SER PROTAGONISTA

MANUAL DO PROFESSOR

Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias
Componente curricular: Matemática

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

ENSINO MÉDIO

VOLUME II

FABRICIO EDUARDO FERREIRA
KATIA STOCCO SMOLE
MARIA IGNEZ DINIZ

MANUAL DO PROFESSOR

SER PROTAGONISTA

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Área do conhecimento:
Matemática e
suas Tecnologias
Componente curricular:
Matemática

ENSINO MÉDIO
VOLUME II

FABRICIO EDUARDO FERREIRA

Licenciado em Matemática pelo Instituto Municipal de Ensino Superior de Catanduva (IMES-Catanduva), São Paulo.
Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Fundamental e Ensino Médio pela Universidade Estadual Paulista (Unesp) de São José do Rio Preto, São Paulo.
Mestre em Matemática pela Unesp de São José do Rio Preto, São Paulo.
Professor de Educação Básica e Ensino Superior nos cursos de Pedagogia e Licenciatura em Matemática.
Consultor de instituições e redes de ensino em projetos curriculares e de formação de professores de Matemática.
Autor de materiais para formação continuada de professores de Matemática.

KATIA STOCCO SMOLE

Licenciada em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Moema.
Bacharela em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Moema.
Especialista em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP).
Mestra em Educação pela Faculdade de Educação (FE) da USP.
Doutora em Educação pela FE-USP.
Diretora de grupo de formação e pesquisa em ensino de Matemática.
Assessora de instituições e secretarias de educação em projetos curriculares e de formação de professores de Matemática.
Autora de livros didáticos e de formação de professores.

MARIA IGNEZ DINIZ

Bacharela em Matemática pelo IME-USP.
Mestra em Matemática pelo IME-USP.
Doutora em Matemática pelo IME-USP.
Diretora de grupo de formação e pesquisa em ensino de Matemática.
Assessora de instituições e secretarias de educação em projetos curriculares e de formação de professores de Matemática.
Autora de livros didáticos e de formação de professores.

São Paulo, 1ª edição, 2024

sm

Ser Protagonista Matemática
e suas Tecnologias 2 – Matemática

Direção editorial	André Monteiro
Gerência editorial	Lia Monguilhott Bezerra
Coordenação editorial	André Zamboni
Edição executiva	Thais Bueno de Moura
Edição	Alessandra Cardozo, Amanda da Rocha Ribeiro, Cecília Tiemi Ikedo, Lindiana Justiniano de Oliveira, Luana Fernandes de Souza, Marcela de Marques Bagagini Cardoso, Tatiana Sousa Paim
Colaboração técnico-pedagógica	Ana Paula Santos
Suporte editorial	Camila Alves Batista, Fernanda de Araújo Fortunato
Coordenação de preparação e revisão	Cláudia Rodrigues do Espírito Santo **Preparação:** Ana Paula Migiyama, Eliane de Abreu Santoro, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares, Vera Lúcia Rocha **Revisão:** Alexander Barutti Azevedo, Ana Paula Migiyama, Márcio Medrado, Maria Angélica Lau P. Soares, Vera Lúcia Rocha, Waldeli Azevedo **Apoio de equipe:** Camila Lamin Lessa, Luiza Emrich
Coordenação de *design*	Gilciane Munhoz ***Design*:** Paula Maestro
Coordenação de arte	Vitor Trevelin **Edição de arte:** Clayton Renê Pires Soares **Assistência de arte:** Bernard Rodrigues Fuzetti **Assistência de produção:** Júlia Stacciarini Teixeira
Coordenação de iconografia	Josiane Laurentino **Pesquisa iconográfica:** Priscilla Liberato **Tratamento de imagem:** Marcelo Casaro, Robson Mereu
Capa	APIS Design **Ilustração de capa:** Davi Augusto
Projeto gráfico	APIS Design
Editoração eletrônica	Setup Bureau Editoração Eletrônica
Pré-impressão	Américo Jesus, Mauro Moreira
Fabricação	Alexander Maeda
Impressão	

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Ferreira, Fabricio Eduardo
Ser protagonista matemática e suas tecnologias 2 / Fabricio Eduardo Ferreira, Katia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz. -- 1. ed. -- São Paulo : Edições SM, 2024.

Componente curricular: Matemática.
Área do conhecimento: Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-418-3237-3 (aluno)
ISBN 978-85-418-3231-1 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Tecnologia educacional I. Smole, Katia Stocco. II. Diniz, Maria Ignez. III. Título.

24-228879 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:
1. Ensino integrado : Livro-texto : Ensino médio 373.19

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

1ª edição, 2024

SM Educação
Avenida Paulista, 1842 – 18º andar, cj. 185, 186 e 187 – Condomínio Cetenco Plaza
Bela Vista 01310-945 São Paulo SP Brasil
Tel. 11 2111-7400
atendimento@grupo-sm.com
www.grupo-sm.com/br

APRESENTAÇÃO

OLÁ, JOVEM!

Este livro foi produzido para acompanhar seu percurso no aprendizado da Matemática. Ele foi elaborado para seguir com você ao longo do Ensino Médio no estudo de novos conceitos e novos procedimentos com o objetivo de ampliar e aprofundar o que você tem aprendido em Matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

É possível que você se pergunte: Mas o que este livro traz de diferente e como ele pode contribuir para minha formação?

A resposta está no caminho que convidamos você a trilhar para ampliar seus horizontes em relação à presença da Matemática nos diversos campos do conhecimento e, assim, se tornar ainda mais competente como leitor e produtor de textos dessa área e como resolvedor de problemas.

Ao aprender a analisar um problema – observando os dados fornecidos, as questões levantadas e as relações que os textos trazem –, você será capaz de conectar ideias e conhecimentos para construir uma estratégia de resolução, executar essa estratégia e avaliar se chegou ou não a uma resposta adequada.

Nossa proposta maior, no entanto, é que, ao utilizar este livro como ferramenta de estudo, você não apenas exercite a resolução de problemas, mas também aprenda a avaliar e a solucionar situações práticas em sua vida e em seus eventuais estudos no futuro, empregando os recursos e as formas de pensar da Matemática.

Para que você desenvolva ainda mais suas competências e habilidades para refletir e agir de modo consistente e confiante, dentro ou fora do ambiente escolar, criamos seções para você exercitar cálculos mentalmente e resolver problemas valendo-se de seus conhecimentos e do emprego da lógica. Em vários momentos, o conteúdo abordado nesses problemas extrapola a relação direta com o tema estudado no capítulo, tornando assim mais abrangente a compreensão do universo abarcado pela Matemática.

Ao longo deste material, você também terá diversas oportunidades de recordar e reforçar o que aprendeu anteriormente e contará com uma seção, ao final de cada capítulo, que ajudará você a estudar.

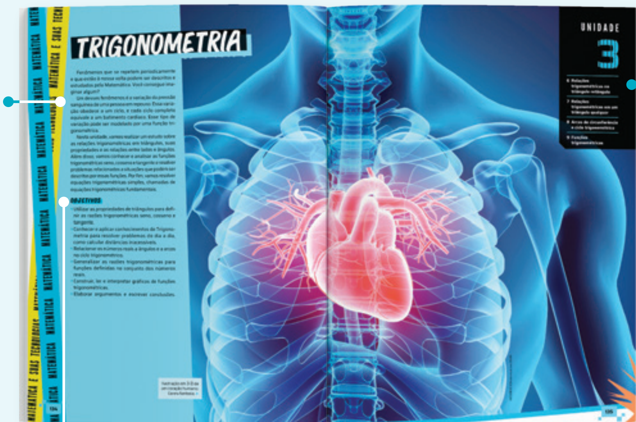
Vamos começar essa jornada?

Os autores

CONHEÇA SEU LIVRO

ABERTURA

Uma imagem e um pequeno texto são apresentados no início de cada unidade para que você comece a refletir sobre os assuntos que serão estudados. Além disso, é uma oportunidade para que você possa resgatar os conhecimentos que já detém em relação aos temas indicados.



Indicação dos capítulos que compõem a unidade.

Após o texto inicial, há uma lista com os objetivos da unidade. A partir de cada objetivo, você saberá o que será estudado e poderá se preparar para as propostas que serão apresentadas.

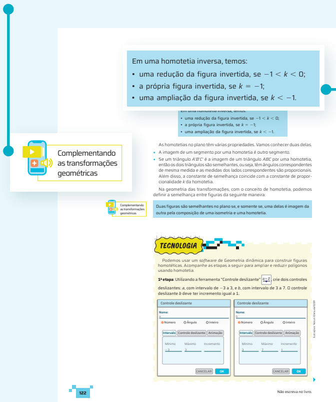
DESENVOLVIMENTO DE CONTEÚDOS

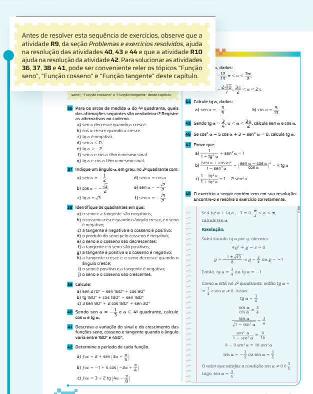
Ao longo deste volume, você encontrará textos, imagens, boxes e seções que vão ajudar você a compreender a importância da Matemática para sua formação cidadã e a continuidade de seus estudos.

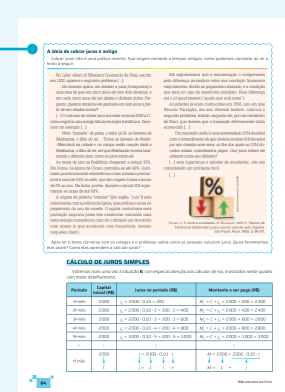
No início de cada capítulo, há uma lista com os principais assuntos que você vai estudar.

Para explorar
Esse boxe apresenta sugestões de visitas a museus, leituras complementares de livros, revistas e artigos, bem como indicações de filmes, *sites*, aplicativos e músicas.

Objeto digital
O ícone indica um objeto digital presente no livro digital.



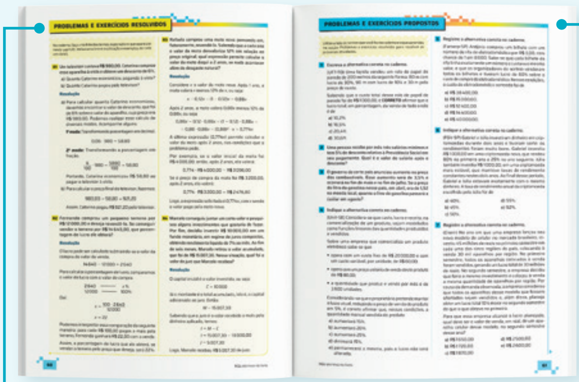




As ideias e os conceitos mais importantes são apresentados em destaque.

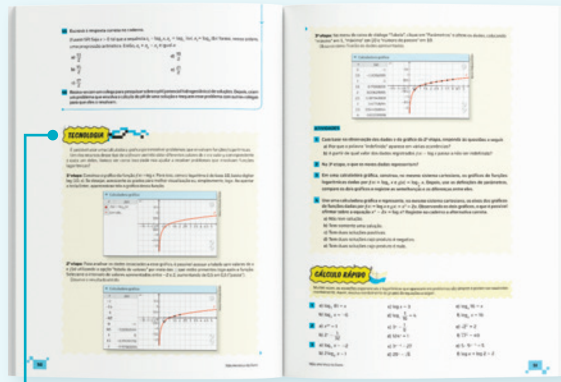
Fique de olho nas sugestões de estudo e nas reflexões para a resolução de alguns exercícios e do conteúdo apresentado.

Em diversos momentos, são sugeridos textos que permitem que você complemente seus estudos.



Problemas e exercícios resolvidos
Os exercícios resolvidos são boas oportunidades para você conhecer maneiras de resolver problemas e utilizar a escrita na linguagem matemática.

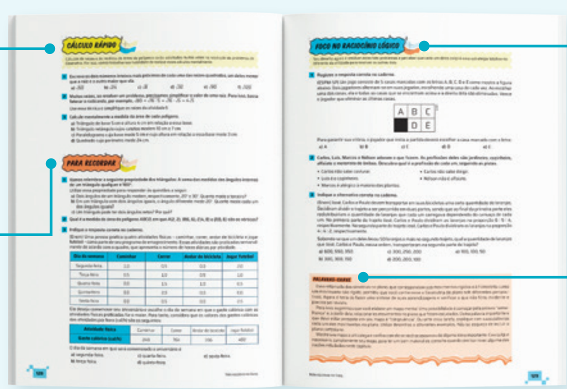
Problemas e exercícios propostos
Essa seção oferece atividades diversificadas para você resolver e avaliar seu aprendizado.



Tecnologia
Nessa seção, você vai conhecer e utilizar diversos recursos tecnológicos, como calculadora científica e alguns *softwares*, que ajudarão você a fazer gráficos, planilhas e simulações.

Cálculo rápido
Essa seção oferece exercícios para calcular mentalmente que podem ajudar você na resolução de problemas.

Para recordar
Nessa seção, são propostos exercícios para aprofundar o que você já estudou ou rever conhecimentos de anos anteriores que precisam estar sempre à sua disposição para você continuar aprendendo.

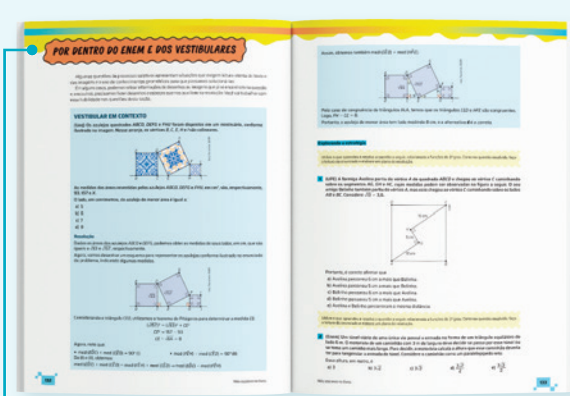


Foco no raciocínio lógico
Por meio dos problemas propostos nessa seção, você vai construir estratégias de resolução e usar o raciocínio dedutivo.

Palavras-chave
Esse boxe apresenta recursos importantes para quem estuda, com orientações de como organizar informações e fazer resumos e esquemas.

SEÇÕES ESPECIAIS

Matemática e...
Ao final de cada capítulo, você vai trabalhar com textos que mostram como a Matemática se associa a outras áreas do conhecimento.



Por dentro do Enem e dos vestibulares
Ao final de cada unidade, você vai mergulhar na resolução de um ou mais exercícios de uma prova oficial e, depois, aplicar o que aprendeu para resolver problemas de exames e de vestibulares de todo o Brasil.

SUMÁRIO

Não escreva no livro.

MATEMÁTICA FINANCEIRA E FUNÇÕES: EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Delfim Martins/Pulsar Imagens

As usinas nucleares são uma opção cada vez mais relevante na produção de energia, ao considerarmos a necessidade de diminuir a emissão de gases que contribuem para o efeito estufa, pois poluem menos que as fontes de energia que utilizam combustíveis fósseis, ainda que haja a geração de resíduos radioativos por essas usinas. Dependendo do tipo de material radioativo e de suas respectivas meias-vidas, eles precisam ser armazenados por milhões de anos, considerando o decaimento radioativo em função do tempo.

Nesta unidade, você vai estudar funções exponenciais e logarítmicas, que permitem fazer estimativas desse tempo de armazenamento, além de estudar as relações dessas funções com outras situações reais, como a magnitude de abalos sísmicos. Também vai compreender e interpretar algumas informações da área financeira, como as que envolvem cálculos de empréstimos e depreciação de bens.

OBJETIVOS

- Relacionar as progressões geométricas a funções exponenciais.
- Construir e interpretar representações gráficas e algébricas das funções exponencial e logarítmica.
- Utilizar progressões e funções para descrever situações de Matemática Financeira.
- Analisar situações relativas a finanças pessoais e saber se posicionar diante das demandas de consumo na sociedade atual.
- Resolver problemas que envolvam os conceitos de progressão numérica, função exponencial, função logarítmica e Matemática Financeira.

Aproveite a temática abordada nessa abertura de unidade e explique aos estudantes que a maior vantagem ambiental da geração de energia elétrica por meio de usinas nucleares é a não utilização de combustíveis fósseis. Dessa maneira, evita-se o lançamento na atmosfera de gases que são responsáveis pelo aumento do aquecimento global.

Radioatividade e meia-vida

O objeto digital apresenta informações sobre o decaimento radioativo e tempo de meia-vida de uma substância.

Registro aéreo das usinas nucleares em Angra dos Reis (RJ), realizado por *drone*. Foto de 2019.

UNIDADE 1

Este capítulo amplia o estudo das funções, apresenta as funções exponenciais, estabelece relações com as progressões geométricas e aprofunda o conhecimento sobre os números, considerando as potências com expoentes reais.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Leia as notícias a seguir e fique atento aos termos destacados.

NESTE CAPÍTULO

- Função exponencial
- Potências com expoente real
- Progressão geométrica e função exponencial
- Gráfico cartesiano da função exponencial
- Equações e inequações exponenciais

Ilustrações: ID/BR

Professores da Medicina apontam resultados do isolamento social precoce

Raul Pereira/Fotoarena

Praça Marechal Deodoro (praça da Matriz), em Porto Alegre (RS), cercada por placas de madeira que impediam o acesso de moradores durante a pandemia de covid-19. Foto de 2020.

[...]

Os pesquisadores levantam duas constatações irremediáveis sobre a covid-19 em Belo Horizonte. “A primeira é que o pico da epidemia na cidade ainda não foi alcançado, não se sabe ao certo se será entre maio ou junho. Mas foi possível ‘achatar a curva’ e postergar o pico. Já a segunda se refere à vulnerabilidade das pessoas em relação ao vírus. Portanto, o isolamento social é necessário para diminuir o **crescimento exponencial** do número de ocorrências e evitar que os casos graves se concentrem em um curto período de tempo” [...].

[...]

PROFESSORES da Medicina apontam resultados do isolamento social precoce. Faculdade de Medicina UFMG, Belo Horizonte, 28 abr. 2020. Disponível em: https://www.medicina.ufmg.br/em-estudo-professores-da-medicina-apontam-resultados-do-isolamento-social-precoce/. Acesso em: 15 jul. 2024.

Produtividade de cafeeiros cultivados em sistema agroflorestal com bandarra

O estado de Rondônia é o quinto maior produtor de café do país e está entre os três maiores da espécie canéfora. São inúmeras as novas tecnologias com proposta de aumentar a produtividade e melhorar a qualidade do café da região, no entanto, paralelo a essas novas tecnologias existe a preocupação com a sustentabilidade do ecossistema amazônico. [...] Foram avaliadas as produtividades de grãos dos cafeeiros ao longo de cinco safras. O aumento da densidade de árvores de bandarra promoveu incremento linear na produtividade de frutos dos cafeeiros na primeira safra (2017), enquanto, na segunda (2018), terceira (2019) e quinta (2021) safra, houve **decréscimo exponencial**. [...]

Rubens Chaves/Pulsar Imagens

Plantação de café. Foto de 2022.

BEZERRA, Sirlene Brasil de Oliveira *et al*. Produtividade de cafeeiros cultivados em sistema agroflorestal com bandarra. *In*: ENCONTRO DE INICIAÇÃO À PESQUISA DA EMBRAPA RONDÔNIA, 12.; ENCONTRO DE PÓS-GRADUAÇÃO, 7., 2022. *Anais* [...]. Porto Velho: Embrapa Rondônia, 2022. p. 24. Disponível em: https://www.alice.cnptia.embrapa.br/alice/bitstream/doc/1146354/1/Anais-EIPER-2022-1-24.pdf. Acesso em: 15 jul. 2024.

O que mostra o salto nos gastos com inteligência artificial no Brasil

[...]

Gastos dos brasileiros com inteligência artificial (IA) cresceram 120% nos cinco primeiros meses de 2023. [...]

[...] é possível verificar esse **crescimento exponencial** do interesse nas buscas pelo termo “inteligência artificial”.

[...]

FERNANDES, Miguel. O que mostra o salto nos gastos com inteligência artificial no Brasil. *Exame*, São Paulo, 17 jul. 2023. Disponível em: https://exame.com/inteligencia-artificial/o-que-mostra-o-salto-nos-gastos-com-inteligencia-artificial-no-brasil/. Acesso em: 15 jul. 2024.

Depois de ler esses textos, você consegue explicar aos colegas qual é o significado de "crescer" ou de "decrescer exponencialmente"? Você já ouviu essas expressões em outras situações?

Neste capítulo, vamos estudar a função exponencial, o que nos permitirá discutir o significado dessas expressões e conhecer algumas aplicações da Matemática em outras áreas de conhecimento. Além disso, estudaremos equações e inequações exponenciais.

Atualmente, expressões como "crescimento exponencial" são veiculadas na mídia com os mais diversos sentidos, o que proporciona uma excelente oportunidade para contextualizar o estudo da função exponencial e distinguir os significados dessa expressão em Ciências e em Matemática.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Considere a situação a seguir.

Em uma cidade, dez pessoas foram infectadas por um vírus. Alguns pesquisadores descobriram que, a cada semana, uma pessoa infectada contamina outras três pessoas. Essas, por sua vez, infectam outras três a cada semana.

Sabendo que essa cidade tem 10000 habitantes, em quanto tempo a metade da população da cidade estará contaminada por esse vírus?

Acompanhe como podemos construir um modelo matemático para resolver essa situação.

Organizando as informações fornecidas, é possível montar um quadro e perceber uma relação entre as colunas.

O trabalho com este tópico possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT101**, ao permitir que os estudantes interpretem criticamente situações sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvem a variação de grandezas. Além disso, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT304**, pois explora a resolução de problemas com funções exponenciais.

O problema proposto no tópico "Função exponencial" é central para o desenvolvimento deste capítulo e do próximo, que trata de logaritmo e função logarítmica, pois ele será retomado outras vezes, à medida que os estudantes adquirem conhecimentos matemáticos que lhes permitam fazer análises mais aprofundadas.

Tempo após a observação inicial (em semana)	Número de contaminados
0	10
1	$30 = 10 \cdot 3$
2	$90 = 10 \cdot 3 \cdot 3$
3	$270 = 10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
4	$810 = 10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
5	$2430 = 10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
...	...
x	$10 \cdot 3^x$

Observação inicial.

Podemos escrever que, na semana x, o número de infectados é $10 \cdot 3^x$. Assim, para sabermos quando metade da população de 10000 habitantes estará contaminada, precisamos determinar o valor de x que resolve a seguinte igualdade:

$$\frac{10\,000}{2} = 10 \cdot 3^x$$

Então:

$$5\,000 = 10 \cdot 3^x$$
$$500 = 3^x$$

Para encontrar o valor de x, precisamos descobrir qual é a potência de 3 que resulta em 500.

Podemos calcular algumas potências de 3 e verificar qual mais se aproxima de 500.

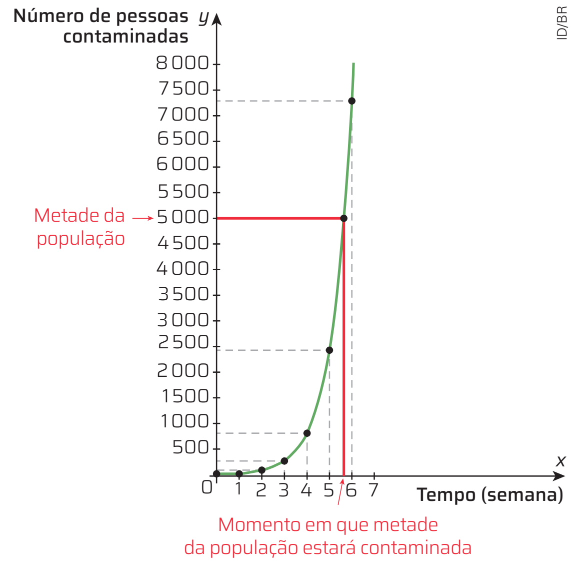
$3^0 = 1$ $\quad 3^2 = 9$ $\quad 3^4 = 81$ $\quad 3^6 = 729$

$3^1 = 3$ $\quad 3^3 = 27$ $\quad 3^5 = 243$

Observamos que o número 500 está entre 243 e 729. Isso nos permite concluir que metade da população dessa cidade estará contaminada entre as semanas 5 e 6.

O gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = 10 \cdot 3^x$, também pode nos ajudar a obter essa resposta.

x	$f(x) = 10 \cdot 3^x$
0	10
1	30
2	90
3	270
4	810
5	2 430
6	7 290



Observando o gráfico, podemos estimar que metade da população estará contaminada entre a quinta e a sexta semana.

Nesse problema, surgiu uma função na qual a variável x aparece como expoente de um número, no caso o número 3. Funções como essa estão relacionadas com **funções exponenciais**, que são o foco de estudo deste capítulo.

A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a cada número x associa o número a^x, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada **função exponencial** de base a.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = a^x, \text{ com } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Exemplos

- $f(x) = 2^x$ é uma função exponencial de base 2.
- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é uma função exponencial de base $\frac{1}{2}$.
- $f(x) = \pi^x$ é uma função exponencial de base π.
- $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$ é uma função exponencial de base $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A base de uma função exponencial

Na definição de função exponencial, nota-se que existem duas restrições em relação à base: $a > 0$ e $a \neq 1$.

Essas restrições são necessárias para garantir a existência de a^x no conjunto dos números reais e, também, que toda função exponencial exista. Verifique, a seguir, o que aconteceria se não houvesse essas restrições.

- Se $a = 1$, temos $1^x = 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Assim, a função não é chamada de exponencial porque coincide com a função constante $f(x) = 1$.
- Se $a = 0$, temos uma função $f(x) = 0$, que também é constante, porque $0^x = 0$ para todo valor positivo de x, com $x \neq -1$.
- Se $a < 0$, não podemos garantir que $a^x \in \mathbb{R}$. Por exemplo:

$$(-8)^{0,5} = (-8)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-8}, \text{ que não existe em } \mathbb{R}.$$

Então, em uma função exponencial, a base é sempre maior que 0 e diferente de 1.

Questione os estudantes sobre a restrição de $a = 0$ para $x \neq -1$. Verifique se eles compreendem que, se $x = -1$, então $0^{-1} = \frac{1}{0}$, o que é impossível.

O expoente de uma função exponencial

Este tópico tem como objetivo aprofundar o conhecimento sobre os números reais e promover a compreensão do significado de uma potência com expoente irracional.

A função exponencial é definida para qualquer valor real. Isso significa que, por exemplo, o valor 3^{-2} pertence ao conjunto imagem da função exponencial f dada por $f(x) = 3^x$, com $x \in \mathbb{R}$. Do mesmo modo, os valores $2^{\frac{3}{2}}$ e $2^{\sqrt{2}}$ fazem parte do conjunto imagem da função exponencial g dada por $g(x) = 2^x$, com $x \in \mathbb{R}$.

Mas quanto valem 3^{-2}, $2^{\frac{3}{2}}$ e $2^{\sqrt{2}}$? Para determinar esses valores, precisamos ampliar a noção de potência que estudamos até aqui. As potências podem ter:

- **expoente inteiro negativo**. Para calcular potências como 3^{-2}, é necessário lembrar que elas representam frações nas quais o numerador é 1 e o denominador é a mesma potência com expoente positivo.

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

De modo geral, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, com $a \neq 0$.

- **expoente fracionário ou racional**. Potências como $2^{\frac{3}{2}}$ representam raízes nas quais o denominador da fração que está no expoente é o **índice da raiz**. Assim:

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

De modo geral, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, para $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

- **expoente irracional**. Nesse caso, para encontrar seu valor aproximado, vamos considerar o que sabemos sobre potências de expoentes racionais.

Acompanhe como podemos determinar o valor aproximado da potência $2^{\sqrt{2}}$ considerando valores racionais aproximados de $\sqrt{2}$. Por falta e por excesso, temos:

- por falta: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...
- por excesso: 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; ...

Construímos, então, as sequências de potências de base 2:

- 2^1; $2^{1,4}$; $2^{1,41}$; $2^{1,414}$; $2^{1,4142}$; ...
- 2; $2^{1,5}$; $2^{1,42}$; $2^{1,415}$; $2^{1,4143}$; ...

Os valores dessas potências (tanto por falta quanto por excesso) aproximam-se de um único valor, que é definido por $2^{\sqrt{2}} \simeq 2^{1,414}$.

Esse processo exemplifica o fato de que, quanto mais os expoentes se aproximam de $\sqrt{2}$ por meio de números racionais, mais as potências de 2 se aproximam de $2^{\sqrt{2}}$ por meio de expoentes racionais.

O objetivo da seção *Tecnologia* é desenvolver o letramento digital dos estudantes. Como esta é a primeira vez que essa seção aparece neste volume, a escolha inicial foi pela calculadora científica. Para otimizar as aprendizagens esperadas, os estudantes podem utilizar, individualmente ou em grupos, calculadoras de *smartphones*, de computadores ou de *tablets*. Esta seção busca favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao pensamento computacional, bem como levar os estudantes a compreender as tecnologias digitais e a utilizá-las na resolução de problemas, contribuindo, assim, para a aquisição da competência geral **5**.

TECNOLOGIA

Outra maneira de determinar os valores de potências como essas é utilizar uma calculadora científica que tenha a tecla x^y. Em alguns modelos, podemos encontrar essa tecla como y^x.

Agora, vamos observar como podemos determinar as potências $2^{\frac{3}{2}}$ e $2^{\sqrt{2}}$ utilizando uma calculadora científica.

I. $2^{\frac{3}{2}}$ $\left(\text{primeiro, vale lembrar que } \frac{3}{2} = 1,5\right)$: 2 x^y 1 . 5 = 2.82842712

II. $2^{\sqrt{2}}$: 2 x^y 2 $\sqrt{\ }$ = 2.66514414

ATIVIDADE

Incentive os estudantes a utilizar uma calculadora científica para verificar os resultados apresentados. Comente que, em alguns modelos de *smartphone*, é possível encontrar calculadoras desse tipo. Além disso, reforce que a quantidade de casas decimais do número apresentado no visor pode variar de acordo com o modelo de calculadora utilizado e que o valor é sempre aproximado, pois não há espaço na tela para exibir todas elas.

1 **Use uma calculadora para determinar os valores das seguintes potências de base positiva e expoente irracional: $10^{\sqrt{3}}$, $5^{-\sqrt{2}}$, 6^{π} e $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{5}}$.** Aproximadamente 53,96; aproximadamente 0,10; aproximadamente 278,38; aproximadamente 3,42.

Neste item, por meio do raciocínio abdutivo, vamos estender as propriedades das potências com expoentes racionais de modo que o estudante considere como plausível que essas propriedades sejam também da função exponencial.

Função exponencial: potências com expoente real

Como vimos, os valores de a^x, quando x é irracional, são obtidos a partir de potências a^r, com r assumindo valores racionais que se aproximam de x.

As propriedades das potências de expoente racional continuam valendo para as potências de **expoentes reais** da função exponencial $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Assim, para quaisquer valores de x e y reais, temos:

I. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

II. $a^x : a^y = a^{x-y}$

III. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

IV. $\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$, com $y > 1$

V. $a^{-y} = \dfrac{1}{a^y}$

Além dessas propriedades, vale lembrar que:

- $a^0 = 1$;
- sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $a^m = a^n$ apenas se $m = n$.

Na indisponibilidade de uma calculadora científica, planeje-se para que os estudantes possam usar a calculadora científica nos computadores do laboratório de informática ou a dos próprios aparelhos celulares.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Usando uma calculadora científica, encontre os valores das potências.

a) $8^{\frac{2}{3}}$ 4
b) $3^{-\sqrt{2}}$ Aproximadamente 0,21.
c) $5^{\frac{1}{8}}$ Aproximadamente 1,22.
d) $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ Aproximadamente 2,17.

2 Represente as potências na forma de radical.

a) $6^{\frac{2}{3}}$ $\sqrt[3]{36}$
b) $5^{-\frac{3}{4}}$ $\dfrac{\sqrt[4]{5}}{5}$
c) $7^{\frac{2}{3}}$ $\sqrt[3]{49}$
d) $5^{-\frac{3}{5}}$ $\dfrac{\sqrt[5]{25}}{5}$
e) $(0{,}1)^{-\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{10}$
f) $\left(\dfrac{6}{7}\right)^{\frac{2}{3}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{36}{49}}$
g) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{5}}$ $\sqrt[5]{8}$
h) $(0{,}3)^{-\frac{2}{3}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{100}{9}}$

3 Lembrando que $27^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{27})^2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$, simplifique as potências.

a) $8^{\frac{2}{3}}$ 4
b) $9^{\frac{3}{4}}$ $3\sqrt[4]{9}$ ou $3\sqrt{3}$
c) $625^{-\frac{3}{4}}$ $\dfrac{1}{125}$
d) $121^{-\frac{1}{2}}$ $\dfrac{1}{11}$
e) $16^{-\frac{3}{4}}$ $\dfrac{1}{8}$
f) $(125)^{-\frac{2}{3}}$ $\dfrac{1}{25}$

4 Utilizando as propriedades das potências, simplifique as expressões.

a) $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}}$ $\sqrt[6]{5}$
b) $6^{0{,}8} : 6^{0{,}5}$ $\sqrt[10]{216}$
c) $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{\sqrt{50}}$ $3^{6\sqrt{2}}$
d) $4^x : 2^x$ 2^x
e) $(6^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1} + 49^{-\frac{1}{2}}$ $\dfrac{43}{7}$
f) $(2^{0{,}5})^{-2} - \left(\dfrac{6^{\sqrt{3}}}{6}\right)^{\sqrt{3}+1}$ $-\dfrac{71}{2}$

5 Encontre os erros cometidos por Raquel na simplificação da expressão e corrija-os.

$$\frac{2^x \cdot 4^{x+1}}{8^{-x} \cdot 16^{\frac{x}{2}}} = \frac{2^x \cdot (2^2)^{x+1}}{(2^3)^{-x} \cdot (2^4)^{\frac{x}{2}}} = \frac{2^x \cdot 2^{2x+1}}{2^{-3x} \cdot 2^{8x}} =$$

$$= 2^{x+2x+1} \cdot 2^{3x} \cdot 2^{-8x} = 2^{3x+1+3x-8x} = 2^{-2x+1}$$

ID/BR

Erros: $4^{x+1} = (2^2)^{x+1} = 2^{2x+2}$ e $16^{\frac{x}{2}} = (2^4)^{\frac{x}{2}} = 2^{2x}$

Simplificação correta:

$$\frac{2^x \cdot 4^{x+1}}{8^{-x} \cdot 16^{\frac{x}{2}}} = \frac{2^x \cdot (2^2)^{x+1}}{(2^3)^{-x} \cdot (2^4)^{\frac{x}{2}}} = \frac{2^x \cdot 2^{2x+2}}{2^{-3x} \cdot 2^{2x}} = 2^{x+2x+2} \cdot 2^{3x} \cdot 2^{-2x} = 2^{3x+2+3x-2x} = 2^{4x+2}$$

6 Reduza cada expressão a uma única potência.

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1} \cdot \left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{3x}{2}} \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^{-x+1}$ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{7x-4}$
b) $\dfrac{0{,}04^x \cdot 25^{1-x}}{0{,}008^x \cdot 125^{2-x}}$ 5^{2x-4}

7 Analise esta sequência: 10, 100, 1 000, 10 000, ...

a) Explique como essa sequência é formada. Cada termo da sequência pode ser determinado elevando 10 a um expoente igual à posição do termo na sequência.
b) Indique o 5º, o 18º e o 100º termos dessa sequência com base em sua explicação. 100 000; 10^{18}; 10^{100}.

O trabalho com este tópico permite o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT304**, a partir da resolução de problemas com funções exponenciais, e da habilidade **EM13MAT508**, ao levar os estudantes a identificar e a associar progressões geométricas (P.G.) a funções exponenciais e estabelecer ligação entre as propriedades das funções exponenciais relativas a crescimento e decrescimento.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E FUNÇÃO EXPONENCIAL

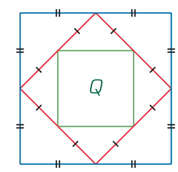
Acompanhe as situações a seguir e como elas foram resolvidas.

Situação A

Um aplicativo apresenta, em seu manual, a demonstração de como realizar uma construção com figuras geométricas. Dado um quadrado *Q* de lado 1 u.c., o programa constrói outros quadrados de acordo com um padrão: a partir do segundo quadrado, os pontos médios dos lados de cada um deles devem ser os vértices do quadrado anterior. Considere a representação ao lado.

Qual é a área do quinto quadrado construído depois de *Q*?

Podemos resolver esse problema construindo um quadro.



ID/BR

Verifique se os estudantes reconhecem as notações u.c. (unidade de comprimento) e u.a. (unidade de área). Caso seja necessário, explique a eles que essas notações representam, respectivamente, uma unidade arbitrária de medida de comprimento e uma unidade arbitrária de medida de área.

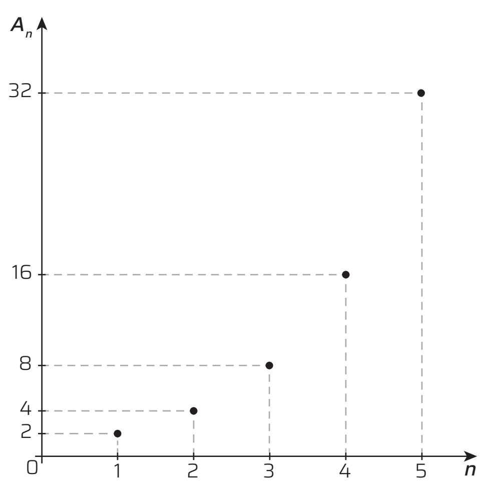
Quadrado	*Q*	1º depois de *Q*	2º depois de *Q*	3º depois de *Q*	4º depois de *Q*	5º depois de *Q*
Área do quadrado (u.a.)	1	2	4	8	16	32

Portanto, a área do quinto quadrado construído depois de *Q* é 32 u.a.

A área desses quadrados pode ser representada por uma progressão geométrica. Vamos chamar de A_n a área do *n*-ésimo quadrado construído, desconsiderando-se o quadrado *Q*.

$$A_n = 2^n \text{, com } n \in \mathbb{N}^*$$

Verifique no gráfico a seguir a representação da área dos cinco primeiros quadrados construídos.



ID/BR

Perceba que, para essa situação, não faz sentido calcular o valor de *A* quando $n = 3{,}5$, pois *n* representa a posição do quadrado na sequência e, portanto, é um número natural diferente de zero. Assim, não existe $A_{3,5}$.

Situação B

A altura de uma planta dobra a cada mês, durante certo período de sua vida. Se, na primeira observação, a altura inicial for 1 cm, qual será a altura esperada ao final do quarto mês?

Para resolver esse problema, também podemos construir um quadro.

Mês	0	Final do 1º mês	Final do 2º mês	Final do 3º mês	Final do 4º mês	Final do 5º mês
Altura da planta (cm)	1	2	4	8	16	32

Portanto, a altura da planta ao final do quinto mês é 32 cm.

Singkham/Shutterstock.com/ID/BR

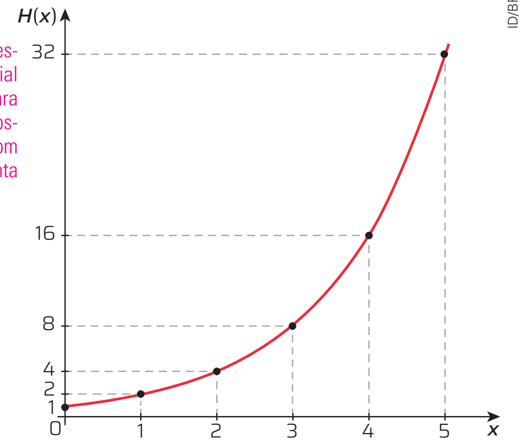
Planta em diferentes fases de crescimento.

A altura dessa planta pode ser representada por uma função. Vamos chamar de $H(x)$ a altura da planta em relação ao tempo x. A função exponencial H é representada por:

$$H(x) = 2^x, x \in [0, +\infty[$$

Verifique a seguir o gráfico dessa função.

É importante que a relação entre progressão geométrica (P.G.) e função exponencial seja compreendida pelos estudantes, para que, na resolução de problemas, eles possam optar por uma ou outra, de acordo com o conjunto numérico dos dados e a pergunta formulada no problema.



ID/BR

Para essa função, é possível calcular $H(3{,}5)$.

$$H(3{,}5) = 2^{3{,}5} = 2^3 \cdot 2^{0{,}5} = 8\sqrt{2} \simeq 11{,}3$$

Portanto, a altura da planta em 3 meses e meio deve ser aproximadamente 11,3 cm.

Você percebeu a diferença entre as situações propostas nesses dois problemas?

No primeiro deles, temos uma progressão geométrica (P.G.): $A_n = 2^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. No segundo, a função exponencial H dada por $H(x) = 2^x$, com $x \in [0, +\infty[$, descreve a situação para o crescimento da planta.

O que observamos nesses exemplos é um fato geral.

Gráfico cartesiano da função exponencial

Toda P.G. na forma $a_n = q^{n-1}$, com $n \geqslant 2$, e toda função exponencial f dada por $f(x) = q^x$, com $x \in \mathbb{R}$, assumem os mesmos valores quando a variável pertence a $\mathbb{N}^*$ e apresentam o mesmo comportamento, isto é, ambas são decrescentes quando $0 < q < 1$ ou são crescentes quando $q > 1$.

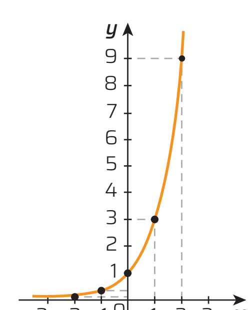
Vamos verificar como se comportam duas funções exponenciais a partir do esboço do gráfico delas.

- Função exponencial de base 3: $y = 3^x$

  Atribuindo alguns valores a x, construímos o quadro e o gráfico a seguir.

Mostre aos estudantes a relação entre funções exponenciais e progressões geométricas:
$f(x) = 3^x$ e $a_n = 3^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$;
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

x	−2	−1	0	1	2
3^x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

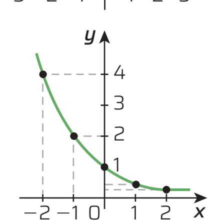


ID/BR

- Função exponencial de base $\frac{1}{2}$: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

  Atribuindo alguns valores a x, construímos o quadro e o gráfico a seguir.

x	−2	−1	0	1	2
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



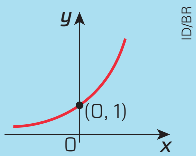
ID/BR

Com o conhecimento de potências e sabendo como determinar se uma progressão geométrica é crescente ou decrescente, dependendo de a razão da P.G. ser maior ou menor que 1, podemos resumir algumas características do gráfico de uma função exponencial.

O gráfico cartesiano de uma função exponencial f de base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$, e de domínio $\mathbb{R}$:

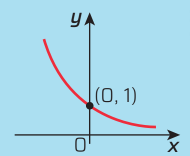
- está acima de Ox, pois $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- tem $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$ e corta Oy em (0, 1), pois $a^0 = 1$;
- apresenta um destes aspectos:

$a > 1$



Função crescente em $\mathbb{R}$.

$0 < a < 1$



Função decrescente em $\mathbb{R}$.

Esta seção tem como objetivo a leitura e a análise de questões de aplicação do tema em estudo. Nas primeiras ocorrências dessa seção, utilize diferentes abordagens, lendo os problemas com os estudantes e incentivando-os a relacioná-los com aqueles que resolveram na seção *Problemas e exercícios propostos*.
A compreensão da resolução dos problemas com funções exponenciais apresentados nesta seção contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT304**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **Analise a lei de formação das funções f e g e determine o domínio e a imagem delas. Depois, indique o intervalo em que cada uma dessas funções é crescente ou decrescente e faça um esboço do gráfico de cada uma.**

a) $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

b) $g(x) = -2 + 5^x$

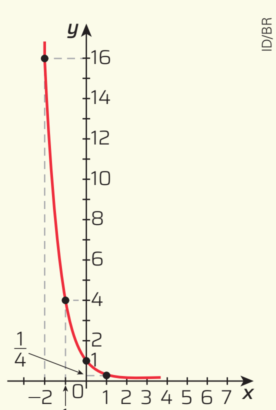
Resolução

a) f é uma função exponencial com base $\dfrac{1}{4}$, isto é, com base entre 0 e 1. Logo:

- $D(f) = \mathbb{R}$
- $\text{Im}(f) =]0, +\infty[$
- f é decrescente em $\mathbb{R}$.

Atribuindo alguns valores a x, determinamos os valores correspondentes de y e, assim, obtemos alguns dos pares ordenados para representar a função f graficamente.

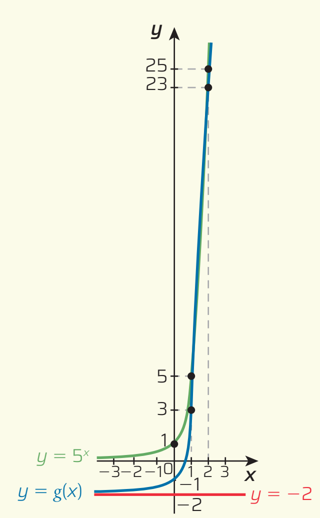
x	$f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$
−2	16
−1	4
0	1
1	$\dfrac{1}{4}$



b) g é uma função do tipo exponencial com potência de base 5. Assim, g tem base maior que 1. Calculando $g(x)$ para alguns valores de x, temos:

x	5^x	$g(x) = -2 + 5^x$
−1	$\dfrac{1}{5}$	$-2 + \dfrac{1}{5} = -1{,}8$
0	1	$-2 + 1 = -1$
1	5	$-2 + 5 = 3$
2	25	$-2 + 25 = 23$
3	125	$-2 + 125 = 123$

$D(g) = \mathbb{R}$, g é crescente em $\mathbb{R}$ e seu gráfico é:



Logo, $\text{Im}(g) =]-2, +\infty[$.

R2 (Enem) Um tipo de célula se reproduz constantemente por divisão celular, triplicando sua quantidade a cada duas horas, sob condições ideais de proliferação. Suponha uma quantidade inicial Q_0 dessas células sob as condições ideais de proliferação durante um certo período.

Qual a representação algébrica da quantidade Q dessas células em função do tempo t, em hora, nesse período?

a) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^t$
b) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{2t}$
c) $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$
d) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}}$
e) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}-1}$

Resolução

A quantidade do tipo de célula analisada triplica a cada 2 horas. Assim, podemos escrever a quantidade dessas células em função do tempo decorrido da seguinte maneira:

Início → $Q(0) = Q_0$

2 horas → $Q(2) = Q_0 \cdot 3$

4 horas → $Q(4) = Q_0 \cdot 3 \cdot 3 = Q_0 \cdot 3^2$

6 horas → $Q(6) = Q_0 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = Q_0 \cdot 3^3$

E assim por diante. Logo, em t horas a quantidade de células pode ser representada algebricamente por $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}}$, com $t \in \mathbb{N}$.

Portanto, a alternativa **d** é a correta.

Esta seção é precedida pela seção *Problemas e exercícios resolvidos*, para que os estudantes exerçam o raciocínio por analogia, na medida em que se apoiam em questões resolvidas para transferir estratégias e representações na resolução de problemas e exercícios semelhantes.

O trabalho com a atividade **12** permite o desenvolvimento da competência específica **1** da área de Linguagens e suas Tecnologias e contribui também para a aquisição da competência geral **9**, pois possibilita aos estudantes exercitar a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Antes de resolver os problemas, que tal ler todos eles? A cada problema, retorne ao texto e às atividades das seções *Problemas e exercícios resolvidos* para investigar qual deles pode ajudá-lo a resolver as atividades que você deve solucionar agora.

Depois de resolvê-los, compare suas resoluções com as de um colega. Verifique se é preciso algum acerto e como você pode contribuir para a produção do colega. Registrem juntos suas dúvidas para, depois, conversar sobre elas com o professor.

8 **Esboce o gráfico cartesiano de cada função exponencial a seguir.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ c) $y = 2 - 2^x$

9 **Esboce o gráfico e determine o conjunto imagem de cada função do tipo exponencial.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

a) $f(x) = 2^x - 1$ b) $f(x) = 2^x + 2$

10 **Classifique em crescente ou decrescente a função exponencial *f* dada por:**

a) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^x$ decrescente
b) $f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^x$ crescente
c) $f(x) = \left(\sqrt{2} - 1\right)^x$ decrescente
d) $f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x$ crescente

11 **Determine $m \in \mathbb{R}$ para que a função exponencial definida por:**

a) $f(x) = (2m - 1)^x$ seja crescente em $\mathbb{R}$. $m > 1$
b) $f(x) = (-3m + 1)^x$ seja decrescente em $\mathbb{R}$. $0 < m < \frac{1}{3}$

12 **Reúna-se com um colega. Leiam novamente as notícias apresentadas na abertura deste capítulo. Depois, redijam um texto para explicar o que as expressões "crescimento exponencial" e "decréscimo exponencial" significam em cada caso. Se necessário, pesquisem outros contextos em que essas expressões são utilizadas na mídia. Por fim, compartilhem com a turma e criem um único documento com o significado dessas expressões.** Resposta pessoal.

13 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Fuvest-SP) Seja $f(x) = a + 2^{bx + c}$, em que a, b e c são números reais. A imagem de f é a semirreta $]-1, \infty[$ e o gráfico de f intersecta os eixos coordenados nos pontos $(1, 0)$ e $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$. Então, o produto abc vale: Alternativa **a**.

a) 4 b) 2 c) 0 d) −2 e) −4

14 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Uece) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = b \cdot a^x$, onde a e b são números reais positivos, $a \neq 1$. Se $f(1) = 8$ e $f(2) = 16$, então, o valor de $f(4)$ é

a) 48. b) 24. c) 32. d) 64. Alternativa **d**.

15 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(FCMSC-SP) O decaimento radioativo de uma substância se dá de acordo com a fórmula $r(t) = C \cdot 3^{-6t}$, com C sendo uma constante diferente de zero e $r(t)$ a quantidade de radioatividade presente na substância após t segundos desde o início do decaimento. O valor de t, em segundos, para que a substância fique com a terça parte da radioatividade que tinha inicialmente é igual a Alternativa **d**.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{2}{5}$

16 **Forme dupla com um colega. Obtenham graficamente as soluções da equação $2^n = 64$. Em seguida, compartilhem com a turma o gráfico que fizeram e a conclusão a que vocês chegaram.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

A resolução dos problemas **17** a **21** permite que os estudantes desenvolvam as habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT304**, pois possibilita que interpretem criticamente situações sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvem a variação de grandezas e resolvam problemas com funções exponenciais.

Se julgar oportuno, utilize as atividades **20** e **21** para avaliar os estudantes. Após realizarem a atividade **20**, incentive-os a justificar por que a função que criaram é crescente ou decrescente. Exponha à turma as diferentes funções que surgiram na atividade **21** e procure generalizar o fato de que qualquer função do tipo $f(x) = 1 + a^x$, com $a > 1$ tem imagem $]1, +\infty[$.

Leia a próxima atividade e, antes de resolvê-la, reflita sobre os itens a seguir.

- Há alguma palavra que você desconhece?
- Por que colocamos o lembrete no item **a**?
- Por que você usaria a calculadora para solucionar o item **d**?

Feito isso, resolva a atividade.

