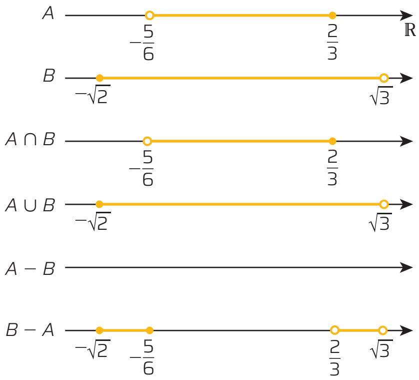
$A - B = \{-1, 1\}$
$B - A = \varnothing$

Ilustrações: ID/BR

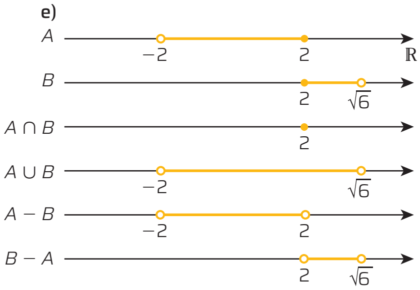
c)



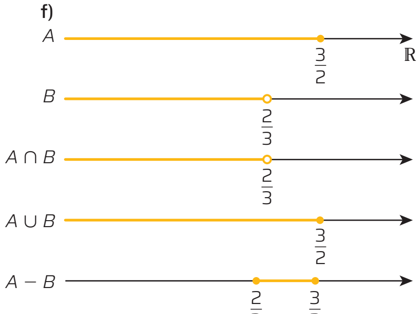
d)



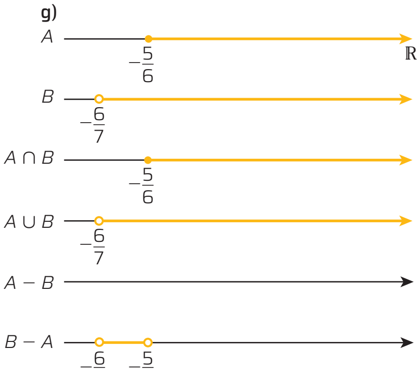
e)



f)



g)



36. O estudante acertou a resposta.

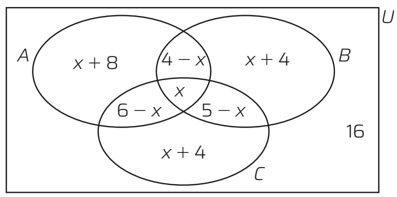
37. Resposta pessoal. As respostas corretas são, respectivamente,
$A \cap B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{5} < x < -\sqrt{3}\right\}$ e $A \cup B = \mathbb{R}$.
Possíveis resoluções incorretas:
inversão das respostas de união e intersecção;
$A \cap B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x \leqslant -\sqrt{10}\right\}$;
$A \cup B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{5} < x \leqslant -\sqrt{10}\right\}$, etc.

38. Com os dados do enunciado, temos:
$A \cap B = \{b, d\}$; $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$; $B - A = \{a\}$; $A = \{b, c, d, e\}$.
Então, o conjunto B será $B = \{a, b, d\}$.
Alternativa **c**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 30)

39. Seja A o conjunto dos alunos de Anatomia, B o conjunto dos alunos de Biofísica e C o conjunto dos alunos de Citologia. Temos:

ID/BR

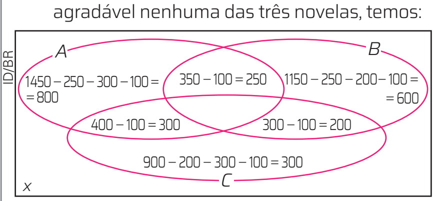


Cálculo do valor de x: $x + 8 + 4 - x + x + 4 + x + 6 - x + 5 - x + x + 4 + 16 = 50 \Rightarrow x = 3$
Agora, substituindo os valores de x, temos:
Anatomia: 11; Biofísica: 7; Citologia: 7; Anatomia e Biofísica: 1; Citologia e Biofísica: 2; Anatomia e Citologia: 3
Logo, $1 + 2 + 3 = 6$ cursam, simultaneamente, exatamente duas disciplinas.
Alternativa **e**.

40. Com os dados do enunciado, temos:
$A + B = 1\,200 \Rightarrow A = 1\,200 - B$
$B + C = 1\,100 \Rightarrow C = 1\,100 - B$
$A + C = 1\,500$
Substituindo A e C nesta equação para calcular o valor de B, temos: $B = 400$
Substituindo o B nas equações, temos:
$A = 800 \Rightarrow C = 1100 - B \Rightarrow C = 1100 - 400 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = 700$
$A + B + C = 800 + 400 + 700 = 1\,900$.
Alternativa **a**.

41. Representando a tabela por meio do diagrama, em que x é número de pessoas que não acham agradável nenhuma das três novelas, temos:

ID/BR



$x + 100 + 250 + 300 + 200 + 800 + 600 + 300 = 3\,000 \Rightarrow x = 450$
Alternativa **c**.

42. Total: 200 estudantes; 98 são mulheres das quais apenas 60 não estudam comunicação e 38 estudam comunicação. Portanto, 102 são homens dos quais apenas 22 estudam comunicação e 80 não estudam comunicação.
Alternativa **b**.

43. Y e Z: $6 - 2 = 4$
X e Y: $5 - 2 = 3$
Logo, $14 - 4 - 3 - 2 = 5$.
X: $a + b + 3 + 2 = 11 \Rightarrow a + b = 6$
Ao todo: $a + b + c + 3 + 2 + 5 + 4 + 10 = 30 \Rightarrow c = 0$.
Logo, ninguém assistiu apenas ao filme Z.
Alternativa **b**.

44. Somente atriz: $80 - 50 = 30$
Somente cantora: $70 - 50 = 20$
$30 + 20 + 50 = 100$
Então, 20 alunas que não querem ser cantoras nem atrizes, pois $120 - 100 = 20$.
Alternativa **b**.

45. Resposta pessoal.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 31)

1.
a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$
b) $1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
d) $1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
f) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$
g) $0{,}5 + 1{,}2 = 1{,}7$
h) $2 - 0{,}75 = 1{,}25$
i) $1{,}05 + 0{,}45 = 1{,}5$
j) $1{,}25 - 0{,}75 = 0{,}5$
k) $2 - 0{,}025 = 1{,}975$
l) $5{,}25 + 1{,}35 = 6{,}6$

2.
a) 0,5
b) 0,13
c) 0,76
d) 9,3
e) 0,011
f) 4,53
g) 72,5
h) 3,361

3.
a) 0,1
b) 0,01
c) $\frac{1}{25}$
d) $-2 \cdot \left(-\frac{1}{32}\right) = \frac{1}{16}$
e) $-\frac{1}{15}$
f) $-\frac{1}{27}$
g) 1
h) $\frac{1}{16}$
i) 144
j) 81
k) $\frac{1}{25}$
l) $\frac{1}{216}$

4. Alternativa **d**, pois: $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

5.
a) 10% de $120 \Rightarrow \frac{10}{100} \cdot 120 = 0{,}1 \cdot 120 = 12$
b) 30% de $18 \Rightarrow \frac{30}{100} \cdot 18 = 0{,}3 \cdot 18 = 5{,}4$
c) 0,5% de $138 \Rightarrow \frac{0{,}5}{100} \cdot 138 = 0{,}005 \cdot 138 = 0{,}69$
d) 200% de $1530 \Rightarrow \frac{200}{100} \cdot 1530 = 2 \cdot 1530 = 3060$

PARA RECORDAR (P. 31)

1. $2x + 2(x - 15) = 70$
$4x = 100$
$x = 25$ e $x - 15 = 10$
As medidas dos lados do retângulo são 25 cm e 10 cm.

2. Dividindo os dados em duas tabelas, temos:

Número inicial	−3	−2	−1	0	$\frac{1}{2}$	1
Adicione 2	−1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3
Eleve ao quadrado	9	4	1	0	$\frac{1}{4}$	1
Multiplique por 2	−6	−4	−2	0	1	2
Divida por −1	3	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	−1

Número inicial	$\sqrt{2}$	2	2,5	b
Adicione 2	$2 + \sqrt{2}$	4	4,5	$b + 2$
Eleve ao quadrado	2	4	6,25	b^2
Multiplique por 2	$2\sqrt{2}$	4	5	$2b$
Divida por −1	$-\sqrt{2}$	−2	−2,5	$-b$

3. Para determinar o valor x da desvalorização, podemos fazer uma regra de três:

$$\begin{array}{rcl} 90\,000{,}00 \text{ reais} & \text{———} & 100\% \\ x \text{ reais} & \text{———} & 4{,}5\% \end{array}$$

x = R$ 4 050,00 e R$ 90 000,00 − R$ 4 050,00 = R$ 85 950,00

Logo, depois dessa desvalorização o valor do carro passou a ser R$ 85 950,00.

4. **a)** $4x + 11 - 7x = -11$

$x = \dfrac{22}{3}$

$S = \left\{\dfrac{22}{3}\right\}$

b) $5x - (-x + 22) = -4$

$5x + x - 22 = -4$

$x = 3$

$S = \{3\}$

c) $11x - (-3x + 10) = 4x + 2$

$10x = 12$

$x = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5}$

$S = \left\{\dfrac{6}{5}\right\}$

d) $x - \dfrac{3}{2} + x - \dfrac{10}{3} = 4$

$6 \cdot 2x = 6 \cdot 4 + 6 \cdot \dfrac{3}{2} + 6 \cdot \dfrac{10}{3}$

$12x = 24 + 9 + 20$

$x = \dfrac{53}{12} = 4{,}41\overline{6}$

$S = \{4{,}41\overline{6}\}$

5. Quadro A: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{4{,}5} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{5}{7{,}5}$

Portanto, a e b são grandezas diretamente proporcionais.

Quadro B: $\dfrac{t}{u} = \dfrac{0{,}5}{1} \neq \dfrac{1}{1{,}5} \neq \dfrac{1{,}5}{2} \neq \dfrac{2}{2{,}5}$

Portanto, t e u não são grandezas diretamente proporcionais.

6. **a)** *E*, *F*, *G*, *H*.

b) Oito vértices.

c) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{BG}$, $\overline{CH}$, $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$

d) Doze arestas.

e) Seis faces.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 33)

1. Esta é apenas uma forma de resolução. De acordo com a informação IV (o açougueiro vai sempre a pé para o trabalho), Pereira e Oliveira não podem ser açougueiros, pois isso invalidaria a afirmação I (Pereira e Oliveira são vizinhos e revezam-se levando um ao outro para o trabalho). Assim, Pereira pode ser policial (Po), padeiro (Pa) ou bancário (B).

Considerando a informação VI (a única vez que o padeiro encontrou o policial foi quando este o multou por excesso de velocidade) e a informação I, temos o esquema:

	Pereira	Oliveira	
(1)	Po	B	
(2)	Pa	B	
	B	Pa	(3)
		Po	(4)

Com base na afirmação V (o policial não mora perto do bancário), descartamos as possibilidades 1 e 4, pois, conforme *a* afirmação I, Pereira e Oliveira são vizinhos.

Restam as possibilidades:

	Pereira	Oliveira
(1)	Pa	B
(2)	B	Pa

Conforme *a* informação II (Oliveira ganha mais dinheiro que Silva) e a VII (o policial ganha mais dinheiro que o bancário e que o padeiro), Silva deve ser açougueiro, e Santos, policial. Então:

	Pereira	Oliveira	Silva	Santos
(1)	Pa	B	A	Po
(2)	B	Pa	A	Po

Pela afirmação III (Pereira vence Santos, regularmente, no boliche) e pela VI (a única vez que o padeiro encontrou o policial foi quando este o multou por excesso de velocidade), a possibilidade 1 fica descartada.

Temos, então, o seguinte: Pereira é bancário, Oliveira é padeiro, Silva é açougueiro, e Santos é policial.

2. A única resposta possível é:

1	2	3	4
3	4	2	1
4	3	$x = 1$	2
2	1	4	$y = 3$

Dessa maneira: $x + y = 1 + 3 = 4$

MATEMÁTICA E INCLUSÃO (P. 34)

Conectando ideias

1. O sistema braile de escrita é constituído por células (ou celas) que são escritas em um conjunto com duas colunas e três linhas. Cada um desses pontos do conjunto recebe uma numeração, que vai de 1 a 6 e é lida de cima para baixo e da esquerda para a direita. Portanto, na coluna da esquerda ficam os números 1, 2 e 3; e na coluna da direita, os números 4, 5 e 6. As combinações desses números formam os sinais que compõem o sistema braile.

2. Resposta de acordo com a pesquisa realizada pelos estudantes.

Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2 ESTATÍSTICA: DADOS, VARIÁVEIS E GRÁFICOS

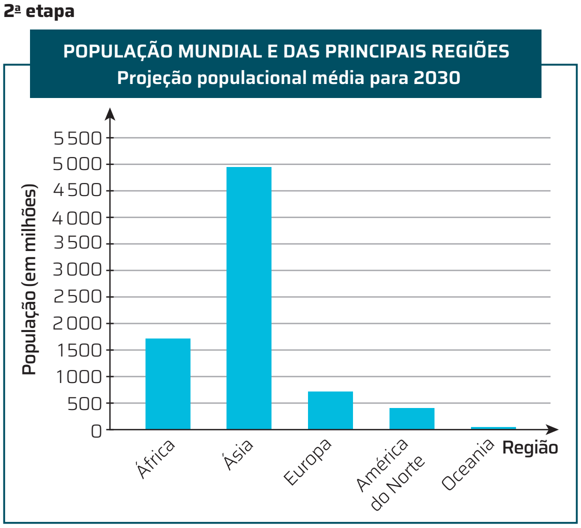
TECNOLOGIA (P. 42)

1. a) **1ª etapa**

POPULAÇÃO MUNDIAL E DAS PRINCIPAIS REGIÕES Projeção populacional média para 2030	
Região	**População (em milhões)**
África	1 710
Ásia	4 958
Europa	736
América do Norte	393
Oceania	49

Fonte de pesquisa: United Nations. Department of Economic and Social Affairs. *World population prospects 2022*. [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://population.un.org/wpp/Download/. Acesso em: 4 jul. 2024.

2ª etapa



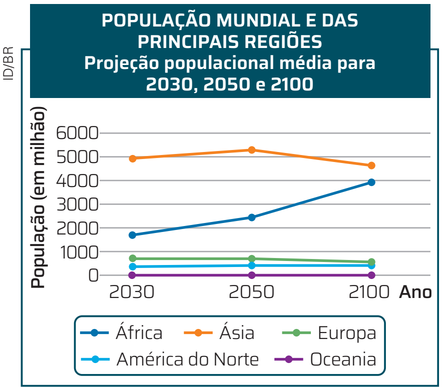
Fonte de pesquisa: United Nations. Department of Economic and Social Affairs. *World population prospects 2022*. [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://population.un.org/wpp/Download/. Acesso em: 4 jul. 2024.

b) **1ª etapa**

POPULAÇÃO MUNDIAL E DAS PRINCIPAIS REGIÕES Projeção populacional média para 2030, 2050 e 2100			
Região	**População (em milhão)**		
	2030	**2050**	**2100**
África	1 710	2 485	3 924
Ásia	4 958	5 292	4 674
Europa	736	703	586
América do Norte	393	421	448
Oceania	49	57	68

Fonte de pesquisa: United Nations. Department of Economic and Social Affairs. *World population prospects 2022*. [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://population.un.org/wpp/Download/. Acesso em: 4 jul. 2024.

2ª etapa



Fonte de pesquisa: United Nations. Department of Economic and Social Affairs. *World population prospects 2022*. [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://population.un.org/wpp/Download/. Acesso em: 4 jul. 2024.

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que não foi adequada a escolha do gráfico de linhas no item **b**, pois as informações apresentadas não representam tendências de aumento ou de diminuição na projeção populacional mundial e das principais regiões nos anos indicados.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 43)

1. a) Quantidade de Terras Indígenas, por região, no Brasil.

b) O gráfico representa estimativas e projeções da quantidade de Terras Indígenas, por região, no Brasil.

c) Sim, pois indica quantidades do fato observado.

d) A Região Norte.

e) A Região Nordeste tinha 12 Terras Indígenas a menos do que a Região Sul, pois: $122 - 110 = 12$.

f) A quantidade de Terras Indígenas que havia na Região Centro-Oeste em 2024.

g)

Quantidade de Terras Indígenas, por região, no Brasil, em 2024

Região	Centro-Oeste	Norte	Nordeste	Sudeste	Sul
Quantidade de Terras Indígenas	167	359	110	62	122

Fonte de pesquisa: Instituto Socioambiental (ISA). *Informações gerais sobre Terras Indígenas no Brasil*. [*S. l.*], 2019. Disponível em: https://terrasindigenas.org.br/pt-br/brasil. Acesso em: 5 jul. 2024.

h) Resposta pessoal.

i) Resposta pessoal.

2. a) As grandezas utilizadas são: área desmatada (em mil km²) e tempo (em ano).

b) O menor nível de desmatamento foi no ano de 2012 (4,6 mil km²).

c) Essa repetição ocorre porque em 2009 e 2018 o desmatamento da Amazônia Legal foi o mesmo.

d) O desmatamento diminuiu, pois houve um decrescimento na área desmatada (em mil km²) : 13,0; 11,6 e 9,0.

e) Resposta pessoal.

f) Resposta pessoal.

3. a) A área do campo de futebol é 7 700 m², pois $70 \cdot 110 = 7\,700$, e 7 700 m² equivalem a 0,0077 km². Logo, a área desmatada na Amazônia Legal em 2023 equivale a, aproximadamente, 1 168 831 campos de futebol, pois $9000 : 0{,}0077 \simeq 1\,168\,831$.

b) Um ano com 365 dias tem 525 600 minutos, pois $365 \cdot 24 \cdot 60 = 525\,600$. Assim:

525 600 min ——— 1 168 831 campos de futebol

10 min ——— x campos de futebol

$x \simeq 22{,}24$

Portanto, em 2023, a cada 10 minutos foram desmatados aproximadamente 22 campos de futebol.

4. 5 min 15 s = $(60 \cdot 5)$ s + 15 s = 315 s

1 h 55 min 30 s = 60 min + 55 min + 30 s = = $(60 \cdot 115)$ s + 30 s = 6 930 s

Para determinar a quantidade total de postos da corrida, fazer uma regra de três:

1 posto ——— 315 s

x postos ——— 6 930 s

$x = 22$

O tempo que o corredor leva de um posto a outro é:

1º ao 2º: 10 min 54 s − 5 min 27 s = = 5 min 27 s

2º ao 3º: 16 min 21 s − 10 min 54 s = = 5 min 27 s

3º ao 4º: 21 min 48 s − 16 min 21 s = = 5 min 27 s

Logo, o corredor leva 327 s para passar de um posto a outro, pois:

5 min 27 s = $(60 \cdot 5)$ s + 27 s = 327 s

Assim, o tempo obtido pelo corredor no 22º posto é 7 194 s, pois $22 \cdot 327$ s = 7 194 s, que é o tempo total de corrida.

7 194 s = 1 h + 59 min + 54 s

Alternativa **c**.

5. Analisando o gráfico, temos:

- No dia 1, a temperatura foi maior que 0 °C e menor que 10 °C e a umidade do ar ficou entre 30% e 40%. Portanto, o alarme foi emitido de forma correta, pois o alerta cinza deve ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura será inferior a 10 °C e a umidade relativa do ar for inferior a 40%.
- No dia 12, a temperatura foi de 40 °C e a umidade do ar foi de 20%. Portanto, o alarme não foi emitido de forma correta, pois o alerta laranja deve ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura será entre 35 °C e 40 °C e a umidade relativa do ar for abaixo de 30%.
- No dia 13, a temperatura ficou entre 40 °C e 50 °C e a umidade do ar foi de 40%. Portanto, o alarme foi emitido de forma incorreta, pois o alerta vermelho deve ser emitido sempre que a previsão do tempo estimar que a temperatura será superior a 40 °C e umidade relativa do ar for inferior a 25%.

Alternativa **a**.

6. Sendo p_u a quantidade, em bilhões de tonelada, de plástico em uso; p_d a quantidade, em bilhões de tonelada, de plástico descartado; e T o total, em bilhões de tonelada, de plástico fabricado, temos:

$$\begin{cases} T = p_u + p_d \\ p_d = p_u + 3{,}7 \end{cases}$$

Substituindo p_d na primeira equação:

$T = p_u + p_d \Rightarrow 8{,}9 = p_u + (p_u + 3{,}7) \Rightarrow p_u = 2{,}6$

Logo: $p_d = p_u + 3{,}7 \Rightarrow p_d = 6{,}3$

Em relação ao total de plástico fabricado, temos:

$\frac{p_u}{T} = \frac{6{,}3}{8{,}9} \simeq 0{,}708$

$\frac{p_d}{T} = \frac{2{,}6}{8{,}9} \simeq 0{,}292$

Portanto, a quantidade de plástico descartado representa aproximadamente 70,8% do total e a quantidade de plástico em uso representa aproximadamente 29,2% do total.

Alternativa **d**.

7. Resposta pessoal.

8. Comparando as barras de cada região, percebemos que em todas as regiões o SUS realizou mais de 50% das internações. Logo, mais da metade dessas internações em todo o Brasil foram realizadas pelo SUS.

Alternativa **a**.

9. a) Sim, pois 53,4% da massa corporal de Bianca corresponde à massa magra.

b) Bianca possui aproximadamente 43,36 kg de massa magra, pois 53,4 % de 81,2 kg correspondem a $0{,}534 \cdot 0{,}9 \simeq 43{,}36$.

c) Resposta pessoal.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 46)

1. a) 50% de 120 = $\frac{1}{2} \cdot 120 = 60$

25% de 120 = $\frac{1}{4} \cdot 120 = 30$

20% de 120 = $\frac{1}{5} \cdot 120 = 24$

10% de 120 = $\frac{1}{10} \cdot 120 = 12$

b) 10% de 440 = $\frac{1}{10} \cdot 440 = 44$

20% de 440 = $\frac{1}{5} \cdot 440 = 88$

5% de 440 = $\frac{1}{20} \cdot 440 = 22$

25% de 440 = $\frac{1}{4} \cdot 440 = 110$

c) 5% de 360 = $\frac{1}{20} \cdot 360 = 18$

15% de 360 = $\frac{15}{100} \cdot 360 = 54$

25% de 360 = $\frac{1}{4} \cdot 360 = 90$

50% de 360 = $\frac{1}{2} \cdot 360 = 180$

d) 50% de 80 = $\frac{1}{2} \cdot 80 = 40$

25% de 80 = $\frac{1}{4} \cdot 80 = 20$

20% de 80 = $\frac{1}{5} \cdot 80 = 16$

5% de 80 = $\frac{1}{20} \cdot 80 = 4$

PARA RECORDAR (P. 47)

1. $\frac{3a}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 3a \cdot 2 \Rightarrow b = 6a \Rightarrow \frac{b}{a} = 6$

2. O jornal disponibiliza 15 páginas para anúncios. Ao inserir dois anúncios em cada uma dessas páginas, a cada semana são publicados 30 anúncios nesse jornal, pois $2 \cdot 15 = 30$.

Assim, esse jornal publica 360 anúncios em 12 semanas, pois $12 \cdot 30 = 360$.

3. $\frac{0{,}5}{1} = \frac{4{,}5}{x} \Rightarrow x = 9$; a distância real é 9 km.

4. Como Carla correu 3 km em 27,5 min, então ela correu, em média, 1 km em 9,2 min, pois $27{,}5 : 3 \simeq 9{,}2$.

Como Milena correu 6 km em $53\frac{1}{3}$ min, que é aproximadamente igual a 53,3 min, então ela correu, em média, 1 km em 8,9 min, pois $53{,}3 : 6 \simeq 8{,}9$.

Portanto, Milena foi a mais rápida nesse treino.

5. Sendo x o total de estudantes desse grupo de universitários, temos:
$x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{5}x + \frac{3}{8}x - 9 \Rightarrow x\left(\frac{-9}{40}\right) = -9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 40$; há 40 estudantes ao todo.

6. O perímetro da primeira figura é dado por:
$p = 9 + 4 + \sqrt{97} \simeq 13 + 9{,}8 = 22{,}8$
O perímetro da segunda figura é dado por:
$p = 5 + 3 + \sqrt{34} \simeq 8 + 5{,}8 = 13{,}8$

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 47)

1. $x = 30 + \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = 30 \Rightarrow x = 60$; 60 m.

2. Se 3 gatos pegam 3 ratos em 3 min, então cada gato pega 1 rato em 3 min. Em 100 minutos, cada gato pode pegar um terço de 100 ratos. Logo, seriam necessários 3 gatos.

3. Com essa velocidade, o trem percorre 1 km em 1 min. Para ir do início ao fim do túnel e para travessar o túnel e sair totalmente dele, o trem percorre 2 km ao todo. Logo, ele leva 2 min.

MATEMÁTICA E ENVELHECIMENTO DA POPULAÇÃO (P. 48)

Conectando ideias

1. Espera-se que os estudantes compreendam que a modificação do formato da pirâmide etária brasileira ao longo dos anos indica, entre outros fatores, o envelhecimento avançado da população. Isso pode impactar a distribuição de renda do país, já que haverá um número maior de pessoas mais velhas que dependem da aposentadoria como única fonte de renda e um número menor de pessoas mais jovens que possibilitem a continuação da contribuição para a previdência.

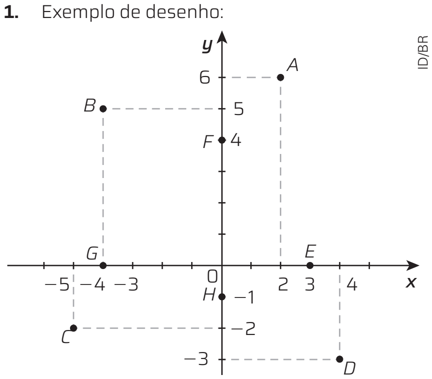
2. a) Para a elaboração do gráfico, os estudantes devem representar em cada setor circular os intervalos das faixas de idade, indicando as porcentagens de cada uma. Os gráficos podem ser feitos manualmente, com auxílio de transferidor e régua, ou utilizando alguma planilha eletrônica ou programa de texto. Ressalte a importância de indicar o título do gráfico e a fonte de pesquisa.
b) Resposta pessoal.
! Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 3 RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS: FUNÇÕES

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 54)

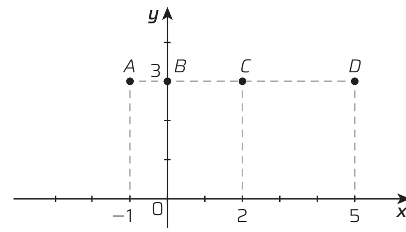
1. Exemplo de desenho:



ID/BR

a) O ponto A.
b) O ponto C.
c) 5
d) −4
e) Os pontos E e G.
f) Os pontos F e H.
g) Os pontos C, D e H.
h) Os pontos B, C e G.

2. Exemplo de desenho:

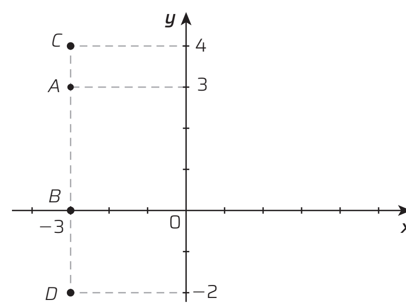


ID/BR

a) Pontos que têm ordenadas iguais são colineares.
b) As ordenadas são iguais.

3. $A(8, 6)$; $B(0, 8)$; $C(-8, 4)$; $D(-6, 0)$; $E(-8, -4)$; $F(0, -6)$; $G(6, -8)$; $H(4, 0)$.

4. Exemplo de desenho:



ID/BR

a) Pontos que têm abscissas iguais são colineares.
b) As abscissas são iguais.

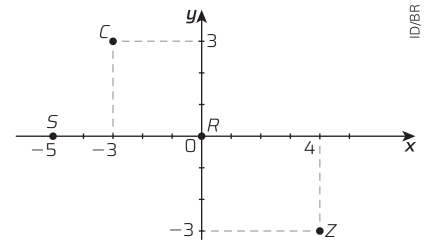
5. Não, porque o ponto de coordenadas (5, 3) está a 5 unidades do eixo vertical para a direita e 3 unidades do eixo horizontal para cima. Já o ponto (3, 5) está a 3 unidades do eixo vertical para a direita e 5 unidades do eixo horizontal para cima.

6. Os valores aproximados das coordenadas desses pontos são $A(0{,}41;\ 0{,}86)$, $B(-0{,}27;\ 0{,}24)$, $C(-1{,}14;\ -0{,}59)$ e $D(0{,}73;\ -0{,}14)$.
Portanto, o ponto A pertence ao 1º quadrante, B ao 2º quadrante, C ao 3º quadrante e D ao 4º quadrante.

7. a) $(2m - 3, n + 4) = (6, 5)$
$2m - 3 = 6 \Rightarrow m = \frac{9}{2}$
$n + 4 = 5 \Rightarrow n = 1$
Portanto, $m = \frac{9}{2}$ e $n = 1$.
b) $(m - n, m + n) = (-3, 2)$
$\begin{cases} m - n = -3 \quad \text{(I)} \\ m + n = 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$
Adicionando as equações (I) e (II), temos:
$2m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$
Substituindo m por $-\frac{1}{2}$ em (II), obtemos:
$m + n = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} + n = 2 \Rightarrow n = \frac{5}{2}$
Portanto, $m = -\frac{1}{2}$ e $n = \frac{5}{2}$.

8. a) Seguindo as instruções de Marisa, Sílvio parou um quarteirão à esquerda da padaria, que é o ponto de referência mais perto.
b) Respostas pessoais. Exemplo de resposta:
Saia da rodoviária na saída B, vire à direita e caminhe três quarteirões. Depois, vire à esquerda e siga por mais dois quarteirões; o cinema estará à sua direita.
Saia da rodoviária na saída A, vire à direita e caminhe quatro quarteirões. Depois, vire à direita e caminhe três quarteirões; o zoológico estará à sua esquerda.
Saia da rodoviária na saída A, vire à esquerda e siga por mais cinco quarteirões. O supermercado estará à sua esquerda.

c) Exemplo de desenho:



ID/BR

Legenda: R: rodoviária Z: zoológico C: cinema S: supermercado

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 60)

9. a) Não é função, porque alguns meses estão associados a mais de um nome. Fevereiro, por exemplo, apresenta três nomes: Pedro, Marta e Edna.
b) Não é função, porque a cada número natural correspondem dois valores (dois números reais). Ao número 1, por exemplo, correspondem dois números: 0 e 2.
c) Não é função, porque o inteiro 0 não está relacionado a valor em $\mathbb{R}$.
d) Não é função, porque podem existir pessoas de idades diferentes e que usem sapatos com mesmo número.

10.
- $x = 0$ é racional, então: $f(0) = 0 + 1 = 1$
- $x = 2$ é racional, então: $f(2) = 2 + 1 = 3$
- $x = 0{,}666...$ é racional, pois $0{,}666... = \frac{2}{3}$, então: $f(0{,}666...) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$
- $x = \sqrt{3}$ é irracional, então: $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$
- $x = 1 - \sqrt{2}$ é irracional, então:
$f(1 - \sqrt{2}) = 2(1 - \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$

11. Como $f(x) = y = 2x$, podemos afirmar que x pode assumir qualquer valor do domínio, ou seja: $D(f) = A = \{-3, -1, 1, 3\}$
- Para $x = -3$: $y = 2x = 2 \cdot (-3) = -6$
- Para $x = -1$: $y = 2x = 2 \cdot (-1) = -2$
- Para $x = 1$: $y = 2x = 2 \cdot 1 = 2$
- Para $x = 3$: $y = 2x = 2 \cdot 3 = 6$

Portanto, $Im(f) = \{-6, -2, 2, 6\}$.

12. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:
Função → relação
Domínio → valores de partida
Imagem → valores de chegada

13. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Quantidade de litros de leite comprados e o preço a pagar por eles.

14. a) $y = f(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$
$y = f(-2{,}1) = 2 \cdot (-2{,}1) = -4{,}2$
$y = f(1{,}2) = 2 \cdot 1{,}2 = 2{,}4$
$y = f(\pi) = 2 \cdot \pi = 2\pi$
$y = f(1 + \sqrt{2}) = 2 \cdot (1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$
b) Para $y = 100$, temos: $2x = 100 \Rightarrow x = 50$

15. a) A cada valor de n, percebemos que $f(n)$ corresponde ao sucessor de n. Assim, $f(n) = n + 1$.
b) A cada valor de n, percebemos que $f(n)$ corresponde ao valor de n acrescido de 3. Assim, $f(n) = n + 3$.
c) A cada valor de n, percebemos que $f(n)$ corresponde ao quadrado do valor de n. Assim, $f(n) = n^2$.

16. Não é função, pois a uma mesma velocidade correspondem vários tempos.

17. a) O domínio de f é composto dos valores que x pode assumir, ou seja:
$D(f) = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

b) O conjunto imagem dessa função é composto dos valores que y assume quando submetemos cada valor de x do domínio à função f, ou seja:

- para $x = 4$, temos: $y = \frac{336}{4} = 84$
- para $x = 5$, temos: $y = \frac{336}{5} = 67{,}2$
- para $x = 6$, temos: $y = \frac{336}{6} = 56$
- para $x = 7$, temos: $y = \frac{336}{7} = 48$
- para $x = 8$, temos: $y = \frac{336}{8} = 42$

Portanto, $\text{Im}(f) = \{84; 67{,}2; 56; 48; 42\}$.

c) A lei é $y = \frac{336}{x}$, com $x \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

18. A tabela apresentada corresponde a uma função porque a cada pessoa corresponde um, e apenas um, mês de nascimento.

19. a) $x^2 = -64 \rightarrow$ não existe $x \in \mathbb{R}$

Logo, não existe $x \in D(f)$ tal que $f(x) = -64$.

b) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Logo, se $f(x) = 0$, então $x = 0$.

20. $C = \dfrac{2\,500 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 30}{1\,000} = 125$

Alternativa **c**.

21. A largura do vão $V(T)$, em milímetro, depende linearmente da temperatura T, em graus Celsius, conforme a função $V(T) = a + bT$, em que a e b são parâmetros. Logo:

$$\begin{cases} 12{,}5 = a + 28b \\ 8{,}5 = a + 40b \end{cases}$$

Usando o método da adição, multiplicamos a segunda equação por -1 e somamos a equação resultante à primeira equação, para obter o valor do parâmetro b.

$12{,}5 - 8{,}5 = a - a + 28b - 40b \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 = -12b \Rightarrow b = -\frac{1}{3}$

Substituindo o valor de b em uma das equações, temos:

$12{,}5 = a + 28 \cdot -\frac{1}{3} \Rightarrow a = 12{,}5 + \frac{28}{3}$

$V(T) = 12{,}5 + \frac{28}{3} - \frac{1}{3}T \Rightarrow$

$\Rightarrow V(T) = -\frac{1}{3}(T - 28) + 12{,}5$

Alternativa **c**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 66)

22. a) De acordo com o gráfico, podemos traçar as projeções e perceber que $f(5) = 7$.

b) De acordo com o gráfico, podemos verificar que, quando $y = f(x) = 5$, temos $x = 3$.

c) O gráfico considera valores de x maiores ou iguais a -2 e menores ou iguais a 5. Portanto, $D(f) = [-2, 5]$.

d) Para os valores de x do domínio de f, temos y maiores ou iguais a 0 e menores ou iguais a 7. Portanto, $\text{Im}(f) = [0, 7]$.

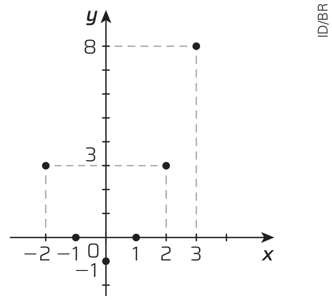
23. a) Luiz calculou o quadrado de cada número que Marcelo falou e, depois, subtraiu uma unidade dele.

b) Sim, pois os números falados por Luiz dependem dos números falado por Marcelo, de modo que a cada número falado por Marcelo se associa um, e somente um, número falado por Luiz.

c) Como os números y ditos por Luiz é o quadrado dos números x ditos por Marcelo menos uma unidade, podemos escrever $y = x^2 - 1$.

d) O domínio pode ser o conjunto formado pelos números que Marcelo falou, ou seja, $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. A imagem pode ser os números que Luiz falou, ou seja, $\text{Im}(f) = \{-1, 0, 3, 8\}$.

e) Exemplo de esboço do gráfico:



24. a) O gráfico apresenta a projeção da produção de leite no Brasil, em milhões de litros, de 2023 a 2033.

b) De acordo com a projeção apresentada, a produção de leite em 2029 atingirá 37 958 milhões de litros, enquanto a projeção para 2030 atingirá 38 952 milhões de litros de leite. Logo, a marca de 38 000 será alcançada durante o ano de 2029.

c) Em cerca de 6 336 milhões de litros, pois: 40 493 − 37 166 = 6 336

d) Resposta pessoal.

25. a) Não é uma função de A em B, pois existe $x \in A$ que possui mais de uma imagem.

b) Não é uma função de A em B, porque existe $x \in A$ que não tem valor correspondente em B.

c) É uma função de A em B, porque a todo elemento de A corresponde um único elemento de B.

d) É uma função de A em B, porque a todo elemento de A corresponde um único elemento de B, mesmo que dois elementos do domínio tenham uma mesma imagem.

26. a) Observando o gráfico, percebemos que:

- o ponto de menor abscissa tem $x = -4$ e o de maior abscissa tem $x = 6$. Assim, $D(f) = [-4, 6]$.
- o ponto de maior ordenada é o que tem $y = 4$ e o de menor ordenada tem $y = -2$. Assim, $\text{Im}(f) = [-2, 4]$.

b) Os valores das abscissas desses pontos são 1, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$ e 4. Os valores das ordenadas são -1, $-\frac{3}{4}$, 0, $\frac{5}{4}$ e 3. Assim:

$D(f) = \left\{1, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4\right\}$ e

$\text{Im}(f) = \left\{-1, -\frac{3}{4}, 0, \frac{5}{4}, 3\right\}$.

27. a)

Litro	0	0,5	1	1,5	2	4	10	25	40
Quilômetro rodado	0	5	10	15	20	40	100	250	400

b) A quantidade de quilômetros rodados aumenta à medida que aumentamos a quantidade de combustível consumido.

c) Sim, pois:

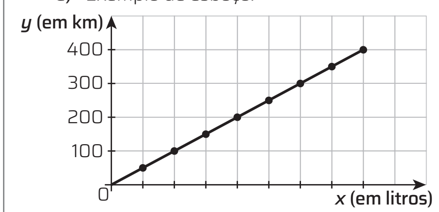
I. a quantidade de quilômetros rodados depende de quantos litros de combustível que há no tanque;

II. a cada número relativo à quantidade de litros de combustível está associado um único número relativo à quantidade de quilômetros rodados.

d) Observando o quadro que relaciona a quantidade de litros de combustível consumidos e a quantidade de quilômetros rodados, temos:

$D(f) = [0, 40]$ e $\text{Im}(f) = [0, 400]$

e) Exemplo de esboço:



f) $y = 10x$

g) O conjunto A é o domínio da função, ou seja, $A = [0, 40]$.

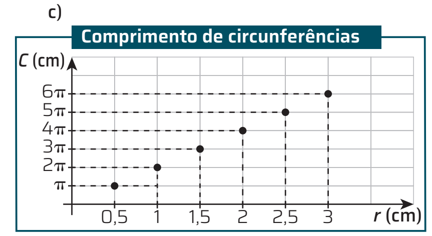
28. a) Considerando que o comprimento C de uma circunferência é dado em função da medida r do seu raio, de acordo com a relação $C(r) = 2\pi \cdot r$, podemos calcular:

- para $r = 0{,}5$ cm: $C(0{,}5) = \pi$
- para $r = 2$ cm: $C(2) = 4\pi$
- para $r = 1$ cm: $C(1) = 2\pi$
- para $r = 2{,}5$ cm: $C(2{,}5) = 5\pi$
- para $r = 1{,}5$ cm: $C(1{,}5) = 3\pi$
- para $r = 3$ cm: $C(3) = 6\pi$

b)

***r* (cm)**	0,5	1	1,5	2	2,5	3
***C* (cm)**	π	2π	3π	4π	5π	6π

c)



d) $C(r) = 2\pi r$

e) Sim, pois a cada medida de raio está associado uma, e apenas uma, medida de comprimento.

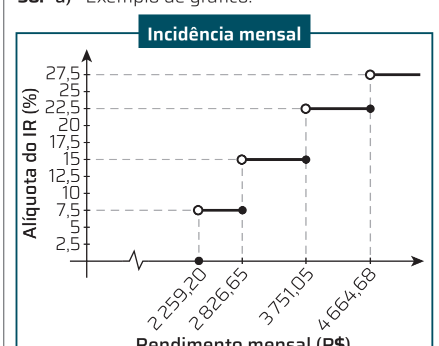
f) $D(f) = \{0{,}5; 1; 1{,}5; 2; 2{,}5; 3\}$

$\text{Im}(f) = \{\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi\}$

29. Sendo C a concentração de álcool no sangue e q a quantidade de álcool ingerida, de forma que 90% da ingestão permanece concentrada no sangue, a expressão algébrica que expressa C em função de q é: $C = 0{,}9q$.

Alternativa **a**.

30. a) Exemplo de gráfico:



Fonte de pesquisa: Brasil. Receita Federal do Brasil. *Tributação de 2024*. Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/2024. Acesso em: 20 jun. 2024.

b) Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Percebemos que para salários até R$ 2 259,20 não é necessário o recolhimento de valores referentes ao Imposto sobre a Renda e para valores a partir desse valor, quanto maior o salário, maior será o imposto a ser pago.

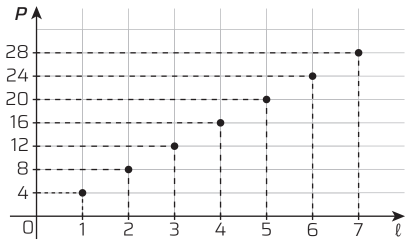
31. a)

ℓ	1	2	3	4	5	6	7
P	4	8	12	16	20	24	28

b) Sim, pois a cada medida de lado ℓ temos um, e apenas um, valor de perímetro P associado.

c) Exemplo de gráfico:

ID/BR



32. São crescentes as funções das seguintes atividades: 22, 23 (em parte do gráfico), 24, 25 (item **a**, em parte do item **c** e em parte do item **d**), 26 (em parte do item **a**, em parte do item **b**), 27, 28, 29, 30 (em algumas partes) e 31.

São decrescentes as funções das seguintes atividades: 23 (em parte do gráfico), 25 (em parte do item **c** e em parte do item **d**), 26 (em partes do item **a**, em parte do item **b**).

33. Nada podemos dizer sobre as situações dos itens **a** e **c**, pois podemos ter uma relação entre as grandezas, mas elas não estão relacionadas proporcionalmente. No item **a**, o time marcou 30 pontos no primeiro quarto do jogo, mas nada podemos dizer sobre os pontos marcados até o final do jogo. No item **c**, a pessoa gastou R$ 10,00 no mercado em 10 minutos, mas nada podemos dizer sobre o gasto dela em 50 minutos.

Portanto, estão corretas as afirmativas dos itens **b** e **d**.

34. Respostas pessoais. Exemplos de respostas:

a) De 2016 a 2022 a quantidade de pessoas que tinham celular para uso pessoal aumentou ou diminuiu? De quanto?

b) Observando o gráfico, o que é possível afirmar sobre a quantidade de usuários de internet no Brasil em 2020? E em 2026?

35. Resposta pessoal.

TECNOLOGIA (P. 69)

1. a) O número é consecutivo ao que está em A2, ou seja, é o resultado da adição de 1 ao número que está em A2. Essa expressão significa que na célula B2 sempre teremos o número consecutivo ao que estiver na célula A2.

b) Nas células B2 a B11 temos os números consecutivos aos que estão nas células A2 a A11, respectivamente.

c) Ao observar a relação entres os valores contidos no intervalo A2 a A11 e no intervalo B2 a B11, temos neste intervalo a imagem dos valores representados naquele. Por exemplo, na célula A4, para o valor no domínio igual a -3, a imagem na célula B4 é igual a -2, isto é, $f(-3) = -2$

Para os demais valores, temos:

$f(-1) = 0$; $f(0) = 1$; $f(0{,}5) = 1{,}5$; $f(2) = 3$; $f(4) = 5$.

d) Exemplo de resposta: As células A2 a A11 e B2 a B11 da planilha.

e) O domínio da função contempla o intervalo de valores do eixo das abscissas utilizado para a construção do gráfico. A imagem da função contempla o intervalo de valores do eixo das ordenadas utilizado para a construção do gráfico. Conforme o gráfico apresentado, temos:

$D(f) = [-4, 4]$ e $Im(f) = [-3, 5]$

2. a) O domínio da função contempla o intervalo de valores do eixo das abscissas utilizado para a construção do gráfico. A imagem da função contempla o intervalo de valores do eixo das ordenadas utilizado para a construção do gráfico. Conforme o gráfico apresentado, temos:

$D(f) = [-3, 3]$ e $Im(f) = [-12, 18]$.

b) Pelo gráfico temos, por exemplo, que: $f(-3) = -12$

Calculando a imagem de -3 em cada uma das expressões, temos:

I. $f(-3) = 3 \cdot (-3) + 2 = -7$

II. $f(-3) = -3 \cdot (-3) + 3 = 12$

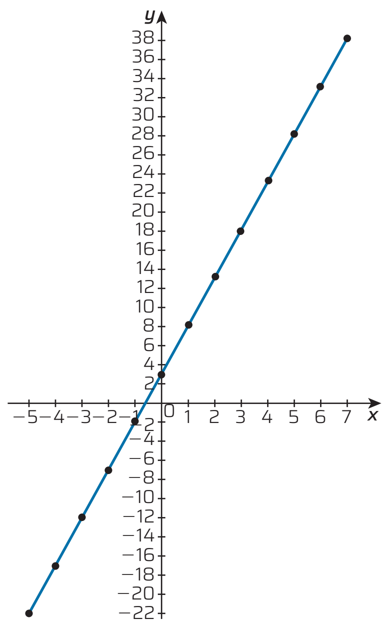
III. $f(-3) = 5 \cdot (-3) + 3 = -12$

IV. $f(-3) = -5 \cdot (-3) + 2 = 17$

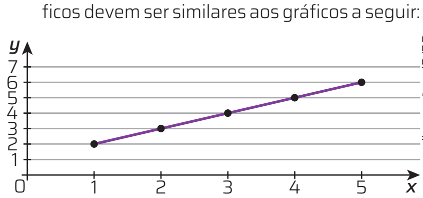
Logo, a função III é a única que corresponde ao ponto indicado no gráfico.

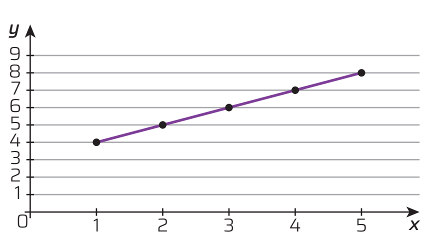
c) Para a função $f(x) = 5x + 3$, cujo domínio compreende o intervalo entre -5 e 7, temos o seguinte gráfico:

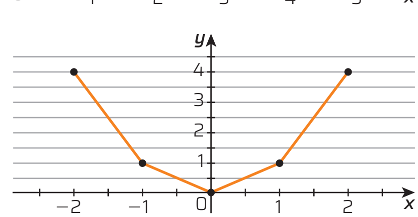
ID/BR



3. Conforme os quadros da atividade 15, os gráficos devem ser similares aos gráficos a seguir:







Ilustrações: ID/BR

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 76)

36. a) $3x - 12 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\} = \mathbb{R} - \{4\}$.

b) $3x - 15 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 5$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\} = [5; +\infty[$.

c) $-2x + 6 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 3$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\} =]-\infty; 3]$.

d) $\sqrt[3]{2x + 5}$ é possível para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $D(f) = \mathbb{R}$.

e) $2x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{5}{2}$

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{5}{2}\right\} = \left]-\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$.

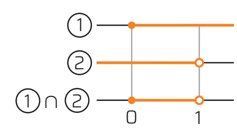
f) $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$ e $x \neq 2$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\} = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$.

g) $\dfrac{2x}{1 - x} \geqslant 0$ e $1 - x \neq 0$

$2x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0$ ①

$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$ ②



ID/BR

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\} = [0; 1[$

h) $2x + 5 \geqslant 0$ e $x - 2 \neq 0$.

$2x + 5 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\dfrac{5}{2}$ ①

$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ ②

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\dfrac{5}{2} \text{ e } x \neq 2\right\}$.

37. a) Usando a função $R(x, y) = (-x, y)$, temos:

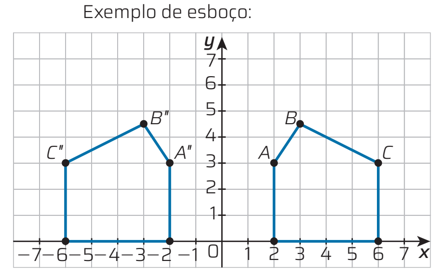
$R(2, 3) = (-2, 3)$; logo, $A''(-2, 3)$

$R(3; 4{,}5) = (-3; 4{,}5)$; logo, $B''(-3; 4{,}5)$

$R(6, 3) = (-6, 3)$; logo, $C''(-6, 3)$

Exemplo de esboço:

ID/BR



b) São simétricas em relação ao eixo Oy.

c) Usando a função $V(x, y) = (-x, -y)$, temos:

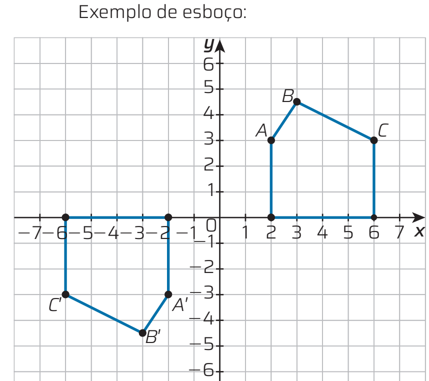
$V(2, 3) = (-2, -3)$; logo, $A''(-2, -3)$.

$V(3; 4{,}5) = (-3; -4{,}5)$; logo, $B''(-3, -4{,}5)$.

$V(6, 3) = (-6, -3)$; logo, $C''(-6, -3)$.

Exemplo de esboço:

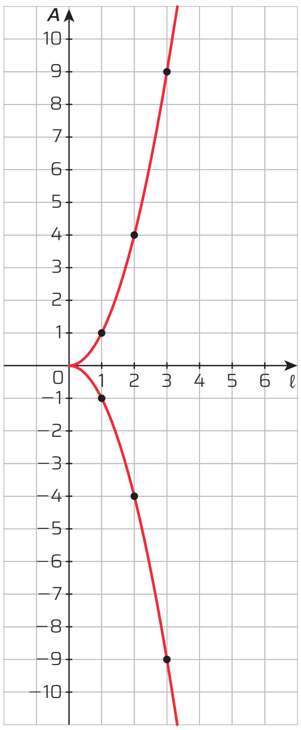
ID/BR



Agora, a linha poligonal formada e a inicial são simétricas em relação à origem do sistema cartesiano.

d) Sim, pois mantêm forma e dimensões.

38. Considerando o gráfico correspondente à função $A(x) = x^2$ para $x > 0$ e traçando a imagem desse gráfico pela função $S(x, y) = (x, -y)$, temos:



a) O eixo de simetria é o eixo Ox.

b) Não corresponde a uma função, porque há mais de uma imagem para um mesmo valor de x do domínio.