17. c) C_1 = R\$ 2180,00; C_5 = R\$ 3077,25; C_{10} = R\$ 4734,73; C_{20} = R\$ 11200,82.

17 Em um depósito a prazo efetuado em um banco, o capital acumulado ao fim de certo tempo é dado pela fórmula $C = D(1 + t)^n$, em que C representa o capital acumulado; D, o valor do depósito; t, a taxa de juros ao ano; e n, o número de anos. Supõe-se que, ao final de cada ano, os juros capitalizados sejam sempre acumulados ao depósito. Considerando esses dados, faça o que se pede em cada item.

a) Para um depósito de R\$ 2000,00, a uma taxa de 12% ao ano, qual é o capital acumulado ao fim de 1 ano? $\left(\text{Lembre-se de que } 12\% = \dfrac{12}{100} = 0{,}12.\right)$ C_1 = R\$ 2240,00

b) Considerando as informações do item **a**, calcule também o capital acumulado ao fim de 5 anos, de 10 anos e de 20 anos. C_5 = R\$ 3524,68; C_{10} = R\$ 6211,70; C_{20} = R\$ 19292,59.

c) Se a taxa de juros fosse de 9% ao ano, qual seria o capital acumulado nesses mesmos períodos de tempo indicados nos itens **a** e **b**?

d) Construa, em um mesmo sistema cartesiano, os gráficos que mostram a variação do capital em função de n nos itens **a** e **b**. Consulte a resposta no Manual do Professor.

e) Para um depósito de R\$ 1000,00, à taxa de 10,5% ao ano, durante quantos anos o capital será menor ou igual a R\$ 5000,00? (Se precisar, use a calculadora para resolver.) 16 anos.

18 (UFPE) Diferentes quantidades de fertilizantes são aplicadas em plantações de cereais com o mesmo número de plantas, e é medido o peso de cereal colhido em cada plantação. Se x kg de fertilizantes são aplicados em uma plantação onde foram colhidas y toneladas (denotadas por t) de cereais, então, admita que esses valores estejam relacionados por $y = k \cdot x^r$, com k e r constantes. Se, para $x = 1$ kg, temos $y = 0{,}2$ t e, para $x = 32$ kg, temos $y = 0{,}8$ t, encontre o valor de x, em kg, quando $y = 1{,}8$ t. $x = 243$ kg

19 Escreva a alternativa correta no caderno.

(Unifor-CE) O dono de um antiquário restaurou uma de suas obras e estimou que o valor da peça t anos após a restauração é $v(t) = 2500(1{,}03)^t$, onde $0 \leqslant t \leqslant 3$. A expressão que corresponde ao valor da peça m meses após a restauração, onde $0 \leqslant m \leqslant 36$, é

a) $v(m) = 2500(1{,}03)^{\frac{m}{36}}$

b) $v(m) = 2500(1{,}03)^{\frac{m}{3}}$

c) $v(m) = 2500\left(\dfrac{1{,}03}{36}\right)^{3m}$

d) $v(m) = 2500(1{,}03)^{12m}$

e) $v(m) = 2500(1{,}03)^{\frac{m}{12}}$

Alternativa **e**.

20 Crie um exemplo de uma função exponencial crescente e outro de uma função exponencial decrescente diferentes daqueles já apresentados neste capítulo. Em seguida, mostre-os a um colega para que um construa os gráficos das funções que o outro criou. Resposta pessoal.

21 Utilize uma função exponencial para criar um exemplo de função cuja imagem seja $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$.

a) Dê a lei de formação dessa função. Resposta pessoal.

b) Esboce o gráfico dessa função. Resposta pessoal.

Chame a atenção dos estudantes para os cuidados que precisamos ter ao acessar *sites*. Para obter dicas de como verificar se um *site* é seguro, sugerimos a leitura deste texto: HAMMERSCHMIDT, Roberto. 10 dicas para descobrir se um *site* é confiável. *Tecmundo*, 2 jun. 2012. Disponível em: https://www.tecmundo.com.br/seguranca/1194-10-dicas-para-descobrir-se-um-site-e-confiavel.htm. Acesso em: 28 jun. 2024.

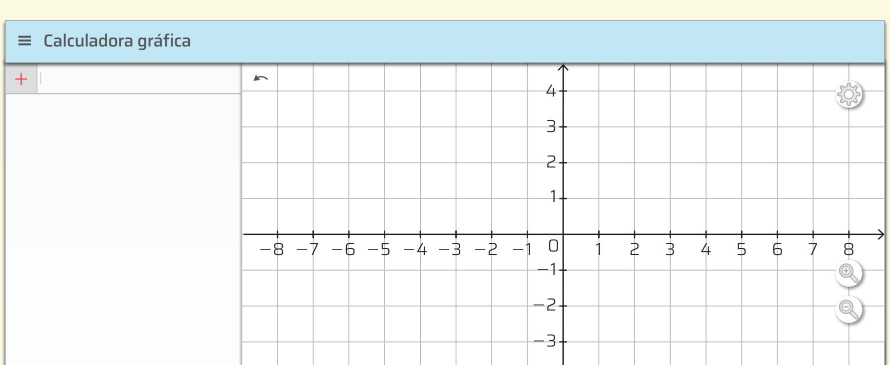
TECNOLOGIA

O trabalho com a seção *Tecnologia* contribui para a aquisição da competência geral **5**, no sentido do letramento digital dos estudantes.

Por meio de um *site* de busca, é possível encontrar diversas calculadoras gráficas *on-line*. Nesse caso, utilizamos o GeoGebra. Na impossibilidade de obter esse recurso, a sequência de atividades desta seção pode ser feita em uma planilha eletrônica.

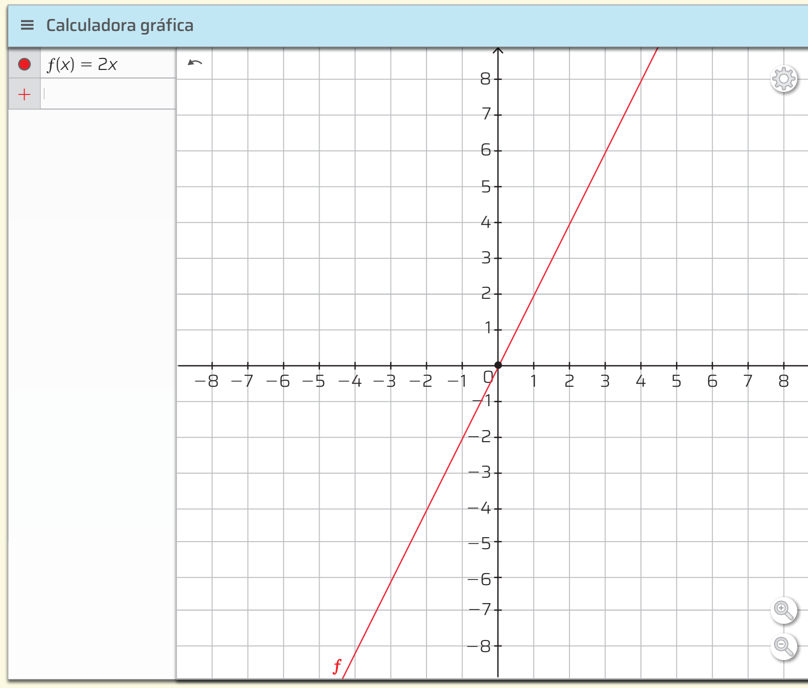
As calculadoras gráficas podem ser utilizadas para construir e editar gráficos. Vamos usar uma calculadora gráfica *on-line* para construir, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = 2^x$.

1ª etapa: Ao abrir o programa, buscamos a opção que permite abrir a janela de gráficos em duas dimensões. Deve abrir uma tela com um sistema de eixos cartesianos.



Nelson Matsuda/ID/BR

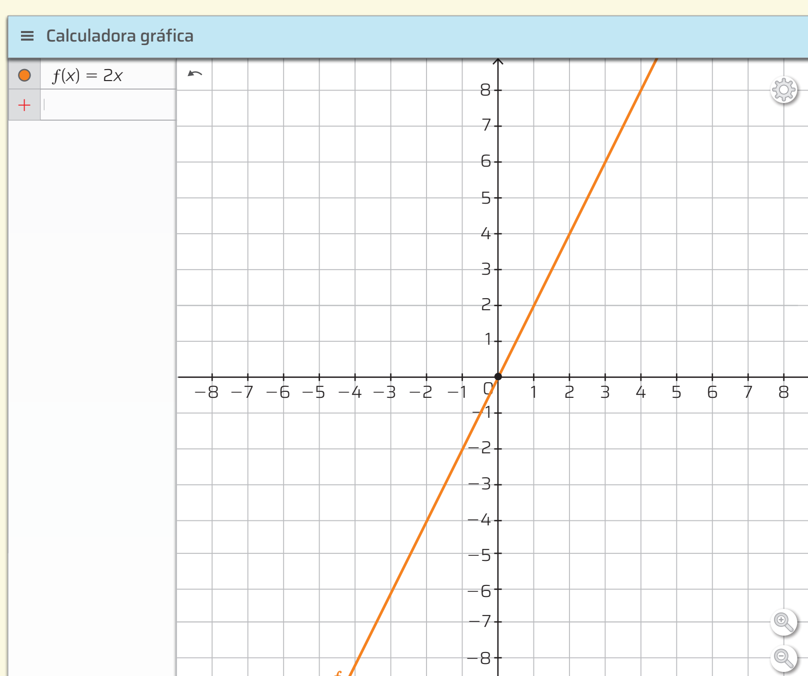
2ª etapa: Agora, construímos o gráfico da função linear definida por $f(x) = 2x$. Para isso, escrevemos a função na caixa de entrada de dados e, em seguida, pressionamos “Enter”. A janela de visualização deve ficar parecida com a imagem a seguir.



Nelson Matsuda/ID/BR

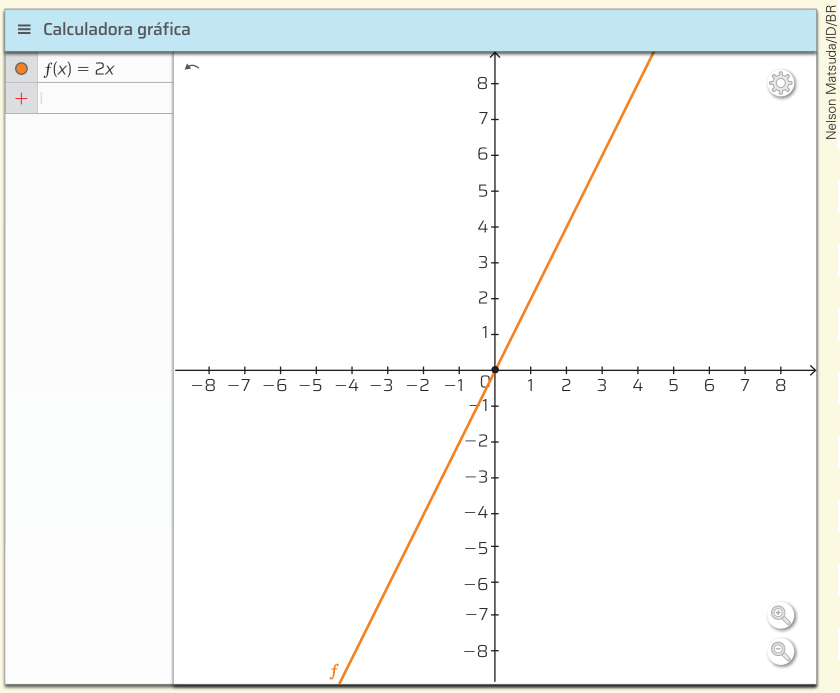
Se necessário, digite 2*x (o símbolo * é usado para indicar uma multiplicação).

Podemos utilizar as ferramentas de configuração para personalizar o gráfico escolhendo a cor e a espessura do fio. É possível personalizar também a janela de exibição, deixando a malha quadriculada da maneira que considerarmos melhor. Observe, nos exemplos a seguir, que alteramos a cor e a espessura do fio. Além disso, em um dos exemplos removemos a malha quadriculada.



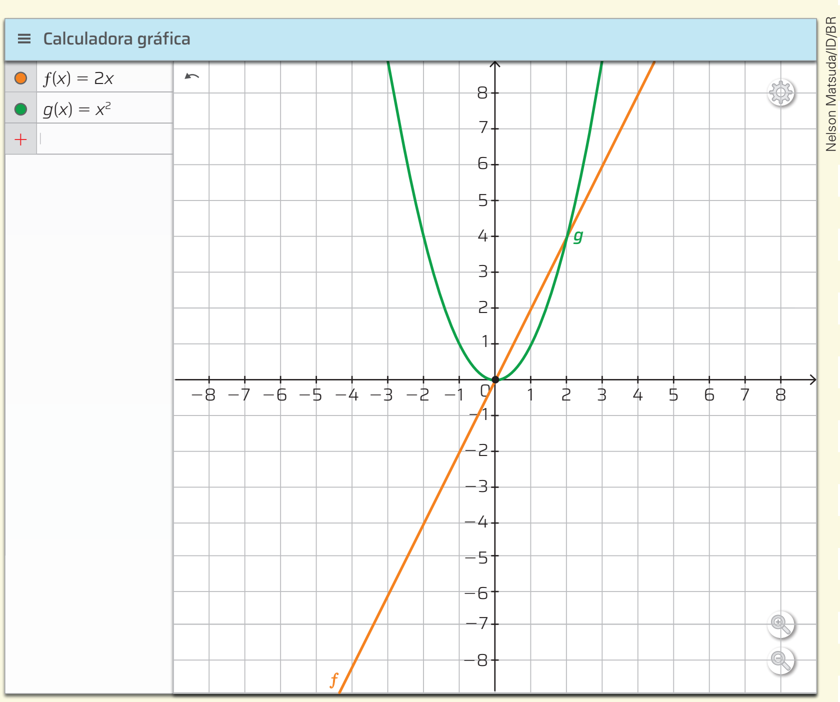
Nelson Matsuda/ID/BR

Não escreva no livro.

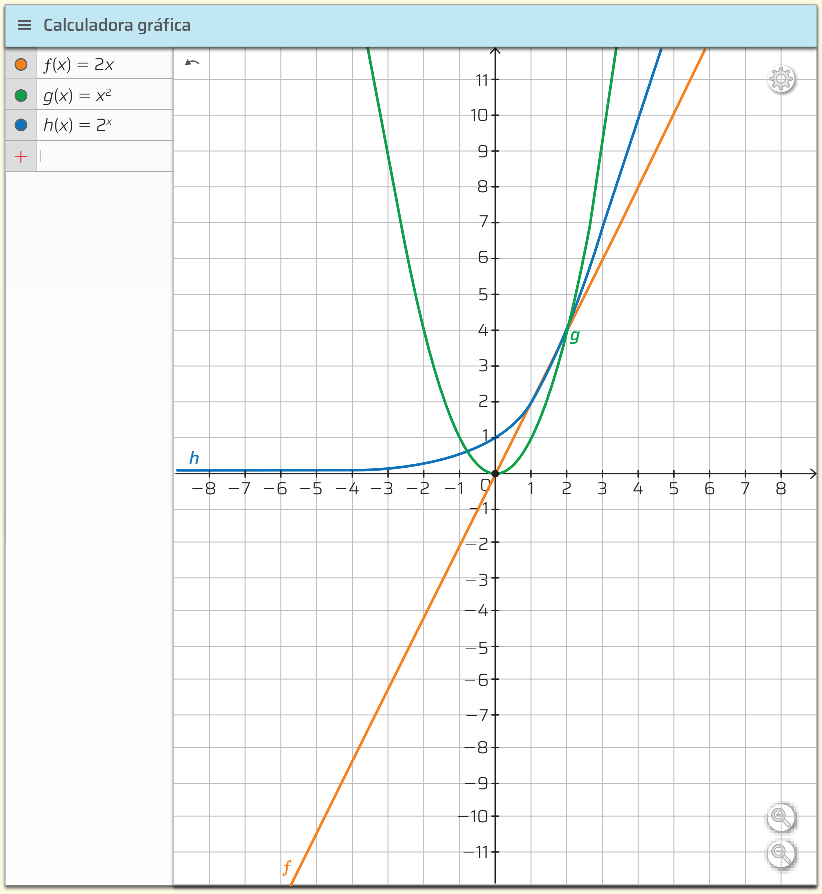


3ª etapa: Nesse mesmo plano cartesiano, construa o gráfico da função quadrática definida por $g(x) = x^2$ seguindo as mesmas etapas de construção do gráfico da função linear definida por $f(x) = 2x$.

Para funções com potência, podemos escrever xx ou x*x ou, ainda, x^2; verifique como a calculadora gráfica reconhece cada escrita. O símbolo **^** pode ser usado para representar uma potência desejada, por isso, para escrevermos x^2, podemos digitar x^2. Observe que escolhemos uma cor diferente da utilizada no gráfico de $f(x) = 2x$.

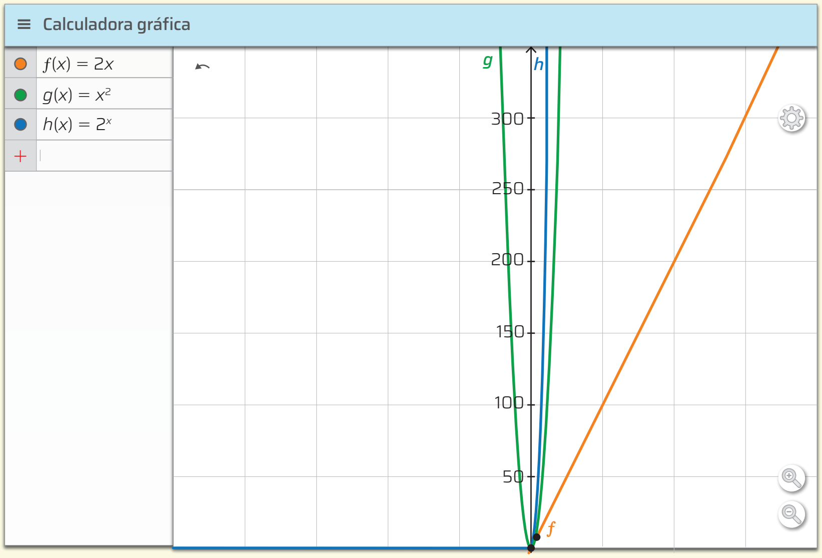


4ª etapa: Ainda no mesmo plano cartesiano, construímos o gráfico da função exponencial definida por $h(x) = 2^x$ seguindo as mesmas etapas de construção do gráfico da função linear definida por $f(x) = 2x$. Observe que escolhemos uma cor diferente das utilizadas nos gráficos de $f(x) = 2x$ e de $g(x) = x^2$. A imagem final da tela deve ser similar à representada a seguir.



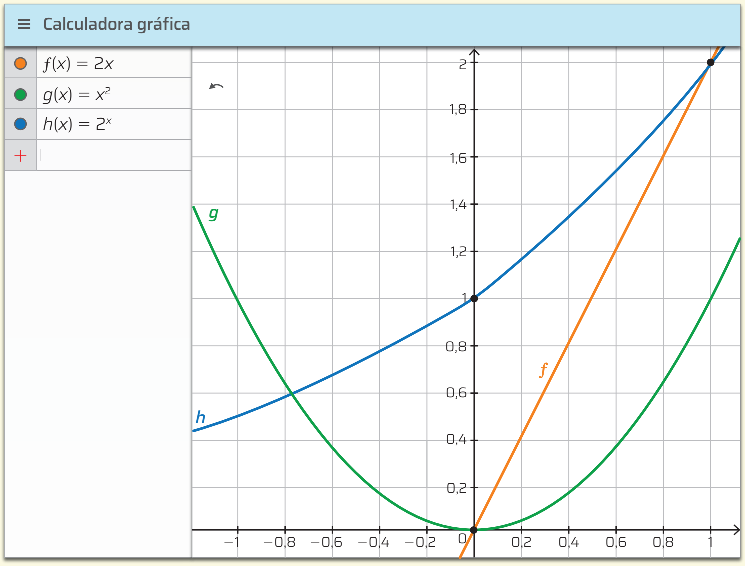
Nelson Matsuda/ID/BR

5ª etapa: Podemos reduzir o *zoom* e deslocar a tela para verificar como essas funções se comportam.



Nelson Matsuda/ID/BR

Também podemos aumentar o *zoom* para observar detalhes, como os pontos de intersecção de cada par dessas funções.



Nelson Matsuda/ID/BR

ATIVIDADES

Esta seção permite que os estudantes utilizem recursos tecnológicos para resolver problemas e ampliem a compreensão sobre gráficos de funções do tipo exponencial, bem como sobre a linguagem matemática.

1 **Analise os gráficos construídos e responda às questões.**

a) Quais diferenças existem entre eles? Registre. A diferença entre eles é o formato: um é uma reta, o outro é uma parábola e o outro é uma curva crescente.

b) O que ocorre quando $x = 2$ em cada uma das funções? Por que isso ocorre? Observando os gráficos, vemos que eles se intersectam no ponto (2, 4), ou seja, quando x assume valor igual a 2, o valor de y será 4 para qualquer uma das funções.

2 **Use uma calculadora gráfica e construa o gráfico da função exponencial f definida por $f(x) = 5^x$.**

a) Sem construir os gráficos das funções g e h, do tipo exponencial com as leis de formação indicadas a seguir, pense em como eles seriam. Respostas pessoais.

- $g(x) = 1 + 5^x$
- $h(x) = 5^x - 1$

b) Construa os gráficos das funções g e h do item anterior e confira suas hipóteses. É possível perceber que o gráfico de g é o gráfico de f transladado uma unidade para cima e que o gráfico de h é o gráfico de f transladado uma unidade para baixo.

3 **Com uma calculadora gráfica, construa novamente o gráfico da função exponencial f definida por $f(x) = 5^x$.**

a) Explique como seria o gráfico da função do tipo exponencial definida por $i(x) = 1 - 5^x$. Resposta pessoal.

b) Agora, construa o gráfico da função i e confira suas hipóteses. Consulte a resposta no Manual do Professor.

4 **Use uma calculadora gráfica e construa novamente o gráfico da função exponencial f definida por $f(x) = 5^x$.**

a) Sem construir os gráficos das funções do tipo exponencial com as leis de formação indicadas a seguir, pense em como eles seriam. Respostas pessoais.

- $q(x) = 2 \cdot 5^x$
- $r(x) = 3 \cdot 5^x$

b) Agora, construa os gráficos das funções q e r do item anterior e confira suas hipóteses. Podemos observar que os gráficos de f, q e r intersectam o eixo y respectivamente em (0, 1), (0, 2) e (0, 3). Isso porque, ao multiplicar a função por um número positivo, a parte do gráfico que fica à direita do eixo y se aproxima dele.

5 **Quais são as diferenças entre a função afim definida por $m(x) = 2 + 5x$ e a função exponencial definida por $n(x) = 2 + 5^x$?**

A função m é uma função de 1º grau, enquanto a função n é uma função exponencial. O gráfico de m é uma reta, enquanto o de n é uma curva exponencial. É possível que os estudantes ainda façam confusão no uso da escrita algébrica (por exemplo, $2 + 5x$ com $2 + 5^x$).

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Você se lembra do problema que estudamos no início deste capítulo? Ele tratava da rapidez com que um vírus se propaga. Naquela situação, para determinar em qual semana metade da população da cidade estaria contaminada, nos deparamos com a seguinte equação:

$$500 = 3^x$$

Nessa equação, a incógnita aparece no expoente. Agora, considere outros exemplos de equações em que a incógnita aparece no expoente.

- $2^x = 128$
- $2^x - 2^{x-1} + 2^{x+2} = 9$
- $2^x \cdot 3 = 3^x \cdot 2$
- $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

Essas equações são chamadas de **equações exponenciais**.

Vamos estudar, inicialmente, as equações exponenciais que podem ser resolvidas reduzindo-se o 1º e o 2º membros a potências de mesma base. No próximo capítulo, estudaremos as equações que não podem ser resolvidas por esse processo.

Para resolver as equações exponenciais, vamos utilizar as propriedades das potências que já conhecemos.

Exemplo

Vamos resolver a equação exponencial $2^x = 128$.

Primeiro, é preciso escrever o número 128 na base 2, ou seja, $128 = 2^7$.

Assim, a única solução da equação $2^x = 2^7$ é $x = 7$, pois, de acordo com as propriedades das potências, se $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $a^m = a^n$ apenas se $m = n$.

Selecione uma ou duas atividades desta seção para analisar com os estudantes. É importante que eles vejam você como um modelo de leitura das atividades e tenham oportunidade de discutir suas dúvidas, antes de avançarem para a seção *Problemas e exercícios propostos*.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R3 **Resolva a equação $5^{x^2} \cdot 5^{-4x} = 3125$.**

Resolução

Podemos escrever $3125 = 5^5$.

Assim, temos:

$$5^{x^2} \cdot 5^{-4x} = 5^5$$
$$5^{x^2 - 4x} = 5^5$$

Pela propriedade das potências, temos:

$$x^2 - 4x = 5$$

Resolvendo essa equação, encontramos:

$$x^2 - 4x = 5$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$x = -1 \text{ ou } x = 5$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{-1, 5\}$

R4 **Resolva a equação $2^x \cdot 27 = 3^x \cdot 8$.**

Resolução

Isolando no 1º membro as potências com a incógnita x, obtemos:

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{8}{27}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$
$$x = 3$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{3\}$.

R5 **Resolva a equação $2^{x+1} + 2^x - 2^{x-2} = 88$.**

Resolução

Aplicando as propriedades das potências, podemos escrever:

- $2^{x+1} = 2^x \cdot 2$
- $2^{x-2} = 2^x \cdot 2^{-2}$

Então:

$$2^{x+1} + 2^x - 2^{x-2} = 88$$
$$2^x \cdot 2 + 2^x - 2^x \cdot 2^{-2} = 88$$

No 1º membro, 2^x é fator comum a todos os termos. Fatorando o 1º membro, obtemos:

$$2^x \cdot (2 + 1 - 2^{-2}) = 88$$
$$2^x \cdot \left(2 + 1 - \frac{1}{2^2}\right) = 88$$
$$2^x \cdot \left(3 - \frac{1}{4}\right) = 88$$
$$2^x \cdot \frac{11}{4} = 88$$
$$2^x = 32$$
$$2^x = 2^5$$
$$x = 5$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{5\}$.

R6 Resolva a equação $5^{2x} - 23 \cdot 5^x - 50 = 0$.

Resolução

Podemos escrever $5^{2x} = (5^x)^2$.

Assim, a equação inicial pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(5^x)^2 - 23 \cdot 5^x - 50 = 0$$

Note que aparecem $(5^x)^2$ e 5^x. Então, temos uma equação do 2º grau em 5^x.

Fazendo $5^x = y$, para $y > 0$, podemos resolver a equação:

$$y^2 - 23y - 50 = 0$$

$$y = -2 \text{ ou } y = 25$$

Note que $y = -2$ não serve, pois não satisfaz a condição $y > 0$.

Substituindo $y = 25$ em $5^x = y$, obtemos:

$$5^x = 25$$

$$5^x = 5^2$$

$$x = 2$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{2\}$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

22 Resolva as equações exponenciais a seguir.

a) $5^{x^2} \cdot 5^4 = 5^{5x}$ $S = \{1, 4\}$

b) $7^{2x-1} = 7^x \cdot 7^3$ $S = \{4\}$

c) $9^{2x} = 27^{x-4}$ $S = \{-12\}$

d) $2^x + 2^{x+3} - 2^{x-1} = 34$ $S = \{2\}$

e) $5^{x-1} - 5^x + 5^{x+1} = 2\,625$ $S = \{4\}$

f) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$ $S = \{3\}$

g) $2^{x+2} + 5^x = 3 \cdot 5^x - 2^x$ $S = \{1\}$

h) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$ $S = \{1, 2\}$

i) $8 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 1 = 0$ $S = \{-3\}$

j) $5 \cdot 25^x - 6 \cdot 5^x + 1 = 0$ $S = \{-1, 0\}$

23 Registre no caderno a alternativa correta.

(ESPM-SP) O valor de y no sistema $\begin{cases} (0{,}2)^{5x+y} = 5 \\ (0{,}5)^{2x-y} = 2 \end{cases}$ é igual a: Alternativa **e**.

a) $-\frac{5}{2}$
b) $\frac{2}{7}$
c) $-\frac{2}{5}$
d) $\frac{3}{5}$
e) $\frac{3}{7}$

24 Faça o que se pede a seguir.

a) Determine o expoente de base 7 para que a potência formada seja igual a 343. 3

b) A potência de base 5 elevada a certo expoente resulta em 625. Qual é o expoente? 4

25 Escreva a alternativa correta no caderno.

(EsPCEx-SP) Ao resolver a equação $\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{5} = \sqrt[3]{5} \cdot 0{,}04^{x-2}$, encontra-se um valor de x compreendido entre Alternativa **e**.

a) 1 e 2.
b) 2 e 3.
c) 3 e 4.
d) 4 e 5.
e) 5 e 6.

26 A adição de três potências de base 3, cujos expoentes são números pares consecutivos, resulta em 819. Calcule os três expoentes pares consecutivos. 2, 4 e 6.

27 Escreva a alternativa correta no caderno.

(IME-RJ) Seja a equação $\frac{144^x + 324^x}{64^x + 729^x} = \frac{6}{7}$.

A soma dos módulos das soluções reais desta equação é Alternativa **a**.

a) 1
b) 2
c) 3
d) 8
e) 9

28 Escreva a alternativa correta no caderno.

(Uece) Uma cultura de bactérias cresce obedecendo à função $f(t) = c3^{2t}$, onde c é uma constante positiva e t é o tempo medido em horas. O valor de t para que a quantidade inicial de bactérias fique multiplicada por nove é Alternativa **b**.

a) $\frac{1}{2}$ hora.
b) 1 hora.
c) 1 hora e meia.
d) 2 horas.

29 Escreva a alternativa correta no caderno.

(Famema-SP) Se quadruplicarmos 2^x e dividirmos o resultado por 4^x, o resultado será igual a $\frac{1}{64}$. Nessas condições, o valor de x é Alternativa **e**.

a) 4.
b) −6.
c) −8.
d) 6.
e) 8.

30 Escreva a alternativa correta no caderno.

(Provão Paulista) Para quais valores de x e y vale que $18^x \cdot 24^y = 6^{10}$? Alternativa **a**.

a) $x = 4, y = 2$.
b) $x = 2, y = 4$.
c) $x = 3, y = 6$.
d) $x = 2, y = 3$.
e) $x = 4, y = 3$.

Dê especial atenção às atividades **31** e **32**, pois elas mobilizam a habilidade de avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos e contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT304**.

31 **(UFMG) Um grupo de animais de certa espécie está sendo estudado por veterinários. A cada seis meses, esses animais são submetidos a procedimentos de morfometria e, para tanto, são sedados com certa droga.**

A quantidade mínima da droga que deve permanecer na corrente sanguínea de cada um desses animais, para mantê-los sedados, é de 20 mg por quilograma de peso corporal. Além disso, a meia-vida da droga usada é de 1 hora – isto é, a cada 60 minutos, a quantidade da droga presente na corrente sanguínea de um animal reduz-se à metade.

Sabe-se que a quantidade $q(t)$ da droga presente na corrente sanguínea de cada animal, t minutos após um dado instante inicial, é dada por:

$$q(t) = q_0 \cdot 2^{-kt}$$

em que:

- q_0 é a quantidade de droga presente na corrente sanguínea de cada animal no instante inicial; e
- k é uma constante característica da droga e da espécie.

Considere que um dos animais em estudo, que pesa 10 quilogramas, recebe uma dose inicial de 300 mg da droga e que, após 30 minutos, deve receber uma segunda dose.

Suponha que, antes dessa dose inicial, não havia qualquer quantidade da droga no organismo do mesmo animal.

Com base nessas informações:

a) calcule a quantidade da droga presente no organismo desse animal imediatamente antes de se aplicar a segunda dose; $150\sqrt{2}$ mg

b) calcule a quantidade mínima da droga que esse animal deve receber, como segunda dose, a fim de ele permanecer sedado por, pelo menos, mais 30 minutos. $50\sqrt{2}$ mg

32 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFMS) A depreciação de um carro ocorre segundo a expressão $y = V \cdot a^x$, em que y é o valor do bem e x é o tempo que passou em anos, com V e a constantes. Se hoje o valor do carro é R$ 200 000,00, daqui a quatro anos o valor será a metade. Logo, o seu valor daqui a oito anos será: Alternativa **c**.

a) R$ 100 000,00.
b) R$ 75 000,00.
c) R$ 50 000,00.
d) R$ 25 000,00.
e) R$ 12 500,00.

INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

As inequações nas quais a incógnita aparece no expoente são chamadas **inequações exponenciais**. Verifique alguns exemplos.

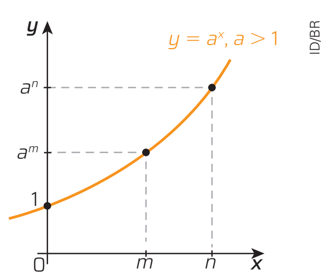
- $2^{x+1} + 2^x - 2^{x-1} \leqslant 20$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^2$
- $25^x - 16 \cdot 5^x - 100 < 0$

Para resolver essas inequações, é importante observar o comportamento das funções exponenciais em dois casos: quando a função é crescente e quando a função é decrescente.

Considere uma função exponencial f definida por:

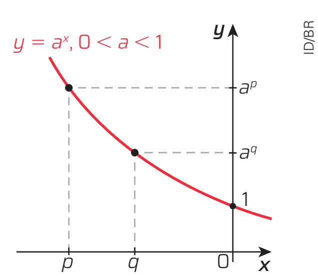
- $f(x) = a^x$ é crescente em $\mathbb{R}$, se $a > 1$.
- $f(x) = a^x$ é decrescente em $\mathbb{R}$, se $0 < a < 1$.

Se julgar oportuno, explique aos estudantes o significado do símbolo $\Leftrightarrow$. Lemos a expressão "$A \Leftrightarrow B$" como "A é equivalente a B" ou "A se, e somente se, B". Nesse caso, A é verdadeiro se B for verdadeiro, e A é falso se B for falso.



$$a^m < a^n \Leftrightarrow m < n$$

mesmo sentido



$$a^q < a^p \Leftrightarrow q > p$$

sentidos contrários

As inequações exponenciais que serão apresentadas a seguir podem ser resolvidas reduzindo-se o 1º e o 2º membros às potências de mesma base.

Exemplo

Vamos resolver a inequação $2^x < 32$.

Primeiro, devemos escrever o número 32 na base 2:

$$2^x < 2^5$$

Como a base da potência é 2 e $2 > 1$, então a desigualdade entre os expoentes tem o mesmo sentido da desigualdade entre as potências. Logo:

$$2^x < 2^5 \Rightarrow x < 5$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R7 Resolva a inequação $2^{x+1} + 2^{x-1} > 40$.

Resolução

Aplicando a propriedade de potências de mesma base, temos:

$$2^x \cdot 2^1 + 2^x \cdot 2^{-1} > 40$$

Fatorando o 1º membro e resolvendo a inequação, obtemos:

$$2^x \cdot (2 + 2^{-1}) > 40 \Rightarrow 2^x \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) > 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot \frac{5}{2} > 40 \Rightarrow 2^x > 40 \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow 2^x > 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{2^x > 2^4 \Rightarrow x > 4}_{}$$

Como a base da potência é 2 e 2 > 1, então a desigualdade se mantém.

Portanto, o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

R8 Resolva a inequação $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 \leqslant 0$.

Resolução

Observando o primeiro termo, é possível perceber que temos uma inequação do 2º grau em 5^x.

Fazendo $5^x = y$, com $y > 0$, obtemos:

$$y^2 - 30y + 125 \leqslant 0$$

Resolvendo essa inequação do segundo grau, concluímos que:

$$5 \leqslant y \leqslant 25$$

Substituindo $y = 5^x$, obtemos:

$$5 \leqslant 5^x \leqslant 5^2 \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 2$$

Logo, o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

33 Resolva as inequações exponenciais a seguir.

a) $3^{4x-2} < 3^{2x+8}$

b) $5^{3x-1} > 5^{x+7}$

c) $10^{x^2-3x} \leqslant 0{,}01$

d) $7^{x^2} \cdot 7 \geqslant 7^{4x} \cdot 7^{-2}$

e) $(0{,}1)^{5x-1} < (0{,}1)^{2x+11}$

f) $(0{,}2)^{4x+3} > (0{,}2)^{-x+9}$

g) $(0{,}6)^{x^2} \leqslant (0,\ 6)^4$

h) $(0{,}9)^{x^2} \geqslant (0{,}1)^{x+2}$

34 Resolva cada inequação a seguir.

a) $2^{x+1} + 2^x \geqslant 12$ $S = [2, +\infty[$

b) $3^{x+1} - 3^x + 3^{x-1} \leqslant 21$ $S =]-\infty, 2]$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + 1$ $S =]-\infty, 0]$

35 Determine o domínio de cada função do tipo exponencial a seguir.

a) $f(x) = \sqrt{(0,2)^x - 0{,}008}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

b) $f(x) = \sqrt[4]{(0,5)^x - 0{,}25}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{6^x - 6}$ $D(f) = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{5^x - 125}$ $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$

36 Escreva a alternativa correta no caderno.

(Uece) Se o número real k é a solução da equação $9^{\sqrt{x}} - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0$, então, o número k cumpre a seguinte condição: Alternativa **d**.

a) $1{,}5 < k < 3{,}5$.

b) $7{,}5 < k < 9{,}5$.

c) $5{,}5 < k < 7{,}5$.

d) $3{,}5 < k < 5{,}5$.

33. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 3\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{6}{5}\right\}$
g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$

37 Indique no caderno a alternativa correta.

(Mackenzie-SP) Os valores de x real que satisfazem a inequação $(0{,}5)^{x^2} \geqslant (0{,}25)^{2x}$ são Alternativa **a**.

a) $0 \leqslant x \leqslant 4$

b) $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 4$

c) $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 2$

d) $0 \leqslant x \leqslant 6$

e) $-2 \leqslant x \leqslant 0$

38 Registre a alternativa correta no caderno.

(EsPCEx-SP) O número de soluções inteiras que satisfaz a inequação $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$ é igual a

a) 4.

b) 3.

c) 2.

d) 1.

e) 0.

Alternativa **d**.

39 Descubra o erro cometido em cada resolução e corrija-os. Consulte as respostas no Manual do Professor.

a)

$$4^x > \frac{1}{128}$$

$$(2^2)^x > \frac{1}{2^6}$$

$$2^{2x} > 2^{-6}$$

$$2x > -6$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{3}\right\}$$

b)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} \leqslant \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$3x + 1 \leqslant 2$$

$$3x \leqslant 1$$

$$x \leqslant -2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2\}$$

40 Resolva $(4^x)^{x-1} \geqslant 16$, de modo que sua resolução tenha um erro. Troque-a com um colega, para que um descubra o erro inserido pelo outro. Resposta pessoal.

CÁLCULO RÁPIDO

Você calculou muitas potências e usou as propriedades relacionadas às operações. No próximo capítulo, você continuará utilizando esses cálculos, por isso é importante saber alguns deles de memória.

1 Escreva no caderno o valor de cada potência.

a) 10^3 1 000
b) 10^4 10 000
c) 10^{-2} 0,01
d) 10^{-3} 0,001
e) 5^3 125
f) 5^4 625
g) 5^{-1} 0,2
h) 5^{-2} 0,04
i) 5^{-3} 0,008

2 No caderno, escreva o valor de cada expoente.

a) $2^{\blacksquare} = 8$ 3
b) $2^{\blacksquare} = 64$ 6
c) $2^{\blacksquare} = \frac{1}{16}$ -4
d) $2^{\blacksquare} = 0{,}25$ -2
e) $3^{\blacksquare} = 27$ 3
f) $3^{\blacksquare} = 81$ 4

3 Escreva no caderno o valor de cada base.

a) $\blacksquare^2 = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$
b) $\blacksquare^3 = 64$ 4
c) $\blacksquare^{-1} = 4$ $\frac{1}{4}$
d) $\blacksquare^{-1} = 0{,}2$ 5
e) $\blacksquare^{-2} = 9$ $\frac{1}{3}$
f) $\blacksquare^{-2} = 0{,}25$ 2

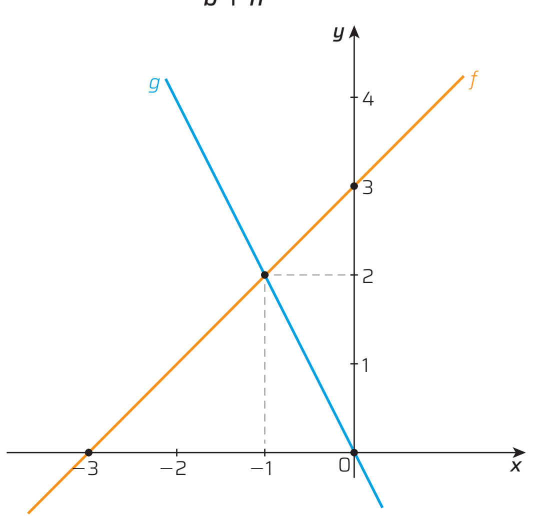
PARA RECORDAR

Ao final de cada capítulo deste livro, você vai encontrar uma lista de problemas, os quais têm como objetivo relembrar o que foi estudado anteriormente. É importante retomar alguns assuntos para acompanhar sua aprendizagem e se preparar para os próximos capítulos.

1 Se $A = \frac{x - y}{x}$, $x = \frac{2}{5}$ e $y = \frac{1}{2}$, determine o valor de A. $-0{,}25$

2 Sejam as funções f e g definidas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = mx + n$, representadas pelo gráfico a seguir.

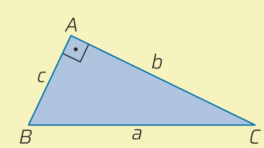
Qual é o valor de $\frac{a - m}{b + n}$? 1



3 De todos os triângulos com lados de medidas inteiras e com a medida do lado maior igual a 6 cm, quantos triângulos são:

a) equiláteros? Um.
b) escalenos? Quatro.
c) isósceles? Oito.

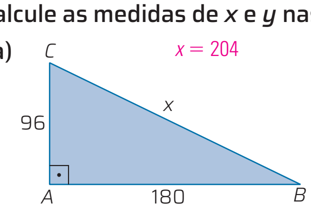
Para resolver a próxima atividade, lembre-se de que, em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Essa relação é conhecida como teorema de Pitágoras.



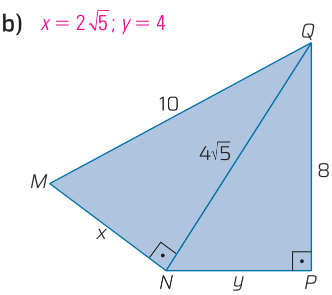
$a^2 = b^2 + c^2$

4 Todo triângulo que tem um ângulo reto é chamado de triângulo retângulo. Usando o teorema de Pitágoras, calcule as medidas de x e y nas figuras a seguir.

a) $x = 204$



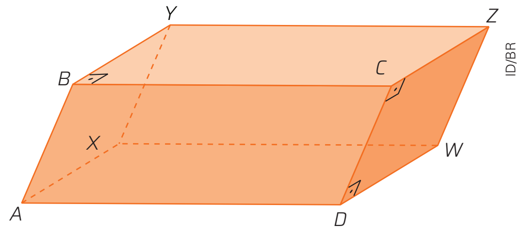
b) $x = 2\sqrt{5}$; $y = 4$



Ilustrações: ID/BR

5 **Você já sabe que retas coplanares são retas que estão contidas em um mesmo plano.** Consulte as respostas no Manual do Professor.

Analise a figura do paralelepípedo a seguir e faça o que se pede.



a) Indique um par de faces paralelas.

b) Dê quatro retas coplanares que contenham arestas da figura.

c) Indique um par de retas não coplanares.

d) Obtenha um par de retas paralelas.

e) Indique um par de arestas concorrentes.

f) De que tipo é o quadrilátero *ABCD*?

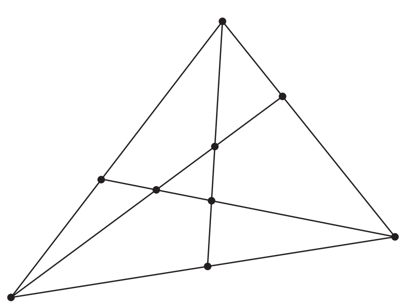
FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Você vai encontrar esta seção ao final de cada capítulo. Nela, os problemas são bem diferentes, pois não exigem o conhecimento matemático do capítulo e, muitas vezes, você conseguirá resolvê-los usando diferentes estratégias e formas de registrar a solução. Aqui estão dois problemas com enunciados simples e concisos, mas que vão exigir de você raciocínio lógico, organização e um registro cuidadoso para garantir que todas as respostas possíveis foram encontradas.

Reserve um tempo para resolver com os estudantes os problemas da seção *Foco no raciocínio lógico*. Esses problemas têm como objetivo a organização do pensamento e do registro, para que não seja desconsiderada nenhuma das respostas possíveis nem seja contada a mesma opção de resposta mais de uma vez. No painel de soluções, compartilhe as diferentes representações que os estudantes fizeram das soluções, para que possam ampliar o repertório de maneiras de organizar as possibilidades e de realizar contagem na resolução de problemas.

1 **Um caixa eletrônico trabalha com notas de 5, 10 e 50 reais. Um usuário deseja fazer um saque de R$ 100,00. De quantas maneiras diferentes o caixa poderá fazer esse pagamento?** 18 maneiras.

2 **(OBM) Quantos triângulos existem cujos lados estão sobre alguns dos segmentos traçados na figura a seguir?** 17 triângulos.



OBM. Fac-símile: ID/BR

PALAVRAS-CHAVE

Os termos a seguir mostram as principais ideias abordadas neste capítulo.

- Potência
- Exponencial

Escreva o que você sabe sobre eles no caderno. Ao final, formule duas perguntas que envolvam funções exponenciais, para serem respondidas por um colega.

Esta é a primeira vez que a seção *Palavras-chave* aparece neste volume. Sua função é promover a avaliação em três aspectos:

1. Como avaliação formativa, possibilita acompanhar as aprendizagens dos estudantes pelas evidências trazidas em suas produções, para que, com base nesse acompanhamento, sejam planejadas eventuais retomadas coletivas ou direcionadas a determinados estudantes.
2. Como autoavaliação, permite que cada estudante se conscientize do que aprendeu e do que falta aprender.
3. Como novo momento de aprendizagem, incentiva os estudantes a reconhecer, durante a troca final de perguntas com os colegas, a importância de rever os conteúdos abordados neste capítulo e de refletir sobre eles.

MATEMÁTICA E PANDEMIA

Esta seção tem como objetivo ampliar a formação geral dos estudantes, desenvolvendo habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e incentivando-os a participar de um processo investigativo. Desse modo, são trabalhadas as competências específicas **1** e **3** da área de Matemática e suas Tecnologias.

A pandemia do coronavírus foi um grande desafio. Assim, antes de iniciar a leitura do texto com a turma, sugerimos uma conversa inicial para que os estudantes comentem o que sabem desse tema. Conhecer o repertório deles pode auxiliar na organização do trabalho com a seção.

Para ampliar os conhecimentos dos estudantes sobre coronavírus, convide um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, especificamente de Biologia, para participar das discussões. Desse modo, é possível explorar a competência específica **3** dessa área.

A pandemia do coronavírus

Como é passar por uma emergência mundial de saúde? Apesar de jovem, você certamente se lembra de algo relacionado à pandemia de covid-19. Relembrar o que passou e entender as consequências desse evento ajuda a lidar com possíveis traumas e a buscar, coletivamente, maneiras de evitar um novo problema como esse.

O texto a seguir é do final de março de 2020 e apresenta algumas previsões de como o vírus causador da covid-19 poderia avançar sobre a população brasileira usando, entre outros aspectos, a Matemática como ferramenta de análise. A pandemia havia sido decretada poucas semanas antes pela Organização Mundial da Saúde (OMS), e ainda não havia vacinas contra a doença.

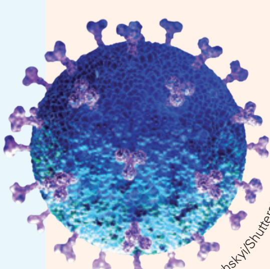
Crescimento exponencial e curva epidêmica: entenda os principais conceitos matemáticos que explicam a pandemia de coronavírus

Veja como a matemática ajuda a entender como se comportam as novas transmissões [do vírus] ao longo do tempo.

Enquanto cientistas correm contra o tempo para desenvolver tratamentos e vacina contra o coronavírus (SARS-CoV-2), matemáticos simulam cenários com impactos da pandemia.

Uma das projeções mais recentes a ganhar destaque foi um estudo liderado pelo Imperial College de Londres. Ele estimou que o Brasil pode ter mais de 1 milhão de mortes por Covid-19 e cerca de 187 milhões de infectados em 2020 se não houver nenhuma estratégia de isolamento social e de enfrentamento do surto. Mas como são feitos esses cálculos?

Representação sem proporção de tamanho. Representação digital do coronavírus SARS-CoV-2. Cores-fantasia.



Andrii Vodolazhskyi/Shutterstock.com/ID/BR

Segundo o professor de matemática e autor de material didático Ricardo Suzuki, é possível fazer essas estimativas porque epidemias seguem um padrão matemático chamado função exponencial, usada para representar fenômenos que se multiplicam muito rapidamente ao longo do tempo.

"Na função exponencial, você vai multiplicando o número por ele mesmo. Nessa função, temos o crescimento exponencial, em que o valor inicial de um evento vai sendo multiplicado a cada período de tempo", explica Suzuki.

O professor dá como exemplo um cenário de uma epidemia em que o número de novos casos dobra a cada 3 dias.

"No primeiro dia você tem 1 caso; no terceiro dia terá 2 casos. Levou três dias para dobrar o valor inicial. No sexto dia serão 4 casos, no nono dia serão 16, e assim por diante."

Ele compara: "No começo da função exponencial, o crescimento parece pequeno, se assemelha com uma função linear".

Diferentemente da exponencial, na função linear o número anterior é somado – e não multiplicado. Por isso, o crescimento linear é representado no gráfico por uma reta; já o crescimento exponencial é uma curva acentuada. "Ao longo do tempo, o crescimento exponencial atinge valores exorbitantes", diz Suzuki [...].

No caso de um surto como o do coronavírus, o cenário é assustador, já que o número de infectados do dia anterior é sempre muito menor que o atual.

O aumento exponencial de novos casos em uma epidemia é apenas uma fase de um ciclo de três etapas. Essas etapas formam o conceito matemático da curva epidêmica, que torna possível prever o ritmo do aumento de casos, o pico das transmissões e o decaimento delas [...].

[...]

Entenda o crescimento exponencial nas pandemias

O físico Silas Poloni, do Instituto de Física Teórica da Universidade Estadual Paulista (Unesp), explica que dizer que uma doença cresce exponencialmente significa na prática que "cada infectado é capaz de infectar mais de uma pessoa ao mesmo tempo".

Por isso, segundo o físico Vitor Sudbrack, também da Unesp, quanto mais doentes por Covid-19 existirem, mais pessoas irão adoecer pelo vírus, já que o "crescimento exponencial é aquele em que, quanto mais se tem [infectados], mais se cresce [o número de contaminados]".

[...]

A Organização Mundial da Saúde (OMS) já alertou para o aumento da velocidade do crescimento:

- os primeiros 100 mil casos de Covid-19 foram registrados em 67 dias
- mas foram necessários apenas mais 11 dias para dobrar e atingir 200 mil casos
- outros quatro dias para chegar a 300 mil casos
- e somente mais dois dias para somar 100 mil novos casos – superando a marca de meio milhão de infectados

É importante ajudar os estudantes a refletir sobre esse momento sensível vivenciado por todos e buscar maneiras de trazê-lo para a sala de aula como algo ainda atual, pois, além de ter ocorrido há pouco tempo, seu impacto foi gigantesco e em escala mundial. O trabalho permite ponderar a possibilidade de surgimento de outros vírus que poderiam desencadear novas pandemias, além de possibilitar discussões sobre como lidar com tais eventos com base no que aprendemos com o que vivenciamos no passado.

Entenda as etapas da curva epidêmica

"As pessoas acham que matemática é trabalhar com números, mas na verdade é trabalhar com padrões", afirma Sudbrack, da Unesp. "Conseguimos calcular epidemias porque elas, em todos os lugares, seguem um padrão matemático semelhante, chamado de curva epidêmica."

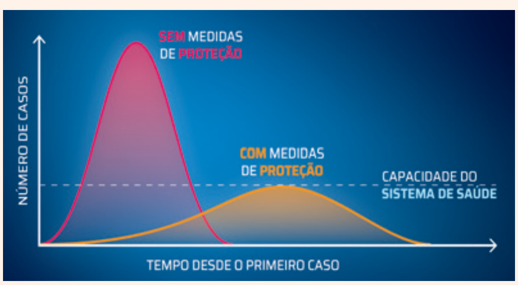
Antes de entender o que é essa curva, é preciso entender o ciclo que uma epidemia segue, ou seja, a evolução dela ao longo do tempo.

O ciclo epidêmico é formado por três fases, que juntas formam uma "onda da epidemia":

1. Crescimento exponencial – representado pelo crescimento vertiginoso do número de novos casos de infecção
2. Saturação – ocorre quando a epidemia alcança um pico de casos
3. Decaimento exponencial – estágio em que a quantidade de pessoas que se recuperam da doença é maior que a de novas infectadas

O padrão da curva epidêmica é justamente a onda no gráfico [...]. Ela representa o número de novos casos ao longo do tempo.

- Quanto maior o número de novos casos em um menor intervalo de tempo, mais acentuada a curva.
- Quanto menor o número de novos casos em um maior intervalo de tempo, menos acentuada a curva.



ID/BR

Gráfico mostra a curva da epidemia de coronavírus — Foto: Reprodução/Globo

Ambas as curvas – tanto a mais e quanto a menos acentuada – alcançam um crescimento exponencial.

"Mas[,] quando conseguimos aumentar o tempo de transmissão de uma pessoa a outra, demoramos mais a alcançar o pico da curva. Ou seja, o crescimento da doença vai acontecer de maneira mais lenta", explica Poloni.

A lógica do crescimento exponencial no caso do coronavírus, contudo, é mais complexa porque, de acordo com Sudbrack, "a transmissão do vírus no mundo conta não só com uma dinâmica de espalhamento por contágio [de uma pessoa a outras pessoas], mas também por uma dinâmica de espalhamento de epicentros [vários países se tornam centro da doença]".

Por isso, o resultado final da pandemia de coronavírus é uma curva que cresce mais rápido do que as curvas de cada país.

Isolamento social "desacelera" pandemia

O físico Silas Poloni explica que, matematicamente falando, o objetivo das autoridades de saúde neste momento não é o de zerar a transmissão, mas o de diminuir a velocidade com que isso ocorre. Ou, como se tem chamado, de "achatar a curva epidêmica".

[...]

"O objetivo é que o crescimento de novos casos da doença não atinja de uma só vez um número de infectados que o sistema de saúde não suporte atender."

[...].

1. Na função, k representa o total de infectados no primeiro dia; a representa o comportamento do vírus (fator de infecção), por exemplo, dobrar, triplicar; x representa os dias; e $f(x)$ representa a quantidade de pessoas infectadas no dia.

Decaimento exponencial

Assim como o crescimento de uma epidemia é exponencial, a diminuição dos novos casos também será, porque a lógica é a mesma: quanto menos pessoas se infectam por dia, menor o número de doentes.

[...]

Modelli, Laís; Pinheiro, Lara. Crescimento exponencial e curva epidêmica: entenda os principais conceitos matemáticos que explicam a pandemia de coronavírus. *G1*, [*s. l.*], 31 mar. 2020. Disponível em: https://g1.globo.com/bemestar/coronavirus/noticia/2020/03/31/crescimento-exponencial-e-curva-epidemica-entenda-os-principais-conceitos-matematicos-que-explicam-a-pandemia-de-coronavirus.ghtml. Acesso em: 20 jul. 2024.

O professor de Biologia poderá auxiliar os estudantes com informações de base científica de como se dá a disseminação de vírus e sobre como as vacinas são essenciais para esse controle, enriquecendo a discussão.

3. Se considerar oportuno, proponha aos estudantes que se organizem em pequenos grupos para pesquisar e estudar outras pandemias e relacioná-las com a que foi apresentada na seção.

Conectando ideias

1 Considere que o crescimento do número de pessoas infectadas pelo coronavírus seja uma função do tipo exponencial $f\colon \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = k \cdot a^x$, em que $a > 1$ ou $0 < a < 1$. O que k, a, x e $f(x)$ representam nessa lei de formação?

2 O trecho "No primeiro dia você tem 1 caso; no terceiro dia terá 2 casos. Levou três dias para dobrar o valor inicial. No sexto dia serão 4 casos, no nono dia serão 16, e assim por diante" apresenta alguns equívocos. Reúna-se com um colega para analisar a afirmação e encontrar esses erros. Depois, juntos, reescrevam o trecho, deixando-o correto.

3 A pandemia de covid-19 nos mostrou como é passar por uma emergência mundial de saúde. Esse acontecimento causou impactos na vida de todos e suas consequências podem afetar o futuro. Para prever isso, precisamos entender o passado e o presente.

2. O trecho corrigido ficaria: "No primeiro dia você tem 1 caso; no terceiro dia terá 2 casos. Levou três dias para dobrar o valor inicial. No sexto dia serão 4 casos, no nono dia serão 8, e assim por diante".

Quais foram nossos aprendizados após a pandemia da covid-19 e como lidamos com as consequências dela atualmente?

- Reúnam-se em grupos de quatro a cinco integrantes e pesquisem textos jornalísticos confiáveis que abordem a pandemia de covid-19, suas causas, seus desdobramentos e suas consequências.
- Anotem as observações, indiquem citações de textos entre aspas e registrem todas as fontes consultadas.
- Preparem uma apresentação oral da pesquisa. Todos do grupo devem ter a oportunidade de expor suas ideias e falar sobre as informações em que se basearam para fundamentá-las.

Você persistiu tentando, mesmo quando a tarefa ficou mais complicada ou quando sua estratégia de ação fracassou? As respostas dos estudantes ao último item apresentam evidências da competência socioemocional persistência.

O trabalho com o tema sismologia, que pode ser explorado com Matemática, Física e Geografia, possibilita aos estudantes desenvolver as competências específicas **1**, **2** e **3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e a competência específica **1** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, uma vez que essa temática favorece a aplicação de conceitos científicos na análise de um fenômeno natural e, ao mesmo tempo, permite a reflexão sobre os impactos sociais desses fenômenos.

LOGARITMO E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

NESTE CAPÍTULO

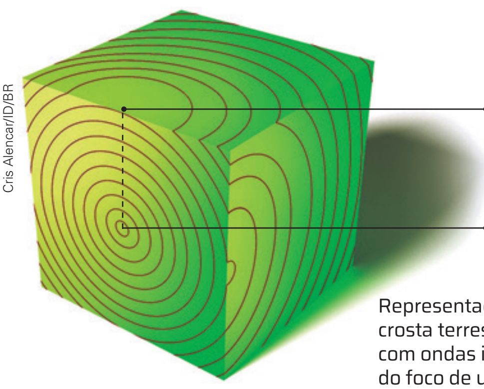
- Logaritmos
- Propriedades dos logaritmos
- Propriedades operatórias
- Logaritmos decimais
- Mudança de base
- Função logarítmica

Sismologia é a ciência que estuda as vibrações (ondas sísmicas) na Terra. Essas vibrações podem ser originadas por:

- processos naturais (como os movimentos de placas tectônicas ou atividades vulcânicas);
- ações humanas (como explosões em áreas de mineração ou perfurações de poços de petróleo).

As ocorrências mais comuns são os sismos naturais, que podem provocar abalos em larga escala, dependendo de sua intensidade.

O local de onde parte a onda sísmica fica no interior da crosta terrestre e é chamado de foco. O ponto na superfície terrestre localizado exatamente acima do foco é chamado de epicentro.



Cris Alencar/ID/BR

Representação de parte da crosta terrestre e de seu interior com ondas irradiadas a partir do foco de um abalo sísmico.

Quando, por exemplo, as vibrações geradas por um foco sísmico se originam do movimento de placas tectônicas, as quais oscilam em torno de suas posições de repouso, o atrito entre as placas forma as ondas sísmicas que deformam o terreno, transportando uma imensa quantidade de energia.

Representação sem proporção de tamanho e cores-fantasia.

Cris Alencar/ID/BR

Representação dos tipos de movimento das placas tectônicas, que podem ser divergente, convergente e transformante, como nas imagens da esquerda para a direita.

A onda sísmica é medida por aparelhos extremamente sensíveis, chamados de sismógrafos. Em 1935, o físico estadunidense Charles F. Richter (1900-1985) e o sismólogo germano-estadunidense Beno Gutenberg (1889-1960) desenvolveram essa tecnologia para determinar com precisão o epicentro de um tremor e também sua magnitude na escala Richter.

Você sabe qual é a relação da escala Richter com o tema deste capítulo? No decorrer deste estudo, você vai descobrir mais sobre esse assunto. Em continuidade ao capítulo anterior, neste capítulo você vai estudar a função logarítmica, que é definida a partir da função exponencial. Mas, antes de tratar da função logarítmica, vamos falar sobre a origem dos logaritmos, criados para resolver problemas de cálculo que podem parecer inacreditáveis nos dias de hoje.

No final do capítulo, na seção *Matemática e sismologia,* retomamos esse tema e sua relação com os logaritmos.

Optamos pela abordagem histórica dos logaritmos para assegurar que os estudantes tenham mais compreensão desse conceito, uma vez que, para os jovens, a discussão sobre ele está restrita quase exclusivamente às aulas de Matemática.

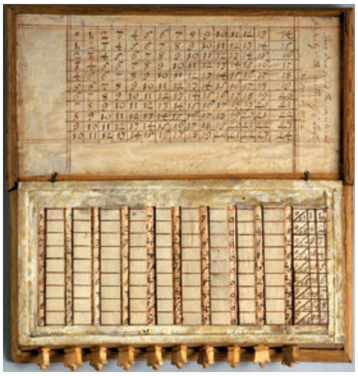
Antes de iniciar a leitura do texto deste tópico, informe aos estudantes que eles vão ler a história de uma cultura que enfrentou a necessidade de cálculos sem conhecer a linguagem matemática de que dispomos hoje. Este tópico permite que os estudantes utilizem conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade e, por isso, auxilia o desenvolvimento da competência geral **1**.

UM POUCO DE UMA GRANDE HISTÓRIA

Os cálculos que aprendemos nos primeiros anos escolares não eram do domínio de todos até pouco tempo atrás. No século XVII, na Europa, as operações de divisão e multiplicação eram ensinadas somente nas universidades, com técnicas muito diferentes das que usamos atualmente.

Com a expansão do comércio e a busca de novas terras e mercados, fatores que contribuíram para o início do período das Grandes Navegações, era preciso desenvolver cálculos mais precisos e rápidos.

O trabalho de John Napier (1550-1617), barão escocês, teólogo e matemático, e Jost Bürgi (1552-1632), matemático suíço e fabricante de instrumentos astronômicos, possibilitou que as longas operações de dividir e de multiplicar, que envolviam números grandes e frações decimais muito pequenas, se tornassem mais simples.


SSPL/Getty Images

O instrumento para cálculo inventado no século XVII por John Napier e conhecido como **ossos de Napier** consiste de tabelas de multiplicação gravadas em bastões de madeira, usados para facilitar as operações aritméticas.

Acredita-se que a publicação do livro *Arithmetica integra*, do matemático alemão Michael Stifel (1487-1567), em 1544, foi o que inspirou o trabalho de Napier e Bürgi. Em seu livro, Stifel comparou as seguintes sequências numéricas:

1ª linha →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2ª linha →	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	...

Com base nessas sequências, para calcular $16 \cdot 64$, bastava adicionar os números correspondentes a 16 e a 64 da primeira linha ($4 + 6 = 10$). O resultado da multiplicação era o número correspondente a 10 da segunda linha, ou seja, 1 024. Assim, $16 \cdot 64 = 1\,024$.

Multiplicar números da segunda linha resumia-se a adicionar números da primeira linha. Simples, não?

O mesmo valia para a divisão. Para calcular $512 : 32$, bastava subtrair os números correspondentes a 512 e a 32 da primeira linha. Como $9 - 5 = 4$, o resultado da divisão era o número que correspondia a 4 da segunda linha, isto é, 16. Daí, $512 : 32 = 16$.

Note que, se ampliarmos essas duas sequências, apoiando-nos na adição para as multiplicações e na subtração para as divisões, poderemos fazer muito rapidamente cálculos que envolvem números grandes.

Observe novamente as duas sequências e tente descobrir por que essa maneira de realizar os cálculos funciona.

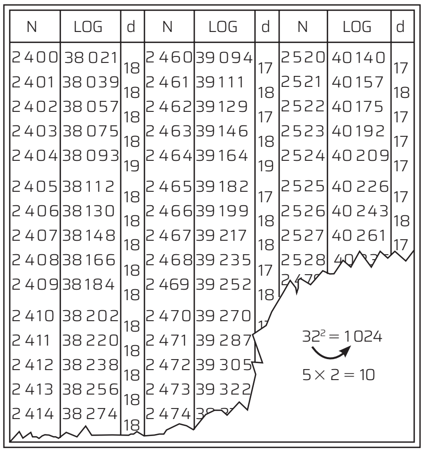
Hoje, com o conhecimento que temos sobre potências, podemos encontrar uma explicação para a relação entre as sequências:

$$2^4 \cdot 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10} \quad \text{e} \quad 2^9 : 2^5 = 2^{9-5} = 2^4$$

Contudo, essa linguagem não existia naquela época. Ela é creditada a René Descartes (1596-1650), filósofo francês que a desenvolveu por volta de 1637, ou seja, depois dos trabalhos de Stifel, Napier e Bürgi, o que é mais um motivo para valorizarmos as descobertas desses matemáticos.

Mas qual foi a grande ideia que Napier e Bürgi tiveram a partir das sequências de Stifel? Eles perceberam que as duas sequências facilitavam os cálculos, desde que os números a serem multiplicados ou divididos estivessem na segunda linha. Porém, o que fazer quando os números não estavam na lista?

Eles notaram que, se trocassem as potências de base 2 por potências de um número muito perto de 1, os valores da segunda linha estariam bem próximos. Com isso, poderiam construir uma tabela na qual fosse possível encontrar a maioria dos números que interessavam aos cálculos.



Ilustrações: ID/BR

N	LOG	d	N	LOG	d	N	LOG	d
2 400	38 021	18	2 460	39 094	17	2520	40 140	17
2 401	38 039	18	2 461	39 111	18	2521	40 157	18
2 402	38 057	18	2 462	39 129	17	2522	40 175	17
2 403	38 075	18	2 463	39 146	18	2523	40 192	17
2 404	38 093	19	2 464	39 164	19	2524	40 209	17
2 405	38 112	18	2 465	39 182	17	2525	40 226	17
2 406	38 130	18	2 466	39 199	18	2526	40 243	18
2 407	38 148	18	2 467	39 217	18	2527	40 261	17
2 408	38 166	18	2 468	39 235	17	2528		
2 409	38 184	18	2 469	39 252	18			
2 410	38 202	18	2 470	39 270				
2 411	38 220	18	2 471	39 287				
2 412	38 238	18	2 472	39 305				
2 413	38 256	18	2 473	39 322				
2 414	38 274	18	2 474					

Fragmento de uma tábua de logaritmo.

Assim, nasceram as conhecidas **tábuas de logaritmos**. Napier usou como base de suas potências $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$ e Bürgi, $1 + 10^{-4} = 1{,}0001$.

A palavra **logaritmo** foi criada por Napier, formada pelas palavras gregas *lógos* e *arithmós*, que significam, respectivamente, "razão" e "número". Já Bürgi colocou no título de seu trabalho uma referência a progressões geométricas para descrever a segunda sequência de números.

Dessa maneira, para calcular o produto de dois números, bastava procurar nas tábuas seus logaritmos, adicioná-los e voltar a consultar a tábua para obter o resultado da multiplicação.

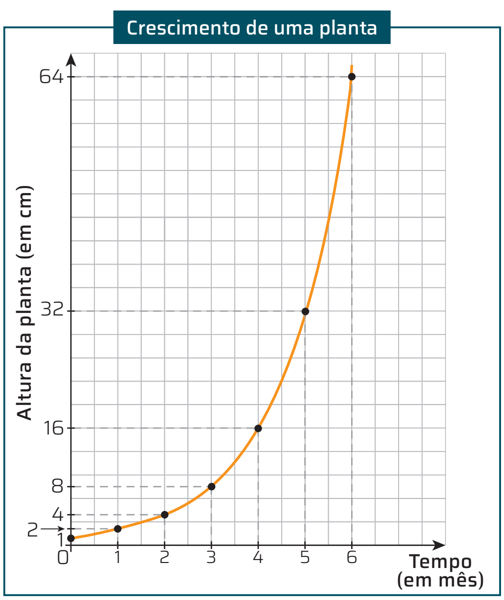
LOGARITMO

No capítulo anterior, representamos o gráfico até o par (5, 32), mas aqui, para facilitar a visualização do comportamento da curva, optamos por representar o gráfico até o par (6, 64).

Vamos voltar a situação **B** do tópico "Progressão geométrica e função exponencial" do capítulo 1, sobre uma planta que inicialmente media 1 cm e cuja altura dobrava a cada mês.

Com o que aprendemos, podemos saber a altura da planta em cada momento. Agora, propomos a seguinte questão: Após quanto tempo a planta terá 9 cm de altura?

Vamos retomar ao quadro e o gráfico da função exponencial correspondente.



Dados elaborados para fins didáticos.

ID/BR

Tempo (em mês)	Altura da planta (em cm)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64

Observe que, para responder à questão proposta, precisamos resolver a equação exponencial $2^x = 9$. Já resolvemos equações exponenciais anteriormente, por exemplo, $2^x = 8$. Em quase todas elas, usávamos recursos para resolução que transformavam cada membro da igualdade em potências de mesma base; depois, "igualávamos" os expoentes.

Mas, em $2^x = 9$, parece não ser possível fazer isso.

Observando o gráfico, vemos que x é um número que está entre 3 e 4, mas não sabemos exatamente seu valor.

Como vimos no tópico "Um pouco de uma grande história" deste capítulo, é possível consultar uma tábua de logaritmos para encontrar o valor de x. Poderíamos também utilizar uma calculadora científica.

O valor de x que resolve o problema proposto é o logaritmo de 9 na base 2, que indicamos assim:

$$x = \log_2 9 = 3{,}169... \Rightarrow x \simeq 3{,}169$$

Chegamos, então, à conclusão de que a planta terá 9 cm após 3,169 meses. Mas 3,169 meses equivalem a 3 meses mais 0,169 de um mês, isto é, aproximadamente 3 meses mais 0,169 de 30 dias ou, dizendo de outro modo, aproximadamente 3 meses e 5 dias. Isso significa que, pouco depois de 3 meses e 5 dias, a planta deve alcançar a altura de 9 cm.

No entanto, esse cálculo não é tão simples assim, pois, nas tábuas de logaritmos e nas calculadoras, não se usa a base 2, mas, em geral, a base 10. Por isso, precisamos estudar de modo mais aprofundado os logaritmos para, ao final deste capítulo, compreendermos como calcular o valor de $\log_2 9$ e muitos outros.

Observe que:

- $3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$

Dizemos que 4 é o logaritmo de 81 na base 3, ou seja, $\log_3 81 = 4$.

- $5^m = \dfrac{1}{125} \Rightarrow 5^m = 5^{-3} \Rightarrow m = -3$

Dizemos que -3 é o logaritmo de $\dfrac{1}{125}$ na base 5 e escrevemos $\log_5 \dfrac{1}{125} = -3$.

- $8^n = 2 \Rightarrow \left(2^3\right)^n = 2 \Rightarrow 2^{3n} = 2^1 \Rightarrow n = \dfrac{1}{3}$

Dizemos que $\dfrac{1}{3}$ é o logaritmo de 2 na base 8 ou $\log_8 2 = \dfrac{1}{3}$.

Sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, chamamos de **logaritmo de *b* na base *a*** o expoente da potência à qual se deve elevar a para se obter b.

Se $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$, então: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Na igualdade $\log_a b = x$:

- a é a base do logaritmo;
- b é o logaritmando;
- x é o logaritmo de b na base a.

Proponha aos estudantes as seguintes questões, que deverão ser discutidas logo após a leitura deste tópico:
1. O que é logaritmo de um número?
2. Crie o cálculo de um logaritmo diferente dos que apareceram no texto.
Socialize as conclusões dos estudantes e sistematize com eles o conceito de logaritmo e suas condições de existência.

Exemplos

- $\log_5 625 = 4$, pois $5^4 = 625$.
- $\log_{10} 0{,}01 = -2$, pois $10^{-2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$.
- $\log_3 1 = 0$, pois $3^0 = 1$.
- $\log_7 7 = 1$; $\log_7 7^2 = 2$; $\log_7 7^n = n$, para todo $n \in \mathbb{R}$.

As restrições impostas à base do logaritmo ($a > 0$ e $a \neq 1$) provêm das condições da função exponencial e garantem que o logaritmo **exista e seja único**.

A condição de existência para o logaritmando ($b > 0$) se deve ao fato de $a^x > 0$ para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

Propriedades dos logaritmos

Os cálculos com alguns logaritmos são simples e podem ser feitos mentalmente.

Exemplos

- $\log_2 x = 3 \Rightarrow 2^3 = x \Rightarrow x = 8$
- $\log_5 25 = x \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2$

No entanto, há outros cálculos que são menos imediatos. Para realizá-los, podemos utilizar algumas propriedades decorrentes da definição de logaritmo.

Sejam a, b e c números reais positivos, com $a \neq 1$, e x um número real:

1. $\boxed{\log_a 1 = 0}$, pois $a^0 = 1$.

2. $\boxed{\log_a a^x = x}$, pois, se $\log_a a^x = b$, então $a^b = a^x \Leftrightarrow b = x$. Logo, $\log_a a^x = x$.

3. $\boxed{a^{\log_a b} = b}$, pois $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. Como x representa $\log_a b$, temos: $a^x = a^{\log_a b} = b$.

4. $\boxed{\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c}$, pois, se $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, temos que $a^x = b$ e $a^y = c$. Então:

- $\log_a b = \log_a c \Rightarrow x = y \Rightarrow a^x = a^y \Rightarrow b = c$
- $b = c \Rightarrow a^x = a^y \Rightarrow x = y \Rightarrow \log_a b = \log_a c$

Acompanhe alguns exemplos.

- $\log_5 1 = 0$; $\log_2 1 = 0$; $\log_6 1 = 0$; $\log_\pi 1 = 0$
- $\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10$; $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = -3$
- $5^{\log_5 2} = 2$; $2^{\log_2 \pi} = \pi$
- $\log_3 (2x + 1) = \log_3 7 \Leftrightarrow 2x + 1 = 7 \Rightarrow x = 3$

  Condição de existência: $2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

  Como $x = 3$ satisfaz a condição de existência, pois $3 > -\frac{1}{2}$, então $S = \{3\}$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 De acordo com a definição de logaritmo, calcule.

a) $\log_8 16$

b) $\log_{25} 0{,}008$

c) $\log_{\sqrt[3]{7}} 49$

d) $\log_{2\sqrt{3}} 144$

Resolução

a) $\log_8 16 = x \Leftrightarrow 8^x = 16 \Rightarrow (2^3)^x = 2^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

Portanto, $\log_8 16 = \frac{4}{3}$.

b) $\log_{25} 0{,}008 = x \Leftrightarrow 25^x = 0{,}008 \Rightarrow$

$\Rightarrow (5^2)^x = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} \Rightarrow 5^{2x} = 5^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Assim, $\log_{25} 0{,}008 = -\frac{3}{2}$.

c) $\log_{\sqrt[3]{7}} 49 = x \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{7}\right)^x = 49 \Rightarrow 7^{\frac{x}{3}} = 7^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{3} = 2 \Rightarrow x = 6$

Então, $\log_{\sqrt[3]{7}} 49 = 6$.

d) Como $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$ e $144 = \left(\sqrt{12}\right)^4$, temos:

$\log_{2\sqrt{3}} 144 = \log_{\sqrt{12}} \left(\sqrt{12}\right)^4 = x \Rightarrow \left(\sqrt{12}\right)^x = \left(\sqrt{12}\right)^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4$

Outro modo:

$\log_{2\sqrt{3}} 144 = x \Rightarrow \left(2\sqrt{3}\right)^x = 144 \Rightarrow \left(\sqrt{12}\right)^x = 12^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12^{\frac{x}{2}} = 12^2 \Rightarrow x = 4$

Portanto, $\log_{2\sqrt{3}} 144 = 4$.

R2 Determine x para que os logaritmos a seguir estejam definidos.

a) $\log_2 (x - 3)$

b) $\log_{x-2} 3$

c) $\log_{x-2} (4 - x)$

Resolução

Sendo a a base do logaritmo e b o logaritmando, as condições para que $\log_a b$ esteja definido são $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

a) $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

Portanto, para $\log_2 (x - 3)$ estar definido, a condição é $x > 3$.

b) $\left.\begin{array}{l} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 2 \text{ e } x \neq 3$

Portanto, para $\log_{x-2} 3$ estar definido, as condições são $x > 2$ e $x \neq 3$.

c) $\left.\begin{array}{l} 4 - x > 0 \Rightarrow x < 4 \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 < x < 4 \text{ e } x \neq 3$

Portanto, para $\log_{x-2} (4 - x)$ estar definido, as condições são $2 < x < 4$ e $x \neq 3$.

R3 Determine x em cada item a seguir com base na definição de logaritmo.

a) $\log_3 (x - 2) = -1$

b) $\log_x (3x) = 2$

c) $\log_5 (2x + 1) = \log_5 (x + 3)$

Resolução

a) Condição de existência: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$x - 2 = 3^{-1} \Rightarrow x - 2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{7}{3}$ (satisfaz a condição $x > 2$).

Portanto, $x = \frac{7}{3}$.

b) Condições de existência:

$\left.\begin{array}{l} 3x > 0 \Rightarrow x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 0 \text{ e } x \neq 1$

Não escreva no livro.

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$x^2 = 3x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (não satisfaz as condições } x > 0 \text{ e } x \neq 1) \\ \text{ou} \\ x = 3 \text{ (satisfaz as condições } x > 0 \text{ e } x \neq 1) \end{cases}$$

Portanto, $x = 3$.

c) Condições de existência:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 1 > 0 \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\dfrac{1}{2} \\ x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3 \end{array}\right\} \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

Para calcular o valor de x tal que $\log_5 (2x + 1) = \log_5 (x + 3)$, vamos usar a propriedade 5.

$2x + 1 = x + 3$

$2x - x = 3 - 1$

$x = 2 \left(\text{satisfaz a condição } x > -\dfrac{1}{2}\right)$

Portanto, $x = 2$.

R4 Calcule.

a) $y = 2^{3 + \log_2 5}$

b) $y = 3^{2 - \log_3 5}$

c) $y = 6^{\log_3 2 \cdot \log_6 3}$

Resolução

a) Lembrando que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ e usando a propriedade 4, temos:

$$y = 2^{3 + \log_2 5} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 5} = 8 \cdot 5 \Rightarrow y = 40$$

b) Lembrando que $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ e usando a propriedade 4, temos:

$$y = 3^{2 - \log_3 5} = \frac{3^2}{3^{\log_3 5}} \Rightarrow y = \frac{9}{5}$$

c) Lembrando que $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ e usando a propriedade 4, temos:

$$y = 6^{\log_3 2 \cdot \log_6 3} \Rightarrow y = (6^{\log_3 2})^{\log_6 3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = (6^{\log_6 3})^{\log_3 2} \Rightarrow y = 3^{\log_3 2} \Rightarrow y = 2$$

R5 Calcule.

a) $y = \log_3 (\log_5 125)$

b) $y = \log_5 (\log_3 (\log_2 8))$

Resolução

a) Como $\log_5 125 = 3$, temos:

$$y = \log_3 (\log_5 125) \Rightarrow y = \log_3 3 \Rightarrow y = 1$$

b) Como $\log_2 8 = 3$ e $\log_3 3 = 1$, temos:

$$y = \log_5 (\log_3 (\log_2 8)) \Rightarrow y = \log_5 (\log_3 3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \log_5 1 \Rightarrow y = 0$$

Uma forma de ensinar os estudantes a estudar é propor que relacionem os problemas propostos com os problemas resolvidos, desenvolvendo a leitura de textos da área e as capacidades de análise e de tomada de decisão.

A atividade **7** pode ser utilizada como instrumento de avaliação da compreensão dos estudantes sobre o significado de logaritmo. Incentive que os estudantes apresentem suas produções e resoluções aos colegas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Releia o exercício **R1** antes de resolver as próximas atividades.

1 Calcule o valor de x em cada item e utilize a notação de logaritmos para indicar a resposta.

a) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \dfrac{8}{125}$ $\log_{\frac{2}{5}} \dfrac{8}{125} = 3$

b) $32^x = 16$ $\log_{32} 16 = \dfrac{4}{5}$

c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 27$ $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$

d) $8^x = 4$ $\log_8 4 = \dfrac{2}{3}$

2 Responda às questões.

a) O logaritmo de 256 em certa base é 4. Qual é essa base? 4

b) O logaritmo de 729 em certa base é 6. Qual é essa base? 3

3 Calcule os logaritmos na base 5 dos números a seguir.

a) 5 1

b) 25 2

c) $\dfrac{1}{5}$ -1

d) 625 4

4 Calcule.

a) $\log_2 256$ 8

b) $\log_{\frac{1}{3}} 243$ -5

c) $\log_{\frac{5}{3}} \dfrac{27}{125}$ -3

d) $\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{729}{64}$ -6

e) $\log_{2\sqrt{2}} 32$ $\dfrac{10}{3}$

f) $\log_{10} 0{,}0001$ -4

Antes de resolver o exercício **5**, releia o exercício **R2** para relembrar as condições de existência do logaritmo.

5 Determine x para que os seguintes logaritmos estejam definidos.

a) $\log_2 (2x - 1)$ $x > \dfrac{1}{2}$

b) $\log_5 (-4x + 8)$ $x < 2$

c) $\log_{3-x} (x - 1)$ $1 < x < 3$ e $x \neq 2$

d) $\log_{x-2} (-2x + 8)$ $2 < x < 4$ e $x \neq 3$

6 Calcule o valor de x em cada caso.

a) $\log_5 x = \dfrac{4}{3}$ $x = 5\sqrt[3]{5}$

b) $\log_4 (2x - 1) = \dfrac{1}{2}$ $x = \dfrac{3}{2}$

c) $\log_x 8 = 2$ $x = 2\sqrt{2}$

d) $\log_x 5 = \dfrac{1}{2}$ $x = 25$

7 Usando as propriedades dos logaritmos e as potências de 2, 3 ou 4, elabore duas equações como as do exercício **6**, sendo a primeira delas com a incógnita x no logaritmando e a segunda com a incógnita x como base do logaritmo. Depois, peça a um colega que as resolva. Resposta pessoal.

8 Calcule.

a) $5^{2 + \log_5 2} + 3^{2 - \log_3 2}$ $\frac{109}{2}$

b) $10^{\log_5 2 \cdot \log_{10} 5}$ 2

9 Calcule.

a) $\log_2 (\log_3 81)$ 2

b) $\log_5 (\log_3 (\log_4 64))$ 0

10 **Sabendo que $\log x = \log_{10} x$, resolva a atividade a seguir e indique a alternativa correta no caderno.**

(UFPR) Para se calcular a intensidade luminosa L, medida em lumens, a uma profundidade de x centímetros num determinado lago, utiliza-se a lei de Beer-Lambert, dada pela seguinte fórmula: $\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0{,}08x$

Qual a intensidade luminosa L a uma profundidade de 12,5 cm? Alternativa **d**.

a) 150 lumens.

b) 15 lumens.

c) 10 lumens.

d) 1,5 lúmen.

e) 1 lúmen.

11 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(ESA-MG) Assinale a alternativa que apresenta o valor de $\log_8 \sqrt[8]{64}$. Alternativa **b**.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{16}$

e) $\frac{1}{64}$

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS

Além do que foi exposto no tópico “Propriedades dos logaritmos”, o cálculo logarítmico apresenta algumas propriedades operatórias, que vimos informalmente no tópico “Um pouco de uma grande história”. Vamos, agora, estudar essas e outras propriedades que têm por objetivo facilitar cálculos mais extensos.

Logaritmo de um produto

O logaritmo em qualquer base a ($a > 0$ e $a \neq 1$) de um produto de dois números positivos é igual à soma dos logaritmos, nessa base, dos fatores.

Se a, b e c são números reais, com $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Essa propriedade pode ser provada considerando $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$. Pela definição de logaritmo, temos, $a^x = b$ e $a^y = c$. Substituindo em $\log_a (b \cdot c)$, obtemos:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a (a^x \cdot a^y) = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a b + \log_a c$$

Observe que não se trata de uma propriedade totalmente nova, mas de outro modo de escrever a propriedade de potências, na qual o expoente do produto de potências de mesma base é obtido adicionando-se os expoentes de cada uma das potências dos fatores. Observe:

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^8, \text{ então: } \log_2 2^3 + \log_2 2^5 = \log_2 (2^3 \cdot 2^5) = \log_2 2^8$$

Exemplos

- $\log_2 \left[3(\sqrt{2} + 1)\right] = \log_2 3 + \log_2 (\sqrt{2} + 1)$
- $\log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 7 = \log_5 (2 \cdot 3 \cdot 7) = \log_5 42$

Logaritmo de um quociente

O logaritmo em qualquer base a ($a > 0$ e $a \neq 1$) de um quociente de dois números positivos é igual à diferença entre os logaritmos, nessa base, do dividendo e do divisor.

Se a, b e c são números reais, com $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, temos $a^x = b$ e $a^y = c$. Substituindo em $\log_a \frac{b}{c}$, obtemos:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a b - \log_a c$$

Aqui trata-se também de outro modo de escrever a propriedade de potências, na qual o expoente do quociente de potências de mesma base é obtido subtraindo-se os expoentes de cada uma das potências envolvidas no quociente. Observe.

$$\frac{2^7}{2^4} = 2^3\text{, então: } \log_2 2^7 - \log_2 2^4 = \log_2 \frac{2^7}{2^4} = 2^3$$

Exemplos

- $\log_2 \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}\right) = \log_2 (x^2 + 1) - \log_2 (x^2 + 2)$
- $\log_5 50 - \log_5 2 = \log_5 \frac{50}{2} = \log_5 25 = 2$
- $\log_3 11 - \log_3 33 = \log_3 \frac{11}{33} = \log_3 \frac{1}{3} = -1$

É importante observar que, sendo a, b e c números reais, com $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, em geral:

$\log_a (b + c) \neq \log_a b + \log_a c$

e

$\log_a (b - c) \neq \log_a b - \log_a c$

Logaritmo de uma potência

O logaritmo em qualquer base a ($a > 0$ e $a \neq 1$) de uma potência de base positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo, na base a, da base dessa potência.

Se a, b e m são números reais, com $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, então:

$$\log_a b^m = m \cdot \log_a b$$

Fazendo $\log_a b = x$, temos $b = a^x$. Substituindo em $\log_a b^m$, obtemos:

$$\log_a b^m = \log_a (a^x)^m = \log_a a^{mx} = mx = m \cdot \log_a b$$

Observe que essa é outra maneira de escrever a propriedade relativa à potência de potência.

$$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4}\text{, então: } \log_2 (2^3)^4 = \log_2 2^{3 \cdot 4} = 3 \cdot 4 = 4 \cdot \log_2 2^3$$

Exemplos

- $\log_3 5^6 = 6 \cdot \log_3 5$
- $\log_4 4^9 = 9 \cdot \log_4 4 = 9$
- $\log_7 \sqrt[5]{3^2} = \log_7 3^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \cdot \log_7 3$
- $\frac{3}{4} \log_5 11 = \log_5 11^{\frac{3}{4}} = \log_5 \sqrt[4]{11^3}$

LOGARITMOS DECIMAIS

Os **logaritmos de base 10** são chamados de **logaritmos decimais**, e sua importância se deve ao fato de as tábuas de logaritmos e as calculadoras científicas trabalharem com essa base, além de também ser a base do sistema de numeração que utilizamos.

Por isso, para simplificar, representamos $\log_{10} x$ por $\log x$, para todo $x > 0$.

O **logaritmo decimal** é utilizado na Física para definir a **intensidade auditiva** ou o **nível sonoro** (β), cuja unidade de medida mais usual é o **decibel** (**dB**):

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

em que I é a intensidade sonora, ou seja, a potência da energia sonora que atinge determinada superfície, sendo medida em W/m², e I_0 é uma constante especial. Nesse caso, usamos o logaritmo decimal porque 1 watt é uma unidade "grande demais" para medir a intensidade de som à nossa volta; a medida 1 W corresponde ao som de 10^{15} mosquitos zumbindo, ou seja, um único mosquito zumbindo (som ao qual nossos ouvidos são bastante sensíveis) tem potência de 10^{-15} W.

Intensidade auditiva

O objeto digital acrescenta conhecimentos sobre intensidade auditiva, explorando faixas de níveis de pressão sonora (em decibel) para alguns sons cotidianos.

Questões que envolvem propriedades dos logaritmos são mais complexas e exigem habilidades de cálculo algébrico, incluindo a resolução de equações e inequações. Por isso, dedique um tempo considerável para resolver esses problemas com os estudantes, questionando os porquês de cada etapa da resolução.

R6 As propriedades operatórias são úteis, pois podem facilitar alguns cálculos. Considerando $\log_{10} 2 = 0{,}301$, calcule:

a) $\log_{10} 200$

b) $\log_{10} \dfrac{25}{8}$

Resolução

a) $\log_{10} 200 = \log_{10} (2 \cdot 100) = \log_{10} 2 + \log_{10} 100 =$
$= \log_{10} 2 + \log_{10} 10^2 = 0{,}301 + 2 = 2{,}301$

b) $\log_{10}\left(\dfrac{25}{8}\right) = \log_{10} 25 - \log_{10} 8 =$

$= \log_{10} \dfrac{100}{4} - \log_{10} 2^3 =$

$= \log_{10} 100 - \log_{10} 4 - \log_{10} 2^3 =$

$= \log_{10} 10^2 - \log_{10} 2^2 - \log_{10} 2^3 =$

$= 2 \log_{10} 10 - 2 \log_{10} 2 - 3 \log_{10} 2 =$

$= 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0{,}301 - 3 \cdot 0{,}301 =$

$= 2 - 0{,}602 - 0{,}903 =$

$= 0{,}495$

R7 Supondo satisfeitas as condições de existência dos logaritmos, determine y.

a) $\log_a y = \log_a (x+2) - \log_a 3 + \log_a 5 - \log_a (x-1)$

b) $\log_3 y = \dfrac{2}{3} \cdot \log_3 x - \dfrac{1}{2} \cdot \log_3 7 - 2 \cdot \log_3 (x+1) + 2$

Resolução

a) $\log_a y = \log_a \dfrac{x+2}{3} + \log_a \dfrac{5}{x-1}$

$\log_a y = \log_a \dfrac{(x+2) \cdot 5}{3 \cdot (x-1)} \Rightarrow y = \dfrac{5 \cdot (x+2)}{3 \cdot (x-1)}$

b) Substituindo 2 por $\log_3 9$, obtemos:

$\log_3 y = \log_3 x^{\frac{2}{3}} - \log_3 7^{\frac{1}{2}} - \log_3 (x+1)^2 + \log_3 9$

$\log_3 y = \log_3 \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} - \log_3 (x+1)^2 + \log_3 9$

$\log_3 y = \log_3 \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{1}{2}} \cdot (x+1)^2} + \log_3 9$

$\log_3 y = \log_3 \dfrac{x^{\frac{2}{3}} \cdot 9}{7^{\frac{1}{2}} \cdot (x+1)^2} \Rightarrow y = \dfrac{9\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{7} \cdot (x+1)^2}$

R8 Resolva a equação:

$$\log_3 (x-2) + \log_3 (x+4) = \log_3 135 - \log_3 5$$

Resolução

Condições de existência:

$$\left.\begin{aligned} x - 2 > 0 &\Rightarrow x > 2 \\ x + 4 > 0 &\Rightarrow x > -4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x > 2$$

Aplicando as propriedades operatórias, temos:

$\log_3 \left[(x-2) \cdot (x+4)\right] = \log_3 \dfrac{135}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2) \cdot (x+4) = \dfrac{135}{5} \Rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -7 \text{ (não satisfaz a condição } x > 2) \\ \text{ou} \\ x = 5 \text{ (satisfaz a condição } x > 2) \end{cases}$$

Portanto, $S = \{5\}$.

R9 Resolva a equação:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 x - 2} - \frac{1}{\log_2 x} = \frac{3}{2} + \frac{2}{\log_2 x - 2}$$

Resolução

Condições de existência:

$$\left.\begin{aligned} & x > 0 \\ & \log_2 x - 2 \neq 0 \Rightarrow \log_2 x \neq 2 \\ & \log_2 x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \neq 4$$

Fazendo $\log_2 x = t$, temos:

$\dfrac{t}{t-2} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{t-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2t^2 - 2(t-2)}{2t(t-2)} = \dfrac{3t(t-2) + 4t}{2t(t-2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2t^2 - 2t + 4 = 3t^2 - 6t + 4t \Rightarrow t^2 - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 2$ ou $t = -2$

Assim:

- para $t = 2$, temos:
  $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4$ (não satisfaz a condição de existência)
- para $t = -2$, temos:
  $\log_2 x = -2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$ (satisfaz a condição de existência)

Portanto, $S = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

R10 Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$$

Resolução

Condições de existência:

$x > 0$ e $y > 0$

Da equação $\log_3 x + \log_3 y = 2$, temos:

$$\log_3 (x \cdot y) = 2 \Rightarrow x \cdot y = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{y}$$

Não escreva no livro.

Substituindo x por $\frac{9}{y}$ em $x + 2y = 11$, obtemos:

$\frac{9}{y} + 2y = 11 \Rightarrow 2y^2 - 11y + 9 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = \frac{9}{2}$

Em $x = \frac{9}{y}$:

- para $y = 1$, temos $x = 9$ e $(9, 1)$ satisfaz a condição de existência;
- para $y = \frac{9}{2}$, temos $x = 2$ e $\left(2, \frac{9}{2}\right)$ satisfaz a condição de existência.

Portanto, $S = \left\{(9, 1), \left(2, \frac{9}{2}\right)\right\}$.

R11 **Dados $\log 2 \simeq 0{,}3010$ e $\log 3 \simeq 0{,}4771$, calcule.**

a) $\log 6$

b) $\log 5$

c) $\log 1800$

d) $\log 0{,}0072$

Resolução

a) $\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 \simeq 0{,}3010 + 0{,}4771$

Portanto, $\log 6 \simeq 0{,}7781$.

b) Escrevendo 5 em função da base 10 do logaritmo, temos:

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \simeq 1 - 0{,}3010$$

Portanto, $\log 5 \simeq 0{,}6990$.

c) Sendo 10 a base do logaritmo, vamos utilizar uma potência de 10 como fator do logaritmando para facilitar os cálculos.

$$\log 1800 = \log(2 \cdot 3^2 \cdot 10^2) =$$
$$= \log 2 + \log 3^2 + \log 10^2 =$$
$$= \log 2 + 2 \cdot \log 3 + 2 \simeq$$
$$\simeq 0{,}3010 + 2 \cdot 0{,}4771 + 2 = 3{,}2552$$

Portanto, $\log 1800 \simeq 3{,}2552$.

d) $\log 0{,}0072 = \log(2^3 \cdot 3^2 \cdot 10^{-4}) =$
$$= \log 2^3 + \log 3^2 + \log 10^{-4} =$$
$$= 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 - 4 \simeq$$
$$\simeq 3 \cdot 0{,}3010 + 2 \cdot 0{,}4771 - 4 = -2{,}1428$$

Portanto, $\log 0{,}0072 \simeq -2{,}1428$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Leia as atividades propostas e verifique qual dos problemas resolvidos, de **R6** a **R11**, pode auxiliar você nas resoluções.

12 **Admitindo satisfeitas as condições de existência, obtenha $\log_a y$ usando as propriedades operatórias.**

a) $y = \frac{m \cdot n}{p \cdot q}$

b) $y = \frac{3m^2 \cdot (n+1)^2}{(m+2)^3 \cdot (n-1)}$

c) $y = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{m+n}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{m-n}}$

d) $y = \sqrt[3]{\frac{(m-1)^2}{\sqrt{n} \cdot \sqrt[4]{a^3}}} \cdot a^3$

13 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFRGS-RS) O valor de Alternativa **a**.

$\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + ... + \log\left(1 - \frac{1}{1000}\right)$ é

a) -3. b) -2. c) -1. d) 0. e) 1.

14 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(EsPECx-SP) Sabendo que $\log(a) = A$, $\log(b) = B$ e $\log(c) = C$, temos que o valor de $\log\left(\frac{a^2 \cdot b}{\sqrt{c}}\right)$ é igual a: Alternativa **c**.

a) $-2A + B + \frac{C}{2}$

b) $-2A - B + \frac{C}{2}$

c) $2A + B - \frac{C}{2}$

d) $2A - B - \frac{C}{2}$

e) $2A - B + \frac{C}{2}$

15 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Uece) Usando as propriedades dos logaritmos, é correto concluir que o valor da expressão Alternativa **c**.

$3\log_2 \frac{36}{25} + 3\log_2\left(\frac{6}{27}\right) - 2\log_2 \frac{16}{125}$ é igual a

$\log_2 z \equiv$ logaritmo de z na base 2

a) 0,16. b) 0,50. c) 1,00. d) 1,20.

16 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFRGS-RS) O valor de

$\log 2^2 + \log 2^3 + \log 2^4 + ... + \log 2^{50}$ é Alternativa **b**.

a) $\log 2^{1247}$.

b) $\log 2^{1274}$.

c) $\log 2^{1472}$.

d) $\log 2^{59}$.

e) $\log 8^{59}$.

17 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(EPCAr-MG) Seja a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma progressão geométrica (P.G.) crescente, com $0 < a_1 \neq 1$, de n termos e razão q.

A expressão $\frac{\log a_n - \log a_1}{\log q + 1}$ corresponde, necessariamente, a Alternativa **d**.

a) q b) $n - 1$ c) a_1 d) n

12. **a)** $\log_a m + \log_a n - \log_a p - \log_a q$ **b)** $\log_a 3 + 2\log_a m + 2\log_a (n+1) - 3\log_a (m+2) - \log_a (n-1)$

c) $\frac{1}{2}\log_a 5 + \frac{1}{3}\log_a (m+n) - \frac{1}{3}\log_a 2 - \frac{1}{2}\log_a (m-n)$ **d)** $\frac{2}{3}\log_a (m-1) - \frac{1}{6}\log_a n + \frac{11}{4}$

18 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFPR) Um bolo é retirado do forno e começa a resfriar segundo a expressão $T(t) = 30 + 150a^{-0{,}05t}$, com $a > 1$, sendo T a temperatura do bolo e t o tempo decorrido em minutos. Assinale a alternativa que corresponde ao tempo em que o bolo atingirá a metade da temperatura inicial que apresentava quando foi retirado do forno em $t = 0$. (Use se necessário $\log_a 2 = 0{,}7$ e $\log_a 5 = 1{,}6$). Alternativa **d**.

a) 10 minutos b) 12 minutos c) 16 minutos d) 18 minutos e) 22 minutos

19 **Dados $\log 2 \simeq 0{,}301$ e $\log 3 \simeq 0{,}477$, calcule.**

a) $\log 12$ Aproximadamente 1,079.
b) $\log 125$ Aproximadamente 2,097.
c) $\log 3\,600$ Aproximadamente 3,556.
d) $\log 0{,}0108$ Aproximadamente −1,967.
e) $\log (2\sqrt{3})$ Aproximadamente 0,540.
f) $\log (3\sqrt[3]{4})$ Aproximadamente 0,678.

20 **Resolva as equações a seguir.**

a) $\log_2 (x - 1) + \log_2 (x - 2) = 1$ $S = \{3\}$
b) $\log_5 (x^2 - 1) = 3 \cdot \log_5 2 + \log_5 3$ $S = \{-5, 5\}$
c) $2 \cdot \log x = \log \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ $S = \left\{\frac{1}{20\sqrt{10}}\right\}$
d) $\log_{\frac{1}{2}} (1 - x) - \log_{\frac{1}{2}} (2 - x) = 3$ $S = \left\{\frac{6}{7}\right\}$
e) $\log_2 \sqrt{x + 1} + \log_2 \sqrt{x + 2} = 1 + \log_2 \sqrt{33}$ $S = \{10\}$

21 **Resolva os sistemas a seguir.**

a) $\begin{cases} 2^x = \dfrac{1}{2^{4+y}} \\ \log_2 (2x + y) = 1 \end{cases}$ $S = \{(6, -10)\}$

b) $\begin{cases} 8^x = 2^{y+1} \\ \log_3 x = 1 + \log_3 y \end{cases}$ $S = \left\{\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)\right\}$

c) $\begin{cases} \log (xy) = 30 \\ \log x \cdot \log y = 200 \end{cases}$ $S = \{(10^{20}, 10^{10}); (10^{10}, 10^{20})\}$

d) $\begin{cases} \log_2 x \cdot \log_2 y = 1 \\ 3^{\log_2 x} = 2^{\log_2 3} \end{cases}$ $S = \{(2, 1)\}$

e) $\begin{cases} \log_2 4^x = y + 1 \\ \log_3 3 = x + 2 \end{cases}$ $S = \{(-1, -3)\}$

f) $\begin{cases} x + y = \dfrac{4}{3} \\ \log_3 x - \log_3 y = 1 \end{cases}$ $S = \left\{\left(1, \frac{1}{3}\right)\right\}$

22 **Se $x > 0$, $x \neq 1$ e $\log_x 7 = -\frac{1}{3}$, calcule $\log_{\frac{1}{x}} 7^6$.** 2

23 **Supondo satisfeitas as condições de existência, determine y.**

a) $\log_a y = \log_a (m + n) + \log_a 3 - \log_a (m - n) - \log_a 2$ $\frac{3(m+n)}{2(m-n)}$
b) $\log_a y = \log_a (m + 1) - \log_a (m + 8) + 4 \cdot \log_a m - 2 \cdot \log_a n$ $\frac{m^4(m+1)}{n^2(m+8)}$
c) $\log_a y = \frac{1}{3} \cdot \log_a m + \frac{1}{2} \cdot \log_a n - 2 \cdot \log_a (m^2 + 1) - \frac{2}{3} \cdot \log_a (n + 1)$ $\frac{\sqrt{n}}{(m^2+1)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{(n+1)^2}}$
d) $\log_a y = \frac{1}{2} \cdot \log_a (m^2 + 1) - 3 - \frac{1}{3} \cdot \log_a (n^2 + 1) - \frac{1}{4} \cdot \log_a (m + 1)$ $\frac{\sqrt{m^2+1}}{a^3 \cdot \sqrt[3]{(n^2+1)} \cdot \sqrt[4]{(m+1)}}$

TECNOLOGIA

Nas calculadoras científicas, a tecla log permite o cálculo de logaritmos na base 10. Por exemplo:

- se digitarmos 2 e apertarmos a tecla log, aparecerá no visor o número 0,30103.
  Isso significa que $10^{0{,}30103} \simeq 2$ ou $\log 2 > 0{,}30103$.
- se digitarmos o número 1000 e depois apertarmos a tecla log, no visor aparecerá o número 3, pois $10^3 \simeq 1000$, ou seja, $\log 1000 = 3$.