39. a) $f + g = -2x + x^2$

Como não há restrição para os valores de x, então: $D = \mathbb{R}$

b) $g + h = x^2 + \frac{1}{x}$

Como devemos ter $x \neq 0$ para que a função indicada exista, então: $D = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

c) $\frac{f}{h} = \frac{-2x}{\frac{1}{x}} = -2x^2$

Como devemos ter $x \neq 0$ para que a função indicada exista, então: $D = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

d) $\frac{h}{g} = \frac{\frac{1}{x}}{x^2} = \frac{1}{x^3}$

Como devemos ter $x \neq 0$ para que a função indicada exista, então: $D = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

e) $f \cdot g = -2x \cdot x^2 = -3x^3$

Como não há restrição para os valores de x, então: $D = \mathbb{R}$

f) $f \cdot h = -2x \cdot \frac{1}{x} = -2$

Como devemos ter $x \neq 0$ para que a função indicada exista, então: $D = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

40. Para que a equação exista, temos as seguintes restrições:

- $x \neq 0$, pois $\frac{f(x) - g(x)}{x} = 0$ e o denominador não pode ser zero;
- $x \neq -3 \pm \sqrt{19}$, pois $g(x) = \frac{30}{x^2 + 6x - 10}$ e, para que essa função exista, é necessário que $x^2 + 6x - 10 \neq 0$.

Dadas essas condições de existência, temos:

$$\frac{f(x) - g(x)}{x} = 0$$

$$f(x) = g(x)$$

$$x - 3 = \frac{30}{x^2 + 6x - 10}$$

$$(x - 3) \cdot (x^2 + 6x - 10) = 30$$

$$x = 0 \text{ ou } x^2 + 3x - 28 = 0$$

A solução $x = 0$ está descartada conforme a condição de existência estabelecida anteriormente. Para $x^2 + 3x - 28 = 0$, temos:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot -28}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 11}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-3 - 11}{2} = -7$$

Portanto, o conjunto solução da equação apresentada é: $S = \{-7, 4\}$

TECNOLOGIA (P. 76)

1. Exemplo de respostas:

a) $15 \cdot 2{,}5 \in [40, 50]$
$15 \cdot 3 \in [40, 50]$

b) $7 \cdot 0{,}5 \in [1, 4]$
$7 \cdot 0{,}2 \in [1, 4]$

c) $8 \cdot 0{,}3 \in [2, 3]$
$8 \cdot 0{,}25 \in [2, 3]$

d) $15 : \frac{15}{68} \in [68, 70]$
$15 : \frac{5}{23} \in [68, 70]$

2. $y < 1\,000\,000 : 84\,697$
$1\,000\,000 : 84\,697 \simeq 11{,}81$
Então, o maior inteiro que satisfaz a desigualdade é o 11.

3. Podemos usar a tecla x^y.

a) 2 x^y 4 =

b) 2 x^y 1 0 =

c) 3 x^y 8 =

d) 4 x^y 5 =

e) 5 x^y 9 =

Ilustrações: ID/BR

4. Indicará um erro, porque a raiz quadrada de um número negativo não existe em $\mathbb{R}$.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 77)

1.
a) 0
b) $-x + 5$
c) $2 + x$
d) $3x + 1$
e) $3x + 3$
f) $x - 2y$
g) $5x - y$
h) $x + 3y + 14$

2. Mentalmente, os estudantes devem concluir:
a) $t = 95$
b) $y = -35$
c) $z = 35$
d) $n = -35$
e) $a = -95$
f) $x = 95$
g) $b = 95$
h) $m = 115$
i) $y = 115$
j) $r = -45$

3. a) $12{,}7$ km $= 12\,700$ m
$18{,}75$ km $= 18\,750$ m
2 km $= 2\,000$ m

b) $3\,758$ m $= 3{,}758$ km
$12\,000$ m $= 12$ km
750 m $= 0{,}75$ km

c) $3{,}48$ m $= 348$ cm
$24{,}1$ m $= 2\,410$ cm
$1{,}5$ m $= 150$ cm

d) 258 cm $= 2{,}58$ m
175 cm $= 1{,}75$ m
15 cm $= 0{,}15$ m

4. a) 10 h = 10 · 60 min = 600 min
1 h 30 min = 60 min + 30 min = 90 min
7 h 20 min = 7 · 60 min + 20 min = = 420 min + 20 min = 440 min
1 h 15 min = 60 min + 15 min = 75 min
3 dias = 3 · 24 h = 3 · 24 · 60 min = = 4 320 min

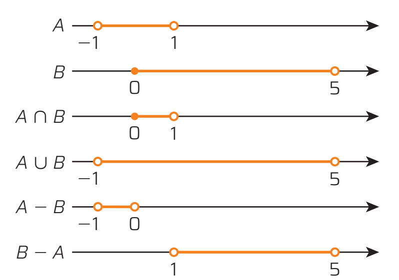
b) 3 min = 3 · 60 s = 180 s
60 min = 60 · 60 s = 3 600 s
6 min 3 s = 6 · 60 s + 3 s = 360 s + 3 s = = 363 s
1,5 min = 1,5 · 60 s = 90 s
1 h = 60 min = 60 · 60 s = 3 600 s
4 min 30 s = 4 · 60 s + 30 s = = 240 s + 30 s = 270 s

5.
a) $2x$
b) $3x - 1$
c) x, com $x \neq 0$
d) $x + 2$, com $x \neq 0$
e) x
f) $\frac{3x - 1}{2}$
g) $-2x + 4$, com $x \neq 0$
h) $\frac{x}{2}$
i) $\frac{3x - 1}{4}$
j) $-\frac{x}{2}$, com $x \neq 0$
k) $\frac{x + 2}{2}$, com $x \neq 0$
l) $x^2 + 3$, com $x \neq 0$

6.
a) $2a$
b) a^2
c) $a - 2$
d) $\frac{a}{2}$
e) $2a + 2$
f) $2a - 2$
g) $a^2 + 2^2$
h) $(a + 2)^2$
i) $a^2 - 2^2$
j) $(a - 2)^2$
k) $2(2 + a)$

PARA RECORDAR (P. 77)

1.



a) $A \cap B = [0, 1[$

b) $A \cup B =]-1, 5[$

c) $A - B =]-1, 0[$

d) $B - A =]1, 5[$

2. a) O erro está na aplicação da propriedade distributiva realizada na 2ª linha e no cálculo do termo em x² na 4ª linha da resolução. Deveria ser:

$$x(x + 4) + x(x + 2) = 2x^2 + 10$$
$$x^2 + 4x + x^2 + 2x = 2x^2 + 10$$
$$2x^2 + 6x = 2x^2 + 10$$
$$6x = 10$$
$$x = \frac{5}{3}$$

b) O erro está na simplificação realizada na 2ª linha da resolução. Deveria ser:

$$\frac{x}{2} + 6 = x - 9$$
$$x + 12 = 2x - 18$$
$$x - 2x = -18 - 12$$
$$-x = -30$$
$$x = 30$$

c) O erro está na simplificação realizada na 2ª linha da resolução. Deveria ser:

$$x + \frac{1}{3} = 2x$$
$$3x + 1 = 6x$$
$$3x - 6x = -1$$
$$-3x = -1$$
$$x = \frac{1}{3}$$

3. a) O menor valor de $a + b$ é obtido pela adição do menor valor de b ao menor valor de a: $a + b = 200 + 600 = 800$.

b) O maior valor de $b - a$ é obtido pela subtração do menor valor de a do maior valor de b: $b - a = 1\,200 - 200 = 1\,000$.

c) O maior valor de $a - b$ é obtido pela subtração do menor valor de b do maior valor de a: $a - b = 400 - 600 = -200$.

d) O menor valor de $a \cdot b$ é obtido pela multiplicação do menor valor de a pelo menor valor de b: $a \cdot b = 200 \cdot 600 = 120\,000$.

e) O maior valor de $a \cdot b$ é obtido pela multiplicação do maior valor de a pelo maior valor de b: $a \cdot b = 400 \cdot 1\,200 = 480\,000$.

f) O menor valor de $b \cdot a$ é obtido pela multiplicação do menor valor de b pelo menor valor de a: $b \cdot a = 600 \cdot 200 = 120\,000$.

g) O maior valor de $\frac{b}{a}$ é obtido pela divisão do maior valor de b pelo menor valor de a: $\frac{b}{a} = 1\,200 : 200 = 6$.

h) O menor valor de $\frac{b}{a}$ é obtido pela divisão do menor valor de b pelo maior valor de a: $\frac{b}{a} = 600 : 400 = 1{,}5$.

4. a) Sendo m o valor de uma mercadoria e V o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor de m, temos:

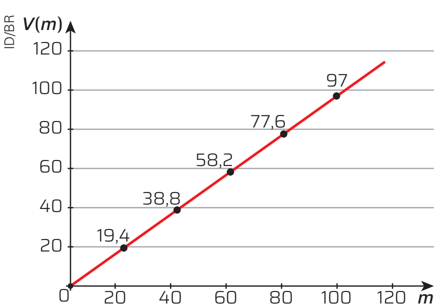
$V(m) = m - 3\% \cdot m$

$V(m) = m \cdot (1 - 0{,}03)$

$V(m) = 0{,}97m$

b) O menor valor para m é 0. Para o maior valor, não há um limite. Assim:

m	0	20	40	60	80	100
***V*(*m*)**	0	19,4	38,8	58,2	77,6	97



Logo, $D(V) = [0, +\infty[$ e $Im(V) = [0, +\infty[$.

5. a) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \quad \text{(I)} \\ 6x - 2y = 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$

Adicionando (I) e (II):

$2x + 6x = 6 + 2$

$x = 1$

Substituindo x por 1 em (I):

$2 \cdot 1 + 2y = 6$

$y = 2$

Portanto: $S = \{(1, 2)\}$

b) $\begin{cases} -y = -5 - 2x \quad \text{(I)} \\ x = 5 - 2y \quad \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I):

$-y = -5 - 2(5 - 2y)$

$-y = -5 - 10 + 4y$

$y = 3$

Substituindo o valor de y por 3 em (II):

$x = 5 - 2 \cdot 3$

$x = -1$

Portanto: $S = \{(-1, 3)\}$

6. a) Verdadeira.

b) Falsa, pois, ao aumentar o perímetro, a área aumenta, mas não na mesma proporção. Por exemplo, se dois triângulos semelhantes têm como razão entre seus perímetros o valor 3, então a razão entre as áreas é igual a 9 (3^2). Logo, se triplicamos o perímetro de um triângulo, sua área aumenta 9 vezes.

c) Verdadeira.

d) Falsa, pois o tempo é inversamente proporcional ao número de operários.

e) Falsa, pois o tempo é inversamente proporcional à velocidade.

f) Falsa, pois, embora as pessoas mais novas sejam propensas a dormir mais horas, essa relação não é proporcional. Uma criança de 10 anos não dorme metade do tempo de uma criança de 5 anos.

g) Falsa, pois embora haja uma tendência de o número do sapato de pessoas mais altas ser maior que o de pessoas mais baixas, essa relação não é proporcional. Uma pessoa de 2 metros de altura não calça, necessariamente, o dobro do que uma pessoa de 1 metro de altura.

7. a) Exemplo de resposta: $\overleftrightarrow{LO}$, $\overleftrightarrow{NO}$, $\overleftrightarrow{MN}$

b) Exemplo de resposta: $\overleftrightarrow{QP}$, $\overleftrightarrow{RS}$, $\overleftrightarrow{OP}$

8. A escala 1 : 50 significa que cada 1 metro na maquete equivale a 50 metros no objeto real. Como o prédio mede 32 metros, podemos escrever a seguinte proporção, em que x é a altura do prédio na maquete:

$$\frac{1}{50} = \frac{x}{32} \Rightarrow x = 0{,}64\ m$$

Alternativa **c**.

9. Como x é um número de 4 dígitos distintos, pares, que formam o maior valor possível, então $x = 8\,642$. Já y é um número de 4 dígitos distintos, ímpares, que formam o menor valor possível, então $y = 1\,357$. Logo, $x - y = 8\,642 - 1\,357 = 7\,285$.

Alternativa **a**.

10. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo LQP, temos:

$x^2 = 24^2 + 32^2 = 576 + 1\,024 = 1\,600$

$x = \sqrt{1\,600} = 40$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo LMQ, temos:

$41^2 = y^2 + 40^2 \Rightarrow y = \sqrt{81} = 9$

Logo, $x + y = 40 + 9 = 49$

11. Dois paralelogramos são semelhantes se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são diretamente proporcionais. Sabendo que os lados opostos do paralelogramo são congruentes, e que a razão de semelhança é $\frac{1{,}5}{0{,}5} = 3$, então, podemos calcular o lado homólogo ao lado de medida 3:

$3 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 1$

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 79)

1. $1 + 4 + 16 = 21$

Portanto, há 21 caixas no total.

2. a) Opção A:

$(1 + 2 + 3 + ... + 12) \cdot 150 = 78 \cdot 150 = 11\,700$

Com a opção A, o total recebido com mesadas seria R$ 11 700,00.

Opção B:

$(1 + 3 + 9 + ... + 3^{11}) = 265\,720$

Com a opção B, o total recebido com mesadas seria R$ 265 720,00.

Portanto, a opção B é mais vantajosa para Patrícia.

b) Opção A: $10 \cdot 150 = 1\,500 \rightarrow$ R$ 1 500,00

Opção B: $3^9 = 19\,683 \rightarrow$ R$ 19 683,00

Portanto, para receber uma quantia maior em outubro, a opção continua sendo a B.

3. Vamos representar as quatro pessoas pelos tempos que utilizam para atravessar a ponte sozinhas: 1, 2, 5 e 10.

Travessia	1ª	2ª	3ª	Tempo total
Atravessam	1 e 2	5 e 10	1 e 2	
Fica do outro lado	2	5 e 10	todos	
Volta com a lanterna	1	2	-----	
Tempo (em min)	3	12	2	17

Outro modo de resolver:

Travessia	1ª	2ª	3ª	Tempo total
Atravessam	1 e 2	5 e 10	1 e 2	
Fica do outro lado	1	5 e 10	todos	
Volta com a lanterna	2	1	-----	
Tempo (em min)	4	11	2	17

4. Sejam Carlos, Lulu e Andreia representados pelas letras c, l e a. Podemos montar as seguintes equações:

$\begin{cases} c + l = 87 \\ c + a = 123 \\ a + l = 66 \end{cases}$

Somando as três equações, termo a termo, temos: $2c + 2a + 2l = 276 \Rightarrow c + a + l = 138$.

Utilizando as equações iniciais, temos:

$c + a + l = 138 \Rightarrow 123 + l = 138 \Rightarrow l = 15$

$c + a + l = 138 \Rightarrow c + 66 = 138 \Rightarrow c = 72$

$c + a + l = 138 \Rightarrow 72 + a + 15 = 138 \Rightarrow a = 51$

Logo, como Carlos pesa 72 kg e, por isso, é mais pesado que Andreia e Lulu juntos, 66 kg.

Alternativa **e**.

MATEMÁTICA E SOCIEDADE (P. 80)

Conectando ideias

1. A resposta à atividade depende do ano em que ela estiver sendo aplicada.

2. Resposta pessoal.

3. a) Os estudantes podem mencionar que, para um mesmo ano, os dois gráficos apresentam índices diferentes.

b) Não. No primeiro gráfico, o valor mínimo é 0,518 e, no segundo, 0,60.

c) Sim, é possível obter essa informação observando o aumento em relação ao ano anterior.

4. Resposta de acordo com a pesquisa realizada pelos estudantes.

CAPÍTULO 4 FUNÇÃO AFIM

TECNOLOGIA (P. 90)

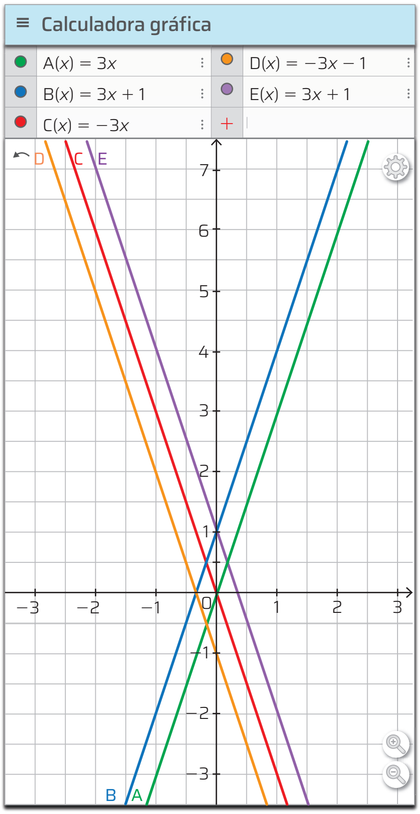
1. As três funções apresentadas foram construídas sem restrição de valores para o valor de x. Assim, temos que o domínio de todas elas é: $D(f) = D(g) = D(h) = \mathbb{R}$

Já no caso da imagem, as funções f e g podem assumir qualquer imagem a partir de um valor correspondente do domínio. Nesse caso, o conjunto imagem é: $Im(f) = Im(g) = \mathbb{R}$

Para a função h, qualquer que seja o valor do domínio, a imagem correspondente sempre será o valor -1. Logo, para essa função, temos: $\text{Im}(h) = \{-1\}$

2. a) Seguindo os passos descritos, tem-se uma construção similar à imagem a seguir:

ID/BR



b) Resposta pessoal. Algumas sugestões de respostas:

- Funções $A(x)$ e $C(x)$: As duas funções interceptam os eixos Ox e Oy no ponto $(0, 0)$. As funções têm coeficientes angulares opostos, o coeficiente de $A(x)$ é 3, e o de $C(x)$ é -3. Os gráficos são simétricos em relação ao eixo Oy.
- Funções $A(x)$ e $B(x)$: As funções possuem o mesmo coeficiente angular, mas coeficientes lineares diferentes. O gráfico de $A(x)$ corta os eixos na origem $(0, 0)$, enquanto em $B(x)$ a reta foi deslocada uma unidade para cima, em relação ao eixo vertical, interceptando os eixos em $(0, 1)$ e $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.
- Funções $A(x)$ e $D(x)$: As funções possuem coeficientes angulares opostos e coeficientes lineares diferentes. A função $D(x)$ pode ser obtida descolocando-se a função $A(x)$ uma unidade para baixo e fazendo a reflexão em relação ao eixo vertical do gráfico de $A(x)$.
- Funções $B(x)$ e $E(x)$: As funções possuem coeficientes lineares iguais, $b = 1$. Já os coeficientes angulares são diferentes. Os gráficos são simétricos em relação a uma reta paralela ao eixo Oy e que passa pelo ponto $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

3. a) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes utilizem as relações observadas na atividade anterior para solucionar o problema proposto.

O primeiro passo para resolver essa atividade é perceber que a letra N é formada por retas, crescentes ou decrescentes. Além disso, os estudantes já sabem que o gráfico de uma função afim corresponde a uma reta.

A seguir, apresentamos uma sugestão para a construção da letra N.

Podemos pensar na letra N como a "junção" do gráfico de três funções, sendo duas delas crescentes e uma decrescente. Além disso, os estudantes devem perceber que as extremidades dessa letra são segmentos paralelos, ou seja, as funções que representam esses segmentos apresentam o mesmo coeficiente angular a, mas o coeficiente b varia. Como exemplo, vamos utilizar a função $A(x) = 3x$ para compor a primeira extremidade da letra N.

Vamos determinar o "tamanho" da letra. Para isso, precisamos indicar o ponto no qual ela começa e o ponto no qual ela termina. Nesse caso, adotaremos o ponto $(0, 0)$ como início e o ponto $(1, 3)$ como fim. Lembre-se: outros pontos podem ser escolhidos.

Como queremos que a primeira parte da letra comece no ponto $(0, 0)$ e vá até o ponto $(1, 3)$, x está no intervalo $[0, 1]$. Então, digite uma vírgula logo após a função e escreva o intervalo para os valores de x: $0 < x < 1$.

Analisando a parte central da letra, percebemos que ela é formada por um segmento decrescente; então, a função que determina essa parte precisa ter o coeficiente a negativo. Como na função anterior tínhamos $a = 3$, agora teremos $a = -3$. Isso porque desejamos a mesma inclinação.

Além disso, sabemos que essa função precisa passar pelo ponto $(1, 3)$. Assim, sendo ela uma função do tipo $B(x) = -3x + b$, temos: $-3 + b = 3 \Rightarrow b = 6$.

Portanto, a função que representa a segunda parte da letra N é $B(x) = -3x + 6$.

Precisamos agora determinar um intervalo para x. Percebemos no gráfico que a função precisa estar no intervalo $[1, 2]$.

A outra extremidade da letra N é formada por um segmento paralelo ao primeiro, ou seja, o coeficiente a deve apresentar a mesma inclinação, ou seja, $a = 3$.

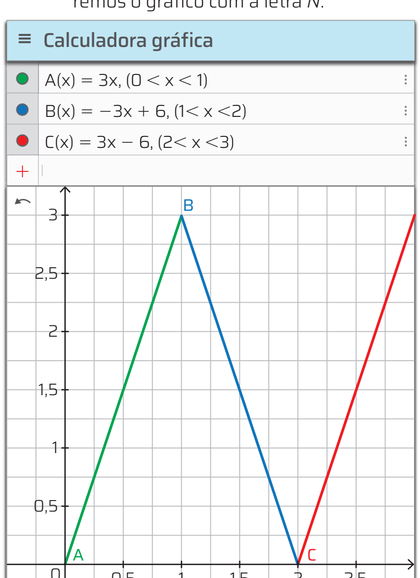
Além disso, sabemos que essa função tem que passar pelo ponto $(2, 0)$; então, ela será do tipo $C(x) = 3x + b$. Assim:

$0 = 3 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -6$

Portanto, a função que representa a terceira extremidade da letra N é $C(x) = 3x - 6$.

Analisando o gráfico, x deve estar entre $[2, 3]$. Assim, limitaremos o intervalo e teremos o gráfico com a letra N.

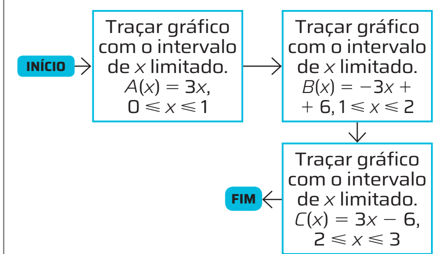
ID/BR



b) Respostas pessoais. Considerando o exemplo apresentado no item anterior, foram utilizadas 3 funções, sendo elas $A(x) = 3x$, $B(x) = -3x + 6$ e $C(x) = 3x - 6$.

c) Respostas pessoais. Uma possível sugestão de algoritmo e fluxograma para a construção da letra N seria:

- Algoritmo
  1. Traçar o gráfico de $A(x) = 3x$.
  2. Marcar os pontos $(0, 0)$ e $(1, 3)$.
  3. Limitar o intervalo de x para $[0, 1]$.
  4. Traçar o gráfico de $B(x) = -3x + 6$.
  5. Limitar o intervalo de x para $[1, 2]$.
  6. Traçar o gráfico de $C(x) = 3x - 6$.
  7. Limitar o intervalo de x para $[2, 3]$.
- Fluxograma



PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 93)

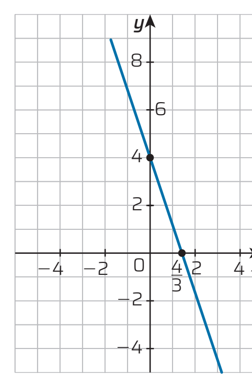
1. a) $y = -3x + 4$

O gráfico corta o eixo Oy quando $x = 0$, ou seja, no ponto $(0, 4)$.

Para saber o ponto em que o gráfico corta o eixo Ox, é preciso encontrar a raiz ou zero da função.

$-3x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

Então, o gráfico corta o eixo Ox em $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$.



ID/BR

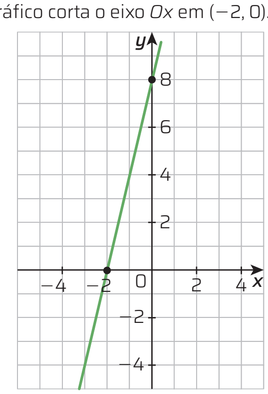
b) $y = 4x + 8$

O gráfico corta o eixo Oy em $(0, 8)$.

Determinando a raiz ou zero da função:

$4x + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$

O gráfico corta o eixo Ox em $(-2, 0)$.



ID/BR

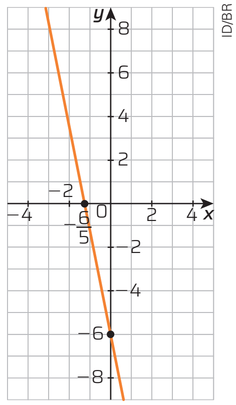
c) $y = -5x - 6$

O gráfico corta o eixo Oy em $(0, -6)$.

Determinando a raiz ou zero da função:

$-5x - 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{5}$

O gráfico corta o eixo Ox em $\left(-\frac{6}{5}, 0\right)$.



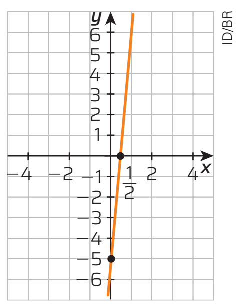
d) $y = 10x - 5$

O gráfico corta o eixo Oy em $(0, -5)$.

Determinando a raiz ou zero da função:

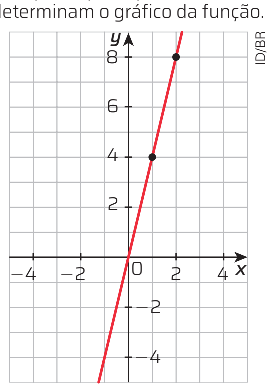
$10x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

O gráfico corta o eixo Ox em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



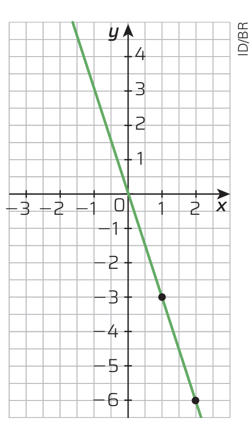
e) $y = 4x$

Neste caso o gráfico corta o eixo Oy no ponto $(0, 0)$ e passa pelos pontos $(1, 4)$ e $(2, 8)$ que determinam o gráfico da função.



f) $y = -3x$

Neste caso, o gráfico corta o eixo Oy no ponto (0, 0) e passa pelos pontos (1, -3) e (2, -6).



2. **a)** $3x + 15 = 0$

$x = -5$

b) $-4x + 12 = 0$

$x = 3$

c) $5x - 7 = 0$

$x = \frac{7}{5}$

d) $-5x = 0$

$x = 0$

3. O desenhista calculou errado a raiz da função.

Determinando a raiz ou zero da função, temos:

$-2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

Portanto, o gráfico deveria cortar o eixo Ox no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

4. $f(x) = g(x)$

$-2x + 4 = x + 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

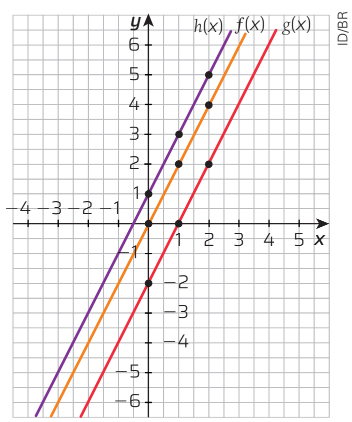
Agora, vamos verificar $f(x)$ ou $g(x)$ para $x = \frac{2}{3}$.

Para $f(x)$, temos:

$y = -x + 2 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

Portanto, o ponto comum aos gráficos é $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

5. **a)**



b) Deslocando o gráfico de $f(x)$ em duas unidades para baixo na direção do eixo Oy.

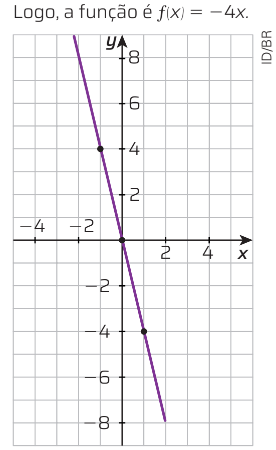
c) Deslocando o gráfico de $f(x)$ em uma unidade para cima na direção do eixo Oy.

6. **a)** Uma função linear é do tipo $f(x) = ax$. Como o gráfico passa por $(2, -8)$, temos:

$y = ax \Rightarrow -8 = a \cdot 2 \Rightarrow a = -4$

Logo, a função é $f(x) = -4x$.

b)



c) $f(x) = -4x \Rightarrow f(f(3)) = -4x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(-4 \cdot 3) = -4x \Rightarrow f(-12) = 48$

7. **a)** Uma função do 1º grau é do tipo:

$f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

Como os pontos A e B pertencem ao gráfico da função, as suas coordenadas satisfazem a equação $y = ax + b$.

Substituindo os valores de x e y na equação pelos pontos $A(0, 3)$ e $B(-1, 2)$, obtemos:

$\begin{cases} 3 = a \cdot 0 + b \\ 2 = a \cdot (-1) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = b \\ 2 = -a + b \end{cases}$

Substituindo $b = 3$ na segunda equação:

$2 = -a + b$

$2 = -a + 3$

$1 = a$

Portanto, $f(x) = x + 3$.

b) $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Os pontos $K(1, 6)$ e $L(-2, -3)$ pertencem ao gráfico da função.

Substituindo os valores de x e y na equação $y = ax + b$ pelos pontos K e L, obtemos o sistema:

$\begin{cases} 6 = a \cdot 1 + b \\ -3 = a \cdot (-2) + b \end{cases}$

Subtraindo uma equação da outra, temos:

$6 - (-3) = a - (-2a) + b - b$

$a = 3$

Substituindo $a = 3$ na primeira equação, temos:

$6 = 3 + b \Rightarrow 3 = b$

Portanto, $f(x) = 3x + 3$.

c) $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Os pontos $C(3, 7)$ e $D(0, 0)$ pertencem ao gráfico da função.

Substituindo os valores de x e y na equação $y = ax + b$ pelos pontos C e D, obtemos o sistema:

$\begin{cases} 7 = a \cdot 3 + b \\ 0 = a \cdot 0 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 3a + b \\ 0 = b \end{cases}$

Substituindo $b = 0$ na primeira equação, temos:

$7 = 3a + 0 \Rightarrow a = \frac{7}{3}$

Portanto, $f(x) = \frac{7}{3}x$.

d) $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Os pontos $M(-1, 3)$ e $N(0, 0)$ pertencem ao gráfico da função.

Substituindo os valores de x e y na equação $y = ax + b$ pelos pontos M e N, obtemos o sistema:

$\begin{cases} 3 = a \cdot (-1) + b \\ 0 = a \cdot 0 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = -a + b \\ 0 = b \end{cases}$

Substituindo $b = 0$ na primeira equação, temos:

$3 = -a \Rightarrow a = -3$

Portanto, $f(x) = -3x$.

8. Resposta pessoal. Um possível erro é trocar o valor das respectivas coordenadas (x, y) na resolução da equação.

Exemplo considerando o item **a**: $A(0, 3)$ e $B(-1, 2)$

$\begin{cases} 3 = a \cdot 0 + b \\ -1 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = b \\ -1 = 2a + b \end{cases}$

$-1 = 2a + 3 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$

Nesse caso, $f(x) = -2x + 3$.

9. **a)** O gráfico passa pelos pontos $(0, 4)$ e $(3, 0)$ e é do tipo $f(x) = ax + b$. Então:

$\begin{cases} 4 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot 3 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = b \\ 0 = 3a + b \end{cases}$

$3a = -b \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$

Assim, $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$.

b) O gráfico passa pelos pontos $\left(-1, \frac{9}{4}\right)$ e $(-4, 0)$ e é do tipo $f(x) = ax + b$. Então:

$\begin{cases} a \cdot (-1) + b = \frac{9}{4} \\ a \cdot (-4) + b = 0 \end{cases}$

Subtraindo uma equação da outra, temos:

$-a - (-4a) + b - b = \frac{9}{4} - 0$

$3a = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

Substituindo $a = \frac{3}{4}$ na primeira equação:

$-\frac{3}{4} + b = \frac{9}{4} \Rightarrow b = 3$

Portanto, $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$.

c) O gráfico passa pelos pontos $\left(2, -\frac{10}{3}\right)$ e $\left(-5, \frac{4}{3}\right)$ e é do tipo $f(x) = ax + b$. Então:

$$\begin{cases} a \cdot 2 + b = -\frac{10}{3} \\ a \cdot (-5) + b = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Subtraindo uma equação da outra, temos:

$2a - (-5a) + b - b = -\frac{10}{3} - \frac{4}{3}$

$7a = -\frac{14}{3} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$

Substituindo $a = -\frac{2}{3}$ na primeira equação, temos:

$2a + b = -\frac{10}{3}$

$2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + b = -\frac{10}{3}$

$b = -2$

Portanto, $f(x) = -\frac{2}{3}x - 2$.

10. a) Para $f(x)$ ser linear, precisamos ter $f(x) = ax$. Como $f(x) = (m - 3)x^2 + 5x + n + 4$, é necessário que: $m - 3 = 0$ e $n + 4 = 0$.

Portanto, $m = 3$ e $n = -4$.

b) Para $g(x)$ ser linear, precisamos ter $g(x) = ax$. Para isso, os coeficientes de x^3 e de x^2 em $g(x) = mx^3 + (n - 5)x^2 + 2x + 2m + n - 5$, devem ser nulos: $m = 0$ e $n - 5 = 0$.

Portanto, $m = 0$ e $n = 5$.

11. Para a função ser afim, $f(x)$ tem que ser do tipo $f(x) = ax + b$.

a) $f(x) = (x - 6)^2 - (x - 3)(x - 12)$

$f(x) = x^2 - 12x + 36 - (x^2 - 12x - 3x + 36)$

$f(x) = 3x$

Assim, podemos afirmar que f é uma função afim.

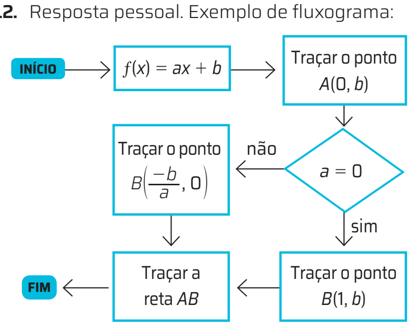
b) $f(x) = \frac{2x^3 + 2x}{3x^2 + 3} \Rightarrow f(x) = \frac{2x(x^2 + 1)}{3(x^2 + 1)}$

Como $x^2 + 1 \neq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos:

$f(x) = \frac{2}{3}x$

Então, podemos afirmar que f é uma função afim.

12. Resposta pessoal. Exemplo de fluxograma:



13. O lucro mensal pode ser definido como a diferença entre a receita obtida por produto vendido menos os custos de produção: $L(x) = R(x) - C(x)$

O custo é fixo, no valor de R$ 20 000,00. Para cada par de calçados produzido, a fábrica fatura R$ 28,00. Logo, a função de lucro pode ser escrita como: $L(x) = 28x - 20\,000$

Alternativa **b**.

14. a)
- comprimento: 1 cm
  perímetro: $2 \cdot 10 + 2 \cdot 1 = 22$ cm
- comprimento: 1,5 cm
  perímetro: $2 \cdot 10 + 2 \cdot 1{,}5 = 23$ cm
- comprimento: 2 cm
  perímetro: $2 \cdot 10 + 2 \cdot 2 = 24$ cm
- comprimento: 3 cm
  perímetro: $2 \cdot 10 + 2 \cdot 3 = 26$ cm
- comprimento: 4 cm
  perímetro: $2 \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 28$ cm

b)

Comprimento (cm)	Perímetro (cm)
1	22
1,5	23
2	24
3	26
4	28

c) $P(x) = 2 \cdot 10 + 2x \Rightarrow P(x) = 20 + 2x$

15. O segmento apresentado é do tipo $y = ax + b$.

São colocados inicialmente 50 litros de gasolina; então, para $x = 0$, temos $y = 50$.

Observando o gráfico, é possível perceber que todo o combustível é consumido em 500 km. Então, para $x = 500$, temos $y = 0$.

Assim, o gráfico passa pelos pontos (0, 50) e (500, 0). Com isso, podemos montar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 50 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot 500 + b \end{cases}$$

$50 = b$

$0 = 500a + b$

Substituindo $b = 50$, temos: $a = -\frac{1}{10}$

Então, a expressão será:

$y = \frac{-x}{10} + 50$

Alternativa **b**.

16. a) $V(x) = 200 + 30x$

b) Para $V(x) = 800$, temos:

$800 = 200 + 30x \Rightarrow x = 20$

O artesão produziu 20 peças.

17. a) Sendo y a altura e x a medida do comprimento do úmero, a função que determina essa situação é do tipo $y = ax + b$.

Sabemos que para $x = 40$, $y = 190$ e que para $x = 30$, $y = 160$, então: $y = a \cdot x + b$

$$\begin{cases} 40a + b = 190 \\ 30a + b = 160 \end{cases}$$

Subtraindo uma equação da outra, obtemos:

$10a = 30 \Rightarrow a = 3$

Substituindo $a = 3$ na primeira equação, obtemos:

$40 \cdot (3) + b = 190 \Rightarrow b = 70$

Portanto, $y = 3x + 70$.

b) Se $x = 32$, temos:

$y = 3 \cdot (32) + 70 \Rightarrow y = 166$

Isto é, 166 cm, que equivalem a 1,66 m.

18. a) A área do triângulo A_Δ pode ser obtida com a expressão $A_\Delta = \frac{b \cdot h}{2}$, em que b é a medida da base e h é a medida da altura relativa a essa base.

Vamos chamar de O o ponto (0, 0). Queremos encontrar a função que representa a área do triângulo ABC.

Então, podemos escrever a área em função da altura x, da seguinte forma:

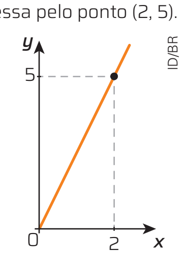
$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta OBC} - A_{\Delta OAC}$

$A_{\Delta ABC} = \frac{(x - 0) \cdot (10 - 0)}{2} - \frac{(x - 0) \cdot (5 - 0)}{2}$

$A_{\Delta ABC} = \frac{5x}{2}$

Portanto, a função correspondente é $f(x) = \frac{5}{2}x$.

b) O gráfico de f intercepta o eixo Oy no ponto (0, 0) e passa pelo ponto (2, 5).



19. Considere as alturas iniciais das velas A e B, respectivamente, iguais a k e $k - 2$.

- Vela A:

A vela A foi acesa às 15 h; então, quando $t = 0$, temos $y = k$.

Do gráfico, temos que para $t = 5$, $y = 0$. Então:

$$\begin{cases} k = 0 \cdot a + b \\ 0 = 5 \cdot a + b \end{cases}$$

$k = b$

$0 = 5a + b$

$0 = 5a + k$

$a = \frac{-k}{5}$

Assim, a função $y_A = -\frac{k}{5} \cdot t + k$ representa a altura da vela A.

- Vela B:

A vela B foi acesa às 16 h, 1 hora após a vela A; então, quando $t = 1$, $y = k - 2$.

Do gráfico, temos que para $t = 6$, $y = 0$. Então:

$$\begin{cases} k - 2 = 1 \cdot a + b \\ 0 = 6 \cdot a + b \end{cases}$$

$k - 2 = a + b$

$0 = 6a + b$

$b = -6a$

Substituindo $b = -6a$ na primeira equação, temos:

$k - 2 = a + b$

$k - 2 = a + (-6a)$

$a = \frac{2 - k}{5}$

Temos que $b = -6a$, então:

$b = -6a$

$b = -6 \cdot \left(\frac{2 - k}{5}\right)$

$b = \left(\frac{-12 + 6k}{5}\right)$

Assim, a função

$y_B = \left(\frac{2 - k}{5}\right) \cdot t + \left(\frac{-12 + 6k}{5}\right)$ representa a altura da vela B.

No gráfico, nota-se que as alturas são iguais em $t = 2$; então, nesse ponto, $y_A = y_B$.

$-\frac{k}{5} \cdot (2) + k = \left(\frac{2 - k}{5}\right) \cdot (2) + \left(\frac{-12 + 6k}{5}\right)$

$k = 8$ e $k - 2 = 8 - 2 = 6$

Portanto, antes de serem acesas, a vela A tinha 8 cm e a vela B tinha 6 cm.

20. a) Todas as funções apresentam o mesmo coeficiente angular; assim, para associar as funções aos gráficos, é preciso analisar o coeficiente b.

a: $y = x + 1{,}5$ | c: $y = x$
b: $y = x + 1$ | d: $y = x - 1$

b) Respostas pessoais.

Alguns exemplos:

a: (0; 1,5) e (−1,5; 0)
b: (0, 1) e (−1, 0)
c: (0, 0) e (1, 1)
d: (0, −1) e (1, 0)

c) a: (0; 1,5)
b: (0, 1)
c: (0, 0)
d: (0, 1)

d) a: (−1,5; 0) | c: (0, 0)
b: (−1, 0) | d: (1, 0)

e) As retas são paralelas.

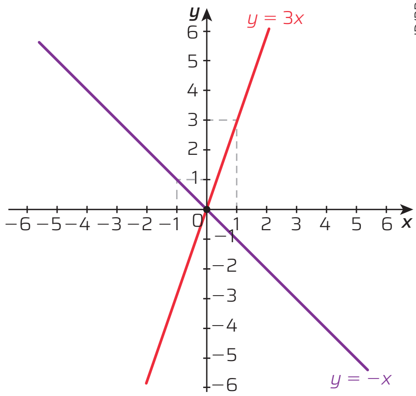
21. a) Como os coeficientes são diferentes $(-4 \neq 4)$, as retas são concorrentes.

b) Como os coeficientes são iguais $(3 = 3)$, as retas são paralelas e não concorrentes.

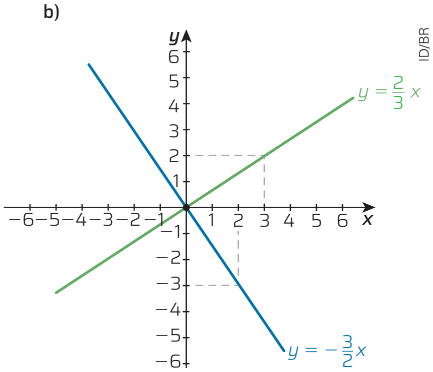
c) Como os coeficientes são iguais $\left(\frac{1}{2} = 0{,}5\right)$, as retas são paralelas e não concorrentes.

d) Como os coeficientes são iguais $(2 = 2)$, as retas são paralelas e não concorrentes.

22. a)

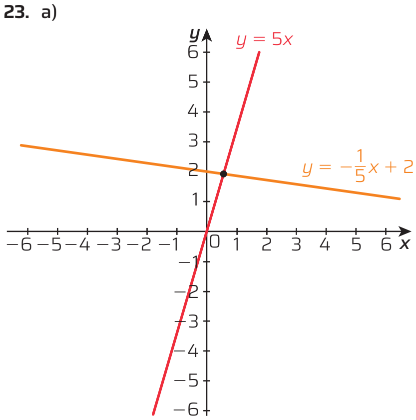


b)



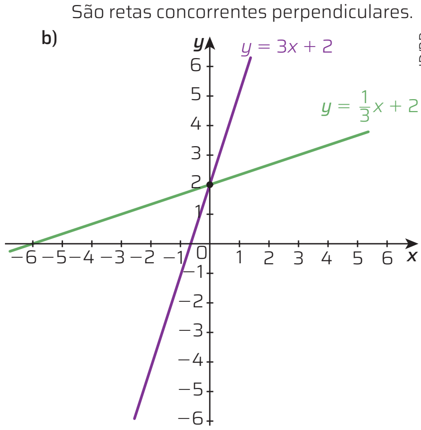
As retas do item **a** e do item **b** são concorrentes. Entretanto, as do item **b** são concorrentes perpendiculares.

23. a)



São retas concorrentes perpendiculares.

b)



São retas concorrentes.

24. Júlia está correta. Resposta pessoal.

25. a) Para que as retas que representam duas funções sejam paralelas, seus coeficientes angulares precisam ser iguais.

b) Para que as retas que representam duas funções sejam concorrentes, seus coeficientes angulares precisam ser diferentes.

c) Para que as retas que representam duas funções sejam perpendiculares, os coeficientes angulares devem ser diferentes e o coeficiente de uma reta deve ser o oposto do inverso da outra.

26. Para encontrar a equação que representa o segmento CD, é necessário encontrar o valor do coeficiente angular, isto é, a medida da inclinação do segmento CD. Como esse segmento é paralelo ao segmento AB, calcula-se o coeficiente angular de AB, pois é igual ao de CD.

Sendo α o ângulo de inclinação do segmento AB, temos:

$$\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{2}{3}$$

A função suporte ao segmento CD, então, pode ser representada do seguinte modo:

$f(x) = \frac{2}{3}x + B$

Como o par ordenado (4, 2) pertence ao segmento CD, temos:

$f(4) = 2 \Rightarrow 2 = \frac{2}{3} \cdot 4 + B \Rightarrow B = -\frac{2}{3}$

Assim, a função suporte ao segmento CD é:

$f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

Logo,

$f(7) - f(4{,}5) = \frac{2}{3} \cdot 7 - \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$

Alternativa **c**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 98)

27. a) Crescente, pois:

$\sqrt{3} - 1 \simeq 1{,}73 - 1 = 0{,}73 > 0$

b) Decrescente, pois:

$1 - \sqrt{2} \simeq 1 - 1{,}4 = -0{,}4 < 0$

c) Decrescente, pois:

$\pi - 4 \simeq 3{,}14 - 4 = -0{,}86 < 0$

d) Crescente, pois:

$2 - \sqrt{3} \simeq 2 - 1{,}71 = 0{,}29 > 0$

28. a) $f(x) = (2m - 3)\,x$

$2m - 3 > 0 \Rightarrow m > \frac{3}{2}$

b) $f(x) = (3m + 6)\,x$

$3m + 6 > 0 \Rightarrow m > -2$

c) $f(x) = (-2m + 6)\,x$

$-2m + 6 > 0 \Rightarrow m < 3$

d) $f(x) = (-m + 4)\,x$

$-m + 4 > 0 \Rightarrow m < 4$

29. a) $f(x) = (2m - 3)\,x$

$2m - 3 < 0 \Rightarrow m < \frac{3}{2}$

b) $f(x) = (3m + 6)\,x$

$3m + 6 < 0 \Rightarrow m < -2$

c) $f(x) = (-2m + 6)\,x$

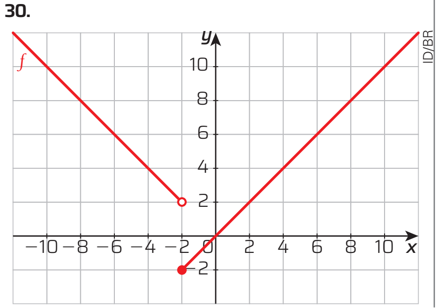
$-2m + 6 < 0 \Rightarrow m > 3$

d) $f(x) = (-m + 4)\,x$

$-m + 4 < 0 \Rightarrow m > 4$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 99)

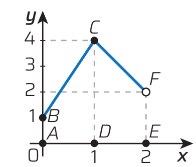
30.



31. a) Sabe-se que:

- para $0 \leqslant x \leqslant 1$, temos $f(x) = 3x + 1$;
- para $1 < x < 2$, temos $f(x) = -2x + 6$.

Logo, o gráfico para $0 \leqslant x < 2$, é dado por:



b) Do item anterior, tem-se que a área S da região delimitada pelo gráfico e o eixo Ox, no intervalo [0, 2], é dada pela soma das áreas dos trapézios $ABCD$ e $CDEF$. Logo:

$S = \frac{(1 + 4) \cdot 1}{2} + \frac{(4 + 2) \cdot 1}{2} = \frac{11}{2}$

c) Do item anterior, tem-se que a área sob o gráfico, em [0, 2], é $\frac{11}{2}$; logo, do enunciado, tem-se que a área sob o gráfico, em [2, 5], é: $3 \cdot \frac{11}{2} = \frac{33}{2}$

Sendo $y = f(4)$, nota-se que essa área é dada pela soma da área de um trapézio de bases $2 + y$ e altura 2 com a área de um triângulo de base 1 e altura y. Logo:

$\frac{(2 + y) \cdot 2}{2} + \frac{y \cdot 1}{2} = \frac{33}{2} \Rightarrow y = \frac{29}{3}$

Portanto, $f(4) = \frac{29}{3}$

32. De 0 a 50 páginas, o custo por página é de R$ 0,20.

$0{,}2x$, para $0 \leqslant x \leqslant 50$

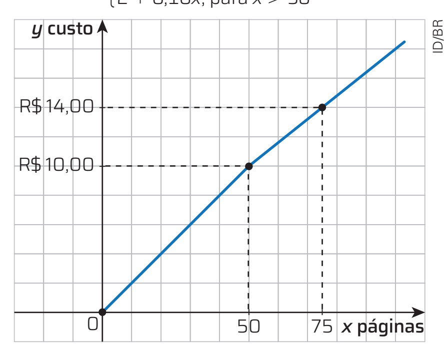
Cada página a mais que 50, adicionam-se R$ 0,16 por página aos R$ 10,00.

$10 + 0{,}16 \cdot (x - 50)$, para $x > 50$

$2 + 0{,}16x$, para $x > 50$

Pode-se escrever a função descrita de forma algébrica da seguinte forma:

$$C(x) = \begin{cases} 0{,}2x, \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ 2 + 0{,}16x, \text{ para } x > 50 \end{cases}$$



33. Durante os primeiros 200 metros, o valor cobrado é fixo, de R$ 4,50. No gráfico, o intervalo de [0, 200] compreende uma função constante. Dos demais 400 metros são cobrados R$ 0,02 por metro adicional. Logo:

R$ 0,02 · 400 = R$ 8,00.

Somando os dois trechos percorridos, o total cobrado é R$ 12,50.

Alternativa **d**.

34. Para os valores de $x < 5$, a função é crescente, com coeficiente linear igual a 4, com inclinação igual a:

$$\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{6 - 4}{5 - 0} = \frac{2}{5}$$

Logo, para esse trecho a função é:

$f(x) = \frac{2}{5}x + 4$

Para os valores $x \geqslant 5$, a função é decrescente, com inclinação igual a:

$$\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = -\frac{5 - 1}{10 - 5} = -\frac{4}{5}$$

Logo, para esse trecho a função é:

$f(x) = -\frac{4}{5}x + b$

Sabendo que o par ordenado (5,6) pertence ao trecho $x \geqslant 5$, tem-se:

$f(5) = -\frac{4}{5} \cdot 5 + b = 6 \Rightarrow b = 9$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x + 4, \text{ para } x < 5 \\ -\frac{4}{5}x + 9, \text{ para } x \geqslant 5 \end{cases}$$

Alternativa **a**.

35. O carro estar parado indica velocidade igual a zero que, conforme o gráfico, são os pontos ou intervalos localizados no eixo das abscissas. No valor $t = 0$, o carro sai de casa e no $t = 15$, o carro chega ao trabalho. Em dois outros momentos, conforme o gráfico, a velocidade é zero, ou seja, durante o trajeto, o carro para duas vezes em semáforos existentes. Alternativa **a**.

36. **a)** Falso, pois no intervalo $x < 1$ o valor da inclinação da reta é 1, então crescente.

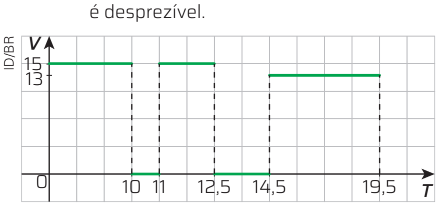
b) Falso, pois no intervalo $x > 1$ o valor da inclinação da reta é -2, então decrescente.

c) Verdadeiro, pois a função é constante no intervalo $-1 < x < 0$, que está contido no intervalo $-1 < x < 1$.

d) Falso, pois no intervalo $-1 < x < 1$, que está contido no intervalo $x > -1$ a função é constante.

e) Falso, pois no intervalo de $0 < x < 1$ a função é constante.

37. **a)** Supõe-se que o tempo para atingir velocidade constante e para parar a bicicleta é desprezível.



b) Na ida, o percurso se iniciou às 7 h, e o ciclista pedalou até às 10 h. Adicionando 1 h de parada, têm-se 11 h. Mais 1,5 h para chegar ao destino, portanto, ele chega às 12 h 30 min. Logo, a ida durou 5,5 horas.

Na volta, ele pedalou das 14 h 30 min até às 19 h 30 min, totalizando 5 horas.

c) Na ida, descontando a parada de 1 hora, o ciclista pedalou 4,5 horas. Como a velocidade V considerada constante nesse ínterim foi 15 km/h, sendo D a distância percorrida e t o tempo, temos:

$V = \frac{D}{t} \Rightarrow 15 = \frac{D}{4{,}5} \Rightarrow D = 67{,}5$ km

Na volta, a mesma distância foi percorrida em 5 horas. Logo, a velocidade percorrida no trecho de volta, considerando que foi constante durante todo o percurso, foi:

$V = \frac{67{,}5}{5} = 13{,}5$ km/h

38. **a)** Resposta pessoal. A função apresenta comportamento proporcional nos intervalos [0, 3] e [7, 8], pois, à medida que os valores de x aumentam, os valores das imagens correspondentes também aumentam.

No intervalo]3, 7[a função é constante e, por isso, não apresenta comportamento proporcional.

b) Verifique se o texto elaborado pelos estudantes contém uma situação que possa, de fato, ser representada pelo gráfico dado.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 104)

39. **a)**

Número de triângulos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
Número de palitos	3	5	7	9	11	13	15	17	19	$2n + 1$

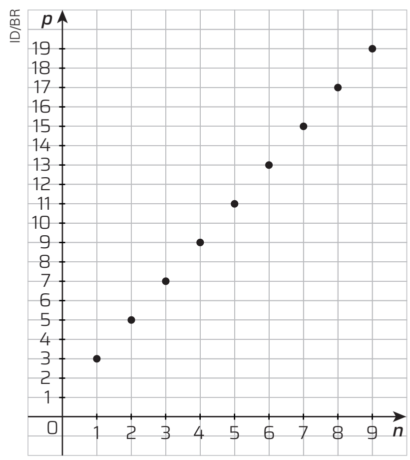
b) Seja n o número de triângulos que se quer formar e p o número de palitos, temos $p(n) = 2n + 1$.

c) É uma função afim, ou seja, do 1º grau.

d) $D(p) = \mathbb{N}^*$

$Im(p) = \{p \in \mathbb{N} \mid p = 2n + 1, n \geqslant 1\}$

e)



Não será uma reta, porque o domínio da função é o conjunto dos números naturais positivos, o que não inclui os números entre 1 e 2, por exemplo.

f) $p(n) = 2n + 1$

$p(89) = 2 \cdot 89 + 1$

$p(89) = 179$

Portanto, são necessários 179 palitos.

g) $p(n) = 2n + 1$

$101 = 2n + 1$

$n = 50$

Portanto, serão formados 50 triângulos.

40. **a)**

Número de triângulos	1	2	3	4	5	6	7	n
Perímetro da figura	3	4	5	6	7	8	9	$n + 2$

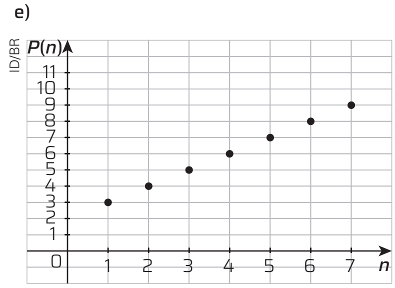
b) Sendo n o número de triângulos e P o perímetro da figura, temos $P(n) = n + 2$.

c) $D(P) = \mathbb{N}^*$

$Im(P) = \{P \in \mathbb{N} \mid P = n + 2, n \geqslant 1\}$

d) A função é crescente, porque, à medida que o número de triângulos aumenta, o perímetro também aumenta.

e)



É formado apenas por pontos isolados, porque o domínio da função é $\mathbb{N}^*$.

41. **a)** $f(x) = 3x - 36$

$3x - 36 = 0$

$3x = 36$

$x = 12$

Logo: $\begin{cases} f(x) < 0, \text{ se } x < 12 \\ f(x) = 0, \text{ se } x = 12 \\ f(x) > 0, \text{ se } x > 12 \end{cases}$

b) $f(x) = -4x + 36$

$-4x + 36 = 0$

$-4x = -36$

$4x = 36$

$x = 9$

Logo: $\begin{cases} f(x) < 0, \text{ se } x > 9 \\ f(x) = 0, \text{ se } x = 9 \\ f(x) > 0, \text{ se } x < 9 \end{cases}$

c) $f(x) = 5x + 35$

$5x + 35 = 0$

$5x = -35$

$x = -7$

Logo: $\begin{cases} f(x) < 0, \text{ se } x < -7 \\ f(x) = 0, \text{ se } x = -7 \\ f(x) > 0, \text{ se } x > -7 \end{cases}$

d) $f(x) = -8x - 4$

$-8x - 4 = 0$

$-8x = 4$

$x = -\frac{4}{8}$

$x = -\frac{1}{2}$

Logo, $\begin{cases} f(x) > 0, \text{ se } x < -\frac{1}{2} \\ f(x) = 0, \text{ se } x = -\frac{1}{2} \\ f(x) < 0, \text{ se } x > -\frac{1}{2} \end{cases}$

e) $f(x) = 6x$

$6x = 0$

$x = 0$

Logo: $\begin{cases} f(x) < 0, \text{ se } x < 0 \\ f(x) = 0, \text{ se } x = 0 \\ f(x) > 0, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

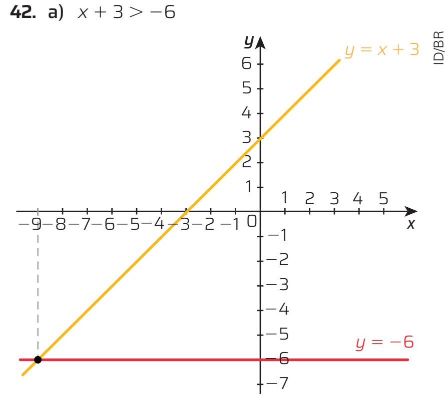
f) $f(x) = -5x$

$-5x = 0$

$x = 0$

Logo: $\begin{cases} f(x) > 0, \text{ se } x < 0 \\ f(x) = 0, \text{ se } x = 0 \\ f(x) < 0, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

42. **a)** $x + 3 > -6$



Para encontrar a intersecção das retas, fazemos:

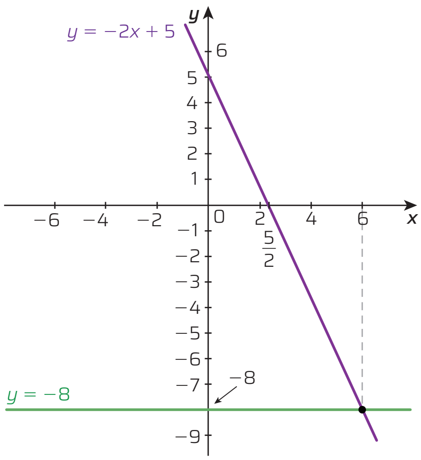
$x + 3 = -6$

$x = -9$

$S =]-9, +\infty[$

b) $-2x+5>-8$

ID/BR



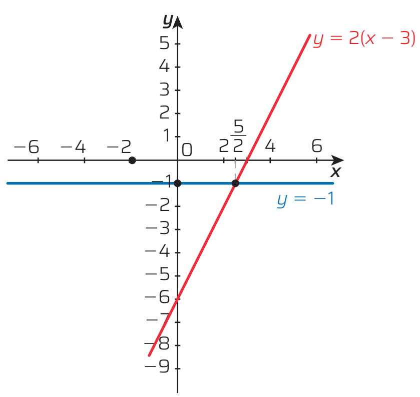
Para encontrar a intersecção das retas, fazemos:

$-2x+5=-8 \Rightarrow x=\frac{13}{2}$

$S=\left]-\infty, \frac{13}{2}\right[$

c) $2(x-3)>-1$

ID/BR



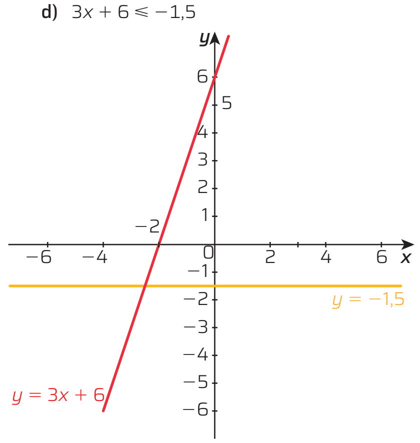
Para encontrar a intersecção das retas, fazemos:

$2(x-3)=-1 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$

$S=\left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$

d) $3x+6 \leqslant -1{,}5$

ID/BR



Para encontrarmos a intersecção das retas, fazemos:

$3x+6=-1{,}5 \Rightarrow x=-2{,}5$

$S=\left]-\infty; -2{,}5\right]$

43. a) $\frac{2(x-3)-5(x+1)}{10} \geqslant \frac{x-4}{10}$

$x \leqslant -\frac{7}{4}$

Logo, $x \leqslant -\frac{7}{4}$.

Portanto, a maior solução real é $-\frac{7}{4}$.

b) Como $-\frac{7}{4}$ é aproximadamente $-1{,}75$, temos que a maior solução par é -2.

c) A maior solução ímpar é -3.

d) O menor inteiro que não é solução é -1.

44. a) Temos que:

$$\begin{array}{ll} x<3+2 & 3<x+2 \\ x<5 & 1<x \end{array}$$

Logo, $1<x<5$.

b) Temos que:

$$\begin{array}{lll} x+6<x+11 & x<x+6+11 & 11<x+x+6 \\ 6<11 & 0<17 & 5<2x \\ & & \frac{5}{2}<x \end{array}$$

Logo, $x>\frac{5}{2}$.

c)

$$\begin{array}{ll} 2x<3+8 & 8<3+2x \\ 2x<11 & 5<2x \\ x<\frac{11}{2} & \frac{5}{2}<x \end{array}$$

Logo, $\frac{5}{2}<x<\frac{11}{2}$.

d)

$$\begin{array}{ll} 8-x<2+x+4 & 2+x<4+8-x \\ -x-x<6-8 & x+x<12-2 \\ -2x<-2 & 2x<10 \\ x>1 & x<5 \end{array}$$

Logo, $1<x<5$.

45. a) $5(x-2)-2(x-1)>4(x+2)$

$5x-10-2x+2>4x+8$

$-x>16$

$x<16$

$S=\{x \in \mathbb{R} \mid x<16\}$ ou $]-\infty, 16[$.

b) $\frac{x-3}{4}-\frac{x+1}{3} \leqslant \frac{x-1}{6}$

$\frac{3(x-3)-4(x+1)}{12} \leqslant \frac{2(x-1)}{12}$

$3x \geqslant -11$

$x \geqslant -\frac{11}{3}$

$S=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{11}{3}\}$ ou $\left[-\frac{11}{3}, +\infty\right[$.

c) $(x-4)^2<(x-3)^2$

$x^2-8x+16<x^2-6x+9$

$x^2-x^2-8x+6x<9-16$

$x>\frac{7}{2}$

$S=\{x \in \mathbb{R} \mid x>\frac{7}{2}\}$ ou $\left]\frac{7}{2}, +\infty\right[$.

d) $2-\frac{x-1}{10} \leqslant 5$

$20-(x-1) \leqslant 50$

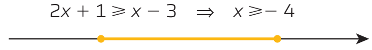
$-x \leqslant 29$

$x \geqslant -29$

$S=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -29\}$ ou $[-29, +\infty[$.

46. a) $3x-2 \leqslant 2x-1 \Rightarrow x \leqslant 1$

$2x+1 \geqslant x-3 \Rightarrow x \geqslant -4$



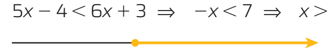
ID/BR

$S=\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 1\}$

b) $\begin{cases} 3(x-1) \geqslant x+1 \\ 5x-4<6x+3 \end{cases}$

$3x-3 \geqslant x+1 \Rightarrow 2x \geqslant 4 \Rightarrow x \geqslant 2$

$5x-4<6x+3 \Rightarrow -x<7 \Rightarrow x>-7$



ID/BR

$S=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

47. a) $6x-10<x+20<5x+40$

$$\begin{array}{ll} 6x-10<x+20 & x+20<5x+40 \\ 6x-x<20+10 & x-5x<40-20 \\ 5x<30 & -4x<20 \\ x<6 & x>-5 \end{array}$$

$S=\{x \in \mathbb{R} \mid -5<x<6\}$

b) $-x+3 \leqslant 2x-1 \leqslant 8x+3$

$$\begin{array}{ll} -x+3 \leqslant 2x-1 & 2x-1 \leqslant 8x+3 \\ -x-2x \leqslant -1-3 & 2x-8x \leqslant 3+1 \\ -3x \leqslant -4 & -6x \leqslant 4 \\ 3x \geqslant 4 & 6x \geqslant -4 \\ x \geqslant \frac{4}{3} & x \geqslant -\frac{2}{3} \end{array}$$

$S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{4}{3}\right\}$

c) $5x-1 \leqslant 2x+2<3x-1$

$$\begin{array}{ll} 5x-1 \leqslant 2x+2 & 2x+2<3x-1 \\ 5x-2x \leqslant 2+1 & 2x-3x<-1-2 \\ 3x \leqslant 3 & -x<-3 \\ x \leqslant 1 & x>3 \end{array}$$

$S=\varnothing$

48. a) $36+3x \leqslant 72$, em que x é o número de minutos falados.

$3x \leqslant 36 \Rightarrow x \leqslant 12 \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 12$

b) $36+\frac{5}{100} \cdot 36+\left(3+\frac{5}{100} \cdot 3\right)x \leqslant 72$

$x \leqslant \frac{3420}{315} \Rightarrow x \leqslant 10$

49. a) $18{,}50+1{,}25x+\frac{16}{100} \cdot (18{,}50+1{,}25x) \leqslant 70$, sendo x o número de minutos.

$1{,}45x \leqslant 48{,}54 \Rightarrow x \leqslant \frac{4854}{145} \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 33$

b) $18{,}50+1{,}25x+\frac{18}{100} \cdot (18{,}50+1{,}25x) \leqslant 70$, sendo x o número de minutos.

$1{,}475x \leqslant 48{,}17 \Rightarrow x \leqslant \frac{48170}{1475} \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 32$

50. Seja x o consumo em minutos e $f(x)$ o valor a ser pago pelo serviço, temos:

- Plano alfa:

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}70x, \text{ para } 0<x<100 \\ 70-0{,}001(x-100)] \cdot x, \text{ para } 100<x<400 \\ 0{,}40x, \text{ para } x>400 \end{cases}$$

- Plano beta:

$$f(x)=\begin{cases} 50, \text{ para } x \leqslant 87 \\ 50+0{,}80(x-87), \text{ para } x>87 \end{cases}$$

Para beta ser mais vantajoso, o valor pago em reais por x minutos deve ser menor em beta do que em alfa.

- Para $x \leqslant 87$:

$50<0{,}70x$

$\frac{50}{0{,}70}<x$

$x>71{,}42$

Então, a partir de 72 minutos o plano beta é mais vantajoso.

- Para $87<x<100$:

$50+0{,}80(x-87)<0{,}70x$

$\frac{19{,}6}{0{,}10}>x$

$x<196$

Então, para menos de 196 minutos, o plano beta é mais vantajoso.

- Para $100<x<400$:

$50+0{,}80(x-87)<$
$[0{,}70-0{,}001(x-100)] \cdot x$

$50+0{,}80x-69{,}6<0{,}70x-0{,}001x^2+0{,}1x$

$x^2<19600$

$x<140$

Então, para menos de 140 minutos, o plano beta será vantajoso.

- Para $x > 400$:

$50 + 0{,}80\,(x - 87) < 0{,}40x$

$50 + 0{,}80x - 69{,}60 < 0{,}40x$

$0{,}40x < 19{,}60$

$x < 49$ (impossível)

Nesse caso, o plano alfa é mais vantajoso.

Portanto, o plano beta é mais vantajoso para $72 < x < 140$, ou seja, a partir de 72 minutos, até 140 minutos.

51. a) $f(x) \cdot g(x) < 0$

$-5x \cdot (2x + 5) < 0$

Para que isso ocorra, devemos ter:

- $-5x > 0$ e $2x + 5 < 0 \Rightarrow x < 0$ e $x < -\frac{5}{2} \Rightarrow x < -\frac{5}{2}$
- ou $-5x < 0$ e $2x + 5 > 0 \Rightarrow x > 0$ e $x > -\frac{5}{2} \Rightarrow x > 0$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \text{ ou } x > 0\right\}$

b) Para $2x + 5 \leqslant px$, vamos considerar que:

- se $x = -8$:

$2 \cdot (-8) + 5 \leqslant p(-8) \Rightarrow p \leqslant \frac{11}{8}$

- se $x = -1$:

$2 \cdot (-1) + 5 \leqslant p(-1) \Rightarrow p \leqslant -3$

Temos que $g(x) \leqslant f(x)$ para $p \leqslant -3$.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 105)

1. Nessa atividade é solicitado calcular mentalmente a raiz de cada uma das equações apresentadas.

a) $x = 0$
b) $x = 1$
c) $x = -2$
d) $x = -1$
e) $x = -\frac{1}{2}$
f) $x = -2$
g) $x = 3$
h) $x = -\frac{1}{3}$
i) $x = -\frac{1}{3}$
j) $x = -2$
k) $x = 2$
l) $x = -2$

2. a) $y = \frac{40 - 8}{4} = 8$

b) $a = \frac{70 - 10}{3} = 20$

c) $m = \frac{16 + 5}{7} = 3$

d) $b = \frac{0 - 10}{-2} = 5$

e) $z = \frac{-12 - 12}{-4} = \frac{-24}{-4} = 6$

f) $t = \frac{35 - 20}{-5} = \frac{15}{-5} = -3$

3. a) $\frac{12}{3x + 1} = 4 \Rightarrow 4(3x + 1) = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + 1 = \frac{12}{4} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

b) $\frac{36}{n} = 9 \Rightarrow n = \frac{36}{9} \Rightarrow n = 4$

c) $\frac{20}{7 - 2t} = 4 \Rightarrow 4(7 - 2t) = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7 - 2t = \frac{20}{4} \Rightarrow t = 1$

d) $\frac{30}{5 - m} = 6 \Rightarrow 6(5 - m) = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 - m = \frac{30}{6} \Rightarrow m = 0$

4. a) $a = \frac{(11 - 3)}{(1 - 5)} = -2$

b) $a = (\frac{(4 + 2)}{(3 + 1)} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

c) $a = \frac{(15 - 0)}{(5 - 0)} = 3$

d) $a = \frac{(2 - 5)}{(4 - 1)} = \frac{-3}{3} = -1$

5. a) 1 kg = 1 000 g
- 2 000 g
- 3 500 g
- 1 750 000 g
- 500 g

b) 1 g = 0,001 kg
- 150 kg
- 0,75 kg
- 0,5 kg
- 1,3 kg

c) 1 g = 1 000 mg
- 17 000 mg
- 1 800 mg
- 500 mg
- 30 200 mg

d) 1 mg = 0,001 g
- 6 g
- 0,5 g
- 1,75 g
- 0,65 g

PARA RECORDAR (P. 106)

1. A cada 2 horas são produzidas 30 camisetas, então, em 1 hora, são produzidas 15 camisetas. Assim, para produzir 500 camisetas:

$\frac{500}{15} \simeq 33{,}33$

serão necessárias aproximadamente 33 h 20 min.

Outra maneira de resolver essa questão é identificar pontos que pertençam à reta apresentada no gráfico.

A reta passa pelos pontos (0, 0) e (2, 30) e é do tipo $c = at + b$, em que c é a quantidade de camisetas produzidas em t horas.

Então:

$\begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \\ 30 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = b \\ 30 = 2a + b \end{cases}$

$30 = 2a$

$a = 15$

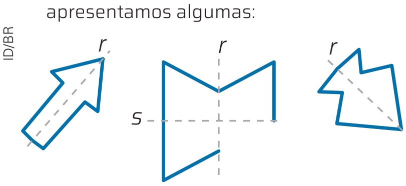
Logo, $c = 15t$ é a expressão que representa o gráfico.

Para $c = 500$, temos: $t = \frac{500}{15} \simeq 33{,}33$

Portanto, serão necessárias aproximadamente 33 h e 20 min.

2. Existem diversas possibilidades. A seguir apresentamos algumas:

ID/BR



3. a) Há várias respostas, entre elas:

$\overleftrightarrow{AF}$ e $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BG}$; $\overleftrightarrow{ED}$ e $\overleftrightarrow{DC}$.

b) Há várias respostas, entre elas:

$\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AD}$; $\overleftrightarrow{GF}$ e $\overleftrightarrow{GH}$; $\overleftrightarrow{CH}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.

c) Há várias respostas, entre elas:

$\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{FG}$; $\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{EH} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$.

4. a) $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$; $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$; $\overline{DA}$ e $\overline{AB}$.

b) $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{DA}$ e $\overrightarrow{AB}$.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 107)

1. A placa tem quatro números, então, considerando os comentários do primeiro e do segundo estudante, a placa tem a forma:

aabb

Além disso, esse número pode ser decomposto:

$1\,000a + 100a + 10b + b = 1\,100a + 11b =$
$= 11(100a + b)$

Portanto, o número é múltiplo de 11.

O terceiro estudante diz que o número da placa era um quadrado perfeito, então, vamos analisar qual múltiplo de 11 satisfaz essa condição:

$2\,299 = 11^2 \cdot 29 \rightarrow$ não é quadrado perfeito.

$3\,388 = 11^2 \cdot 2^2 \cdot 7$. Logo, 3 388 não é quadrado perfeito.

$4\,477 = 11 \cdot (407) = 11^2 \cdot 37$. Logo, 4 477 não é quadrado perfeito.

$5\,566 = 11^2 \cdot 2 \cdot 23$. Logo, 5 566 não é quadrado perfeito.

$6\,655 = 11^2 \cdot 11 \cdot 5$. Logo, 6 655 não é quadrado perfeito.

$7\,744 = 11^2 \cdot 8^2$. Logo, 7 744 é quadrado perfeito.

Portanto, é possível determinar o número da placa, e ele é 7 744.

2. Esta é apenas uma possibilidade de resolução. Os estudantes poderão chegar às respostas por diferentes raciocínios.

Por **IV** (O passageiro cujo nome é o mesmo que o do guarda-freios mora em São Paulo) e **I** (O sr. Paulo mora no Rio de Janeiro) o guarda-freios não é Paulo.

Por **V** (O guarda-freios e um dos passageiros, um renomado físico, frequentam a mesma igreja) e **III** (O sr. José há muito tempo esqueceu toda a álgebra que aprendeu na escola) o físico não é o sr. José. Assim, o físico ou é o sr. Paulo ou é o sr. Roberto, mas por **I** (O sr. Paulo mora no Rio de Janeiro), o físico não poderia frequentar a mesma igreja do guarda-freios, que, por **II**, mora em Porto Alegre.

Então, o físico é o sr. Roberto.

Por **II**, **IV** e **V**, o guarda-freios não é Roberto; então, ele é José!

Por **VI**, Roberto não é o condutor; então, Roberto é o maquinista.

MATEMÁTICA E MEIO AMBIENTE (P. 108)

Conectando ideias

1. a) $C = \frac{4\,500}{1\,000}t \Rightarrow C = 4{,}5t$

b) Utilizando a função obtida no item **a**, temos:

$C = 4{,}5t \Rightarrow C = 4{,}5 \cdot 2 \Rightarrow C = 9$

Ou seja, o chuveiro vai consumir 9 kWh por dia, e, em 30 dias, serão gastos 270 kWh $(30 \cdot 9 = 270)$.

c) Resposta pessoal.

Caso algum estudante não tenha chuveiro elétrico em casa, forneça dados fictícios para que ele realize a atividade. Isso deve ser feito de maneira cuidadosa para que não haja nenhum tipo de constrangimento.

2. Respostas pessoais.

CAPÍTULO 5 *FUNÇÃO QUADRÁTICA*

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 122)

1. A resposta será de acordo com a pesquisa realizada pelos estudantes.

2. a) Vamos realizar as operações indicadas na expressão $f(x) = (2x - 1) \cdot (x - 3) - x \cdot (x + 1)$:

$f(x) = 2x^2 - 6x - x + 3 - x^2 - x$

$f(x) = x^2 - 8x + 3$

Portanto, f é uma função quadrática, pois é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

b) Vamos realizar as operações indicadas na expressão

$f(x) = (2x + 1) \cdot (3x - 1) - (3x - 2) \cdot (2x + 1)$

$f(x) = 6x^2 - 2x + 3x - 1 - (6x^2 + 3x - 4x - 2)$

$f(x) = 6x^2 - 6x^2 - 2x + 3x - 3x + 4x - 1 + 2$

$f(x) = 2x + 1$

Portanto, f não é uma função quadrática, pois não é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

3. $f(x) = (k^2 - 9)x^2 + 2kx - 1$

Para f ser uma função quadrática, deve ser do tipo

$ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$; portanto, temos:

$k^2 - 9 \neq 0$

$k \neq 3$ ou $k \neq -3$

Portanto, para f ser quadrática, k precisa ser diferente de -3 e de 3.

4. Vamos igualar as expressões que definem as funções f e g para determinar m e n:

$f(x) = g(x)$

$2x^2 + (m - 3)x + 4 = 2x^2 - 6x + m - n$

Igualando os coeficientes dos termos semelhantes, temos:

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ m - 3 = -6 \\ 4 = m - n \end{cases}$$

Da segunda igualdade do sistema acima, temos $m = -3$.

Substituindo m por -3 na terceira igualdade, vamos ter:

$m - n = 4 \Rightarrow -3 - n = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = -7$

Portanto, para que as funções sejam iguais, m deve ser -3 e n deve ser -7.

5. a) $\Delta = 121 - 40 = 81$

$$x = \frac{-(-11) \pm 9}{20} \begin{cases} x_1 = \dfrac{11 - 9}{20} = \dfrac{1}{10} \\ x_2 = \dfrac{11 + 9}{20} = 1 \end{cases}$$

Portanto, as raízes são $\frac{1}{10}$ e 1.

b) $\Delta = 400 - 400 = 0$

$x = \frac{-20 \pm 0}{-8} = \frac{-20}{-8} = \frac{5}{2}$

Portanto, as raízes são iguais a $\frac{5}{2}$.

c) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1$

$\Delta = 9 - 24 = -15$

Como $\Delta < 0$, concluímos que não há raiz real.

d) $-x^2 = -36$

$x^2 = 36$

$x = 6$ ou $x = -6$

Portanto, as raízes são -6 e 6.

e) $x(3x - 7) = 0$

$x = 0$ ou $3x - 7 = 0$

$x = 0$ ou $x = \frac{7}{3}$

Portanto, as raízes são 0 e $\frac{7}{3}$.

f) Para determinar as raízes de $f(x)$, vamos resolver a equação $5x^2 = 0$. Facilmente concluímos que $x = 0$.

Portanto, as raízes são iguais a 0.

6. a) $x^2 - 9 = 0$

$x = \pm 3$

Eixo das ordenadas: $(0, -9)$

Eixo das abscissas: $(3, 0)$ e $(-3, 0)$

b) $x^2 + x - 6 = 0$

$x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-1 - 5}{2} = -3$

Eixo das ordenadas: $(0, -6)$

Eixo das abscissas: $(2, 0)$ e $(-3, 0)$

c) $x^2 - 3x + 10 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{2}$$

Eixo das ordenadas: $(0, 10)$

Eixo das abscissas: não há ponto de intersecção.

Não existe raiz real. Logo, o gráfico não intersecta o eixo das abscissas.

d) $-x^2 - 3x + 10 = 0$

$x_1 = \frac{3 + 7}{-2} = -5$

$x_2 = \frac{3 - 7}{-2} = 2$

Eixo das ordenadas: $(0, 10)$

Eixo das abscissas: $(-5, 0)$ e $(2, 0)$

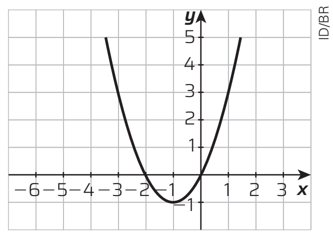
7. Para construir o gráfico da função $y = x^2 + 2x$, temos:

- $a = 1$, logo $a > 0$, assim a concavidade da parábola é voltada para cima $\smile$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 4 - 0 = 4$, portanto $\Delta > 0$.
- As raízes são dadas por:

  $x^2 + 2x = 0$

  $x = 0$ ou $x = -2$

O gráfico intersecta o eixo Ox em $x = 0$ ou $x = -2$.


ID/BR

Analisando o gráfico esboçado, podemos concluir:

a) $x = 0$ ou $x = 2$. b) $x = -3$ ou $x = 1$.

8. Podemos dizer que, quando o vaso atinge o chão, a distância do vaso ao solo é zero. Assim, para determinar o tempo t em que isso acontece, podemos substituir d por 0 na equação $d = 50 - 5t^2$.

$0 = 50 - 5t^2$

$t = \pm\sqrt{10}$

Como t é o tempo, o valor negativo obtido não serve.

Portanto, $t = \sqrt{10}$ s.

9. a) $x_1 + x_2 = -\frac{10}{5} = -2$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{5}$

b) $x_1 + x_2 = -\frac{(-10)}{4} = \frac{5}{2}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4}$

c) $x_1 + x_2 = -\frac{0}{15} = 0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{-60}{15} = -4$

d) $x_1 + x_2 = -\frac{0}{\sqrt{2} + 1} = 0$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{0}{\sqrt{2} + 1} = 0$

10. a) Para a função $y = x^2 - 2x - 8$, temos $a = 1$, $b = -2$ e $c = -8$, assim:

- $a > 0$, logo a concavidade da parábola é voltada para cima;
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$, portanto $\Delta > 0$;
- as raízes são dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{8}{2} = 4 \text{ e } x_2 = -\frac{4}{2} = -2$$

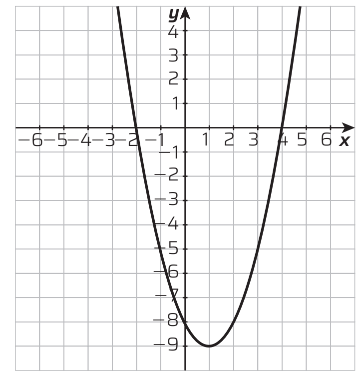
Como $c = -8$, o ponto de coordenadas $(0, -8)$ pertence à parábola e ao eixo Oy.

As coordenadas do vértice são:

$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$ e

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4} = -9$

Logo, $V(1, -9)$.


ID/BR

b) Para a função $y = -2x^2 + 5x - 2$, temos $a = -2$, $b = 5$ e $c = -2$, assim:

- $a < 0$, logo a concavidade da parábola é voltada para baixo;
- $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2) = 25 - 16 = 9$, portanto $\Delta > 0$;
- as raízes são dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 3}{2 \cdot (-2)}$$

$$x_1 = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-8}{-4} = 2$$

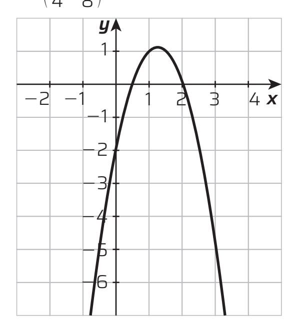
Como $c = -2$, o ponto de coordenadas $(0, -2)$ pertence à parábola e ao eixo Oy.

As coordenadas do vértice são:

$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot (-2)} = \frac{5}{4}$ e

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{4 \cdot (-2)} = \frac{9}{8}$

Logo, $V\left(\frac{5}{4}, \frac{9}{8}\right)$.


ID/BR

c) Para a função $y = 2x^2 - 4x + 3$, temos $a = 2$, $b = -4$ e $c = 3$, assim:

- $a > 0$, logo a concavidade da parábola é voltada para cima;
- $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 16 - 24 = -8$, portanto $\Delta < 0$;
- não há raízes reais, pois $\Delta < 0$.

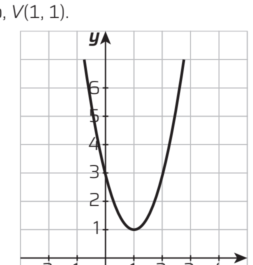
Como $c = 3$, logo $(0, 3)$ é o ponto de intersecção com o eixo Oy.

As coordenadas do vértice são:

$x_V = \frac{-b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 2} = 1$ e

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{(-8)}{4 \cdot 2} = 1$

Logo, $V(1, 1)$.


ID/BR

d) Para a função $y = -x^2 + 4x - 2$, temos $a = -1$, $b = 4$ e $c = -2$, assim:

- $a < 0$, logo a concavidade da parábola é voltada para baixo;

- $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 16 - 8 = 8$, portanto $\Delta > 0$;
- as raízes são dadas por:

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{8}}{-2}$

$x_1 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{2}}{-2} = 2 + \sqrt{2}$ e

$x_2 = \dfrac{-4 + 2\sqrt{2}}{-2} = 2 - \sqrt{2}$

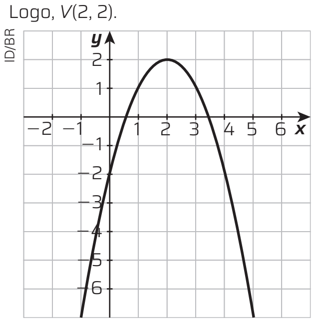
Como $c = -2$, o ponto de coordenadas $(0, -2)$ pertence à parábola e ao eixo Oy.

As coordenadas do vértice são:

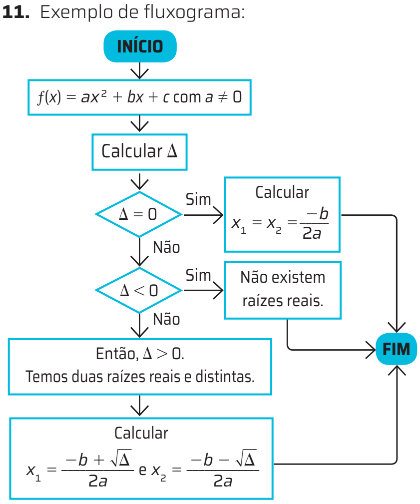
$x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2 \cdot (-1)} = 2$ e

$y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{8}{4 \cdot (-1)} = 2$

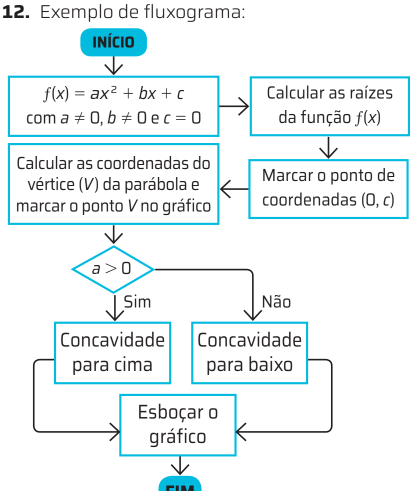
Logo, $V(2, 2)$.



11. Exemplo de fluxograma:



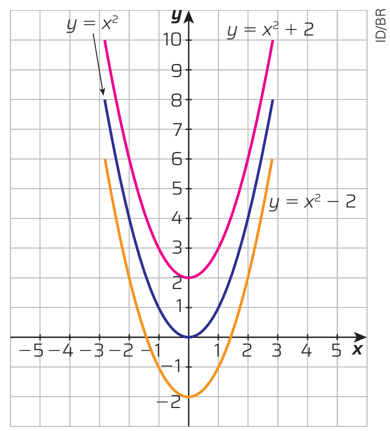
12. Exemplo de fluxograma:



13. Analisando as funções do exercício **10**, podemos concluir que as parábolas correspondentes aos gráficos das funções expressas nos itens **a** e **c** são voltadas para cima, pois $a > 0$. Nos itens **b** e **d**, as parábolas correspondentes são voltadas para baixo, pois $a < 0$.

14. a) **a**, **c**, **e** e **f** têm concavidade voltada para cima;
b) **b**, **d** têm concavidade voltada para baixo;
c) **a**, **d** e **e** intersectam o eixo Ox em dois pontos distintos;
d) **c** não intersecta o eixo Ox;
e) **b** e **f** intersectam o eixo Ox em um único ponto;
f) **c** tem concavidade voltada para cima e não intersecta o eixo Ox;
g) **f** tem concavidade voltada para cima e intersecta o eixo Ox em um único ponto.

15.



Analisando o esboço, podemos concluir:
a) $(0, 0)$; $(0, 2)$; $(0, -2)$.
b) Para cima, pois em todas as funções $a = 1$, ou seja, $a > 0$.
c) Sim, o eixo de simetria é Oy.
d) O gráfico de $y = x^2 + 2$ pode ser obtido transladando 2 unidades, no sentido positivo de Oy, o gráfico de $y = x^2$.
O gráfico de $y = x^2 - 2$ pode ser obtido transladando 2 unidades, no sentido negativo de Oy, o gráfico de $y = x^2$.

16. Os estudantes podem elaborar um problema que envolva duas funções quadráticas diferentes e determinar, graficamente, os pontos comuns entre elas. Exemplo de funções:
$f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = -x^2 + 2$.
Antes de esboçar o gráfico dessas funções, os estudantes devem verificar a concavidade das funções criadas por eles. Nesse caso, a concavidade de f é voltada para cima e a de g é voltada para baixo. Em seguida, eles devem esboçar os gráficos em um mesmo plano cartesiano e perceber, graficamente, que os pontos comuns são $(-2, 2)$ e $(2, 2)$.

17. Para o ponto $(1, 8)$, temos:
$8 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow a + b + c = 8$
Para o ponto $(0, 3)$, temos:
$3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 3$
Para o ponto $(2, -1)$, temos:
$-1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 4a + 2b + c = -1$
Substituindo c por 3 nas duas outras equações que obtivemos, podemos formar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a + b = 5 & \cdot (-2) \\ 4a + 2b = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a - \cancel{2b} = -10 \\ \;\;\,4a + \cancel{2b} = -4 \end{cases} \quad \oplus$$
$$2a = -14$$

Assim, $a = -7$ e $b = 12$.
Então, $f(x) = -7x^2 + 12x + 3$.

18. a) Teríamos infinitas funções quadráticas cujo gráfico passaria por esses pontos.
Se $(1, 8)$ é um ponto do gráfico, então:
$8 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow 8 = a + b + c$
Se $(0, 3)$ é um ponto do gráfico, então:
$3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 3$
Portanto: $8 = a + b + 3 \Rightarrow a + b = 5$
Logo, temos infinitas funções quadráticas que têm os coeficientes a, b e c, de tal modo que $a + b = 5$ e $c = 3$. Veja algumas delas:
- $y = x^2 + 4x + 3$
- $y = 2x^2 + 3x + 3$
- $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{11}{2}x + 3$
- $y = 5x^2 + 3$

b) Não teríamos uma função.
Os pontos $(0, 8)$ e $(0, 3)$ estão alinhados verticalmente. Para se obter uma função quadrática, os pontos não podem estar alinhados dessa maneira. Veja o porquê.
Se a função passa pelo ponto $(0, 8)$, então:
$8 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 8$
Como vimos no item **a**, quando a função passa pelo ponto $(0, 3)$, então $c = 3$.
Não podemos ter dois valores distintos para um mesmo coeficiente. Logo, considerando os pontos $(0, 8)$, $(0, 3)$ e $(2, -1)$, eles não representam uma função.

19. Para determinar as coordenadas dos pontos comuns dos gráficos de $y = \dfrac{x}{2}$ e $y = x^2 - 4x$, podemos igualar as expressões que definem y e determinar x. Assim: $\dfrac{x}{2} = x^2 - 4x$
$x = 0$ ou $x = \dfrac{9}{2}$
Agora, vamos substituir x por 0 em uma das expressões que definem y: $y = \dfrac{x}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$
Também, vamos substituir x por $\dfrac{9}{2}$ em uma das expressões que definem y:

$y = \dfrac{\frac{9}{2}}{2} = \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{4}$

Portanto, as coordenadas dos pontos comuns são $(0, 0)$ e $\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$.

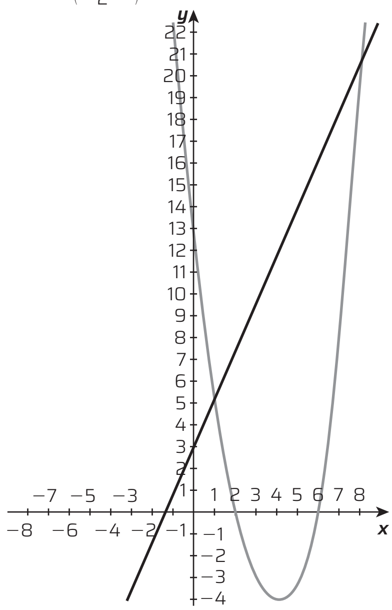
20. a) Como é uma função quadrática, é do tipo $f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$, em que x_1 e x_2 são os valores de x nas coordenadas dos pontos em que o gráfico da função intersecta o eixo Ox. Assim:
$f(x) = a \cdot (x - 0)(x - 2) = ax \cdot (x - 2)$
Não está marcado, mas podemos concluir que o vértice dessa parábola é o ponto $V(1, -1)$, porque o x_V está exatamente no meio entre 0 e 2 no eixo Ox.
Então, vamos substituir, na expressão $f(x) = ax \cdot (x - 2)$, x por 1 e $f(x) = y$ por -1, e determinar a:
$f(1) = a \cdot 1 \cdot (1 - 2) = -1 \Rightarrow a = 1$
Agora, substituindo a por 1 na expressão $f(x) = ax \cdot (x - 2)$, teremos:
$f(x) = 1 \cdot x \cdot (x - 2)$
Logo, $f(x) = x^2 - 2x$.

b) Como é uma função quadrática, é do tipo $f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$, em que x_1 e x_2 são os valores de x nas coordenadas dos pontos em que o gráfico da função intersecta o eixo Ox. Assim: $f(x) = a \cdot (x + 1)(x - 1)$
O vértice dessa parábola é o ponto $V(0, 1)$.
Então, vamos substituir, na expressão $f(x) = a \cdot (x + 1)(x - 1)$, x por 0 e $f(x) = y$ por 1, e determinar a:
$f(x) = a \cdot (0 + 1)(0 - 1) = 1 \Rightarrow a = -1$
Agora, substituindo a por -1 na expressão $f(x) = a \cdot (x + 1)(x - 1)$, teremos:
$f(x) = (-1) \cdot (x + 1)(x - 1)$
Logo, $f(x) = -x^2 + 1$.

21. a) V_g: $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\dfrac{(-8)}{2}, -\dfrac{16}{4}\right) = \left(\dfrac{8}{2}, -\dfrac{16}{4}\right) = (4, -4)$
Logo, $V_g(4, -4)$.
Para determinar as raízes de g, sabemos que a soma das raízes é 8 e o produto delas é 12. Então, as raízes de $g(x)$ são 2 e 6.

O gráfico da função f é uma reta.
Para f, quando $x = 0$, temos:
$y = f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$
E quando $y = 0$, temos:
$y = f(x) = 2x + 3 = 0$
$x = -\dfrac{3}{2}$
Portanto, o gráfico de f é uma reta que passa pelos pontos de coordenadas (3, 0) e $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

ID/BR



b) Vamos verificar as coordenadas dos pontos comuns entre f e g igualando as expressões dessas funções:
$x^2 - 8x + 12 = 2x + 3; x^2 - 10x + 9 = 0$
Nessa equação, a soma das raízes é 10 e o produto é 9, então as raízes são 1 e 9.
Assim, substituindo x por 1 em qualquer uma das expressões das funções, teremos $y = 5$; e, substituindo x por 9 em qualquer uma das expressões das funções, teremos $y = 21$. Portanto, os pontos de coordenadas (1, 5) e (9, 21) são comuns aos dois gráficos.

22. A função $g(x)$ intersecta o eixo das abscissas na origem (0, 0) e no ponto M. Como esse ponto também pertence a função $f(x)$, pode-se escrevê-lo como: $M = (f(x), 0)$
$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$
Logo, $M = (0, 4)$.
Uma vez que a parábola é simétrica em relação ao eixo vertical que passa pelo vértice, ponto V, tem-se que o x do vértice é o ponto médio entre 0 e 4, ou seja, 2. Além disso, sabe-se que o ponto V também pertence à função $f(x)$, de forma que V tem as coordenadas: $V = (2, f(2))$
Assim, $f(2) = 2 \cdot 2 - 8 = 4 - 8 = -4$
Portanto, o ponto V tem coordenadas iguais a $(2, -4)$.
Alternativa **a**.

TECNOLOGIA (P. 124)

1. a) Exemplo de resposta: Em um *software* de calculadora gráfica *on-line* em 2D, escrevemos a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ na caixa de entrada de dados. Em seguida, apertamos "Enter" para confirmar a construção. Ao fazer isso, aparecem três controles deslizantes, um para cada valor dos coeficientes a, b e c.
b) Após o ajuste do coeficiente b para 4 na 2ª etapa, como temos $c = 0$, a lei de formação da função é $f(x) = x^2 + 4x$.

2. Resposta pessoal. Sugestão de resposta:
Fixados os valores de a e c, o coeficiente b determina a translação do gráfico na direção do eixo horizontal e, fixando-se os valores de a e b, a variação do coeficiente c corresponde à translação do gráfico na direção do eixo vertical.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 128)

23. Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 1$, temos: $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$.
Como $a > 0$, existe valor mínimo de $f(x)$, que ocorre para:
$x_V = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2 \cdot 1} = 1$
Para $x = 1$, a função assume valor mínimo.

24. Pelo enunciado, quando o valor mínimo é $y = 4$ (y_V), então podemos fazer:
$y_V = 4 = -\dfrac{\Delta}{4a}$
$4 = -\dfrac{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-m)}{4 \cdot 3} \Rightarrow m = -7$
O valor de m também pode ser determinado pelo cálculo de $f(y_V) = 4$. Assim:
$y_V = f(-1) = 4$
$3(-1)^2 + 6(-1) - m = 4 \Rightarrow m = -7$

25. Humberto errou ao realizar a operação $3(-1)^2$, cujo resultado correto é 3 e não −3. Além disso, ele também errou ao realizar a operação −3 − 6, que resulta em −9 e não em 9.

26. Considere $f(x) = -9x^2 + 6x - 1$, em que $a = -9$, $b = 6$ e $c = -1$.
a) Como $a < 0$, o conjunto imagem é o conjunto $\left]-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$ ou $\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\dfrac{\Delta}{4a}\right\}$.
$y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{6^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-1)}{4 \cdot (-9)} = 0$
Portanto, **não é válida** a afirmação de que a imagem dessa função é dada por $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$.
b) Como $a < 0$, o gráfico dessa função tem sua concavidade voltada para baixo, mas ela intersecta o eixo Oy em apenas um ponto, pois $\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-1) = 0$.
Portanto, a afirmação **não é válida**.
c) Verdadeira, pois como a função tem concavidade para baixo, o vértice é seu ponto de máximo.
d) Sabendo que $y_V = 0$, vamos calcular x_V:
$x_V = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-6}{2 \cdot (-9)} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$
Portanto, a afirmação **não é válida**, já que o vértice dessa função é $V\left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$.
Logo, as afirmações que devem ser indicadas no caderno são as dos itens **a**, **b** e **d**.

27. $x_V = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = -\dfrac{m}{2(-4)} \Rightarrow m = 4$
$y_V = 9 \Rightarrow -4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \dfrac{1}{2} + n = 9 \Rightarrow n = 8$
Portanto, $m = 4$ e $n = 8$.

28. a) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$, então $a = 2$; $b = -7$ e $c = 3$.
Como $a = 2 > 0$, o conjunto imagem é $\left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$.
$-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 2} = -\dfrac{25}{8}$
Portanto, $\text{Im}(f) = \left[-\dfrac{25}{8}, +\infty\right[$.
b) $f(x) = -3x^2 + 7x - 1$, então $a = -3$; $b = 7$ e $c = -1$.
Como $a = -3 < 0$, o conjunto imagem é $\left]-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$.
$-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{7^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1)}{4 \cdot (-3)}$
$= -\dfrac{49 - 12}{-12} = \dfrac{37}{12}$
Portanto, $\text{Im}(f) = \left]-\infty, \dfrac{37}{12}\right]$.
c) $f(x) = 5x^2 - 10x$, então $a = 5$; $b = -10$ e $c = 0$.
Como $a = 5 > 0$, o conjunto imagem é $\left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$.
$-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{(-10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0}{4 \cdot 5} = -\dfrac{100}{20} = -5$
Portanto, $\text{Im}(f) = [-5, +\infty[$.
d) $f(x) = -x^2 + 4$, então $a = -1$; $b = 0$ e $c = 4$.
Como $a = -1 < 0$, o conjunto imagem é o conjunto $\left]-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$.
$-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}{4 \cdot (-1)} = \dfrac{16}{4} = 4$
$y_V = -(0)^2 + 4 = 4$
Portanto, $\text{Im}(f) =]-\infty, 4]$.
e) $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$, então $a = 5$; $b = -4$ e $c = 1$.
Como $a = 5 > 0$, o conjunto imagem é $\left[-\dfrac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$.
$-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{(-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \dfrac{1}{5}$
Portanto, $\text{Im}(f) = \left[\dfrac{1}{5}, +\infty\right[$.
f) $f(x) = -9x^2 + 6x - 1$, então $a = -9$; $b = 6$ e $c = -1$.
Como $a = -9 < 0$, o conjunto imagem é o conjunto $\left]-\infty, -\dfrac{\Delta}{4a}\right]$.
$-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{6^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-1)}{4 \cdot (-9)} = 0$
Portanto, $\text{Im}(f) =]-\infty, 0]$.

29. a) Para $f(x)$ ter valor mínimo, seu gráfico deve ter concavidade para cima, ou seja, $a > 0$.
$10 - 5m > 0 \Rightarrow m < 2$
b) Para $f(x)$ ter valor máximo, seu gráfico deve ter concavidade para baixo, ou seja, $a < 0$.
$-3m + 6 < 0 \Rightarrow m > 2$

30. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, tais que a soma deles seja 12 e o produto deles seja o máximo possível, temos:
- $x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x$
- $P = xy$

Substituindo y por $12 - x$ na expressão do produto, teremos: $P = x(12 - x) = 12x - x^2$
O produto P é máximo para:
$x_V = -\dfrac{12}{2(-1)} = 6$ e $y_V = 12 - 6 = 6$

31. Considerando a equação: $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$
No ponto mais alto da trajetória, teremos $v = 0$ e $\Delta s = 5$.
Como na subida a aceleração é contrária ao movimento da bola, temos $a = -g = -10$ m/s², assim: $0 = v_0^2 - 2 \cdot 10 \cdot 5 \Rightarrow v_0 = \pm 10$
v_0 tem o mesmo sentido do movimento na subida, então: $v_0 = 10$ m/s

32. $P = 10i - 5i^2$, então: $a = -5$; $b = 10$ e $c = 0$.
$i_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{10}{2 \cdot (-5)} = \dfrac{-10}{-10} = 1$
Logo, a intensidade da corrente elétrica necessária para se obter a potência máxima de gerador é de 1 A.

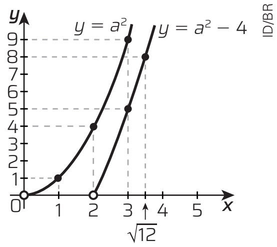
33. a) A área do retângulo pode ser obtida pelo produto da medida de sua base pela medida de sua altura. Assim:
$A_{\text{retângulo}} = (a + 2)(a - 2) = a^2 - 4$
b) O gráfico da função $y = a^2 - 4$, é uma parábola com concavidade para cima.
Como queremos apenas a parte do gráfico em que $a > 2$, obtemos alguns pontos por onde o gráfico passa:
- para $a = 2$, temos $y = 4 - 4 = 0 \Rightarrow$ ponto (2, 0).
- para $a = 3$, temos $y = 9 - 4 = 5 \Rightarrow$ ponto (3, 5).
- para $y = 8$, temos $8 = a^2 - 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = \sqrt{12} \Rightarrow$ ponto $(\sqrt{12}, 8)$.