Oleksiy Mark/Shutterstock.com/ID/BR
Calculadora científica.

ATIVIDADES Comente com os estudantes que algumas calculadoras científicas podem ter um funcionamento diferente. Auxilie-os caso seja necessário.

1 **Use uma calculadora que tenha a tecla log e calcule.**

a) $\log 5$ Aproximadamente 0,698970004.
b) $\log 8$ Aproximadamente 0,903089987.
c) $\log (-1)$ (Observe o que acontece nesse caso.) Aparecerá na tela “não existe”, “entrada inválida”, “erro de domínio” ou alguma mensagem similar.
d) $\log 0{,}5$ Aproximadamente −0,301029996.

Não escreva no livro.

2 **Em fevereiro de 2023, a região da Turquia e Síria foi atingida por terremotos que chegaram à magnitude de 7,8 na escala Richter. Já em outubro desse mesmo ano, o Afeganistão sofreu com terremotos que alcançaram a magnitude de 6,3 na escala Richter.**

Uma maneira de determinar a energia liberada (E) por um terremoto, em quilômetro por hora, é utilizando a fórmula $I = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}$, em que I é a intensidade do terremoto, na escala Richter.

Utilizando uma calculadora científica determine a razão entre a energia liberada nos terremotos da Turquia e Síria e a energia liberada no terremoto do Afeganistão. 177,83

MUDANÇA DE BASE

Para resolver o problema inicial do tópico "Logaritmo" deste capítulo, era preciso encontrar o valor de $\log_2 9$. Vimos que uma das maneiras de determinar esse valor é usar os logaritmos de base 10, pois as tábuas de logaritmo e as calculadoras trabalham o sistema de logaritmos decimais. Entretanto, existe uma propriedade dos logaritmos, denominada **mudança de base**, que permite o cálculo de um logaritmo em qualquer base, a partir dos logaritmos decimais.

Se a, b e c são números reais, com $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $b \neq 1$ e $c \neq 1$, então, $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

Considerando $\begin{cases} \log_b a = x \\ \log_c b = y \end{cases}$, temos $\begin{cases} b^x = a & (1) \\ c^y = b & (2) \end{cases}$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$(c^y)^x = a \Rightarrow c^{xy} = a \Rightarrow xy = \log_c a \Rightarrow \log_b a \cdot \log_c b = \log_c a \Rightarrow \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Observe no quadro o valor de alguns logaritmos decimais.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
log x	0	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954

Consultando um quadro como esse podemos calcular, por exemplo, $\log_5 2$:

$$\log_5 2 = \frac{\log 2}{\log 5} \simeq \frac{0,301}{0,699} \simeq 0,431$$

Também podemos usar uma calculadora científica, em que a tecla log faz o cálculo de qualquer logaritmo na base 10. Na calculadora, apertamos as teclas na seguinte sequência:

2 log ÷ 5 log =

Assim, obtemos:

0.430676558

Agora, vamos realizar o cálculo de $\log_2 9$:

$$\log_2 9 = \frac{\log 9}{\log 2} \simeq \frac{0,954}{0,301} \simeq 3,169$$

Retome o problema sobre o crescimento da planta (no tópico "Logaritmo") e proponha aos estudantes outros cálculos que envolvam logaritmos. Oriente a turma a fazer esses cálculos usando a calculadora.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R12 **Usando o quadro de logaritmos decimais deste tópico, calcule $\log_{\sqrt{3}} 7$.**

Resolução

$$\log_{\sqrt{3}} 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 \sqrt{3}} = \frac{\log_3 7}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \log_3 7 = 2 \cdot \frac{\log 7}{\log 3} = 2 \cdot \frac{0{,}845}{0{,}477} \simeq 2 \cdot 1{,}771 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} 7 \simeq 3{,}542$$

R13 **Resolva a equação $\log_{27} x \cdot \log_9 x = \frac{2}{3}$.**

Resolução

A condição de existência é $x > 0$.

Mudando as bases dos logaritmos para a base 3, temos:

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 27} \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\log_3 x}{3} \cdot \frac{\log_3 x}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow (\log_3 x)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = 2 \Rightarrow x = 9 \\ \text{ou} \\ \log_3 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$x = 9$ e $x = \frac{1}{9}$ satisfazem a condição de existência.

Portanto, $S = \left\{9, \frac{1}{9}\right\}$.

R14 **Dados $\log 2 \simeq 0{,}3010$ e $\log 3 \simeq 0{,}4771$, calcule $\log_6 30$.**

Resolução

$$\log_6 30 = \frac{\log 30}{\log 6} = \frac{\log(3 \cdot 10)}{\log(2 \cdot 3)} = \frac{\log 3 + \log 10}{\log 2 + \log 3} \simeq \frac{0{,}4771 + 1}{0{,}3010 + 0{,}4771} = \frac{1{,}4771}{0{,}7781} \Rightarrow \log_6 30 \simeq 1{,}8983$$

Portanto, $\log_6 30 \simeq 1{,}8983$.

R15 **Sendo $\log_5 2 = a$ e $\log_5 3 = b$, calcule $\log_4 81$ em função de a e de b.**

Resolução

Efetuando a mudança de base, temos:

$$\log_4 81 = \frac{\log_5 81}{\log_5 4} = \frac{\log_5 3^4}{\log_5 2^2} = \frac{4 \cdot \log_5 3}{2 \cdot \log_5 2} = \frac{4b}{2a} = \frac{2b}{a}$$

Explicite aos estudantes que a orientação inicial apresentada nesta seção é uma valiosa estratégia de estudo no processo de aprender matemática.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Antes de iniciar esta seção, organize um resumo dos tópicos "Propriedades operatórias dos logaritmos" e "Mudança de base". Se necessário, consulte esse resumo ao resolver as atividades a seguir.

24 **Usando as propriedades operatórias e mudança de base, calcule.**

a) $\log_3 2 \cdot \log_8 3$ $\frac{1}{3}$

b) $\log_7 3 \cdot \log_{10} 7 \cdot \log_9 10$ $\frac{1}{2}$

c) $\log_8 6 \cdot \log_{10} 8 \cdot \log_{12} 10 \cdot \ldots \cdot \log_{216} 214$ $\frac{1}{3}$

d) $\frac{\log_7 8}{\log_7 2}$ 3

25 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Uesc-BA) Trabalhando-se com $\log 3 = 0{,}47$ e $\log 2 = 0{,}30$, pode-se concluir que o valor que mais se aproxima de $\log 146$ é: Alternativa **c**.

a) 2,64 b) 2,58 c) 2,19 d) 2,08 e) 2,03

26 **Resolva as equações a seguir.**

a) $\log_3 (x - 2) - \log_9 (x - 2) = 2$ $S = \{83\}$

b) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = \frac{7}{4}$ $S = \{2\}$

c) $\log_2 (x - 1) - \log_4 (x - 1) = 1$ $S = \{5\}$

d) $\log_3 x + \frac{1}{\log_x 3} = 1$ $S = \{\sqrt{3}\}$

e) $\log_8 x \cdot \log_4 x \cdot \log_2 x = -\frac{4}{3}$ $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

f) $\log_x 4 + \log_2 x = 3$ $S = \{2, 4\}$

g) $\log_4 x \cdot \log_2 x = 8$ $S = \left\{\frac{1}{16}, 16\right\}$

h) $\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_{2x} 4} = 3$ $S = \{2\sqrt[3]{4}\}$

30. **a)** 0,33333... **b)** 0,5 **c)** 0,33333... **d)** 3

27 Utilizando as propriedades dos logaritmos e o primeiro quadro de logaritmos decimais a seguir, copie e complete o segundo quadro no caderno.

log x	x
0	1
0,301	2
0,477	3
0,602	4
0,699	5
0,778	6
0,845	7
0,903	8
0,954	9
1	10

log x	x
////////// 1,176	15
////////// 1,301	20
////////// 1,398	25
////////// 1,146	14
1,653	45
1,431	27
1,690	49
////////// 1,748	56
//////////	//////////
//////////	//////////

28 Dados $\log 2 \simeq 0{,}3010$ e $\log 3 \simeq 0{,}4771$, calcule.

a) $\log_2 3$ Aproximadamente 1,5850.

b) $\log_2 60$ Aproximadamente 5,9073.

c) $\log_9 20$ Aproximadamente 1,3634.

d) $\log_{30} 100$ Aproximadamente 1,354.

29 Sendo $\log_7 2 = a$ e $\log_7 3 = b$, calcule os logaritmos em função de a e de b.

a) $\log_2 3$ $\frac{b}{a}$

b) $\log_3 2$ $\frac{a}{b}$

c) $\log_4 14$ $\frac{1+a}{2a}$

d) $\log_6 42$ $\frac{1+a+b}{a+b}$

30 Com uma calculadora científica, refaça o exercício **24**.

31 Indique a alternativa correta no caderno. Alternativa **c**.

(Uece) Se o número positivo a, $a \neq 1$, é tal que para $x > 0$ tivermos $\log_a x = 4 \cdot \log_{10} x$, então o valor de $\sqrt{a}$ é

a) $10^{\frac{1}{2}}$

b) $10^{\frac{1}{16}}$

c) $10^{\frac{1}{8}}$

d) $10^{\frac{1}{4}}$

32 (UFPR) Uma quantia inicial de R$ 1000,00 foi investida em uma aplicação financeira que rende juros de 6%, compostos anualmente. Qual é, aproximadamente, o tempo necessário para que essa quantia dobre? (Use $\log_2 (1{,}06) \simeq 0{,}084$.) Aproximadamente 11,9 anos.

33 (Unifesp) Pesquisa feita por biólogos de uma reserva florestal mostrou que a população de uma certa espécie de animal está diminuindo a cada ano. A partir do ano em que se iniciou a pesquisa, o número de exemplares desses animais é dado aproximadamente pela função $f(t) = 750 \cdot 2^{-(0{,}05)t}$ com t em anos, $t \geqslant 0$.

a) Determine, com base na função, em quantos anos a população de animais estará reduzida à metade da população inicial. 20 anos.

b) Considerando $\log_2 3 = 1{,}6$ e $\log_2 5 = 2{,}3$, e supondo que nada seja feito para conter o decrescimento da população, determine em quantos anos, de acordo com a função, haverá apenas 40 exemplares dessa espécie de animal na reserva florestal. 84 anos.

Qual é a relação entre logaritmos e epidemias?

Vamos retornar ao problema da epidemia que começamos a discutir no tópico "Função exponencial" do capítulo anterior. De acordo com o problema, em uma cidade com 10 mil habitantes, há um vírus que contamina pessoas na relação de 1 para 3 por semana, ou seja, cada pessoa infectada contamina outras 3 pessoas a cada semana.

Queríamos saber depois de quanto tempo metade da população estaria contaminada se, no momento inicial, 10 pessoas fossem portadoras do vírus. Concluímos que o tempo para que isso ocorresse corresponderia à solução da equação $500 = 3^x$ ou, ainda, $5\,000 = 10 \cdot 3^x$.

Por aproximação, também concluímos que isso aconteceria entre a 5ª e a 6ª semanas desde a observação inicial. Agora, vamos resolver essa mesma equação usando o que aprendemos sobre logaritmos.

Se $5\,000 = 10 \cdot 3^x$, então $\log 5\,000 = \log (10 \cdot 3^x)$. Como o logaritmo é de base 10 e temos os produtos $5\,000 = 5 \cdot 1\,000$ e $10 \cdot 3^x$, vamos usar a propriedade do logaritmo de um produto.

$$\log (5 \cdot 1\,000) = \log 5 + \log 1\,000 \ \text{ e } \ \log (10 \cdot 3^x) = \log 10 + \log 3^x$$

Usando a propriedade do logaritmo de uma potência, temos: $\log 3^x = x \cdot \log 3$

Assim, temos: $\log 5 + \log 1\,000 = \log 10 + x \cdot \log 3$

Observe que essa equação se reduz a uma equação de 1º grau:

$$\log 5 + 3 = 1 + x \cdot \log 3$$

Usando uma calculadora científica, obtemos que $\log 5 \simeq 0{,}699$ e $\log 3 \simeq 0{,}477$. Substituindo esses valores na equação, obtemos $x \simeq 5{,}658$.

Aproveite as diferentes situações apresentadas, nas quais prevemos o que poderia acontecer se fosse usado o mesmo modelo matemático, para pedir aos estudantes que imaginem outras condições para essa simulação, de modo a estender ainda mais o tempo de contágio de metade da população.

Concluímos que metade da população estaria contaminada após 5,658 semanas. No gráfico construído no capítulo anterior, já era possível visualizar que a data procurada estava mais próxima da 6ª semana do que da 5ª.

A precisão será ainda maior se transformarmos 0,658 semana em dias, com uma regra de três.

$$1 \text{ semana} - 7 \text{ dias}$$

$$0{,}658 \text{ semana} - d \text{ dias}$$

$$d = 7 \cdot 0{,}658 = 4{,}606$$

Portanto, de acordo com esse modelo matemático, metade da população da cidade estaria contaminada após 5 semanas e 4 dias.

Vamos analisar outras situações que poderiam acontecer de acordo com esse modelo matemático.

- O tempo para que metade da população se contaminasse poderia ser maior caso o número inicial de infectados fosse menor. Isso poderia ocorrer se, de imediato, os 10 casos iniciais fossem tratados ou isolados. Se isso não fosse possível para todos os 10 casos, mas parte dessas pessoas fossem isoladas, o tempo para a contaminação de metade da população seria maior.

  Por exemplo, se os contaminados iniciais fossem apenas 3, nossa equação mudaria para $5\,000 = 3 \cdot 3^x$. Fazendo os cálculos, chegamos a $x \simeq 7{,}754$, ou seja, aproximadamente 7 semanas e 5,25 dias.

- O tempo para que metade da população se contaminasse também poderia ser maior se a razão de contaminação fosse menor, por exemplo, de 1 para 2 pessoas, ou seja, se uma pessoa só contaminasse duas pessoas a cada semana. Esse é outro motivo pelo qual, em situações como essa, solicita-se à população que faça quarentena, ou seja, que fique isolada. Quanto menor a circulação de pessoas, quanto menos elas se encontram, mais dificilmente uma pessoa contaminada infecta outras.

  Nesse caso, o modelo seria $5\,000 = 10 \cdot 2^x$. Usando $\log 2 = 0{,}3010$, chegamos a $x = 8{,}966$, ou seja, levaria praticamente 9 semanas até que metade da população se contaminasse.

- Em nosso modelo, a combinação entre isolamento dos contaminados identificados e a quarentena poderia resultar na equação $5\,000 = 3 \cdot 2^x$. Nesse caso, teríamos $x > 10{,}70$, ou seja, seriam necessárias aproximadamente 10 semanas e 4,9 dias para que metade da população se contaminasse.

  Em uma situação real, muitos fatores interferem na quantidade de pessoas contaminadas durante uma epidemia. Entretanto, é importante ressaltar que esse simples modelo matemático que estudamos confirma as orientações das autoridades para que, em casos de epidemia, os infectados sejam isolados e a população fique de quarentena a fim de reduzir a relação de contágio.

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Vimos que as primeiras ideias sobre logaritmo de um número tiveram origem com Stifel, por volta de 1544, e consolidaram com Napier. O intuito era simplificar os cálculos de multiplicação e de divisão que atualmente fazemos facilmente com algoritmos e até com calculadora.

Hoje, os logaritmos não têm mais a utilidade que justificou seu surgimento. No entanto, a função logarítmica é muito útil, especialmente nas Ciências da Natureza, para descrever fenômenos. Vamos conhecê-la.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, existe um único logaritmo em uma base a positiva e diferente de 1. Assim, podemos definir:

A função f, de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, que a todo número $x > 0$ associa o logaritmo de x em uma base a ($a > 0$ e $a \neq 1$) é denominada **função logarítmica** de base a:

$$f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \log_a x, \text{ com } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Exemplos

- $f(x) = \log_2 x$, com $x > 0$, é uma função logarítmica de base 2.
- $f(x) = \log_{0,1} x$, com $x > 0$, é uma função logarítmica de base 0,1.

Peça aos estudantes que façam uma leitura individual deste tópico e, em seguida, resolvam as atividades **34** e **35**. Depois, converse com eles sobre esse tipo de gráfico.

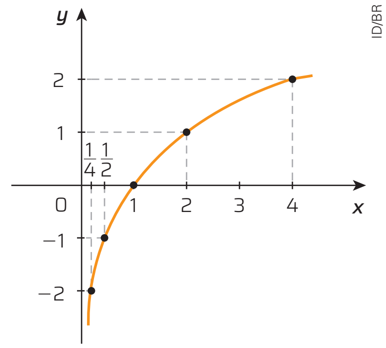
Gráfico cartesiano da função logarítmica

Vamos, inicialmente, esboçar os gráficos de duas funções logarítmicas.

a) Função logarítmica de base 2, definida por $y = \log_2 x$, com $x > 0$.

Atribuindo alguns valores a x, construímos o quadro e obtemos o gráfico.

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	0	1	2	-1	-2



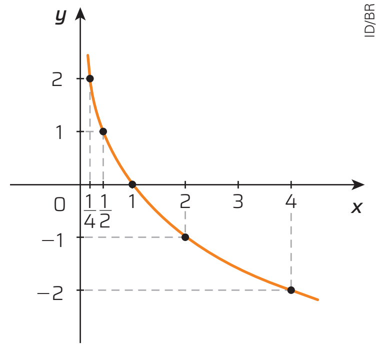
Como podemos sempre determinar o logaritmo (expoente) de qualquer número real positivo em qualquer base positiva diferente de 1, o domínio da função logarítmica é o conjunto $\mathbb{R}_+^*$.

Como todo número real pode ser expoente (logaritmo) de algum número real positivo em alguma base, a imagem da função é $\mathbb{R}$.

b) Função logarítmica de base $\frac{1}{2}$, definida por $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, com $x > 0$.

Atribuindo alguns valores a x, construímos o quadro e obtemos o gráfico.

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	0	-1	-2	1	2



Nessa função, o domínio também é o conjunto dos números reais positivos não nulos, e o conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

O trabalho com este tópico possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT403**, pois permite que os estudantes analisem e estabeleçam relações entre as representações de funções exponencial e logarítmica, identificando as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

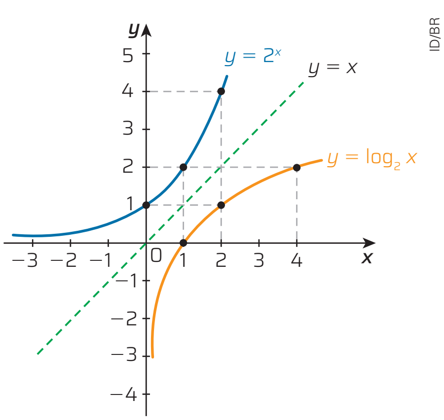
Relação entre as funções exponencial e logarítmica

Vamos construir, em um mesmo sistema coordenado, os gráficos de $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$.

Para isso, primeiro vamos atribuir alguns valores para x em cada uma das funções. A partir dos quadros, obtemos os gráficos.

x	$y = 2^x$
0	1
1	2
2	4

x	$y = \log_2 x$
1	0
2	1
4	2



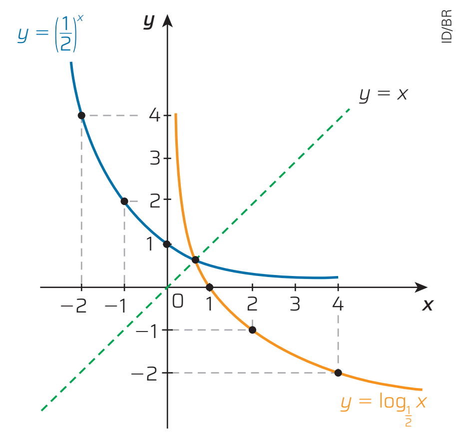
Peça aos estudantes que construam os gráficos das funções exponenciais com $a > 1$ e $0 < a < 1$, observem o domínio, a imagem e o crescimento e o decrescimento dessas funções e comparem com o estudo das funções logarítmicas correspondentes. Eles podem utilizar uma calculadora gráfica para ajudar na construção dos gráficos.

Agora, vamos construir, em um mesmo sistema, os gráficos de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Novamente, vamos atribuir alguns valores para x em cada uma das funções e obter, a partir dos quadros, os gráficos.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	1
−1	2
−2	4

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
1	0
2	−1
4	−2



Observe que, tanto na representação de $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$ quanto na representação de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, os gráficos das funções são **simétricos** em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes, indicada pela linha tracejada verde nos esquemas. Podemos dizer que, se trocássemos os eixos entre si, o gráfico de uma função exponencial se “transformaria” no gráfico de uma função logarítmica.

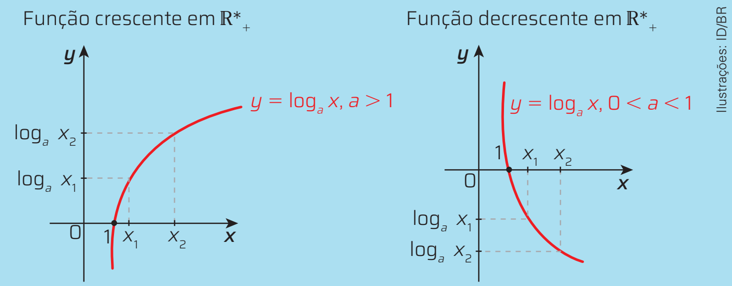
- Para $x = 2$ e $y = 2^x$, temos $2^x = 2^2 = 4$, ou seja, (2, 4) é ponto do gráfico de $y = 2^x$.
- Para $x = 4$ e $y = \log_2 x$, temos $\log_2 4 = 2$, ou seja, (4, 2) é ponto do gráfico de $\log_2 x$.

Isso ocorre porque as funções exponencial e logarítmica são **inversas**, ou seja, de maneira geral, o par ordenado (x, y) que satisfaz $y = a^x$ tem um correspondente (y, x) que satisfaz $y = \log_a x$.

Também é possível dizer que, para qualquer valor de a, o gráfico de $y = a^x$ intersecta o eixo y no ponto (0, 1) e o gráfico de $y = \log_a x$ intersecta o eixo x no ponto (1, 0).

Sendo a função $y = a^x$ inversa de $y = \log_a x$, as propriedades do gráfico da função logarítmica estão relacionadas às da função exponencial de mesma base e podem ser resumidas conforme segue.

Se $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, então $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.
O gráfico de f corta o eixo Ox em (1, 0).



$0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \underbrace{\log_a x_1 < \log_a x_2}$ mesmo sentido

$0 < \underbrace{x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 >}_{\text{sentidos contrários}} \log_a x_2$

Não escreva no livro.

Os exercícios **43**, **44**, **45** e **46** permitem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT305**, pois apresentam problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em diferentes contextos.

34 **Esboce os gráficos das funções a seguir.**
Consulte as respostas no Manual do Professor.

a) $y = \log_3 x$

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

c) $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$

d) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x + 2)$

35 **Classifique cada função a seguir de domínio $]0, +\infty[$ em crescente ou decrescente.**

a) $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$
Crescente.

b) $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$
Decrescente.

36 **Considere a função logarítmica definida por $f(x) = \log_a x$. Se $f(a) = b$ e $f(a + 2) = b + 1$, quais são os valores de a e de b?** $a = 2$ e $b = 1$

37 **Os pontos (3, 0) e (−6, 1) pertencem ao gráfico da função logarítmica $y = \log_{10}(ax + b)$. Calcule os valores de a e de b.** $a = -1$ e $b = 4$

38 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Uerj) Para melhor estudar o Sol, os astrônomos utilizam filtros de luz em seus instrumentos de observação. Admita um filtro que deixe passar $\frac{4}{5}$ da intensidade da luz que nele incide. Para reduzir essa intensidade a menos de 10% da original, foi necessário utilizar n filtros.

Considerando $\log 2 = 0{,}301$, o menor valor de n é igual a: Alternativa **c**.

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12

39 **Em certo país, a taxa de inflação se mantém em 0,7% ao mês. Qual será a inflação acumulada em 12 meses?** 8,73%

40 **Cada placa de 2 mm de espessura de certo vidro acrílico reduz a intensidade da luz em 10%. Quantas placas devem ser acopladas para reduzir a intensidade da luz em 50%?** 7 placas de vidro.

41 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(FCMSC-SP) Considere, no plano cartesiano, o ponto P dado pela interseção do gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$ com a reta horizontal de equação $y = \frac{700}{27}$.

Usando os valores $\log_2 3 = 1{,}58$, $\log_2 5 = 2{,}32$ e $\log_2 7 = 2{,}8$, a abscissa do ponto P é Alternativa **d**.

a) 4,8.
b) 4,5.
c) 4,9.
d) 4,7.
e) 4,6.

42 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Fuvest-SP) No plano cartesiano, os pontos (3, 2) e (5, 4) pertencem ao gráfico da função dada por $y = \log_2 (ax + b)$. O valor de $a + b$ é: Alternativa **a**.

a) −8
b) −6
c) 0
d) 4
e) 8

Relacione a atividade **44** ao texto de abertura deste capítulo e discuta este e outros exemplos nos quais a função logarítmica é usada para modelar um fenômeno de outra área do conhecimento. Destaque a necessidade do logaritmo para a resolução de toda a questão.

O exercício **43** trabalha um logaritmo chamado logaritmo neperiano. Esse logaritmo tem como base o número irracional e, chamado número de Neper, que tem uma notação diferente, pois, em vez de escrever $\log_e$ escrevemos ln.

43 **Indique a resposta correta no caderno.**

(UFPB) O movimento de uma bola de golfe é influenciado tanto pela força gravitacional como também pela resistência do ar. Essa força retardadora atua no sentido oposto ao da velocidade da bola. Em um estudo realizado durante uma partida de golfe, observou-se que, quando foi considerada a força de resistência do ar, a distância horizontal $d(t)$, em metros, percorrida por uma bola em função do tempo t, em segundos, a partir do instante em que a bola foi lançada ($t = 0$), era dada por $d(t) = 50(1 - e^{-0{,}1t})$.

Use: $\ln 2 = 0{,}7$.

A partir dessas informações, conclui-se que, para que a bola percorra uma distância na horizontal de 25 m, o tempo gasto, a partir do instante do lançamento, é de: Alternativa **c**.

a) 5,0 s
b) 6,6 s
c) 7,0 s
d) 8,5 s
e) 10 s

44 **Escreva a resposta correta no caderno.**

(Enem) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10{,}7 + \frac{2}{3} \log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina · cm. O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7{,}3$.

U.S. Geological Survey, Historic Earthquakes.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov.
Acesso em: 1º maio 2010 (adaptado).

U.S. Geological Survey. USGS Earthquake Magnitude Policy.
Disponível em: http://earthquake.usgs.gov.
Acesso em: 1º maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina · cm)? Alternativa **e**.

a) $10^{-5,10}$
b) $10^{-0,73}$
c) $10^{12,00}$
d) $10^{21,65}$
e) $10^{27,00}$

O exercício **46** mobiliza a competência geral **2**, pois leva os estudantes a exercitar a curiosidade intelectual e a recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade com base em conhecimentos de diferentes áreas. Se julgar oportuno, peça a eles que conversem com o professor de Química para auxiliá-los na pesquisa sobre o pH de soluções.

45 **Escreva a resposta correta no caderno.**

(Fuvest-SP) Seja $x > 0$ tal que a sequência $a_1 = \log_2 x$, $a_2 = \log_4 (4x)$, $a_3 = \log_8 (8x)$ forme, nessa ordem, uma progressão aritmética. Então, $a_1 + a_2 + a_3$ é igual a: Alternativa **b**.

a) $\frac{13}{2}$

b) $\frac{15}{2}$

c) $\frac{17}{2}$

d) $\frac{19}{2}$

e) $\frac{21}{2}$

46 **Reúna-se com um colega para pesquisar sobre o pH (potencial hidrogeniônico) de soluções. Depois, criem um problema que envolva o cálculo do pH de uma solução e troquem esse problema com outros colegas para que eles o resolvam.** Resposta pessoal.

Para retomada e revisão das propriedades de funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, a sugestão é trabalhar o jogo Para recordar funções descrito nas *Orientações específicas* deste capítulo.

O objetivo das atividades desta seção é possibilitar que os estudantes utilizem a tecnologia na resolução de problemas, ampliando a compreensão dos logaritmos, da função logarítmica e da linguagem matemática, e também a capacidade deles de ler e interpretar gráficos na resolução de problemas. Essas atividades permitem que os estudantes desenvolvam a competência geral **5**.

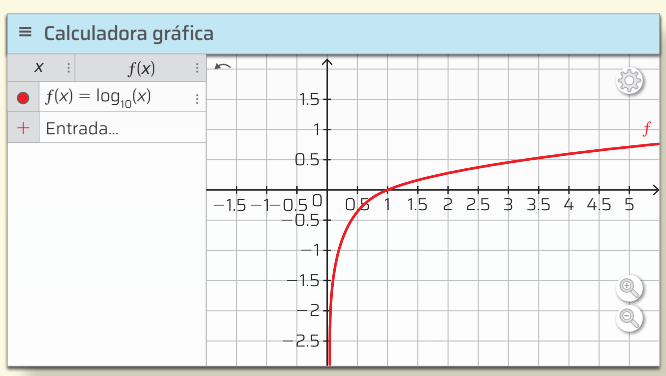
TECNOLOGIA

É possível usar uma calculadora gráfica para resolver problemas que envolvam funções logarítmicas.

Um dos recursos desse tipo de *software* permite obter diferentes valores de x e o valor y correspondente a cada um deles. Vamos ver como isso pode nos ajudar a resolver problemas que envolvam funções logarítmicas?

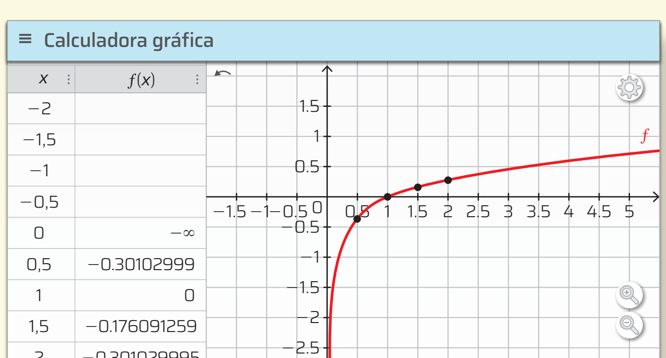
Há diversos tipos de calculadora gráfica *on-line*; escolha um deles e apresente-o aos estudantes ou dê a eles algumas opções e incentive-os a usar o tipo de calculadora gráfica *on-line* que preferirem. As etapas apresentadas podem ser realizadas, por exemplo, no GeoGebra.

1ª etapa: Construa o gráfico da função $f(x) = \log x$. Para isso, como o logaritmo é de base 10, basta digitar log (10, x). Se desejar, acrescente as grades para melhor visualização ou, simplesmente, log x. Ao apertar a tecla Enter, aparecerá na tela o gráfico dessa função.



Nelson Matsuda ID/BR

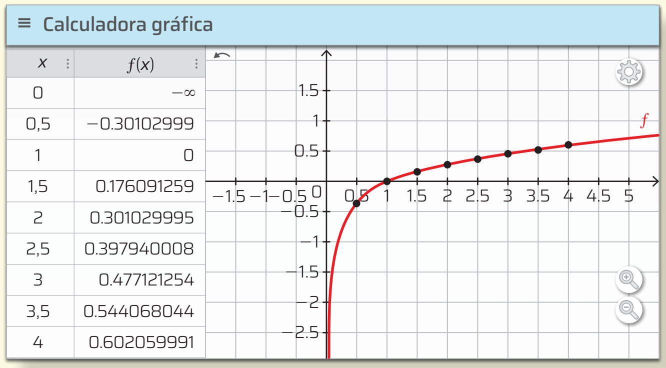
2ª etapa: Para analisar os dados associados a esse gráfico, é possível acessar a tabela com valores de x e $f(x)$ utilizando a opção "tabela de valores" por meio dos ⋮ que estão presentes logo após a função. Selecione o intervalo de valores apresentados entre −2 e 2, aumentando de 0,5 em 0,5 ("passo"). Observe o resultado obtido.



Nelson Matsuda ID/BR

Não escreva no livro.

3ª etapa: No menu da caixa de diálogo “Tabela”, clique em “Parâmetros” e altere os dados, colocando “mínimo” em 1, “máximo” em 10 e “número de passos” em 10.
Observe como ficarão os dados apresentados.



x	$f(x)$
0	$-\infty$
0,5	−0.30102999
1	0
1,5	0.176091259
2	0.301029995
2,5	0.397940008
3	0.477121254
3,5	0.544068044
4	0.602059991

Nelson Matsuda ID/BR

ATIVIDADES

1 **Com base na observação dos dados e do gráfico da 2ª etapa, responda às questões a seguir.**

a) Por que a palavra “indefinido” aparece em várias ocorrências?
Porque a função logarítmica tem $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, então, para $x \leqslant 0$, a função não é definida.

b) A partir de qual valor dos dados registrados $f(x) = \log x$ passa a não ser indefinido?
Observamos que, para $x > 0$, a função $f(x) = \log x$ passa a ser definida.

2 **Na 3ª etapa, o que os novos dados representam?**
Os novos dados representam os valores da função no intervalo [1, 10], em que ela é definida.

3 **Em uma calculadora gráfica, construa, no mesmo sistema cartesiano, os gráficos de funções logarítmicas dadas por $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Depois, use as definições de parâmetros, compare os dois gráficos e registre as semelhanças e as diferenças entre eles.**
Consulte a resposta no Manual do Professor.

4 **Use uma calculadora gráfica e represente, no mesmo sistema cartesiano, os eixos dos gráficos de funções dadas por $f(x) = \log x$ e $g(x) = x^2 - 2x$. Observando os dois gráficos, o que é possível afirmar sobre a equação $x^2 - 2x = \log x$? Registre no caderno a alternativa correta.** Alternativa **c.**

a) Não tem solução.
b) Tem somente uma solução.
c) Tem duas soluções positivas.
d) Tem duas soluções cujo produto é negativo.
e) Tem duas soluções cujo produto é nulo.

CÁLCULO RÁPIDO

Muitas vezes, as equações exponenciais e logarítmicas que aparecem em problemas são simples e podem ser resolvidas mentalmente. Assim, resolva mentalmente os grupos de equações a seguir.

1
a) $\log_3 81 = x$ $x = 4$
b) $\log_2 x = -6$ $x = \frac{1}{64}$
c) $\log x = 3$ $x = 1\,000$
d) $\log_x \frac{1}{16} = 4$ $x = \frac{1}{2}$
e) $\log_4 16 = x$ $x = 2$
f) $\log_2 x = 16$ $x = 2^{16}$

2
a) $x^{27} = 1$ $x = 1$
b) $2^x = \frac{1}{32}$ $x = -5$
c) $3^x = \frac{1}{9}$ $x = -2$
d) $124^x = 1$ $x = 0$
e) $\sqrt{2^x} = 2$ $x = 2$
f) $\sqrt[3]{7^x} = 49$ $x = 6$

3
a) $\log_3 x = -2$ $x = \frac{1}{9}$
b) $2\log_2 x = 1$ $x = \sqrt{2}$
c) $3^{x-1} = 27$ $x = 4$
d) $25^x = \sqrt{5}$ $x = \frac{1}{4}$
e) $5 \cdot 5^{x-1} = 5$ $x = 1$
f) $\log x + \log 2 = 2$ $x = 50$

PARA RECORDAR

Aprender implica utilizar em novas situações conhecimentos já adquiridos. A proposta aqui é resolver problemas diversos que permitam relacionar o que foi estudado em anos anteriores, mas nada impede que colegas e livros sejam consultados.

1 **Quantos números inteiros estão entre $\sqrt{8}$ e $\sqrt{80}$?** 6 números.

2 **Considere a função $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que a cada número par associa 1 e a cada número ímpar associa 2.**

a) Calcule $f(2n)$ e $f(2n+1)$ com $n \in \mathbb{Z}$. $f(2n) = 1$; $f(2n+1) = 2$.

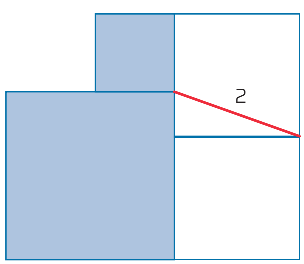
b) Obtenha $\mathrm{Im}(f)$. $\mathrm{Im}(f) = \{1, 2\}$

c) Resolva a equação $f(x) = 1$. $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é par}\}$

d) Resolva a equação $f(x) = 2$. $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é ímpar}\}$

3 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Obmep) A figura a seguir é formada por quatro quadrados. A medida do segmento destacado em vermelho é 2. Qual é a soma das áreas dos quadrados azuis? Alternativa **d**.



ID/BR

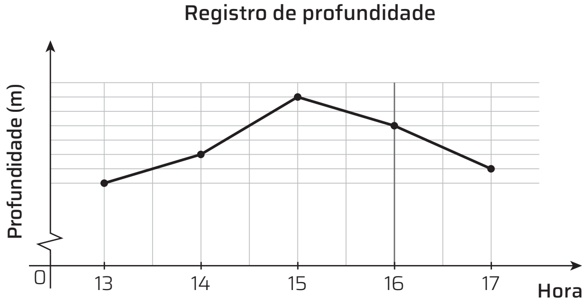
a) 2 c) 6 e) 10

b) 4 d) 8

4 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Enem) Num dia de tempestade, a alteração na profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 horas. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade h, registrada às 13 horas, não foi anotada e, a partir de h, cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro.

Registro de profundidade



Enem. Fac-símile: ID/BR

Foi informado que, entre 15 e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu em 10%.

Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metro, no local onde foram feitos os registros? Alternativa **a**.

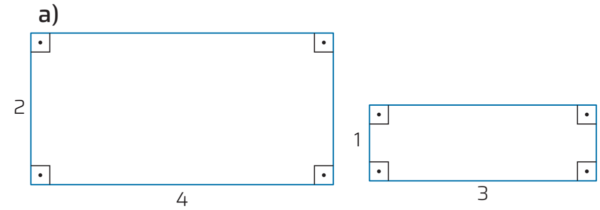
a) 18 c) 24 e) 40

b) 20 d) 36

5 **Dois polígonos são semelhantes quando os lados correspondentes são proporcionais dois a dois e os ângulos correspondentes são congruentes (com medidas iguais).**

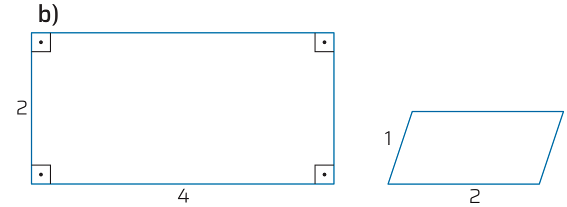
Quais dos pares de polígonos a seguir são semelhantes? Registre a alternativa no caderno. Alternativa **c**.

a)



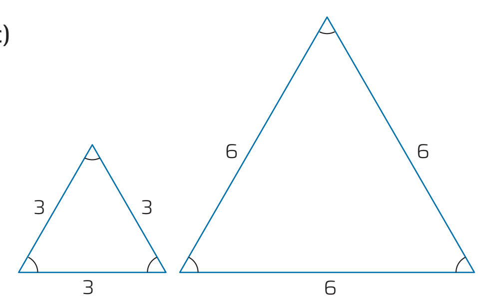
Ilustrações: /ID/BR

b)



Ilustrações: ID/BR

c)



Ilustrações: ID/BR

6 **Calcule as porcentagens indicadas a seguir.**

a) 45% de 60 27

b) 80% de 28 22,4

c) 3,5% de 650 22,75

7 **A quantia de R$ 62,00 corresponde a quantos por cento de R$ 230,00?** Aproximadamente 27% de R$ 230,00.

8 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(IFCE) Se, na fração $\frac{x}{y}$, diminuirmos o numerador x de 40% e o denominador y de 60%, a fração $\frac{x}{y}$ ficará: Alternativa **d**.

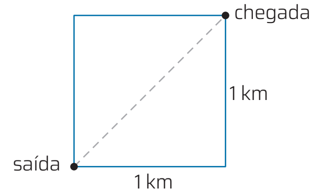
a) diminuída de 20%. d) aumentada de 50%.

b) aumentada de 20%. e) aumentada de 30%.

c) diminuída de 50%.

Não escreva no livro.

9 **Quanto tempo uma pessoa que caminha 1 quilômetro em 12 minutos economizará se, em vez de contornar 2 lados de um parque quadrado com 1 km de lado, ela o atravessar pela diagonal?** 7 minutos.



ID/BR

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Não é preciso cálculo, basta o raciocínio lógico para resolver esses problemas, mas o registro de suas ideias com desenhos, listas ou esquemas pode ajudar na resolução.

1 **(Obmep) Três caixas de diferentes cores estão colocadas lado a lado sobre uma mesa, elas devem ser numeradas com os números 1, 2 e 3. Siga as pistas e descubra a posição das caixas, suas cores e seus números.** Da esquerda para a direita, a primeira caixa é a caixa 2 de cor verde, no meio fica a caixa 1 de cor vermelha e a terceira caixa tem o número 3 e é amarela.

1) À esquerda da caixa 1 deve ficar a caixa verde.

2) A caixa vermelha tem que ficar à esquerda da caixa amarela.

3) À direita da caixa 2 deve estar a caixa 1.

O desafio agora é seu!

2 **(Obmep) Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos: "De quem são os celulares que tocaram?" Guto disse: "O meu não tocou", Carlos disse: "O meu tocou" e Bernardo disse: "O de Guto não tocou". Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?** Alternativa **b**.

Obmep. Fac-símile: ID/BR

a) O celular de Carlos tocou e o de Guto não tocou.

b) Bernardo mentiu.

c) Os celulares de Guto e Carlos não tocaram.

d) Carlos mentiu.

e) Guto falou a verdade.

A proposta desta seção é avaliativa. As produções dos estudantes trarão evidências da aprendizagem dos conceitos e, ao mesmo tempo, permitirão acompanhar a apropriação da linguagem relativa a logaritmos. Ao final, explicite aos estudantes que o que foi feito por eles é uma estratégia para desenvolvê-los em sua autogestão para estudar este tema e outros de qualquer área do conhecimento.

PALAVRAS-CHAVE

A seguir, temos alguns termos que mostram os principais conteúdos trabalhados neste capítulo.

- Logaritmo
- Propriedades dos logaritmos
- Base
- Função logarítmica
- Tábua de logaritmos

Escreva no caderno o que você aprendeu sobre cada um deles. Se necessário, releia o texto para tirar dúvidas.

MATEMÁTICA E SISMOGRAFIA

Esta seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **1**, **3** e **4** propostas pela BNCC ao utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico para entender e explicar a realidade. Além disso, possibilita uma integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, para discutir a competência específica **3** dessa área, e a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, como forma de desenvolver a competência específica **1** relativa a essa área.

A seção também contempla a habilidade **EM13MAT305** da área de Matemática e suas Tecnologias, na medida em que permite ao estudante compreender e interpretar a variação das grandezas. Ademais, possibilita trabalhar os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Meio Ambiente. Assim, sugerimos que a discussão da seção seja feita em parceria com os professores de Física, História e Geografia.

Como medir a magnitude de um terremoto

Você já pensou como reagir caso ocorra um terremoto? É provável que a maioria dos brasileiros nunca tenha pensado sobre isso, já que fortes tremores de terra não são comuns no Brasil. Em países como o Japão ou o Chile, por outro lado, essa é uma realidade bem cotidiana.

A Matemática também pode contribuir para o conhecimento sobre a ocorrência de terremotos por meio da medição de sismos. Leia as notícias a seguir sobre dois terremotos, um no Japão e outro no Chile.

Terremoto de magnitude 6,3 é registrado no sul do Japão

Autoridades não emitiram alerta de tsunami. *Segundo universidade, tremores dessa magnitude são capazes de provocar danos significativos em áreas densamente povoadas.*

Um terremoto de magnitude 6,3 atingiu o sul do Japão, segundo o Serviço Geológico dos EUA (USGS). O epicentro foi registrado perto da cidade de Uwajima, a cerca de 900 km de Tóquio, na ilha de Shikoku.

[...]

Terremoto de magnitude 6,3 é registrado no sul do Japão. *G1 Mundo*, 17 abr. 2024. Disponível em: https://g1.globo.com/mundo/noticia/2024/04/17/terremoto-registrado-no-sul-do-japao.ghtml. Acesso em: 24 jun. 2024.

Terremoto de Valdivia: o que o mundo aprendeu com o maior tremor de terra já registrado

No domingo, 22 de maio de 1960, o Chile sofreu o terremoto mais forte já registrado de sua história.

[...]

Com magnitude 9,5, o terremoto liberou energia equivalente a 20 mil bombas de Hiroshima e causou um *tsunami* com ondas de até 25 metros devastando populações costeiras.

[...]

A geografia do Chile mudou. Houve populações que afundaram e outras áreas subiram vários metros; um vulcão entrou em erupção e vários rios mudaram seu curso.

[...]

Mas os efeitos dolorosos e impressionantes do terremoto também deixaram lições para os cientistas que estudam esses fenômenos.

As vibrações planetárias que ele gerou, por exemplo, nos permitiram entender melhor como as ondas sísmicas viajam pela Terra.

O terremoto produziu as primeiras evidências das oscilações do planeta, que são úteis para entender melhor sua estrutura interna.

[...]

BBC News. Terremoto de Valdivia: o que o mundo aprendeu com o maior tremor de terra já registrado. *G1*, 22 maio 2020. Disponível em: https://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2020/05/22/terremoto-de-valdivia-o-que-o-mundo-aprendeu-com-o-maior-tremor-de-terra-ja-registrado.ghtml. Acesso em: 19 set. 2024.

Magnitude é a medida da quantidade de energia sísmica liberada no foco de um terremoto e da amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos, aparelhos extremamente sensíveis responsáveis por produzir sismogramas que medem as ondas geradas pelo terremoto.

PARA EXPLORAR

Filme

***O impossível*. Direção: Juan Antonio Bayona. Espanha/Tailândia/EUA, 2012 (118 min).**

Apaches Entertainment/ID/BR

O filme conta a história de uma família que estava viajando pela Tailândia quando foi surpreendida pelo terremoto e posterior *tsunami* que atingiu o país em 2004.

Escala Richter

O objeto digital acrescenta conhecimentos sobre escala Richter explorando diferentes reações que podem ser percebidas durante um tremor. Além disso, há informações sobre tremores verificados em diversas partes do mundo.

Como a quantidade de energia liberada por terremotos pode variar muito, as escalas sismológicas são logarítmicas (no caso das apresentadas, de base 10), para facilitar a representação da escala e os estudos.

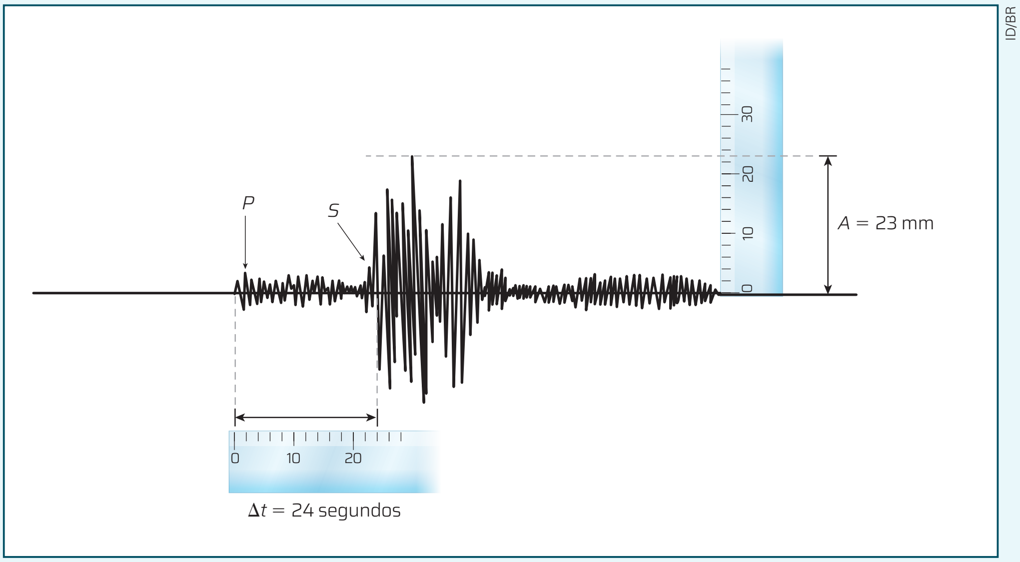
A magnitude de um terremoto é medida da seguinte maneira: o sismógrafo registra duas ondas sísmicas, a primária (*P*) e a secundária (*S*). Com base no intervalo de tempo entre elas (Δt), em segundo, e na amplitude das ondas sísmicas (*A*), em milímetro, utiliza-se a função da escala Richter, também conhecida como escala de magnitude local (M_L).

$$M_L = \log_{10}\left(\frac{A \cdot \Delta t^3}{1{,}62}\right)$$

Originalmente, essa escala variava de zero a nove graus. Atualmente, fala-se em escala aberta de Richter, pois já foram registrados terremotos de mais de nove graus de magnitude.

Apesar de a escala teoricamente não ter limite, acredita-se que as forças naturais envolvidas limitam o topo da escala em aproximadamente dez.

Para entender melhor como ela funciona, analise o seguinte sismograma obtido em um registro feito na Califórnia, nos Estados Unidos.



O intervalo de tempo entre os registros das ondas *P* e *S* é de 24 s, e a amplitude das ondas é de 23 mm. Utilizando a lei de formação da função logarítmica, temos:

$$\log_{10}\left(\frac{A \cdot \Delta t^3}{1{,}62}\right) = \log_{10}\left(\frac{23 \cdot 24^3}{1{,}62}\right) \simeq \log_{10} 196\,266{,}7 \simeq 5{,}3$$

Logo, esse terremoto teve magnitude de aproximadamente 5,3 na escala Richter.

Se considerar interessante, solicite aos estudantes que ampliem a abordagem da pesquisa proposta na atividade **2**, incluindo a capacidade de reconstrução e de reestruturação dos lugares pesquisados, considerando o contexto social, político e econômico e as tomadas de decisão dos governos dos diferentes países afetados.