Assim, temos o esboço a seguir.
c) O gráfico da função $y = a^2$ é uma parábola com concavidade para cima.

Como queremos apenas a parte do gráfico em que $a > 0$, obtemos alguns pontos por onde o gráfico passa:

- para $a = 0$, temos $y = 0 \Rightarrow$ ponto $(0, 0)$.
- para $a = 1$, temos $y = 1 \Rightarrow$ ponto $(1, 1)$.
- para $a = 2$, temos $y = 4 \Rightarrow$ ponto $(2, 4)$.
- para $a = 3$, temos $y = 9 \Rightarrow$ ponto $(3, 9)$.

Assim, temos o esboço a seguir.



d) Pelos gráficos, percebemos que, para cada valor de abscissa, temos um valor de ordenada maior no gráfico que representa a função $y = a^2$. Portanto, o quadrado de lado de medida a tem maior área, pois $a^2 > a^2 - 4$ para todo $a > 2$.

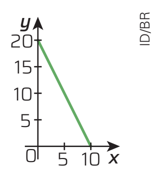
34. a) O comprimento total de tela é 20 metros.

x (em metro)	**y (em metro)**
4	12
5	10
6	8
8	4

b) Como o total de tela será usado para cercar a região retangular que representa a horta, podemos escrever:

$2x + y = 20$, em que x é a largura e y, o comprimento dessa região. Assim: $y = 20 - 2x$

c) Com os pontos do quadro acima, podemos construir o gráfico:



d)

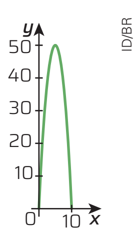
x (em m)	**y (em m)**	**xy (em m²)**
4	12	48
5	10	50
6	8	48
8	4	32

e) A função que expressa a área desse terreno é: $A(x, y) = xy$

Substituindo y por $20 - 2x$, vamos ter:

$A(x) = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$

f) A função tem $a = -2$, $b = 20$ e $c = 0$. Então o gráfico dela é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, que intersecta os eixos em $(0, 0)$ e tem vértice em $(5, 50)$. Além disso, também intersecta o eixo Ox em $(10, 0)$.



g) Observando o gráfico, percebemos que a área máxima desse terreno é 50 m².

35. O perímetro da praça retangular mede 120 metros e um dos seus lados mede x. Supondo que o outro lado meça y, pode-se escrever y como:

$2x + 2y = 120$

$y = \dfrac{120 - 2x}{2} = 60 - x$

Sendo $A(x)$ a área dessa praça, então:

$A(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$

Como a medida dos lados do retângulo tem de ser necessariamente maior que zero e a soma dos lados opostos menor que 120, sendo que ambos têm o mesmo valor, logo:

$A(x) = 60x - x^2$, $0 < x < 60$

Alternativa **a**.

36. O comprimento total de tela de arame é 28 metros.

$2x + 2y = 28 \Rightarrow y = 14 - x$

A área é definida pelo produto xy.

Substituindo y nesse produto por $14 - x$, temos:

$A(x) = x(14 - x) = 14x - x^2$

Então, $a = -1$; $b = 14$ e $c = 0$.

$x_V = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-14}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-14}{-2} = 7$

$y = 14 - 7 = 7$

O retângulo deve ser um quadrado de lado de medida 7 m.

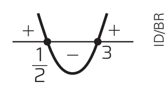
37. a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (equação correspondente)

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25$

$x = \dfrac{7 \pm 5}{4}$

$x_1 = \dfrac{7 - 5}{4} = \dfrac{1}{2}$

$x_2 = \dfrac{7 + 5}{4} = 3$



$$\begin{cases} f(x) < 0, \text{ para } \frac{1}{2} < x < 3 \\ f(x) = 0, \text{ para } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 3 \\ f(x) > 0, \text{ para } x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

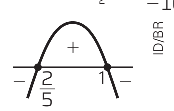
b) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$ (equação correspondente)

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-2) = 9$

$x = \dfrac{-7 \pm 3}{2 \cdot (-5)}$

$x_1 = \dfrac{-7 - 3}{-10} = 1$

$x_2 = \dfrac{-7 + 3}{-10} = \dfrac{2}{5}$

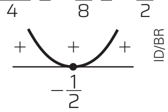


$$\begin{cases} f(x) < 0, \text{ para } x < \frac{2}{5} \text{ ou } x > 1 \\ f(x) = 0, \text{ para } x = \frac{2}{5} \text{ ou } x = 1 \\ f(x) > 0, \text{ para } \frac{2}{5} < x < 1 \end{cases}$$

c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ (equação correspondente)

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (4) \cdot (1) = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm 0}{2 \cdot 4} = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2}$

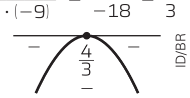


$$\begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x = -\frac{1}{2} \\ f(x) > 0, \text{ para } x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

d) $-9x^2 + 24x - 16 = 0$ (equação correspondente)

$\Delta = 24^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-16) = 0$

$x = \dfrac{-24 \pm 0}{2 \cdot (-9)} = \dfrac{-24}{-18} = \dfrac{4}{3}$



$$\begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x = \frac{4}{3} \\ f(x) < 0, \text{ para } x \neq \frac{4}{3} \end{cases}$$

38. Para determinar a altura máxima que a bola atinge, precisamos encontrar o ponto de máximo da função que representa a trajetória da bola e adicionar esse valor a 1,5 m. Encontrar o ponto de máximo significa encontrar a coordenada y do vértice da parábola:

$y = -\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{7x}{3} + 12$

Como $a = -\dfrac{1}{6}$, $b = -\dfrac{7}{3}$ e $c = 12$, então:

$y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = \dfrac{121}{6} = 20{,}17$

Portanto, a altura máxima é $1{,}5 + 20{,}2 = 21{,}7$, ou seja, o saque não será invalidado apenas no ginásio **V**.

Alternativa **d**.

39. O modelo apresentado é uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola com a concavidade para baixo, pois $a = -1$ e, portanto, $a < 0$. O vértice da parábola indica qual é o mês em que ocorre a maior quantidade de pessoas infectadas.

Sabendo que: $p(t) = -t^2 + 10t + 24$

E que: $t_v = -\dfrac{b}{2a}$

Então: $t_v = -\dfrac{10}{2(-1)} = \dfrac{-10}{-2} = 5$

Portanto, o mês 5 resultou na maior quantidade de pessoas infectadas, valor que pertence ao intervalo **III**. Alternativa **c**.

40. a) A altura inicial (h_0) é 6 m, pois, quando no início, temos $t = 0$. Assim:

$h_0 = -0^2 + 4 \cdot 0 + 6 = 6$

b) Quando a altura voltar a ser a mesma que a inicial, ou seja, voltar a ser 6 m, teremos:

$h = 6 = -t^2 + 4t + 6$

$t = 0$ ou $t = 4$

Para voltar à sua altura inicial, a bola leva 4 segundos.

c) $h = -t^2 + 4t + 6$ ($a = -1$; $b = 4$; $c = 6$)

$x_v = \dfrac{-4}{-2} = 2$

$h = -2^2 + 4 \cdot 2 + 6 = -4 + 8 + 6 = 10$

A altura máxima atingida pela bola é 10 m.

d) Para fazer as simulações em uma calculadora gráfica *on-line* 2D, vamos construir o gráfico da função $f(x) = -x^2 + bx + c$. Para isso, escrevemos a função na caixa de entrada de dados. Depois, apertamos "Enter" para confirmar a construção.

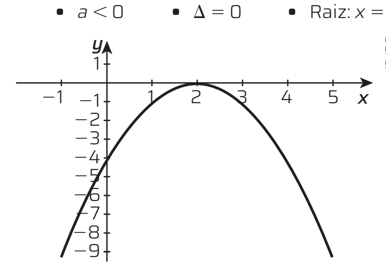
Ao modificar o controle deslizante correspondente ao coeficiente b, observamos a parábola se mover para a direita e para cima se $b > 0$ e para a esquerda e para cima se $b < 0$. No caso da situação ilustrada, nos interessa apenas o valor de b não negativo, uma vez que x corresponde ao tempo, e não existe tempo negativo. O vértice da parábola corresponde à altura máxima atingida pela bola.

O valor de c indica onde a parábola intersecta o eixo Oy e, na situação apresentada, representa a altura inicial da bola. Nesse caso, também só nos interessam valores não negativos. Assim, ao variar o controle deslizante correspondente ao coeficiente c para a direita, aumentaremos a altura inicial da bola e, consequentemente, a altura máxima que ela poderá atingir.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 133)

41. a) Esboçando o gráfico e estudando o sinal da função $y = -x^2 + 4x - 4$, temos:

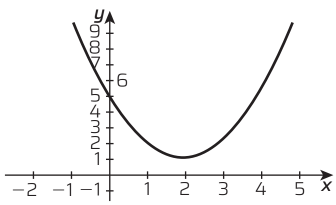
- $a < 0$
- $\Delta = 0$
- Raiz: $x = 2$



Percebemos que os valores dessa função são menores que zero para qualquer número real x, menos o 2. Portanto, para a inequação $-x^2 + 4x - 4 < 0$, temos: $S = \mathbb{R} - \{2\}$

b) Esboçando o gráfico e estudando o sinal da função $y = x^2 - 4x + 5$, temos:

- $a < 0$
- $a > 0$
- $\Delta = -4$
- Vértice: (2, 1)



Percebemos que os valores dessa função são maiores que zero para qualquer número real x. Portanto, para a inequação $x^2 - 4x + 5 < 0$, temos: $S = \varnothing$.

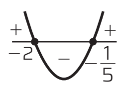
42. a) $5x^2 + 11x + 2 > 0$

$5x^2 + 11x + 2 = 0$ ($a = 5$; $b = 11$; $c = 2$)

$\Delta = 11^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = 81$

$x = \dfrac{-11 \pm 9}{2 \cdot 5}$

- $x_1 = \dfrac{-11 - 9}{10} = \dfrac{-20}{10} = -2$
- $x_2 = \dfrac{-11 + 9}{10} = \dfrac{-2}{10} = -\dfrac{1}{5}$

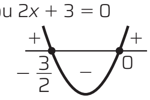


Portanto: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > -\dfrac{1}{5}\right\}$

b) $2x^2 + 3x \leqslant 0$

$2x^2 + 3x = 0$ ($a = 2$; $b = 3$; $c = 0$)

$x = 0$ ou $2x + 3 = 0$



$x = 0$ ou $x = -\dfrac{3}{2}$

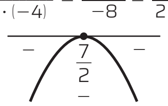
Portanto: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{3}{2} \leqslant x \leqslant 0\right\}$

c) $-4x^2 + 28x - 49 \geqslant 0$

$-4x^2 + 28x - 49 = 0$ ($a = -4$; $b = 28$; $c = -49$)

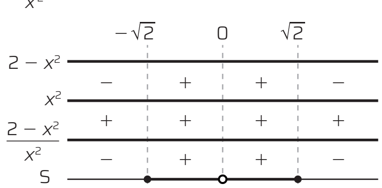
$\Delta = 28^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-49) = 0$

$x = \dfrac{-28 \pm 0}{2 \cdot (-4)} = \dfrac{-28}{-8} = \dfrac{7}{2}$



Portanto: $S = \left\{\dfrac{7}{2}\right\}$

43. $\dfrac{2}{x^2} \geqslant 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$



Portanto: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \text{ e } x \neq 0\}$

44. $\begin{cases} x^2 - 2x \geqslant 0 & \text{(I)} \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $x^2 - 2x \geqslant 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x = 0$ ou $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$S_{(I)} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

(II) $-x^2 + 2x + 3 > 0$

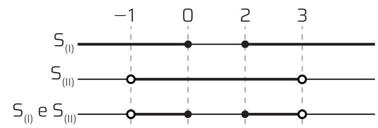
$-x^2 + 2x + 3 = 0$ ($a = -1$; $b = 2$; $c = 3$)

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16$

$x = \dfrac{-2 \pm 4}{-2}$, $x_1 = \dfrac{-2 - 4}{-2} = 3$, $x_2 = \dfrac{-2 + 4}{-2} = -1$

$S_{(II)} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

Portanto: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 0 \text{ ou } 2 \leqslant x < 3\}$



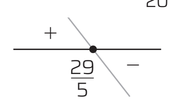
45. $f(x) = 5x^2 - 6x + m - 4$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (m - 4) = 36 - 20(m - 4)$

$\Delta = 36 - 20m + 80 = 116 - 20m$

$\Delta = 0 \Rightarrow 116 - 20m = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -20m = -116 \Rightarrow m = \dfrac{116}{20} = \dfrac{29}{5}$



- f terá duas raízes reais se $\Delta > 0$; então $m < \dfrac{29}{5}$
- f terá uma raiz real se $\Delta = 0$; então $m = \dfrac{29}{5}$
- f não terá raiz real se $\Delta < 0$; então $m > \dfrac{29}{5}$

46. $f(x) = x^2 + (2m - 1)x - 2m$ ($a = 1$; $b = 2m - 1$; $c = -2m$)

$\Delta = (2m - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2m)$

$\Delta = 4m^2 + 4m + 1$

$4m^2 + 4m + 1 = 0$ ($a = 4$; $b = 4$; $c = 1$)

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 \Rightarrow \Delta = 16 - 16 = 0$

$m = \dfrac{-4 \pm 0}{2 \cdot 4} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}$

- f terá duas raízes desiguais se $\Delta > 0$; então $m \neq -\dfrac{1}{2}$
- f terá uma raiz real se $\Delta = 0$; então $m = -\dfrac{1}{2}$

Portanto, a função admite raízes reais para quaisquer valores reais de m.

47. $f(x) = mx^2 - mx + 1$ ($a = m$; $b = -m$; $c = 1$)

$\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot m \cdot 1$

$\Delta = m^2 - 4m$

Para ter raízes duplas, precisamos ter $\Delta = 0$.

$m^2 - 4m = 0$

$m(m - 4) = 0$

$m = 0$ ou $m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$

Temos de considerar ainda que $m \neq 0$ para que f seja uma função quadrática.

Então, para admitir raiz dupla, devemos ter $m = 4$.

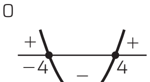
48. $f(x) = 2x^2 - (k - 4)x - k + 4$ ($a = 2$; $b = -k + 4$; $c = -k + 4$)

$\Delta = (-k + 4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k + 4)$

$\Delta = k^2 - 8k + 16 + 8k - 32 = k^2 - 16$

Para f não admitir raízes reais, devemos ter $\Delta < 0$.

$k^2 - 16 = 0$



$k^2 = 16 \Rightarrow k = 4$ ou $k = -4$

Assim, $\{k \in \mathbb{R} \mid -4 < k < 4\}$

49. a) $-2x^2 - 7x - 3 \geqslant 0$

$-2x^2 - 7x - 3 = 0$ ($a = -2$; $b = -7$; $c = -3$)

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 25$

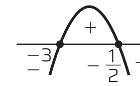
$x = \dfrac{7 \pm 5}{-4}$

$x_1 = \dfrac{7 - 5}{-4} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$

$x_2 = \dfrac{7 + 5}{-4} = \dfrac{12}{-4} = -3$

$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{2}\right\}$

b) $9 - x^2 > 0$



$9 - x^2 = 0$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

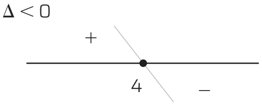
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$

50. a) $-x^2 + 4x - k < 0$

$-x^2 + 4x - k = 0$ ($a = -1$; $b = 4$; $c = -k$)

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-k) = 16 - 4k$

$\Delta < 0$



$16 - 4k < 0 \Rightarrow k > 4$

Portanto: $S = \{k \in \mathbb{R} \mid k > 4\}$

b) $2x^2 + (k - 6)x + 1 > 0$

$2x^2 + (k - 6)x + 1 = 0$ ($a = 2$; $b = k - 6$; $c = 1$)

$\Delta = (k - 6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = k^2 - 12k + 28$

$\Delta < 0$

$k^2 - 12k + 28 < 0$

$k^2 - 12k + 28 = 0$ ($a = 1$; $b = -12$; $c = 28$)

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28 = 32$

$k = \dfrac{12 \pm \sqrt{32}}{2}$

$k_1 = \dfrac{12 - 4\sqrt{2}}{2} = 6 - 2\sqrt{2}$

$k_2 = \dfrac{12 + 4\sqrt{2}}{2} = 6 + 2\sqrt{2}$

Portanto: $S = \{k \in \mathbb{R} \mid 6 - 2\sqrt{2} < k < 6 + 2\sqrt{2}\}$

51. Como o terreno é retangular com medidas x e y (em metro), $x > 0$ e $y > 0$, temos:

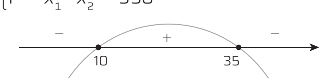
$\begin{cases} 2x + 2y = 90 \Rightarrow x + y = 45 \Rightarrow y = 45 - x \\ xy < 350 \end{cases}$

$x(45 - x) < 350$

$-x^2 + 45x - 350 < 0$

$-x^2 + 45x - 350 = 0$

$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 45 \\ P = x_1 \cdot x_2 = 350 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 10 \text{ e } x_2 = 35$



Assim: $0 < x < 10$ ou $x > 35$

Como $x + y = 45$ e $x = 45 - y$, temos:

$45 - y < 10$ ou $45 - y > 35$

$35 < y < 45 \Rightarrow 10 > y > 0$

Se $0 < x < 10$, então $35 < y < 45$.

Se $x > 35$, então $0 < y < 10$.

52. Resposta pessoal. Exemplo de problema: Deseja-se construir um canteiro de formato circular. O local onde o canteiro será construído tem o formato de um quadrado de 4 m² de área. Calcule o raio máximo desse canteiro.

53. Exemplo de problema: Determine m para que se tenha $m(x^2 - 4) > 0$, para todo x real.

TECNOLOGIA (P. 137)

1. a) De acordo com o gráfico construído na 2ª etapa, tem-se que $b = c = 0$. Então, $f(x) = |x|$.

b) De acordo com o gráfico construído na 4ª etapa, tem-se que $b = -2$ e $c = 0$. Então: $f(x) = |x - 2|$.

c) O valor do coeficiente b, quando diferente de zero, desloca o gráfico no eixo horizontal. No caso apresentado, $b = -2$, o gráfico foi deslocado duas unidades para direita, no eixo Ox.

2. Com o valor dos coeficientes a e b fixos em 0, ao alterar o valor do coeficiente c para -4, o gráfico da função é deslocado quatro unidades para cima, no eixo Oy. Já para $c = -4$, ocorre um deslocamento do gráfico em quatro unidades para baixo, no eixo Oy.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 138)

54. a) $|2{,}001| = 2{,}001$

b) $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$, pois $\sqrt{5} - 2 \simeq 0{,}24$ e, por isso, $\sqrt{5} - 2 > 0$.

c) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$

d) $\left|\frac{5}{6} - \frac{4}{3}\right| = \left|\frac{5-8}{6}\right| = \left|\frac{-3}{6}\right| = \left|\frac{-1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

55. a) $|x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{ para } x \geq 3 \\ 3 - x, \text{ para } x < 3 \end{cases}$

b) $|-2x + 8| = \begin{cases} -2x + 8, \text{ para } x \leq 4 \\ 2x - 8, \text{ para } x > 4 \end{cases}$

c) $|1 - x| = \begin{cases} 1 - x, \text{ para } x \leq 1 \\ x - 1, \text{ para } x > 1 \end{cases}$

d) Como $x^2 \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$: $|x^2| = x^2$

e) Como $x^2 + 1 \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$: $|x^2 + 1| = x^2 + 1$

f) $|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ para } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ 1 - x^2, \text{ para } -1 < x < 1 \end{cases}$

56. a) Verdadeira, pois pela definição temos que $|x| = x$, para $x \geq 0$, e $|x| = -x$, para $x < 0$.

b) Verdadeira, pois assim como em $|x|$, temos: $|-x| = -(-x) = x$, para $x \geq 0$, e $|-x| = -x$, para $x < 0$.

c) Verdadeira, pois $|x^2| = x^2$, assim como $|x|^2 = x^2$, ou, para $x \geq 0$, e $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$, para $x < 0$.

d) Verdadeira, pois:
- $|x| = x$, para $x \geq 0$ e, nesse caso, $x \geq x$;
- $|x| = -x$, para $x < 0$ e, nesse caso, $-x \geq x$.

57. O erro está na 1ª linha. Se $-2 < x + 3$, então $x + 3 > -2$, que resulta em $x > -5$.

A resolução correta seria:

$-2 < x + 3 < 2 \Rightarrow -5 < x < -1$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -1\}$.

58. Resposta pessoal. Sugestão de resposta:

Uma equação modular pode ser do tipo:

$|x + a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} x + a = b \\ x + a = -b \end{cases}$

Como a solução está no intervalo $[-4, 1]$, substituindo o valor de x pelos extremos do intervalo dado, podemos montar o seguinte sistema:

$\begin{cases} 1 + a = b \\ -4 + a = -b \end{cases}$

Somando as duas equações: $a = \frac{3}{2}$

Substituindo $a = \frac{3}{2}$ na primeira equação, temos $b = \frac{5}{2}$.

Portanto, a solução de $\left|x + \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{2}$ está no intervalo $[-4, 1]$.

59. a) Como o gráfico da função passa pelos pontos (3, 6) e (2, 4), substituindo os valores de x e y, podemos montar a seguinte equação: $ax + b = y$, se $x \geq 0$

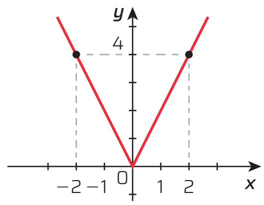
$\begin{cases} 3a + b = 6 \\ 2a + b = 4 \end{cases}$

Subtraindo uma equação da outra: $a = 2$

Substituindo $a = 2$ na primeira equação, temos $b = 0$.

Assim: $y = |2x|$.

b)



ID/BR

60. a) A função é do tipo $y = |ax^2 + bx + c|$ e passa pelos pontos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$. Então:

$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y, \text{ se } x \geq 0 \\ ax^2 + bx + c = -y, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

Com o ponto $(-1, 0)$, temos:

$a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$

E com os pontos (0, 1) e (1, 0), temos:

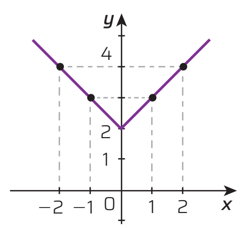
$\begin{cases} 0a + 0b + c = 1 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$

Adicionando as duas equações e substituindo $c = 1$, temos $a = -1$. Substituindo $a = -1$ e $c = 1$, temos $b = 0$.

Portanto, $y = |-x^2 + 1|$ representa o gráfico da função.

b) $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty[$

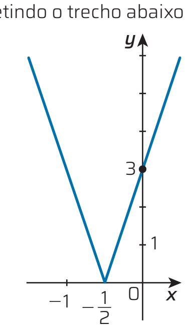
61. a) $y = |x| + 2$



ID/BR

b) $y = |-6x - 3|$

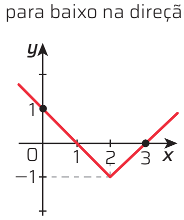
Conhecendo o gráfico de $g(x) = -6x - 3$, podemos obter o gráfico de $y = |g(x)|$ aproveitando o trecho acima do eixo Ox e refletindo o trecho abaixo desse eixo.



ID/BR

c) $y = |x - 2| - 1$

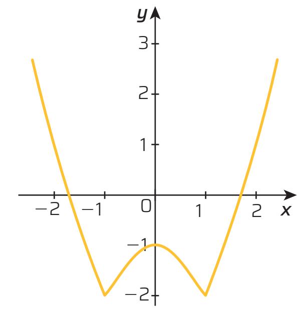
Conhecendo o gráfico de $g(x) = x - 2$, podemos obter o gráfico de $y = |x - 2|$ aproveitando o trecho acima do eixo Ox e refletindo o trecho abaixo desse eixo. Depois, deslocamos o gráfico uma unidade para baixo na direção do eixo Oy.



ID/BR

d) $y = |x^2 - 1| - 2$

Conhecendo o gráfico de $g(x) = x^2 - 1$, podemos obter o gráfico de $y = |x^2 - 1|$ aproveitando o trecho acima do eixo Ox e refletindo o trecho abaixo desse eixo. Depois, deslocamos o gráfico duas unidades para baixo na direção do eixo Oy.



ID/BR

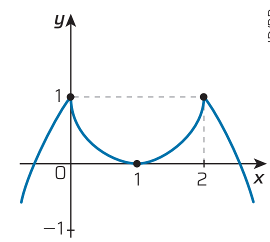
e) $y = -|x^2 - 2x| + 1$

Conhecendo o gráfico de $g(x) = x^2 - 2x$, podemos obter o gráfico de $|g(x)|$ aproveitando o trecho acima do eixo Ox e refletindo o trecho abaixo desse eixo.

Em seguida, obtemos $-|g(x)|$ refletindo todo o gráfico em relação ao eixo Ox.

Depois, deslocamos o gráfico uma unidade para cima na direção do eixo Oy.

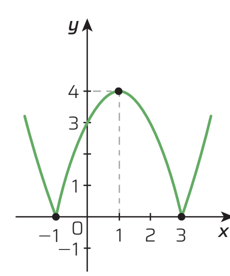
Desse modo, obtemos o gráfico a seguir.



ID/BR

f) $y = |x^2 - 2x - 3|$

Conhecendo o gráfico de $g(x) = x^2 - 2x - 3$, podemos obter o gráfico de $|g(x)|$ aproveitando o trecho acima do eixo Ox e refletindo o trecho abaixo desse eixo.



ID/BR

62. a) $f(x) = |4 - x^2|$

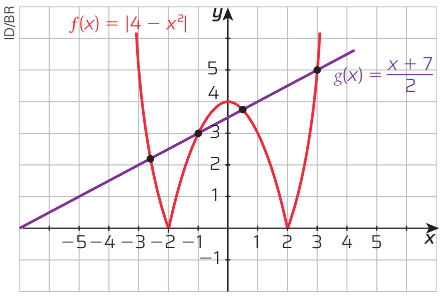
Para fazer o gráfico de $f(x)$, vamos nos apoiar no gráfico de $h(x) = 4 - x^2$.

$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

Construímos o gráfico de $h(x)$, mas a parte que fica abaixo do eixo Ox deve ser refletida em relação a esse eixo.

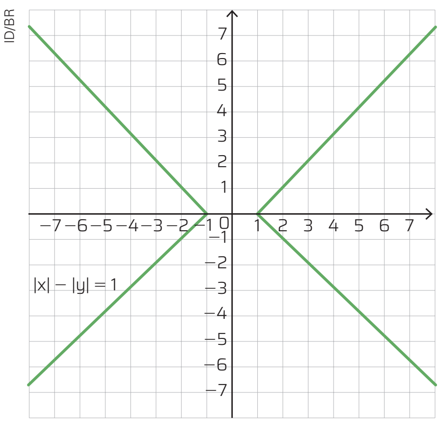
$g(x) = \frac{x + 7}{2}$

x	$g(x) = \frac{x + 7}{2}$	(x, y)
1	$g(1) = \frac{1 + 7}{2} = 4$	(1, 4)
3	$g(3) = \frac{3 + 7}{2} = 5$	(3, 5)
5	$g(5) = \frac{5 + 7}{2} = 6$	(5, 6)



b) Pelo gráfico, podemos verificar que as funções se encontram em 4 pontos.
Portanto, a equação possui 4 soluções.

63. Ao representar a equação $|x| - |y| = 1$ no plano, teremos quatro semirretas. Alternativa **a**.



64. Usando o fato de que $|x|^2 = x^2$, tem-se:

$|3x + 2| - 1 = x |3x + 2|^2 = (x + 1)^2$

$(3x + 2)^2 = (x + 1)^2$

$9x^2 + 12x + 4 = x^2 + 2x + 18x^2 + 10x + 3 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3}}{2 \cdot 8} \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Logo, $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{4}\right\}$

Alternativa **a**.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 139)

1. a) $t^2 + 16t + 64$
b) $4y^4 - 16y^2 + 16$
c) $9m^8 + 30m^4 + 25$
d) $100 - 80x + 16x^2$
e) $\frac{1}{4} + z + z^2$
f) $\frac{9}{16}m^4 - 9m^2 + 36$
g) $25z^4 - 30z^2m^3 + 9m^6$
h) $2 + 2\sqrt{14} + 7 = 2\sqrt{14} + 9$

2. a) $y^2 + 8y + 12$
b) $t^2 + 4t + 4$
c) $m^2 + 8m + 15$
d) $n^2 - 3n - 10$
e) $t^2 - 4t - 45$
f) $x^2 - 7x + 6$
g) $y^2 - 6y + 9$
h) $z^2 - 12z + 20$

3. a) $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
b) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
c) $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
d) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$
e) $x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$
f) $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$
g) $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$
h) $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$
i) $16 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$
j) $49 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 7$
k) $81 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 9$
l) $100 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 10$

4. a) $x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$
Portanto: $S = \{0, 1\}$
Seguindo esse mesmo raciocínio, vamos ter:
b) $S = \{0, -1\}$
c) $S = \{0, -2\}$
d) $S = \{0, 3\}$
e) $S = \{0, -3\}$
f) $S = \{0, 2\}$
g) $S = \{0, 8\}$
h) $S = \{0, -8\}$
i) $S = \{0, -6\}$
j) $S = \{0, 15\}$
k) $S = \{0, -15\}$
l) $S = \{0, 3\}$

5. a) $z(z - 3) = 0 \Rightarrow z = 0$ ou $z = 3$
b) $m\left(m - \frac{1}{5}\right) = 0 \Rightarrow m = 0$ ou $m = \frac{1}{5}$
c) $t\left(t + \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = -\frac{3}{4}$
d) $x(x + 1{,}5) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -1{,}5$
e) $k(k - 2{,}8) = 0 \Rightarrow k = 0$ ou $k = 2{,}8$
f) $n(n + 0{,}8) = 0 \Rightarrow n = 0$ ou $n = -0{,}8$
g) $x(x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -6$
h) $z\left(z - \frac{4}{7}\right) = 0 \Rightarrow z = 0$ ou $z = \frac{4}{7}$
i) $y(y + 3{,}34) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y = -3{,}34$
j) $x(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 5$

6. a) $t + \frac{1}{5} = 0$ ou $t - 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{5}$ ou $t = 2$
b) $m - 5 = 0$ ou $m + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow m = 5$ ou $m = -\frac{2}{3}$
c) $y + 1 = 0$ ou $y - 3{,}8 = 0 \Rightarrow y = -1$ ou $y = 3{,}8$
d) $n + 6 = 0$ ou $n + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow n = -6$ ou $n = -\frac{7}{2}$
e) $b - 4{,}5 = 0$ ou $b - \frac{3}{7} = 0 \Rightarrow b = 4{,}5$ ou $b = \frac{3}{7}$
f) $t + 10 = 0$ ou $t - 10 = 0 \Rightarrow t = -10$ ou $t = 10$
g) $x - 2{,}6 = 0$ ou $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 2{,}6$ ou $x = 7$
h) $k - 8 = 0$ ou $k + 1 = 0 \Rightarrow k = 8$ ou $k = -1$
i) $y - \sqrt{2} = 0$ ou $y + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}$ ou $y = -\sqrt{3}$

PARA RECORDAR (P. 140)

1.

n	1	2	3	4	5	6
n^2	1	4	9	16	25	36
n^3	1	8	27	64	125	216
n^4	1	16	81	256	625	1296
n^5	1	32	243	1024	3125	7776
n^6	1	64	729	4096	15625	46656

n	7	8	9	10
n^2	49	64	81	100
n^3	343	512	729	1000
n^4	2401	4096	6561	10000
n^5	16807	32768	59049	100000
n^6	117649	262144	531441	1000000

a) Os números pares.
b) 5
c) 6
d) 1, 9 e 1.
e) Sendo k esse último número da potência 9^n: $k = 1$, se n é par; $k = 9$, se n é ímpar.

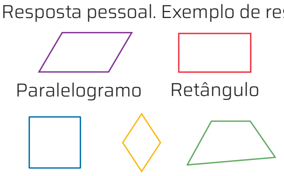
2. a) $(-3)^{23} < 0$, a base é negativa e o expoente é ímpar.
b) $(-123)^{27} < 0$, a base é negativa e o expoente é ímpar.
c) $(-12)^5 < 0$, a base é negativa e o expoente é ímpar.
d) Nenhum dos números, pois 2^8 tem base positiva e $(-2)^8$ tem expoente par.

3. 500 + 12% de 500 → 500 + 60 = 560

4. As porcentagens aproximadas são:
Paulo: 24%
Luiz: 13%
Carlos: 14%
Marcelo: 6%
João: 43%

5. a) 6% de R$ 3,45 → R$ 0,55
b) 62,7% de R$ 3,45 → R$ 2,16

6. a) Resposta pessoal. Exemplo de resposta:



Paralelogramo Retângulo
Quadrado Losango Trapézio

b) Sim, todos possuem dois pares de lados paralelos.
c) O quadrado, pois tem 4 ângulos retos e 4 lados congruentes.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 141)

1. a) Como são 5 os lugares a serem ocupados, a primeira pessoa a entrar pode escolher qualquer um dos 5 lugares. Ela tem, portanto, 5 opções.
A segunda pessoa terá apenas 4 opções de lugar para escolher, e assim por diante. A última pessoa a entrar terá apenas uma opção de lugar para ocupar.
Contando as possibilidades, temos: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
As 5 pessoas podem se sentar segundo 120 combinações diferentes.
b) Se apenas uma pessoa souber dirigir, essa pessoa só terá uma opção: ocupar o lugar do motorista (m).
A segunda pessoa pode escolher entre os 4 lugares restantes.
A terceira pessoa pode escolher entre os 3 lugares restantes.
Contando as possibilidades:
$1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
Há 24 maneiras de 5 pessoas ocuparem os lugares se apenas uma souber dirigir.

2. 7ª porteira:
$x - \frac{x}{2} - 1 = 1$
$x = 4$
6ª porteira:
$\frac{x}{2} - 1 = 4$
$x = 10$
5ª porteira:
$\frac{x}{2} - 1 = 10$
$x = 22$
4ª porteira:
$\frac{x}{2} - 1 = 22$
$x = 46$
3ª porteira:
$\frac{x}{2} - 1 = 46$
$x = 94$
2ª porteira:
$\frac{x}{2} - 1 = 94$
$x = 190$
1ª porteira:
$\frac{x}{2} - 1 = 190$
$x = 382$

Ele apanhou 382 maçãs no pomar.

3. Vamos analisar a primeira parte da regra: "Se Ana anda de patins, Carol também anda de patins". De acordo com essa informação, não podemos considerar que, se Carol anda de patins, Ana também anda de patins. Logo, não podemos afirmar nada sobre Ana ter andado ou não de patins. Agora, pela segunda parte da regra "Bruna anda de patins apenas quando Carol anda de bicicleta", temos que, se Carol andou de patins, logo, Bruna não pode ter andado de patins (ela só poderia ter andado de patins se a Carol tivesse andado de bicicleta).
Alternativa **d**.

MATEMÁTICA E ESPORTE (P. 142)

Conectando ideias

1. Resposta pessoal. O modelo matemático que descreve trajetórias parabólicas e os conhecimentos de Física se complementam, oferecendo informações valiosas que podem ser aplicadas em várias modalidades esportivas. O estudo da trajetória do objeto ou da pessoa em movimento parabólico permite que os atletas otimizem técnicas e ajustem ângulos e intensidade de forças, visando aumentar a eficiência de seus movimentos ou arremessos.

2. Se a medida do ângulo for maior que a ideal, o atleta subirá mais, mas não atingirá a distância horizontal máxima. Entretanto, se o ângulo for menor, o atleta voltará ao solo antes de atingir a distância horizontal desejada.

3. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 144)

1. A função do preço y em relação ao volume x é uma função afim, com coeficiente linear igual a 500 e coeficiente angular igual a 250. Logo, a função pode ser escrita como:
$y = 250x + 500$
Alternativa **d**.

2. A função $F(t)$ é quadrática, com coeficiente $a = -\frac{6}{5}$, isto é, a função possui ponto de máximo, representado pelo vértice da parábola, que pode ser calculado assim:

$$t_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{138}{12} = 11{,}5$$

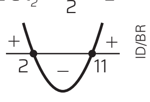
Como $11 < t < 12$, então, $2031 < t < 2032$.
Alternativa **c**.

3. A temperatura não positiva do alimento significa:
$F(t) \leqslant 0 \Rightarrow t^2 - 13t + 22 \leqslant 0$
$t^2 - 13t + 22 = 0$

$$t = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 22}}{2 \cdot 1} =$$

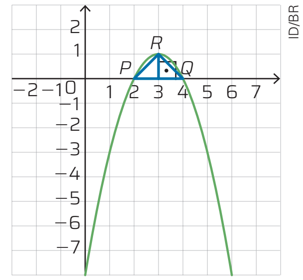
$$= \frac{13 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$t_1 = \frac{22}{2} = 11 \text{ e } t_2 = \frac{4}{2} = 2$$



Logo a temperatura é não positiva entre o intervalo de tempo de 2 a 11 minutos, totalizando 9 minutos.
Alternativa **b**.

4. Conforme o enunciado, sabe-se que os pontos P e Q são as raízes da função, ou seja, são os pontos em que o gráfico da função intercepta o eixo x. No gráfico a seguir, vemos que o segmento $\overline{PQ}$ é a base do triângulo cuja altura é relativa ao vértice R. Como a base é sempre a mesma, a maior área será aquela cuja altura seja maior. A maior altura é traçada quando R está localizado no valor máximo da função.



Logo, como R (3, 1) é o ponto do vértice da parábola cuja altura em relação a $\overline{PQ}$ é a maior possível, a área do triângulo PQR é:
$A = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
Alternativa **a**.

UNIDADE 2 GRANDEZAS EM GERAL E ÁREAS

CAPÍTULO 6 GRANDEZAS E MEDIDAS

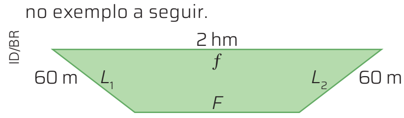
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 152)

1. Sendo p o diâmetro da Roda do Milênio, em polegada, temos que, se 1 pé equivale a 12 polegadas, então:
$p = 443 \cdot 12 = 5\,316$
Sendo c esse diâmetro, em centímetro, temos que, se 1 polegada equivale a 2,54 centímetros, então:
$c = 5\,316 \cdot 2{,}54 = 13\,502{,}64$
Sendo d esse diâmetro, em metro, temos que, se 1 metro equivale a 100 centímetros, então:
$d = 135{,}0264$
Alternativa **d**.

2. Como 1 metro equivale a aproximadamente 3,3 pés, então 6 000 m (metros) equivalem a 19 800 pés, pois $6\,000 \cdot 3{,}3 = 19\,800$.
Logo, $31\,000 - 19\,800 = 11\,200$.
Alternativa **c**.

3. Para cada módulo solar, temos que a área A, em m², é 1,65 m², pois $1{,}65 \cdot 1{,}00 = 1{,}65$.
Assim, se 1,65 m² de módulos solares gera 265 W de potência diária, então sendo x a área total mínima, em m², que será ocupada pelos módulos para gerar 2 120 W de potência diária, temos: $\frac{265}{1{,}65} = \frac{2\,120}{x} \Rightarrow x = 13{,}2 \text{ m}^2$
Alternativa **b**.

4. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes elaborem problemas que envolvam o cálculo de medidas de comprimento, como no exemplo a seguir.



Malu recebeu uma tarefa na aula de Geografia para observar o mapa dos muros da escola em que estuda. A escola de Malu tem formato de trapézio com 1 hectômetro de frente (F), 2 hectômetros de fundos (f) e 60 metros em cada uma das suas duas laterais (L_1 e L_2). No total, os muros da escola têm quantos centímetros?
Resposta: 42 000 cm.

5. Sendo x, y, e z as medidas de comprimento do retângulo azul, rosa e verde, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 111 = h - z + x \\ 80 = h - x + y \\ 82 = h - y + z \end{cases}$$

Adicionando as três equações, obtemos:
$111 + 80 + 82 = 3h \Rightarrow 91$
Alternativa **d**.

6. Como 1 m equivale a 1 000 mm e 1 cm a 10 mm, então 14,935 m equivalem a 14 935 mm e 10 cm equivalem a 100 mm.
Sendo n o número de tábuas necessárias para a execução da encomenda, então o número de espaços entre as tábuas é $n - 1$ e temos que:
$100n + 15(n - 1) = 14\,935 \Rightarrow n = 130$
Alternativa **c**.

7. a) Para converter a unidade anos-luz para quilômetros, sabe-se que 1 ano-luz equivale a 9,5 trilhões de quilômetros ou, em notação científica, $9{,}5 \cdot 10^{12}$ quilômetros. Como a distância entre a Terra e o exoplaneta Ross 128b é de 11 anos-luz, temos:
$9{,}5 \cdot 10^{12} \cdot 11 = 104{,}5 \cdot 10^{12}$

b) Como a massa da Terra é aproximadamente $5{,}97 \cdot 10^{14}$ kg e a massa do exoplaneta Ross 128b é de 1,3 vez a massa da Terra, temos: $(5{,}97 \cdot 10^{14} \text{ kg}) \cdot 1{,}3 = 7{,}761 \cdot 10^{14}$ kg

8. O percurso do veículo (x), em quilômetros. quando abastecido com 20 L de gasolina pode ser obtido através da relação:
$\frac{20}{1} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = 400$ km
Já o percurso do veículo (y), em quilômetros, quando abastecido com 20 L de etanol, pode ser obtido da seguinte forma:
$\frac{18}{1} = \frac{y}{20} \Rightarrow y = 360$ km
Logo, a diferença entre as distâncias percorridas com 20 L de gasolina e com 20 L de etanol é igual a 40 km. Isso significa que o veículo, quando abastecido com gasolina, se movimenta um tempo maior do que quando abastecido com etanol. Como em ambos os casos a velocidade do veículo é constante, pode-se relacioná-la com os 40 km percorridos a mais pelo veículo movido a gasolina, para encontrar o tempo (t) de movimentação do veículo com esse combustível:
$\frac{80}{1} = \frac{40}{t} \Rightarrow t = 0{,}5 \text{ h} = 30$ min
Alternativa **c**.

9. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:
Luiz quer fazer um pão com os seguintes ingredientes:
- 1 kg de farinha de trigo
- 120 g de fermento biológico
- 0,5 kg de queijo parmesão
- 300 g de água
- 80 g de gemas de ovos

Qual será a medida da massa desse pão em grama?
Sabendo que 1 kg equivale a 1 000 g, vamos multiplicar 1 kg por 1 000, para fazer a conversão de unidade da farinha de trigo, e 0,5 kg por 1 000 g, para fazer a conversão da unidade do queijo parmesão, conforme segue:
$1 \cdot 1\,000 = 1\,000$
$0{,}5 \cdot 1\,000 = 500$
Logo, $1\,000 + 120 + 500 + 300 + 80 = 2\,000$
Assim, a medida da massa do pão será 2 000 g.
Espera-se, ainda, o desenvolvimento de um problema que envolva grandezas derivadas, ou seja, a combinação de duas ou mais grandezas de base. Veja o exemplo a seguir.
Uma lebre ártica tem a velocidade média v_a de 60 km/h e uma lebre comum tem a velocidade média v_b de 55 000 m/h. Ambas as lebres estão em uma corrida. Qual chegará primeiro?
1 km equivale a 1 000 m. Assim, vamos calcular a razão entre a velocidade média da lebre comum e a medida 1 000 metros:
$v_b = \frac{55\,000}{1\,000} = 55$
Comparando as velocidades médias da lebre ártica (60 km/h) e da lebre comum (55 km/h), podemos concluir que a lebre ártica é mais veloz e completará o percurso primeiro.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 156)

10. **a)** Vamos multiplicar a velocidade de 44,2 Tbps, encontrada pelos pesquisadores, por 1 000 Gb e por 1 000 Mb, conforme segue:

$44,2 \cdot 1\,000 \cdot 1\,000 = 44\,200\,000$

Logo, a diferença entre a velocidade de transmissão de dados encontrada pelos pesquisadores e a velocidade média da internet no Brasil é 44 199 975,23 Mbps, pois:

$44\,200\,000 - 24,77 = 44\,199\,975,23$

b) A diferença entre a velocidade de transmissão de dados encontrada pelos pesquisadores e a velocidade média da internet dos Estados Unidos é 44 199 949,8 Mbps, pois:

$44\,200\,000 - 50,2 = 44\,199\,949,8$

11. Como 1 GB = 1 024 MB, então 1,5 GB é igual a:

$1\,024 \text{ MB} + \frac{1\,024}{2} \text{ MB} = 1\,536 \text{ MB}$

A velocidade de *download* é 20 MB/s. Como o arquivo a ser baixado tem 1 536 MB, o tempo (t) que levará o processo é

$\frac{20}{1} = \frac{1\,536}{t} \Rightarrow t = 76,8 \text{ s}$

Alternativa **c**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 159)

12. **a)** $\frac{2,5}{10\,000\,000\,000} = \frac{2,5}{10^{10}} = 2,5 \cdot 10^{-10}$

b) $4,32 \cdot 100\,000\,000\,000 = 4,32 \cdot 10^{11}$

c) $\frac{9,87}{100\,000\,000\,000\,000} = \frac{9,87}{10^{14}} =$
$= 9,87 \cdot 10^{-14}$

d) $\frac{1,235}{100\,000\,000\,000} = \frac{1,235}{10^{11}} =$
$= 1,235 \cdot 10^{-11}$

13. Como um ano tem 365 dias, um dia tem 24 horas e uma hora tem 60 minutos:

$365 \cdot 24 \cdot 60 = 525\,600$

Ou seja, um ano tem 525 600 minutos.

Sabendo-se que o coração bombeia 5 L de sangue a cada minuto, segue que:

$5 \text{ L/min} \cdot 525\,600 \text{ min} = 2\,628\,000 \text{ L}$

Em notação científica:

$2\,628\,000 \text{ L} = (2,628 \cdot 1\,000\,000) \text{ L} =$
$= 2,628 \cdot 10^6 \text{ L}$

14. Para realizar a conversão de 97 000 km para metros, multiplicaremos o valor por 1 000:

$97\,000 \cdot 1\,000 = 97\,000\,000$

Para realizar a conversão de 97 000 km para centímetros, multiplicaremos o valor por 100 000:

$97\,000 \cdot 100\,000 = 9\,700\,000\,000$

Medidas expressas em notação científica:

$97\,000\,000 = 9,7 \cdot 10\,000\,000 = 9,7 \cdot 10^7$

$9\,700\,000\,000 = 9,7 \cdot 1\,000\,000\,000 = 9,7 \cdot 10^9$

Portanto, $9,7 \cdot 10^7$ m ou $9,7 \cdot 10^9$ cm.

15. $5,5 \cdot 1\,000 \cdot 1\,000 = 5,5 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 5,5 \cdot 10^6$

Assim, há $5,5 \cdot 10^6$ mm^3 de sangue no corpo dessa pessoa. Como há 5 milhões de glóbulos vermelhos a cada mm^3 de sangue, então há $2,75 \cdot 10^{13}$ glóbulos vermelhos no corpo dessa pessoa, pois: $5 \cdot 10^6 \cdot 5,5 \cdot 10^6 = 2,75 \cdot 10^{13}$

16. Para encontrar a distância entre a Terra e a estrela V12, é necessário realizar a conversão da distância em anos-luz para quilômetros.

Como 1 ano-luz equivale a 9,5 trilhões de quilômetros (ou $9,5 \cdot 10^{12}$ km), então a distância entre a Terra e a estrela V12 é de $9,88 \cdot 10^{19}$ km, pois:

$10,4 \cdot 10^6 \cdot 9,5 \cdot 10^{12} = 9,88 \cdot 10^{19}$

17. 100 micrômetros são:

$\frac{1}{1\,000\,000} \times 100 \text{ m} = 1,0 \cdot 10^{-4}$

Alternativa **c**.

18. $4\,500\,000\,000 \cdot 365 \cdot 24 =$
$= 39\,420\,000\,000\,000 = 3,942 \cdot 10^{13}$

Alternativa **a**.

19. **a)** $584 = 5,84 \cdot 100 = 5,84 \cdot 10^2$

Os algarismos exatos são o 5 e o 8; o algarismo duvidoso é o 4.

b) $0,0806 = \frac{8,06}{100} = 8,06 \cdot 10^{-2}$

Os algarismos exatos são o 8 e o 0; o algarismo duvidoso é o 6.

c) $39 = 3,9 \cdot 10^1 = 3,9 \cdot 10$

O algarismo exato é o 3; o algarismo duvidoso é o 9.

d) $39,0 = 3,90 \cdot 10^1 = 3,90 \cdot 10$

Os algarismos exatos são o 3 e o 9; o algarismo duvidoso é o 0.

20. Os zeros que vêm à esquerda do primeiro algarismo significativo diferente de zero, antes ou depois da vírgula, não são significativos. Assim, temos quatro algarismos significativos neste número: 9, 0, 7 e 6.

Alternativa **b**.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 160)

1. **a)** $10^5 = \frac{1}{0,00001} = 100\,000$

b) $10^{-4} = \frac{1}{10\,000} = 0,0001$

c) $10^4 = \frac{1}{0,0001} = 10\,000$

d) $10^{-7} = \frac{1}{10\,000\,000} = 0,0000001$

e) $10^7 = \frac{1}{0,0000001} = 10\,000\,000$

2. **a)** $8\,500\,000 = 8,5 \cdot 10^6 \Rightarrow n = 6$

b) $1\,500\,000\,000 = 1,5 \cdot 10^9 \Rightarrow n = 9$

c) $300\,000\,000 = 3 \cdot 10^8 \Rightarrow n = 8$

d) $0,000006 = 6 \cdot 10^{-6} \Rightarrow n = -6$

e) $0,0000055 = 5,5 \cdot 10^{-6} \Rightarrow n = -6$

f) $0,000098 = 9,8 \cdot 10^{-5} \Rightarrow n = -5$

3. **a)** $4 \cdot 10^6 = 4\,000\,000$ e $400\,000 = 4 \cdot 10^5$

b) $3\,500\,000\,000 = 35 \cdot 10^8$ e
$35 \cdot 10^9 = 35\,000\,000\,000$

c) $0,000000021 = 2,1 \cdot 10^{-8}$ e
$2,1 \cdot 10^9 = 2\,100\,000\,000$

d) $1\,600\,000 = 1,6 \cdot 10^6$ e
$1,6 \cdot 10^5 = 160\,000$

e) $8\,000\,000\,000 = 8 \cdot 10^9$ e $8^9 = 134\,217\,728$

f) $4,8 \cdot 10^{-5} = 0,000048$ e
$0,00048 = 4,8 \cdot 10^{-4}$

PARA RECORDAR (P. 160)

1. $C_f = 100 + 5x$

$C_r = 60 + 6x$

Como queremos descobrir a distância mínima para a qual o transporte ferroviário é mais vantajoso que o rodoviário, precisamos descobrir o valor de x que torne C_f menor que C_r, de acordo com a relação estabelecida pela seguinte inequação: $C_r > C_f$

$60 + 6x > 100 + 5x \Rightarrow x > 40$

2. Como $\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$, então o filho mais novo recebeu $\frac{3}{8}$ da herança, pois $\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

$\frac{3}{8}$ de R$ 320 000,00: $\frac{3}{8} \cdot 320\,000 = 120\,000$

Logo, o filho mais novo recebeu R$ 120 000,00.