Conectando ideias

1 **Faça uma pesquisa sobre a diferença entre magnitude e intensidade e registre no caderno as informações encontradas.**

2 **Na notícia sobre o terremoto no Chile, você teve a oportunidade de ler um resumo do potencial de danos que podem ser causados por conta da magnitude dos tremores sísmicos.**

Será que os terremotos que causam mais danos são sempre aqueles com maior magnitude?

- Organizem-se em grupos de três ou quatro integrantes e pesquisem informações sobre a relação entre a magnitude e os danos registrados.
- Busquem informações sobre os impactos físicos, econômicos, sociais, estruturais, entre outros, para a população e o local afetados.
- Organizem uma apresentação com esse material. Procurem explicitar a classificação do terremoto e apresentar a extensão dos danos causados, comparando os casos.

Durante o desenvolvimento dessa proposta você agiu com autonomia ou esperou pelos outros?

As respostas dos estudantes ao último item trazem evidências da competência socioemocional autogestão.

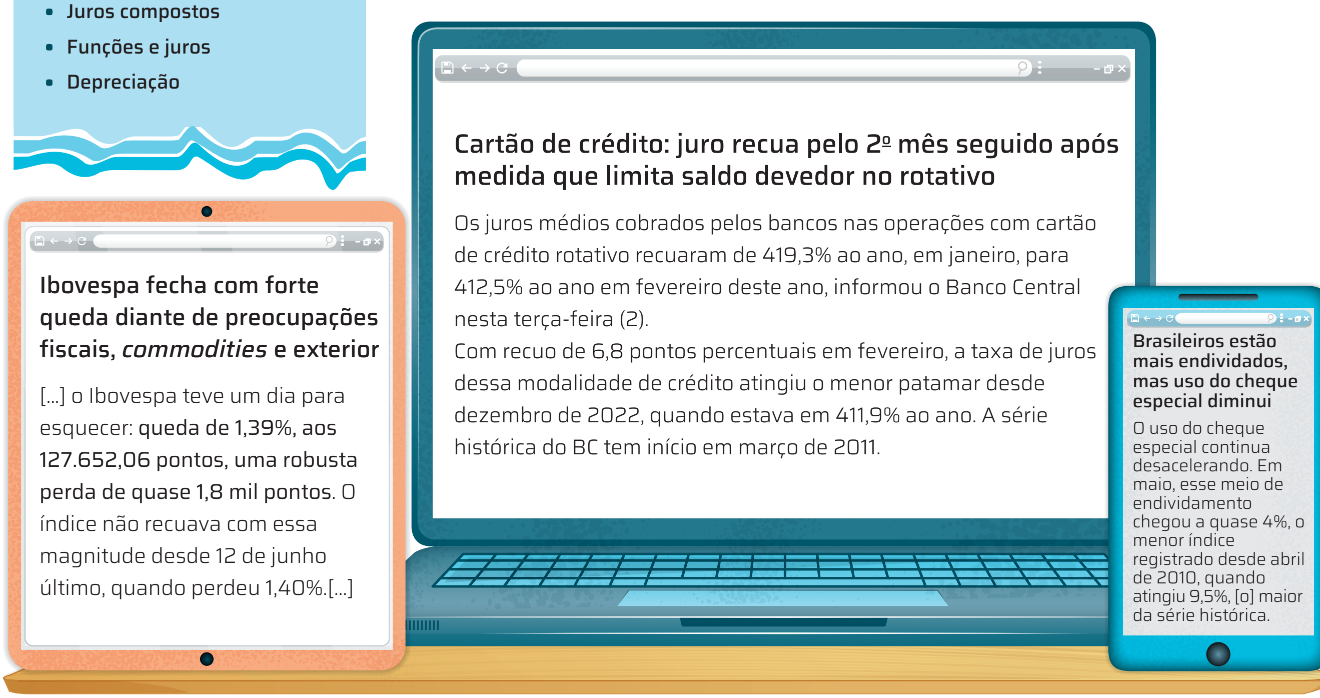
MATEMÁTICA FINANCEIRA

NESTE CAPÍTULO

- A linguagem da Matemática Financeira
- Porcentagem
- Juros simples
- Juros compostos
- Funções e juros
- Depreciação

Números por toda parte, cálculos a todo momento. Sem dúvida, você sabe que a Matemática está presente em muitas situações do dia a dia. Buscamos ampliar nosso olhar para além dos cálculos cotidianos, identificando a função exponencial como ferramenta para descrever vários fenômenos e os logaritmos para resolver problemas relacionados às funções exponenciais. Agora, vamos estudar a área financeira, segmento da atividade humana muito importante, que será útil para sua vida, tanto no presente quanto no futuro, norteando suas decisões e atitudes como consumidor consciente e responsável.

Para começar, leia a seguir os trechos de algumas notícias relacionadas às finanças.



Fontes: Ibovespa fecha com forte queda diante de preocupações fiscais, *commodities* e exterior. *Infomoney*, [*s. l.*], 18 jul. 2024. Disponível em: https://www.infomoney.com.br/mercados/ibovespa-hoje-bolsa-de-valores-ao-vivo-18072024/; Martello, Alexandro. *G1*, Brasília, DF, 2 abr. 2024. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2024/04/02/cartao-de-credito-juro-recua-pelo-2o-mes-seguido-apos-medida-que-limita-saldo-devedor-no-rotativo.ghtml; Alves, Tatiana. Brasileiros estão mais endividados, mas uso do cheque especial diminui. *Agência Brasil*, Rio de Janeiro, 10 jun. 2024. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/radioagencia-nacional/economia/audio/2024-06/brasileiros-estao-mais-endividados-mas-uso-do-cheque-especial-diminui. Acessos em: 19 jul. 2024.

Este capítulo trata das noções mais centrais da Matemática Financeira, com dois objetivos principais: a formação integral dos jovens para questões da atualidade, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral **6**; e a ampliação do significado das funções exponenciais e dos logaritmos, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT304** e **EM13MAT305**. Também mobiliza conhecimentos na resolução de problemas e no registro de soluções com o uso adequado da linguagem matemática.

PARA EXPLORAR

Artigo

Grando, Neiva Ignes; Schneider, Ido José. Matemática financeira: alguns elementos históricos e contemporâneos. *Zetetiké*, Campinas, v. 18, n. 1, p. 43-62, 2010.

Nesse artigo científico, publicado em uma revista que divulga a produção acadêmica ligada à área de Educação Matemática, você vai entender a importância e a necessidade de compreender os conteúdos de Matemática Financeira, tendo em vista que esse conhecimento permite tomar decisões mais assertivas diante das facilidades de crédito oferecidas pelo comércio e por instituições financeiras.

Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646693. Acesso em: 18 set. 2024.

Capacitar você para analisar diferentes cenários e possibilidades para seu dinheiro e o de sua família é um dos objetivos deste capítulo.

A leitura do artigo indicado no boxe *Para explorar* contribui para o desenvolvimento da competência geral **1**, ao promover a valorização dos conhecimentos científicos, usando-os como base para compreender a realidade.

Reserve um tempo para que os estudantes leiam o tópico “A linguagem da Matemática Financeira” e a primeira sequência de atividades resolvidas. Depois, incentive-os a falar a respeito do que já sabiam e do que relembraram, do que foi novidade e da importância, no dia a dia das pessoas, do assunto abordado nesse tópico. A leitura é uma das habilidades mais exigidas para o desenvolvimento do aprendizado; por isso, eles precisam praticá-la e aprimorá-la também nas aulas de Matemática.

A LINGUAGEM DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Certamente, quando você pensa em seu futuro e em tudo que pretende realizar, não espera passar por endividamento nem perder suas economias, certo? Vamos estudar alguns conceitos e cálculos da Matemática voltados a situações cotidianas da vida financeira, para que você entenda situações como: investimentos, parcelamento de dívidas, empréstimos, crediários e até cobrança de multas em contas comuns, como as de água e de luz.

Vamos analisar duas situações do cotidiano.

Situação A

Comente com os estudantes que as tarifas e o formato da conta de água podem mudar, dependendo da localidade. Explique a eles que as informações sobre pagamentos em atraso podem vir no verso da conta. Em alguns estados, a informação pode estar apenas no *site* da empresa responsável pelo saneamento básico, o que inclui o abastecimento de água.

Você sabe quanto custa pagar faturas após a data de vencimento? Já verificou que muitas contas básicas, como as de água ou de luz, apresentam informações sobre o procedimento em caso de pagamento em atraso? Observe a seguir a representação de uma conta de água.

ID/BR

CONTA MENSAL DE SERVIÇOS DE ÁGUA E ESGOTOS
PREFEITURA DE ÁGUA AZUL

CATEGORIA:
RESIDENCIAL

Fone: 156

NOME:
CECÍLIA ABREU SILVA

DATA EMISSÃO: 30/04/2024

MATRÍCULA:
213465798

ENDEREÇO:
RUA DAS ROSAS, 100 - CENTRO - CEP: 03155-020

MÊS REFERÊNCIA:
ABR/24

Dados da medição:	
Leitura atual (m^3)	16
Leitura anterior (m^3)	28
Consumo do mês (m^3)	12
Dias de consumo	30
Tarifa água (R$)	3,58
Tarifa esgoto (R$)	2,44

Nº. DA CONTA 10/077624197

LANÇAMENTO 10/010270733

Composição da conta:	
Consumo de água	42,96
Esgoto	29,28
Multa 2%	0,00
Juros de mora	0,00
Despesa administrativa	0,00

VENCIMENTO:
30/05/24

TOTAL A PAGAR (R$):
••••••••72,24

Mensagens:
No caso de pagamento em atraso será acrescido de multa de 2%, mais juros de mora de 0,033% ao dia.
A conta não paga até 90 dias após a data de vencimento sujeita o imóvel ao corte do fornecimento de água.

826900000029 618100430007 010077624194 702818750003

MATRÍCULA: 123456789	DATA EMISSÃO: 30/04/2024
VENCIMENTO: 30/05/24	TOTAL A PAGAR (R$): *******72,24

Os dados apresentados nesta conta são fictícios.

Repare que, para pagamento após a data de vencimento, há valores que são acrescentados. Você sabe a diferença entre **multa** de 2% e **juros de mora** de 0,033% ao dia?

Multa é um valor fixo a ser pago por uma infração independentemente do tempo de atraso, ou seja, a multa será cobrada uma única vez e o valor não mudará, não importando quantos dias tenham passado após o vencimento.

Juros de mora é uma taxa percentual sobre o atraso do pagamento, e seu valor aumenta conforme o atraso, ou seja, quanto mais tempo a conta ficar em aberto depois do vencimento, maior será o valor a ser pago.

Agora, vamos supor que haja um atraso de 10 dias no pagamento dessa conta. Qual será o valor total a ser pago?

Sabemos que a multa é 2% do valor total, ou seja:

$$\frac{2}{100} \cdot 72{,}24 = 1{,}4448$$

O valor acrescido por dia de juros de mora, em real, é de:

$$\frac{0{,}033}{100} \cdot 72{,}24 = 0{,}0238392$$

Como o atraso foi de 10 dias, o total dos juros de mora é calculado por:

$$10 \cdot 0{,}0238392 = 0{,}238392$$

Por fim, adicionamos os valores: $72{,}24 + 1{,}4448 + 0{,}238392 \simeq 73{,}92$

Portanto, o valor a ser pago é R$ 73,92.

Problemas de Matemática Financeira envolvem sistematicamente a noção de porcentagem. Prova disso é que o símbolo da porcentagem (%) foi empregado pela primeira vez em 1685, em um livro direcionado a comerciantes.

A expressão **por cento** vem do latim *per centum*, que significa “por um cento” ou “um em cem”. Como você deve se lembrar, a porcentagem é uma forma utilizada para representar uma fração com denominador 100 ou qualquer representação equivalente a ela. Por exemplo, 2% é o mesmo que $\frac{2}{100}$ ou 0,02.

Situações de compra, venda, prestações, aumentos e descontos são exemplos de como as porcentagens aparecem em nosso dia a dia.

Zivica Kerkez/Shutterstock.com/ID/BR

Ao contratar um empréstimo bancário, é importante buscar uma instituição financeira de confiança e avaliar se as parcelas cabem no orçamento.

Situação B

Isa fez um empréstimo de R$ 2000,00 em uma financeira e se comprometeu a pagar após seis meses. A taxa de juros combinada foi 10% ao mês. No final do prazo, porém, ocorreu um problema: o valor calculado por Isa não coincidia com aquele cobrado pela financeira.

Acompanhe como Isa e a gerente da financeira calcularam o valor a ser pago.

Cálculo da gerente

Ilustrações: ID/BR

1º mês: $2\,000 + 0{,}10 \cdot 2\,000 = 2\,000 + 200 = 2\,200$

2º mês: $2\,200 + 0{,}10 \cdot 2\,200 = 2\,420$

3º mês: $2\,420 + 0{,}10 \cdot 2\,420 = 2\,662$

4º mês: $2\,662 + 0{,}10 \cdot 2\,662 = 2\,928{,}20$

5º mês: $2\,928{,}20 + 0{,}10 \cdot 2\,928{,}20 = 3\,221{,}02$

6º mês: $3\,221{,}02 + 0{,}10 \cdot 3\,221{,}02 \simeq 3\,543{,}12$

Total a pagar: R$ 3 543,12

Cálculo de Isa

Em um mês: 10%

Em seis meses: $6 \cdot 10\% = 60\%$

2000 mais 60% de 2000 é o mesmo que:

$2000 + 0{,}60 \cdot 2000 = 2000 + 1200 = 3200$

Total a pagar: R$ 3 200,00

Por que os valores estão diferentes? Qual cálculo não está correto?

Para responder a essas questões e ajudar Isa a entender o que gerou essa diferença de valores, primeiro vamos estudar alguns conceitos relacionados à Matemática Financeira.

O valor R$ 2 000,00 pedido por Isa à financeira é chamado de **capital**.

Capital: em uma transação financeira, é o dinheiro emprestado, investido ou devido inicialmente. Também é conhecido como **principal**. Representamos o capital por C.

Sabemos que Isa concordou em pagar à financeira juros à taxa de 10% ao mês.

Juro: é o valor que se paga (ou se recebe) pelo dinheiro emprestado (ou aplicado). Representamos o juro por j.

Taxa de juro: é a taxa, em porcentagem, acordada para calcular quanto se paga (ou se recebe) pelo empréstimo (ou pela aplicação) do dinheiro. Representamos a taxa de juro por i.

A taxa de juro é sempre aplicada em relação a um intervalo de tempo, que pode ser em dias, meses ou anos.

No exemplo mencionado, Isa tomou o empréstimo por seis meses, prazo após o qual deveria devolver à financeira o valor emprestado mais o juro.

Prazo: é o tempo que decorre do início até o final de uma operação financeira. Representamos esse intervalo de tempo por t.

O prazo e a taxa devem ter sempre a mesma unidade de medida de tempo. Assim, se a taxa for diária, o prazo será em dias; se a taxa for mensal, o prazo será em meses, e assim por diante.

O valor a ser pago por Isa no vencimento do prazo de empréstimo é o **montante**.

Montante: é a soma do capital emprestado (ou investido) com o juro. Representamos o montante por M.

Bruto e líquido

Em um contexto financeiro, você já ouviu falar dos termos “bruto” e “líquido”? Sabe o que significam?

O valor bruto representa o valor completo, sem descontos. Já o valor líquido é o valor considerando os descontos. Observe alguns exemplos:

- Salário bruto é o salário sem descontos, e salário líquido é o salário com os descontos.
- Faturamento bruto é o valor total das vendas de mercadorias e serviços realizados no período contábil em avaliação. O faturamento líquido é calculado subtraindo-se do faturamento bruto os tributos devidos pelas empresas como ICMS, IPI, PIS/Pasep, Cofins e ISS.
- Lucro bruto é a diferença entre as receitas obtidas pelas vendas e o custo das mercadorias, e lucro líquido é igual ao lucro bruto descontadas as despesas de aluguéis, salários e impostos.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

No caderno, faça uma lista dos termos matemáticos que aparecem neste capítulo. Inclua uma breve explicação e exemplos de cada um deles.

R1 **Um televisor custava R$ 980,00. Catarina comprou esse aparelho à vista e obteve um desconto de 6%.**

a) Quanto Catarina economizou pagando à vista?

b) Quanto Catarina pagou pelo televisor?

Resolução

a) Para calcular quanto Catarina economizou, devemos encontrar o valor do desconto, que foi de 6% sobre o valor do aparelho, cujo preço era R$ 980,00. Podemos realizar esse cálculo de diversos modos. Acompanhe alguns:

1º modo: Transformando porcentagem em decimal.

$$0{,}06 \cdot 980 = 58{,}80$$

2º modo: Transformando a porcentagem em fração.

$$\frac{6}{100} \cdot 980 = \frac{5880}{100} = 58{,}80$$

Portanto, Catarina economizou R$ 58,80 ao pagar o televisor à vista.

b) Para calcular o preço final do televisor, fazemos:

$$980{,}00 - 58{,}80 = 921{,}20$$

Assim, Catarina pagou R$ 921,20 pelo televisor.

R2 **Fernando comprou um pequeno terreno por R$ 12 000,00 e deseja revendê-lo. Se conseguir vender o terreno por R$ 14 640,00, que porcentagem de lucro ele obterá?**

Resolução

O lucro pode ser calculado subtraindo-se o valor da compra do valor da venda.

$$14\,640 - 12\,000 = 2\,640$$

Para calcular a porcentagem de lucro, comparamos o valor do lucro com o valor de compra.

$$\begin{array}{ccc} 2\,640 & \text{———} & x\,\% \\ 12\,000 & \text{———} & 100\% \end{array}$$

Daí:

$$x = \frac{100 \cdot 2\,640}{12\,000}$$

$$x = 22$$

Podemos interpretar essa comparação da seguinte maneira: para cada R$ 100,00 pagos a mais pelo terreno, Fernando ganhará R$ 22,00 com a venda.

Assim, a porcentagem do lucro que ele obterá, se vender o terreno pelo preço que deseja, será 22%.

R3 **Rafaela comprou uma moto nova pensando em, futuramente, revendê-la. Sabendo que a cada ano o valor da moto desvaloriza 12% em relação ao preço original, qual expressão permite calcular o valor da moto daqui a 2 anos, se nada acontecer além do desgaste natural?**

Resolução

Considere x o valor da moto nova. Após 1 ano, a moto valerá x menos 12% de x, ou seja:

$$x - 0{,}12x = (1 - 0{,}12)x = 0{,}88x$$

Após 2 anos, a moto valerá $0{,}88x$ menos 12% de $0{,}88x$, ou seja:

$$0{,}88x - 0{,}12 \cdot 0{,}88x = (1 - 0{,}12) \cdot 0{,}88x =$$

$$= 0{,}88 \cdot 0{,}88x = (0{,}88)^2 \cdot x = 0{,}774x$$

A última expressão ($0{,}774x$) permite calcular o valor da moto após 2 anos, nas condições que o problema pede.

Por exemplo, se o valor inicial da moto foi R$ 4 000,00, então, após 2 anos, ela valerá:

$$0{,}774 \cdot \text{R\$ } 4\,000{,}00 = \text{R\$ } 3\,096{,}00$$

Se o preço de compra da moto foi R$ 3 200,00, após 2 anos, ela valerá:

$$0{,}774 \cdot \text{R\$ } 3\,200{,}00 = \text{R\$ } 2\,476{,}80$$

Logo, a expressão solicitada é $0{,}774x$, com x sendo o valor pago pela moto nova.

R4 **Marcelo conseguiu juntar um certo valor e pesquisou alguns investimentos que gostaria de fazer. Por fim, decidiu investir R$ 10 000,00 em um fundo monetário, em regime de juros compostos, obtendo rendimento líquido de 7% ao mês. Ao fim de seis meses, Marcelo retirou o valor acumulado, que foi de R$ 15 007,30. Nessa situação, qual foi o valor do juro que Marcelo recebeu?** Essa atividade menciona o regime de juros compostos, que será abordado mais adiante. Essa informação não é necessária para resolver a atividade, mas use essa oportunidade para verificar se os estudantes já ouviram falar de juros compostos e o que já sabem desse assunto.

Resolução

O capital inicial é o valor investido, ou seja:

$$C = 10\,000$$

Já o montante é o total acumulado, isto é, o capital adicionado ao juro. Então:

$$M = 15\,007{,}30$$

Sabendo que o juro é o valor recebido a mais pelo dinheiro aplicado, temos:

$$J = M - C$$

$$J = 15\,007{,}30 - 10\,000{,}00$$

$$J = 5\,007{,}30$$

Logo, Marcelo recebeu R$ 5 007,30 de juro.

Na atividade **R1**, são apresentados dois modos de cálculo de porcentagem. Aproveite para perguntar aos estudantes se eles sabem calcular porcentagem de outra maneira, incluindo o uso da calculadora. Valorizar a diversidade de saberes, como aqueles usados por comerciantes no cálculo de porcentagem, e discutir as similaridades e as diferenças com a matemática escolar são ações que contribuem para que os estudantes adquiram a competência geral **6**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Utilize a lista de termos que você fez no caderno e o que aprendeu na seção *Problemas e exercícios resolvidos* para resolver as próximas atividades.

1 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(UFT-TO) Uma lojista vendeu um rolo de papel de parede de 200 metros da seguinte forma: 80 m com lucro de 30%, 90 m com lucro de 10% e 30 m pelo preço de custo.

Sabendo que o custo total desse rolo de papel de parede foi de R$ 1000,00, é **CORRETO** afirmar que o lucro total, em porcentagem, da venda de todo o rolo é de Alternativa **b**.

a) 10,2%

b) 16,5%

c) 20,4%

d) 30,6%

2 **Uma pessoa recebe por mês três salários mínimos e tem 5% de desconto relativo à Previdência Social em seu pagamento. Qual é o valor do salário após o desconto?** 2,85 salários mínimos.

3 **O governo de certo país anunciou aumento no preço dos combustíveis. Esse aumento será de 3,5% e ocorrerá no fim de maio e no fim de julho. Se o preço do litro da gasolina nesse país, em abril, era de 1,52 na moeda local, quanto o litro de gasolina passará a custar em agosto?** 1,63 na moeda local.

4 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Unit-SE) Considera-se que custo, lucro e receita, na comercialização de um produto, sejam modelados como funções lineares das quantidades produzidas e vendidas.

Sobre uma empresa que comercializa um produto eletrônico sabe-se que

- opera com um custo fixo de R$ 20 000,00 e com um custo variável, por unidade, de R$ 60,00;
- opera com um preço unitário de venda deste produto de R$ 80,00;
- a quantidade que produz e vende por mês é de 1 600 unidades.

Considerando-se que o proprietário pretende manter o lucro atual, reduzindo o preço de venda do produto em 5%, é correto afirmar que, nessas condições, a quantidade mensal vendida do produto Alternativa **c**.

a) aumentará 15%.

b) aumentará 20%.

c) aumentará 25%.

d) diminuirá 15%.

e) permanecerá a mesma, pois o lucro não será alterado.

5 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Famerp-SP) Antônio comprou um bilhete com um número de rifa de eletrodoméstico por R$ 3,00, com chance de 1 em 8 000. Sabe-se que cada bilhete da rifa tinha exatamente um número e custava o mesmo valor, e que os organizadores do sorteio venderam todos os bilhetes e tiveram lucro de 60% sobre o custo de compra do eletrodoméstico. Nessas condições, o custo do eletrodoméstico sorteado foi de Alternativa **b**.

a) R$ 38 400,00.

b) R$ 15 000,00.

c) R$ 12 400,00.

d) R$ 14 400,00.

e) R$ 40 000,00.

6 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(FGV-SP) Gabriel e Júlia investiram dinheiro em criptomoedas durante dois anos e tiveram sorte: os rendimentos foram muito bons. Gabriel investiu R$ 1000,00 em uma criptomoeda nova, que rendeu 80% no primeiro ano e 25% no ano seguinte. Júlia também investiu R$ 1000,00, em uma criptomoeda mais estável, que manteve taxas de rendimento constantes nestes dois anos. Ao final desse período, Gabriel e Júlia estavam exatamente com o mesmo dinheiro. A taxa de rendimento anual da criptomoeda escolhida pela Júlia foi de Alternativa **c**.

a) 40%.

b) 45%.

c) 50%.

d) 55%.

e) 52%.

7 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Enem) No ano em que uma empresa lançou seu novo modelo de celular no mercado brasileiro, investiu 45 milhões de reais no primeiro semestre em cada uma das cinco regiões do país, colocando à venda 30 mil aparelhos por região. No primeiro semestre, todos os aparelhos colocados à venda foram vendidos, gerando um lucro total de 30 milhões de reais. No segundo semestre, a empresa decidiu que faria o mesmo investimento e colocou à venda a mesma quantidade de aparelhos por região. Por causa da demanda observada, a empresa considerou que todos os aparelhos desse modelo que fossem ofertados sejam vendidos e, além disso, planeja obter um lucro total 10% maior no segundo semestre do que o que obteve no primeiro.

Para que essa empresa alcance o lucro planejado, qual deve ser o valor de venda, em real, de um aparelho celular desse modelo, no segundo semestre desse ano? Alternativa **b**.

a) R$ 1650,00

b) R$ 1720,00

c) R$ 1870,00

d) R$ 2 500,00

e) R$ 2 600,00

Discuta com os estudantes as estratégias de cálculo que eles utilizaram para resolver algumas das atividades. Essa é uma maneira de valorizar diferentes maneiras de pensar e de desenvolver a argumentação e o uso da linguagem matemática.

8 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Fuvest-SP) Uma empresa farmacêutica produz certo medicamento, o qual é formado por quatro componentes, conforme indicado na tabela I. O custo do grama de cada um dos componentes desse medicamento também é apresentado nessa tabela.

Tabela I

Composição do medicamento	Quantidade (em mg)	Custo (em R$/g)
Componente A	200	700
Componente B	70	500
Componente C	130	300
Componente D	100	120

Para a produção do próximo lote do medicamento, a empresa terá um gasto diferente para fabricá-lo, pois os custos de alguns componentes sofreram alterações, conforme mostra a tabela II.

Tabela II

Composição do medicamento	Validação no custo (em %)
Componente A	+7
Componente B	−5
Componente C	0
Componente D	+10

Note e adote:

Considere que os outros custos de produção permaneceram inalterados.

Qual é o aumento, em reais, no custo do medicamento? Alternativa **a**.

a) 9,25
b) 12,00
c) 12,75
d) 36,00
e) 86,00

9 **Escreva no caderno a alternativa correta.**

(Enem) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas: Alternativa **c**.

Investimento **A**: 3% ao mês

Investimento **B**: 36% ao ano

Investimento **C**: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	3	6	9	12
$(1{,}03)^n$	1,093	1,194	1,305	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá:

a) escolher qualquer um dos investimentos **A**, **B** ou **C**, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
b) escolher os investimentos **A** ou **C**, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
c) escolher o investimento **A**, pois sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos **B** e **C**.
d) escolher o investimento **B**, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento **A** e de 18% do investimento **C**.
e) escolher o investimento **C**, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos **A** e **B**.

10 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a serem pagos em dois investimentos: poupança e CDB (Certificado de Depósito Bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro: Alternativa **d**.

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de Renda)
Poupança	0,560	Isento
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é:

a) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.
b) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.
c) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.
d) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.
e) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

11 **Explique por que a alternativa c da questão anterior está certa ou errada.** Está errada, pois não foram descontados os 4% do Imposto de Renda sobre o ganho.

12 **Crie mais duas afirmações corretas para a atividade 10.**
Resposta pessoal. Consulte os exemplos no Manual do Professor.

Ao realizar a atividade **11**, os estudantes desenvolvem a habilidade de argumentação, o que colabora para a aquisição da competência geral **7**.

IDENTIFICANDO DOIS TIPOS DE JUROS

Quando um capital é aplicado ou emprestado a determinada taxa, por um certo período ou vários intervalos de tempo, o montante pode crescer conforme dois critérios ou regimes: de capitalização simples ou de capitalização composta.

Esses dois sistemas também são conhecidos como juros simples, no primeiro caso, e juros compostos, no segundo. Vamos conhecer um pouco mais cada um deles.

Juros simples

No regime de juros simples, estes incidem sempre sobre o capital inicial. Na prática, esse sistema é usado especialmente em pagamentos cujo atraso é de apenas alguns dias. Lembre-se dos juros de mora da conta de água apresentada no início deste capítulo. O cálculo de juros de mora é feito pelo regime de juros simples.

Juros compostos

Nesse regime, após cada período, os juros são incorporados ao capital inicial, de modo que a taxa de juros passe a incidir sobre o novo total. Dessa maneira, os cálculos são efetuados como "juros sobre juros".

Na prática, as empresas, os órgãos governamentais e os investidores costumam reinvestir as quantias geradas pelas aplicações financeiras, o que justifica o emprego mais comum de juros compostos na economia.

Sabendo disso, vamos voltar à situação **B** do início do capítulo para, finalmente, chegar a uma conclusão sobre a diferença entre os cálculos feitos por Isa e pela gerente da financeira. Para isso, retomemos os cálculos apresentados no problema.

Cálculo da gerente

ID/BR

1º mês: $2\,000 + 0{,}10 \cdot 2\,000 = 2\,000 + 200 = 2\,200$

2º mês: $2\,200 + 0{,}10 \cdot 2\,200 = 2\,420$

3º mês: $2\,420 + 0{,}10 \cdot 2\,420 = 2\,662$

4º mês: $2\,662 + 0{,}10 \cdot 2\,662 = 2\,928{,}20$

5º mês: $2\,928{,}20 + 0{,}10 \cdot 2\,928{,}20 = 3\,221{,}02$

6º mês: $3\,221{,}02 + 0{,}10 \cdot 3\,221{,}02 \simeq 3\,543{,}12$

Total a pagar: R$ 3 543,12

Cálculo de Isa

ID/BR

Em um mês: 10%

Em seis meses: $6 \cdot 10\% = 60\%$

2 000 mais 60% de 2 000 é o mesmo que:

$2000 + 0{,}60 \cdot 2000 = 2000 + 1200 = 3200$

Total a pagar: R$ 3 200,00

Para descobrir por que os valores estão diferentes, precisamos analisar qual foi o critério usado nos cálculos de cada uma. Ao observarmos as duas anotações, podemos perceber que, apesar de ambas utilizarem as mesmas informações de capital, taxa de juros e prazo, a gerente seguiu o regime de juros compostos e Isa, o regime de juros simples. Esse foi o motivo da diferença entre os valores finais.

Leia este texto com os estudantes e proponha uma conversa para que apresentem suas percepções e possíveis relações com o que sabem de empréstimos e juros. Uma pesquisa sobre a história dos bancos e sua relação com o desenvolvimento das sociedades modernas pode ser uma proposta interessante de integração com o componente curricular História, contribuindo para o trabalho com a competência específica **1** de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Essa proposta também favorece o desenvolvimento das competências gerais **1**, **6** e **9**, ao promover a valorização do conhecimento e da diversidade de saberes para a compreensão do mundo e para a tomada de decisões conscientes e responsáveis. Além disso, a discussão é sempre uma oportunidade de exercer a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.

A ideia de cobrar juros é antiga

Cobrar juros não é uma prática recente. Sua origem remonta a tempos antigos, como podemos constatar ao ler o texto a seguir.

No *Liber Abaci di Fibonacci* (Leonardo de Pisa), escrito em 1202, aparece o seguinte problema [...]:

> *Um homem aplica um denário a juros [compostos] a uma taxa tal que em cinco anos ele tem dois denários, e em cada cinco anos daí em diante o dinheiro dobra. Pergunto: quantos denários ele ganharia em cem anos a partir de seu denário inicial?*

[...] O costume de cobrar juros encontra-se já em 2000 a.C., como registra uma antiga tábula de argila babilônica. Daremos um exemplo [...]:

> *Vinte "manehs" de prata, o valor da lã, os haveres de Belshazzar, o filho do rei... Todos os haveres de Nadin-Merodach na cidade e no campo serão caução dada a Belshazzar, o filho do rei, até que Belshazzar receba totalmente o dinheiro bem como os juros sobre ele.*

As taxas de juro na Babilônia chegaram a atingir 33%. Em Roma, na época de Cícero, permitia-se até 48%. Justiniano posteriormente estabeleceu como máximo permissível a taxa de 0,5% ao mês, que deu origem à taxa comum de 6% ao ano. Na Índia, porém, durante o século XII registraram-se taxas de até 60%.

A origem da palavra "interest" [(do inglês, "juro")] está relacionada com a política da Igreja, que proibia a usura no pagamento do uso da moeda. O agiota contornava essa proibição imposta pelas leis canônicas cobrando uma remuneração somente no caso de o dinheiro ser devolvido com atraso (o que acontecia com frequência, mesmo naqueles dias!).

Ele argumentava que a remuneração o compensava pela diferença monetária entre sua condição financeira empobrecida, devido ao pagamento atrasado, e a condição que teria no caso de reembolso imediato. Essa diferença era o *id quod interest* ("aquilo que está entre").

Anuidades já eram conhecidas em 1556, ano em que Niccolo Tartaglia, em seu *General trattato*, colocou o seguinte problema, trazido, segundo ele, por um cavalheiro de Barri, que dissera que a transação efetivamente tinha acontecido [...]:

> *Um mercador cedeu a uma universidade 2814 ducados com o entendimento de que deveria receber 618 ducados por ano durante nove anos, ao fim dos quais os 2814 ducados seriam considerados pagos. Que juros estava ele obtendo sobre seu dinheiro?*

[...] sem logaritmos e tabelas de anuidades, não era considerado um problema fácil.

[...]

jittawit21/Shutterstock.com/ID/BR

SHIVELY, L. S. Juros e anuidades. *In*: BAUMGART, John K. *Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula*: álgebra. São Paulo: Atual, 1992. p. 96-97.

Após ler o texto, converse com os colegas e o professor sobre como as pessoas calculam juros: Quais ferramentas elas usam? Como elas aprendem a calcular juros?

Aqui, trazemos a perspectiva da etnomatemática para que os estudantes conheçam e expliquem saberes e fazeres que, além de serem construídos de acordo com as necessidades de determinados grupos e cultura, são diferentes do pensamento matemático formal.

CÁLCULO DE JUROS SIMPLES

Voltemos mais uma vez à situação **B**, com especial atenção aos cálculos de Isa, mostrados neste quadro com maior detalhamento.

Período	Capital inicial (R$)	Juros no período (R$)	Montante a ser pago (R$)
1º mês	2000	$j_1 = 2000 \cdot 0{,}10 = 200$	$M_1 = C + j_1 = 2000 + 200 = 2200$
2º mês	2000	$j_2 = 2000 \cdot 0{,}10 \cdot 2 = 200 \cdot 2 = 400$	$M_2 = C + j_2 = 2000 + 400 = 2400$
3º mês	2000	$j_3 = 2000 \cdot 0{,}10 \cdot 3 = 200 \cdot 3 = 600$	$M_3 = C + j_3 = 2000 + 600 = 2600$
4º mês	2000	$j_4 = 2000 \cdot 0{,}10 \cdot 4 = 200 \cdot 4 = 800$	$M_4 = C + j_4 = 2000 + 800 = 2800$
5º mês	2000	$j_5 = 2000 \cdot 0{,}10 \cdot 5 = 200 \cdot 5 = 1000$	$M_5 = C + j_5 = 2000 + 1000 = 3000$
⋮	⋮	⋮	⋮
tº mês	2000 ↓ C	$j = 2000 \cdot 0{,}10 \cdot t$ ↓ ↓ ↓ ↓ $j = C \cdot i \cdot t$	$M = 2000 + \underbrace{2000 \cdot 0{,}10 \cdot t}$ ↓ ↓ ↓ $M = C + j$

Não escreva no livro.

Observando o quadro da página anterior, podemos notar que, se continuássemos até um tempo t indeterminado, o cálculo do juro simples poderia ser generalizado assim:

Se um capital C, aplicado a uma taxa i ao período, no sistema de juros simples, rende juros j ao fim de um período t, podemos dizer que:

$$j = C \cdot i \cdot t$$

O montante a ser pago (ou recebido) após esse período é dado pelo capital inicial mais o juro.

$$M = C + j$$

Note que, no caso de depreciação ou multa, o valor de j é negativo, ou seja, deve ser subtraído do capital.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Leia cada problema e resolva-o acompanhando a resolução apresentada. Se tiver dúvidas com relação aos termos usados, retome os tópicos anteriores.

R5 **Um capital foi aplicado em regime de juros simples à taxa de 1,5% a.m. (ao mês) por três meses. Ao final desse período, apresentou um rendimento de R$ 135,00. Qual foi o capital aplicado?**

Resolução

Podemos encontrar a resposta para esse problema de dois modos. Acompanhe.

1º modo: Aplicando a fórmula para cálculo de juros simples: $j = C \cdot i \cdot t$

Nesse caso, temos: $j = 135$, $i = 1{,}5\% = 0{,}015$ e $t = 3$.

Substituindo os valores na fórmula, obtemos:

$$135 = C \cdot 0{,}015 \cdot 3$$
$$C = 3\,000$$

2º modo: Usando proporcionalidade.

Em três meses, os juros foram de R$ 135,00. Logo, em um mês eles foram de R$ 45,00 (135 : 3 = 45).

Assim, a taxa de juros de 1,5% ao mês deu, sobre o capital aplicado, um ganho mensal de R$ 45,00. Assim, temos:

$$\begin{array}{ccc} 1{,}5\% & \text{———} & 45 \\ 100\% & \text{———} & x \end{array}$$

Daí:

$$1{,}5x = 4\,500$$
$$x = \frac{4\,500}{1{,}5}$$
$$x = 3\,000$$

Portanto, o capital aplicado inicialmente foi R$ 3 000,00.

R6 **Qual é a taxa mensal de juros simples que faz um capital de R$ 9 500,00 produzir um montante de R$ 11 900,00 ao fim de um ano?**

Resolução

Vamos lembrar que $M = C + j$; então:

$$j = M - C$$

No nosso caso, temos:

$$j = 11\,900 - 9\,500$$
$$j = 2\,400$$

Para calcular a taxa, podemos usar: $j = C \cdot i \cdot t$

Como a taxa de juros é mensal, o tempo também deve estar representado em meses. Como um ano equivale a 12 meses, temos:

$$2\,400 = 9\,500 \cdot i \cdot 12$$
$$i = 0{,}021$$

Portanto, a taxa de juros é 2,1% ao mês.

R7 **O preço à vista de um eletrodoméstico é R$ 350,00. Para adquiri-lo, é possível dar uma entrada de R$ 80,00 e financiar o restante em 12 meses com juros simples de 4% ao mês. Qual será o valor de cada prestação?**

Resolução

Após o pagamento da entrada, o valor a ser financiado em 12 meses será:

$$350 - 80 = 270$$

Isso corresponde a parcelas mensais de:

$$270 : 12 = 22{,}50$$

A essas parcelas mensais, devem ser acrescidos juros de 4%, resultando em:

$$22{,}50 + 0{,}04 \cdot 22{,}50 = 22{,}50 + 0{,}90 = 23{,}40$$

Logo, o valor de cada prestação será R$ 23,40.

Ler com os estudantes esta parte do capítulo permite que eles compreendam como usamos a generalização de um padrão observado na construção de expressões algébricas e fórmulas.

CÁLCULO DE JUROS COMPOSTOS

Voltando à situação **B**, vamos analisar os cálculos feitos pela gerente da financeira. Observe o quadro a seguir.

Período	Capital inicial (R$)	Juros no período (R$)	Montante a ser pago (R$)
1º mês	2000,00	$j_1 = 0{,}10 \cdot 2000 = 200$	$M_1 = C + j_1 = 2000 + 200 = 2200$
2º mês	2200,00	$j_2 = 0{,}10 \cdot 2200 = 220$	$M_2 = M_1 + j_2 = 2200 + 220 = 2420$
3º mês	2420,00	$j_3 = 0{,}10 \cdot 2420 = 242$	$M_3 = M_2 + j_3 = 2420 + 242 = 2662$
4º mês	2662,00	$j_4 = 0{,}10 \cdot 2662 = 266{,}20$	$M_4 = M_3 + j_4 = 2662 + 266{,}20 = 2928{,}20$
5º mês	2928,20	$j_5 = 0{,}10 \cdot 2928{,}20 = 292{,}82$	$M_5 = M_4 + j_5 = 2928{,}20 + 292{,}82 = 3221{,}02$
6º mês	3221,02	$j_6 = 0{,}10 \cdot 3221{,}02 = 322{,}102$	$M_6 = M_5 + j_6 = 3221{,}02 + 322{,}10 = 3543{,}12$

Você deve estar imaginando que, se o tempo do empréstimo fosse bem maior que seis meses, seria muito trabalhoso para a gerente calcular o valor a ser pago, mês a mês. E você tem razão! Portanto, devemos encontrar um modo mais simples de fazer isso.

Revendo o cálculo da gerente, note que, para saber o montante de cada mês, adicionamos o capital inicial ao juro.

Verifique se os estudantes perceberam que o valor dos juros é calculado sobre o montante do mês anterior, ou seja, para calcular os juros do segundo mês, precisamos saber o montante do primeiro; para calcular os juros do terceiro mês, precisamos saber o montante do segundo; e assim por diante.

$$M_1 = C + j_1$$
$$M_1 = C + i \cdot C$$
$$M_1 = C(1 + i)$$

Vamos reescrever o quadro anterior com base nessa notação.

Período	Capital inicial	Juros no período	Montante a ser pago
1º mês	C	$i \cdot C$	$M_1 = C + i \cdot C = C(1 + i)$
2º mês	M_1	$i \cdot M_1$	$M_2 = M_1 + i \cdot M_1 = M_1(1 + i) = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = C(1 + i)^2$
3º mês	M_2	$i \cdot M_2$	$M_3 = M_2 + i \cdot M_2 = M_2(1 + i) = C \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) = C(1 + i)^3$
4º mês	M_3	$i \cdot M_3$	$M_4 = M_3 + i \cdot M_3 = M_3(1 + i) = C \cdot (1 + i)^3 \cdot (1 + i) = C(1 + i)^4$
5º mês	M_4	$i \cdot M_4$	$M_5 = M_4 + i \cdot M_4 = M_4(1 + i) = C \cdot (1 + i)^4 \cdot (1 + i) = C(1 + i)^5$
6º mês	M_5	$i \cdot M_5$	$M_6 = M_5 + i \cdot M_5 = M_5(1 + i) = C \cdot (1 + i)^5 \cdot (1 + i) = C(1 + i)^6$

Nesse novo quadro, podemos perceber que a sequência dos montantes calculados, mês a mês, forma uma progressão geométrica de razão $(1 + i)$. Assim:

Dados o capital inicial C, a taxa i e o tempo de aplicação do capital t, o cálculo do montante é dado por:

$$M = C\,(1 + i)^t$$

Note que a taxa de juros e o prazo devem estar na mesma unidade de medida de tempo. No exemplo, a unidade é o mês.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Aproveite os problemas resolvidos para que os estudantes trabalhem aspectos essenciais de exponenciais e logaritmos, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT304** e **EM13MAT305**.

R8 **Luís aplicou R\$ 2500,00 à taxa de 2% ao mês durante cinco meses.**

a) Quanto ele receberá de juros, se o regime da aplicação for de juros simples?

b) Quanto ele receberá de juros, se o regime da aplicação for de juros compostos?

c) Em cada caso, que montante ele terá ao fim de cada uma das aplicações?

Resolução

O problema fornece os dados a seguir.

- $C = 2500$ (valor aplicado)
- $i = 2\% = 0{,}02$ (taxa de juros)
- $t = 5$ meses (tempo da aplicação)

a)
$$j = C \cdot i \cdot t$$
$$j = 2500 \cdot 0{,}02 \cdot 5 = 250$$

Luís receberá R\$ 250,00 de juros.

b) Para calcular os juros, precisamos primeiro fazer o cálculo do montante que será recebido após a aplicação:

$$M = C\,(1 + i)^t$$
$$M = 2500\,(1 + 0{,}02)^5$$
$$M = 2500 \cdot 1{,}02^5$$
$$M \simeq 2500 \cdot 1{,}104$$
$$M \simeq 2760$$

O juro será obtido se fizermos:

$$j = M - C$$
$$j \simeq 2760 - 2500$$
$$j \simeq 260$$

Luís receberá aproximadamente R\$ 260,00 de juros.

c) No caso de juros simples, o montante será de:

$$M = C + j = 2500 + 250 = 2750$$

Assim, o montante será de R\$ 2750,00.

Como calculado no item anterior, no caso de juros compostos, o montante será de aproximadamente R\$ 2760,00.

R9 **Andrea deseja aplicar R\$ 18000,00 a juros compostos de 0,5% ao mês. Que montante ela terá após um ano de aplicação?**

Resolução

O problema nos fornece os seguintes dados:

- $C = 18000$ (valor que Andrea deseja aplicar)
- $i = 0{,}5\% = 0{,}005$ (taxa de juros)
- $t = 1$ ano ou 12 meses (tempo da aplicação)

O montante será de:

$$M = C\,(1 + i)^t$$
$$M = 18000 \cdot (1 + 0{,}005)^{12}$$
$$M = 18000 \cdot 1{,}005^{12}$$

Para obter $1{,}005^{12}$, podemos:

- calcular manualmente, com lápis e papel;
- usar uma calculadora simples, digitando: 1 · 0 0 5, depois a tecla × e em seguida 11 vezes a tecla = ;
- usar uma calculadora científica e a tecla y^x ou x^y.

Nesse caso, digite:

1 · 0 0 5 y^x 1 2 =

ou

1 · 0 0 5 SHIFT x^y 1 2 =

Em qualquer um dos modos que sugerimos, devemos obter $1{,}005^{12} \simeq 1{,}062$. Com isso, será possível calcular o montante:

$$M \simeq 18000 \cdot 1{,}062 = 19116$$

Andrea terá, após um ano de aplicação, aproximadamente R\$ 19116,00.

R10 **Expresse o tempo *t* de uma aplicação em função do montante *M*, do capital *C* e da taxa de aplicação *i* nesse mesmo tempo *t*.**

Resolução

Temos $M = C\,(1 + i)^t$. Para isolar t em um dos membros da equação, fazemos:

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^t$$

Temos, então, uma equação exponencial. Para resolvê-la, podemos usar o logaritmo.

$$t = \log_{(1+i)}\left(\frac{M}{C}\right)$$

Usando a propriedade de mudança de base e o logaritmo de um quociente, podemos escrever:

$$t = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log\,(1+i)} = \frac{\log M - \log C}{\log\,(1+i)}$$

Outra maneira de calcular é usar o logaritmo de uma potência e o logaritmo de um quociente:

$$\log \frac{M}{C} = t \cdot \log\,(1+i)$$
$$t \cdot \log\,(1+i) = \log M - \log C$$
$$t = \frac{\log M - \log C}{\log\,(1+i)}$$

Observe que, aplicando as propriedades dos logaritmos, sempre podemos calcular o tempo t de uma aplicação ou de um empréstimo para conseguir um montante M a uma taxa de aplicação i.

Com a turma, compare a resolução das atividades **R8** e **R9**. Observe que, na atividade **R8**, o cálculo dos montantes, apesar de trabalhoso, pode ser feito à mão. Já na atividade **R9**, recorreu-se à calculadora.

R11 **Ana quer aplicar R$ 6000,00 com o objetivo de, após um ano e três meses, ter guardado R$ 9348,00. Que taxa mensal sua aplicação deverá render para que ela consiga o valor desejado?**

Resolução

O problema fornece os dados a seguir.

- $C = 6000$ (valor que será aplicado)
- $t = 1$ ano e 3 meses ou 15 meses (tempo da aplicação)
- $M = 9348$ (valor que Ana deseja receber pela aplicação ao final do período)

Precisamos descobrir a taxa que dará o montante desejado no prazo estabelecido. Então:

$$M = C(1 + i)^t$$
$$9348 = 6000(1 + i)^{15}$$
$$\frac{9348}{6000} = (1 + i)^{15}$$
$$1{,}558 = (1 + i)^{15}$$

De acordo com a atividade **R10**, podemos fazer:

$$\log 1{,}558 = 15 \cdot \log (1 + i) \quad (1)$$

Usando uma calculadora científica e a tecla log, fazemos 1 · 5 5 8 log e obtemos:

$$\log 1{,}558 \simeq 0{,}192567$$

Voltando à expressão (1), temos:

$$0{,}192567 \simeq 15 \cdot \log (1 + i)$$
$$\frac{0{,}192567}{15} \simeq \log (1 + i)$$
$$0{,}0128378 \simeq \log (1 + i)$$

De acordo com a definição de logaritmo:

$$10^{0{,}0128378} \simeq 1 + i \quad (2)$$

Usando a tecla y^x ou a tecla x^y da calculadora científica, temos:

$$10^{0{,}0128378} \simeq 1{,}03000$$

Voltando à expressão (2), temos:

$$1{,}0300 \simeq 1 + i$$

Logo:

$$i \simeq 0{,}0300 \text{ ou } i \simeq 3\%$$

Assim, em sua aplicação, Ana deverá procurar uma taxa de aproximadamente 3% ao mês para obter o montante desejado.

Como você observou, para resolver esse problema, usamos a calculadora científica. Você deve estar se perguntando como fará quando não puder usar uma calculadora, como acontece em algumas provas seletivas, por exemplo. Nesse caso, a questão da prova informa o valor do logaritmo que deve ser usado.

R12 **(Uerj) Os clientes de um banco podem realizar apenas duas operações financeiras:**

- fazer investimentos que rendem juros compostos a uma taxa mensal de 1%; ou
- pegar empréstimos com juros compostos a uma taxa mensal de 5%.

O banco usa o dinheiro dos investimentos para conceder os empréstimos, obtendo lucro nessas transações.

Considere que um cliente X investiu R$ 1000,00 e que o banco emprestou esse valor a um cliente Y. Após 12 meses, o cliente X recebeu o montante pela aplicação nesse período e Y quitou o empréstimo. Admitindo $(1{,}01)^{12} = 1{,}13$ e $(1{,}05)^{12} = 1{,}80$, o lucro, em reais, obtido pelo banco com essas duas operações financeiras é igual a:

a) 470 b) 520 c) 670 d) 820

Resolução

O problema apresenta duas operações: uma aplicação e um empréstimo. Vamos calcular cada uma para descobrir o lucro obtido pelo banco.

Primeiro, vamos calcular o juro recebido pelo cliente X pelo seu investimento. Sabemos que:

- $C = 1000$ (valor investido)
- $t = 12$ meses (tempo da aplicação)
- $i = 1\% = 0{,}01$ (taxa de juros)

Então, o montante é:

$$M = 1000(1 + 0{,}01)^{12}$$
$$M = 1000 \cdot 1{,}13$$
$$M = 1130$$

Para calcular o juro, temos:

$$M - C = 1130 - 1000 = 130$$

Portanto, o cliente X recebeu R$ 130,00 de juro.

Agora, vamos calcular o juro pago pelo cliente Y pelo seu empréstimo. Sabemos que:

- $C = 1000$ (valor emprestado)
- $t = 12$ meses (tempo da aplicação)
- $i = 1\% = 0{,}05$ (taxa de juros)

Então, o montante é:

$$M = 1000(1 + 0{,}05)^{12}$$
$$M = 1000 \cdot 1{,}80$$
$$M = 1800$$

Para calcular o juro, temos:

$$M - C = 1800 - 1000 = 800$$

Portanto, o cliente Y pagou R$ 800,00 de juro.