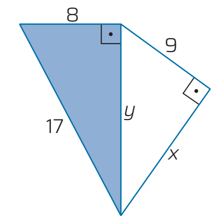
Alternativa **c**.

3. Segundo o enunciado, as medidas α, β e δ dos ângulos são iguais, e o quarto ângulo mede 60°. Assim, temos:

$\alpha = \beta = \delta$

$\alpha + \alpha + \alpha + 60° = 360° \Rightarrow \alpha = 100°$

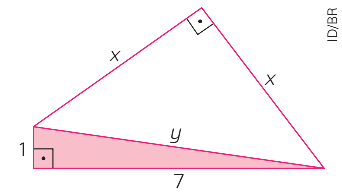
4. **a)**



$17^2 = 8^2 + y^2 \Rightarrow y = 15$

No triângulo de lados medindo x, 9 e 15, temos: $15^2 = 9^2 + x^2 \Rightarrow x = 12$

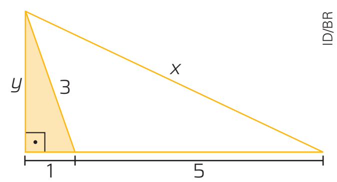
b)



$y^2 = 7^2 + 1^2 \Rightarrow y = 5\sqrt{2}$

No triângulo de lados medindo x, x e $5\sqrt{2}$, temos: $(5\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow x = 5$

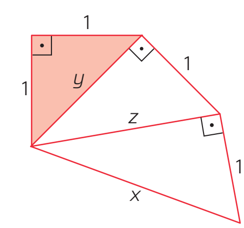
c)



No triângulo de lados medindo 3, 1 e y, temos: $3^2 = 1^2 + y^2 \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$

No triângulo de lados medindo x, 6 e $2\sqrt{2}$, temos: $x^2 = 6^2 + (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{11}$

d)

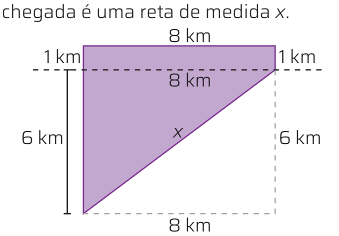


No triângulo de lados medindo 1, 1 e y, temos: $y^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow y = \sqrt{2}$

No triângulo de lados medindo 1, y e z, temos: $z^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 \Rightarrow z = \sqrt{3}$

No triângulo de lados medindo 1, z e x, temos: $x^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow x = 2$

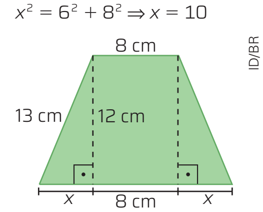
5. A distância entre os pontos de partida e de chegada é uma reta de medida x.



É possível notar que existe um triângulo retângulo de catetos medindo 6 e 8 e hipotenusa medindo x, complementar a esse polígono.

$x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x = 10$

6.



$13^2 = 12^2 + x^2 \Rightarrow x = 5$

Como temos dois triângulos de lado de medida x e um retângulo de lado de medida 8 compondo a base maior, calculamos a medida b da base:

$b = 2x + 8 \Rightarrow b = 18$

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 161)

1. Analisando cada alternativa, temos:
   a) Às 23 horas o animal está na toca.
   b) Correto.
   c) Se afasta da toca entre 18 e 19 horas e se aproxima entre 19 e 20 horas.
   d) Entre 17 e 23 horas, esteve na toca duas vezes.
   e) Às 19 horas estava um pouco mais que 14 cm distante da toca.

   Alternativa **b**.
2. Não sabemos para onde Carlitos está olhando e não sabemos se Benedita está ou não está de óculos.
   a) Nesse caso, se Benedita usar óculos, ela olhará para Carlitos, que não usa óculos, e a alternativa estará correta. Porém, se Benedita não usar óculos, temos que Armando, que usa óculos, está olhando para ela, e assim a alternativa também estará correta.
   b) Não temos certeza se Benedita está ou não de óculos; logo, não podemos ter certeza se a afirmação é verdadeira.
   c) Não temos certeza se Benedita está ou não de óculos; logo, não podemos ter certeza se a afirmação é verdadeira.
   d) Não sabemos para onde Carlitos está olhando.
   e) Não sabemos para onde Carlitos está olhando.

   Alternativa **a**.
3. Analisando os dados da questão, observamos que, nas alternativas **a** e **c**, as larguras indicadas ultrapassam a largura máxima da placa; e, nas alternativas **b** e **d**, os "pesos" indicados ultrapassam o peso máximo da placa.

   Alternativa **e**.

MATEMÁTICA E UNIDADES DE MEDIDA (P. 162)

Conectando ideias

1. $v = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Assim, temos:

   $v = \dfrac{1}{\dfrac{1}{299\,792\,458}} = 299\,792\,458$

   Fazendo a relação com outras medidas de tempo, temos:

Medida de tempo	Distância percorrida pela luz
1 segundo	299 792 458 metros
1 minuto	17 987 547 480 metros
1 dia	25 902 068 371 200 metros

   Para as distâncias, temos:

Medida de distância	Tempo que a luz leva para percorrer
Entre o Sol e a Terra (150 milhões de quilômetros)	500 segundos (cerca de 8 minutos)
Entre a Lua e a Terra (384 400 quilômetros)	1,3 segundo
Entre o Sol e Plutão (5,9 bilhões de quilômetros)	19 680 segundos (cerca de 5,5 horas)

2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes apresentem os dados e os contextos históricos das definições, procurando entender as razões para as escolhas iniciais e as posteriores mudanças, que foram acontecendo porque as medidas estavam relacionadas a medidas mutáveis, como visto no caso do cilindro de platina-irídio, o que conferia imprecisões aos trabalhos científicos em geral. A comunidade científica trabalhou para alterar isso, baseando as unidades de medidas em constantes para determinar as medidas em parâmetros que não variam ou que variam muito menos que os parâmetros anteriores.

CAPÍTULO 7 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 166)

1. a) O perímetro de uma figura plana é calculado somando-se as medidas de todos os seus lados. Assim, podemos representar a medida do perímetro P do quadrado da seguinte maneira:

   $P = \ell + \ell + \ell + \ell = 4\ell$

   Conhecendo a medida do perímetro (24 cm) dado pelo enunciado, substituímos P por 24 na equação para determinar a medida do lado:

   $P = 4\ell \Rightarrow 24 = 4\ell \Rightarrow \ell = 6$

   Assim, como o lado mede 6 cm, temos:

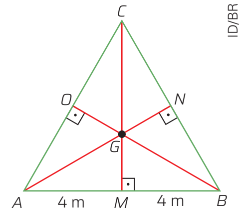
   $d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow d = 6\sqrt{2}$ cm

   b) A distância d do centro do quadrado a cada lado é dada pela equação $d = \dfrac{1}{2}\ell$.

   Conhecendo a medida do lado (6 cm), calculada no item anterior, obtemos:

   $d = \dfrac{1}{2}\ell \quad \Rightarrow \quad d = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \Rightarrow d = 3$ cm
2. a) Como a medida do perímetro do triângulo equilátero ABC é 24 m, cada lado mede 8 m ($24 : 3 = 8$).

   Sabemos que a altura relativa a um lado de um triângulo equilátero divide esse lado em duas partes de mesma medida. Além disso, sabemos que todas as alturas têm a mesma medida. Assim, representando o triângulo equilátero ABC, suas alturas e o ponto G, temos:



   $CM = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$; como $\ell = 8$ cm, então:

   $CM = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CM = 4\sqrt{3}$ m

   b) $GM = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{6} = \dfrac{8\sqrt{3}}{6} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

   Podemos calcular a medida do segmento CG fazendo:

   $CM = CG + GM$

   $4\sqrt{3} = CG + \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CG = 4\sqrt{3} - \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CG = \dfrac{8\sqrt{3}\text{ m}}{3}$
3. a) Cada quadradinho da malha equivale a um quadrado de 1 cm² e temos 8 quadradinhos inteiros dentro do terreno e 14 quadradinhos inteiros cobrindo o terreno todo.

   Assim, a área por falta do terreno é 8 cm² e a área por excesso do terreno é 14 cm². Fazendo a média aritmética das duas áreas, temos:

   $\dfrac{8 + 14\text{ cm}^2}{2} = \dfrac{22\text{ cm}^2}{2} = 11\text{ cm}^2$

   b) Cada quadradinho da malha equivale a um quadrado de 1 cm² e temos 15 quadradinhos inteiros dentro do terreno e 34 quadradinhos inteiros cobrindo o terreno todo.

   Assim, a área por falta do terreno é 15 cm² e a área por excesso do terreno é 34 cm².

   Fazendo a média aritmética das duas áreas, temos:

   $\dfrac{15 + 34\text{ cm}^2}{2} = \dfrac{49\text{ cm}^2}{2} = 24{,}5\text{ cm}^2$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 171)

4. a) Conhecendo a medida do lado ($3\sqrt{2}$ cm), dada pelo enunciado, temos:

   $A = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow A = 18\text{ cm}^2$

   b) Conhecendo as medidas do lado (6 cm) e da altura (9 cm), dadas pelo enunciado, temos:

   $A = 6 \cdot 9 \Rightarrow A = 54\text{ cm}^2$

   c) Conhecendo as medidas do lado (5 cm) e da altura (8 cm), dadas pelo enunciado, temos:

   $A = 5 \cdot 8 \Rightarrow A = 40\text{ cm}^2$

   d) Conhecendo as medidas da diagonal menor (12 cm) e da diagonal maior (16 cm), dadas pelo enunciado, temos:

   $A = \dfrac{12 \cdot 16}{2} \Rightarrow A = 96\text{ cm}^2$

e) A medida da área de um trapézio é descrita pela fórmula $A = \frac{(b+B)\cdot h}{2}$ e depende das medidas de sua base menor, *b*, de sua base maior, *B*, e de sua altura, *h*.

Conhecendo as medidas da base menor (4 cm), da base maior (10 cm) e da altura (5 cm), dadas pelo enunciado, temos:

$A = \frac{(4+10)\cdot 5}{2} \Rightarrow A = 35\text{ cm}^2$

5. Sabendo que 1 hm = 100 m, temos:
$1\text{ hm}^2 = (100 \cdot 100)\text{ m}^2 = 10\,000\text{ m}^2$
Dessa maneira, temos que 8 ha equivalem a 8 hm² e, como cada hm² equivale a 10 000 m², temos: 8 ha = 80 000 m².

Alternativa **e**.

6. Podemos dividir a área da granja em 2 retângulos, um cuja área representaremos por A_1 e ou outro, por A_2.

$A_1 = \left(54 - x - \frac{x}{3}\right)\cdot x$ e $A_2 = \frac{x}{3}\cdot 30$

$A_{granja} = A_1 + A_2 = \left(54 - x - \frac{x}{3}\right)\cdot x + \frac{x}{3}\cdot 30$

$A_{granja} = 54x - x^2 - \frac{x^2}{3} + 10x$

$A_{granja} = 64x - \frac{4x^2}{3}$

Como a área está em função de x, então a área máxima corresponde ao y_V dessa função, em que: $a = -\frac{4}{3}$, $b = 64$ e $c = 0$.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left(64^2 - 4\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot 0\right)}{4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)} = 768$$

Portanto, a maior área possível para essa granja é 768 m².

Alternativa **a**.

7.
- Sendo A_s a medida da área do semicírculo de raio *r* e diâmetro *d*, temos:

  $A_s = \frac{\pi r^2}{2}$ e $r = \frac{d}{2} = \frac{40}{2} = 20$

  $A_s = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{3{,}14\cdot 20^2}{2} = 628$

- Sendo A_r a medida da área do retângulo de lado *d* e de altura $h - r$, temos:

  $A_r = d\cdot(h - r) = 40\cdot(60 - 20)x = 1\,600$

  Assim, a medida *A* da área total da placa, é:

  $A = A_s + A_r = 628 + 1\,600 = 2\,228$

  Logo, a área de dez placas é igual a 22 280.

  Alternativa **b**.

8. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes criem problemas envolvendo terrenos representados por figuras planas ou combinações delas. A resolução dos problemas deve envolver o cálculo das áreas por meio das fórmulas estudadas no capítulo. É importante que os estudantes utilizem medidas e suas respectivas unidades, tanto no problema quanto em sua resolução. Segue um exemplo de resposta esperada:

- Eduardo vai plantar grama em toda a superfície de um terreno com formato quadrado com lados medindo 15 m. Qual será o custo total de plantio de grama, sabendo que a empresa contratada cobra R$ 22,30 por metro quadrado de grama e que não houve desperdício.

Resolução:

Primeiro, devemos calcular a medida da área do terreno em que será plantada a grama. Dessa maneira, temos: $A_{terreno} = 15^2 = 225$

Logo, serão necessários 225 m² de grama. Como cada 1 m² custa R$ 22,30, calcula-se o custo *C*: $C = 225\cdot 22{,}30 = 5\,017{,}50$

Logo, o custo total do plantio de grama será de R$ 5 017,50.

9. **a)** A medida do perímetro *P* de um triângulo equilátero é dada pela adição dos seus três lados de medida *x*. Assim:

$P = x + x + x = 3x$

Logo, a função para calcular a medida do perímetro do triângulo equilátero é $P = 3x$.

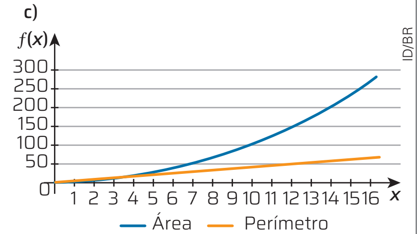
A medida da área *A* do triângulo equilátero é dada pela fórmula $A = \frac{xh}{2}$ e depende das medidas de seu lado, *x*, e de sua altura, *h*.

A medida da altura do triângulo equilátero é dada pela fórmula $h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ e depende da medida de seu lado, *x*. Assim:

$A = \frac{x}{2}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

b) As funções obtidas são de tipos diferentes. A função utilizada para calcular a medida do perímetro, $P = 3x$, é uma função cuja incógnita *x* está elevada à potência de grau 1, logo, é uma função de primeiro grau. Já a função utilizada para calcular a área, $A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, é uma função cuja incógnita está elevada ao expoente 2, portanto, é uma função de segundo grau. Essas funções têm comportamentos diferentes para valores iguais da incógnita.

c)



O gráfico da medida do perímetro do triângulo equilátero é uma reta (característica de uma função de primeiro grau) crescente, restrita ao 1º quadrante do plano cartesiano, pois tanto a variável *x* (medida do lado) quanto a medida do perímetro e da área (indicadas no gráfico por *f*(*x*)) sempre serão positivas.

No caso da função que descreve a medida do perímetro, *P* será sempre o triplo de *x*. Essa proporção será mantida.

Já no gráfico da medida da área do triângulo equilátero, não se observa esse padrão linear. Por conta de a variável *x* estar elevada à segunda potência, ela aumenta cada vez mais (a inclinação entre um ponto e o seguinte é cada vez maior), fazendo com que não seja um aumento proporcional, mas exponencial.

d)
- Quadrado

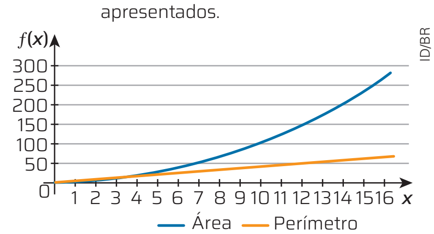
  A medida do perímetro *P* de um quadrado é dada pela soma dos seus quatro lados de medida *x*. Assim:

  $P = x + x + x + x = 4x$

  A medida da área *A* do quadrado é descrita pela fórmula $A = x\cdot x = x^2$ e depende das medidas de seu lado de medida *x*.

  Logo, a função dependente da medida do lado para determinar a medida da área *A* do quadrado é $A = x^2$.

  Da mesma maneira que o gráfico do item anterior, os gráficos se comportam de forma linear e exponencial, respectivamente, na ordem em que foram apresentados.



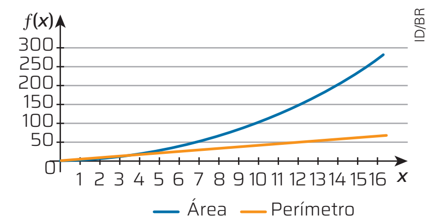
- Hexágono regular

  A medida do perímetro *P* de um hexágono regular é dada pela soma dos seus seis lados de medida *x*. Assim:

  $P = x + x + x + x + x + x = 6x$

  A medida da área *A* do hexágono regular é descrita pela fórmula $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$ e depende das medidas de seu lado, *x*.

  As funções obtidas são de tipos diferentes. A função utilizada para calcular a medida do perímetro, $P = 6x$, é uma função cuja incógnita *x* está elevada à potência de grau 1, logo, é uma função de primeiro grau. Já a função utilizada para calcular a medida da área, $A = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$, é uma função cuja incógnita está elevada ao expoente dois, portanto, é uma função de segundo grau.



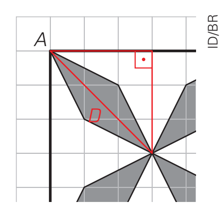
Conforme é possível observar no gráfico, o comportamento é análogo aos dois outros exemplos explorados, pelos mesmos motivos.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 177)

10. A medida da área de um quadrado de lado ℓ é ℓ². Assim: $A = 12^2 = 144$

A parte escura é composta de 16 losangos. A medida da área do losango, A_l, é $A_l = \frac{D\cdot d}{2}$.

A medida *D* pode ser obtida no triângulo retângulo destacado na imagem a seguir.



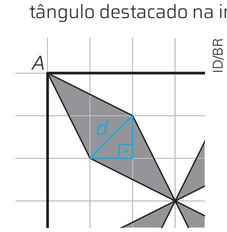
Assim:

$D^2 = 3^2 + 3^2$

$D^2 = 2\cdot 3^2$

$D = 3\sqrt{2}$

A medida *d* pode ser obtida no triângulo retângulo destacado na imagem a seguir.



Assim:

$d^2 = 1^2 + 1^2$

$d = \sqrt{2}$

Sabendo as medidas da diagonal maior, *D*, e da diagonal menor, *d*, temos: $A_l = \frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 3$

Sendo A_e a medida da área de toda parte escura e A_l a medida da área de cada losango, temos: $A_e = 16\cdot A_l = 16\cdot 3 = 48$

Sendo A_c a medida da área de toda parte clara e *A* a medida da área do quadrado *ABCD*, temos: $A_c = A - A_e = 144 - 48 = 96$

Assim, a razão entre as medidas das áreas da parte escura e da parte clara é dada por:

$\frac{A_e}{A_c} = \frac{48}{96} = \frac{1}{2}$

Alternativa **a**.

11. Sendo a_{ih} a medida de um ângulo interno de cada hexágono, temos: $a_{ih} = \dfrac{180°(n-2)}{n}$.

Assim: $a_{ih} = \dfrac{180°(6-2)}{6} = 120°$

Sendo a_{iq} a medida de um ângulo interno de cada quadrado, temos: $a_{iq} = \dfrac{180°(n-2)}{n}$.

Assim: $a_{iq} = \dfrac{180°(4-2)}{4} = 90°$

Sendo a_{it} a medida de um ângulo interno de cada quadrado, temos: $a_{it} = \dfrac{180°(n-2)}{n}$.

Assim: $a_{it} = \dfrac{180°(3-2)}{3} = 60°$

Como a soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos com vértices sobrepostos deve ser 360°, temos que:

- entre dois quadrados, teremos um triângulo equilátero, pois:

  $a_{iq} + a_{iq} + a_{ih} = 90° + 90° + 120° = 300°$
- entre dois quadrados e um triângulo equilátero, teremos um triângulo retângulo isósceles, pois:

  $a_{iq} + a_{it} + a_{ih} = 90° + 60° + 120° = 270°$

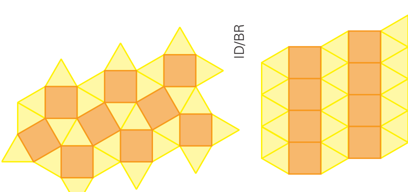
Assim, os seis ladrilhos serão compostos de dois triângulos equiláteros e quatro triângulos retângulos isósceles.

Alternativa **d**.

12. a) Os mosaicos regulares são formados por polígonos regulares, ou seja, aqueles que têm lados e ângulos internos com a mesma medida. Na construção de um mosaico regular, deve-se utilizar um único modelo de polígono, sendo este triângulo equilátero, quadrado ou hexágono, de modo que a soma das medidas dos ângulos das figuras que concorrem em um vértice deve ser 360°.

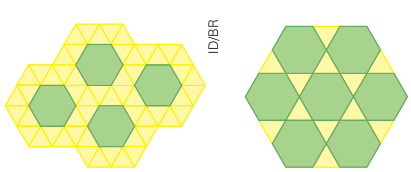
b) São oito as possibilidades de construção de mosaicos semirregulares:

- Triângulos equiláteros e quadrados (duas configurações diferentes).



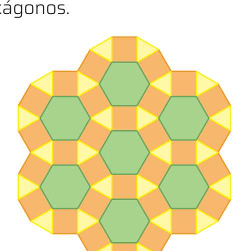
ID/BR

- Triângulos equiláteros e hexágonos (duas configurações diferentes).



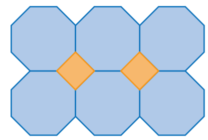
ID/BR

- Triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos.



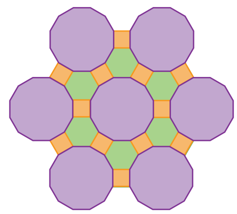
ID/BR

- Quadrados e hexágonos.



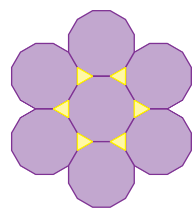
ID/BR

- Quadrados, hexágonos e dodecágonos.



ID/BR

- Triângulos equiláteros e dodecágono.



ID/BR

c) Os mosaicos semirregulares podem ser formados por dois ou mais tipos de polígonos regulares, em que a soma da medida dos ângulos das figuras que concorrem em um vértice deve ser 360°.

d) Nesse caso, deveríamos considerar quatro polígonos regulares diferentes.

Supondo que escolhamos os quatro polígonos regulares com o menor valor de medidas de ângulos internos: triângulo: 60°; quadrado: 90°; pentágono: 108°; hexágono: 120°.

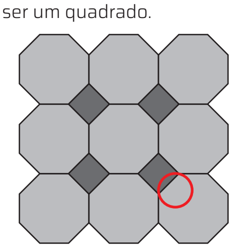
Temos que a soma das medidas dos ângulos internos desses polígonos regulares ao redor de um mesmo vértice é 378°, que ultrapassa uma volta completa de 360°, ou seja, haveria sobreposição de figuras ao colocá-las ao redor de um vértice. Assim, concluímos que não é possível ladrilhar um plano com quatro (ou mais) tipos de polígonos regulares.

13. As medidas dos ângulos internos do octógono são dadas por meio do problema (na tabela) e correspondem a 135°.

A soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos com vértices sobrepostos deve ser 360°. No encontro entre dois octógonos, temos que a soma das medidas dos seus ângulos internos é 270°. Assim, calcula-se a diferença entre a medida de uma volta completa (360°) e a soma das medidas dos ângulos dos dois octógonos: 360° − 270° = 90°

Logo, é necessária uma figura com ângulo interno de 90° para completar o ladrilhamento. O quadrado é a única figura de ângulos internos de 90° disponível na tabela.

Portanto, o outro tipo de polígono escolhido deverá ser um quadrado.

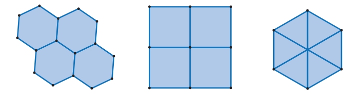


ID/BR

Alternativa **b**.

TECNOLOGIA (P. 178)

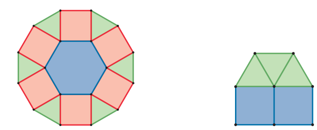
1. Espera-se que os estudantes apresentem a construção de polígonos regulares, como os exemplos a seguir.



Mosaico construído com hexágonos regulares. | Mosaico construído com quadrados. | Mosaico construído com triângulos equiláteros.

Ilustrações: ID/BR

2. Também se espera que os estudantes desenvolvam o exercício mais profundamente, apresentando a construção com a combinação de polígonos semirregulares, como seguem os exemplos a seguir.



Mosaico construído com hexágono regular, quadrados e triângulos isósceles. | Mosaico construído com quadrados e triângulos equiláteros.

Ilustrações: ID/BR

3. A resposta depende dos mosaicos criados pelos estudantes.

4. Resposta esperada: triângulo equilátero, quadrado e hexágono.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 179)

1.

a) 90° − 12° = 78°	**f)** 90° − 68° = 22°
b) 90° − 27° = 63°	**g)** 90° − 76° = 14°
c) 90° − 35° = 55°	**h)** 90° − 84° = 6°
d) 90° − 41° = 49°	**i)** 90° − 3° = 87°
e) 90° − 59° = 31°	**j)** 90° − x

2.

a) 180° − 37° = 143°	**f)** 180° − 42° = 138°
b) 180° − 79° = 101°	**g)** 180° − 87° = 93°
c) 180° − 98° = 82°	**h)** 180° − 124° = 56°
d) 180° − 105° = 75°	**i)** 180° − 161° = 19°
e) 180° − 156° = 24°	**j)** 180° − y

3. Dois ângulos são complementares se a soma de suas medidas é 90°.

Chamaremos a medida do primeiro ângulo de x e a medida do segundo de y.

Os ângulos de medidas x e y se relacionam, sendo a medida do segundo o dobro da medida do primeiro, conforme segue:

$y = 2x$

Sabendo que a soma das medidas dos ângulos resulta em 90° e substituindo y por $2x$, temos:

$x + y = 90° \Rightarrow x + 2x = 90° \Rightarrow x = 30°$

Como a medida do segundo ângulo é o dobro da medida do primeiro, substituímos y por $2x$ e x por 30°. Assim, temos:

$y = 2x \Rightarrow y = 2 \cdot 30° \Rightarrow y = 60°$

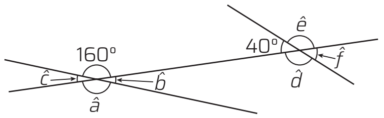
4. Dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas é 180°. Chamaremos a medida do primeiro ângulo de x e a medida do segundo de y. Os ângulos de medidas x e y se relacionam, sendo a medida do segundo a metade da medida do primeiro, conforme segue:

$y = \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2y$

Sabendo que a soma das medidas dos ângulos é 180° e substituindo x por $2y$, temos:

$x + y = 180° \Rightarrow 2y + y = 180° \Rightarrow y = 60°$

Como o primeiro ângulo mede o dobro do segundo, temos: $x = 2y = 2 \cdot 60° = 120°$

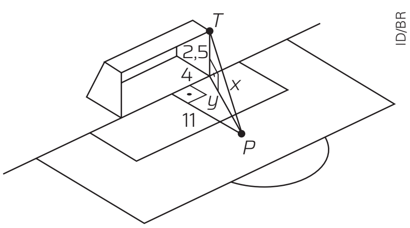
5. 

O ângulo $\hat{a}$ é oposto pelo vértice ao ângulo de 160°. Logo, $\hat{a} = 160°$.
O ângulo $\hat{b}$ é suplementar ao ângulo $\hat{a}$. Logo, $\hat{b} = 20°$.
O ângulo $\hat{c}$ é oposto pelo vértice ao ângulo $\hat{b}$. Logo, $\hat{c} = 20°$.
O ângulo $\hat{f}$ é oposto pelo vértice ao ângulo de 40°. Logo, $\hat{f} = 40°$.
O ângulo $\hat{d}$ é suplementar ao ângulo $\hat{f}$. Logo, $\hat{d} = 140°$.
O ângulo $\hat{e}$ é oposto pelo vértice ao ângulo $\hat{d}$. Logo, $\hat{e} = 140°$.

PARA RECORDAR (P. 180)

1. $P = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$P = (0{,}1 - 0{,}2)(0{,}1^2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2)$
$P = (-0{,}1)(0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}04)$
$P = -0{,}007$

2. De acordo com a definição apresentada pelo enunciado, temos que $s \cdot t = k$, em que k é uma constante estritamente positiva. Outra maneira de escrever essa relação é $s = \frac{k}{t}$. Assim, se $k = 10$, temos $s = \frac{10}{t}$.
Alternativa **b**.

3. 

Para resolver esse problema, é preciso determinar o valor de x e, para calculá-lo, é necessário descobrir o valor de y.
O triângulo de lados medindo 4, 11 e y é retângulo e, para calcular o valor de y, utilizaremos o teorema de Pitágoras. Assim:
$y^2 = 11^2 + 4^2$
$y^2 = 137$
$y = \sqrt{137}$
O triângulo de lados medindo 2,5, x e y é retângulo e, para descobrir o valor de x utilizaremos o teorema de Pitágoras. Assim:
$x^2 = 2{,}5^2 + y^2$
$x^2 = 2{,}5^2 + (\sqrt{137})^2$
$x = \sqrt{143{,}25}$
$x \simeq 12$
Alternativa **a**.

4. As faces laterais da pirâmide são triângulos equiláteros.
Planificando-se as duas faces que têm em comum a aresta que liga o ponto A ao vértice superior, obtemos um losango (figura **A**).
Sabendo que a menor distância entre dois pontos em um plano corresponde a uma reta, traçamos, então, um segmento de reta ligando a aranha à formiga e o chamaremos de CD (figura **B**).
Como $AD = BC$ e lados opostos de um losango são paralelos, temos que $ABCD$ é um paralelogramo. Dessa maneira, $CD = AB = 1$.

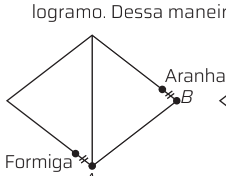


Figura A

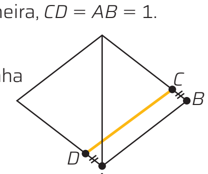


Figura B

A menor distância entre a aranha e a formiga é 1 metro.
Alternativa **a**.

5. Se Zita cortou sua turmalina em quatro partes iguais, podemos esquematizar os cortes da seguinte forma:
   - Um primeiro corte dividindo a pedra inteira em duas partes;
   - Dois outros cortes (um em cada metade da pedra), obtendo-se quatro partes da pedra original.

A cada corte ao meio feito nas turmalinas, o preço reduz-se a $\frac{1}{5}$ do preço anterior.
Assim:
Um pedaço: R$ 1 000
Primeiro corte: dois pedaços de $\frac{1}{5}$ de R$ 1 000,00, ou seja, R$ 200,00 cada um.
Segundo corte: quatro pedaços de $\frac{1}{5}$ de R$ 200,00, ou seja, R$ 40,00 cada um.
Assim, ao final, Zita receberá R$ 40,00 por pedaço da pedra original, ou seja, R$ 160,00 pelos quatro pedaços.
Alternativa **a**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 181)

1. Segundo as informações, temos a seguinte organização, considerando a sequência da esquerda para a direita:
Beatriz chegou antes de Ana: Beatriz está à esquerda de Ana.
Beatriz chegou depois de Daniela: Beatriz está à direita de Daniela.
Cláudia, Daniela e Érica chegaram uma em seguida da outra, nessa ordem: Cláudia, Daniela e Érica são um bloco, pois chegaram nessa ordem e uma depois da outra.
Com as informações 2 e 3, sabemos que Beatriz aparece depois do bloco "Cláudia - Daniela - Érica".
Com a informação 1, sabemos que Ana está à direita de Beatriz.
A sequência possível que respeita as três informações é:
Cláudia - Daniela - Érica - Beatriz - Ana
Portanto, a primeira a chegar foi Cláudia.
Alternativa **c**.

2. Utilizando a denominação G para o preço da melancia grande, M para o da melancia média e P para o da melancia pequena, temos:
$$\begin{cases} M + 2G = 8P \\ M + P = G \end{cases}$$
Dessa maneira, temos um sistema de equações.
   - Substituindo a segunda equação na primeira, obtemos:

$M + 2(M + P) = 8P$
$M + 2M + 2P = 8P$
$M = 2P$
   - Substituindo o resultado obtido, $M = 2P$, na segunda equação, temos:

$M + P = G$
$2P + P = G$
$3P = G$
Assim, três melancias pequenas podem ser compradas pelo mesmo preço de uma melancia grande.
Alternativa **a**.

MATEMÁTICA E MEIO AMBIENTE (P. 182)

Conectando ideias

1. As principais causas do desmatamento no bioma Cerrado são: expansão agrícola, pecuária, exploração de madeira, urbanização e incêndios.
2. Espera-se que os estudantes busquem informações que possam fazê-los compreender a necessidade de proteger o território nacional contra o desmatamento. Pesquisar quais medidas são mais adequadas para o reflorestamento do bioma predominante da região onde moram traz o tema para mais perto da realidade deles. Eles podem pesquisar, por exemplo, a legislação brasileira acerca do desmatamento e do reflorestamento, os órgãos e os programas responsáveis pela defesa das áreas ameaçadas e pela medição das regiões desmatadas e quais são suas ações, os principais responsáveis pelo desmatamento, as áreas de preservação, incluindo as terras de demarcação indígena, os impactos na fauna e na flora nacionais, entre outros itens.
3. Também é importante que os estudantes busquem: mais dados, em números, sobre as áreas desmatadas; tendências de aumento ou redução do desmatamento. O infográfico que será produzido por eles pode conter, por exemplo, um mapa da região com cores destacando os biomas predominantes, dados e informações importantes sobre a área devastada em comparação com a área do município em que vivem. Pode ser feito, ainda, com colagens, impressões, desenhos, poemas ou músicas que reforcem a necessidade de cuidar desse espaço, de sua flora e de sua fauna, bem como de garantir os direitos dos indígenas e de outras pessoas ameaçadas pelo desmatamento.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 184)

1. **1º)** Para uma pessoa de 20 anos:
FCM = 220 bpm − idade
FCM = 220 bpm − 20
FCM = 200 bpm
2º) A faixa recomendada é entre 50% e 85% da frequência cardíaca máxima: 50% de 200 bpm = $0{,}50 \cdot 200$ bpm = 100 bpm; 85% de 200 bpm = $0{,}85 \cdot 200$ bpm = = 170 bpm. Portanto, a faixa recomendada é de 100 bpm a 170 bpm.
3º) De acordo com o gráfico, é possível identificar que há 3 momentos em que a taxa de batimentos cardíacos está fora do recomendado: nos primeiros 12 minutos, na metade do treino e nos últimos 5 minutos.
Alternativa **d**.
2. De acordo com o gráfico, ao atingir a distância de 4 km do ponto de partida, o grupo de carros ficou parado por 2 minutos; logo, eles estavam parados no semáforo S_1. Depois, quando atingiram a distância de 8 km do ponto de partida, eles ficaram parados novamente por 2 minutos no semáforo S_2. Finalmente, quando atingiram a distância de 10 km do ponto de partida, ficaram parados por 2 minutos no semáforo S_3.
Podemos concluir que as distâncias, em quilômetro, do ponto de partida a cada um dos semáforos S_1, S_2 e S_3 são, respectivamente, 4, 8 e 10.
Alternativa **d**.

UNIDADE 3 SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES

CAPÍTULO 8 SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 194)

1. **a)** Regularidades possíveis:
- Cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando 10 unidades ao termo anterior.
- Cada termo, a partir do segundo, é o dobro do termo anterior.

b) Resolução possível:
- (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100).
- (10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1 280, 2 560, 5 120).

c) Resposta pessoal. Incentive os estudantes a comparar suas respostas e a compartilhar qual regularidade identificaram para escrever os demais termos da sequência.

2. Possíveis resoluções:

a) Cada termo, a partir do segundo, tem 3 unidades a mais que o termo anterior; então: (5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32).

b) Cada termo, a partir do segundo, é o triplo do termo anterior; portanto: (5, 15, 45, 135, 405, 1 215, 3 645, 10 935, 32 805, 98 415).

c) Cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando $\frac{1}{7}$ ao termo anterior; logo: $\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, 1, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}, \frac{10}{7}\right)$

d) Cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando 0,2 ao termo anterior; então: (0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2; 2,2; 2,4)

3. Possíveis resoluções:

a) Cada termo, a partir do segundo, tem 3 unidades a mais que o termo anterior.(1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28)

Logo, o décimo termo é 28.

b) Cada termo, a partir do segundo, é a metade do termo anterior.

$\left(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}\right)$

Então, o décimo termo é $\frac{1}{128}$.

c) Cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando por 10 o termo anterior.

$(10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8)$

Logo, o décimo termo é $10^8 = 100\,000\,000$.

4. **a)** (5, 10, 15, 20, ...). A sequência é formada pelos múltiplos de 5, iniciando-se por 5.

(5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, ...)

Portanto, $a_7 = 35$ e $a_{10} = 50$.

b) $a_n = 5n, n \in \mathbb{N}^*$

5. Possíveis respostas:

a) Cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando (-1) ao termo anterior. Assim, a lei de formação é: $a_n = -n - 1, n \in \mathbb{N}^*$.

Para $n = 20$, temos: $a_{20} = -20 - 1 = -21$

b) Os termos são múltiplos de 4, em ordem crescente, começando por 4. Portanto, a lei de formação é: $a_n = 4 \cdot n, n \in \mathbb{N}^*$.

Para $n = 20$, temos: $a_{20} = 4 \cdot 20 = 80$

c) Os termos são múltiplos de 2, em ordem crescente, começando por 2. Assim, a lei de formação é: $a_n = 2 \cdot n, n \in \mathbb{N}^*$.

Para $n = 20$, temos: $a_{20} = 2 \cdot 20 = 40$

6. **a)** $a_n = 3n, n \in \mathbb{N}^*$

$a_1 = 3 \cdot 1 = 3$; $\quad a_4 = 3 \cdot 4 = 12$

$a_2 = 3 \cdot 2 = 6 \quad a_5 = 3 \cdot 5 = 15$

$a_3 = 3 \cdot 3 = 9$

Portanto, a sequência é: (3, 6, 9, 12, 15, ...)

b) $a_n = n + 4, n \in \mathbb{N}^*$

$a_1 = 1 + 4 = 5 \quad a_4 = 4 + 4 = 8$

$a_2 = 2 + 4 = 6 \quad a_5 = 5 + 4 = 9$

$a_3 = 3 + 4 = 7$

Portanto, a sequência é: (5, 6, 7, 8, 9, ...)

c) $a_n = 4n - 2, n \in \mathbb{N}^*$

$a_1 = 4 \cdot (1) - 2 = 2 \quad a_4 = 4 \cdot (4) - 2 = 14$

$a_2 = 4 \cdot (2) - 2 = 6 \quad a_5 = 4 \cdot (5) - 2 = 18$

$a_3 = 4 \cdot (3) - 2 = 10$

Portanto, a sequência é: (2, 6, 10, 14, 18, ...)

d) $a_n = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}^*$

$a_1 = (1)^2 + 1 = 2 \quad a_4 = (4)^2 + 1 = 17$

$a_2 = (2)^2 + 1 = 5 \quad a_5 = (5)^2 + 1 = 26$

$a_3 = (3)^2 + 1 = 10$

Portanto, a sequência é: (2, 5, 10, 17, 26, ...)

e) $a_n = 2(n^2 + n), n \in \mathbb{N}^*$

$a_1 = 2(1^2 + 1) = 2(1 + 1) = 4$

$a_2 = 2(2^2 + 2) = 2(4 + 2) = 12$

$a_3 = 2(3^2 + 3) = 2(9 + 3) = 24$

$a_4 = 2(4^2 + 4) = 2(16 + 4) = 40$

$a_5 = 2(5^2 + 5) = 2(25 + 5) = 60$

Portanto, a sequência é: (4, 12, 24, 40, 60, ...)

f) $a_n = 10^n - 1, n \in \mathbb{N}^*$

$a_1 = 10^1 - 1 = 9$

$a_2 = 10^2 - 1 = 99$

$a_3 = 10^3 - 1 = 999$

$a_4 = 10^4 - 1 = 9\,999$

$a_5 = 10^5 - 1 = 99\,999$

Portanto, a sequência é:

(9, 99, 999, 9 999, 99 999, ...)

g) $a_n = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$

$a_1 = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$

$a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

$a_3 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$

$a_4 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$

$a_5 = 1 + \frac{1}{5} = \frac{5+1}{5} = \frac{6}{5}$

Portanto, a sequência é $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, ...\right)$.

h) $a_n = a_{n-1} + 10^{n-1}, n \geqslant 2$

$a_1 = 1$

$a_2 = a_{2-1} + 10^{2-1} = a_1 + 10^1 = 1 + 10 = 11$

$a_3 = a_{3-1} + 10^{3-1} = a_2 + 10^2 = 11 + 100 =$
$= 111$

$a_4 = a_{4-1} + 10^{4-1} = a_3 + 10^3 =$
$= 111 + 1\,000 = 1\,111$

$a_5 = a_{5-1} + 10^{5-1} = a_4 + 10^4 =$
$= 1\,111 + 10\,000 = 11\,111$

Portanto, a sequência é:

(1, 11, 111, 1 111, 11 111, ...)

i) $a_n = a_{n-1} + 3, n \geqslant 2$

$a_1 = -2$

$a_2 = a_{2-1} + 3 = a_1 + 3 = -2 + 3 = 1$

$a_3 = a_{3-1} + 3 = a_2 + 3 = 1 + 3 = 4$

$a_4 = a_{4-1} + 3 = a_3 + 3 = 4 + 3 = 7$

$a_5 = a_{5-1} + 3 = a_4 + 3 = 7 + 3 = 10$

Portanto, a sequência é: (−2, 1, 4, 7, 10, ...)

j) $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}, n \geqslant 1$

$a_1 = 16$

$a_{1+1} = \frac{a_1}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{16}{2} = 8$

$a_{2+1} = \frac{a_2}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{8}{2} = 4$

$a_{3+1} = \frac{a_3}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{4}{2} = 2$

$a_{4+1} = \frac{a_4}{2} \Rightarrow a_5 = \frac{2}{2} = 1$

Portanto, a sequência é: (16, 8, 4, 2, 1, ...)

k) $a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, n \geqslant 3$

$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_3 = a_{3-2} + a_{3-1} = a_1 + a_2 = 1 + 4 = 5$

$a_4 = a_{4-2} + a_{4-1} = a_2 + a_3 = 4 + 5 = 9$

$a_5 = a_{5-2} + a_{5-1} = a_3 + a_4 = 5 + 9 = 14$

Portanto, a sequência é: (1, 4, 5, 9, 14, ...)

7. $a_n = -7 + 2n, n \in \mathbb{N}^*$

a) Caso -1 pertença à sequência, teremos $a_n = -1$. Assim:

$-7 + 2n = -1 \Rightarrow 2n = -1 + 7 \Rightarrow n = 3$

Então: $a_3 = -7 + 2 \cdot 3 = -7 + 6 = -1$

Portanto, -1 pertence à sequência e é seu terceiro termo.

b) Caso 0 pertença à sequência, teremos $a_n = 0$. Assim:

$-7 + 2n = 0 \Rightarrow 2n = 7 \Rightarrow n = \frac{7}{2}$

Como $n = \frac{7}{2}$ não é natural, o número 0 não pertence à sequência.

c) Caso 7 pertença à sequência, teremos $a_n = 7$. Assim:

$-7 + 2n = 7 \Rightarrow 2n = 7 + 7 \Rightarrow n = 7$

Então: $a_7 = -7 + 2 \cdot 7 = -7 + 14 = 7$

Portanto, 7 pertence à sequência e é seu sétimo termo.

d) Caso 20 pertença à sequência, teremos $a_n = 20$. Assim:

$-7 + 2n = 20 \Rightarrow 2n = 20 + 7 \Rightarrow n = \frac{27}{2}$

Como $n = \frac{27}{2}$ não é natural, 20 não pertence à sequência.

8. **a)** A sequência numérica que corresponde à quantidade de quadradinhos que formam cada uma das quatro primeiras figuras dessa sequência é (1, 4, 9, 16).

b) $a_1 = 1^2 \Rightarrow a_1 = 1$

$a_2 = 2^2 \Rightarrow a_2 = 4$

$a_3 = 3^2 \Rightarrow a_3 = 9$

$a_4 = 4^2 \Rightarrow a_4 = 16$

A lei de formação que representa essa sequência é:

$a_n = n^2$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

c) O quinto termo é formado por 25 quadradinhos:

Observação: poderia ter sido utilizada outra cor em vez de roxo.

d) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$.

Portanto, devem ser desenhados 55 quadradinhos.

e) $a_9 = 9^2 = 81$

Portanto, devem ser desenhados 81 quadradinhos para representar o nono termo.

$a_{12} = 12^2 = 144$

Portanto, devem ser desenhados 144 quadradinhos para representar o 12º termo.

f) Resposta pessoal.

O comentário de Paula está correto, pois, ao analisar a soma dos primeiros números ímpares, temos:

1º número ímpar 1: 1º quadrado.

2º número ímpar 3: $1 + 3 = 4$; 2º quadrado.

3º número ímpar 5: $1 + 3 + 5 = 9$; 3º quadrado.

4º número ímpar 7: $1 + 3 + 5 + 7 = 16$; 4º quadrado.

5º número ímpar 9: $1 + 3 + 5 + 9 = 25$; 5º quadrado.

g) Resposta pessoal.

Paula e Luiz estão corretos. Analisando o comentário de Luiz sobre a sequência representar os quadrados perfeitos, temos:

$1^2 = 1$; 1º quadrado.

$2^2 = 4$; 2º quadrado.

$3^2 = 9$; 3º quadrado.

$4^2 = 16$; 4º quadrado.

$5^2 = 25$; 5º quadrado.

9. **a)** 91 e 127 pontos.

b) Podemos analisar a sequência da seguinte maneira:

Figura 1: 1

Figura 2: 1 + 6

Figura 3: 1 + 6 + 12

Figura 4: 1 + 6 + 12 + 18

Figura 5: 1 + 6 + 12 + 18 + 24

A quantidade de pontos de cada figura, a partir da terceira, é dada pela soma do termo anterior com um múltiplo de 6, sendo esse múltiplo correspondente a 6 vezes a posição do termo anterior. Isto é:

$a_n = a_{(n-1)} + 6 \cdot (n - 1)$

10. **a)** Observe que, a cada elemento, acrescentam-se 5 cubos.

Assim, a sequência é: (1, 6, 11, ...).

O 16º elemento será formado pelo cubo inicial mais $(15 \cdot 5 = 75)$.

Então: $a_{16} = 1 + 75 = 76$

b) O termo geral da sequência é:

$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 5$

Para $a_n = 96$, temos:

$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 5$

$96 = 1 + 5n - 5$

$n = 20$

11. Seja x a altura dos degraus; a partir do segundo degrau, podemos indicar a seguinte sequência: $(0{,}3; 0{,}3 + x; 0{,}3 + 2x, ...)$. Então, a lei de formação será $a_n = 0{,}3 + (n - 1)x$, em que a_n é a altura da escada no enésimo degrau.

Como $a_{34} - a_4 = 6$, Então:

$a_{34} - a_4 = [0{,}30 + (34 - 1)x] - [0{,}30 + (4 - 1)x]$

$6 = (0{,}30 + 33x) - (0{,}30 + 3x)$

$x = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

A altura de cada degrau, a partir do segundo, é 0,2 m ou 20 cm.

De acordo com o enunciado, o rapaz de camisa branca subiu 9,4 m, o que equivale à metade dos degraus.

Considerando y o número total de degraus da escadaria, temos:

$$0{,}3 + \left(\frac{y - 1}{2}\right) \cdot 0{,}2 = 9{,}4$$

$$0{,}3 + \left(\frac{0{,}2y - 0{,}2}{2}\right) = 9{,}4$$

$$y = \frac{18{,}4}{0{,}2} = 92$$

Portanto, a escadaria tem 92 degraus.

12. **a)** $a_1 = 0$

$a_2 = 1$

$a_3 = 2 + 1 = 3$

$a_4 = 3 + 2 + 1 = 6$

$a_5 = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$

Portanto, a sequência é: (0, 1, 3, 6, 10).

b) $a_1 = 1$

$a_2 = 2$; (1, 2)

$a_3 = 2$; (1, 3)

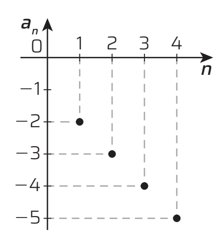
$a_4 = 3$; (1, 2, 4)

$a_5 = 2$; (1, 5)

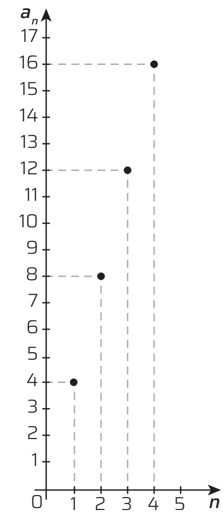
$a_6 = 4$; (1, 2, 3, 6)

Portanto, a sequência é: (1, 2, 2, 3, 2, 4).

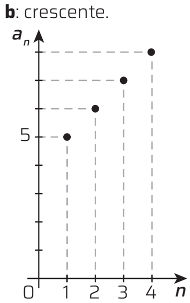
13. **a)** Item **a**: decrescente.



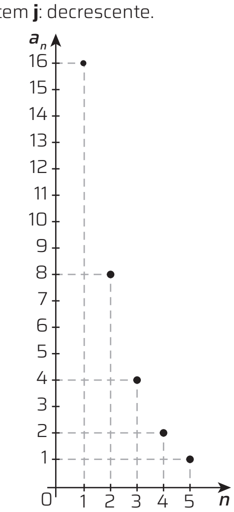
Item **b**: crescente.



b) Item **b**: crescente.



Item **j**: decrescente.



14. Considere que as imagens geradas utilizando esse recurso formam uma sequência e que a_n representa a posição que cada foto ocupa, com $n \in \mathbb{N}^*$.

A sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11})$ tem onze termos. Nessa sequência, o terceiro e o nono termos são equidistantes dos extremos, pois $3 - 1 = 11 - 9$ ou $3 + 9 = 1 + 11$.

Portanto, a foto principal dessa sequência de fotos ocupa a posição a_9.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 196)

1. **a)** $2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

b) $2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $6 = -x \Rightarrow x = -6 \Rightarrow S = \{-6\}$

d) $3 = 9x \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

e) $5x + 5 = 0 \Rightarrow 5x = -5 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow S = \{-1\}$

f) $7x - 7 = 0 \Rightarrow 7x = 7 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{1\}$

2. **a)** $\frac{2x-1}{x-1} = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3(x - 1) \Rightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

b) $2^{x-1} = 2^4 \Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow S = \{5\}$

c) $9^{x+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3^2)^{x+3} = (3^{-1})^{-2} \Rightarrow 3^{2x+6} = 3^2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow S = \{-2\}$

d) $x(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ e $x = -4 \Rightarrow S = \{-4, 0\}$

e) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow S = \{-3, 3\}$

f) $5x^2 + 20 = 0 \Rightarrow 5x^2 = -20 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow S = \{\,\}$

3. **a)** $|-2x + 1| = 11 \Rightarrow \begin{cases} -2x + 1 = -11 \Rightarrow x = 6 \\ -2x + 1 = 11 \Rightarrow x = -5 \end{cases} \Rightarrow S = \{-5, 6\}$

b) $|x - 10| = -20 \Rightarrow \begin{cases} x - 10 = -(-20) \Rightarrow x = 30 \\ x - 10 = -20 \Rightarrow x = -10 \end{cases} \Rightarrow S = \{-10, 30\}$

c) $|x^2 - 2x - 4| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 4 = -4 \Rightarrow x = 0 \text{ e } x = 2 \\ x^2 - 2x - 4 = 4 \Rightarrow x = 4 \text{ e } x = -2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \{-2, 0, 2, 4\}$

d) $5|x^2| + 11|x| + 2 = 0 \Rightarrow 5x^2 + 11x + 2 = 0 \Rightarrow x' = -\frac{1}{5}$ e

$x'' = -2 \Rightarrow S = \left\{-2, -\frac{1}{5}\right\}$

4. **a)** $(3x - 2)^2 = 4 \Rightarrow 3x - 2 = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = 0$ e $x = \frac{4}{3} \Rightarrow S = \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$

b) $(3x - 2)^2 = 4 \Rightarrow (3x - 2) \cdot (3x - 2) = 4 \Rightarrow 9x^2 - 12x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(9x - 12) = 0 \Rightarrow x = 0$ e $x = \frac{4}{3} \Rightarrow S = \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$

c) Na resolução da esquerda, o erro está em não considerar que $\sqrt{(3x-2)^2}$ é igual ao $|3x - 2|$ e, assim, $3x - 2 = 2$ ou $3x - 2 = -2$. Na resolução da direita, o erro está na segunda linha, ao trocar $(3x - 2)^2$ por $3x^2 - 4$.