Para obter o lucro do banco, em real, basta subtrair o valor recebido do cliente X do valor pago pelo cliente Y.

$$800 - 130 = 670$$

Logo, a alternativa **c** é a correta.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Peça aos estudantes que justifiquem as soluções que deram a algumas das atividades. Isso os ajuda a desenvolver a capacidade argumentativa e favorece a compreensão sobre formas de resolver problemas, propiciando o desenvolvimento das competências gerais **2** e **7**.

- Leia todas as atividades antes de resolvê-las e comece por aquelas que você considerar mais simples.
- A cada problema, retorne às atividades das seções *Problemas e exercícios resolvidos* para investigar qual deles pode auxiliá-lo a resolver a atividade que você deve solucionar agora.
- Sempre que possível, verifique se há mais de uma forma de resolver uma atividade.
- Faça uma lista de dúvidas que surgirem ao resolver as atividades para conversar sobre elas com o professor.
- Use a calculadora, se achar necessário.

13 **Qual será o valor total pago de uma mercadoria que custa R$ 400,00 à vista se for comprada a prazo, em seis parcelas mensais iguais, a uma taxa de 20% ao ano, no sistema de juros simples?** R$ 440,00

14 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(UFT-TO) Uma pessoa vai a uma loja comprar um aparelho celular e encontra o aparelho que deseja adquirir com duas opções de compra: à vista com 10% de desconto; ou em duas parcelas iguais e sem desconto, sendo a primeira parcela no ato da compra e a outra um mês após. Alternativa **e**.

Com base nos dados de oferta deste aparelho celular, pode-se afirmar que a loja trabalha com uma taxa mensal de juros de:

a) 0%
b) 1%
c) 5%
d) 10%
e) 25%

15 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Uerj) Uma instituição financeira oferece os seguintes tipos de aplicação a seus clientes:

- Alfa – rendimento com juros simples, a uma taxa de 12% ao ano, durante 5 anos;
- Beta – rendimento com juros compostos, a uma taxa de 10% ao ano, durante 2 anos.

Considere que um cliente fez uma aplicação Alfa no valor de R$ 2 000,00. Após 5 anos, esse cliente fez uma aplicação Beta, durante dois anos, com o montante y obtido na aplicação Alfa acrescido de x reais. Sabe-se que os juros obtidos pela aplicação Beta foram iguais a R$ 1 050,00.

Calcule o valor de x, em reais, que foi acrescentado ao montante y. R$ 1 800,00

16 **Fábio aplicou R$ 14 000,00 a 1,5% ao mês, em regime de juros compostos, por dois anos e meio. Que montante ele recebeu ao final desse período?** R$ 19 038,32

17 **Um capital foi aplicado em regime de juros compostos, por 24 meses, a uma taxa de 7% ao mês. Sabendo que o montante da aplicação foi R$ 12 825,00, qual foi o valor aplicado?** R$ 2 528,41

18 **Um investidor aplicou R$ 60 000,00 a juros compostos de 2,2% ao mês. Daqui a quantos meses, aproximadamente, ele terá um montante de R$ 65 400,00?** 4 meses.

19 **Para decidir em que instituição fazer uma aplicação de R$ 24 000,00, João precisava saber qual seria a melhor taxa para que ele recebesse R$ 36 087,00 depois de oito meses. Ele pensou um pouco, fez uns cálculos e concluiu que 6,5% ao mês era uma boa taxa. Você concorda? Por quê?** Resposta pessoal. Com essa taxa, ele vai receber mais que o planejado.

20 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(PUC-RS) Uma clínica comprou materiais hospitalares no valor total de R$ 9 600,00. Foram ofertadas duas formas de pagamento:

I. à vista, no ato da compra, com desconto de 7%.
II. pagamento para o final do quarto mês; ou seja, carência de 4 meses para a quitação da compra, sem juros.

Suponha que a clínica possui a importância para o pagamento à vista (com o desconto de 7%), mas tem a possibilidade de deixar esse valor investido por 4 meses a uma taxa de 5% ao mês rendendo a juros compostos. Diante dessa possibilidade, assinale a alternativa que descreve corretamente a melhor forma de pagamento para o cliente. Considere $(1{,}05)^4 \cong 1{,}2$. Alternativa **c**.

a) Pagamento à vista, pois os juros do investimento foram de apenas R$ 336,60.
b) Pagamento à vista, pois os juros do investimento foram de apenas R$ 446,40.
c) Pagamento ao final do 4º mês, pois o investimento renderá juros no valor de R$ 1 785,60.
d) Pagamento ao final do 4º mês, pois o investimento renderá juros no valor de R$ 1 920,00.

21 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Uma pessoa fez um depósito inicial de R$ 200,00 em um fundo de investimentos que possui rendimento constante sob juros compostos de 5% ao mês.

Esse fundo possui cinco planos de carência (tempo mínimo necessário de rendimento do fundo sem movimentação do cliente). Os planos são:

- Plano A: carência de 10 meses;
- Plano B: carência de 15 meses;
- Plano C: carência de 20 meses;
- Plano D: carência de 28 meses;
- Plano E: carência de 40 meses.

O objetivo dessa pessoa é deixar essa aplicação rendendo até que o valor inicialmente aplicado duplique, quando somado aos juros do fundo. Considere as aproximações: $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 1{,}05 = 0{,}02$.

Para que essa pessoa atinja seu objetivo apenas no período de carência, mas com a menor carência possível, deverá optar pelo plano: Alternativa **b**.

a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

As atividades **20** e **21** trabalham a comparação de diferentes situações envolvendo juros para a tomada de decisão, desenvolvendo assim a habilidade **EM13MAT203**.

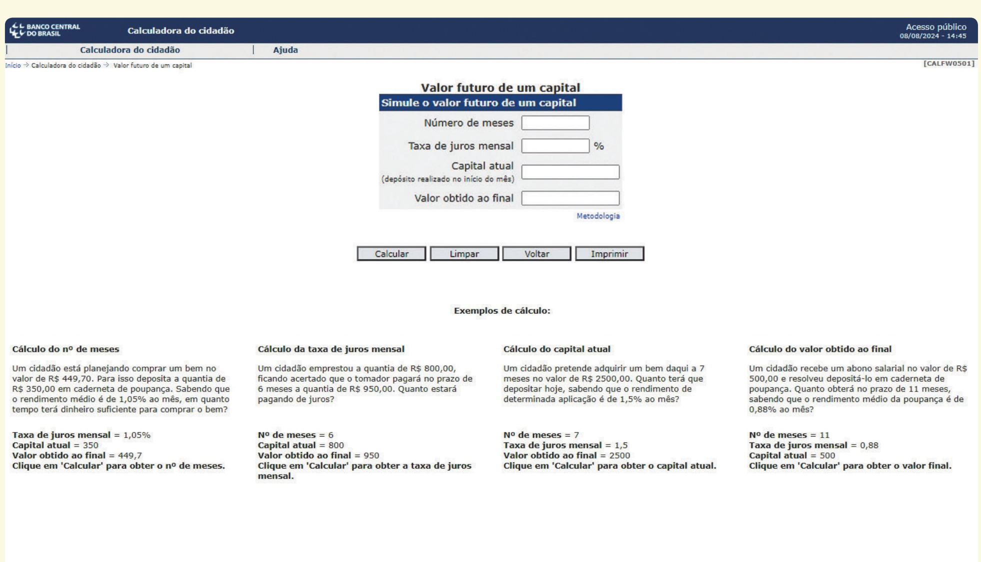
TECNOLOGIA

Você já ouviu falar na Calculadora do Cidadão? Esse aplicativo, desenvolvido pelo Banco Central do Brasil, simula as seguintes operações financeiras: aplicação com depósitos regulares, valor futuro de um capital, financiamentos com prestações fixas e correção de valores. Para utilizar esse serviço, basta baixar o aplicativo no *smartphone* ou acessá-lo pelo *site* do Banco Central, no *link*: https://www.bcb.gov.br/meubc/calculadoradocidadao (acesso em: 18 set. 2024). Observe, a seguir, as etapas para calcular com a Calculadora do Cidadão o valor futuro de um capital de R$ 5 000,00, aplicado a uma taxa de 0,6% ao mês durante 10 meses.

1ª etapa: Acessamos o aplicativo Calculadora do Cidadão pelo *site* do Banco Central. Na página inicial da calculadora, observamos as operações financeiras que podemos realizar.

Disponível em: https://www.bcb.gov.br/meubc/calculadoradocidadao. Acesso em: 20 ago. 2024.

2ª etapa: Clicamos na opção "Valor futuro de capital". Na página que abrir, podemos observar a tela com os campos para inserir as informações referentes ao valor futuro de um capital, assim como os exemplos de cálculos que podem ser realizados nessa página.



Disponível em: https://www.bcb.gov.br/meubc/calculadoradocidadao. Acesso em: 20 de ago. 2024.

3ª etapa: Preenchemos os campos com as informações que temos: 10 meses, 0,6% de taxa de juros mensal e R$ 5 000,00 de capital atual.

Disponível em: https://www.bcb.gov.br/meubc/calculadoradocidadao. Acesso em: 3 de set. 2024.

4ª etapa: Por fim, clicamos em "Calcular".

Disponível em: https://www.bcb.gov.br/meubc/calculadoradocidadao. Acesso em: 3 de set. 2024.

ATIVIDADES

1 **De acordo com o exemplo apresentado, responda às questões a seguir.**

a) Qual foi o valor futuro do capital após os 10 meses? R$ 5 308,23

b) Quanto de juros foi obtido nesse período? R$ 308,23

c) Utilizando a fórmula para o cálculo do montante que você aprendeu neste capítulo, calcule o valor futuro dessa aplicação e compare com o resultado que você obteve na Calculadora do Cidadão. Você achou mais fácil realizar o cálculo utilizando a calculadora ou a fórmula? Resposta pessoal.

2 **Retome a atividade 19 e, utilizando a Calculadora do Cidadão, resolva novamente a atividade e confira o resultado que você havia calculado.** Resposta pessoal. A taxa para ele receber o valor que havia estipulado seria aproximadamente 5,23%.

3 **Utilizando a Calculadora do Cidadão, resolva as atividades a seguir. Mas atenção: Lembre-se de que o campo que você deseja calcular deve ser o que fica em branco ao digitar os dados nessa ferramenta.**

a) Um investidor aplicou o capital de R$ 4 000,00 a uma taxa de juro mensal de 0,9%. Após quantos meses, aproximadamente, ele terá um montante de R$ 4 650,00? Aproximadamente 17 meses.

b) Qual deve ser a taxa de juro aproximada de um investimento de R$ 15 000,00 para que o montante obtido após 6 meses da aplicação seja de R$ 18 000,00? Aproximadamente 3,08%.

c) O montante recebido por um investidor em uma aplicação a juros compostos com taxa de 1,9% ao mês, durante 20 meses, foi de R$ 10 000,00. Qual foi, aproximadamente, o capital aplicado? Aproximadamente R$ 6 863,04.

Este tópico apresenta situações que envolvem juros simples e compostos, possibilitando o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT303**. Também mostra aos estudantes como interpretar e representar a solução de um problema.

FUNÇÕES E JUROS

Como vimos, o capital inicial pode crescer em função de dois tipos de juros: simples ou compostos. O quadro a seguir ilustra a evolução, ano a ano, de uma aplicação de R$ 100,00 a uma taxa de 10% ao ano, nas duas modalidades.

	Montante simples (R$)	Montante composto (R$)
Ano 1	100 + 0,1(100) = 110	100 + 0,1(100) = 110
Ano 2	110 + 0,1(100) = 120	110 + 0,1(110) = 121
Ano 3	120 + 0,1(100) = 130	121 + 0,1(121) = 133,10
Ano 4	130 + 0,1(100) = 140	133,1 + 0,1(133,1) = 146,41
Ano 5	140 + 0,1(100) = 150	146,41 + 0,1(146,41) = 161,05
Ano 6	150 + 0,1(100) = 160	161,05 + 0,1(161,05) = 177,16

O crescimento do capital inicial (R$ 100,00) a juros simples é **linear** e a juros compostos é **exponencial**.

Isso ocorre porque o montante, no sistema de juros simples, é obtido em função do tempo, sendo a equação dessa função:

$M = C + j$ ou $M = C + C \cdot i \cdot t = C(1 + i \cdot t)$, que é uma função afim na variável t.

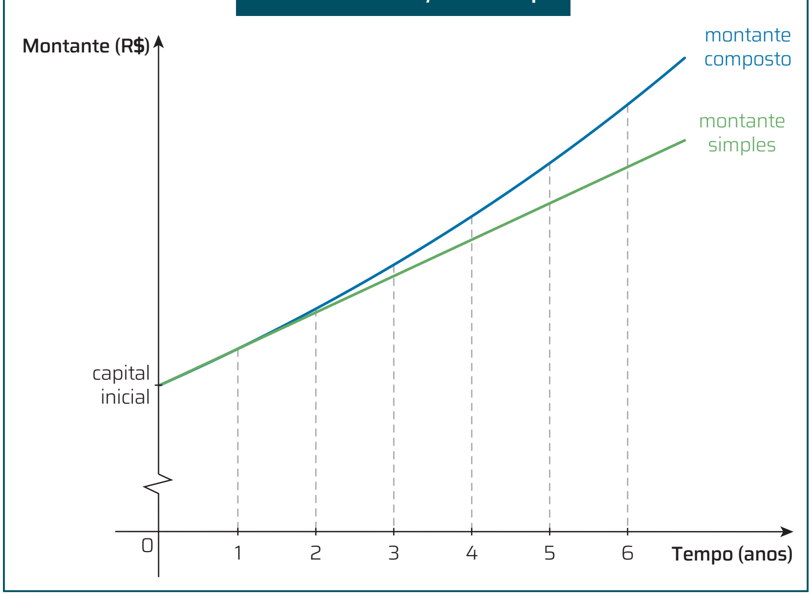
Já no caso do sistema de juros compostos, o montante é obtido em função do tempo por meio da expressão:

$M = C(1 + i)^t$, que é uma função exponencial na variável t.

Podemos ilustrar graficamente o montante obtido nos dois sistemas como representado a seguir.

Se julgar conveniente, aproveite para relacionar os conceitos matemáticos de progressões aritméticas e geométricas, estudados no capítulo 1 deste volume, com as ideias de juros simples e juros compostos.

Montante em função do tempo



Dados fictícios.

O gráfico mostra que o montante simples é representado por uma reta (crescimento linear) e o montante composto é representado por uma curva como a do gráfico da função exponencial (crescimento exponencial).

Fazendo uma análise tanto do quadro quanto do gráfico, concluímos que o regime de juros compostos, nesse caso, só apresenta vantagem sobre o de juros simples quando o período for maior que um ano.

Observe que, a cada ano, a variação do montante a juros simples é sempre a mesma, enquanto o montante a juros compostos cresce mais que no ano anterior.

Depreciação

Temos falado bastante sobre investimentos, empréstimos e outras situações que envolvem crescimento exponencial. No entanto, alguns bens, como maquinários em empresas, sofrem desvalorização com o tempo, provocada pelo desgaste e/ou avanço tecnológico.

A depreciação é a diferença entre o preço de compra e seu valor final, no caso de troca ou venda, depois de certo tempo de uso. Em uma empresa, ela deve ser considerada na determinação dos preços de seus produtos, porque, ao longo do tempo, esse valor é um custo na produção da empresa.

Há vários métodos para calcular a depreciação de um bem. A depreciação real, no entanto, é de difícil cálculo, pois vários fatores interferem nessa avaliação, inclusive o tipo de tecnologia usado pelas empresas e a demanda pelo maquinário que será renovado.

Automóveis e imóveis também sofrem depreciação com o tempo, mas os fatores que devem ser considerados são diferentes; por exemplo, se o tipo de veículo está, ou não, na moda, a localização do imóvel, entre outros.

Vamos conhecer dois métodos de depreciação utilizados por empresas: o **linear** e o de **depreciação da taxa constante ou exponencial**.

Para isso, considere o problema a seguir.

Se um maquinário foi comprado por R$ 400 000,00 e, ao final de cinco anos, vale R$ 50 000,00, qual é o valor de depreciação a cada ano?

O método linear

Esta forma de calcular a depreciação de um bem nada mais é do que dividir o quanto o produto se desvalorizou pelo tempo considerado.

O valor encontrado corresponde a quanto o valor inicial decai ano a ano (ou mês a mês, semana a semana, dependendo da unidade de medida de tempo considerada), de modo constante.

Acompanhe como podemos fazer o cálculo para o problema apresentado. Primeiro, calculamos o valor de depreciação a cada ano.

$$\frac{400\,000 - 50\,000}{5} = 70\,000$$

Assim, o valor de depreciação é 70 mil reais por ano.

Com a matemática que conhecemos, o que significa esse valor? Trata-se de uma depreciação linear, análoga à que ocorre nos juros simples.

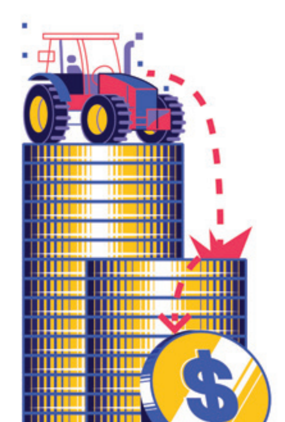
$$V = C - C \cdot i \cdot t$$

Observe que o sinal negativo foi escolhido por sabermos que o valor final V é menor que o valor inicial C.

Substituindo pelos dados de nosso problema, obtemos:

$$50\,000 = 400\,000 - 400\,000 \cdot i \cdot 5$$
$$i = 0{,}175$$
$$i = 17{,}5\% \text{ ao ano}$$

Observe que 17,5% de R$ 400 000,00 são R$ 70 000,00 de depreciação por ano, exatamente o valor que foi encontrado pelo modelo linear descrito anteriormente.



Denis Freitas/ID/BR

O método da depreciação da taxa constante ou método exponencial

Esse método consiste em obter uma taxa constante de depreciação, que deve ser calculada sobre o valor do bem no fim de cada intervalo de tempo. Ou seja, no nosso exemplo, buscamos a taxa de desvalorização calculada sobre o valor de cada ano anterior, o que significa um cálculo análogo ao de juros compostos, ou de depreciação exponencial.

Calcular essa taxa significa encontrar o valor da taxa i que transforma um valor inicial C em um valor final V, no decorrer de um tempo t.

$$V = C(1 + i)^t$$

No problema, buscamos o valor de i tal que:

$$50\,000 = 400\,000\,(1 + i)^5$$

Calculando, temos:

$$0{,}125 = (1 + i)^5$$
$$1 + i = \sqrt[5]{0{,}125}$$
$$1 + i \simeq 0{,}66$$
$$i \simeq -0{,}34$$
$$i \simeq -34\%$$

De acordo com esse modelo, o maquinário sofre uma desvalorização exponencial de aproximadamente 34% ao ano.

Os resultados nos dois modelos parecem bem diferentes, não é verdade? Vamos investigar um pouco mais para entender melhor.

Para isso, vamos fazer os gráficos das duas funções que estão em cada uma das duas situações, em relação à variável tempo.

- Modelo linear:

$$V = 400\,000 - 400\,000 \cdot 0{,}175 \cdot t$$
$$V = 400\,000 - 70\,000 \cdot t$$

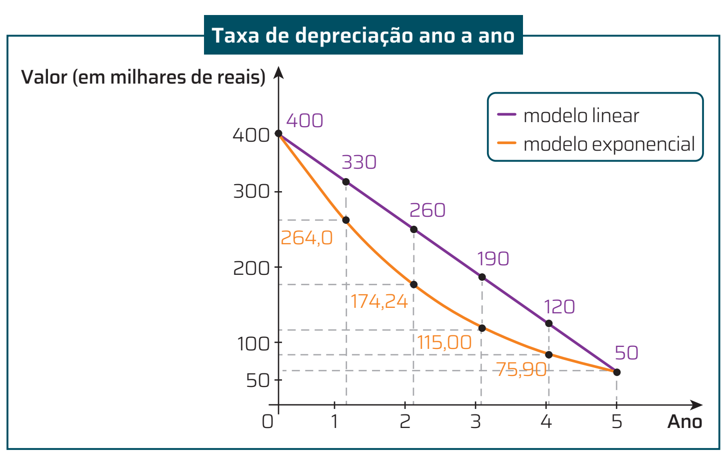
Perceba que $-0{,}175$ corresponde à taxa de depreciação ao ano.

- Modelo exponencial:

$$V = 400\,000\,(1 - 0{,}34)^t$$
$$V = 400\,000 \cdot 0{,}66^t$$

Observe que $-0{,}34$ corresponde à taxa aproximada de depreciação ano a ano.

Graficamente, temos:



Dados fictícios.

O modelo exponencial é mais realista, por estabelecer, em cada período, uma depreciação proporcional ao valor do bem. No entanto, no caso do modelo linear, os cálculos são simples; já no modelo exponencial, a calculadora científica é essencial para calcular os resultados. No nosso exemplo, para calcular $\sqrt[5]{0{,}125}$, utilizamos esta sequência de teclas na calculadora científica:

Arredondamento

Na resolução do problema do maquinário, fizemos uma série de arredondamentos nos números. Os valores obtidos com a calculadora podem aparecer com muitas casas decimais após a vírgula, mas, se estamos tratando com valores monetários, duas casas após a vírgula são suficientes como resposta ao problema.

Por isso, é importante saber que existem regras para desprezar algarismos, chamadas de regras de arredondamento. A mais usual é descrita a seguir.

- Se o algarismo a ser eliminado for maior que ou igual a 5, acrescentamos 1 ao primeiro algarismo que estiver à sua esquerda. Observe o exemplo:

Este algarismo vai ser eliminado e é maior que 5.

$$8{,}751\boxed{9} \simeq 8{,}752$$

$+ 1$

- Se o algarismo a ser eliminado for menor que 5, não fazemos nenhuma alteração no algarismo à sua esquerda. Observe o exemplo:

Este algarismo vai ser eliminado e é menor que 5.

$$2{,}873\boxed{1} \simeq 2{,}873$$

Agora, vamos arredondar os números a seguir, escrevendo-os com três casas após a vírgula, e, em seguida, arredondá-los novamente para duas casas após a vírgula.

a) 3,4815

Vai ser eliminado e é igual a 5.

$$3{,}481\boxed{5} \simeq 3{,}482$$

$+ 1$

Vai ser eliminado e é menor que 5.

$$3{,}48\boxed{2} \simeq 3{,}48$$

b) 3,4875

Vai ser eliminado e é igual a 5.

$$3{,}487\boxed{5} \simeq 3{,}488$$

$+ 1$

Vai ser eliminado e é maior que 5.

$$3{,}48\boxed{8} \simeq 3{,}49$$

$+ 1$

PARA EXPLORAR

Livro

Szpiro, George G. *A vida secreta dos números*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2008.

Esse livro mostra, de maneira divertida e interessante, como a Matemática se relaciona com muitos aspectos do nosso dia a dia. Você pode começar pela crônica 24, na qual o autor analisa os efeitos dos erros e arredondamentos em situações diversas e comenta, de modo breve, a "teoria do caos".

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

22 Arredonde os números a seguir, escrevendo-os com duas casas após a vírgula.

a) 10,34715 10,35 b) 11,26581 11,27

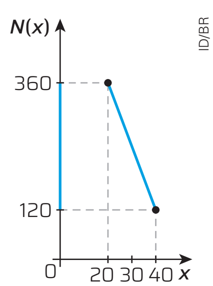
23 Pesquise outras regras de arredondamento que podemos utilizar em Matemática e compare-as com a que apresentamos aqui, ressaltando suas semelhanças e suas diferenças. Resposta pessoal. Consulte os exemplos no Manual do Professor.

24 Um equipamento industrial foi adquirido por R$ 800 000,00, e seu valor residual é R$ 120 000,00. Se sua depreciação anual é R$ 80 000,00, qual é o tempo de vida útil desse equipamento, em anos? 8,5 anos.

Valor residual corresponde ao valor de um bem depois de ser totalmente depreciado, ou seja, o valor final após o tempo de vida útil do equipamento.

25 Uma empresa adquiriu um computador no valor de R$ 6 000,00. Na data da aquisição, o setor de patrimônio estimou uma vida útil de cinco anos para esse bem e um valor para a venda final de R$ 1 000,00. Sabendo que a empresa utiliza o método linear para o cálculo da depreciação, qual será o valor depreciado desse computador ao final do segundo ano de uso? R$ 4 000,00

26 Uma companhia teatral que está encenando uma peça vende ingressos com diferentes preços. Observou-se que o número de ingressos vendidos diariamente ($N(x)$) varia de acordo com o preço (x) do ingresso do dia. De modo aproximado, essa variação está descrita no gráfico. R$ 25,00



Qual deve ser o preço do ingresso para que o valor arrecadado pela companhia seja o maior possível?

27 Considere que uma empresa adquiriu por R$ 90 000,00 uma *van* para transporte de seus funcionários. O valor final estimado é R$ 9 000,00 e a vida útil do veículo é de dez anos. Qual é o valor de depreciação anual desse veículo? R$ 8 100,00

28 Uma mineradora adquiriu um caminhão no valor de R$ 390 000,00. A vida útil desse veículo foi estimada em 150 meses, e o valor residual é R$ 60 000,00. Para o cálculo da depreciação, foi adotado o método da taxa constante. Qual é o valor depreciado desse caminhão ao final de oito meses de uso? Utilize $\sqrt[150]{0,15} \simeq 0,99$ e $0,99^8 \simeq 0,92$. R$ 359 870,43

29 Acompanhe como Raquel e Pedro resolveram o problema a seguir.

Qual foi o desconto concedido na antecipação de uma prestação de R$ 20 000,00, paga dois meses antes do vencimento, à taxa de juros compostos de 3% ao mês?

Resolução de Raquel

$$20000 \cdot \left(1 - \frac{3}{100}\right)^2 = 20000 \cdot 0,9409 = 18818$$

Desconto:

$$20000 - 18818 = 1182$$

Ou seja, R$ 1 182,00.

Resolução de Pedro

x é o valor da prestação dois meses antes da prestação de R$ 20 000,00.

$$x \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 = 20000$$

$$x \cdot 1,0609 = 20000$$

$$x = \frac{20000}{1,0609}$$

$$x = 18851,92$$

Desconto:

$$20000 - 18851,91 = 1148,08$$

Ou seja, R$ 1 148,08.

Analise a solução de cada um e diga qual delas está correta. A resolução de Pedro está correta.

30 Flávio comprou uma moto há 3 anos por R$ 22 000,00 e agora quer vendê-la. Sabendo que a cada ano o valor da moto é depreciado em 4,5% e que Flávio pretende receber 2% sobre o valor depreciado, por qual valor ele deve vendê-la? R$ 19 544,88

31 Uma empresa adquiriu um equipamento por R$ 12 000,00. A vida útil do equipamento foi de 15 anos e o valor residual de R$ 4 000,00. Faça o plano de depreciação pelo método da taxa constante até o quarto ano, completando um quadro como o do modelo a seguir. Utilize $\sqrt[15]{\frac{1}{3}} \simeq 0,91$.
Consulte a resposta no Manual do Professor.

Plano de depreciação – Método da taxa constante

t (ano)	i	Valor depreciado (R$)	Valor residual (R$)
1	9%	1 080,00	10 920,00
2	9%	982,20	9 937,20
3	9%	894,35	9 042,85
4	9%	813,86	8 228,99

Não escreva no livro.

32 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Efomm-RJ) Maximiliano e Tânia são amigos que amam os animais. Eles decidiram oferecer serviços de refeições prontas de alimentação natural crua e cozida para *pets*. Para iniciar o negócio, os sócios tomaram emprestados R$ 8 000,00 a juros de 5% ao mês, divididos em dezesseis meses ao regime de amortização constante. O valor da oitava prestação é Alternativa **e**.

a) R$ 950,00.

b) R$ 900,00.

c) R$ 825,00.

d) R$ 800,00.

e) R$ 725,00.

33 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Efomm-RJ) O valor, em reais, da 50ª parcela de um financiamento de R$ 200 000,00, em 120 meses, a uma taxa de juros de 1% ao mês, pelo Sistema de Amortização Constante (SAC), será Alternativa **b**.

a) R$ 2 500,00.

b) R$ 2 850,00.

c) R$ 3 200,00.

d) R$ 3 450,00.

e) R$ 3 800,00.

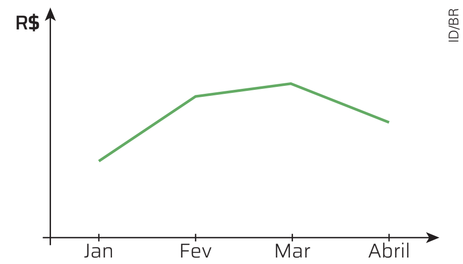
34 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UEG-GO) Na fábrica "Faz Bem" o valor do custo mensal C para a produção de uma quantidade *x* de peças é a soma de uma parcela C_A, que independe da quantidade produzida, com uma parcela variável C_V, que depende da quantidade produzida. O valor de C_A corresponde às despesas com aluguel, telefone, entre outras. O valor de C_V é o produto da quantidade de peças produzidas pelo preço de custo por peça. O lucro mensal da fábrica é calculado pela diferença entre o valor das vendas e o valor do custo, no mês. O quadro, a seguir, exibe os dados referentes à produção de janeiro a abril de 2023. Alternativa **d**.

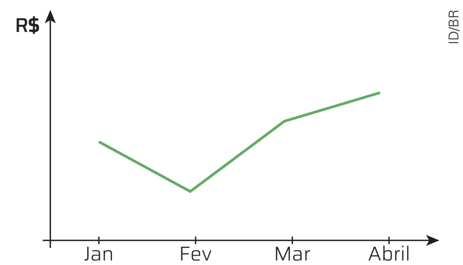
	Janeiro	**Fevereiro**	**Março**	**Abril**
Quantidade de peças produzidas e vendidas	100	180	200	150
Valor de venda por peça (R$)	60,00	50,00	60,00	55,00
Preço de custo por peça (R$)	30,00	35,00	25,00	30,00
C_A (R$)	2 000,00	1 900,00	2 100,00	2 000,00

O gráfico que melhor representa o lucro mensal, em reais (R$), no período considerado, é:

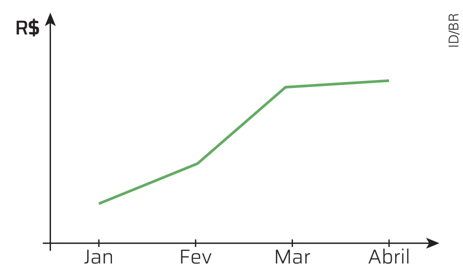
a)



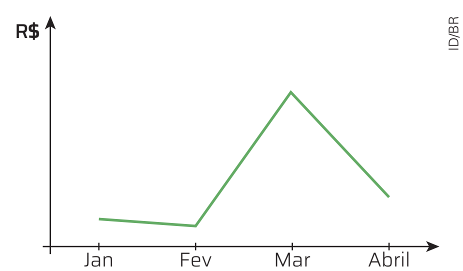
b)



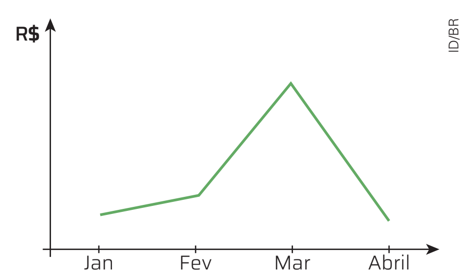
c)



d)



e)



35 **Volte ao texto "A ideia de cobrar juros é antiga" e resolva os problemas de Fibonacci e de Tartaglia que nele aparecem.**

Consulte a resposta no Manual do Professor.

36 **Elaborar um problema de Matemática Financeira que envolva os dados $C = 110$, $t = 6$ e $M = 246$.**

Resposta pessoal. Consulte o exemplo no Manual do Professor.

A atividade **36** permite avaliar se a turma compreende o significado de "capital" e "montante" e possibilita obter diferentes propostas de situações-problema, que podem ser trocadas entre os estudantes, para que um resolva a proposta do outro.

Não escreva no livro.

CÁLCULO RÁPIDO

O cálculo com porcentagens é um dos mais utilizados e ter agilidade para resolvê-lo é, certamente, bastante útil.

Acompanhe, por exemplo, uma maneira de calcular com rapidez 75% de 500.

- 50% de 500 é igual a 250 $\left(50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}\right)$.
- 25% de 500 é igual a 125 (25% é metade de 50%).

Então, 75% de 500 é o mesmo que 250 + 125, que é igual a 375.

1 Use essa ideia e calcule 75% de:

a) 400 300
b) 60 45
c) 1700 1 275

2 Use novamente a ideia anterior para calcular:

a) 45% de 200. 90
b) 20% de 356. 71,2
c) 65% de 1380. 897
d) 150% de 50. 75
e) 37,5% de 80. 30
f) 15% de 540. 81

3 Calcule mentalmente e complete no caderno.

a) 20 é 10% de ■. 200
b) 12 é 60% de ■. 20
c) 4 é 25% de ■. 16
d) 120 é 80% de ■. 150

4 Calcular rapidamente com decimais sempre ajuda. Divida, sem utilizar a calculadora, cada um dos números a seguir por 10, 100 e 1000. Anote a resposta no caderno.

a) 4 0,4; 0,04; 0,004
b) 0,04 0,004; 0,0004; 0,00004
c) 64 6,4; 0,64; 0,064
d) 1,01 0,101; 0,0101; 0,00101
e) 130 13; 1,3; 0,13
f) 10,2 1,02; 0,102; 0,0102
g) 0,4 0,04; 0,004; 0,0004
h) 102 10,2; 1,02; 0,102
i) 6,4 0,64; 0,064; 0,0064

5 Use os mesmos números da atividade **4** e multiplique cada um deles por 10, 100 e 1000.

6 Sabendo que $12{,}2 \cdot 1{,}27 = 15{,}494$, calcule rapidamente:

a) $1{,}22 \cdot 1{,}27$ 1,5494
b) $122 \cdot 1{,}27$ 154,94
c) $0{,}122 \cdot 1{,}27$ 0,15494
d) $122 \cdot 127$ 15 494
e) $0{,}122 \cdot 127$ 15,494
f) $12{,}2 \cdot 12{,}7$ 154,94

7 Ao resolver a atividade **6**, você deve ter percebido um padrão. Use o que observou e faça os cálculos a seguir sem usar lápis, papel ou calculadora.

a) $0{,}2 \cdot 3$ 0,6
b) $0{,}2 \cdot 0{,}3$ 0,06
c) $0{,}2 \cdot 0{,}2$ 0,04
d) $0{,}02 \cdot 2$ 0,04

5. a) 40; 400; 4 000 **b)** 0,4; 4; 40 **c)** 640; 6 400; 64 000 **d)** 10,1; 101; 1 010 **e)** 1 300; 13 000; 130 000 **f)** 102; 1 020; 10 200 **g)** 4; 40; 400 **h)** 1 020; 10 200; 102 000 **i)** 64; 640; 6 400

PARA RECORDAR

1 Determine o domínio da função $h(x) = \sqrt{-2x + 3}$. $D(h) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$

2 Sua turma deseja realizar uma festa no colégio. Um conjunto musical se apresenta por R$ 1200,00 mais 20% da arrecadação com convites. Já outro grupo cobra uma taxa fixa de R$ 2 000,00.

a) Se são esperados 500 convidados pagantes, qual é a importância máxima a cobrar de cada um, para que a contratação da primeira banda seja a melhor opção? R$ 8,00

b) Se for cobrado esse preço máximo pelo convite, quanto sobrará para outras despesas, após o pagamento da banda? R$ 2 000,00

3 **Quais são as coordenadas do vértice da parábola que é gráfico das seguintes funções:**

a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$ $(4, -4)$

b) $g(x) = x^2 + 4x + 6$ $(-2, 2)$

4 **Depois de dois aumentos sucessivos, um produto teve aumento total de 61%. Se o primeiro aumento foi de 15%, então o valor do segundo aumento foi de:** Alternativa **b**.

a) 36%.
b) 40%.
c) 44%.
d) 48%.
e) 52%.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

As habilidades de leitura e de resolução de problemas são as principais metas desta seção.

1 **(Obmep) Três casais fizeram compras em uma livraria. Vítor comprou 3 livros a mais do que Lorena, e Pedro comprou 5 livros a mais do que Cláudia. Cada um dos homens comprou 4 livros a mais do que a respectiva esposa. Lorena e Cláudia compraram mais livros do que Bianca, que só comprou 3 livros. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?** Alternativa **c**.

a) Vítor comprou mais livros do que Pedro.
b) Pedro é marido de Cláudia.
c) Pedro foi o marido que comprou o maior número de livros.
d) Cláudia comprou um livro a mais do que Lorena.
e) Vítor é marido de Bianca.

2 **Ana, Betina e Ciça estavam conversando e, em certos momentos da conversa, disseram as seguintes afirmações:** Alternativa **c**.

Ana: Hoje não é dia 13.

Betina: Ontem foi dia 11.

Ciça: Amanhã será dia 14.

Depois, perceberam que uma delas se enganou e as outras duas estavam corretas.

Podemos afirmar que elas fizeram essas afirmações no dia:

a) 10.
b) 11.
c) 12.
d) 13.
e) 14.

PALAVRAS-CHAVE

Explicite aos estudantes que a proposta desta seção é uma estratégia de estudo que pode ser utilizada por eles em outros momentos e em qualquer componente curricular.

Ao realizar o que propomos aqui, você poderá avaliar o que aprendeu e o que precisa retomar para aprender mais.

Este capítulo teve como metas:

- apresentar e trabalhar a linguagem e o significado dos termos mais usuais da Matemática Financeira;
- retomar conteúdos diversos, como porcentagem, regra de três, funções e seus gráficos e logaritmos;
- desenvolver a habilidade de resolver situações-problema.

Faça um resumo no caderno daquilo que você estudou neste capítulo, incluindo os novos termos que aprendeu. Mas atenção: primeiro escreva de memória; só depois consulte os livros e suas anotações da aula para, por exemplo, corrigir os enganos e acrescentar informações.

Você terá feito um bom resumo se ele o auxiliar a se lembrar, sempre que precisar, dos conceitos e das estratégias para resolver novos problemas.

MATEMÁTICA E FINANÇAS

O objetivo desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes, ao desenvolver habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propor que vivenciem um processo investigativo. Além disso, esta seção contempla as competências gerais **1**, **4** e **5** e possibilita a integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Nesse sentido, para ampliar os conhecimentos dos estudantes sobre finanças, economia e cotidiano, convide um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para participar das discussões.

Dessa maneira, o trabalho com esta seção também permite explorar a competência **1** de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e abordar os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Economia, no âmbito da Educação Financeira, além de desenvolver a habilidade **EM13MAT203** ao aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas.

Matemática financeira e o cotidiano

Poder comprar um tênis novo apenas porque deu vontade não é a realidade de todos, mas o desejo de ter um novo par de tênis talvez seja um propósito bem conhecido de muita gente.

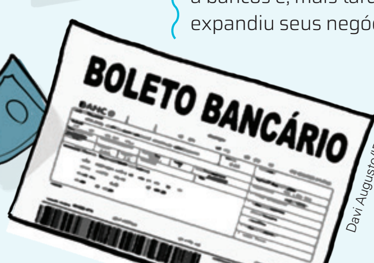
Para realizar um desejo como esse, é bastante comum o consumidor brasileiro recorrer à compra parcelada. Mas será que essa é sempre a escolha mais acertada?

Antes de refletir sobre essa questão, leia o texto a seguir.

Mattia Riccadonna/Shutterstock.c

Calçados expostos em prateleira de loja.

Serasa é uma empresa brasileira especializada em análise de crédito e informações financeiras. Surgiu dando assessoria a bancos e, mais tarde, expandiu seus negócios.



Davi Augusto/ID/BR

7 em cada 10 pessoas costumam parcelar compras no Brasil, diz Serasa

Sete em cada dez brasileiros costumam optar por pagamentos parcelados na hora de fazer compras, mostra nova pesquisa da Serasa. O estudo identificou quais fatores são levados em consideração na hora de dar preferência para o parcelamento.

O que diz a pesquisa

- Maioria dos brasileiros tem o costume de pagar compras de forma parcelada. Mesmo com a popularidade do Pix, o parcelamento de compras tem grande adesão. Segundo a Serasa, 71% dos consumidores costumam parcelar compras. O dado é parte do estudo "Relação com o Dinheiro", feito em parceria com a Opinion Box. Ao todo, foram entrevistadas 8 888 pessoas entre os dias 27 de julho e 23 de setembro.
- Um quarto dos consumidores paga parcelado por não ter dinheiro suficiente. Entre os fatores levados em consideração antes de parcelar uma compra, o fato de não ter o valor cheio em conta para pagar à vista foi citado por 27% dos entrevistados. Para outros 25%, a prioridade é saber se há ou não cobrança de juros.
- Parcelar compras por costume é uma realidade para 25% dos entrevistados. Além disso, 24% dos consumidores dizem pagar parcelado para conseguir comprar mais coisas[,] e 23% dizem que preferem pagar valores diluídos ao longo do tempo. "O parcelamento parece, de fato, incorporado à realidade econômica dos brasileiros", diz ao UOL Patrícia Camillo, gerente da Serasa.

[...]

MOTTA, Anaís. 7 em cada 10 pessoas costumam parcelar compras no Brasil, diz Serasa. *UOL*, São Paulo, 20 set. 2023. Disponível em: https://economia.uol.com.br/noticias/redacao/2023/09/20/pesquisa-sobre-compras-parceladas-e-relacao-com-o-dinheiro.htm?cmpid=copiaecola. Acesso em: 18 set. 2024.

Não escreva no livro.

De acordo com o texto, alguns consumidores utilizam o modo parcelado por costume e outros preferem pagar valores diluídos ao longo do tempo. Entretanto, essas preferências podem acabar mascarando o acúmulo de dívidas. Para tomar uma decisão de compra, é mais importante analisar os valores envolvidos.

Leia esta comparação entre compras à vista e parceladas.

Parcelado ou à vista? Veja quais as vantagens e desvantagens de cada forma de pagamento

[...]

Quais as vantagens do pagamento à vista e parcelado?

À vista:

- comprar o produto desejado sem comprometer o orçamento por um longo período;
- possibilidade de conseguir um desconto ou uma renegociação do valor.

Parcelado:

- ideal para grandes compras, que normalmente são difíceis de adquirir à vista.

[...]

E as desvantagens?

À vista:

- pode adiar a compra, pois será preciso um período para acumular o valor necessário;
- ficar sem dinheiro para outros gastos após a compra.

Parcelado:

- compromete sua renda por um determinado tempo;
- caso tenha juros, o consumidor vai pagar mais do que na compra à vista.

[...]

Macedo, Aline. Parcelado ou à vista? Veja quais as vantagens e desvantagens de cada forma de pagamento. *G1*, [*s. l.*], 3 ago. 2022. Economia. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2022/08/03/parcelado-ou-a-vista-veja-quais-as-vantagens-e-desvantagens-de-cada-forma-de-pagamento.ghtml. Acesso em: 18 set. 2024.

Conectando ideias

1 **Organize com os colegas uma roda de conversa para falar sobre as vantagens e desvantagens das compras à vista e parceladas. Em seguida, discutam os pontos positivos e os negativos da obtenção de empréstimos para quitar dívidas do cartão de crédito, tendo como base os conceitos estudados no capítulo.**

Resposta pessoal.

2 **Conversamos sobre vários assuntos até aqui, como a vontade que temos de consumir produtos e os valores dos juros do cartão de crédito, tudo isso para pensarmos sobre a importância da Educação Financeira em nosso dia a dia. Algumas formas de lidar com as finanças pessoais, como o uso consciente do cartão de crédito, afetam profundamente nossa vida. Pensando nisso...**

Resposta pessoal.

... será que vale a pena ter sempre dívidas parceladas no cartão de crédito para realizar nossos desejos de consumo?

- Tendo essa questão em mente, faça uma pesquisa com pessoas de sua família sobre o comportamento de consumo de cada uma delas. Anote as seguintes informações: idade, escolaridade, gênero e renda mensal. Estas são algumas perguntas que podem ser feitas a elas:
  1. Você costuma fazer compras com cartão de crédito?
  2. Quantos cartões de crédito você tem?
  3. As compras estão dentro do seu orçamento familiar?
  4. Você já precisou negociar dívidas de cartão de crédito?
  5. Você paga o valor total da fatura do cartão de crédito ou apenas o mínimo?
  6. Você conhece as taxas de juro dos cartões de crédito que tem?
- Com base nas respostas, construa uma planilha eletrônica e elabore gráficos para comunicar os resultados aos colegas e ao professor. Em seguida, proponha ações de conscientização utilizando seus conhecimentos sobre variáveis financeiras para resolver problemas do dia a dia.

Você é capaz de identificar o que motivou os erros cometidos por você ou por seus colegas? As respostas dos estudantes ao último item apresentam evidências da competência socioemocional autoconfiança.

PARA EXPLORAR

Site

Qual vale a pena? À vista ou a prazo?

Na compra de um produto, é comum que as lojas ofereçam diversas possibilidades de pagamento, entre elas o pagamento à vista e a prazo. Utilize o simulador do *site* para estimar qual opção pode ser mais vantajosa.

Disponível em: http://qualvaleapena.com.br/simulador-a-vista-ou-a-prazo.php. Acesso em: 18 set. 2024.

Site

Calculadora financeira *on-line* fazAconta.com.

Acesse a calculadora financeira desse *site* para explorar mais conceitos de Matemática Financeira, como cálculo de porcentagens, rendimentos, financiamentos e empréstimos. Os cálculos disponíveis também são compatíveis com planilhas eletrônicas.

Disponível em: https://fazaconta.com/calculadora-financeira.htm. Acesso em: 18 set. 2024.

Consumismo e Educação Financeira são temas que se relacionam intimamente, e é difícil considerar o segundo tema sem entender os impactos do primeiro. Essa discussão também depende da realidade econômica em que a comunidade escolar está inserida e, portanto, do tipo de acesso a que cada grupo familiar tem a bens de consumo com diferentes escalas de valor. Organize uma discussão em sala de aula sobre esse tema relevante. Recomendamos a leitura mediada do seguinte texto: Macedo, Ray. Como o consumo de grandes marcas afeta os jovens de periferia? Fundação Padre Anchieta, 25 jul. 2023. Disponível em: https://cultura.uol.com.br/noticias/60295_consumismo-de-roupas-de-grandes-marcas-pode-afetar-a-saude-financeira-e-a-autoestima-dos-jovens-perifericos.html. Acesso em: 9 out. 2024.

O professor de Sociologia ou de Geografia poderá ajudar na discussão, ao trazer dados econômicos relacionados a países e organizações sociais, considerando temas como consumismo, endividamento, diferenças culturais relacionadas ao acúmulo de capital, entre outros.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

As questões de provas de exames oficiais são apresentadas de diferentes maneiras. Algumas, por exemplo, apresentam um texto relativamente extenso para estabelecer um contexto no qual a situação-problema envolve a aplicação da Matemática. Outras questões propõem atividades de cálculo relacionadas a uma situação que pode ser irrelevante para a resolução. Acompanhe dois exemplos em que é possível desconsiderar totalmente a história contada no texto para isolar o cálculo solicitado.

VESTIBULAR EM CONTEXTO

(UCPel-RS) A radioterapia é um dos tratamentos utilizados para destruir células de um tumor ou impedir que elas se multipliquem. O procedimento consiste em aplicar radiações do tipo ionizantes na região a ser tratada. A radiação na radioterapia possui energia para alterar a estrutura de um material e esse processo conduz à morte da célula em função das alterações no seu interior.

Conforme a localização do tumor, podem ser utilizadas duas técnicas: a teleterapia ou radioterapia externa, em que a radiação é emitida por um aparelho em direção ao corpo do paciente e a braquiterapia, em que a radiação provém de aplicadores que são colocados em contato com o local a ser tratado.

Na radioterapia externa existem algumas etapas que devem ser cumpridas antes da aplicação, dentre essas etapas estão a consulta com um médico radio-oncologista, a realização de exames, a programação do tratamento e a Física-Médica, onde são realizados os cálculos para garantir que a dose aplicada é igual à prescrita.

Fonte: https://www.inca.gov.br/tratamento/radioterapia; https://www.einstein.br/especialidades/hematologia/exames-tratamentos/radioterapia. Acesso em: 09 out. 2022 (adaptado).

No caso de técnicas avançadas de radioterapia, até uma determinada distância da borda da região de tratamento, é aplicada a dose inicial de radiação, que em muitos casos corresponde a 100%, após, uma função com decaimento exponencial é utilizada para determinar o percentual de dose que será aplicada à medida que nos afastamos da borda da região de tratamento.

Considere um caso hipotético em que a função que modela o decaimento da dose de radioterapia é dada por:

$$f(x) = 100 \cdot e^{-0,1(x-0,3)} + 60 \cdot (1 - e^{-0,1(x-0,3)}),\ x \geqslant 0,3 \text{ cm}$$

em que $f(x)$ corresponde à dose de radiação (em %) e x à distância (em cm) da borda de tratamento.

Fonte: Jolly, D. J. (2011). Rapidarc - Inverse planning, Dose Calculation and Clinical Application. Christchurch, New Zealand: Master's thesis, University of Canterbury. UC Research Repository. In press. (Função Adaptada)

Assinale a alternativa que corresponde à dose de radioterapia aplicada a uma distância de 33 mm da borda de tratamento. Considere $e^{-0,3} = 0,74$.

a) 40,6% **b)** 74,0% **c)** 60,6% **d)** 59,6% **e)** 89,6%

Resolução

O enunciado fornece a lei que relaciona o percentual da dose de radiação $f(x)$ em função da distância x, em centímetro, da borda da região de tratamento: $f(x) = 100 \cdot e^{-0,1(x-0,3)} + 60 \cdot (1 - e^{-0,1(x-0,3)})$, para todo $x \geqslant 0,3$ cm. O problema solicita o valor de $f(x)$ para $x = 33$ mm.

Temos que o valor de x na lei da função apresentada é dado em centímetro. Assim, como 33 mm = 3,3 cm, calculamos o valor de $f(x)$ para $x = 3,3$ mm:

$$f(3,3) = 100 \cdot e^{-0,1(3,3-0,3)} + 60 \cdot (1 - e^{-0,1(3,3-0,3)})$$

$$f(3,3) = 100 \cdot e^{-0,3} + 60 \cdot (1 - e^{-0,3})$$

De acordo com o enunciado, $e^{-0,3} = 0,74$. Então:

$$f(3,3) = 100 \cdot 0,74 + 60 \cdot (1 - 0,74)$$

$$f(3,3) = 74 + 15,6 = 89,6$$

Portanto, a resposta ao problema é 89,6%, e a alternativa **e** é a correta.

Explorando a estratégia

1 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Uema) Numa concessionária de caminhões zero, o vendedor informou ao comprador que a lei matemática que permite estimar a depreciação do veículo comprado é $v(t) = 65\,000 \cdot 4^{-0{,}04t}$, em que $v(t)$ é o valor, em reais, do caminhão, t anos após a aquisição como zero na concessionária.

Segundo a lei da depreciação indicada, o caminhão valerá um oitavo do valor de aquisição com Alternativa **a**.

a) 37,5 anos.
b) 7,5 anos.
c) 25 anos.
d) 8 anos.
e) 27,5 anos.