PARA RECORDAR (P. 196)

1. $p = \sqrt{8^2 + 11^2} \Rightarrow p = \sqrt{64 + 121} \Rightarrow p = \sqrt{185} \Rightarrow p \simeq \pm 13{,}60$. Não, pois p não está entre 14 e 15.

2. **a)** Se x é o número de pessoas que trabalham na empresa, então: $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 40 = x \Rightarrow x = 96$ pessoas.

b) Dessas pessoas que trabalham na empresa, têm pelo menos 30 anos: $96 - \frac{1}{3} \cdot 96 = 96 - 32 = 64$ pessoas.

3. Como o gráfico é uma reta paralela ao eixo Ox, então a função é constante: e corta o eixo Oy em $y = -4$. Logo, $f(x) = -4$.

4. $A = \frac{x \cdot y}{2} + \frac{x \cdot y}{2} + \frac{x \cdot y}{2} + \frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow A = 4 \cdot \frac{x \cdot y}{2} \Rightarrow A = 2xy$

Alternativa **c**.

5. **a)** O ponto de intersecção dos gráficos dessas retas é:

$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -\frac{x}{4} + \frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow 2x - 4 = -\frac{x}{4} + \frac{11}{4} \Rightarrow x = 3$

Substituindo $x = 3$ na primeira equação, temos:

$y = 2x - 4 \Rightarrow y = 2 \cdot 3 - 4 \Rightarrow y = 2$

Portanto, o ponto de intersecção dos gráficos dessas retas é (3, 2).

b) Para (3, 2), temos: $y = x - 1 \Rightarrow y = 3 - 1 \Rightarrow y = 2$. Logo, a reta que é o gráfico da função $y = x - 1$ também passa por esse ponto.

6. $f(x) = ax + b \Rightarrow (-2, 2)$ e $(-3, 13) \Rightarrow -\begin{cases} 2a + b = 2 \\ -3a + b = 13 \end{cases} \Rightarrow -a = 11 \Rightarrow a = -11$

Substituindo a na primeira equação, temos:

$-2a + b = 2 \Rightarrow -2(-11) + b = 2 \Rightarrow b = -20$.

Portanto, a função afim é: $f(x) = ax + b \Rightarrow f(x) = -11x - 20$.

Logo, a raiz da função é: $f(x) = 0 \Rightarrow -11x - 20 = 0 \Rightarrow x = -\frac{20}{11}$.

7. **a)** Crescente, pois $1 > 0$.

b) Crescente, pois $\frac{1}{3} > 0$.

c) Crescente, pois $-\frac{1}{3} > 0$.

d) Decrescente, pois $-2 < 0$.

8. $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ e $x = 1$.

Sendo assim, as raízes dessa função são: 0 e 1.

9. **a)** Pontos: (0, 3) e (5, 0)

$\begin{cases} 3 = 0a + b \Rightarrow 3 = 0 + b \Rightarrow b = 3 \\ 0 = 5a + b \Rightarrow 0 = 5a + 3 \Rightarrow 5a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{5} \end{cases}$

Portanto, $f(x) = -\frac{3}{5}x + 3$

b) A função troca de sinal quando $x = 5$. Então:

$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ quando } x < 5 \\ f(x) = 0 \text{ quando } x = 5 \\ f(x) < 0 \text{ quando } x > 5 \end{cases}$

O domínio de f é $D(f) = \mathbb{R}$. A imagem de f é $Im(f) = \mathbb{R}$.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 197)

1. Tomás é mais velho que Ana; Ana é mais nova que Sofia; Sofia é mais velha que Tomás. Portanto, o mais velho dos três é Sofia.

2. Podemos afirmar que, se hoje fosse sexta-feira, ontem seria quinta-feira. Dessa afirmação, podemos concluir que, se ontem fosse amanhã (quinta-feira), hoje seria quarta-feira.

Alternativa **b**.

3. $\frac{20 \text{ adultos}}{15 \text{ adultos}} = \frac{24 \text{ crianças}}{x} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{24}{x} \Rightarrow x = 18$

Como a capacidade máxima do elevador é 24 crianças, podem entrar ainda 6 crianças (24 − 18 = 6), sem exceder a capacidade máxima.

4. A seguir, o que ocorre ao desdobrar o papel. Alternativa **e**.

ID/BR

MATEMÁTICA E CIDADANIA (P. 198)

Conectando ideias

1. **a)** Vamos calcular o novo salário mensal de cada funcionário:

- A: R$ 2 000,00 · 1,07 = R$ 2 140,00
- B: R$ 2 700,00 · 1,07 = R$ 2 889,00
- C: R$ 3 200,00 · 1,07 = R$ 3 424,00
- D: R$ 4 700,00 · 1,06 = R$ 4 982,00
- E: R$ 5 200,00 · 1,06 = R$ 5 512,00

b) Vamos calcular o aumento anual no salário de cada funcionário:

- A: R$ 24 000,00 · 1,07 = R$ 25 680,00
- B: R$ 32 400,00 · 1,07 = R$ 34 668,00
- C: R$ 38 400,00 · 1,07 = R$ 41 088,00
- D: R$ 56 400,00 · 1,06 = R$ 59 784,00
- E: R$ 62 400,00 · 1,06 = R$ 66 144,00

Portanto, de acordo com os dados da tabela do IRPF, apenas para o funcionário B haverá alteração na alíquota no primeiro ano.

2. Respostas pessoais. Alguns tributos são:

- Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA), que é estadual e devido por pessoas físicas e jurídicas que são proprietárias de veículos;
- Imposto sobre Serviços (ISS), que é municipal e devido por pessoas jurídicas e empresas que prestam serviços;
- Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI), que é federal e devido por indústrias que produzem produtos industrializados, sendo repassado ao consumidor final, no preço do produto.

3. A resolução depende da produção dos estudantes.

CAPÍTULO 9 PROGRESSÕES

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 202)

1. Resposta pessoal. Alguns exemplos:

(9, 5, 8, 3, 1, 1, 9, ...); (3, 4, 1, 7, 0, ...); (2, 8, 3, 7, 4, 6, ...)

2. A sequência é: (−16, −13, −10, −7, −4, −1, ...)

a) $(a_1, a_3, a_5, ...) = (-16, -10, -4, ...)$

$r = a_3 - a_1 = -10 - (-16) = 6$

b) $(a_2, a_4, a_6, ...) = (-13, -7, -1, ...)$

$r = a_4 - a_2 = -7 - (-13) = 6$

3. **a)** $a_n = 3 + 4n, n \in \mathbb{N}^*$.

A sequência é (7, 11, 15, 19, ...) e $r = a_2 - a_1 = 11 - 7 = 4$.

Como $r > 0$, a sequência é crescente.

b) $a_1 = 6$; $a_2 = 2 \cdot a_{2-1} - 6 = 2 \cdot a_1 - 6 = 6$.

A sequência é (6, 6, 6, 6, ...) e $r = a_2 - a_1 = 6 - 6 = 0$.

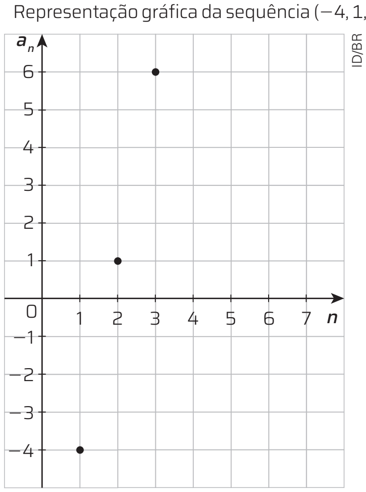
Como $r = 0$, a sequência é constante.

c) $a_n = 13 - 3n, n \in \mathbb{N}^*$
$a_1 = 13 - 3 \cdot 1 = 13 - 3 = 10$
$a_2 = 13 - 3 \cdot 2 = 13 - 6 = 7$
A sequência é: (10, 7, 4, 1, ...).
$r = a_2 - a_1 = 7 - 10 = -3$
Como $r < 0$, a sequência é decrescente.

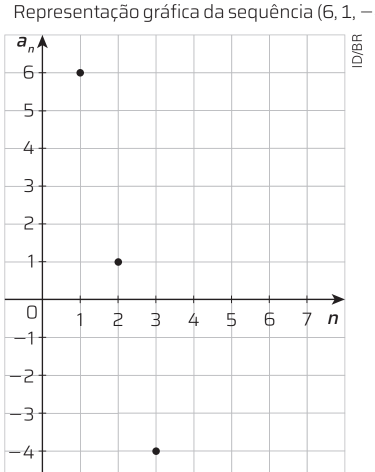
4. Se $(2x, 3x, x^2)$ é uma P.A., então $3x$ é a média aritmética entre $2x$ e x^2. Assim:
$3x = \dfrac{2x + x^2}{2} \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$
Para $x = 0$, a sequência é: (0, 0, 0)
Para $x = 4$, a sequência é: (8, 12, 16)

5. Se $(x + 3, x - 4, 1 - 2x)$ é uma P.A., calculando a média aritmética, temos:
$x - 4 = \dfrac{(x + 3) + (1 - 2x)}{2} \Rightarrow x = 4$
A sequência é: (7, 0, −7).
$r = a_2 - a_1 = 0 - 7 = -7$
Portanto, a razão é −7.

6. Considere uma P.A., $(x - r, x, x + r)$, em que r é sua razão. De acordo com o enunciado, a soma dos três termos é igual a 3, e o produto é igual a −24, então:
$(x - r) + x + (x + r) = 3 \Rightarrow x = 1$
Também sabemos que: $(x - r) \cdot x \cdot (x + r) = -24$
Substituindo x por 1, temos:
$(1 - r) \cdot 1 \cdot (1 + r) = -24 \Rightarrow r = \pm 5$
Para $r = 5$: (−4, 1, 6). Para $r = -5$: (6, 1, −4).
Portanto, as sequências são: (−4, 1, 6) e (6, 1, −4).
Representação gráfica da sequência (−4, 1, 6):

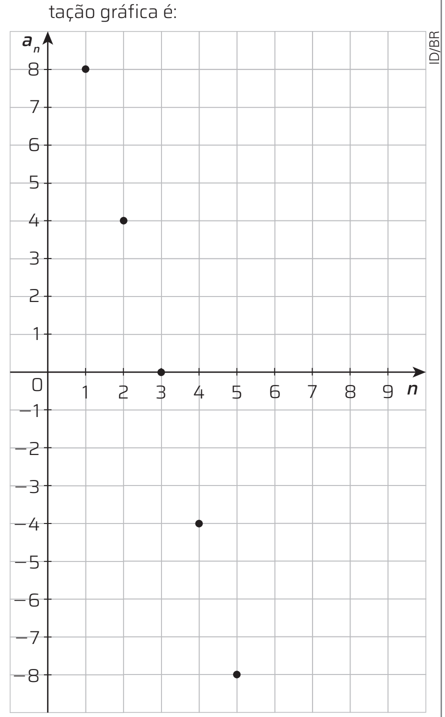


Representação gráfica da sequência (6, 1, −4)



7. Seja r a razão da P.A., podemos escrevê-la como: $(x - r, x, x + r)$
Com base no enunciado, a soma dos extremos é igual a −4, então:
$(x - r) + (x + r) = -4 \Rightarrow x = -2$
$(-2 - r, -2, -2 + r)$
Como a soma dos quadrados dos termos é igual a 30, então:
$(-2 - r)^2 + (-2)^2 + (-2 + r)^2 = 30$
$4 + 4r + r^2 + 4 + 4 - 4r + r^2 = 30 \Rightarrow r = \pm 3$
Para $r = 3$: (−5, −2, 1). Para $r = -3$: (1, −2, −5).
Portanto, a P.A. pode ser (−5, −2, 1) ou (1, −2, −5).

8. Sendo r a razão da P.A:
$(x - 2r, x + r, x, x + r, x + 2r)$
Da afirmação **I** do enunciado, temos
$(x - 2r) + (x - r) + x + (x + r) + (x + 2r) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$
Substituindo $x = 0$: $(-2r, -r, 0, r, 2r)$
Da afirmação **II**, temos:
$(-r) \cdot r = -16 \Rightarrow r = \pm 4$
Como a P.A. é decrescente, então $r = -4$.
A sequência é (8, 4, 0, −4, −8), e a representação gráfica é:



9. Resposta pessoal.
Uma sugestão é começar pela resposta.
Uma P.A. de cinco termos é da forma:
$(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$
Agora, é preciso escolher o x e r e impor condições para obter a sequência.
Por exemplo, escolhendo $x = 1$ e $r = 3$, temos a sequência: (−5, −2, 1, 4, 7)
Um conjunto de condições que permite chegar a ela é: a sequência é crescente, a soma dos termos é 5 e o produto dos termos extremos é −35.
Solicite aos estudantes que, além da atividade, apresentem também a resolução.

10. Seja r a razão dessa P.A., podemos escrever a sequência $(x - r, x, x + r, x + 2r)$.
$(x - r) + x + (x + r) + (x + 2r) = 23 \Rightarrow 4x + 2r = 23$
Como a soma dos dois primeiros termos é igual a 8,5, então: $(x - r) + x = 8{,}5 \Rightarrow 2x - r = 8{,}5$
Juntando as duas equações:
$\begin{cases} 4x + 2r = 23 \\ 2x - r = 8{,}5 \Rightarrow r = 2x - 8{,}5 \end{cases}$
$4x + 2 \cdot (2x - 8{,}5) = 23 \Rightarrow x = 5$
Substituindo $x = 5$ em $r = 2x - 8{,}5$:
$r = 10 - 8{,}5 = 1{,}5$
A sequência que satisfaz essas condições é: (3,5; 5; 6,5; 8).

11. A quantidade de assentos representa uma sequência igual a (18, 21, 24, 27, ...).
Podemos identificar uma P.A., sendo $a_1 = 18$ e $r = 21 - 18 = 3$. Assim, a lei de formação é:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
Para $n = 20$, temos: $a_{20} = 18 + (20 - 1) \cdot 3 = 75$

12. Usando a P.A., no produto I, a sequência é (80, 90, 100, ...) e a razão é:
$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 90 - 80 \Rightarrow r = 10.$
No produto II, a sequência é (190, 170, 150, ...) e a razão é: $r = -20$.
Logo, podemos calcular que as vendas dos próximos meses será:

Produto	Abr.	Maio	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Out.
I	80	90	100	110	120	130	140
II	190	170	150	130	110	90	70

Analisando os dados, podemos inferir que o produto II deixará de ser produzido no mês seguinte a agosto, isto é, em setembro.
Alternativa **d**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 204)

13. a) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = 0 + (n - 1) \cdot 15 \Rightarrow a_n = 15n - 15$
Para o 3º termo:
$a_3 = 15 \cdot 3 - 15 \Rightarrow a_3 = 30$

b) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$a_n = -6 + (n - 1) \cdot 7 = -13 + 7n$
Para o 10º termo:
$a_{10} = -13 + 7 \cdot 10 = 57$

c) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$a_{20} = a_1 + (20 - 1)r$
$r = \dfrac{24}{19}$

d) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$a_{30} = a_1 + (30 - 1)r$
$\dfrac{-17}{2} = a_1 + 29 \cdot \dfrac{1}{4} \Rightarrow a_1 = -\dfrac{63}{4}$

e) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$a_n = \dfrac{149}{2} + (n - 1) \cdot \left(-\dfrac{15}{2}\right)$
$a_n = -8$, então:
$-8 = \dfrac{149}{2} + (n - 1) \cdot \left(-\dfrac{15}{2}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 12$

14. $a_1 = 15$, $a_n = 160$ e $r = 20 - 15 = 5$.
Substituindo esses valores na fórmula do termo geral, temos: $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow$
$\Rightarrow 160 = 15 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow n = 30$

15. Resposta pessoal. Explique em qual situação cada forma de resolução é mais prática. Se a situação exige determinar muitos termos, utilizar a fórmula do termo geral da P.A. é mais simples; contudo, se a situação solicitar um termo próximo do início, que seja fácil de calcular, então a melhor forma de resolver é utilizando a razão. É necessário analisar cada situação e seus dados.
Para calcular a quantidade de cadeiras da 40ª fila de um auditório, é mais ágil utilizar a fórmula do termo geral.

16. 2 é o maior resto possível quando um número é dividido por 3, então o número a_n precisa ser da forma $3n + 2$.
Portanto, $a_n = 3n + 2, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

17. Os números que divididos por 5 deixam resto 2 são da forma: $a_n = 5 \cdot n + 2, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$
Então: $a_n = 5 \cdot n + 2$
$a_1 = 5 \cdot (1) + 2 = 7$
$a_2 = 5 \cdot (2) + 2 = 12$
Assim, a P.A. é (7, 12, 17, ...).
$r = 12 - 7 = 5$
Portanto, a razão é igual a 5.

18. $a_4 = 11$ e $a_7 = 26$
$a_7 = a_4 + 3r \Rightarrow 26 = 11 + 3r \Rightarrow r = 5$
Podemos escrever a_4 como: $a_4 = a_1 + 3r$
Substituindo $r = 5$, temos: $11 = a_1 + 3 \cdot (5)$
Assim, $a_1 = -4$ e $r = 5$.
Portanto, a P.A. é $(-4, 1, 6, 11, 16, ...)$.

19. $a_2 + a_5 = 8$
$(a_1 + r) + (a_1 + 4r) = 8$
$2a_1 + 5r = 8$
Como $a_3 + a_7 = 20$, então: $a_3 + a_7 = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a_1 + 2r) + (a_1 + 6r) = 20 \Rightarrow 2a_1 + 8r = 20$
Juntando as duas equações, temos:
$$\begin{cases} 2a_1 + 5r = 8 \\ 2a_1 + 8r = 20 \end{cases}$$
Subtraindo uma equação da outra, obtemos: $r = 4$
Substituindo r por 4 na primeira equação, obtemos: $2a_1 + 5 \cdot (4) = 8 \Rightarrow a_1 = -6$
Assim, $a_1 = -6$ e $r = 4$; então:
$a_n = -6 + (n - 1) \cdot 4$
Para o 100º termo:
$a_{100} = -6 + (100 - 1) \cdot 4 = 390$
Portanto, $a_{100} = 390$.

20. Para $n = 3$:
$a_n - a_{n-2} = -6$
$a_3 - a_1 = -6$
Substituindo $a_3 = a_1 + 2r$, temos:
$a_3 - a_1 = -6$
$(a_1 + 2r) - a_1 = -6 \Rightarrow r = -3$
E temos $a_2 \cdot a_3 = 28$, então:
$(a_1 + r) \cdot (a_1 + 2r) = 28$
Substituindo em $(a_1 + r) \cdot (a_1 + 2r) = 28$ a razão r por -3, obtemos:
$a_1^2 - 9a_1 - 10 = 0$
$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 121$
$$a = \frac{-(-9) \pm 11}{2} = \frac{9 \pm 11}{2} \begin{cases} a_1 = 10 \\ a_2 = -1 \end{cases}$$
Assim:
Para $r = -3$ e $a_1 = 10$: $(10, 7, 4, 1, ...)$.
Para $r = -3$ e $a_1 = -1$: $(-1, -4, -7, -10, ...)$.

21. O menor múltiplo de 3 pertencente ao intervalo [100, 1 000] é 102, e o maior múltiplo de 3 pertencente a esse intervalo é 999.
Podemos escrever uma sequência de razão 3 com os elementos desse conjunto:
(102, 105, 108, ..., 999)
$a_1 = 102$; $r = 3$; $a_n = 999$.
Substituindo esses valores na fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$999 = 102 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 300$

22. Vamos considerar, inicialmente, o número de inteiros positivos no intervalo [1 000, 9 999], que são divisíveis por 6.
Podemos escrever uma sequência de razão 6 com os elementos desse conjunto:
(1 002, 1 008, 1 014, ...)
$a_1 = 1\,002$; $a_n = 9\,996$; e $r = 6$.
Substituindo esses valores na fórmula do termo geral $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, temos:
$9\,996 = 1\,002 + (n - 1) \cdot 6$
$n = \frac{9\,000}{6} = 1\,500$
Como o intervalo de números com 4 algarismos inteiros tem 9 000 números, temos:
$9\,000 - 1\,500 = 7\,500$

23. a) O número de termos é 6, pois:
$(m + 2) = (4 + 2) = 6$
Então: (2, _, _, _, _, 32), com $a_1 = 2$ e $a_6 = 32$.
Podemos escrever o 6º termo como:
$a_6 = a_1 + 5r$
Então: $32 = 2 + 5r \Rightarrow r = 6$
(2, 8, 14, 20, 26, 32)

b) Como o número de termos é $(k + 2)$, a sequência terá k termos entre 1 e k^2:
$(1, ..., k^2)$; $a_1 = 1$; $a_{k+2} = k^2$
Podemos escrever o último termo como:
$a_{k+2} = a_1 + (k + 1) \cdot r$, então:
$k^2 = 1 + (k + 1)r$
$$r = \frac{(k + 1) \cdot (k - 1)}{k + 1} = k - 1$$
Assim, $a_1 = 1$ e $r = k - 1$.
Portanto, a P.A. é:
$(1, k, 2k - 1, 3k, 4k - 1, ..., k^2 - k + 1, k^2)$.

24. $a_2 = a_1 + 200$
$a_3 = a_2 + 200 = a_1 + 2 \cdot 200$
$a_4 = a_3 + 200 = a_1 + 3 \cdot 200$
Assim, podemos escrever o décimo termo como: $a_{10} = a_1 + 9 \cdot 200$
$a_{10} = a_1 + 1\,800$, substituindo a_{10} por 4 000, obtemos: $a_1 = 2\,200$
Substituindo a_1 por 2 200 em $a_3 = a_1 + 2 \cdot 200$, obtemos: $a_3 = 2\,600$

25. $49 = 37 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 12 = (n - 1) \cdot r$
Precisamos determinar o menor valor possível para r. Para $r = 1$, temos: $n = 13$
Como no banco há menos de 12 pessoas, $r = 1$ não é solução.
Para $r = 2$, temos: $n = 7$
Alternativa **b**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 209)

26. $a_{100} = a_1 + 99r$
$a_{100} = -3 + 99 \cdot (5) = -3 + 495 = 492$
A soma dos 100 primeiros termos pode ser obtida com:
$$S_{100} = \frac{(-3 + 492) \cdot 100}{2} = 24\,450$$
Portanto, a soma é 24 450.

27. a) $a_1 = 2$, $r = 2$ e $a_n = 100$.
O termo geral da sequência é:
$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2$
Determinar qual é o termo em que $a_n = 100$:
$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 100 = 2 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n = 50$
Assim, $a_{50} = 100$.
Então, a soma dos 50 termos será:
$$S_{50} = \frac{(2 + 100) \cdot 50}{2} = 2\,550$$
Portanto, $S_{50} = 2\,550$.

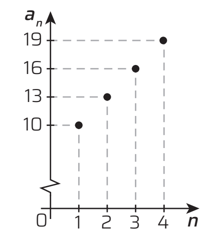
b) $a_1 = 2$, $r = 2$ e $a_n = 2n$.
Assim, a soma de n termos será:
$$S_n = \frac{(2 + 2n) \cdot n}{2} = n + n^2$$

28. a) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$a_n = -2 + (n - 1) \cdot 10$
$a_n = -12 + 10n$
Soma de n termos:
$$S_n = \frac{[-2 + (-12 + 10n)] \cdot n}{2}$$
$S_n = -7n + 5n^2$
Portanto, temos que, $a_n = -12 + 10n$ e $S_n = -7n + 5n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $a_5 = a_3 + 2r \Rightarrow 20 = 6 + 2r \Rightarrow r = 7$
Temos que $a_3 = a_1 + 2r$, substituindo r por 7, obtemos: $a_1 = -8$
Termo geral:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = -8 + (n - 1) \cdot 7 = -15 + 7n$
Soma de n termos:
$$S_n = \frac{[-8 + (-15 + 7n)] \cdot n}{2}$$
$$S_n = \frac{-23n + 7n^2}{2}$$
Portanto, $a_n = -15 + 7n$ e
$$S_n = \frac{-23n + 7n^2}{2}, n \in \mathbb{N}^*$$

29. a) Para $n = 1$:
$a_{1+1} = a_1 + 3 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_2 = 10 + 3 \Rightarrow a_2 = +3$
- Para $n = 2$:
$a_{2+1} = a_2 + 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_3 = 13 + 3 \Rightarrow a_3 = 16$
- Para $n = 3$:
$a_{3+1} = a_3 + 3 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_4 = 16 + 3 \Rightarrow a_4 = 19$

A sequência é (10, 13, 16, 19, ...).
$r = 13 - 10 = 3$
Como $r > 0$, então a sequência é crescente.



ID/BR

b) $a_{30} = a_1 + (30 - 1)r$
$a_{30} = 10 + 29 \cdot 3 = 97$
$a_1 = 10$ e $a_{30} = 97$
$$S_{30} = \frac{(10 + 97) \cdot 30}{2} = 1\,605$$

30. Podemos escrever: $a_{30} = a_1 + 29r$
$S_{30} = 1\,440$
$$\frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} = 1\,440$$
$$\frac{[a_1 + (a_1 + 29r)] \cdot 30}{2} = 1\,440$$
$2a_1 + 29r = 96$
Podemos escrever: $a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_1 + 9r = 26$
$$\begin{cases} a_1 + 9r = 26 \Rightarrow a_1 = 26 - 9r \\ 2a_1 + 29r = 96 \end{cases}$$
$2 \cdot (26 - 9r) + 29r = 96$
$r = 4$
Substituindo o valor de r em $a_1 = 26 - 9r$:
$a_1 = 26 - 9 \cdot 4 = -10$
Assim, $a_1 = -10$ e $r = 4$.
Portanto, a sequência é:
$(-10, -6, -2, 2, 6, 10, ...)$.

31. O menor número par no intervalo]0, 61[é 2, e o maior par é 60.
(2, 4, 6, 8, ..., 60)
$a_1 = 2$; $a_n = 60$ e $r = 2$
Precisamos determinar em qual termo $a_n = 60$, então:
$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2$
$60 = 2 + 2n - 2 \Rightarrow n = 30$
Assim, $a_1 = 2$ e $a_{30} = 60$. Então:
$$S_{30} = \frac{(2 + 60) \cdot 30}{2} = 930$$

32. Nesta P.A., $a_1 = -20$, $r = -14 - (-20) = 6$ e $S_n = 946$.
Podemos escrever: $a_n = -20 + (n - 1) \cdot 6$
$x = -26 + 6n$
Temos $S_n = 946$, então:
$$946 = \frac{[-20 + (-26 + 6n)] \cdot n}{2}$$
$3n^2 - 23n - 946 = 0$
Resolvendo a equação, obtemos:
$3n^2 - 23n - 946 = 0$
$\Delta = 529 + 11\,352 = 11\,881$
$$n = \frac{23 \pm 109}{6} \begin{cases} n_1 = 22 \\ n_2 = -\frac{43}{3} \end{cases}$$

Assim, temos $n = -\frac{43}{3}$, que não é solução, pois não pertence a $\mathbb{N}^*$, e $n = 22$.

Substituindo $n = 22$ em $x = -26 + 6n$, obtemos: $x = 106$

33. a) Podemos escrever:

$a_{15} = a_1 + 14r$ e $a_{36} = a_1 + 35r$

$a_{15} + a_{36} = 100$

$(a_1 + 14r) + (a_1 + 35r) = 100$

$2a_1 + 49r = 100$

Queremos obter a soma dos 50 termos, então:

$S_{50} = \left[a_1 + (a_1 + 49r)\right] \cdot 25$

$S_{50} = (2a_1 + 49r) \cdot 25$

Da equação anterior, temos $2a_1 + 49r = 100$, então:

$S_{50} = (2a_1 + 49r) \cdot 25 = 2\,500$

b) $a_{16} = a_1 + 15r \Rightarrow a_1 + 15r = 50$

$a_{31} = a_1 + 30r \Rightarrow 2a_1 + 30r = 50$

Queremos calcular a soma dos 31 primeiros termos, então:

$$S_{31} = \frac{\left[a_1 + (a_1 + 30r)\right] \cdot 31}{2}$$

$S_{31} = (a_1 + 15r) \cdot 31$

Substituindo $a_1 + 15r$ por 50, temos:

$S_{31} = 1\,550$

34. Dos números inteiros positivos menores que 1 000, temos o intervalo [1, 999].

Inicialmente, vamos somar todos os inteiros positivos menores que 1 000.

$$S_{1\,000} = \frac{(1 + 999) \cdot 999}{2} = 499\,500$$

O menor número inteiro divisível por 6 no intervalo é 6, e o maior número divisível é 996.

Podemos escrever uma sequência de razão 6 com os elementos desse conjunto:

(6, 12, 18, ..., 996)

Temos, $a_1 = 6$, $a_n = 996$ e $r = 6$.

Precisamos determinar para qual termo $a_n = 996$, então: $996 = 6 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 166$

Calculando a soma dos inteiros divisíveis por 6, temos:

$$S_{166} = \frac{(a_1 + a_{166}) \cdot 166}{2} = 83\,166$$

Assim, a soma dos números inteiros divisíveis por 6 é 83 166.

Como a soma dos números inteiros é 499 500, então: $499\,500 - 83\,166 = 416\,334$

35. Na sequência, $a_1 = 28$ e $r = 23 - 28 = -5$, então:

$a_n = 28 + (n - 1) \cdot (-5) = 33 - 5n$

$$S_n = \frac{\left[28 + (33 - 5n)\right] \cdot n}{2} = \frac{61n - 5n^2}{2}$$

Para que S_n seja negativa, $S_n < 0$, então temos:

$$S_n = \frac{61n - 5n^2}{2} < 0 \Rightarrow 61n - 5n^2 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow n \cdot (61 - 5n) < 0 \Rightarrow n < 0$

ou $61 - 5n < 0 \Rightarrow n > 12{,}2$

Como $n \in \mathbb{N}^*$, $n < 0$ não é solução, então $n > 12{,}2$.

Portanto, o menor valor de n é 13.

36. Na sequência, $a_1 = 15$ e $r = -11 - (-15) = 4$. Então:

$a_n = -15 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 19$

$$S_n = \frac{\left[-15 + (4n - 19)\right] \cdot n}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_n = -17n + 2n^2$

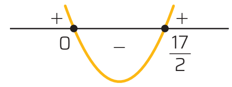
Para que S_n seja positiva, $S_n > 0$, temos:

$-17n + 2n^2 > 0$

Resolvendo a inequação, temos:

$n \cdot (-17 + 2n) < 0 \Rightarrow n < 0$

ou $(-17 + 2n) > 0 \Rightarrow n > 8{,}5$



ID/BR

Para S_n ser positiva, temos: $n < 0$, o que não é solução, ou $n > 8{,}5$.

Portanto, o número mínimo de termos que devemos adicionar é 9.

37. Para $n = 1$, teremos a soma do primeiro termo que é igual a a_1, então:

$S_1 = 2 \cdot (1) \cdot (1 - 4) = -6$

Para $n = 2$, teremos a soma do primeiro e do segundo termos:

$S_2 = 2 \cdot (2) \cdot (2 - 4) \Rightarrow S_2 = -8 \Rightarrow a_1 + a_2 = -8$

Podemos escrever a_2 como $a_2 = a_1 + r$, então:

$a_1 + (a_1 + r) = -8$

$r = -8 + 12 = 4$

Assim, $a_1 = -6$ e $r = 4$. Logo:

$a_n = -6 + (n - 1) \cdot 4$

$a_n = -10 + 4n$

Portanto, $a_n = -10 + 4n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

38. Resposta pessoal.

Para essa atividade, os estudantes devem construir uma P.A. e determinar valores para que a sua soma S_{15} seja 13. Uma possibilidade é utilizar a fórmula de soma de P.A., atribuir valores para a_1 ou a_n e assim determinar os valores da razão e do outro termo desconhecido.

Após a construção da P.A., os estudantes podem compartilhar suas sequências e explicar como foi a criação e quais dúvidas surgiram nesse processo.

39. A sequência é (4, 6, 8, ..., 38), assim:

$a_1 = 4$; $a_n = 38$ e $r = 2$.

Precisamos calcular em qual fileira de telhas temos $a_n = 38$.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow$

$\Rightarrow 38 = 4 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow n = 18$

A quantidade total de telhas em uma parte será a soma das telhas de todas as fileiras.

Como $a_1 = 4$ e $a_{18} = 38$, temos:

$$S_{18} = \frac{(a_1 + a_{18}) \cdot 18}{2} = 378$$

Então, cada parte tem 378 telhas. Em 4 partes, temos: $378 \cdot 4 = 1\,512$

40. A camada dos ladrilhos cinza segue a sequência (4, 20, 36, ...).

Assim, $a_1 = 4$ e $r = 20 - 4 = 16$, então:

$a_n = -12 + 16n$

Para obter a quantidade de ladrilhos da 10ª fileira, precisamos calcular a_{10}:

$a_{10} = -12 + 16 \cdot (10) = 148$

Alternativa **d**.

41. Considerando a_n o número de palitos para formar a enésima figura, podemos escrever:

$a_1 = 4$ (1ª figura)

$a_2 = 4 \cdot 3 = 12$ (2ª figura)

$a_3 = 4 \cdot 5 = 20$ (3ª figura)

A sequência que representa essa situação é (4, 12, 20, ...).

Como $a_1 = 4$ e $r = 12 - 4 = 8$, então:

$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 8$

Para construir a 50ª figura:

$a_{50} = 4 + (50 - 1) \cdot 8 = 396$

Assim, $a_1 = 4$ e $a_{50} = 396$. Para determinar a quantidade de palitos para construir, ao mesmo tempo, as 50 primeiras figuras, precisamos determinar S_{50}: $S_{50} = 10\,000$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 212)

42. Para que a sequência seja uma P.G., cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante. Então, precisamos verificar a razão dessas sequências.

Podemos calcular a razão de uma P.G. dividindo qualquer um dos termos pelo seu antecessor:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

a) $q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{5}{2}$ $\quad q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{4}$

Como $\frac{a_3}{a_2} \neq \frac{a_2}{a_1}$, a sequência não é uma P.G.

b) $q = \frac{a_3}{a_2} = -\frac{2}{3}$ $\quad q = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{2}{3}$

Como $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$, a sequência é uma P.G. de razão $-\frac{2}{3}$.

c) $\frac{a_4}{a_3} = \frac{16}{9}$ $\quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{4}$

Como $\frac{a_4}{a_3} \neq \frac{a_3}{a_2}$, a sequência não é uma P.G.

d) $\frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{10}$ $\quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{10}$

Como $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$, a sequência é uma P.G. de razão $\frac{1}{10}$.

43. a) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

b) $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$

44. a) $a_1 = (-1)^1 = -1$

$a_2 = (-1)^2 = 1$

$a_3 = (-1)^3 = -1$

Temos a sequência (−1, 1, −1, ...). Verificando a razão:

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{1} = -1$ $\quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{-1} = -1$

Como $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$, é uma P.G. de razão −1.

b) $a_1 = \frac{1 + 1}{1^2} = \frac{2}{1} = 2$

$a_2 = \frac{2 + 1}{2^2} = \frac{3}{4}$

$a_3 = \frac{3 + 1}{3^2} = \frac{4}{9}$

Temos a sequência $\left(2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \ldots\right)$.

Verificando a razão:

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{16}{27}$ $\quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{8}$

Como $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{a_3}{a_2}$, não é uma P.G.

45. A P.G. é $(m - 1, m + 5, 11m - 1)$.

Como $m + 5$ é a média geométrica de $m - 1$ e $11m - 1$, temos:

$m + 5 = \sqrt{(m - 1) \cdot (11m - 1)}$

$(m + 5)^2 = (m - 1) \cdot (11m - 1)$

$5m^2 - 11m - 12 = 0$

Resolvendo a equação:

$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-12) = 361$

$$m = \frac{11 \pm 19}{2 \cdot 5} \begin{cases} m_1 = 3 \\ m_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Como todos os termos da sequência são positivos, $m = -\frac{4}{5}$ não é solução, então, $m = 3$.

Assim, temos:

$a = m - 1 = 3 - 1 = 2$

$b = m + 5 = 3 + 5 = 8$

$c = 11m + 1 = 11 \cdot 3 - 1 = 32$

Portanto, $a + b + c = 2 + 8 + 32 = 42$.

46. **a)** Podemos escrever uma P.G. de razão 3 em que a_n é o número de pessoas, além de Ângela, que sabem da notícia. Assim:

(3, 9, 27, 81, 243, 729)

Às 3 h da tarde, somando os termos até a_3, $(3 + 9 + 27 = 39)$, 39 pessoas sabiam da notícia.

Às 6 h da tarde, temos que 1 092 pessoas sabiam da notícia, pois:

$3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 = 1\,092$

b) 2 horas: $3^0 + 3^1 + 3^2$

3 horas: $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$

4 horas: $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4$

5 horas: $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5$

6 horas: $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6$

47. **a)** Com base no enunciado, a medida do lado de cada quadrado, a partir do segundo, é metade da medida do lado do quadrado anterior.

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$

A área do quadrado pode ser escrita como $A = \ell^2$, em que ℓ é a medida do lado do quadrado.

Assim, os primeiros termos da sequência das áreas dos quadrados são:

$\left(1^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{8}\right)^2, \ldots\right) =$

$= \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\right)$

b) O perímetro p é a soma de todos os lados da figura. No quadrado, podemos escrever $p = 4\ell$.

Assim, os primeiros termos da sequência dos perímetros são:

$\left(4 \cdot 1, 4 \cdot \frac{1}{2}, 4 \cdot \frac{1}{4}, 4 \cdot \frac{1}{8}, \ldots\right) = \left(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$

c) Ambas as sequências são P.G.

48. Vamos considerar uma sequência de três termos: $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$, com $q \neq 0$.

$\frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = -512 \Rightarrow x = -8$

Além disso, de acordo com o enunciado, a soma dos termos é igual a -28, então: $\frac{x}{q} + x + xq = -28$

Substituindo $x = -8$ na equação, temos:

$-2q^2 + 5q - 2 = 0$

Resolvendo a equação, temos:

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$q = \frac{-5 \pm 3}{-4}$, $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = 2$

Para $x = -8$ e $q = \frac{1}{2}$, a sequência é:

$\left(\frac{-8}{\frac{1}{2}}, -8, -8 \cdot \frac{1}{2}\right) = (-16, -8, -4)$

Para $x = -8$ e $q = 2$, a sequência é:

$\left(\frac{-8}{2}, -8, -8 \cdot 2\right) = (-4, -8, -16)$

49. Resposta pessoal. Uma sugestão de resposta: Uma P.G. é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante. Se uma sequência não atende a essa condição, ela não é uma P.G. Exemplos:

(2, 4, 5, 10, ...). Nessa sequência, os termos não são constantes: $\frac{5}{4} \neq \frac{4}{2}$

(−1, 5, −2, 4, ...). Nessa sequência, os termos não são constantes: $\frac{5}{-1} \neq \frac{-2}{5}$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 215)

50. **a)** (3, 6, 12, ...). Na sequência: $a_1 = 3$ e $q = 2$.

Utilizando a fórmula do termo geral de uma P.G., temos: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Para determinar o décimo termo, precisamos calcular $n = 10$:

$a_{10} = 3 \cdot 2^{10-1} \Rightarrow a_{10} = 3 \cdot 512 = 1\,536$

b) Queremos determinar em qual termo $a_n = 6\,144$, então:

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 6\,144 = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow n = 12$

51. **a)** Podemos escrever a_7 como:

$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} \Rightarrow 4\,374 = 6 \cdot q^6 \Rightarrow q = 3$

b) Podemos escrever a_6 como:

$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} \Rightarrow -320 = 10 \cdot q^5 \Rightarrow q = -2$

52. Da sequência temos $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_n = 12\,288$ e:

$$q = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{-3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{-12}{6} = -2$$

Utilizando o termo geral de uma P.G., temos:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 12\,288 = \frac{3}{4} \cdot (-2)^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 15$

53. Podemos escrever a_4 e a_7 como:

$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1} \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow a_1 \cdot q^3 = 24$

$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} \Rightarrow a_7 = a_1 \cdot q^6 \Rightarrow a_1 \cdot q^6 = -192$

Juntando as duas equações, temos:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^3 = 24 \\ a_1 \cdot q^6 = -192 \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação pela primeira:

$\frac{a_1 \cdot q^6}{a_1 \cdot q^3} = \frac{-192}{24} \Rightarrow q = -2$

Substituindo $q = -2$ em $a_1 \cdot q^3 = 24$:

$a_1 = \frac{24}{-8} = -3$

Assim, $a_1 = -3$ e $q = -2$, então $a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$.

Para $n = 10$ e $n = 11$:

$a_{10} = -3 \cdot (-2)^9 \Rightarrow a_{10} = 1\,536$

$a_{11} = -3 \cdot (-2)^{10} \Rightarrow a_{11} = -3\,072$

54. $a_6 - a_2 = 15$

$(a_1 \cdot q^5) - (a_1 \cdot q^1) = 15$

$a_1 \cdot q \cdot (q^4 - 1) = 15$

E, $a_8 - a_4 = 60$, então:

$a_8 - a_4 = 60$

$(a_1 \cdot q^7) - (a_1 \cdot q^3) = 60$

$a_1 \cdot q^3 \cdot (q^4 - 1) = 60$

Juntando as duas equações:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q \cdot (q^4 - 1) = 15 \\ a_1 \cdot q^3 \cdot (q^4 - 1) = 60 \end{cases}$$

Dividindo a segunda equação pela primeira:

$\frac{a_1 q^3 \cdot (q^4 - 1)}{a_1 q \cdot (q^4 - 1)} = \frac{60}{15}$, para $q \neq -1$ e $a_1 \neq 0$

$1 \cdot q^{3-1} = 4$

$q = \pm 2$

Em $a_1 \cdot q \cdot (q^4 - 1) = 15$ vamos substituir os valores de q:

Para $q = -2$:

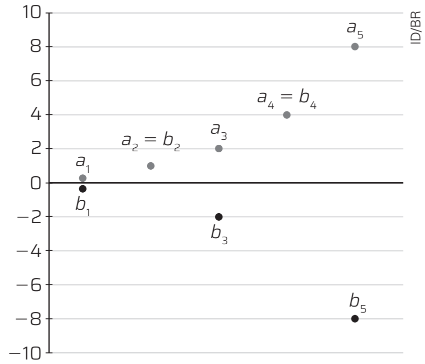
$a_1 \cdot (-2) \cdot \left[(-2)^4 - 1\right] = 15 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}$

Para $q = 2$:

$a_1 \cdot (2) \cdot \left[(2)^4 - 1\right] = 15 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$

Portanto, as sequências são $\left(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots\right)$ ou $\left(-\frac{1}{2}, 1, -2, 4, \ldots\right)$.

Representação gráfica:



55. **a)** O número de termos será 5:

$(m + 2 = 3 + 2 = 5)$

A sequência deve ser da seguinte forma:

(2, _, _, _, 32), com $a_1 = 2$ e $a_5 = 32$

Podemos escrever a_5 como:

$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow q = \pm 2$

Para $a_1 = 2$ e $q = 2$, temos: (2, 4, 8, 16, 32)

Para $a_1 = 2$ e $q = -2$, temos:

(2, −4, 8, −16, 32)

b) Quatro meios geométricos entre −2 e 486.

A sequência tem 6 termos e é na forma:

(−2, _, _, _, _, 486), com $a_1 = -2$ e $a_6 = 486$

Podemos escrever a_6 como:

$a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow q = -3$

Assim, como $a_1 = -2$ e $q = -3$, temos:

(−2, 6, −18, 54, −162, 486)

56. Analisando a figura, temos: 1ª figura: 3 lados; 2ª figura: 12 lados; 3ª figura: 48 lados.

Podemos representar o número de lados de cada figura com a seguinte sequência:

(3, 12, 48, ...)

Temos $a_1 = 3$ e $q = \frac{12}{3} = 4$, então:

$a_n = 3 \cdot (4)^{n-1}$

Portanto, $a_n = 3 \cdot (4)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

57. Como o aumento mensal de produção é de 10% = 0,1, podemos representar a situação com a seguinte sequência:

(k; $1{,}1k$; $1{,}1 \cdot (1{,}1k)$; ...)

$a_1 = k$, $q = \frac{1{,}1k}{k} = 1{,}1$; então: $a_n = k \cdot (1{,}1)^{n-1}$

Para determinar a produção para dezembro, precisamos calcular $n = 12$.

$a_{12} = k \cdot (1{,}1)^{12-1} \Rightarrow a_{12} = k \cdot (1{,}1)^{11}$

58. **a)** Considerando a_n o termo relativo ao valor do investimento a cada trimestre, temos a seguinte sequência:

$(1000 \cdot 1{,}02; 1000 \cdot (1{,}02)^2, 1000 \cdot (1{,}02)^3, \ldots)$

$a_1 = 1\,000 \cdot 1{,}02$ e

$q = \frac{1\,000 \cdot 1{,}02^2}{1\,000 \cdot 1{,}02^1} = 1{,}02$, então:

$a_n = 1\,000 \cdot (1{,}02)^n$

Dois anos equivalem a 8 trimestres, então:

$a_8 = 1\,000 \cdot (1{,}02)^8 \simeq 1\,171{,}66$

b) Cinco anos equivalem a 20 trimestres, então:

$a_{20} = 1\,000 \cdot (1{,}02)^{20} = 1\,485{,}95$

Na atividade **R18**, ao final de 5 anos, teríamos R$ 1 610,51.

Portanto, a segunda aplicação (**R18**) é mais vantajosa.

59. Respostas pessoais. Sugestão:

a) (3, 9, 27, ...), com $a_1 = 3$ e $q = \frac{9}{3} = 3$.

Considerando a_n a quantidade de novas pessoas que sabem da notícia a cada n horas, temos: $a_n = 3^n$. Ou seja,

$a_1 = 3^1 = 3$; $a_2 = 3^2 = 9$; $a_3 = 3^3 = 27$; $a_4 = 3^4 = 81$; $a_5 = 3^5 = 243$; $a_6 = 3^6 = 729$

Assim, às 3 h da tarde, teremos a seguinte quantidade de pessoas que sabem da notícia:

$a_1 + a_2 + a_3 = 3 + 9 + 27 = 39$

E às 6 h da tarde:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 =$
$= 39 + 81 + 243 + 729 = 1092$

Nesse item, espera-se que os estudantes percebam que utilizar o primeiro termo e a razão é mais simples do que utilizar o termo geral da progressão geométrica.

b) Temos $a_n = 3^n$. Assim, para as horas solicitadas, temos:

$a_2 = 3^2$; $a_3 = 3^3$; $a_4 = 3^4$; $a_5 = 3^5$; $a_6 = 3^6$

Para esse item, como é solicitado representar a quantidade de pessoas utilizando potências, é interessante que os estudantes percebam que é mais vantajoso utilizar o termo geral.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 217)

60. a) A sequência dos termos de ordem ímpar pode ser representada por (3, 3, 3, ...).

Assim, $a_1 = 3$ e $q = \frac{3}{3} = 1$.

Quando $q = 1$, podemos calcular a soma dos termos como $S_n = n \cdot a_1$.

Para S_{100}, temos: $S_{100} = 100 \cdot 3 = 300$

b) A sequência de ordem par pode ser representada por (−3, −3, −3, ...).

Assim, $a_1 = -3$ e $q = \frac{-3}{-3} = 1$.

Para S_{200}, temos: $S_{200} = 200 \cdot (-3) = -600$

61. Analisando o numerador da fração, identificamos que a sequência é a soma de uma progressão geométrica.

$(2 + 4 + 8 + ... + 1024)$

Dessa sequência, $a_1 = 2$ e $q = \frac{4}{2} = 2$. Assim: $a_n = 2^n$

Precisamos determinar para qual termo $a_n = 1024$. Então: $n = 10$

Temos, então, $a_1 = 2$, $q = 2$ e $a_{10} = 1024$. A soma dos 10 primeiros termos será $S_{10} = 2046$.

Então, a soma dos termos do numerador é 2046.

Analisando o denominador, identificamos que a sequência também é a soma de uma progressão geométrica.

$(4 + 16 + 64 + ... + 1024)$

Dessa sequência, $a_1 = 4$ e $q = \frac{16}{4} = 4$. Assim: $a_n = 4^n$

Precisamos determinar para qual termo $a_n = 1024$. Então: $n = 5$

Temos, então, $a_1 = 4$, $q = 4$ e $a_5 = 1024$. A soma dos 5 primeiros termos será: $S_5 = 1364$

Então, a soma dos termos do denominador é 1364. Portanto:

$$\frac{2 + 4 + 8 + ... + 1024}{4 + 16 + 64 + ... + 1024} = \frac{2046}{1364} = \frac{3}{2}$$

62. Comparando com a soma de n termos:

$$S_{10} = S_n \Rightarrow \frac{2^{20} - 1}{6} = \frac{a_1 \cdot (4^{10} - 1)}{4 - 1}$$

Temos $4^{10} = (2^2)^{10} = 2^{20}$, então: $a_1 = \frac{1}{2}$

Assim, $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = 4$.

Logo: $a_2 = 2^{2-1} = 2^1 = 2$

Portanto, o segundo termo é 2.

63. A soma de S_1 é igual à soma do primeiro termo, que é igual a a_1. Então: $S_1 = -2 \Rightarrow a_1 = -2$

S_2 é igual a $a_1 + a_2$, então:

$S_2 = -6 \Rightarrow a_1 + a_2 = -6$

Podemos escrever a_2 como $a_2 = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Assim:

$a_1 + a_2 = -6 \Rightarrow -2 + (-2 \cdot q^{2-1}) = -6 \Rightarrow q = 2$

Temos $a_1 = -2$ e $q = 2$, então:

$a_n = -2 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = -2^n$

Portanto, $a_n = -2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

64. Vamos considerar as sequências (16, 8, 4, 2, ...) e (8, 4, 2, ...), que representam, respectivamente, os metros percorridos pela bola na descida e na subida.

Na primeira sequência, temos uma P.G. em que $a_1 = 16$ e $q = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

Queremos calcular o espaço percorrido até a décima queda da bola, então a soma dos 10 termos da primeira sequência (S') será $S' \simeq 32$.

A segunda sequência corresponde a uma P.G. em que $a_1 = 8$ e $q = \frac{1}{2}$. Assim, a soma dos 10 termos da segunda sequência (S'') será $S'' \simeq 16$.

O espaço percorrido pela bola corresponde a:

$S' + S'' = 32 + 16 = 48$

65. Contando as mensagens, temos:

Mensagem com 1 recado: $4 = 4^1$ (participantes)

Mensagem com 2 recados: $16 = 4^2$ (participantes)

Mensagem com 15 recados: 4^{15} (participantes)

Para determinar a quantidade de pessoas que participaram da corrente ao chegar a 15 mensagens, devemos calcular S_{15}.

Como $a_1 = 4$ e $q = 4$, temos: $S_{15} = 1431655764$

66. a) A sequência que representa essa situação é (3, 9, 27, ...), sendo a_n a quantidade de galhos novos a cada ano.