2 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(FGV-SP) Duas novas redes sociais foram lançadas recentemente e estão conseguindo muitos adeptos. A Rede **A** foi lançada primeiro e já conta com 100 000 usuários. A Rede **B** foi lançada mais recentemente e tem 10 000 usuários.

Especialistas em crescimento de redes sociais estimaram que o número de usuários em cada rede pode ser descrito através das seguintes funções:

$$\text{Rede } \mathbf{A}: y = 100\,000 \cdot 10^{\frac{t}{20}}$$
$$\text{Rede } \mathbf{B}: y = 10\,000 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$$

Nessas expressões, y representa o número de usuários e t é o tempo em meses, com $t = 0$ sendo o mês atual.

Suponha que os regimes de crescimento das duas redes nos próximos dois anos sejam bem descritos por essas expressões. Quanto tempo, em meses a partir do mês atual, a Rede **B** deve levar para alcançar o mesmo número de usuários que a Rede **A**? Alternativa **e**.

(dados: $\log_{10} 2 \simeq 0{,}3$)

a) 15.
b) 22.
c) 18.
d) 16.
e) 20.

3 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(FCM-MG) Em um estudo de microbiologia, o cultivo de uma população de microrganismos em um béquer está sendo monitorado ao longo do tempo. Nessa cultura, no instante inicial, havia quatro microrganismos e, após dez dias, a quantidade aumentou para quarenta microrganismos, porém, devido a limitações de alimento, espaço etc., o limite teórico dessa população é de oitocentos microrganismos. A figura a seguir mostra a curva de crescimento da cultura, que relaciona a população (P), em número de microrganismos, e o tempo (t), em dias, de acordo com a função:

Dados: $\ell n(3) = 1{,}1$; $\ell n(10) = 2{,}3$.

$$P = \frac{800}{200 \cdot e^{-0{,}24t} + 1}$$

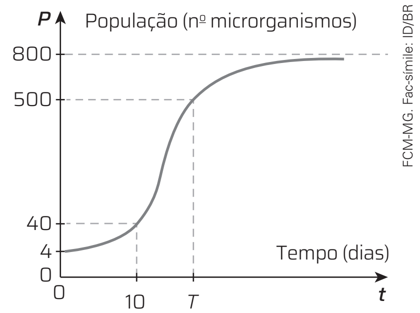


Gráfico ilustrativo e fora de escala.

O instante T em que essa população atingirá quinhentos microrganismos está compreendido no intervalo: Alternativa **d**.

a) $13 < T < 16$
b) $16 < T < 19$
c) $19 < T < 22$
d) $22 < T < 26$

GEOMETRIA PLANA

Você já ouviu falar em modelagem poligonal? Trata-se de um estilo amplamente utilizado na indústria de *design*, em *videogames*, no cinema, na arquitetura e em muitas outras áreas relacionadas a criações 3D. Nesse estilo, os objetos tridimensionais são construídos a partir de polígonos e transformações geométricas. Os polígonos mais comuns na modelagem poligonal são os triângulos e os quadriláteros, embora polígonos com mais lados também sejam utilizados, conforme necessário. Realizando transformações e manipulações nesses polígonos, um mesmo objeto pode ser representado de diferentes vistas ou em diferentes posições.

Nesta unidade, a ideia é partir do que você já conhece das figuras geométricas planas e ampliar seus conhecimentos nesse assunto. No capítulo 4, vamos retomar a Geometria clássica, conhecida como Geometria euclidiana, para depois, no capítulo 5, estudar a Geometria das transformações.

OBJETIVOS

- Interpretar diferentes representações de figuras geométricas planas e espaciais.
- Identificar propriedades geométricas e utilizá-las na resolução de situações-problema em contextos diversos.
- Desenvolver a investigação e a criatividade por meio do estudo das aplicações de figuras geométricas em situações cotidianas, sociais e econômicas.
- Retomar procedimentos de cálculo de áreas.
- Estabelecer relações entre diferentes áreas do conhecimento.
- Elaborar argumentos e redigir conclusões.

Profissional da indústria gráfica criando a imagem de uma cabeça humana em 3D utilizando modelagem poligonal. ▸

DC Studio; Lidiia/Shutterstock.com/ID/BR

UNIDADE 2

4 Geometria euclidiana

5 Geometria das transformações

O trabalho com o texto a seguir contribui para o desenvolvimento da competência geral **1**, pois é um modo de os estudantes valorizarem os conhecimentos historicamente construídos.

GEOMETRIA EUCLIDIANA

NESTE CAPÍTULO

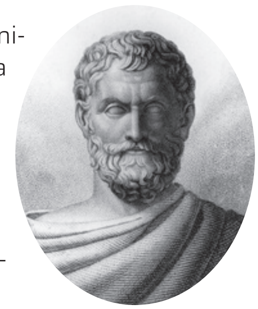
- Triângulo retângulo
- Teorema de Pitágoras
- Teorema de Tales
- Relações métricas no triângulo retângulo
- Área de triângulos

O começo do capítulo apresenta algumas informações históricas sobre Geometria na Antiguidade que podem ser ampliadas, dependendo do interesse dos estudantes, com a parceria dos professores de História e Sociologia.

A geometria que aplicamos em diversos contextos é utilizada há bastante tempo. Muitos exemplos concretos sugerem que os babilônios estavam familiarizados com as regras gerais dos cálculos de área e de volume de algumas figuras geométricas já no período de 2000 a.C. a 1600 a.C.

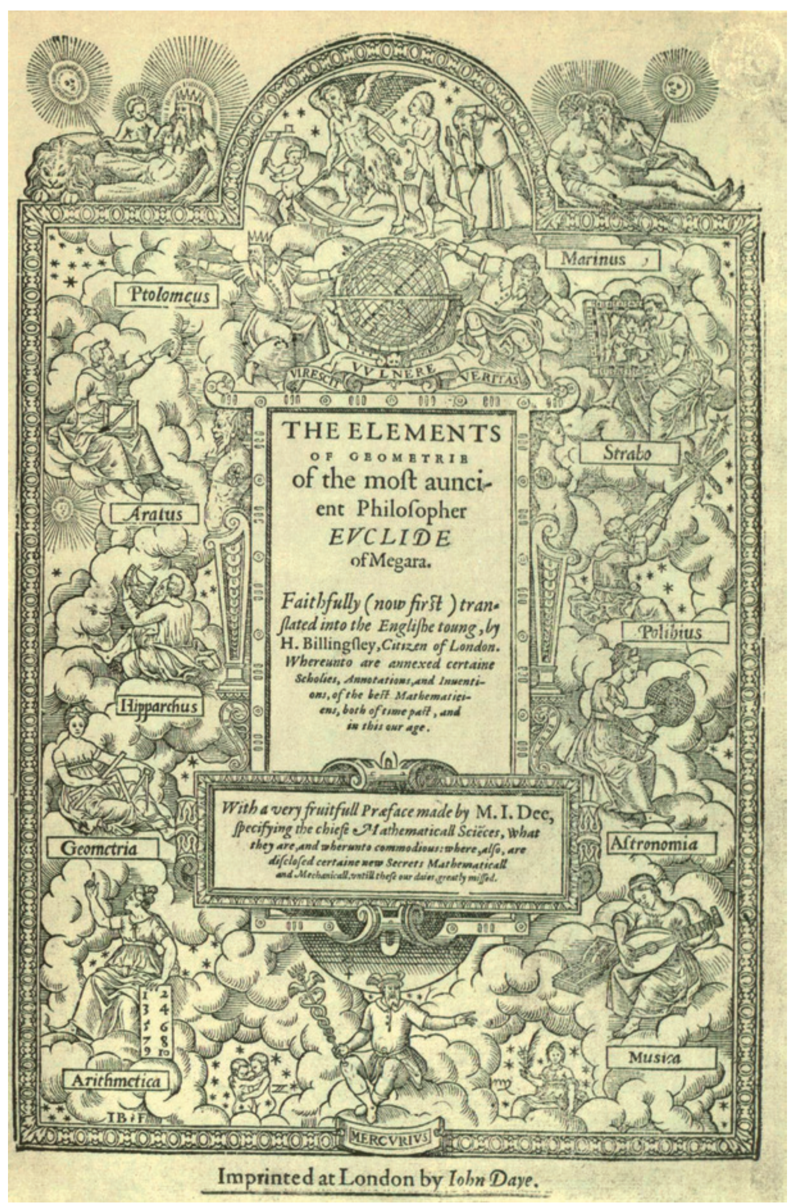
Acredita-se que a geometria demonstrativa tenha se iniciado com Tales de Mileto, um dos “sete sábios” da Grécia Antiga e que é conhecido como a primeira pessoa a quem se associam descobertas matemáticas.

Você já deve ter ouvido falar da obra *Os Elementos*, escrita pelo matemático grego Euclides, por volta de 300 a.C., é formada por 13 livros. Além de Geometria, ela contém teoria dos números e álgebra elementar (geométrica). Apesar de sua fama, não se conhecem detalhes da vida de Euclides, como local e data de nascimento ou de falecimento.



Hulton Archive/Getty Images

Representação do busto de Tales de Mileto.


THE ELEMENTS
OF GEOMETRIE
of the most auncient Philosopher
EVCLIDE
of Megara.
Faithfully (now first) translated into the Englishe toung, by H. Billingsley, Citizen of London. Whereunto are annexed certaine Scholies, Annotations, and Inuentions, of the best Mathematicians, both of time past, and in this our age.
With a very fruitfull Præface made by M. I. Dee, specifying the chiefe Mathematicall Sciēces, what they are, and wherunto commodious: where, also, are disclosed certaine new Secrets Mathematicall and Mechanicall, vntill these our daies, greatly missed.
Imprinted at London by Iohn Daye.

Biblioteca Linda Hall, Kansas. Fotografia: ID/BR

Ilustração da folha de rosto da primeira edição em língua inglesa da obra *Os Elementos*, de 1570.

Com base nos conceitos de medida de segmentos e ângulos, as propriedades das figuras geométricas foram desenvolvidas e estudadas ao longo dos séculos, chegando aos tempos atuais na forma de um vasto conjunto de saberes importantes por suas aplicações e para a resolução de situações-problema diversas.

Neste capítulo, vamos estudar o teorema de Pitágoras, o teorema de Tales e as relações métricas no triângulo retângulo.

TRIÂNGULO RETÂNGULO

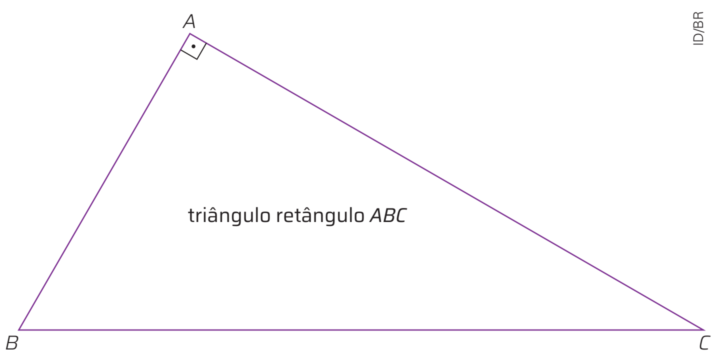
Triângulo retângulo é todo triângulo que tem um ângulo reto.

Na figura a seguir, $B\hat{A}C$ é reto. Costumamos dizer, nesse caso, que o triângulo ABC é retângulo em A.

Considerando que, nos textos didáticos, não há uniformidade quanto à notação de medida de abertura de ângulo e que os estudantes precisam saber ler essas informações em diferentes materiais e situações, utilizaremos notações diversas nesta coleção.

Em todo triângulo retângulo, os lados que formam o ângulo reto são denominados **catetos**, e o lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa**. Os outros dois ângulos de qualquer triângulo retângulo são **agudos** e **complementares**, pois a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é 180° e, como há um ângulo reto, a soma das medidas dos outros dois ângulos do triângulo retângulo é 90°.

Na figura, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são catetos, $\overline{BC}$ é a hipotenusa e $m(A\hat{B}C) + m(A\hat{C}B) = 90°$.



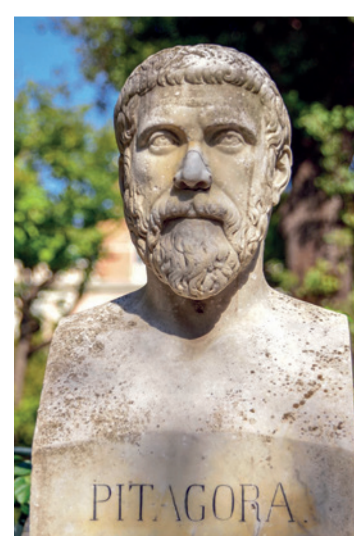
ID/BR

TEOREMA DE PITÁGORAS

Um dos teoremas mais conhecidos da Matemática foi demonstrado pela escola pitagórica, criada pelo matemático grego Pitágoras de Samos (século VI a.C.).

Esse teorema estabelece uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, afirmando que:

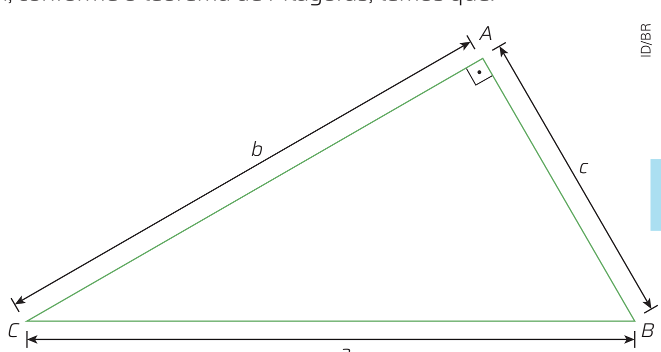
> Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.



Stefania Valvola/Shutterstock.com/ID/BR

Busto de Pitágoras em Roma, Itália. Foto de 2019.

Na figura a seguir, b e c são as medidas dos catetos e a é a medida da hipotenusa. Assim, conforme o teorema de Pitágoras, temos que:



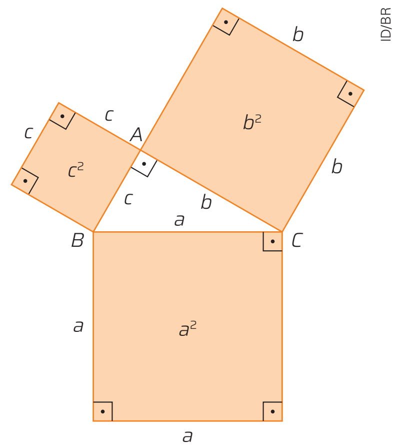
ID/BR

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Teorema de Pitágoras

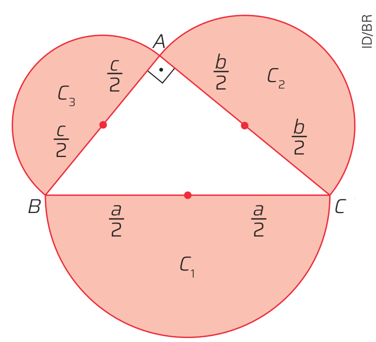
O teorema de Pitágoras pode ser interpretado da seguinte maneira:

> A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.



$a^2 = b^2 + c^2$

Essa relação também vale para semicírculos. Acompanhe o raciocínio a seguir.



A área do semicírculo é dada por $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\text{raio})^2$. Assim, temos:

$$\text{Área } (C_1) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}$$

$$\text{Área } (C_2) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi b^2}{8}$$

$$\text{Área } (C_3) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi c^2}{8}$$

Multiplicando os dois membros de $a^2 = b^2 + c^2$ por $\frac{\pi}{8}$, obtemos:

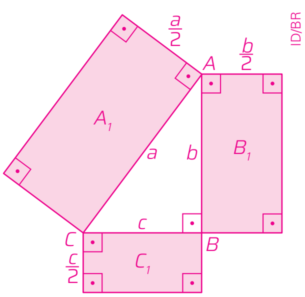
$$\frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8}$$

Portanto:

$$\text{Área } (C_1) = \text{Área } (C_2) + \text{Área } (C_3)$$

Podemos ampliar o significado do teorema de Pitágoras construindo polígonos semelhantes entre si – por exemplo, retângulos – sobre os lados de um triângulo retângulo. Que tal tentar?

Se considerar oportuno, apresente aos estudantes a ampliação do teorema de Pitágoras construindo retângulos sobre os lados de um triângulo retângulo. Para que os retângulos sejam semelhantes, seus ângulos correspondentes devem ser congruentes e seus lados correspondentes devem ser proporcionais. Como exemplo, vamos considerar a razão de proporcionalidade entre o lado e a altura do retângulo igual a 2. Outras razões podem ser consideradas, desde que os retângulos sejam semelhantes.



A área A de um retângulo é dada por $A = a \cdot h$, sendo a a medida do lado e h a altura relativa a esse lado. Assim, temos:

$$\text{Área } (A_1) = a \cdot \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Área } (B_1) = b \cdot \left(\frac{b}{2}\right) = \frac{b^2}{2}$$

$$\text{Área } (C_1) = c \cdot \left(\frac{c}{2}\right) = \frac{c^2}{2}$$

Portanto:

$$\text{Área } (A_1) = \text{Área } (B_1) + \text{Área } (C_1)$$

$$\frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Multiplicando os dois membros de $\frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$ por 2, obtemos $a^2 = b^2 + c^2$, que é o resultado encontrado ao calcular as áreas dos quadrados.

Ao explorar outras maneiras de aplicar o teorema de Pitágoras, os estudantes desenvolvem a competência geral **2**, visto que vão exercitar a curiosidade intelectual, além de investigar, refletir e fazer uma análise crítica, ampliando o significado desse teorema ao construir polígonos semelhantes entre si sobre os lados de um triângulo retângulo.

Aplicações do teorema de Pitágoras

Vamos aplicar o teorema de Pitágoras na dedução das fórmulas para calcular as medidas da diagonal de um quadrado e da altura de um triângulo equilátero.

Diagonal de um quadrado

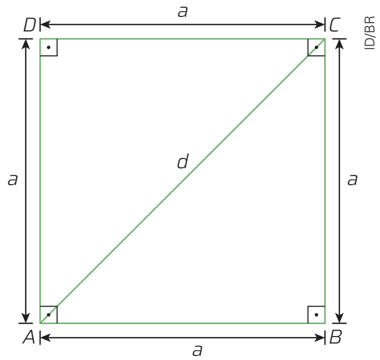
Em um quadrado, vamos estabelecer a relação que existe entre as medidas da diagonal d e do lado a.

No $\triangle ABC$, temos:

$d^2 = a^2 + a^2$

$d^2 = 2a^2$

$\boxed{d = a\sqrt{2}}$



Altura de um triângulo equilátero

Em um triângulo equilátero, vamos deduzir a relação entre as medidas de sua altura h e do lado a.

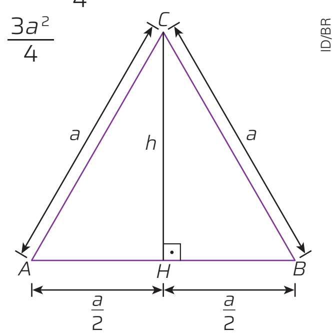
No $\triangle HBC$, temos:

$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$

$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$h^2 = \frac{3a^2}{4}$

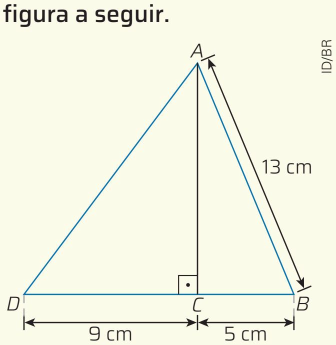
$\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$



Ao escolher uma ou duas atividades desta seção para analisar com os estudantes, destaque a importância de ler textos com linguagem matemática, incluindo as figuras geométricas e os dados contidos nelas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 Calcule as medidas dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ com base na figura a seguir.



Resolução

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos:

$$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$$
$$(AC)^2 + 5^2 = 13^2$$
$$AC = 12$$

Portanto, $\overline{AC}$ mede 12 cm.

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ACD$, temos:

$$(AC)^2 + (CD)^2 = (AD)^2$$
$$12^2 + 9^2 = (AD)^2$$
$$AD = 15$$

Portanto, $\overline{AD}$ mede 15 cm.

R2 As medidas dos lados de um triângulo retângulo, em uma mesma unidade de comprimento, são dadas por $x - 2$, x e $x + 2$. Determine essas medidas.

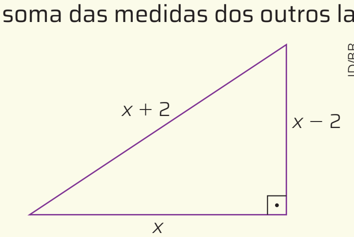
Resolução

Inicialmente, precisamos verificar a condição para que todas as medidas sejam positivas:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ x > 0 \\ x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{cases}$$

Portanto, $x > 2$.

Depois, devemos impor a condição de existência de um triângulo (a medida do maior lado é menor que a soma das medidas dos outros lados).



$$x + 2 < x - 2 + x \Rightarrow -x < -4 \Rightarrow x > 4$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(x - 2)^2 + x^2 = (x + 2)^2$

$x^2 - 8x = 0$

$x(x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (não satisfaz, pois } x > 4) \\ x = 8 \text{ (satisfaz, pois } x > 4) \end{cases}$

Portanto, $x = 8$ e os lados têm medidas 6, 8 e 10 em uma mesma unidade de comprimento.

R3 Em um triângulo isósceles, cujo perímetro mede 32 cm, a altura relativa à base mede 8 cm. Calcule as medidas dos lados congruentes.

Resolução

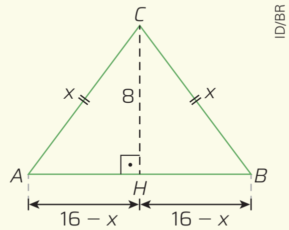
Como o perímetro do triângulo ABC mede 32 cm e fazendo $AC = BC = x$, temos:

$$AB = 32 - 2x$$

Como H é o ponto médio de $\overline{AB}$, então:

$$AH = HB = \frac{32 - 2x}{2} = 16 - x$$

Assim:

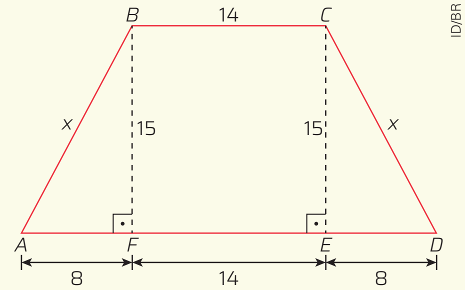


No $\triangle BHC$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(16 - x)^2 + 8^2 = x^2$$
$$32x = 320$$
$$x = 10$$

Portanto, os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem 10 cm.

R4 Em um trapézio isósceles, as bases medem 14 cm e 30 cm, e a altura, 15 cm. Calcule a medida do perímetro desse quadrilátero.



Resolução

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABF$, temos:

$$x^2 = 8^2 + 15^2$$
$$x = 17$$

Então, o perímetro de $ABCD$ é dado por:

$$AB + BC + CD + DA = 17 + 14 + 17 + 30$$
$$AB + BC + CD + DA = 78$$

Portanto, o perímetro de $ABCD$ mede 78 cm.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Sempre que considerar necessário, retorne ao texto e às atividades da seção *Problemas e exercícios resolvidos* para tirar suas dúvidas.

1 Em um triângulo retângulo, calcule a medida:

a) de um cateto, considerando que os outros lados medem 15 cm e 17 cm; 8 cm

b) de um cateto, dado que os outros lados medem $10\sqrt{2}$ cm e 10 cm; 10 cm

c) da hipotenusa, sabendo que os outros lados medem 12 cm e $12\sqrt{3}$ cm. 24 cm

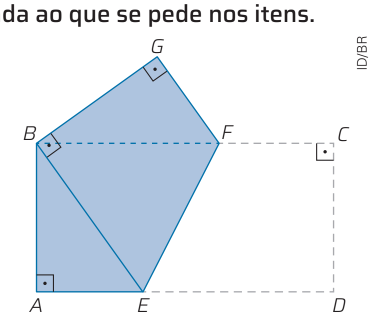
2 Um homem percorre, em sequência, 10 km na direção leste, 3 km na direção sul, 5 km na direção leste e 11 km na direção norte. Calcule a medida da menor distância entre os pontos de partida e de chegada. 17 km

3 Em um triângulo isósceles cuja base mede 24 cm, a medida da altura relativa à base mede 16 cm. Calcule a medida do perímetro desse triângulo. 64 cm

4 Em um retângulo cujos lados têm medidas proporcionais a 3 e a 4, o perímetro mede 42 cm. Calcule a medida de uma diagonal desse retângulo. 15 cm

5 Em um trapézio retângulo, a base menor, a altura e o lado oblíquo medem, respectivamente, 6 cm, 5 cm e 13 cm. Calcule a medida da base maior. 18 cm

6 A figura a seguir ilustra uma situação em que dobramos uma folha retangular de lados 80 cm e 40 cm de modo que dois vértices diagonalmente opostos coincidam. Com base nas informações e na imagem, responda ao que se pede nos itens.



a) Calcule a medida do segmento $\overline{EB}$. 50 cm

b) Os triângulos ABE e GBF são congruentes? Sim.

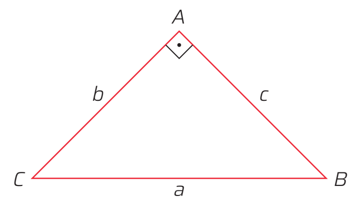
7 Agora, leia o texto sobre ternas pitagóricas na próxima página. Em seguida, analise a resolução das atividades **3** a **6**. Depois, responda: O fato de conhecer as ternas pitagóricas pode ou não auxiliar na resolução desses problemas? Resposta pessoal.

Você pode solicitar aos estudantes que leiam este texto em duplas. Depois, coordene uma discussão a respeito do que compreenderam e das dúvidas que surgiram, incentivando as duplas a trocar informações umas com as outras.

Ternas pitagóricas

Você estudou o teorema de Pitágoras neste capítulo. Você conhece a recíproca desse teorema?

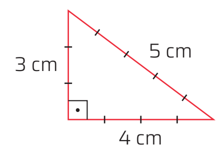
O teorema de Pitágoras afirma que: “Se um triângulo *ABC* é retângulo, *a* é a medida de sua hipotenusa e *b* e *c* são as medidas de seus catetos; então, $a^2 = b^2 + c^2$”.



ID/BR

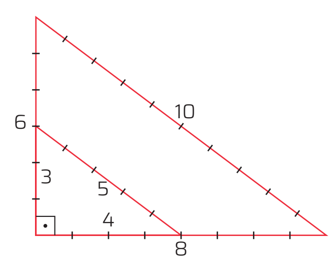
A recíproca do teorema corresponde a: “Se no triângulo *ABC* tem-se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo com ângulo reto no vértice *A*”.

Dessas duas proposições, podemos concluir que um triângulo com lados de medidas 3 cm, 4 cm e 5 cm é retângulo porque $5^2 = 3^2 + 4^2$. De fato, $25 = 9 + 16$.



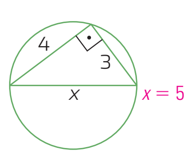
ID/BR

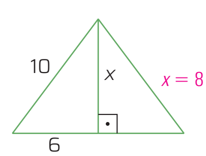
A partir desse triângulo, todo triângulo semelhante a ele também é retângulo, o que nos permite encontrar muitos outros trios de números que correspondem aos lados de triângulos retângulos, como: 6, 8 e 10; 9, 12 e 15; 15, 20 e 25. Mas também: $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$; (0,3; 0,4; 0,5); $\left(3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}\right)$.

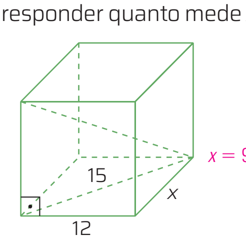


ID/BR

Conhecer esse fato pode agilizar muitos cálculos na resolução de alguns problemas que envolvem triângulos retângulos. Por exemplo, sem fazer nenhuma conta, é possível responder quanto mede *x* em cada situação.





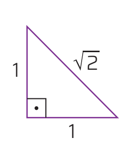


Ilustrações: ID/BR

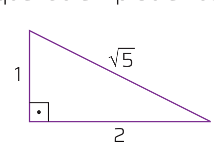
Existem outras ternas de números inteiros conhecidas como pitagóricas porque correspondem às medidas da hipotenusa e dos catetos de um triângulo retângulo. Algumas delas são: (5, 12, 13); (20, 21, 29); (9, 40, 41); (11, 60, 61); (8, 15, 17); (12, 35, 37); (16, 63, 65); (20, 99, 101) e (7, 24, 25).

Utilize uma calculadora para conferir que, de fato, esses trios de números são ternas pitagóricas. Não é preciso memorizar as ternas, mas conhecer algumas delas, como vimos, pode facilitar a resolução de problemas.

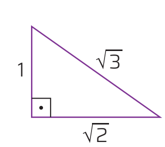
Existem outras ternas de números não todos inteiros que correspondem às medidas dos lados de triângulos retângulos e que aparecem com muita frequência em problemas. São elas:



$(1, 1, \sqrt{2})$



$(1, 2, \sqrt{5})$



$(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$

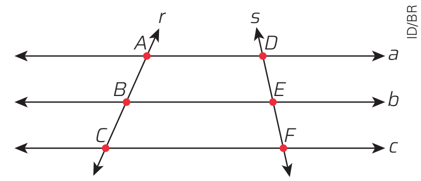
Ilustrações: ID/BR

Analisar com os estudantes diferentes recursos para solucionar problemas, bem como as vantagens de optar por uma ou outra estratégia de resolução, pode ajudar no desenvolvimento da análise crítica e na ampliação da compreensão dos processos de resolução, contribuindo para o desenvolvimento da competência geral **2**.

TEOREMA DE TALES

Tales de Mileto, um dos primeiros matemáticos dos quais temos notícia, formulou um importante teorema para a Geometria, que está relacionado com grandezas diretamente proporcionais.

Na figura a seguir, temos um feixe de retas paralelas cortadas por duas retas transversais.

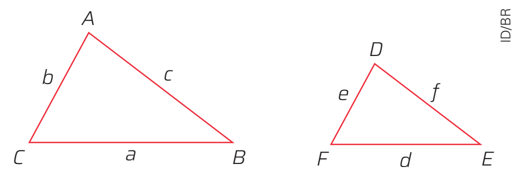


Segundo o teorema de Tales,

> se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais *r* e *s*, então as medidas dos segmentos de *r* determinados pelo feixe são diretamente proporcionais aos comprimentos dos segmentos correspondentes de *s*.
>
> $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ou $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

Uma consequência do teorema de Tales aparece em uma propriedade geométrica relacionada à **semelhança de triângulos**.

Dois triângulos são semelhantes se seus ângulos correspondentes são congruentes e seus lados correspondentes são proporcionais.



Comente com os estudantes que usamos $\sim$ para indicar semelhança e $\cong$ para indicar congruência.

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ se:

- $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$, $\widehat{C} \cong \widehat{F}$;
- $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$, sendo k a razão de semelhança.

$\widehat{A}$ e $\widehat{D}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{E}$, $\widehat{C}$ e $\widehat{F}$ são chamados de **ângulos homólogos**.

$\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$, $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são chamados de **lados homólogos**.

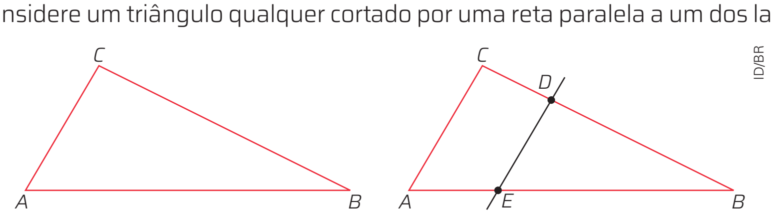
a e *d*, *b* e *e*, *c* e *f* são as medidas dos lados homólogos.

Verifique se os estudantes sabem o que significa a palavra "homólogo". De acordo com o *Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa*, "**homólogo** [...] **4** diz-se de lado, ângulo, diagonal, arco ou qualquer outro elemento correspondente em figuras semelhantes" (INSTITUTO ANTÔNIO HOUAISS. *Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. 1 CD-ROM).

Podemos afirmar que dois triângulos são semelhantes quando:

- têm dois ângulos correspondentes congruentes; ou
- têm um ângulo congruente e os lados adjacentes a esse ângulo, em um dos triângulos, são proporcionais aos correspondentes no outro triângulo; ou
- têm três lados proporcionais.

Considere um triângulo qualquer cortado por uma reta paralela a um dos lados.



Se $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{AC}$, então $\frac{BE}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{DE}{CA}$ e os ângulos correspondentes dos $\triangle BDE$ e $\triangle BCA$ são congruentes.

Quando cortamos um triângulo com uma reta paralela a qualquer um dos seus lados, o triângulo resultante é semelhante ao triângulo inicial. No exemplo dado, representamos essa relação de semelhança assim: $\triangle BDE \sim \triangle BCA$.

O objeto digital favorece a abordagem da História da Matemática, aprofundando o conhecimento sobre Tales de Mileto e suas contribuições para a Ciência.

Tales de Mileto

Tales de Mileto

Tales de Mileto (624 a.C.-548 a.C., aproximadamente) é conhecido como o primeiro dos "sete sábios" da Grécia Antiga.

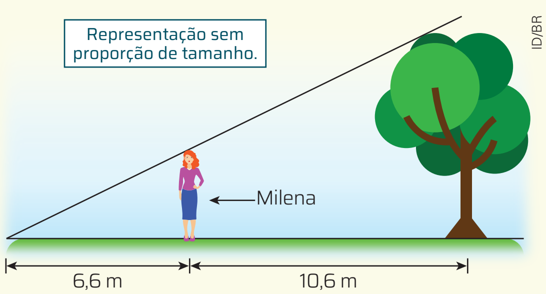
Considerado o primeiro filósofo, a ele se atribui a introdução do estudo de Geometria na Grécia. Era um homem de reconhecida inteligência, que se dedicou a diversas atividades. Foi comerciante, filósofo, engenheiro, astrônomo e matemático. Em sua meia-idade, dedicou-se ao comércio, e suas atividades levaram-no ao Egito, onde estudou com sacerdotes as ciências físicas e matemáticas. Os historiadores da época relatam que Tales não demorou a superar seus mestres e a conquistar a admiração do rei Amásis, por ter sido capaz de medir a altura das pirâmides por meio das sombras desses monumentos.

A aplicação da Geometria em situações práticas foi um de seus grandes feitos. Ele usou conhecimentos sobre triângulos semelhantes para calcular distâncias inacessíveis, como a distância de navios à praia.

Com Tales tem início o estudo científico da Astronomia. Ele se tornou célebre ao prever um eclipse solar, que viria a ocorrer em 585 a.C. Conta-se dele que, enquanto caminhava durante uma noite contemplando as estrelas, caiu em um fosso. Uma mulher que o acudiu teria comentado: "Como pode prestar atenção nas coisas do céu e não saber o que se passa sob seus pés?".

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R5 **Sabendo que a medida da altura de Milena é 1,65 m, qual é a medida da altura da árvore?**



Resolução

Podemos considerar que a altura de Milena e a altura da árvore podem ser representadas por catetos de um triângulo retângulo.

Indicando por h a medida da altura da árvore, pela semelhança de triângulos, temos:

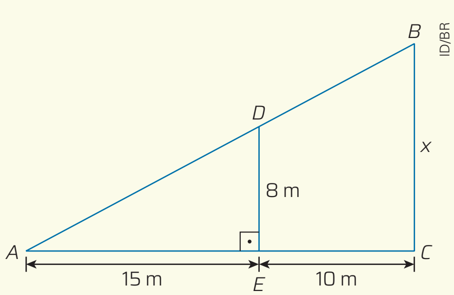
$$\frac{1,65}{h} = \frac{6,6}{6,6 + 10,6}$$

$$1,65 \cdot 17,2 = 6,6h$$

$$h = 4,3$$

Logo, a medida da altura da árvore é 4,3 m.

R6 **Calcule o valor de x, sabendo que $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$.**



Resolução

Pela semelhança de triângulos, podemos escrever:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{15}{15 + 10} = \frac{8}{x}$$

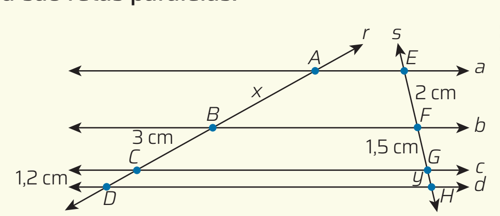
$$\frac{15}{25} = \frac{8}{x}$$

$$15x = 8 \cdot 25$$

$$x = \frac{200}{15} \simeq 13,3$$

Logo, o valor de x é aproximadamente 13,3 m.

R7 **Calcule as medidas de x e y, sabendo que a, b, c e d são retas paralelas.**



Resolução

Utilizando o teorema de Tales, podemos escrever:

$$\frac{x}{3} = \frac{2}{1,5}$$

$$1,5x = 6$$

$$x = 4$$

Do mesmo modo, escrevemos:

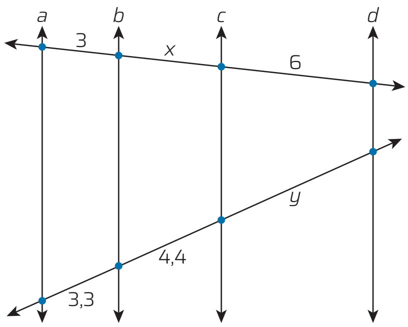
$$\frac{3}{1,2} = \frac{1,5}{y}$$

$$3y = 1,8$$

$$y = 0,6$$

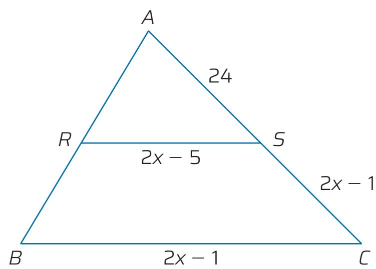
Assim, as medidas de x e y são 4 cm e 0,6 cm, respectivamente.

8 Sabendo que as retas *a*, *b*, *c* e *d* são paralelas, calcule x e y. $x = 4$; $y = 6{,}6$



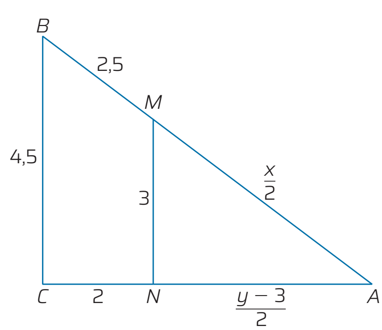
ID/BR

9 Na figura a seguir, $\overline{RS}$ é paralelo à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC. Qual é o valor de x? $x = 6{,}5$



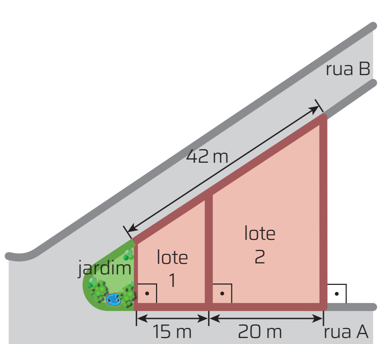
ID/BR

10 Na figura a seguir, o perímetro do triângulo maior é 18 cm. Calcule o perímetro do triângulo AMN, sabendo que $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$. 12 cm



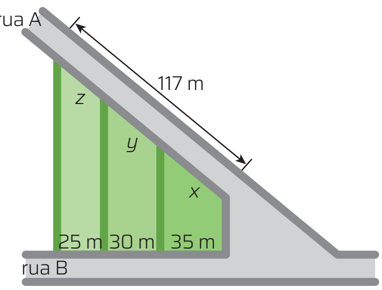
ID/BR

11 Este esquema mostra dois lotes de terreno. Descubra as medidas das frentes dos lotes 1 e 2 que dão para a rua B. lote 1: 18 m; lote 2: 24 m.



ID/BR

12 Neste esquema, temos terrenos com forma de trapézio. As medidas de uma das frentes de cada terreno para a rua B são conhecidas.



ID/BR

$z = 32{,}5$ m, $y = 39$ m e $x = 45{,}5$ m.

a) Calcule as medidas das frentes que dão para a rua A.

b) A seguir, há uma resolução incorreta do item **a** deste problema. Qual foi o erro cometido?

Há um erro na soma $7x + 6x + 5x$, que é igual a $18x$, e não $17x$.

$$\frac{35}{x} = \frac{30}{y} = \frac{25}{z} \text{ ou } \frac{7}{x} = \frac{6}{y} = \frac{5}{z} \quad \text{(I)}$$

$$x + y + z = 117 \quad \text{(II)}$$

De (I), temos:

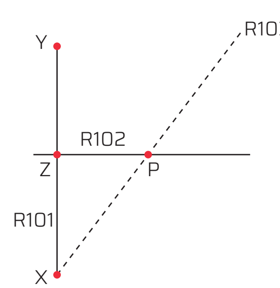
$$7y = 6x \text{ e } 7z = 5x$$

Multiplicando (II) por 7, obtemos:

$$7x + 7y + 7z = 819$$
$$7x + 6x + 5x = 819$$
$$17x = 819$$
$$x = 48{,}2$$

13 **Escreva a resposta correta no caderno.**

(Insper-SP) Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Está sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. A nova rodovia intersectará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.



Insper-SP. Fac-símile: ID/BR

O governo está planejando, após a conclusão da obra, construir uma estrada ligando a cidade Y até a R103. A menor extensão, em quilômetros, que esta ligação poderá ter é: Alternativa **e**.

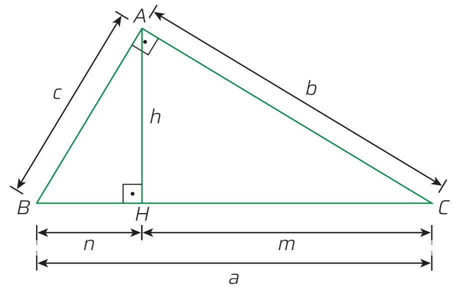
a) 250.
b) 240.
c) 225.
d) 200.
e) 180.

O trabalho com o tópico “Relações métricas no triângulo retângulo” contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**, pois os estudantes vão resolver problemas envolvendo triângulos nos quais se aplicam as propriedades métricas, identificando e utilizando a relação adequada ao cálculo solicitado.

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Em um triângulo ABC, retângulo em A, indicamos por:

- a a medida da hipotenusa $\overline{BC}$;
- b a medida do cateto $\overline{AC}$;
- c a medida do cateto $\overline{AB}$;
- h a medida de $\overline{AH}$, altura relativa a $\overline{BC}$;
- m a medida de $\overline{HC}$, projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$;
- n a medida de $\overline{BH}$, projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$.



ID/BR

Teorema: Em todo triângulo retângulo ABC, retângulo em A, a altura $\overline{AH}$ relativa à hipotenusa do triângulo determina pares de triângulos semelhantes.

$\triangle ABC \sim \triangle HBA$ $\quad$ $\triangle ABC \sim \triangle HAC$ $\quad$ $\triangle HBA \sim \triangle HAC$

Como consequência desse teorema, temos várias proporções que envolvem as medidas dos lados e da altura do triângulo.

$$\frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{HA} \Rightarrow \frac{c}{n} = \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \quad (1)$$

$$\frac{AB}{HA} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC} \Rightarrow \frac{c}{h} = \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \quad (2)$$

$$\frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{n}{h} = \frac{h}{m} = \frac{c}{b} \quad (3)$$

Daí decorrem as chamadas **relações métricas no triângulo retângulo**.

- De (2), vem: $b^2 = a \cdot m$
- De (1), vem: $b \cdot c = a \cdot h$
- De (1), vem: $c^2 = a \cdot n$
- De (3), vem: $h^2 = n \cdot m$

Adicionando as igualdades da primeira coluna e lembrando que $a = m + n$, temos:

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (m + n) \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

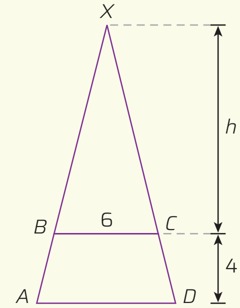
que é o conhecido teorema de Pitágoras.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R8 **Um trapézio tem altura 4 cm e suas bases medem 6 cm e 8 cm. Prolongando-se os lados não paralelos desse trapézio, obtêm-se dois triângulos. Qual é a medida da altura do triângulo maior?**

Resolução

Fazendo um esboço para pensar sobre o problema, temos a figura ao lado.



ID/BR

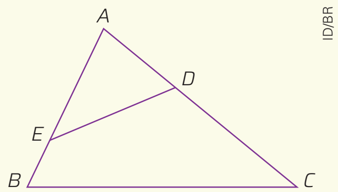
O que desejamos calcular é o valor de $h + 4$, sendo h a medida da altura do triângulo menor.

Sabemos que, pelo paralelismo entre as bases do trapézio, os triângulos AXD e BXC são semelhantes. Então:

$$\frac{4 + h}{h} = \frac{8}{6} \Rightarrow 6 \cdot (4 + h) = 8h \Rightarrow 24 + 6h = 8h \Rightarrow h = 12$$

Como a medida da altura do triângulo maior é $h + 4$, ela mede 16 cm.

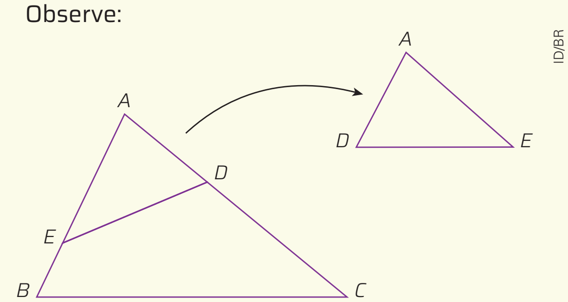
R9 A figura a seguir mostra dois triângulos, ABC e ADE, que satisfazem a relação $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{5}{3}$. Sabendo que $\overline{BC}$ mede 20 cm, calcule a medida de $\overline{DE}$.



Resolução

Ao observar o desenho pela primeira vez, aparentemente não existe paralelismo nem semelhança entre os triângulos, mas, se o analisarmos com atenção, perceberemos que os triângulos ABC e ADE são semelhantes. Uma forma de deixar isso mais evidente é separá-los e inverter a posição dos vértices do triângulo menor.

Observe:



O ângulo A é comum aos dois triângulos, e os lados desse ângulo são proporcionais, pois $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{5}{3}$.

Então, podemos escrever: $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{5}{3}$

Como $BC = 20$, temos que $\overline{DE}$ mede 12 cm, pois:

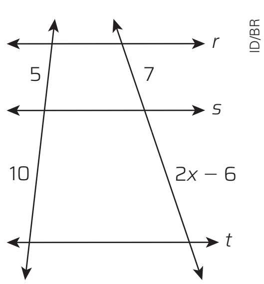
$$\frac{20}{DE} = \frac{5}{3} \Rightarrow DE = 12$$

Ao resolver as atividades **14** a **17**, os estudantes trabalharão a habilidade **EM13MAT308**, ou seja, vão resolver problemas envolvendo triângulos em que é possível aplicar as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

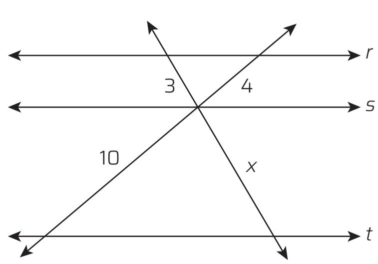
14 Sabendo que as retas r, s e t são paralelas, calcule o valor de x em cada caso.

a)



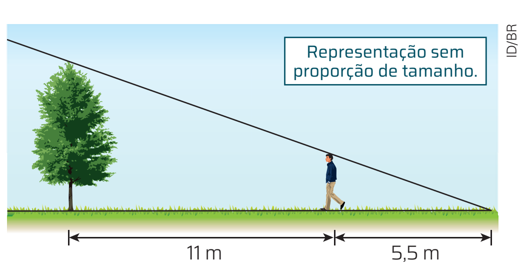
$x = 10$

b)

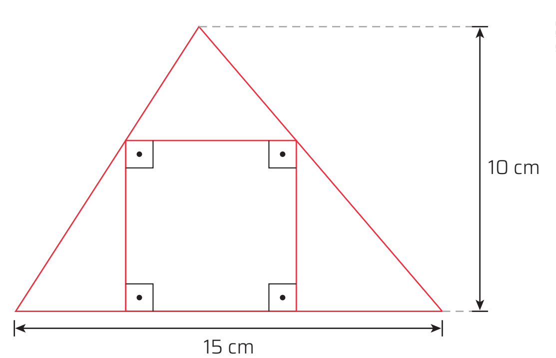


$x = 7{,}5$

15 Sabendo que a altura de Pedro é 1,80 m, qual é a medida da altura da árvore? 5,4 m



16 Qual é a medida do perímetro do quadrado inscrito em um triângulo cuja base e altura medem, respectivamente, 15 cm e 10 cm? 24 cm



17 Registre no caderno a resposta correta.

(Fuvest-SP) Um marceneiro possui um pedaço de madeira no formato de um triângulo retângulo, cujos catetos medem 12 cm e 35 cm. A partir desta peça, ele precisa extrair o maior quadrado possível, de tal forma que um dos ângulos retos do quadrado coincida com o ângulo reto do triângulo. A medida do lado do quadrado desejado pelo marceneiro está mais próxima de Alternativa **c**.

a) 8,0 cm
b) 8,5 cm
c) 9,0 cm
d) 9,5 cm
e) 10,0 cm

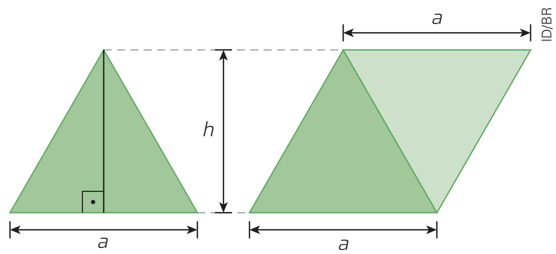
ÁREA DE TRIÂNGULOS

O trabalho com este tópico possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307**, visto que os estudantes vão usar diferentes métodos e deduzir expressões de cálculos para obter a medida da área de uma superfície.

Acompanhe duas maneiras de calcular a área de um triângulo.

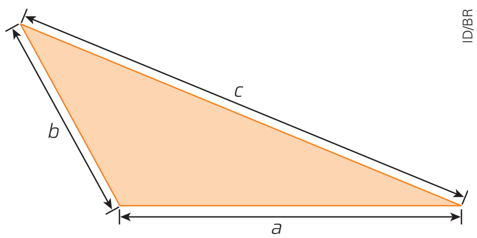
1ª) A medida da área de um triângulo com um lado de medida a e altura de medida h, relativa a esse lado, é equivalente à metade da medida da área de um paralelogramo com um lado de medida a e altura respectiva de medida h.

Se julgar necessário, comente com os estudantes que, quando dizemos que uma figura é equivalente a outra nesse contexto, queremos dizer que elas têm a mesma medida de área.



$$A = \frac{a \cdot h}{2}$$

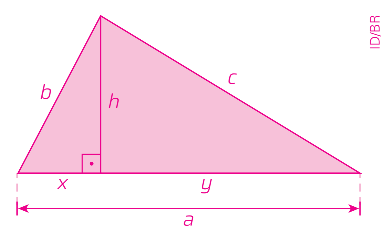
2ª) Conhecendo a medida de seus lados.