Temos $a_1 = 3$ e $q = \frac{9}{3} = 3$, então: $a_n = 3^n$

Então, após 10 anos:

$a_{10} = 3^{10} \Rightarrow a_{10} = 59049$

b) Para determinar a quantidade total de galhos que a árvore terá no oitavo ano, precisamos calcular S_8. Então:

$$S_8 = \frac{3 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_8 = 9840$$

67. Podemos representar os valores de cada um dos botões dessa situação com a seguinte P.G.: (1, 2, 4, 8, ...)

Assim, $a_1 = 1$ e $q = 2$.

Como a roupa tem 12 botões, precisamos calcular S_{12}:

$$S_{12} = \frac{1 \cdot (2^{12} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow S_{12} = 4095$$

Assim, o cliente pagará pela roupa R$ 4095,00.

Portanto, a loja saiu ganhando, pois receberá R$ 4095,00 em vez de R$ 250,00, que era o preço inicial da roupa.

68. Resposta pessoal.

Diversas situações e valores podem ser inventados. Sugestão:

Ana estava à procura de uma casa nova; depois de muitas visitas, escolheu uma em um bairro que lhe agradava. Ao fazer as negociações, o corretor lhe disse:

— Por esta casa, o proprietário está solicitando o valor de R$ 200000,00, mas você pode fazer uma contraproposta.

Ana resolveu pensar. Ao dar mais uma volta pela casa, deparou-se com a escada que levava aos quartos. Enquanto subia os degraus, foi contando-os e identificou que havia 20 degraus. Nesse momento, ela teve uma ideia de contraproposta e retornou para falar com o corretor.

— Eu realmente gostei dessa casa, então estou disposta a pagar R$ 30000 mais um valor fixo para cada degrau da escada, da seguinte forma: R$ 0,15 pelo primeiro degrau, R$ 0,30 pelo segundo, R$ 0,60 pelo terceiro, R$ 1,20 pelo quarto, e assim por diante.

O corretor apresentou a proposta ao proprietário, que resolveu aceitá-la e vender a casa para Ana.

Que valor Ana pagou pela casa? Se houver, qual foi a diferença do valor solicitado pelo proprietário ao valor pago por Ana?

Resolução:

Podemos representar os valores de cada degrau com a seguinte P.G.:

(0,15; 0,30; 0,60; 1,20, ...)

Assim, $a_1 = 0{,}15$ e $q = \frac{0{,}30}{0{,}15} = 2$.

Como a escada tem 20 degraus, precisamos calcular S_{20}:

$S_{20} = 157286{,}25$

Logo, Ana pagou R$ 157286,25 pelos degraus.

Como o valor da casa foi o preço dos degraus mais R$ 30000,00, o total foi:

$157286{,}25 + 30000 = 187286{,}25$

Portanto, Ana pagou R$ 187286,25 pela casa.

A diferença em relação ao valor anteriormente solicitado foi de R$ 12713,75.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 222)

69. a) Da sequência, temos: $a_1 = \frac{2}{3}$ e $q = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} =$

$= \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

Então:

$$S_n = \frac{\frac{2}{3} \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = -3^{-n} + 1$$

Portanto, $S_n = -3^{-n} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Como $q = \frac{1}{3}$ e $-1 < \frac{1}{3} < 1$, temos:

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow S = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \Rightarrow S = 1$$

70. a) Da sequência, temos: $a_1 = 8$ e $q = \frac{-4}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow q = -\frac{1}{2}$

Como $q = -\frac{1}{2}$ e $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, temos:

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{8}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{16}{3}$$

b) A sequência $\left(8, 2, \frac{1}{2}, ...\right)$ representa os termos de ordem ímpar.

Temos $a_1 = 8$ e $q = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Então, como $q = \frac{1}{4}$ e $-1 < \frac{1}{4} < 1$, temos:

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{8}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{32}{3}$$

c) A sequência (−4, −1, ...) representa os termos de ordem par.

Temos $a_1 = -4$ e $q = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$.

Então, como $q = \frac{1}{4}$ e $-1 < \frac{1}{4} < 1$, temos:

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{-4}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)} = -\frac{16}{3}$$

71. Analisando o numerador da fração, podemos identificar que se trata da soma de uma P.G. infinita:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$

Temos $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$, então:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Analisando o denominador da fração, identificamos que este também é a soma de uma P.G. infinita:

$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ...$

Temos $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{4}$, então:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Portanto, temos:

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+...} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = 2\cdot\frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

72. a) 0,888... = 0,8 + 0,08 + 0,008 + ..., que é a soma dos termos de uma P.G. infinita, sendo $a_1 = 0{,}8$ e $q = \frac{0{,}08}{0{,}8} = \frac{1}{10}$.
Assim, temos:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}8}{1-\frac{1}{10}} = \frac{0{,}8}{0{,}9} = \frac{8}{9}$$

b) 0,232323... = 0,23 + 0,0023 + 0,000023 + ..., que é a soma dos termos de uma P.G. infinita, sendo $a_1 = 0{,}23$ e $q = \frac{1}{100}$.
Assim, temos:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}23}{1-\frac{1}{100}} = \frac{0{,}23}{0{,}99} = \frac{23}{99}$$

c) 0,6232323... = 0,6 + 0,023 + 0,00023 + + ... = 0,6 + S, em que S é a soma dos termos de uma P.G. infinita, sendo $a_1 = 0{,}023$ e $q = \frac{1}{100}$. Assim, temos:

$$0{,}6 + S = 0{,}6 + \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{6}{10} + \frac{0{,}023}{1-\frac{1}{100}} = \frac{617}{990}$$

d) 0,14666... = 0,14 + 0,006 + 0,0006 + ... = = 0,14 + S, em que S é a soma dos termos de uma P.G. infinita, sendo $a_1 = 0{,}006$ e $q = \frac{1}{10}$. Assim, temos:

$$0{,}14 + S = \frac{14}{100} + \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{14}{100} + \frac{0{,}006}{1-\frac{1}{10}} = \frac{11}{75}$$

73. a) O comprimento da circunferência pode ser expresso por $C = 2\pi r$, sendo r a medida do raio da circunferência. Como, na "serpente", temos semicircunferências, $C = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$.
Analisando os arcos que formam a "serpente": 1º arco: $c_1 = 4\pi$; 2º arco: $c_2 = 2\pi$; 3º arco: $c_3 = \pi$
O comprimento de cada arco da "serpente" segue a seguinte sequência: $(4\pi, 2\pi, \pi, ...)$
Temos $c_1 = 4\pi$ e $q = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$. Então, para determinar o comprimento da "serpente" quando ela tiver oito circunferências, precisamos calcular S_8:

$$S_8 = \frac{4\pi\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{255}{32}\pi$$

b) Caso a "serpente" tenha infinitas circunferências, temos $c_1 = 4\pi$ e $q = \frac{1}{2}$, sendo $-1 < \frac{1}{2} < 1$; então:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{c_1}{1-q} = \frac{4\pi}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4\pi}{\frac{1}{2}} = 8\pi$$

c) Resposta pessoal.
Como sugestão: A figura, nessa atividade, permite-nos compreender a que "serpente" o enunciado se refere, para, então, identificar o raio de cada semicircunferência e como é determinado seu comprimento.

74. a) O primeiro membro da equação é a soma dos termos de uma P.G. infinita com $a_1 = x$ e $q = \frac{\frac{x}{3}}{x} = \frac{1}{3}$, sendo $-1 < \frac{1}{3} < 1$. Então:

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + ... = \frac{a_1}{1-q} = \frac{x}{1-\frac{1}{3}}$$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + ... = 4 \Rightarrow \frac{x}{1-\frac{1}{3}} = 4$$

$$x = 4\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Portanto, $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$.

b) O primeiro membro da equação é a soma dos termos de uma P.G. infinita com $a_1 = \frac{x-1}{5}$ e $q = \frac{-\left(\frac{x-1}{25}\right)}{\frac{x-1}{5}} = -\frac{1}{5}$, sendo $-1 < -\frac{1}{5} < 1$. Então:

$$\frac{x-1}{5} - \frac{x-1}{25} + \frac{x-1}{125} + ... = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{x-1}{5}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}$$

Resolvendo a equação, obtemos:

$$\frac{x-1}{5} - \frac{x-1}{25} + \frac{x-1}{125} + ... = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x-1}{5}}{1+\frac{1}{5}} = 6 \Rightarrow x = 37$$

Portanto, $S = \{37\}$.

c) O primeiro membro da equação é a soma dos termos de uma P.G. infinita. Podemos organizar esse membro em duas sequências infinitas, da seguinte forma:

$$\left(x - \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{8} ...\right) +$$
$$+\left(-9 + 3 - 1 + \frac{1}{3} + ...\right) = 2$$

De $\left(x - \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{8} ...\right)$, temos $a_1 = x$ e

$q = \frac{-\frac{x}{2}}{x} = -\frac{1}{2}$, sendo $-1 < -\frac{1}{2} < 1$.

De $\left(-9 + 3 - 1 + \frac{1}{3} + ...\right)$, temos $a_1 = -9$ e

$q = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$, sendo $-1 < -\frac{1}{3} < 1$.

Então:

$$\left(x - \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x}{8} ...\right) +$$
$$+\left(-9 + 3 - 1 + \frac{1}{3} + ...\right) = 2$$

$$\frac{x}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} + \frac{-9}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 2$$

$$x = \frac{35}{4}\cdot\frac{3}{2} = \frac{105}{8}$$

Portanto, $S = \left\{\frac{105}{8}\right\}$.

75. Analisando os dados, temos que a sequência é:

$$\left(L_o, \frac{2}{3}L_o, \frac{4}{9}L_o, \frac{8}{27}L_o, ...\right)$$

E a razão é:

$$q = \frac{\frac{4}{9}L_o}{\frac{2}{3}L_o} \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

Sabemos que é uma P.G. Vamos calcular a intensidade luminosa correspondente à profundidade de 6 m. Temos que:

$a_n = a_1\cdot q^{n-1} \Rightarrow a_6 = a_1\cdot q^{6-1} \Rightarrow a_6 = \frac{64}{729}L_o$.

Alternativa **d**.

76. a) A área do círculo pode ser determinada por $A = \pi r^2$, sendo r a medida do raio.
1º círculo: $A = \pi a^2$
2º círculo:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

O raio do 2º círculo mede $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; então:

$$A = \pi\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{2}$$

A sequência que determina a área dos círculos pode ser escrita como: $\left(\pi a^2, \frac{\pi a^2}{2}, ...\right)$

Temos $a_1 = \pi a^2$ e

$q = \frac{1}{2}$, sendo $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

Então:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi a^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi a^2}{\frac{1}{2}} = 2\pi a^2$$

b) A área do quadrado pode ser determinada por $A = \ell^2$, sendo ℓ a medida do lado do quadrado.
1º quadrado: $A = (2a)^2 = 4a^2$
2º quadrado: $A = \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2a^2$
A sequência que determina a área dos quadrados pode ser escrita como:
$(4a^2, 2a^2, ...)$
Temos $a_1 = 4a^2$ e $q = \frac{1}{2}$, sendo:
$-1 < \frac{1}{2} < 1$. Então:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{4a^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4a^2}{\frac{1}{2}} = 8a^2$$

TECNOLOGIA (P. 223)

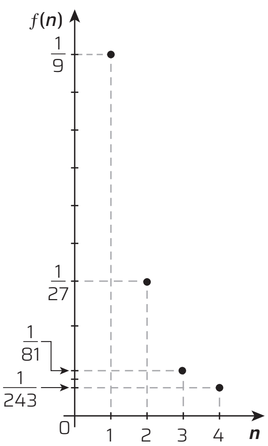
1. a) $2^5 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 32$
b) $3^{12} = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 531\,441$
c) $6^9 = 6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6 = 10\,077\,696$
d) $5^7 = 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5 = 78\,125$

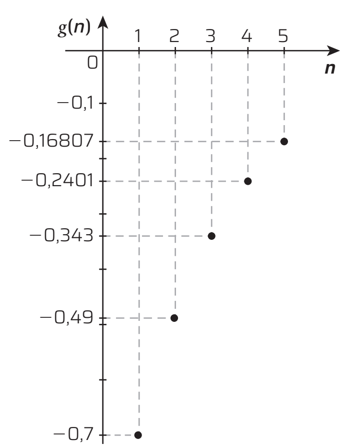
2. a) 2 × = = = =
b) 3 × = = = = = = = = = = =
c) 6 × = = = = = = = =
d) 5 × = = = = = =

3. a) Resposta possível:

n	$f(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$	$g(n) = -0{,}7^n$
1	$\frac{1}{9}$	$-0{,}7$
2	$\frac{1}{27}$	$-0{,}49$
3	$\frac{1}{81}$	$-0{,}343$
4	$\frac{1}{243}$	$-0{,}2401$
5	$\frac{1}{729}$	$-0{,}16807$

b)





Ilustrações: ID/BR

c) $f(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

$g(n) = -0{,}7^n = -0{,}7 \cdot 0{,}7^{n-1}$

d) $f(n)$: $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \frac{1}{2\,187}, \frac{1}{6\,561}, \frac{1}{19\,683}, \frac{1}{59\,049}, \frac{1}{177\,147}, ...\right)$

$g(n)$: $(-0{,}7;\ -0{,}49;\ -0{,}343;\ -0{,}2401;\ -0{,}16807;$
$-0{,}117649; -0{,}0823543; -0{,}05764801;$
$-0{,}040353607; -0{,}028247524, ...)$

e) f: $S_{10} \simeq 0{,}17$

g: $S_{10} \simeq 2{,}27$

4. a) Considerando a_{n-1} e a_n dois números da sequência, temos:

$(a_{n-1})^2 + (a_n)^2 = a_k, n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}^*$

O que satisfaz a relação $k = 2n - 1$.

b) $1 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = a_{n+2}, n \in \mathbb{N}^*$

CÁLCULO RÁPIDO (P. 224)

1. a) $10^3 = 1\,000$
b) $1^{15} = 1$
c) $7^3 = 343$
d) $3^1 = 3$
e) $18^1 = 18$
f) $2^{-1} = \frac{1}{2}$

2. a) $3 \cdot 3^{10} = 3^{11}$
b) $\frac{1}{3} \cdot 3^{10} = 3^{-1} \cdot 3^{10} = 3^9$
c) $\frac{1}{9} \cdot 3^{10} = \frac{1}{3^2} \cdot 3^{10} = 3^8$
d) $(3^{10})^2 = 3^{20}$

3. Sim; $3^4 = (3^2)^2 = 9^2$.

4. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$
b) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$
d) $\left(\frac{1}{10}\right)^5$
e) $\left(\frac{1}{7}\right)^3$

5. a) 10^{-2}
b) 10^{-4}
c) 10^{-3}
d) 10^{-7}
e) 10^{-5}

6. a) $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$
b) $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$
c) $12^{-2} = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$
d) $6^{-1} = \frac{1}{6}$
e) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$
f) $-(-2)^{-5} = -\frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{32}$
g) $(-3)^2 = 9$
h) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$
i) $-1^6 = -1$
j) $-5^3 = -125$

PARA RECORDAR (P. 224)

1. A empresa tem ao todo 60 funcionários. Se 12 deles foram treinados, então o percentual será: $\frac{12}{60} = 0{,}2 = 20\%$

2. $\frac{85}{100} \cdot x = 578 \Rightarrow x = 680$

3. $f(x) = -x^2 - 2x + p$; $(a = -1; b = -2; c = p)$

$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} | y \leqslant 6\}$

Como $a \leqslant 0$ e $\text{Im}(f) = \left]-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$, temos:

$\frac{-\Delta}{4a} = 6$

$\frac{-\left[(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot p\right]}{4 \cdot (-1)} = 6 \Rightarrow p = 5$

Portanto, $p = 5$, e a função é $f(x) = -x^2 - 2x + 5$.

4. Precisamos determinar para quantos meses trabalhados $s(x) = 700$. Então:

$s(x) = 100(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+10})$

$700 = 100(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+10})$

$\sqrt{x+3} = 7 - \sqrt{x+10}$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$(\sqrt{x+3})^2 = (7 - \sqrt{x+10})^2$

$x = 6$

Como 1 ano tem 12 meses, então 6 anos correspondem a 72 meses, pois $6 \cdot 12 = 72$. Portanto, a média salarial será de R$ 700,00 para 72 meses trabalhados na empresa.

5. Com base no enunciado, sabemos que 1 quilograma custa R$ 1,75, então, para n quilogramas, temos $m = 1{,}75 \cdot n$, sendo m o preço pago em reais pela compra de n quilogramas.

Para $n = 0$, $m = 0$.

Para $n = 1$, $m = 1{,}75$.

Para $n = 2$, $m = 3{,}50$.

Podemos observar que o preço pago é proporcional à quantidade de quilogramas, então essa situação pode ser representada por uma função linear crescente.

Portanto, o gráfico que corresponde à situação apresentada é o do item **e**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 225)

1. Com base no enunciado, podemos inferir que:

I. Olga não mora no mesmo andar que Érica e Karina, então Érica e Karina moram no mesmo andar.

Olga	Érica, Karina

II. Ana não mora no mesmo andar que Irene e Karina, então Irene e Karina moram no mesmo andar.

Ana	Irene, Karina

Organizando as duas informações, temos que Karina mora com Érica e Irene no mesmo andar, que só pode ser o segundo (3 pessoas).

1º ANDAR (2 pessoas)	2º ANDAR (3 pessoas)
Olga, Ana	Érica, Karina, Irene

Portanto, Ana e Olga moram no primeiro andar.

Alternativa **e**.

2. Sabemos que as profissões sonhadas pelos estudantes são professor, *designer* gráfico e economista, e cada um deles faz parte de um time diferente: futebol, basquetebol e voleibol.

De acordo com o enunciado, inferimos os seguintes dados:

I. Nem Guilherme nem Eduardo querem ser economistas, logo, João quer ser economista;

II. O esporte que João participa não tem goleiro, então, ele não joga futebol;

III. Guilherme não quer ser professor, portanto, ele quer ser *designer* gráfico;

IV. Eduardo pratica voleibol e, considerando as profissões já atribuídas, quer ser professor.

Esporte/Profissão	Professor	*Designer* gráfico	Economista
Futebol		Guilherme	
Basquete			João
Voleibol	Eduardo		

Portanto, Eduardo quer ser professor e pratica voleibol.

Alternativa **b**.

MATEMÁTICA E *FAKE NEWS* (P. 226)

Conectando ideias

1. Em geral, o gênero notícia é publicado em *sites*, blogues e portais de jornais, universidades, etc. e elaborado seguindo uma estrutura que contém: lide, que é geralmente o primeiro parágrafo e apresenta informações essenciais para o relato do fato (o que aconteceu, onde, como e por quê); linguagem clara e objetiva, no formato de relato, empregando o presente (para dar consistência e caráter permanente e atual para o fato); adequação à norma-padrão da língua portuguesa; e ausência de juízo de valor ou comentários explícitos que refletiriam a opinião do autor da notícia. Muitas vezes, a notícia falsa também apresenta o mesmo suporte, mas, em geral, não utiliza a mesma linguagem: recorre a verbos, adjetivos e advérbios em excesso (mostrando a intenção de persuadir um público específico a acreditar no que está sendo dito), além de ter, em muitos casos, erros ortográficos e estrutura diferente da do relato. Na resolução dessa atividade, os estudantes podem citar outros fatores determinantes que encontrarem em suas pesquisas. Reforce a importância de as informações serem pesquisadas em fontes confiáveis, sobretudo em relação a esse tema.

2. Resposta pessoal. Como a velocidade de propagação de notícias pode variar de acordo com muitos fatores, os estudantes podem argumentar que ela não se aproximaria nem de uma progressão aritmética nem de uma progressão geométrica.

3. Os estudantes podem elaborar os esquemas da maneira que preferirem. No entanto, eles devem perceber que, mantendo o ritmo de compartilhamento indicado, ao final de uma semana, 128 pessoas (2^7) terão recebido a notícia. Como forma de complementar a atividade e aprofundar o que foi discutido nesse momento, você pode solicitar a eles que refaçam os cálculos utilizando números maiores como forma de perceberem o impacto que o compartilhamento em massa pode ter em uma situação mais próxima do real.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 228)

1. Analisando a figura, temos que $a_1 = \frac{1}{4}$.
   $a_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{16}$
   $a_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{64}$.
   Logo, é uma P.G., pois a sequência será
   $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\right)$ e a razão $q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{1}{4}$.
   P.G. infinita: $S_n = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \Rightarrow S_n = \frac{1}{3}$
   Alternativa **c**.

2. Analisando os dados e a figura, temos:
   (4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, ...)
   $a_1 = 4$ e $r = 8 - 4 \Rightarrow r = 4$. Logo, é uma P.A.
   $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow a_{10} = 4 + (10-1) \cdot 4 \Rightarrow a_{10} = 40$
   Logo, $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \Rightarrow S_{10} = 220$.
   Alternativa **d**.

3. Analisando as figuras, temos:
   Figura A: $Q_0 = 1$ e $\ell_0 = L$
   Figura B: $Q_1 = 5$ e $\ell_1 = \frac{L}{3}$
   Figura C: $Q_2 = 25$ e $\ell_2 = \frac{L}{3^2}$
   Figura n: $Q_n = 5^n$ e $\ell_n = \frac{L}{3^n}$
   Para calcular a área, temos:
   $A_n = \ell_n^2 \cdot Q_n \Rightarrow A_n = \left(\frac{L}{3^n}\right)^2 \cdot 5^n \Rightarrow A_n = \frac{L^2 \cdot 5^n}{9^n}$
   Para $n = 10$, temos que $A_{10} = \frac{L^2 \cdot 5^{10}}{9^{10}}$.
   Alternativa **b**.

UNIDADE 4 EDUCAÇÃO FINANCEIRA E NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

CAPÍTULO 10 ESTATÍSTICA: AMOSTRAGEM E MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

TECNOLOGIA (P. 235)

1. a) "Qual deve ser o tema da feira?"
   b) Os professores de uma escola.
   c) Doze pessoas responderam à pesquisa.
   d) Mudanças climáticas.

2. Resposta pessoal. Oriente os estudantes no uso do formulário *on-line*, inclusive na criação de um *e-mail*, caso seja necessário.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 237)

1. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:
   Para resposta negativa: Escolher uma amostra formada por pessoas que não gostam de jogos.
   Para resposta positiva: Escolher uma amostra formada por jovens que frequentam periodicamente os jogos.

2. Resposta pessoal. Ao selecionar 232 pessoas na academia, essa amostra é tendenciosa, porque se imagina que os entrevistados são aqueles que mais consomem suplementação alimentar. Não foram ouvidos outros representantes da população. Outro ponto é que não houve a escolha de um método de amostragem (casual, sistemático ou estratificado proporcional) e, dessa forma, não é possível garantir que cada elemento da sociedade seja escolhido para compor essa amostra.

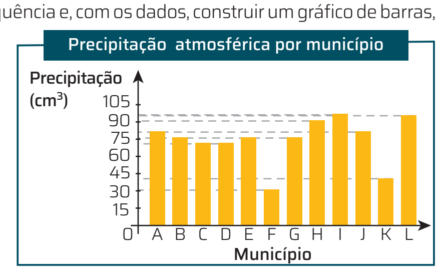
3. a) Variáveis quantitativas indicam uma quantidade do fato observado.
   Variáveis qualitativas são as que indicam uma qualidade do que está sendo observado.
   Variáveis quantitativas: idade dos estudantes; anos de escolaridade; número de irmãos; número de televisores em casa.
   Variáveis qualitativas: meio de transporte utilizado para ir à escola; local do almoço; local de nascimento; local de moradia.
   b) Resposta pessoal. Sugestão de resposta:
   Amostra simples: escolher alguns estudantes de turmas diferentes.
   Amostra sistemática: escolher por turma, por meio das listas de chamada.

4. a) Resposta pessoal. Sugestão de resposta:
   Para a realização desse estudo, é possível escolher uma amostra da louça utilizando um dos métodos de amostragem. Determinada a amostra, o proprietário da fábrica pode levar as peças selecionadas ao forno e cronometrar o tempo que a louça resiste à temperatura.
   b) Necessário. Não é viável que o proprietário teste todas as louças, ou escolha louças aleatoriamente, sem critério.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 243)

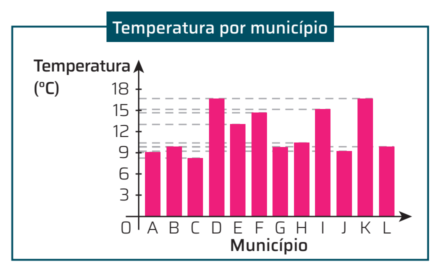
5. Resposta pessoal. Sugere-se organizar os meses obtidos em uma tabela de frequência e, com os dados, construir um gráfico de barras, por exemplo.

6. a)



Dados fictícios.

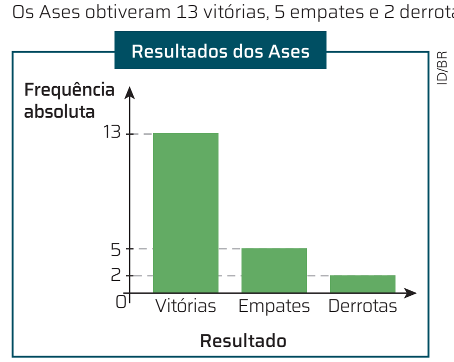
   b)



Dados fictícios.

   c) Não. Municípios com o mesmo valor de precipitação podem apresentar temperaturas médias diferentes. Por exemplo:
   Os municípios C e D apresentam precipitação de 70 cm^3 e suas temperaturas médias são 8 °C e 16 °C.
   d) Não. A precipitação não é diretamente relacionada à temperatura do município. Os municípios onde mais chove são I e L, com precipitação de 95 cm^3 e temperaturas de 14,5 °C e 9,5 °C, respectivamente, enquanto o município em que a temperatura média é a mais baixa é o C, com 8 °C e precipitação de 70 cm^3.
   O município onde chove menos é o F, com precipitação de 30 cm^3 e temperatura de 14 °C , enquanto os municípios em que a temperatura média é mais alta são o D e o K, com precipitação de 70 cm^3 e 40 cm^3, respectivamente, e temperaturas de 16 °C.

7. a) Os Ases obtiveram 13 vitórias, 5 empates e 2 derrotas.
   b)

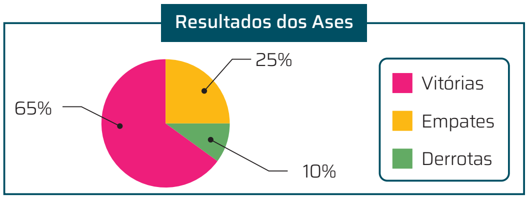


Dados obtidos pela equipe de futebol dos Ases.

c) Sabemos os dados da frequência absoluta de cada item, e o número de elementos é igual a 20 (13 + 5 + 2). Então:

Vitórias: fr $= \frac{13}{20} = 65\%$; Empates: fr $= \frac{5}{20} = 25\%$; Derrotas: fr $= \frac{2}{20} = 10\%$

Resultados	Vitórias	Empates	Derrotas	**Total**
fr (%)	65	25	10	**100**
Ângulo	$65 \cdot 3{,}6° = 234°$	$25 \cdot 3{,}6° = 90°$	$10 \cdot 3{,}6° = 36°$	**360°**



Dados obtidos pela equipe de futebol dos Ases.

8. a) Com a frequência absoluta e o número total de elementos (30), podemos determinar a frequência relativa. Assim:

Salto 6,67 m: fr $= \frac{4}{30} \simeq 13{,}3\%$

Salto 6,82 m: fr $= \frac{9}{30} = 30\%$

Salto 6,90 m: fr $= \frac{8}{30} \simeq 26{,}7\%$

Salto 7,05 m: fr $= \frac{5}{30} \simeq 16{,}7\%$

Salto 7,10 m: fr $= \frac{4}{30} \simeq 13{,}3\%$

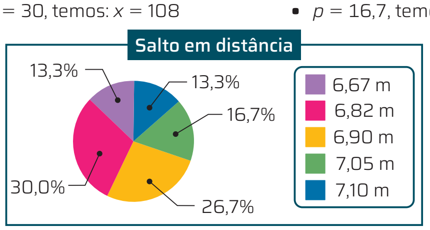
Distância do salto (m)	**Frequência relativa**
6,67	13,3%
6,82	30,0%
6,90	26,7%
7,05	16,7%
7,10	13,3%
Total	**100%**

Dados fictícios.

b) Podemos representar esses dados em um gráfico de setores. Para isso, vamos calcular as medidas dos ângulos correspondentes às frequências relativas por meio de uma regra de três. Sabemos que 100% corresponde ao círculo completo (360°).

Sendo x o valor em grau e p o valor em percentual.

- $p = 13{,}3$, temos: $x \simeq 47{,}9$
- $p = 30$, temos: $x = 108$
- $p = 26{,}7$, temos: $x \simeq 96{,}1$
- $p = 16{,}7$, temos: $x \simeq 60{,}1$



Dados fictícios.

c) Os saltos superiores a 7 metros foram o de 7,05 m, com fr ≃ 16,7%, e o de 7,10 m, com fr ≃ 13,3%. A porcentagem de saltos superiores será a soma das porcentagens desses dois saltos. Assim:

16,7% + 13,3% = 30%

9. O número de elementos de Antônio é 100 e o número de elementos de Ana é 125. Então:

- Banana:
  Antônio: fr = 50%
  Ana: fr = 40%
- Laranja:
  Antônio: fr = 25%
  Ana: fr = 20%
- Cereja:
  Antônio: fr = 25%
  Ana: fr = 20%
- Morango:
  Antônio: fr = 0%
  Ana: fr = 20%

Para construir os gráficos de setores, é preciso calcular os ângulos correspondentes às frequências relativas encontradas.

Pesquisa de Antônio:

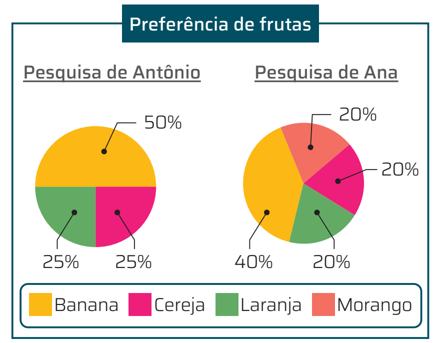
Fruta preferida	Banana	Laranja	Cereja	Morango	**Total**
fr (%)	50	25	25	0	**100**
Ângulo	180°	90°	90°	---	**360°**

Dados fictícios.

Pesquisa de Ana:

Fruta preferida	Banana	Laranja	Cereja	Morango	**Total**
fr (%)	40	20	20	20	**100**
Ângulo	144°	72°	72°	72°	**360°**

Dados fictícios.



Dados fictícios.

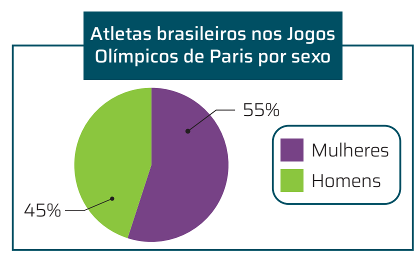
10. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) No estado de Santa Catarina, a percepção de que os casos de *bullying* na escola onde trabalham ocorreram "várias vezes" alcança a porcentagem de 4,6%, contra 3% no Paraná e 2,8% no Rio Grande do Sul.

d) Resposta pessoal.

11. Resposta pessoal. Sugestão de gráfico:



Fonte: COB.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 247)

12. a) A face 3 saiu 12 vezes.

b) fr $= \frac{5}{50} = 0{,}1 = 10\%$

c) fa $= 8 + 7 + 12 + 10 + 8 = 45$

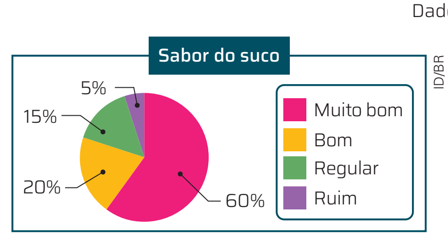
d) fra $= \frac{8 + 7 + 12 + 10 + 8}{50} = \frac{45}{50} = 0{,}9 = 90\%$

13. a) $60\% + 20\% + 15\% + x = 100\% \Rightarrow x = 5\%$

b)

Sabor do suco	Muito bom	Bom	Regular	Ruim	**Total**
fr (%)	60	20	15	5	**100**
Medida do ângulo	216°	72°	54°	18°	**360°**

Dados fictícios.



Dados fictícios.

c) A pesquisa realizada apresenta que 20% das pessoas consideraram o suco bom. Com esse dado, podemos inferir que em outros supermercados a porcentagem possivelmente seria 20%.

14. a) fa $= 36 + 34 + 48 + 82 = 200$

b)
- Mile: fr $= \frac{36}{200} = 18\%$
- Dipas: fr $= \frac{34}{200} = 17\%$

- Rupanor: $fr = \frac{48}{200} = 24\%$
- Outras marcas: $fr = \frac{82}{200} = 41\%$

Marca de tênis preferida dos estudantes do 1º ano do Ensino Médio					
Marca	Mile	Dipas	Rupanor	Outras marcas	**Total**
f	36	34	48	82	**200**
fr (%)	18	17	24	41	**100**

Dados fictícios.

c) A soma é 100%, pois 100% correspondem ao total de porcentagens da amostra.

15. a) Primeiro, precisamos determinar o número n de elementos da amostra:

$18 + 10 + 23 + 4 + 3 + 1 + 1 = 60$

Com esse dado, podemos determinar as frequências solicitadas na tabela:

- 0 filho:
  $fa = 18$
  $fr = \frac{18}{60} = 30\%$
  $fra = \frac{fa}{n} = 30\%$
- 1 filho:
  $fa = 18 + 10 = 28$
  $fr = \frac{10}{60} \simeq 16{,}7\%$
  $fra = \frac{fa}{n} \simeq 46{,}7\%$
- 2 filhos:
  $fa = 18 + 10 + 23 = 51$
  $fr = \frac{23}{60} \simeq 38{,}3\%$
  $fra = \frac{fa}{n} = 85\%$
- 3 filhos:
  $fa = 18 + 10 + 23 + 4 = 55$
  $fr = \frac{4}{60} \simeq 6{,}7\%$
  $fra = \frac{fa}{n} \simeq 91{,}7\%$
- 4 filhos:
  $fa = 18 + 10 + 23 + 4 + 3 = 58$
  $fr = \frac{3}{60} = 5\%$
  $fra = \frac{fa}{n} \simeq 96{,}7\%$
- 5 filhos:
  $fa = 18 + 10 + 23 + 4 + 3 + 1 = 59$
  $fr = \frac{1}{60} = 1{,}7\%$
  $fra = \frac{fa}{n} \simeq 98{,}3\%$
- 6 filhos:
  $fa = 60$
  $fr = \frac{1}{60} = 1{,}7\%$
  $fra = \frac{fa}{n} = 100\%$

b) A frequência acumulada de 2 filhos é igual a 51.

c) A frequência relativa acumulada até 3 filhos é igual a 91,7%.

d) A frequência relativa acumulada para 0 filho é igual a 30%.

e) Pelos dados da tabela, 5 funcionários têm mais de 3 filhos.

O percentual desses funcionários será obtido calculando a soma de suas frequências relativas. Então: $5 + 1{,}7 + 1{,}7 = 8{,}4$

16. a) Para completar a tabela, precisamos determinar o número de elementos da amostra e, então, calcular as outras frequências.

A frequência relativa (fr) é o quociente entre a frequência absoluta (f) e o número (n) de elementos da população. Considerando os dados da marca B, temos:

$fr = \frac{f}{n} \Rightarrow 0{,}23 = \frac{115}{n} \Rightarrow n = 500$

Com esse dado, conseguimos determinar a frequência das outras marcas. Assim:

- Marca A:
  $f = 500 \cdot 0{,}35 = 175$
- Marca C:
  $f = 500 \cdot 0{,}19 = 95$
- Marca D:
  $175 + 115 + 95 + f = 500$
  $f = 500 - 385 = 115$
  Então, a frequência relativa (fr) será:
  $0{,}35 + 0{,}23 + 0{,}19 + fr = 1 \Rightarrow fr = 0{,}23$

b) 95 carros da marca C participaram da amostra.

c) A amostra tem 500 elementos.

TECNOLOGIA (P. 248)

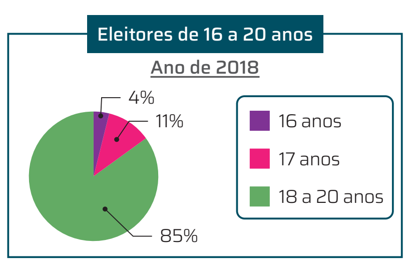
1. a) Para representar os dados do exemplo optou-se pelo gráfico de barras múltiplas.

b) Resposta pessoal.

c) O gráfico de linhas poderia ser utilizado para representar os dados da tabela, pois as variáveis são quantitativas e uma delas é apresentada em séries históricas ou séries temporais.

d) Sugestão de resposta:

Para construir um gráfico de setores de 2018 com as informações solicitadas, precisamos selecionar as idades dos eleitores e as frequências relativas ao ano que estamos considerando. Depois, clicar em "Inserir gráfico" e, em "Escolha um tipo de gráfico", clicar na opção "Pizza". Ajustar como serão organizados os dados. Depois, acrescentar o título e formatar o gráfico inserindo os rótulos de dados e escolhendo o formato em que eles serão apresentados (por exemplo, porcentagem com duas casas decimais). Inserir também a fonte dos dados.

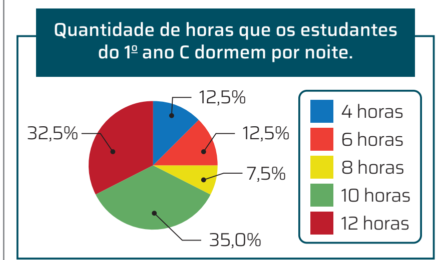


Fonte de pesquisa: TRIBUNAL SUPERIOR ELEITORAL (TSE). *Estatísticas de eleição*. Cruzamento de dados do eleitorado 2018. Brasília, DF, 2021. Disponível em: https://sig.tse.jus.br/ords/dwapr/r/seai/sig-eleicao-eleitorado/cruzamento-de-eleitorado1?p0_ano=2018&session=215975126056649. Acesso em: 2 set. 2024.

A construção dos gráficos de eleitores de 16 a 20 anos dos anos de 2020, 2022 e 2024 pode ser realizada de forma similar.

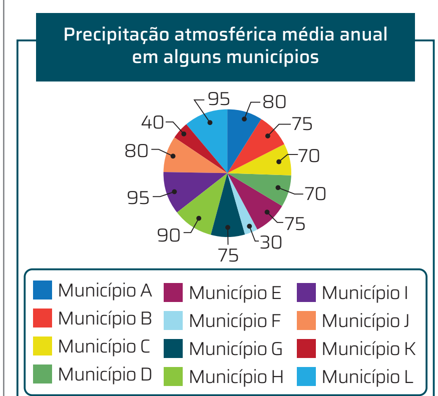
2. a) Para construir um gráfico de setores com as informações solicitadas, precisamos primeiro construir na planilha eletrônica Calc a tabela com as frequências relativas apresentadas no item **a** da atividade **R2**.

Depois, clicar em "Inserir gráfico" e, em "Escolha um tipo de gráfico", clicar na opção "Pizza". Ajustar como serão organizados os dados. Depois, acrescentar o título e formatar o gráfico inserindo os rótulos de dados e escolhendo o formato em que eles serão apresentados. Inserir também a fonte dos dados.



Dados fictícios.

b) Para construir um gráfico de setores com as informações solicitadas, precisamos primeiro, construir na planilha eletrônica Calc a tabela com as precipitações atmosféricas médias anuais registradas nesses municípios apresentadas no enunciado da atividade **6**. Depois, seguir a mesma orientação do item **a**.



Dados fictícios.

3. Resposta pessoal. Essa atividade é aberta e exige planejamento por parte dos estudantes. Assim, converse com eles de modo a marcar entregas parciais. Essa pode ser uma estratégia para fazer avaliações em processo e permite que você corrija rotas antes de eles executarem o trabalho por completo.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 252)

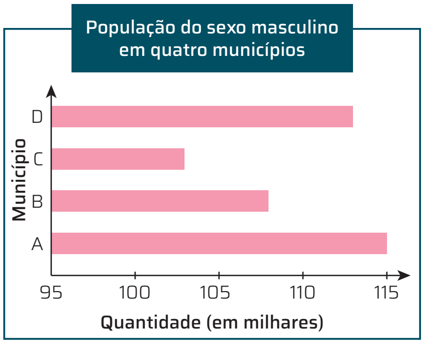
17. a) Não. Observando apenas as barras, poderíamos concluir que a população do município C é a quinta parte da população do município A. Entretanto, olhando os valores no eixo, percebemos que essa afirmação não é verdadeira. A população masculina do município A é aproximadamente 115 000 e a população do município C é aproximadamente 103 000 (o que não representa a quinta parte de A).

b)

População do sexo masculino em quatro municípios				
Município	A	B	C	D
População do sexo masculino (em milhares)	115	108	103	113

Dados fictícios.

c) Resposta pessoal. A seguir apresentamos como exemplo um gráfico de barras horizontais.



ID/BR

Dados fictícios.

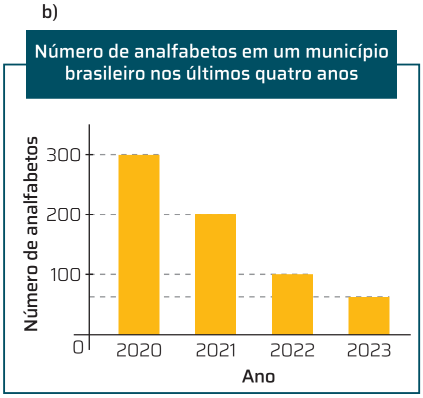
18. Analisando os dois gráficos, notamos que a escolha de uma escala para a construção de um gráfico de barras influencia no seu formato, mais precisamente na inclinação dos segmentos. Ambos os gráficos apresentam o crescimento real, e os dados são os mesmos, mas o espaçamento menor entre os números totais de linhas telefônicas (no eixo vertical) "suaviza" a curva e dá ao leitor a sensação de um leve crescimento. Já a escala escolhida para o segundo gráfico dá a impressão de um crescimento brusco, acelerado.

Alternativa **d**.

19. **a)** Não houve uniformidade na escala utilizada no eixo vertical na construção desse gráfico, pois existem três espaçamentos diferentes para representar um intervalo de 100 pessoas. Além disso, não é possível identificar o número de analfabetos em 2023, porque não houve cuidado na posição dos valores no eixo vertical.

Outro ponto é que as larguras das barras variam, dando a falsa impressão de que o número de analfabetos diminuiu muito nos quatro anos.

b)



ID/BR

Dados fictícios.

20. **a)** Sim, a intenção de votos nesse candidato aumentou semana a semana, de 30% na semana 1 para 40% na semana 6.

b) Resposta pessoal.

A inversão dos valores no eixo vertical, de ordem crescente para ordem decrescente, em relação aos valores de baixo para cima, pode induzir o observador ao erro, pois a aparente queda que o gráfico sugere, na verdade, está associada ao aumento das intenções de votos.

21. **a)** Lucro líquido.

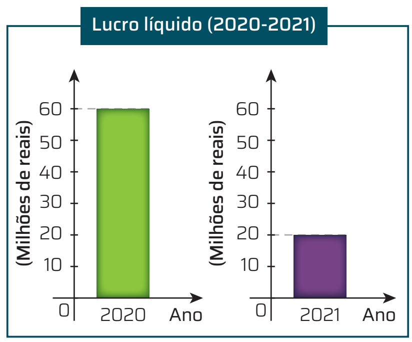
b) O engano é que, embora a altura da barra de 2021 seja maior que a altura da barra em 2020, induzindo o observador a concluir que houve um aumento do lucro líquido no biênio, na verdade, quando se observam os valores estabelecidos no eixo vertical, constata-se que houve diminuição: 60 para 2020 e 20 para 2021.

c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que Cleiton utilizou a altura das barras verticais como elemento de manipulação dos resultados, de modo que, visualmente, indicasse o aumento do lucro líquido de 2020 para 2021.

d) A possibilidade de Cleiton ser o novo gerente financeiro.

e) Não, pois os valores da variável "ser gerente financeiro" são "não" e "nunca", ou seja, não existe possibilidade de Cleiton ser gerente financeiro. Resposta possível: Isso deve ter ocorrido devido a sua tentativa de manipulação dos dados.

f)



ID/BR

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 257)

22. Calculando a média dos tipos de embalagem considerando a quantidade utilizada de cada uma dela, chega-se a aproximadamente 429 g, que é próxima da embalagem de 500 g. Outra maneira de obter o resultado sem calcular a média pode ser por meio da maior frequência, que é 500 g.

23. Respostas pessoais. Os gráficos dependem da idade dos pais dos estudantes.

24. **a)** $\overline{X} = \dfrac{8{,}5 + 6 + 8}{3} = 7{,}5$

b) Sendo p a nota que Flávio precisa obter, temos:

$$\frac{22{,}5 + p}{4} = 8{,}0 \Rightarrow p = 9{,}5$$

25. $\overline{X} = 1\,900$

Observa-se que os salários são mal distribuídos. A maioria recebe salário inferior à média.

26. Seja A o total de pontos dos candidatos para ascensoristas e B o total de pontos dos candidatos para recepcionistas.

$$\overline{X}_{\text{todos}} = \frac{A + B}{500 + 100} \Rightarrow 4 = \frac{A + B}{500 + 100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + B = 600 \cdot 4 = 2\,400$$

$$\overline{X}_{\text{ascensorista}} = \frac{A}{500} \Rightarrow 3{,}8 = \frac{A}{500} \Rightarrow A = 1\,900$$

Desse modo:

$B = 2\,400 - 1\,900 = 500$

$$\overline{X}_{\text{recepcionista}} = \frac{B}{100} = 5$$

27. A média dos jogadores, M_1, é igual a 1,93 m.

$$M_1 = \frac{S_1}{15} = 1{,}93$$

$S_1 = 1{,}93 \cdot 15 = 28{,}95$

Os quatro jogadores mais baixos do time serão substituído por um jogador de 2,02 m e outros três jogadores de alturas desconhecidas, x, mas cujo valor mínimo deve proporcionar uma nova média, M_2, igual a 1,99.

$S_2 = S_1 - 1{,}78 - 1{,}82 - 1{,}84 - 1{,}86 + 2{,}02 + x + x + x$

$S_2 = 23{,}67 + 3x$

$$M_2 = \frac{S_2}{15} = 1{,}99 \Rightarrow S_2 = 29{,}85$$

$S_2 = 23{,}67 + 3x \Rightarrow 29{,}85 = 23{,}67 + 3x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2{,}06$

Alternativa **d**.

28.
- Cenário inicial

  51; 55; 56; 67; 71; 74; 81; 85

  $Md_1 = \dfrac{67 + 71}{2} = 69$
- Cenário após os 20 dias

  57; 61; 61; 62; 64; 71; 73; 75

  $Md_2 = \dfrac{62 + 64}{2} = 63$

  $Md_1 - Me_2 = 69 - 63 = 6$

Alternativa **d**.

29. $\overline{X} = \dfrac{6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 2}{4 + 3 + 1 + 2} = 7{,}1$

Mo = 6

Nesse caso, como há 10 alunos, a mediana será a média aritmética entre o quinto e sexto, quando dispostos em ordem crescente ou decrescente (6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9, 9): Md = 7

Alternativa **c**.

30. Sendo T o total das notas, temos:

$$8{,}5 = \frac{T}{600} \Rightarrow T = 5\,100$$

Mas:

$$9 = \frac{5\,100 + 10 \cdot x}{600 + x} \Rightarrow x = 300$$

Alternativa **b**.

31. Somando os valores dos meses consecutivos, em busca da maior soma, fica fácil verificar que somando os valores de dezembro de 2020 e janeiro de 2021, a soma obtida, 650 mm, é a maior soma possível. Logo, o início da plantação das sementes deve ocorrer no mês de dezembro.

Alternativa **c**.

32. **a)** $Mo_A = 45$; $Md_A = 46$;

$$\overline{X}_A = \frac{5 \cdot 45 + 46 + 4 \cdot 48 + 98}{11} = 51$$

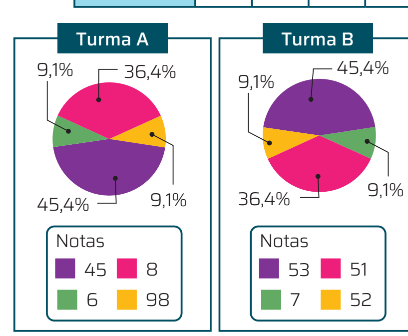
$Mo_B = 53$; $Md_B = 52$;

$$\overline{X}_B = \frac{7 + 4 \cdot 51 + 52 + 5 \cdot 53}{11} = 48$$

b)

Turma A				
Acertos	45	46	48	98
Quantidade	5	1	4	1
Frequência relativa	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$

Turma B				
Acertos	7	51	52	53
Quantidade	1	4	1	5
Frequência relativa	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{5}{11}$



ID/BR

Dados fictícios.

c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que, na turma A, a média da turma foi superior a 50%, porém a maioria dos estudantes foi reprovada; já na turma B, a média da turma foi inferior a 50%, porém a maior parte dos estudantes obteve resultado superior ao resultado esperado para ser aprovado no exame.

33. a) $\overline{X} = \dfrac{1620 + 1260 + 1800 + 1440 + 5400}{5} = 2304$

b) Não. Quatro funcionários entre os cinco têm salário inferior a $\overline{X}$ e devem discordar da afirmação.

c) Porque os salários reais não estão próximos do salário médio. Para tornar $\overline{X}$ representativo dos salários, seria preciso desconsiderar o salário do funcionário E e, portanto, retirar a última linha da tabela.

34. Considera-se a sequência crescente dada por:

$\underbrace{1, 1, ..., 1}_{10\text{ termos}}, \underbrace{2, 2, ..., 2}_{10\text{ termos}}, \underbrace{3, 3, ..., 3}_{55\text{ termos}}, \underbrace{4, 4, ..., 4}_{25\text{ termos}}, \underbrace{6, 6, ... 6}_{50\text{ termos}}, \underbrace{7, 7, ..., 7}_{10\text{ termos}}$

A quantidade de termos é 160

$\overline{X} = \dfrac{10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 55 \cdot 3 + 25 \cdot 4 + 50 \cdot 6 + 10 \cdot 7}{160} = 4{,}16$

Os termos centrais são: 4 e 4 (são o 80º e 81º termos). Então a mediana é 4.

Por sua vez, a moda é o termo de maior frequência: Mo = 3

Logo, a moda é menor que a mediana e ambas são menores que a média. Alternativa **e**.

35. Apenas a pergunta do item **c** pode ser respondida.

$\dfrac{25 \cdot x + 5 \cdot 6}{30} = 7 \Rightarrow x = 7{,}2$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 265)

36. a) $355 - 225 = 130$

b) $\dfrac{130}{225} \simeq 58\%$

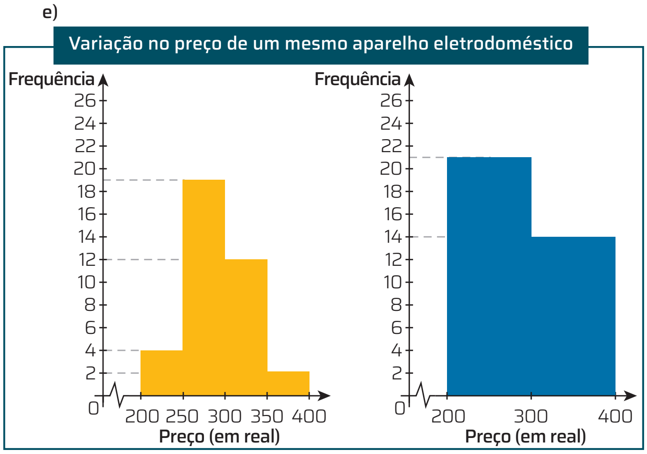
c) Respostas pessoais. Sugestão:

Preço (em R$)	f	fr (%)	fa	fra
200 ⊢ 250	4	11,4	4	11,4
250 ⊢ 300	17	48,6	21	60,0
300 ⊢ 350	12	34,3	33	94,3
350 ⊢ 400	2	5,7	35	100

d) Respostas pessoais. Sugestão:

Preço (em R$)	f	fr (%)	fa	fra
200 ⊢ 300	21	60,0	21	60,0
300 ⊢ 400	14	34,3	35	100

e)



Dados fornecidos pela organização de consumidores.

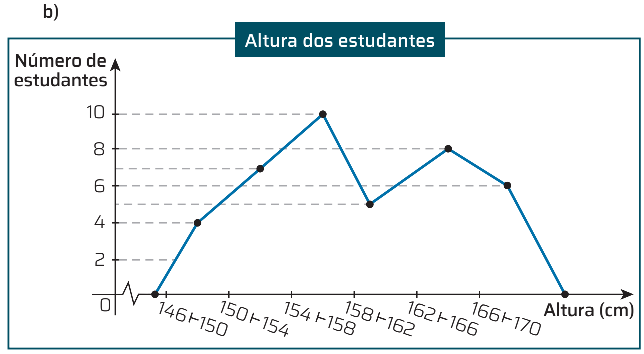
f) Resposta pessoal. Sugestão:

Quando a faixa é R$ 50,00, é possível perceber que apenas dois eletrodomésticos têm o valor maior ou igual a R$ 350,00; porém, quando a faixa é R$ 100,00, isso não fica evidente. Além disso, em ambas as faixas, é perceptível que há menos eletrodomésticos com valores acima de R$ 300,00.

37. a)

Altura (cm)	Ponto médio	f	fr (%)
146 ⊢ 150	148	4	10
150 ⊢ 154	152	7	17,5
154 ⊢ 158	156	10	25
158 ⊢ 162	160	5	12,5
162 ⊢ 166	164	8	20
166 ⊢ 170	168	6	15

b)



Dados fictícios.

c) Observando a tabela, é possível perceber que 26 estudantes têm até 1,62 m e 40 têm até 1,70 m.

d) $\overline{X} = \dfrac{148 \cdot 4 + 152 \cdot 7 + 156 \cdot 10 + 160 \cdot 5 + 164 \cdot 8 + 168 \cdot 6}{40} = 158{,}4$

A classe modal é 154 ⊢ 158. Portanto, a moda é $\dfrac{154 + 158}{2} = 156$.

Já a mediana dos 40 valores é a média das alturas nas posições 20 e 21, dos dados em ordem crescente. Isso acontece na classe 154 ⊢ 158, cujo ponto médio é 156; portanto, a mediana das alturas é 156 cm ou 1,56 m.

38. a)

Salários	f
4 700 ⊢ 5 100	20
5 100 ⊢ 5 500	110
5 500 ⊢ 5 900	180
5 900 ⊢ 6 300	120
6 300 ⊢ 6 700	30

b) $20 + 110 = 130$

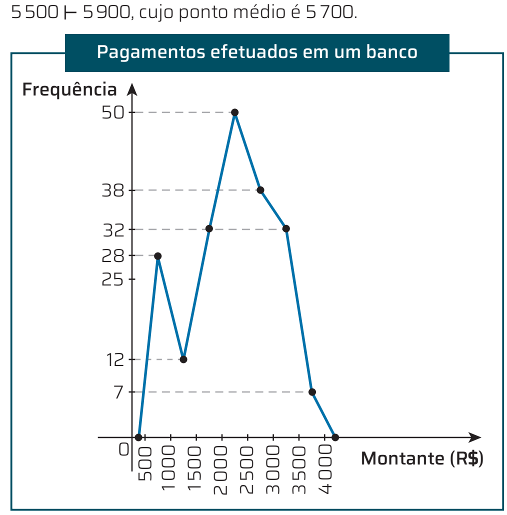
c) $\overline{X} = \dfrac{4900 \cdot 20 + 5300 \cdot 110 + 5700 \cdot 180 + 6100 \cdot 120 + 6500 \cdot 30}{460}$

$\overline{X} \simeq 5726$

A classe modal é 5 500 ⊢ 5 900. Portanto, Mo $= \dfrac{5500 + 5900}{2} = 5700$.

Já a mediana dos 460 valores é a média dos salários nas posições 230 e 231, dos dados em ordem crescente. Isso acontece na classe 5 500 ⊢ 5 900, cujo ponto médio é 5 700.

39. a)



Dados obtidos por um funcionário do banco.

b)

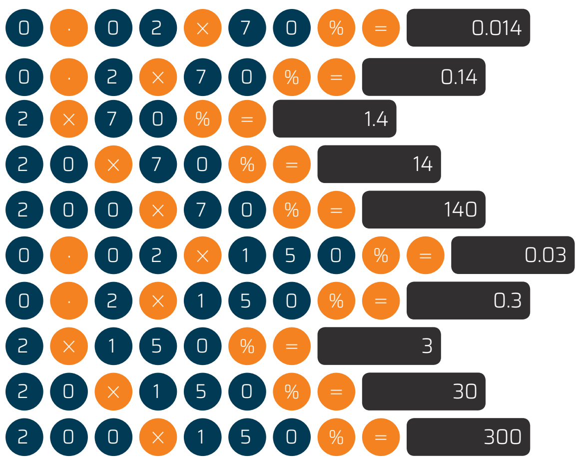
Montante	f	fa	fr (%)	fra (%)
500 ⊢ 1 000	28	28	14,1	14,1
1 000 ⊢ 1 500	12	40	6	20,1
1 500 ⊢ 2 000	32	72	16,1	36,2
2 000 ⊢ 2 500	50	122	25,1	61,3
2 500 ⊢ 3 000	38	160	19,1	80,4
3 000 ⊢ 3 500	32	192	16,1	96,5
3 500 ⊢ 4 000	7	199	3,5	100

c) $28 + 12 + 32 = 72$
d) $\frac{192}{199} \simeq 96{,}48\%$

40. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes escolham as classes de acordo com os dados obtidos.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 266)

1. **a)** Como 15% é o triplo de 5%, para calcular 15% de 120, basta fazer: $3 \cdot 6 = 18$
b) Como 20% é o quádruplo de 5%, para calcular 20% de 120, basta fazer: $4 \cdot 6 = 24$
c) Como 35% é sete vezes 5%, para calcular 75% de 120, basta fazer: $7 \cdot 6 = 42$
d) Como 50% é dez vezes 5%, para calcular 50% de 120, basta fazer: $10 \cdot 6 = 60$
e) Como 75% é quinze vezes 5%, para calcular 75% de 120, basta fazer: $15 \cdot 6 = 90$
f) Como 80% é dezesseis vezes 5%, para calcular 80% de 120, basta fazer: $16 \cdot 6 = 96$

2.


3. **a)** Como 2,2% é o mesmo que 2% + 0,2%, para calcular 2,2% de 150, basta adicionar os resultados de 2% de 150 e 0,2% de 150, ou seja, $3 + 0{,}3 = 3{,}3$.
b) 2,2% é o mesmo que 2% + 0,2%, para calcular 2,2% de 70, basta adicionar os resultados de 2% de 70 e 0,2% de 70, ou seja, $1{,}4 + 0{,}14 = 1{,}54$.
c) Como 220% é o mesmo que 200% + 20%, para calcular 220% de 150, basta adicionar os resultados de 200% de 150 e 20% de 150, ou seja, $300 + 30 = 330$.
d) Como 22,2% é o mesmo que 20% + 2% + 0,2% e 300 é o dobro de 150, para calcular 22,2% de 300, basta calcular $2 \cdot (30 + 3 + 0{,}3) = 66{,}6$.
e) Como 22,2% é o mesmo que 20% + 2% + 0,2%, para calcular 22,2% de 150, basta fazer $30 + 3 + 0{,}3 = 33{,}3$.
f) Como 220% é o mesmo que 200% + 20%, para calcular 220% de 70, basta adicionar os resultados de 200% de 70 e 20% de 70, ou seja, $140 + 14 = 154$.

PARA RECORDAR (P. 267)

1. Sejam A o conjunto dos estudantes que acessam pelo computador e B o conjunto de estudantes que preferem acessar pelo *smartphone*.
$75\% = 35\% + 55\% - x \Rightarrow x = 15\%$
15% de 3 800 = 570

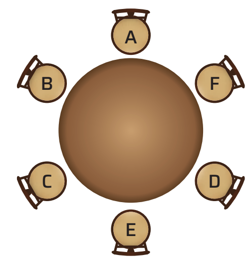
2. Considerando x o número de habitantes dessa cidade, no início do ano havia: $(0{,}1 \cdot x)$ desempregados e $(0{,}9 \cdot x)$ empregados. Ao final do primeiro semestre, o total de desempregados era:
$0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot x + 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot x = 0{,}36x$
Consequentemente, havia $(0{,}64 \cdot x)$ empregados.
$0{,}2 \cdot 0{,}64 \cdot x + 0{,}5 \cdot 0{,}36 \cdot x = 0{,}308 \cdot x$ ou $30{,}8\% \simeq 31\%$

3. **a)** Resposta pessoal.
b) Não, nem sempre será possível encontrar um número natural entre dois números naturais diferentes, exceto quando a diferença entre eles for maior que 1.
c) Resposta pessoal.
d) Não, nem sempre será possível encontrar um número inteiro entre dois números inteiros diferentes, exceto quando a diferença entre eles for maior que 1.

4. A quantidade de bolas verdes, em relação ao número da figura, n, pode ser escrita da seguinte forma:
$(n + 1) \cdot 2 = 2n + 2$
A quantidade de bolas brancas é o quadrado do número da figura: n^2
A diferença entre a quantidade de bolas brancas e a de verdes é igual a 286, na figura de valor:
$n^2 - (2n + 2) = 286 \Rightarrow n = \frac{2 \pm 34}{2} \Rightarrow n = 18$
Alternativa **b**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 267)

1. A seguir, apresentamos apenas uma forma de resolução. Os estudantes poderão chegar à resposta por diferentes raciocínios.
Vamos representar Ana, Bernardo, Camila, Daniel, Estela e Fernando pelas iniciais de seus nomes.
Inicialmente, como B sentou-se imediatamente à esquerda de A, vamos considerar que A e B sentaram-se na posição indicada na imagem a seguir.



Sabemos que C sentou-se em frente de F; logo, C só pode ocupar a cadeira imediatamente ao lado de B ou imediatamente ao lado de A. Se C sentar-se imediatamente ao lado de A, a cadeira de frente para B será ocupada por D ou E e, então, C ou ficará ao lado de D ou imediatamente à direita de E, o que não é possível. Logo, C só pode sentar-se imediatamente ao lado de B.
Assim, D sentou-se na frente de B, e E, na frente de A.

2. Podemos resolver a questão passo a passo:
1. Posição de Letícia à esquerda de Gustavo: Letícia é a sexta à esquerda de Gustavo. Isso significa que há 5 crianças entre Gustavo e Letícia à esquerda.
2. Posição de Letícia à direita de Gustavo: Letícia é a sétima à direita de Gustavo. Isso significa que há 6 crianças entre Gustavo e Letícia à direita.
3. Total de crianças na roda: Como a roda é circular, a soma das crianças entre Gustavo e Letícia à esquerda e à direita deve incluir Gustavo e Letícia apenas uma vez. Portanto, somamos as crianças entre eles e adicionamos Gustavo e Letícia:
$5 + 6 + 2 = 13$
Alternativa **c**.

3. João enviou a mensagem a 10 pessoas. Estas a enviaram a 10 pessoas, atingindo 100 pessoas $(10 \cdot 10 = 100)$.
Finalmente, as 100 pessoas enviaram 10 mensagens cada uma, alcançando 1 000 pessoas $(100 \cdot 10 = 1\,000)$.
No total, 1 110 pessoas $(1\,000 + 100 + 10 = 1\,110)$ receberam a mensagem de João.

MATEMÁTICA E SAÚDE (P. 268)

Conectando ideias

1. **a)** Resposta pessoal. O gráfico construído depende da escolha dos estudantes. Espera-se que eles identifiquem o gráfico de linha como sendo o melhor para representar os dados do texto.
b) Analisando os dados, espera-se que os estudantes observem que, em um gráfico de setores, seria difícil representar a evolução temporal, pois ele é mais adequado para mostrar proporções em um único ponto no tempo. Um gráfico de colunas poderia mostrar os dados anuais, mas não seria tão eficaz em destacar a continuidade e a tendência ao longo dos anos.

2. Respostas de acordo com a pesquisa realizada pelos estudantes.

CAPÍTULO 11 EDUCAÇÃO FINANCEIRA E PROJETO DE VIDA

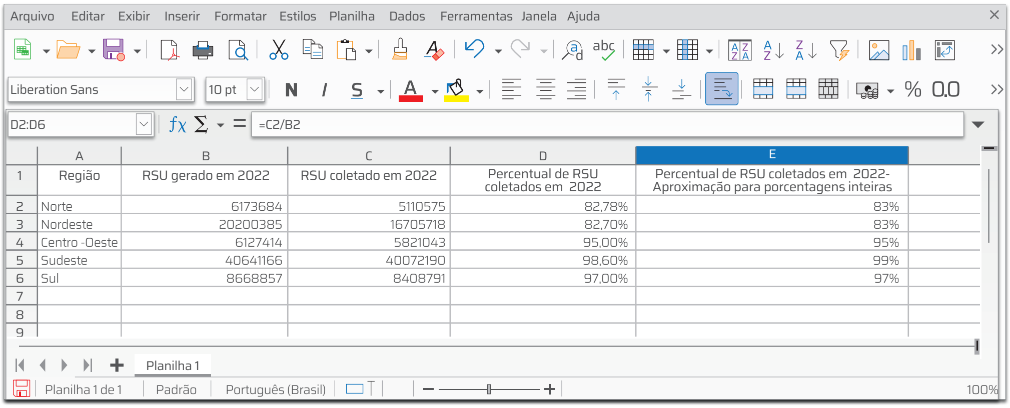
TECNOLOGIA (P. 273)

1. **a)** Indica o cálculo do percentual de RSU coletados em 2022.
b) A Região Sudeste, com 98,60%, foi a região que coletou o maior percentual de RSU gerados em 2022.
c) A Região Nordeste, com 82,70%, foi a região que coletou o menor percentual de RSU gerados em 2022.
d) A resposta depende da região em que os estudantes moram.

2. As respostas dependem da descrição feita pelos estudantes. Exemplo de resposta:
Após reproduzir o exemplo apresentado na planilha eletrônica, para calcular o percentual coletado de RSU gerados no Brasil em 2022, podemos

digitar, na célula B7, a soma dos RSU gerados em 2022, da seguinte maneira: “=B2+B3+B4+B5+B6”. O mesmo procedimento deve ser realizado na coluna C, de modo que a soma fique na célula C7. Em seguida, na célula D7, digitamos “=C7/B7”. Por fim, formatamos a célula D7 como porcentagem (93,04%).

3. Seguindo as orientações fornecidas nos itens **a** e **b**, espera-se que os estudantes obtenham:



	A	B	C	D	E
1	Região	RSU gerado em 2022	RSU coletado em 2022	Percentual de RSU coletados em 2022	Percentual de RSU coletados em 2022- Aproximação para porcentagens inteiras
2	Norte	6173684	5110575	82,78%	83%
3	Nordeste	20200385	16705718	82,70%	83%
4	Centro-Oeste	6127414	5821043	95,00%	95%
5	Sudeste	40641166	40072190	98,60%	99%
6	Sul	8668857	8408791	97,00%	97%
7					
8					
9					

LibreOffice/ID/BR

Pode-se perceber que a aproximação dos valores depende da primeira casa após a vírgula: se o algarismo é igual a 5 ou mais, o valor é arredondado para cima, na casa da unidade; se o valor é menor que 5, prevalece o valor da casa da unidade.

4. Resposta pessoal. Verifique se os estudantes interpretam corretamente a planilha eletrônica com os dados sobre RSU gerados e coletados em cada região do Brasil em 2022.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 279)

1. a) Resposta pessoal. Os estudantes devem perceber que os hábitos do indivíduo retratados na imagem não parecem ser de alguém que age de maneira sustentável. Uma explicação para isso é o fato de que se todas as pessoas tivessem esses mesmos hábitos, seriam necessários 2,7 planetas Terra.

b) Resposta pessoal. Proponha aos estudantes que previamente verifiquem as respostas das perguntas que têm no *site* indicado e, depois de coletar os dados necessários com as pessoas que moram na mesma casa que eles, insiram essas respostas para calcular a pegada ecológica deles.

c) Propicie um momento de trocas de resultados e, após os estudantes compararem as pegadas ecológicas deles, pergunte: “O que vocês podem fazer para ‘melhorar’ a pegada ecológica de vocês?”. Ouça alguns estudantes e com eles elabore, no quadro, uma lista de atitudes com essa finalidade.

d) Resposta pessoal. Com base na lista elaborada no item anterior, oriente os estudantes na elaboração desse texto. Leve-os a refletir sobre o fato de que atitudes que permitem “melhorar” a pegada ecológica de uma pessoa geralmente causam um impacto positivo no orçamento financeiro.

e) Resposta pessoal. A realização desse item pode ser compartilhada em uma rede social. Proponha aos estudantes que postem os textos elaborados em uma rede social e, depois de um tempo determinado, tragam os comentários para a sala de aula e reflitam sobre eles.

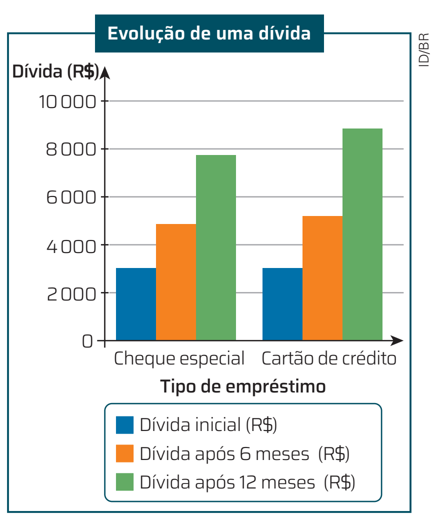
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 282)

2. Resposta pessoal. Oriente a análise dos gráficos e, para cada tópico, considere:

- O primeiro gráfico é um gráfico de barras, o segundo é de setores.
- O primeiro gráfico traz as frequências (em %) das famílias endividadas em alguns meses de 2023 e de 2024. O segundo gráfico traz a comparação do nível de endividamento em abril de 2024 e em maio de 2024.
- As barras azuis mostram os valores coletados até o momento e as barras cinzas mostram as projeções dos valores.
- Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que as cores, os valores e o posicionamento, lado a lado, permitem a comparação quase que imediata das informações dos gráficos.
- Resposta pessoal. Se necessário, comente e dê exemplos sobre diferentes modalidades de dívida.
- Resposta pessoal.
- Resposta pessoal. Exemplo de resposta: O endividamento é relevante sim, porque no período apresentado praticamente metade da população estava endividada.

3. Resposta pessoal. É importante que os estudantes considerem que desemprego, baixos salários e falta de educação financeira estão particularmente relacionados a um maior endividamento de uma família.

4. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Analisando a evolução das dívidas de cheque especial e de cartão de crédito, temos:



Fonte: Dados obtidos na atividade.

5. Resposta pessoal de acordo com as modalidades escolhidas. Exemplo de resposta: Comparando as dívidas após 6 meses, percebemos que a diferença não é tão notória como quando comparamos as dívidas após 12 meses.

6. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Os juros aplicados pela maioria das modalidades de empréstimo são bem altos e, com o passar dos meses, as dívidas podem se tornar um grande problema. Os juros mais altos, entre as modalidades citadas, são os do cheque especial e os do cartão de crédito, o que indica que essas modalidades de empréstimo devem ser evitadas.

TECNOLOGIA (P. 283)

1. Resposta pessoal.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 284)

7. Resposta pessoal. Oriente os estudantes a verificar os comentários e opiniões sobre os aplicativos e *sites* nos quais farão a busca. Eles devem priorizar os que têm menos reclamações e devem ter cautela ao inserir dados pessoais em qualquer um deles.

8. a) Resposta pessoal. Oriente os estudantes a seguir as instruções do aplicativo ou do *site* escolhido. Caso precisem fornecer alguma informação sobre seus pais ou responsáveis, eles devem obter autorização deles para isso.

b) Ao analisar as informações sobre o que pode ser melhorado, o que está indo bem e o que pode permanecer como está, solicite aos estudantes que registrem as atitudes que devem ser realizadas para melhorar seus hábitos de consumo, visando à sustentabilidade. Oriente-os a conferir, após um tempo, os registros realizados e verificar se as atitudes necessárias foram tomadas.

c) Resposta pessoal. A comparação vai depender das funcionalidades do *site* ou aplicativo escolhido pelo estudante.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 285)

9. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

CLT: Consolidação das Leis do Trabalho.

Desserviço: serviço mal prestado, que causa prejuízo ou transtorno.

10. Resposta pessoal. Oriente os estudantes na conversa sobre os aspectos apresentados. Eles podem precisar reler ou ouvir novamente a entrevista. Conduza a conversa de modo que os estudantes exerçam a empatia e o respeito às opiniões dos colegas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 286)

11. Resposta pessoal. A resposta depende das profissões que o estudante escolher. É importante o estudante considerar que ser flexível e saber trabalhar em equipe são habilidades que favorecem todas as profissões e que a renda pode variar bastante de profissional para profissional, mesmo dentro da mesma profissão.

12. Resposta pessoal. Esse compartilhamento de conhecimento favorece o projeto de vida deles, enriquecendo-o com informações sobre profissões que podem trazer muita satisfação, bem como com informações que podem complementar o projeto de vida considerando a sociedade e o mundo.

13. Resposta pessoal. Oriente os estudantes a refletir mais um pouco sobre o projeto de vida que considere a sociedade e o mundo, levando em conta que ele pode ser modificado e aperfeiçoado sempre. A cada nova informação que o estudante adquire, a cada nova etapa da vida dele, esse projeto de vida pode ser reavaliado e modificado de maneira que se dê sentido às oportunidades e às possibilidades de atitudes que serão tomadas. Um projeto de vida bem planejado e bem orientado deve ter espaço para novas construções e para a avaliação contínua e consciente de todas as etapas, sempre considerando a sociedade e o mundo.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 286)

1. **a)** $2 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot 0{,}5 = -12$

b) $6{,}3 \cdot 1\,000 = 6\,300$

c) $A = b \cdot h = 9\text{ m} \cdot 2{,}5\text{ m} = 22{,}5\text{ m}^2$

d) $\sqrt{80} = 8{,}9$

e) $9^x = 3 \Rightarrow 3^{2x} = 3^1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

2. Há várias formas de calcular essas porcentagens mentalmente.

a) $0{,}10 \cdot 2\,000 = 200$

b) $0{,}05 \cdot 2\,000 = \frac{200}{2} = 100$

c) $0{,}01 \cdot 2\,000 = 20$

d) $0{,}005 \cdot 2\,000 = 10$

e) $0{,}05 \cdot 0{,}10 \cdot 2\,000 = 10$

PARA RECORDAR (P. 287)

1. Sendo x, y e n, respectivamente, o número de embalagens de 20 L, 10 L e 2 L, temos:

$$\begin{cases} 20x + 10y + 2n = 94 \\ 10x + 6y + 3n = 65 \\ y = 2x \end{cases}$$

Substituindo y por $2x$ nas duas primeiras equações, temos:

$$\begin{cases} 40x + 2n = 94 \\ 22x + 3n = 65 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 3 e a segunda por -2, temos:

$$\begin{cases} 120x + 6n = 282 \\ -44x - 6n = -130 \end{cases}$$

Adicionando as duas primeiras equações, membro a membro, temos: $76x = 152 \Rightarrow x = 2$

Assim:

$6n = 282 - 120x \Rightarrow 6n = 282 - 240 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6n = 42 \Rightarrow n = 7$

Alternativa **c**.

2. De acordo com a tabela, 24% da população é formada por jovens.

Assim, o ângulo central medirá: $0{,}24 \cdot 360^o =$
$= 86{,}4^o \simeq 86^o$

Alternativa **a**.

3. Com x herdeiros, cada herdeiro receberia $\frac{6\,000\,000}{x}$.

Com $x + 2$ herdeiros, cada herdeiro receberia $\frac{6\,000\,000}{x+2}$.

Como x é o número inicial de herdeiros, temos que $x > 0$.

$$\frac{6\,000\,000}{(x+2)} = \frac{6\,000\,000}{x} - 100\,000$$

$x = 10$ ou $x = -12$ (não convém)

Portanto, o número total de herdeiros era 12.

4.

Dias	Operários	Trabalho	Horas/dia
10	24	40%	7
x	20	60%	6

$$\frac{10}{x} = \frac{20}{24} \cdot \frac{40}{60} \cdot \frac{6}{7} \Rightarrow x = 21$$

Dessa maneira, o trabalho todo durou 31 dias, pois: $10 + 21 = 31$.

Em 31 dias, temos 28 semanas inteiras mais 3 dias, ou seja, quarta-feira.

Alternativa **d**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 287)

1. Se Ana entrou com os sapatos sujos, ela mente, Bia mente e Mariana e Carla falam a verdade, o que não é possível porque apenas uma das meninas fala a verdade.

Se Bia entrou com os sapatos sujos, ela mente e Ana e Carla dizem a verdade; e isso não é possível, pois apenas uma diz a verdade.

Se Mariana entrou com os sapatos sujos, ela mente e Bia diz a verdade, Ana mente e Carla diz a verdade; logo, não é possível acontecer.

Logo, Carla entrou com os sapatos sujos, e, nesse caso, ela mente, Ana e Bia mentem e apenas Mariana diz a verdade.

Logo, Carla entrou com os sapatos sujos.

MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO FINANCEIRA (P. 288)

Conectando ideias

1. A inflação é algo resultante das dinâmicas econômicas de um país e sua variação é inevitável. Quando ela aumenta demais, os produtos e os serviços passam a ter preços muito variáveis, mesmo durante um único dia. Assim, é trabalho do governo tomar decisões que freiem o avanço da inflação. Um exemplo recente em que a inflação impactou muito a vida dos brasileiros foi antes de o Plano Real entrar em vigor, quando o governo trocou a moeda oficial do Brasil para tentar controlar a inflação. Além disso, uma decisão importante do governo federal, de resultado imediato na vida dos trabalhadores, é a determinação do aumento do salário mínimo acima da inflação no começo de cada ano, para assegurar o poder de compra da população. Espera-se que o debate com os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas contribua para o compartilhamento de informações sobre as dinâmicas econômicas relativas à inflação e às possíveis consequências, positivas e negativas, sobre as populações quando, por exemplo, não há reajuste adequado do salário mínimo, o que prejudica aqueles que já têm pouco poder de compra e pouca independência financeira.

2. Espera-se que os estudantes compreendam que, com o passar do tempo, o dinheiro perde valor caso fique guardado sem rendimento e que isso prejudica o poder de compra do cidadão, que antes poderia adquirir mais produtos com a mesma quantia. Se julgar oportuno, converse com eles sobre algumas modalidades de investimento e seus possíveis benefícios ou prejuízos.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 290)

1. Sendo x o consumo mensal de água, em m³, no mês de dezembro, temos que:

$$\frac{(x - 1{,}8) + 6{,}1 + 8{,}2 + 6{,}7 + 7{,}4}{5} =$$

$$= \frac{8 + 6 + 7{,}6 + 5{,}3 + 5{,}5 + 8{,}6 + x}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - 1{,}8 + 28{,}4}{5} = \frac{x + 41}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x + 26{,}6}{5} = \frac{x + 41}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7(x + 26{,}6) = 5(x + 41) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = 18{,}8 \Rightarrow x = 9{,}4.$$

Alternativa **b**.

2. O total de apartamentos é 105.

50% dos apartamentos é equivalente a 53 apartamentos.

Em cada coluna vamos somar o valor da coluna mais os valores das colunas anteriores, temos que:

Coluna 1: 5

Coluna 2: $5 + 10 = 15$

Coluna 3: $15 + 5 = 20$

Coluna 4: $20 + 15 = 35$

Coluna 5: $35 + 20 = 55$

Como temos na coluna 5 o total de 55 apartamentos, podemos tomar como referência o maior valor dessa coluna, que é 800.

Alternativa **c**.

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

Almeida, Fernando José de; Fonseca Júnior, Fernando Moraes. *ProInfo*: projetos e ambientes inovadores. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação a Distância, 2000. *E-book*. Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraDownload.do?select_action=&co_obra=28295&co_midia=2. Acesso em: 9 out. 2024.

A obra apresenta referências teóricas e práticas que facilitam a apropriação das novas tecnologias e seu uso como instrumento de transformação do sistema educacional. Os autores adotam uma metodologia de aprendizagem por projetos e discutem como tais projetos articulam disciplinas. Além disso, sugerem como aplicar e utilizar *softwares*, dando indicações de como o trabalho com a tecnologia pode abrir horizontes para além da sala de aula.

American Psychiatric Association (APA). *Manual diagnóstico e estatístico de transtornos mentais:* DSM-5. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2014.

O manual é uma obra de referência para a prática clínica relacionada aos cuidados com saúde mental.

Andrade, Julia Pinheiro (org.). *Aprendizagens visíveis*: experiências teórico-práticas em sala de aula. Belo Horizonte: Panda Educação, 2021.

Esse livro compila práticas pedagógicas que visam melhorar o ensino na Educação Básica, dialogando com propostas contemporâneas, como a aprendizagem visível. O livro aborda temas como a cultura *maker*, o uso do *design* na educação e a importância da avaliação formativa, oferecendo ferramentas práticas aos educadores.

Arroyo, Miguel González. *Imagens quebradas*: trajetórias e tempos de alunos e mestres. Petrópolis: Vozes, 2004.

O autor traz um conjunto de reflexões sobre o momento vivido nas escolas, tanto para o educador quanto para o educando, e as consequências para as práticas pedagógicas.

Bacich, Lilian; Moran, José (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2017.

O ponto central do livro são as práticas pedagógicas para a Educação Básica e Superior que valorizam o protagonismo dos estudantes e contribuem para a formação de professores. A obra, escrita por autores brasileiros, analisa por que e para que usar metodologias ativas, cujo foco é a participação efetiva dos estudantes na construção do conhecimento e no desenvolvimento de competências.

Bender, William N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

O educador estadunidense apresenta, nesse livro, as diretrizes para a implementação da Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) na Educação Básica com o uso das tecnologias em sala de aula. A obra também propõe modelos de projeto e diferentes tipos de estratégia para desenvolvê-los.

Bergmann, Jonathan. *Aprendizagem invertida para resolver o problema do dever de casa*. Porto Alegre: Penso, 2018.

Nesse livro, o autor, especialista pioneiro em aula invertida, analisa o motivo pelo qual a tradicional tarefa de casa não desperta tanto interesse nos estudantes. O livro aborda o potencial da sala de aula invertida para provocar o interesse dos estudantes, aumentando a capacidade de aprendizagem por meio dessa estratégia metodológica. O autor sugere ainda atividades especialmente planejadas para tornar os estudantes participantes ativos na experiência de sala de aula.

Boaler, Jo. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018 (Série Desafios da Educação).

Nessa obra, a autora desafia a noção de que a Matemática é difícil, propondo uma abordagem que fomenta uma mentalidade de crescimento entre os estudantes. O livro fornece exemplos práticos e atividades para transformar o ensino da Matemática, tornando a aprendizagem mais envolvente e prazerosa.

Boaler, Jo. *Mente sem barreiras*: as chaves para destravar seu potencial ilimitado de aprendizagem. Porto Alegre: Penso, 2019.

É comum a crença de que o alcance de nossas habilidades intelectuais é limitado pela genética. Essa ideia tem influência significativa na maneira como compreendemos a aprendizagem e em concepções como a de que se somos bons ou ruins em Matemática ou em Arte, por exemplo. No entanto, estudos recentes mostram que atribuir à genética a determinação da capacidade de aprender é um equívoco, e o livro se propõe a ajudar a transformar profundamente as noções de educação e aprendizagem, ampliando a compreensão dos processos de aprendizado e de como aproveitar o vasto potencial cognitivo do nosso cérebro.

Boaler, Jo. *O que a matemática tem a ver com isso?* Como professores e pais podem transformar a aprendizagem da matemática e inspirar sucesso. Porto Alegre: Penso, 2019.

Esse livro explora como métodos tradicionais de ensino e percepções negativas minam a confiança dos estudantes em Matemática. A autora apresenta estratégias para professores e pais transformarem essa visão e inspirarem o sucesso dos estudantes, oferecendo abordagens concretas para tornar a matemática mais acessível e menos intimidante.

Bondie, Rhonda; Zusho, Akane. *Diferenciação pedagógica na prática*: rotinas para engajar todos os estudantes. Porto Alegre: Penso, 2023.

Esse livro oferece uma abordagem prática para a diferenciação pedagógica, apresentando estratégias para adequar o ensino às necessidades individuais dos estudantes. A obra fornece ferramentas concretas para criar aulas mais engajadoras e acessíveis, além de discutir o uso da avaliação formativa para ajustar o ensino.

Borba, Gustavo Severo de; Lesnovski, Melissa Merino. *Transformando a sala de aula*: ferramentas do *design* para engajamento e equidade. Porto Alegre: Penso, 2023.

Esse livro aborda a inovação na educação, utilizando ferramentas de *design* para promover engajamento e equidade. Os autores discutem os impactos da pandemia e as novas gerações de estudantes, propondo práticas inclusivas para renovar currículos e promover a diversidade nas salas de aula.

Borba, Marcelo de C.; Penteado, Miriam G. *Informática e educação matemática*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Nesse livro, os autores descrevem diferentes momentos experenciados com o uso da informática como ferramenta da educação matemática em sala de aula por professores e estudantes brasileiros. Além disso, essas experiências comprovaram a eficácia desse recurso tecnológico no ambiente escolar e fomentaram reflexões sobre políticas educacionais nessa área.

Boyer, Carl B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Blucher, 1996.

Essa é uma obra de referência em história da Matemática em língua portuguesa. Em seus capítulos, estruturados em ordem cronológica, encontram-se as origens e as razões de ideias, conceitos e procedimentos da Matemática construídos pelo ser humano desde a Pré-História até o século XX. O livro pode ser uma fonte de consulta sobre o que se ensina e também sobre preparação de aulas para contextualizar a origem do que os estudantes vão aprender.

Brasil. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). *Matriz de Avaliação de Matemática*: Pisa 2012. [Brasília, DF]: Inep, 2012. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) traz informações sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária de 15 anos. Nesse documento, é possível conhecer a matriz de avaliação de Matemática.

Brasil. *Lei n. 13146, de 6 julho de 2015.* Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Brasília, DF: Presidência da República, 2015. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13146.htm?msclkid=e03ca915a93011eca55b7de3600188ab. Acesso em: 9 out. 2024.

A instituição do Estatuto da Pessoa com Deficiência busca assegurar a inclusão social e o pleno exercício da cidadania a essas pessoas.

Brasil. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. *Resolução CNE/CEB n. 3, de 21 de novembro de 2018*. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília, DF: MEC/CNE, 2018b. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa resolução atualiza as diretrizes que devem ser observadas pelos sistemas de ensino e suas unidades escolares na organização curricular e que se aplicam a todas as formas e modalidades de Ensino Médio, complementadas, quando necessário, por diretrizes próprias.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Aplicações do pensamento computacional para os Anos Finais do Ensino Fundamental*. [Brasília, DF]: MEC/SEB, [20--]. Disponível em: https://avamec.mec.gov.br/#/instituicao/seb/curso/4701/informacoes. Acesso em: 9 out. 2024.

Nesse curso *on-line*, destinado a professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental, são explorados os quatro pilares do pensamento computacional e algumas aplicações em sala de aula. O curso faz parte do Ambiente Virtual do MEC (Avamec).

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília, DF: MEC/SEB, 2018a. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 13 set. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e das modalidades da Educação Básica.

Camargo, Fausto; Daros, Thuinie. *A sala de aula inovadora*: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. Porto Alegre: Penso, 2018 (Série Desafios da Educação).

Esse livro mostra como inovar em sala de aula, isto é, superar a aula expositiva por meio das metodologias ativas, em que o estudante é o protagonista da aprendizagem. Para isso, os autores descrevem mais de quarenta estratégias, de modo simples e direto, que podem ser aplicadas com base em métodos e recursos práticos para efetivamente promover mudanças da Educação Básica ao Ensino Superior.

Chambers, Paul; Timlin, Robert. *Ensinando matemática para adolescentes*. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro é um guia prático para professores de Matemática, abordando desafios de como melhorar o desempenho e motivar estudantes do Ensino Médio. Os autores oferecem estratégias para criar planos de aula eficazes, usar recursos de forma eficiente e avaliar o progresso dos estudantes.

Code. Disponível em: https://code.org. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa organização sem fins lucrativos oferece cursos EAD gratuitos para promover a educação da Ciência da Computação a estudantes dos ensinos Fundamental e Médio.

Cohen, Elizabeth G.; Lotan, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

As autoras apresentam, no livro, estudos e propostas importantes de como usar efetivamente a aprendizagem cooperativa na construção de salas de aula equitativas. A obra inclui evidências de pesquisas recentes sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, explicita como o trabalho em times favorece o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e de que forma os educadores podem organizar suas salas de aula para que todos participem e aprendam ativamente.

Comitê Gestor da Internet no Brasil (CGI.br). *Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras*: TIC educação 2017. São Paulo: CGI.br, 2018. *E-book*. Disponível em: https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/tic_edu_2017_livro_eletronico.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O livro traz estudos e indicadores sobre a adoção das tecnologias de informação e comunicação (TIC) para ampliar o conhecimento sobre as implicações sociais e econômicas da expansão da internet na sociedade brasileira.

Costa, Sérgio Francisco. *Introdução ilustrada à estatística*. 5. ed. São Paulo: Harbra, 2015.

O autor dessa obra organiza e apresenta os conceitos fundamentais da Estatística de maneira lúdica, utilizando diversas ilustrações que ajudam a compreender melhor temas como mensuração, populações e amostras e a diferença entre estatística descritiva e estatística inferencial, além de estudo detalhado sobre representações gráficas, medidas de tendência central e de variabilidade, probabilidade, distribuição binomial, distribuição normal, entre outros temas. O livro também oferece um formulário para contatar a editora e obter um gabarito da curva normal, que funciona como um simulador para a resolução de alguns exercícios e problemas que dependem da visualização do gráfico, além de trazer respostas dos exercícios propostos. Além disso, a obra apoia os professores com uma seleção de exercícios resolvidos.

Coxford, Arthur F.; Shulte, Albert P. (org.). *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1994.

Esse livro é uma tradução de uma obra do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) com artigos de diferentes pesquisadores e educadores que auxiliam na compreensão do que está envolvido no desenvolvimento do pensamento algébrico. Algumas passagens são especialmente recomendadas, como os capítulos 2 e 5. No capítulo 2, são apresentadas as diferentes concepções de Álgebra, como essas concepções dependem do sentido que a letra assume e quais são as implicações dessas concepções para a aprendizagem. O capítulo 5 aborda as dificuldades com a aprendizagem de funções e permite que, de posse desse conhecimento, seja possível planejar as aulas de modo a apoiar os estudantes na direção de uma aprendizagem significativa desse conteúdo.

D'Ambrosio, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

Internacionalmente reconhecido por suas pesquisas na área, o autor explora a Etnomatemática, destacando seu papel na cultura ocidental e sua relevância para o ensino. A obra discute como a Matemática pode ser vista como uma forma decolonial, centrada nas culturas e nos saberes locais, e apresenta reflexões sobre diversos trabalhos realizados na área, tanto no Brasil quanto no exterior.

Dayrell, Juarez; Carrano, Paulo; Maia, Carla Linhares (org.). *Juventude e Ensino Médio*: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Ed. da UFMG, 2014. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O livro trata de temas que dizem respeito aos jovens e à relação deles com o currículo do Ensino Médio sob a perspectiva do trabalho, da cultura, da ciência e da tecnologia.

Dell'isola, Regina L. Péret. Inferência na leitura. *In*: Glossário Ceale: termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores. Belo Horizonte: FaE-UFMG, [20--]. Disponível em: https://www.ceale.fae.ufmg.br/glossarioceale/referencia/dell-isola-r-l-cia-p-ret-leitura-infer-ncia-e-contexto-sociocultural-belo-horizonte-formato-saraiva-2001-. Acesso em: 9 out. 2024.

O verbete do Glossário Ceale, do Centro de Alfabetização, Leitura e Escrita da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, trata da concepção de inferência e de sua importância no processo de leitura.

Delors, Jacques *et al*. *Educação*: um tesouro a descobrir. Relatório para a Unesco da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI. Brasília, DF: MEC, 2010. *E-book*. Disponível em: https://unesdoc.Unesco.Org/ark:/48223/pf0000109590_por. Acesso em: 9 out. 2024.

O relatório da Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (Unesco) indica o conjunto de missões da educação, organizado com base em quatro aprendizagens fundamentais.

Duny, André. As contradições do projeto coletivo: emancipação ou manipulação? *In*: Apap, Georges *et al*. *A construção dos saberes e da cidadania*: da escola à cidade. Porto Alegre: Artmed, 2002.

Esse texto aborda como questão central as demandas por novas práticas no campo da docência. De acordo com o autor, é possível pensar um mundo no qual os saberes e a cidadania sejam tratados de forma mais inteligente e humanizada.

Fundação Scratch. *Scratch*. [*S. l.*], [20--]. Disponível em: https://scratch.mit.edu/about. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa plataforma gratuita foi desenvolvida para os usuários poderem programar histórias, jogos e animações e compartilhá-las.

Gardner, Howard. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Porto Alegre: Artmed, 1995.

Precursor dos estudos de neurociência, o autor desse livro apresenta as ideias fundamentais que desencadearam uma revolução na maneira como compreendemos a inteligência humana e as possibilidades de sua aplicação na educação, em especial nas escolas e salas de aula nas quais a aprendizagem seja pensada com profundidade, para além do estudo superficial de conteúdos, visando a um ensino para a compreensão.

GeoGebra. Disponível em: https://www.geogebra.org. Acesso em: 13 set. 2024.

Essa plataforma gratuita de aplicativos matemáticos foi desenvolvida para os usuários criarem e compartilharem projetos por meio do *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

Grover, Shuchi; Pea, Roy. Computational thinking in K–12: a review of the state of the field. *Educational Researcher*, [*s. l.*], v. 42, n. 1, 2013.

Esse artigo apresenta um panorama do desenvolvimento do pensamento computacional e traz estudos feitos após a publicação do artigo de Jeannette Wing, precursora desse tema.

Hattie, John. *Aprendizagem visível para professores*: como maximizar o impacto da aprendizagem. Porto Alegre: Penso, 2017.

Fundamentado em amplas pesquisas com milhões de estudantes ao redor do mundo, o autor explica como é possível maximizar a aprendizagem na escola por meio do que ele define como aprendizagem visível. Na obra, o autor apresenta conceitos bastante inovadores relacionados à avaliação e ao acompanhamento contínuo da aprendizagem pelo educador e pelo estudante, ensinando como aplicar os princípios da aprendizagem visível em qualquer sala de aula.

Hattie, John; Zierer, Klaus. *10 princípios para a aprendizagem visível*: educar para o sucesso. Porto Alegre: Penso, 2019.

O livro é um guia prático que apresenta dez princípios essenciais para que professores e instituições de ensino implementem a aprendizagem visível, visando maximizar o aprendizado. A obra aborda temas como avaliação, *feedback*, trabalho colaborativo, importância do diálogo e da construção de relações positivas, todos voltados para a aprendizagem visível.

Hernández, Fernando; Ventura, Montserrat. *A organização do currículo por projetos de trabalho*: o conhecimento é um caleidoscópio. 5. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

Os autores descrevem os princípios e as práticas da organização do currículo por projetos, e não pelas disciplinas tradicionais. Também resgatam as ideias do filósofo estadunidense John Dewey (1859-1952), que considerava a atividade prática, a liberdade de pensamento e a democracia essenciais para a educação.

Instituto Ayrton Senna (IAS). *As competências socioemocionais no cotidiano das escolas*. [*S. l.*]: IAS, 2022. *E-book*. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/app/uploads/2022/11/instituto-ayrton-senna-as-competencias-socioemocionais-no-cotidiano-das-escolas.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O texto apresenta o conceito de competências socioemocionais e discute como aplicá-lo no dia a dia, abordando os efeitos das competências na educação, as dimensões socioemocionais que impactam a aprendizagem e os modelos organizacionais.

Instituto Reúna. *BNCC comentada para o Ensino Médio*. São Paulo, 2024. Disponível em: https://www.institutoreuna.org.br/conteudo/bncc-comentada. Acesso em: 9 out. 2024.

A *BNCC comentada para o Ensino Médio* é uma ferramenta que interpreta, comenta e explica as competências específicas e as habilidades de cada área de conhecimento para essa etapa. Escrita por uma equipe de especialistas, tem como objetivo apoiar a elaboração de currículos alinhados à BNCC, sugerindo formas de desenvolver competências e habilidades em consonância com a educação integral e o projeto de vida dos estudantes, contemplando temas e objetos de conhecimento diversos. A obra também apresenta inovações e estratégias metodológicas que favorecem um trabalho integrado e contextualizado entre as áreas do conhecimento, além de exemplos de objetivos de aprendizagem.

Instituto Reúna. *Fortalecimento da aprendizagem*. São Paulo, 2024. Disponível em: https://www.institutoreuna.org.br/fortalecimento-da-aprendizagem. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa organização sem fins lucrativos disponibiliza recursos didáticos de Língua Portuguesa e Matemática que auxiliam na recomposição das aprendizagens dos estudantes do Ensino Médio.

Knijnik, Gelsa *et al*. *Etnomatemática em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

Esse livro oferece um estudo aprofundado sobre a Etnomatemática, explorando seu histórico e mudanças desde os anos 1970. As autoras discutem os avanços na área e seu impacto na educação contemporânea, questionando o conhecimento dominante e valorizando a diversidade cultural.

Lima, Ronaldo. F. de. *Introdução à geometria diferencial*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Disponível em: https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2021/10/Introducao-a-Geometria-Diferencial_Ronaldo-Freire-Lima.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

Dê especial atenção ao capítulo 4, que trata da geometria intrínseca desenvolvida por Carl Friedrich Gauss e descreve as superfícies e suas curvaturas, a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano e no espaço e as geodésicas.

Lindquist, Mary Montgomery; Shulte, Albert P. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

Uma das maiores contribuições desse livro é mostrar a importância da Geometria no ensino e na aprendizagem de Matemática. Destaca-se o capítulo que trata do desenvolvimento do pensamento geométrico na perspectiva das pesquisas do casal Van Hiele, segundo a qual um trabalho planejado e consistente em aulas especialmente voltadas para o estudo de Geometria e fundamentadas na problematização é crucial para que os estudantes desenvolvam o raciocínio geométrico.

Martín, Héctor Ruiz. *Como aprendemos?* Uma abordagem científica da aprendizagem e do ensino. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2023.

O autor explora as descobertas científicas sobre os processos de aprendizagem, abordando como aplicá-las para melhorar a prática pedagógica. Também discute temas como memória, motivação, avaliação e autorregulação, aproximando a ciência da educação para qualificar a aprendizagem nas escolas.

Martins, Amilton R. de Q.; Eloy, Adelmo A. da S. (org.). *Educação Integral por meio do pensamento computacional*: letramento em programação: relatos de experiência e artigos científicos. Curitiba: Appris, 2019 (Coleção Educação, Tecnologias e Transdisciplinaridade). Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/app/uploads/2022/11/instituto-ayrton-senna-educacao-integral-por-meio-do-pensamento-computacional.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa obra reúne artigos científicos que detalham as características do pensamento computacional e de experiências realizadas em salas de aulas brasileiras que envolvem diversas estratégias metodológicas. Esse material contribuiu para a elaboração das atividades relacionadas ao desenvolvimento dessa modalidade de raciocínio e de competências socioemocionais.

Perrenoud, Philippe. *10 novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

As competências são enfatizadas pelo sociólogo suíço ao tratar dos desafios da educação contemporânea. A organização, a administração e o desenvolvimento da aprendizagem, a utilização de novas tecnologias, o trabalho em equipe, o envolvimento dos estudantes em suas aprendizagens e a participação na administração da escola são alguns dos temas abordados no livro.

Piangers, Marcos; Borba, Gustavo. *A escola do futuro*: o que querem (e precisam) alunos, pais e professores. Porto Alegre: Penso, 2019.

Nesse livro, o autor analisa como será a escola do futuro, o que deve ser ensinado e como ensinar a uma geração de estudantes que tem acesso rápido e quase imediato a qualquer informação, além das expectativas desses estudantes em relação à escola. O autor também discute o papel dos pais e professores nesse cenário educacional complexo e convida estudantes, pais e professores a uma reflexão.

Pozo, Juan Ignacio (org.). *A solução de problemas*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Esse livro apresenta a visão de que ensinar a resolver problemas, em cada área do conhecimento, significa enfatizar o ensino de procedimentos. Além disso, destaca o papel fundamental do professor em incentivar os estudantes a desenvolver estratégias para a solução de problemas.

Russell, Michael K.; Airasian, Peter W. *Avaliação em sala de aula*: conceitos e aplicações. Porto Alegre: Penso, 2014.

Esse livro trata a avaliação como um componente-chave para o processo de ensino e aprendizagem e apresenta novas ferramentas e abordagens avaliativas que decorrem da introdução das tecnologias computacionais nas escolas.

Schuhmacher, Élcio *et al*. O desenvolvimento do pensamento computacional no Ensino Médio por meio de ambientes de programação. *In*: International Conference on Engineering and Technology Education, 14., 2016, Salvador. *Anais*... Salvador: Copec, 2016. p. 239-243. Disponível em: https://copec.eu/congresses/intertech2016/proc/works/52.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O artigo trata do desenvolvimento de um projeto computacional com estudantes do Ensino Médio. Os resultados demonstraram a progressão de habilidades colaborativas, de conteúdos curriculares e do pensamento computacional com base na inclusão de aplicações computacionais na prática pedagógica.

Smole, Katia Stocco; Diniz, Maria Ignez (org.). *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Apesar de ser escrito originalmente para o Ensino Fundamental, esse livro é tido como uma referência para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática para toda a Educação Básica, em especial na abordagem de resolução de problemas aliada aos processos de comunicação.

Tomaz, Vanessa Sena; David, Maria Manuela M. S. E. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.

Esse livro explora a interdisciplinaridade no ensino da Matemática, destacando sua importância para a formação integral do estudante. As autoras compartilham exemplos práticos de abordagens interdisciplinares, ajudando professores a integrar a matemática ao contexto social e a enriquecer a aprendizagem.

Vila, Antoni; Callejo, María Luz. *Matemática para aprender a pensar*: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2007.

A arte de pensar não pertence exclusivamente a nenhuma ciência, mas a Matemática é uma área do conhecimento que contribui para o pleno exercício desse processo cognitivo e para aperfeiçoá-lo. A obra ajuda a responder a alguns questionamentos por meio de reflexões e situações do dia a dia que envolvem a Matemática.

Wing, Jeannette M. Computational thinking benefits society. *Social Issues in Computing*, [*s. l.*], 10 jan. 2014. Disponível em: http://socialissues.cs.toronto.edu/index.html%3Fp=279.html. Acesso em: 9 out. 2024.

Esse artigo descreve os benefícios alcançados com o desenvolvimento dos conceitos sobre pensamento computacional em diversas áreas de atuação humana.

Wing, Jeannette M. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711/pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

A pesquisadora discorre sobre a importância e o significado de desenvolver os preceitos relacionados a essa modalidade de raciocínio nos indivíduos e distingue o pensamento computacional da programação e do letramento digital.

2 2 3 3 5 8

ISBN 978-85-418-3230-4

2 900002 233582