Se $p = \dfrac{a + b + c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo, então sua área é

$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Comente com os estudantes que a fórmula $A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ é conhecida como fórmula de Heron. Proponha a eles que façam uma pesquisa sobre o geômetra e engenheiro grego Heron de Alexandria e busquem uma justificativa para a fórmula que leva seu nome.

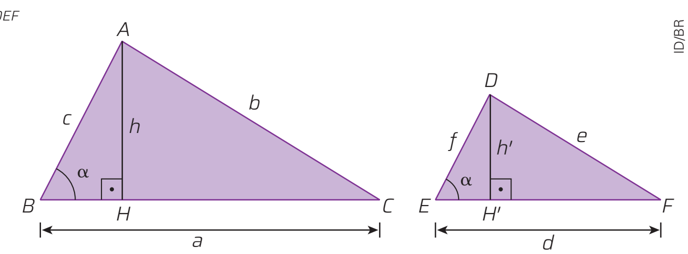


Uma possibilidade é começar pelo valor de $p(p - a)(p - b)(p - c)$, substituindo p por $\dfrac{a + b + c}{2}$ e usando $a^2 = (x + y)^2$, $b^2 = h^2 + x^2$ e $c^2 = h^2 + y^2$ até mostrar que $p(p - a)(p - b)(p - c) = \left(\dfrac{a \cdot h}{2}\right)^2 = A^2$.

Agora que vimos essas maneiras de calcular a área de um triângulo, vamos relacionar o cálculo de área com semelhança de triângulos. Leia o teorema e, em seguida, acompanhe sua demonstração.

Teorema: Se dois triângulos são semelhantes, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, e a razão de proporcionalidade dos lados correspondentes é k, então a razão entre as áreas dos triângulos é k^2.

Sabemos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ e que $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF} = k$ e queremos provar que $\dfrac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle DEF}} = k^2$.



Sejam h e h' as alturas relativas aos lados correspondentes $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$. Como os triângulos são semelhantes, os ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ têm a mesma medida α. Então, os triângulos retângulos ΔABH e $\Delta DEH'$ são semelhantes, pois têm os três ângulos correspondentes de mesma medida. Como consequência, temos:

$$\frac{h}{h'} = \frac{c \cdot \text{sen}\,\alpha}{f \cdot \text{sen}\,\alpha}$$

$$\frac{h}{h'} = \frac{c}{f}$$

$$\frac{h}{h'} = \frac{AB}{DE}$$

$$\frac{h}{h'} = k$$

Se A é a área do $\triangle ABC$ e A' é a área do $\triangle DEF$, ou seja, $A = \dfrac{a \cdot h}{2}$ e $A' = \dfrac{d \cdot h'}{2}$, então:

$$\frac{A}{A'} = \frac{a \cdot h}{d \cdot h'}$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{h}{h'}$$

$$\frac{A}{A'} = k \cdot k$$

$$\frac{A}{A'} = k^2$$

E isso é o que queríamos provar.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

18 **Calcule a medida da área de um:** **a)** $4\sqrt{3}$ cm² **b)** 36 cm²

a) triângulo equilátero com lados medindo 4 cm.

b) triângulo com lados medindo: 9 cm, 10 cm e 17 cm.

c) trapézio retângulo de bases 9 m e 25 m e de lado oblíquo 20 m. 204 m²

d) trapézio isósceles de bases 4 m e 14 m e lado oblíquo 13 m. 108 m²

e) losango cujos lados medem 10 m e uma diagonal de 16 m. 96 m²

19 **Dois quadrados têm, respectivamente, lados medindo 12 cm e 24 cm. Qual é a razão entre as medidas das áreas do quadrado menor e do quadrado maior?** $\frac{1}{4} = 0{,}25$

20 **Qual é a razão de semelhança aproximada entre dois triângulos cujas áreas medem 25 cm² e 36 cm², respectivamente?** Alternativa **e**.

a) 0,43
b) 0,53
c) 0,63
d) 0,73
e) 0,83

21 **Dados dois polígonos semelhantes, determine a medida da área do menor sabendo que a área do maior mede 64 cm² e que a razão de semelhança entre eles é 0,5.** 16 cm²

22 **Indique a resposta correta no caderno.**

(Enem) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

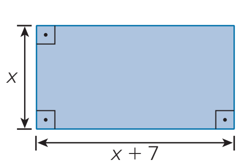


Figura A

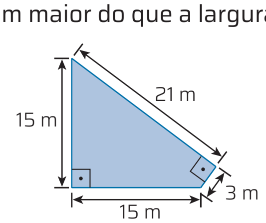


Figura B

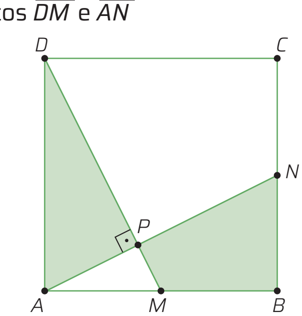
Ilustrações: Enem. Fac-símile: ID/BR

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a Alternativa **b**.

a) 7,5 e 14,5.
b) 9,0 e 16,0.
c) 9,3 e 16,3.
d) 10,0 e 17,0.
e) 13,5 e 20,5.

23 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(UFRGS-RS) Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado de lado 1; M e N são pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ respectivamente, e P é o ponto de interseção dos segmentos $\overline{DM}$ e $\overline{AN}$



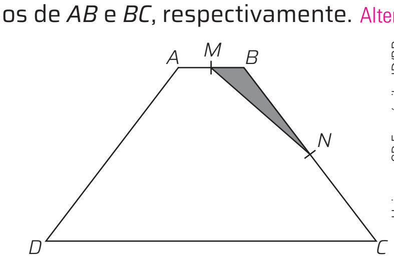
Ilustrações: UFRGS-RS. Fac-símile: ID/BR

Sabendo que o ângulo APD é reto, a área da região sombreada é Alternativa **d**.

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{5}$
d) $\frac{2}{5}$
e) $\frac{3}{5}$

24 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Unicamp-SP) Na figura a seguir, $ABCD$ é um trapézio com $AB = 1$ e $CD = 5$. Os pontos M e N são pontos médios de AB e BC, respectivamente. Alternativa **d**



Unicamp-SP. Fac-símile: ID/BR

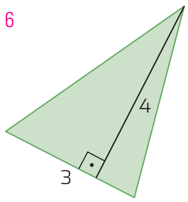
Sabendo que a área de MBN é 1, a área do trapézio é:

a) 18.
b) 20.
c) 22.
d) 24.

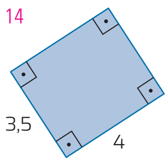
CÁLCULO RÁPIDO

1 Calcule as áreas das figuras a seguir.

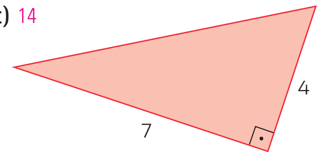
a) 6



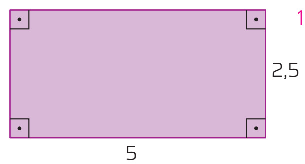
b) 14



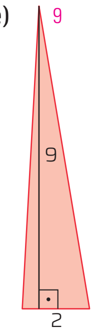
c) 14



d) 12,5



e) 9



Ilustrações: ID/BR

2 Converta para metro as seguintes medidas: 55 cm; 550 cm; 5,5 km; 0,055 km.
0,55 m; 5,5 m; 5 500 m; 55 m.

3 Escreva, em centímetro, as seguintes medidas: 3,2 km; 0,32 mm; 32 m; 0,032 m.
320 000 cm; 0,032 cm; 3 200 cm; 3,2 cm.

4 Escreva, em centímetro quadrado, as seguintes medidas: 4,5 m²; 42 m²; 0,42 km²; 42 000 mm².
45 000 cm²; 420 000 cm²; $4,2 \cdot 10^9$ cm²; 420 cm².

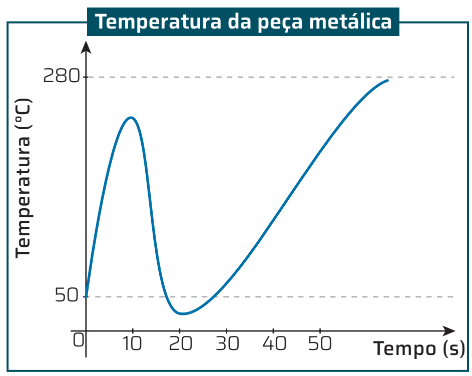
5 Escreva, em metro quadrado, as seguintes medidas: 6 700 cm²; 0,67 km²; 670 km²; 0,67 cm².
0,67 m²; 670 000 m²; 670 000 000 m²; 0,000067 m².

PARA RECORDAR

Esta seção pode ser proposta no decorrer do estudo do capítulo, de modo que os estudantes possam sanar suas dúvidas ao longo desse período.

1 Um fabricante gastava R$ 40,00 na produção de cada unidade de uma mercadoria, que ele vendia por R$ 100,00. Sobre o preço de venda, o fabricante pagava 40% de imposto. Devido a problemas com o preço das matérias-primas, o custo de fabricação teve um aumento de 60%. Então, para evitar uma queda acentuada na produção, o governo resolveu diminuir a alíquota do imposto para 30% do preço de venda, e o fabricante concordou em diminuir seu percentual de lucro em relação ao custo de produção, de 50% para 40%. Qual é o novo preço de venda dessa mercadoria? R$ 128,00

2 Durante um tratamento térmico, a temperatura de certa peça metálica varia de acordo com o gráfico a seguir.



ID/BR

Dados fornecidos pelo fabricante.

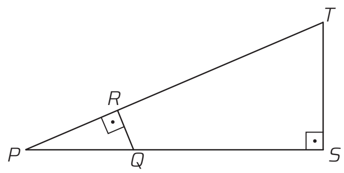
Resposta possível: No início do tratamento, a peça estava a uma temperatura igual a 50 °C.
Durante o tratamento, entre $t = 0$ até, aproximadamente, $t = 10$, o gráfico é crescente. Então, ocorre o aquecimento da peça.

Analise o gráfico e cite duas informações que podemos extrair dele.

3 Um observador que está na proa de um barco observa o alto da torre de uma plataforma marítima de petróleo, de altura 50 m, segundo um ângulo de 60°. A que distância da plataforma o barco está? Aproximadamente 29 m.

4 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Uerj) Nos triângulos retângulos *PQR* e *PST*, representados a seguir, o ponto *Q* pertence ao segmento de reta *PS* e o ponto *R* pertence ao segmento de reta *PT*. As medidas dos segmentos *PQ*, *QR* e *PS* são, respectivamente, 41 cm, 9 cm e 100 cm. Alternativa **b**.



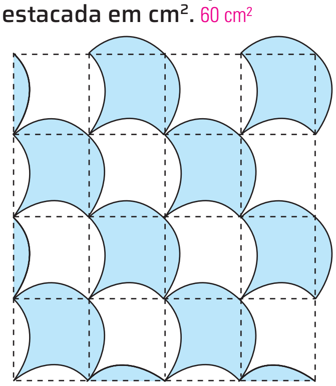
ID/BR

A medida do segmento *ST*, em centímetros, é igual a:

a) 18 **b)** 22,5 **c)** 26 **d)** 30,5

Não se deixe impressionar pela figura da atividade **5**. Observe-a com cuidado, pois ela é mais simples do que parece à primeira vista. Lembre-se de que a área *A* de um círculo de raio *r* é igual a $A = \pi \cdot r^2$.

5 **(UnB-DF) A figura abaixo mostra um mosaico formado por arcos de circunferências. Sabendo que os quadrados pontilhados têm lado medindo $\sqrt{7}$ cm e considerando π igual a $\frac{22}{7}$, determine a área da região destacada em cm².** 60 cm²



UnB-DF Fac-símile: ID/BR

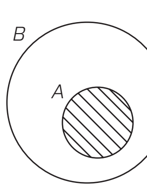
6 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Fatec-SP) Peter Drucker, pai da Administração moderna, enunciou a proposição "Todas as inovações eficazes são surpreendentemente simples".

Considere verdadeiras a proposição de Drucker e a proposição **p**: "uma roda é uma inovação eficaz". Em cada alternativa são apresentados diagramas de Euler-Veen, nos quais *A* é o conjunto das inovações eficazes, *B* é o conjunto das inovações "surpreendentemente simples", e existe uma região tracejada que representa o conjunto ao qual uma roda pertence.

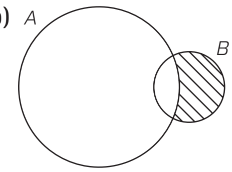
Assim sendo, assinale a alternativa cujo diagrama indica corretamente as relações descritas. Alternativa **a**.

a)



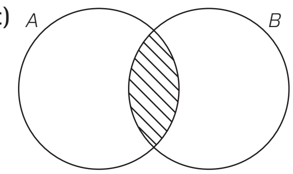
Fatec-SP. Fac-símile: ID/BR

b)

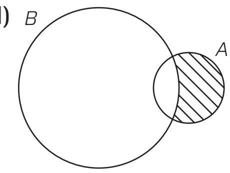


Ilustrações: Fatec-SP. Fac-símile: ID/BR

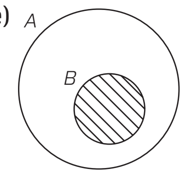
c)



d)



e)



7 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(SLMandic Araras-SP) Para disputar dois campeonatos diferentes, o treinador de futebol da escolinha Toque de Bola dividiu seus alunos em dois grupos, um para disputar o campeonato regional e o outro [para] disputar o campeonato estadual. Os jogadores mais velhos vão disputar o estadual e terão um jogador a mais que o grupo do regional. Considere os dados a seguir sobre a idade dos alunos da escolinha:

- Média: 13 anos
- Mediana: 15 anos
- Moda: 18 anos

André, Bernardo, Cauê e Davi têm, respectivamente, 13 anos, 14 anos, 15 anos e 16 anos, e suas idades não são iguais à de nenhum outro colega de time. De acordo com essas informações, podemos afirmar que André, Bernardo, Cauê e Davi jogarão, respectivamente, os campeonatos Alternativa **c**.

a) regional, regional, regional, regional.

b) regional, regional, regional, estadual.

c) regional, regional, estadual, estadual.

d) regional, estadual, estadual, estadual.

e) estadual, estadual, estadual, estadual.

8 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Obmep) Observe a sequência de figuras abaixo, todas elas com a forma da letra Y. Seguindo este padrão, quantas bolinhas terá a 15ª figura? Alternativa **b**.

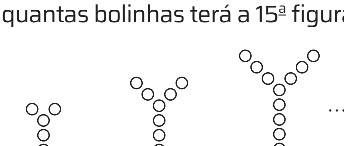


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Obmep. Fac-símile: ID/BR

a) 35 **b)** 47 **c)** 50 **d)** 52 **e)** 60

Não escreva no livro.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Nos problemas a seguir, o desafio é construir uma estratégia, que pode ser bem diferente de um problema para outro. Registre suas resoluções da melhor forma para apresentá-las aos colegas.

1 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Obmep) A mãe de César deu a ele as seguintes instruções para fazer um bolo:

- se colocar ovos, não coloque creme;
- se colocar leite, não coloque laranja;
- se não colocar creme, não coloque leite.

Seguindo essas instruções, César pode fazer um bolo com: Alternativa **d**.

a) ovos e leite, mas sem creme.
b) creme, laranja e leite, mas sem ovos.
c) ovos e creme, mas sem laranja.
d) ovos e laranja, mas sem leite e sem creme.
e) leite e laranja, mas sem creme.

2 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Obmep) Ana, Cláudia, Joaquim, Pedro e Fabiana se esconderam durante uma brincadeira. Nessa brincadeira,

- havia exatamente duas crianças na casa da árvore;
- Pedro, que nasceu em São Paulo, se escondeu junto com Fabiana;
- uma menina se escondeu sozinha;
- Ana não estava sozinha em seu esconderijo;
- o menino pernambucano estava na casa da árvore.

Quem estava na casa da árvore? Alternativa **c**.

a) Pedro e Fabiana.
b) Joaquim e Cláudia.
c) Ana e Joaquim.
d) Pedro e Ana.
e) Cláudia e Fabiana.

3 **Um banqueiro tem três chaves para três fechaduras, mas não sabe qual chave abre cada fechadura. Quantas tentativas ele deve fazer para descobrir a chave certa de cada fechadura? Será que você consegue encontrar o menor número de tentativas e acertar as chaves em suas fechaduras?**
No mínimo, três tentativas. Resposta pessoal.

4 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Fatec-SP) As profissões de mágico e de matemático podem dialogar entre si. Um exemplo disso são as ordens cíclicas – sequências que se repetem – utilizadas em truques com baralhos.

Suponha que, antes de realizar um truque de adivinhação, um mágico disponha as cartas de um baralho na ordem cíclica representada na figura.

A♣	4♥	7♠	10♦	K♣	3♥	6♠	9♦
Q♣	2♥	5♠	8♦	J♣	A♥	4♠	7♦
10♣	K♥	3♠	6♦	9♣	Q♥	2♠	5♦ ...

Fatec-SP. Fac-símile: ID/BR

Durante a apresentação, são convidados ao palco três espectadores. O mágico pede a um dos espectadores que separe o baralho de cartas em duas partes (corte), colocando a parte de baixo em cima da outra.

O mágico então irá distribuir 3 cartas em sequência aos espectadores convidados. Assim, ele pega a primeira carta do topo do baralho e entrega ao primeiro espectador. Em seguida, pega a próxima carta e entrega ao segundo espectador e, por fim, retira a carta seguinte e entrega ao terceiro espectador.

Ele pergunta ao primeiro espectador somente o símbolo que identifica a carta que está com ele, o qual responde que tem um **K**.

Para o segundo espectador, o mágico pergunta apenas o naipe, obtendo a informação que é ♦.

Cada carta possui um símbolo (número ou letra); e um naipe (♣; ♥; ♠; ♦).

Logo, o mágico pode deduzir que o terceiro espectador está segurando a carta Alternativa **c**.

a) 3♣.
b) 6♥.
c) 6♣.
d) 10♥.
e) 10♠.

PALAVRAS-CHAVE

Lembre-se de que a produção dos estudantes nesta seção pode ser um instrumento de avaliação, assim como uma forma de analisar o que é preciso retomar com cada um ou com grupos de estudantes.

Que tal retomar o que você aprendeu no capítulo? Organizamos uma lista de palavras-chave que correspondem às ideias centrais que você deve guardar como aprendizagem.

- Teorema de Pitágoras
- Teorema de Tales
- Semelhança de triângulos
- Cálculo de áreas

Reflita sobre elas e escreva, para cada uma, um pequeno texto com exemplos, ilustrações e fórmulas para ser consultado quando você precisar utilizar, em outras situações, o que aprendeu.

MATEMÁTICA E DESENHO GEOMÉTRICO

Para ampliar os conhecimentos dos estudantes sobre construções geométricas, convide um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas ou da área de Linguagens e suas Tecnologias para participar das discussões.
O objetivo desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes ao desenvolver habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propor que vivenciem um processo investigativo.
Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **3** e **6** propostas pela BNCC, pois exercita a curiosidade intelectual e recorre à abordagem própria das ciências, incluindo a imaginação e a criatividade, além de valorizar e fruir manifestações artísticas e culturais, permitindo aos estudantes que participem de práticas diversificadas da produção artístico-cultural, possibilitando uma integração com a área de Linguagens e suas Tecnologias. Pode-se propor um trabalho com o professor de Arte, a fim de explorar a competência específica **3** da área de Linguagens e suas Tecnologias.

Aqui, trazemos a perspectiva da etnomatemática no sentido de que os estudantes conheçam e expliquem os saberes e as práticas de grupos e culturas, cuja produção e validação são moldadas por suas necessidades, diferenciando-se do pensamento matemático ensinado na escola.

Arte rupestre

O objeto digital apresenta informações sobre pinturas rupestres em diversas localidades.

Construções geométricas

Em algum momento da sua vida, talvez quando ainda nem sabia falar muito bem, você pode ter feito rabiscos no papel ou até nas paredes de casa. Não se tratava de desenhar bem ou mal, mas de comunicar algo ao mundo por meio de um desenho, uma habilidade que as crianças parecem entender quase instintivamente.

Desenhar é uma forma de expressão tão antiga quanto a própria humanidade. As pinturas rupestres, por exemplo, são conhecidas como as mais antigas representações artísticas criadas pelos seres humanos e há muitos exemplos delas preservados em formações rochosas em vários lugares do mundo.

imageBROKER R/Getty Images

Arte rupestre no Parque Nacional Serra da Capivara, no Piauí. Foto de 2020.

Assim como as pinturas pré-históricas ou os desenhos infantis, o desenho geométrico é uma forma de expressão humana. Diferentemente deles, porém, o desenho geométrico tem como característica fundamental a precisão e o rigor técnico. Por isso, ferramentas como régua, esquadro e compasso são tão importantes para essa área de conhecimento, ajudando a representar com exatidão elementos como pontos, linhas, planos e sólidos geométricos.

Para entender como a Matemática se relaciona com o desenho geométrico, leia o trecho de texto a seguir.

> O desenho geométrico ocupa lugar de destaque no estudo e na prática da Matemática devido ao fato de muitos problemas técnicos poderem ser resolvidos com maior rapidez e clareza por meio de processos gráficos do que por processos analíticos.
>
> [...]
>
> ALBRECHT, Clarissa Ferreira; OLIVEIRA, Luiza Baptista de. *Desenho geométrico*. Viçosa, MG: Ed. da UFV, 2013. p. 8. Disponível em: https://www2.cead.ufv.br/serieconhecimento/wp-content/uploads/2015/06/desenho-geometrico.pdf. Acesso em: 21 set. 2024.

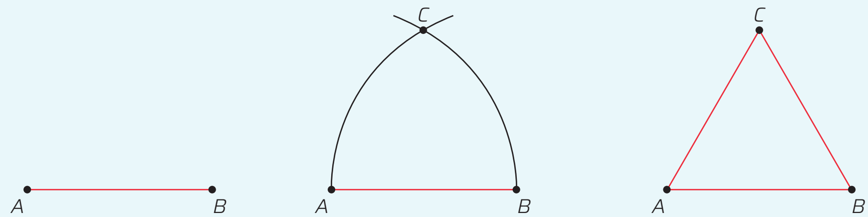
Assim, é importante saber que as formas geométricas podem ajudar a resolver determinados problemas matemáticos. Mas, antes disso, precisamos também entender como representá-las adequadamente.

Vamos relembrar duas construções geométricas simples feitas com régua e compasso: o desenho de um triângulo equilátero e o de duas retas perpendiculares.

Para a construção do triângulo *ABC* a seguir, inicialmente traçamos um segmento de reta de qualquer tamanho, com *A* e *B* em cada extremo. Em seguida, com a ponta-seca do compasso em *A* e abertura do tamanho do segmento, traçamos um arco de circunferência. Isso também deve ser feito com a

Não escreva no livro.

ponta-seca em *B* até que os dois arcos se cruzem em um ponto que chamaremos de *C*. O triângulo *ABC*, formado pelos segmentos de reta que ligam os pontos *A*, *B* e *C*, é um triângulo equilátero.

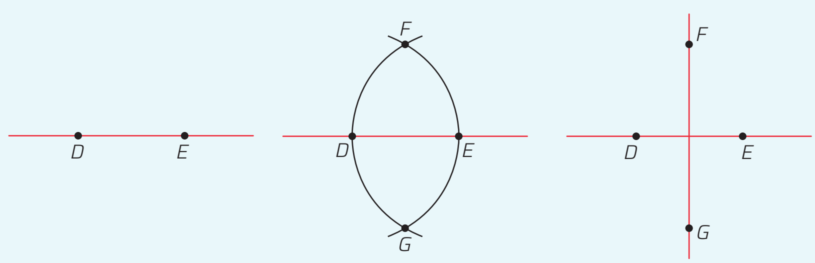


Ilustrações: ID/BR

ATENÇÃO!

Tenha cuidado com a ponta-seca ao manusear o compasso.

Para a construção de duas retas perpendiculares, inicialmente representamos uma reta e escolhemos dois pontos próximos, *D* e *E*, por exemplo. Depois, com a abertura do compasso maior do que a medida do segmento, traçamos os dois arcos de circunferência de maneira que eles se intersectem em dois pontos, *F* e *G*, acima e abaixo da reta. Por fim, com a régua, traçamos a reta que passa por *F* e *G* e que é perpendicular à reta que passa por *D* e *E*.



Ilustrações: ID/BR

Sabendo como fazer essas duas construções, é possível fazer muitas outras.

A atividade **3** pode gerar diferentes reações entre os estudantes: alguns podem ficar mais empolgados, enquanto outros podem se sentir mais apreensivos, dependendo de suas aspirações, seus interesses e suas experiências em relação à prática artística. Por isso, é importante garantir que os grupos tenham liberdade para organizar e criar suas obras, de modo que todos se sintam seguros e valorizados de acordo com suas habilidades. Aqueles que não desejarem desenhar podem contribuir com a pesquisa sobre obras e artistas e a argumentação final sobre a importância dos desenhos geométricos para a criação artística. Conversar com o professor de Arte desde o início da atividade e contar com a contribuição dele na apresentação dos trabalhos também pode ajudar os estudantes a se apropriar com tranquilidade das etapas que definirem para o desenvolvimento da proposta.
A resposta dos estudantes ao último item reflete evidências da competência socioemocional persistência.

Conectando ideias

Oriente os estudantes na utilização do compasso a fim de evitar acidentes e garantir a integridade física deles.

1 **Utilizando os instrumentos que preferir, prove que o triângulo *ABC* é equilátero e que as retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{FG}$ são perpendiculares.**

Consulte a resposta no Manual do Professor.

2 **Com base nos exemplos e com o auxílio de uma régua e um compasso, desenhe o que se pede em cada item a seguir e prove a validade das construções.**

Consulte as respostas no Manual do Professor.

a) Um hexágono regular.

b) Um triângulo isósceles.

3 **O desenho geométrico exige algumas técnicas e precisão para construir figuras geométricas com ferramentas como régua, compasso e esquadro. A arte, por sua vez, pode ser flexível e alguns estilos não demandam o rigor que um desenho geométrico tem. Pensando nisso, poderíamos nos questionar:**

Resposta pessoal. Consulte a resposta no Manual do Professor.

Como podemos utilizar os desenhos geométricos para a criação artística?

- Reúnam-se em grupos de três a quatro integrantes. Em cada grupo, procurem ter pelo menos um estudante que goste de desenhar ou que esteja disposto a se expressar artisticamente com desenho ou pintura.
- Em grupos, pesquisem artistas que utilizam, em suas obras, figuras geométricas planas, como o russo Wassily Kandinsky (1866-1944) e a brasileira Beatriz Milhazes (1960-).
- Escolham uma obra e elaborem uma releitura dela, usando construções com régua e compasso. Soltem a imaginação e exerçam sua criatividade. Se for preciso, peçam ajuda ao professor de Arte para entender melhor o que é uma releitura.
- Apresentem a obra coletiva do grupo ou várias obras individuais por grupo, buscando responder à questão norteadora. Falem do que mais gostaram de fazer nesse projeto e quais foram os desafios que enfrentaram.

! Você se manteve trabalhando mesmo diante das distrações?

Museu de Arte da Filadélfia, Pensilvânia. Fotografia: Bridgeman Images/Easy Mediabank

KANDINSKY, Wassily. *Círculos em um círculo*, 1923. Óleo sobre tela, 98,7 cm × 95,6 cm.

Museu de Arte Moderna de Paris, França. Fotografia: Bridgeman Images/Easy Mediabank

MILHAZES, Beatriz Ferreira. *Bibi*, 2003. Serigrafia, 57,15 cm × 57,15 cm.

GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES

Se possível, explore as imagens desta página com os estudantes, incentivando-os a investigar e a perceber as transformações geométricas presentes em cada uma delas. Esse trabalho, além de possibilitar a verificação dos conhecimentos que os estudantes já têm sobre o tema, contribui para que eles desenvolvam a competência geral **1** ao utilizar conhecimentos sobre o mundo físico e cultural para entender a realidade.

NESTE CAPÍTULO

- Reflexão
- Translação
- Rotação
- Homotetia

Observe a imagem a seguir. O que você percebe?

Fernando Favoretto/Criar Imagem

Ampliação de uma ilustração feita com pantógrafo.

Fabio Colombini/ID/BR

Peneira de arumã, peça de artesanato tradicional do povo indígena Ticuna, confeccionada em Manaus (AM). Foto de 2022.

SvetlanaSF/iStock/Getty Images

Vitral ornamentado com rosácea na catedral de Notre-Dame, em Paris, França. Foto de 2023.

Nessa imagem, é possível observar um conceito matemático relacionado à ampliação e à redução de figuras.

Agora, analise as imagens a seguir. Essas imagens têm alguma característica em comum? Elas produzem alguma sensação?

Observando essas imagens, podemos perceber a ideia de simetria. Esse conceito é amplo e está presente em diversas produções humanas como uma tentativa de criar objetos que remetam a noções de ordem, de beleza e de perfeição.

Neste capítulo, você vai estudar a geometria das transformações, que abrange as ideias de transformações e de ampliação e redução de figuras. De maneira resumida, a geometria das transformações estuda os movimentos das figuras no plano.

É provável que você já conheça alguns desses movimentos e que eles lhe tenham sido apresentados como reflexão, translação, rotação e homotetia. Agora, o estudo desses movimentos será aprofundado, com definições matemáticas que permitam a você compreender as figuras geométricas com ferramentas diferentes daquelas da geometria euclidiana. Vamos começar?

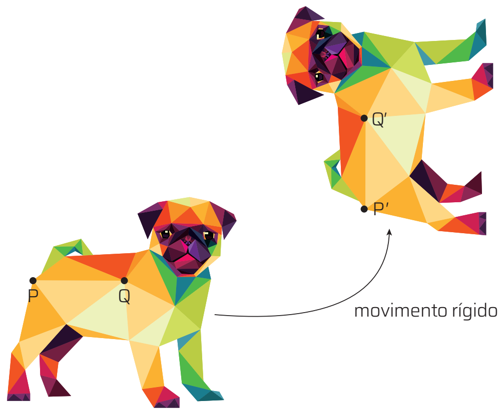
Vondradra/Shutterstock.com/ID/BR

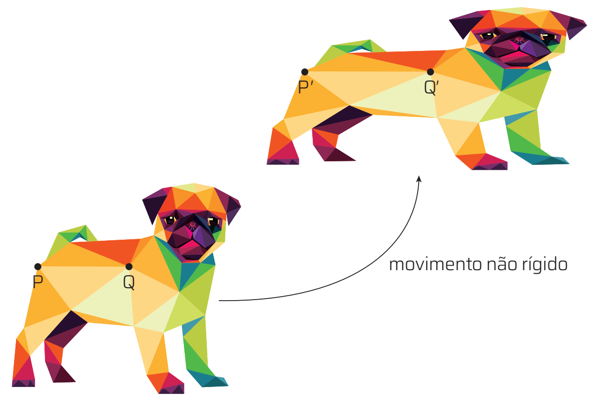
Imagem do monte Taranaki refletido em lago na Nova Zelândia. Foto de 2023.

MOVIMENTOS RÍGIDOS NO PLANO

O trabalho com este tópico contribui para aquisição da competência geral **2,** visto que os estudantes vão recorrer à abordagem própria das ciências, como a investigação, para resolver problemas e criar soluções, e possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT105**, pois os estudantes vão usar noções de transformações isométricas para analisar diferentes produções humanas, como obras de arte.

A ação de mover uma figura no plano de uma posição inicial para uma posição final, sem alterar seu formato e seu tamanho, é chamada de **movimento rígido** ou **isometria**. Se o movimento alterar o formato ou o tamanho de uma figura, não se trata de um movimento rígido.





Aditya Firman/Shutterstock.com/ID/BR

Como no movimento rígido não são alterados nem o formato, nem o tamanho de uma figura, a distância entre quaisquer dois pontos *P* e *Q* da figura na posição inicial é a mesma que a distância entre os pontos correspondentes na posição final.

No plano, todo movimento rígido corresponde a um de três movimentos básicos ou à composição deles. Os três movimentos rígidos básicos no plano são: reflexão, translação e rotação. Vamos estudar cada um deles.

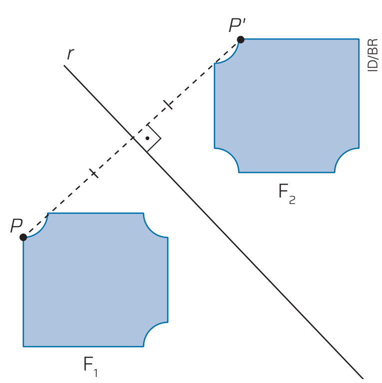
Reflexões, translações e rotações no plano

Uma transformação geométrica é uma função que associa, de acordo com certas regras, a cada ponto *P* do plano um ponto *P'*, também do plano. O ponto *P'* é chamado de imagem de *P*.

Movimento rígido de reflexão

Uma reflexão no plano em relação a uma reta *r* é uma função que associa a cada ponto *P* do plano o ponto simétrico *P'* em relação à reta *r* de tal modo que:

- a reta *r* é perpendicular a $\overline{PP'}$ e passa pelo ponto médio de $\overline{PP'}$;
- se *P* pertence a *r*, sua imagem *P'* coincide com *P*.



A reflexão determinada pela reta *r* transforma a figura F_1 na figura F_2, sendo *P'* o ponto simétrico de *P* em relação a *r*, para cada ponto *P* de F_1.

Observe que o simétrico de F_2 por essa mesma simetria é a figura F_1.

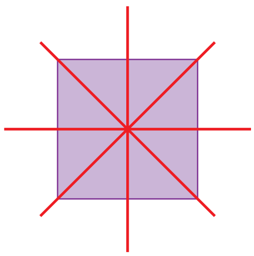
Uma ideia importante que merece ser destacada é que uma reflexão fica definida por uma reta do plano, ou seja, alterando-se a reta, obtemos outra função que estabelece uma correspondência entre as figuras do plano.

Figuras simétricas por reflexão axial

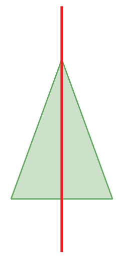
Dizemos que há **simetria de reflexão axial** de eixo *r* quando a imagem de uma figura F pela reflexão do plano em relação a um eixo *r* é a própria figura F.

A reta *r* é chamada de **eixo de simetria** da figura.

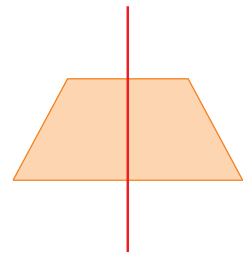
Você conhece muitas figuras planas que têm um ou mais eixos de simetria e outras sem nenhum eixo de simetria. Observe, a seguir, algumas representações dessas figuras planas.



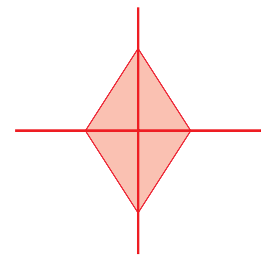
4 eixos de simetria



1 eixo de simetria

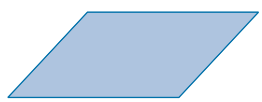


1 eixo de simetria



2 eixos de simetria

Ilustrações: ID/BR

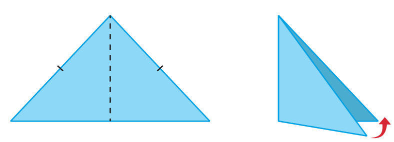


nenhum eixo de simetria

nenhum eixo de simetria

Na geometria das transformações, o triângulo que tem um eixo de simetria, ou seja, que tem uma reta que o divide em duas figuras simétricas (dois triângulos, sendo que um deles é a reflexão do outro em relação a essa reta), é chamado de triângulo isósceles. A existência desse eixo nos permite concluir que:

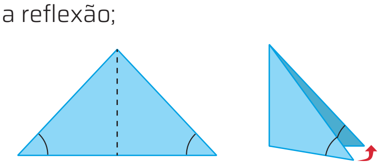
- o triângulo isósceles tem pelo menos dois lados de mesma medida;



ID/BR

(Lembre-se de que essa é a definição de triângulo isósceles na geometria euclidiana.)

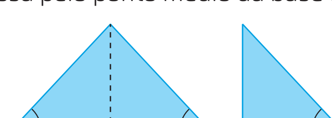
- os ângulos da base do triângulo isósceles são congruentes porque coincidem um com o outro pela reflexão;



ID/BR

No decorrer desta seção e das próximas, verifique se os estudantes compreendem as propriedades do triângulo isósceles, dos ângulos formados entre retas paralelas e uma reta transversal e das diagonais do quadrado, analisadas, no texto, pela perspectiva da geometria das transformações e comparadas com a Geometria clássica.

- o eixo de simetria passa pelo ponto médio da base do triângulo isósceles;



ID/BR

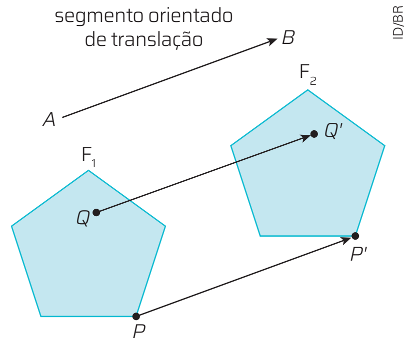
- o eixo de simetria determina ângulos retos em relação à base do triângulo isósceles; logo, ele é a altura e a mediatriz do triângulo em relação à sua base.

ID/BR

Movimento rígido de translação

Uma translação no plano parece, visualmente, o deslizamento de uma figura.

A translação é definida por um segmento orientado, ou seja, por um segmento que determina o comprimento, a direção e o sentido do deslocamento.



A figura F_1 é transladada para a figura F_2 de acordo com o segmento orientado *AB*. Cada ponto *P* de F_1 tem um correspondente *P*' em F_2, de tal modo que o segmento *PP*' é congruente ao segmento *AB* e tem a mesma orientação que ele.

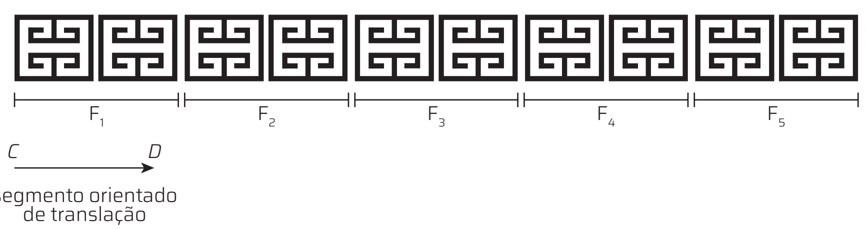
Rogério Reis/Pulsar Imagens

Cerâmica Asurini do Médio Xingu, próximo a Altamira (PA). Museu do Índio, Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2009.

Aqui trazemos a perspectiva da etnomatemática no sentido de que os estudantes conheçam e expliquem saberes e fazeres de grupos que diferem do pensamento matemático que estão aprendendo na escola.

Em algumas faixas decorativas, podemos identificar várias translações sucessivas. Escolhendo uma figura como a inicial, cada uma das outras corresponde à translação da anterior de acordo com o mesmo segmento orientado.

A faixa decorativa a seguir, inspirada nos grafismos da cerâmica produzida pelo povo indígena Asurini do Médio Xingu, pode ser obtida pela translação da figura inicial F_1 de acordo com o segmento orientado *CD*.



Perceba que, nesse caso, o segmento orientado tem direção horizontal e sentido para a direita, gerando a figura F_2. De modo recursivo, aplicando-se a mesma translação na figura F_2, obtemos F_3, e assim sucessivamente.

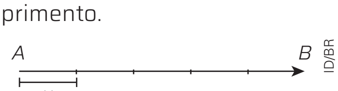
Segmento orientado

Um segmento orientado é determinado por dois pontos distintos: o primeiro é chamado **origem** do segmento e o segundo é chamado **extremidade**. Por exemplo:

Ao segmento de reta *AB* podemos associar um sentido: o sentido de *A* para *B*. Denotamos por $\overrightarrow{AB}$ o segmento orientado de origem *A* e extremidade *B*.

Dizemos que o segmento $\overrightarrow{BA}$ é o segmento oposto de $\overrightarrow{AB}$, ou seja, tem sentido contrário: sentido de *B* para *A*.

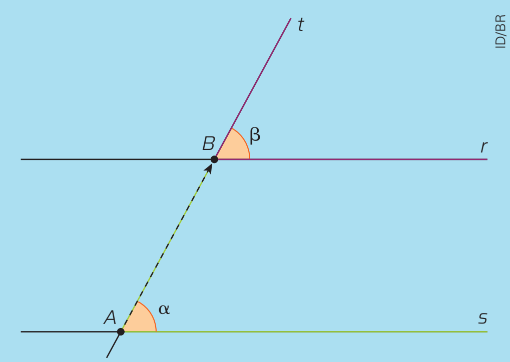
Se fixarmos uma unidade de comprimento, a cada segmento orientado podemos associar um número real não negativo, relativo a seu comprimento.



No exemplo representado, o segmento $\overrightarrow{AB}$ tem 5 unidades de comprimento.

Considere, agora, um resultado conhecido da geometria euclidiana.

Dadas duas retas paralelas r e s e uma reta transversal t, os ângulos α e β correspondentes são congruentes.



A prova desse resultado é relativamente complexa na geometria euclidiana. Mas, se usarmos o conceito de translação da geometria das transformações, poderemos verificar que na translação do ângulo α, considerando o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ de A para B, a imagem do vértice A é o ponto B, o lado $\overline{AB}$ do ângulo α se mantém sobre a reta t e o lado do ângulo α na reta s tem imagem na reta r, ou seja, a imagem do ângulo α é o ângulo β.

Como podemos perceber, a comprovação dessa propriedade entre ângulos formados por paralelas e uma reta transversal ficou mais simples e visual.

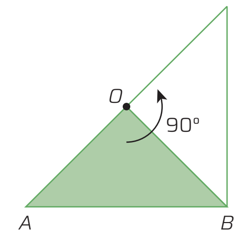
Movimento rígido de rotação

Outro movimento rígido do plano é a rotação. Ela é definida por um ponto, em torno do qual as figuras devem ser giradas no sentido horário ou anti-horário, e por um ângulo, cuja medida indica a quantos graus corresponde a rotação.

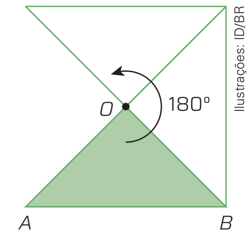
O ponto de referência para a rotação pode ser interno ou externo à figura.

Exemplo 1

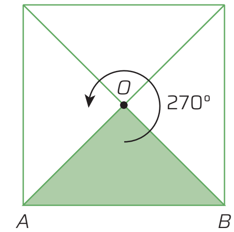
Um quadrado pode ser formado a partir da união de um triângulo isósceles OAB com as imagens geradas a partir da rotação desse triângulo em torno do ponto O com ângulo de rotação de 90°; depois, 180°; e, finalmente, 270°.



rotação de 90°



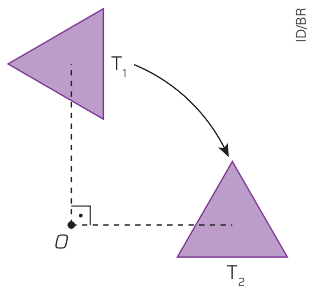
rotação de 180°



rotação de 270°

Exemplo 2

A rotação com centro em O e com ângulo de rotação de 90° no sentido horário transforma o triângulo T_1 no triângulo T_2.



Vale observar que, na definição de rotação, não limitamos o valor do ângulo, e isso traz algumas consequências. A primeira delas é que uma rotação de 360° indica que a figura final coincide com a inicial. Visualmente, é como se a figura girasse e recaísse sobre si mesma.

Nas rotações com ângulos maiores que 360°, a figura inicial dá mais de uma volta completa. Por exemplo, em uma rotação com um ângulo de 758°, a figura inicial dá duas voltas completas mais um giro de 38°, pois $758° = 2 \cdot 360° + 38°$.

Assim, em algumas situações, não é possível determinar a medida do ângulo de rotação. Por exemplo, se a posição inicial de uma figura e de sua imagem for a mesma, elas podem ter sido rotacionadas em 360°, em 720° ou em 1 080°. Como podemos saber? Para contornar essa dificuldade, é comum, na definição do movimento de rotação, limitarmos o ângulo ao intervalo de 0° a 360°. Considere essa restrição nos problemas sobre rotações que você resolverá mais adiante.

PARA EXPLORAR

Filme

***M.C. Escher*: sky and water 1. Direção: Gayle Thomas. Canadá, 1998 (3 min). Disponível em: https://www.nfb.ca/film/mc_escher_sky_and_water_1/. Acesso em: 24 set. 2024.**

Produzido pelo Conselho Nacional de Cinema do Canadá, esse curta-metragem de animação mostra como as isometrias foram utilizadas pelo famoso artista holandês Maurits Escher (1898-1972) na criação da obra *Céu e água 1*.

CONGRUÊNCIA E GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES

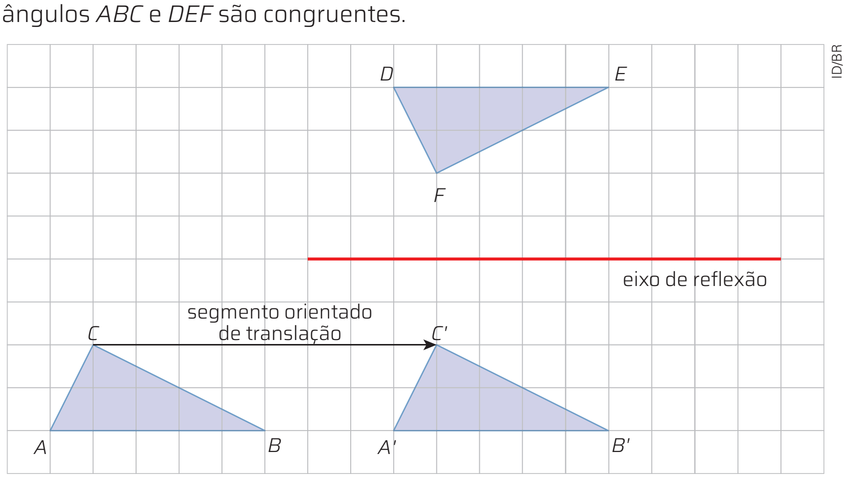
Na geometria euclidiana, a congruência entre figuras exige igualdade de medidas de distância entre pontos e de ângulos correspondentes. Na geometria das transformações, o que se exige é que uma figura seja a imagem da outra por um movimento rígido ou pela composição de movimentos rígidos.

Vamos usar a geometria das transformações para verificar a congruência de figuras.

Incentive os estudantes a analisar outras figuras geométricas congruentes no plano à luz da definição da geometria das transformações. Essa atividade investigativa favorece o desenvolvimento da competência específica **5**, pois permite que os estudantes investiguem e relacionem diferentes conceitos e propriedades matemáticas.

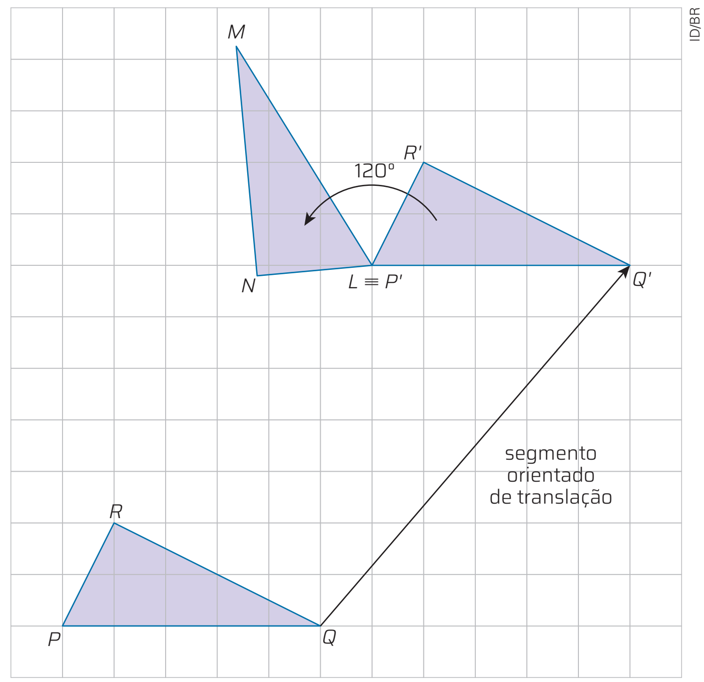
Exemplo 1

O triângulo DEF é a imagem de ABC por uma translação seguida de uma reflexão. Logo, o formato e o tamanho do triângulo ABC foram mantidos. Como cada ponto P de ABC tem um ponto correspondente P' em DEF, de modo a garantir a igualdade de medidas de distâncias entre pontos e ângulos correspondentes, os triângulos ABC e DEF são congruentes.



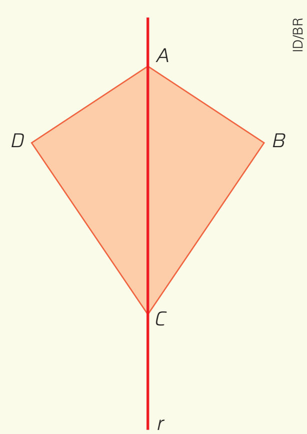
Exemplo 2

Os triângulos *PQR* e *LMN* são congruentes, porque *LMN* é a imagem de *PQR* por uma translação seguida de uma rotação em torno do ponto *P'*, com um ângulo de rotação de 120° no sentido anti-horário.



PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **O eixo *r* é o único eixo de simetria do quadrilátero *ABCD*. Observe que ele passa pelos vértices *A* e *C* do quadrilátero.**



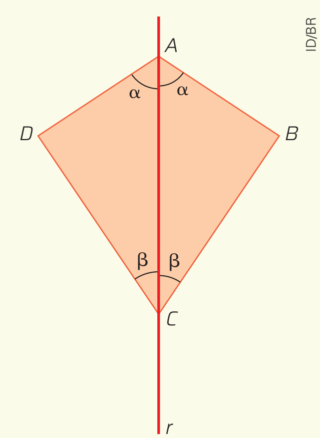
Com base nas informações dadas e observando a figura, faça o que se pede em cada item.

a) Mostre que o eixo de simetria contém a bissetriz dos ângulos internos desses dois vértices do quadrilátero.

b) Prove que as diagonais desse quadrilátero são perpendiculares.

Resolução

a)

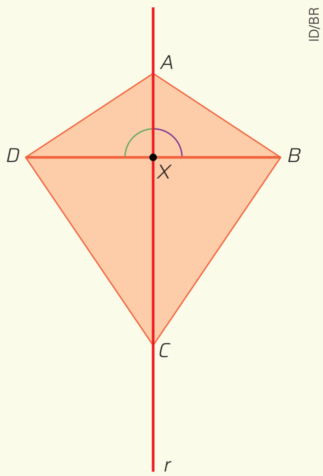


Como *r* é eixo de simetria de reflexão do quadrilátero, podemos afirmar que o triângulo *ABC* é a imagem refletida do triângulo *ADC* e vice-versa.

Isso significa que, pela reflexão, os ângulos $D\hat{A}C$ e $B\hat{A}C$ têm a mesma medida. Portanto, o eixo de simetria *r* contém a bissetriz de $\hat{A}$.

Da mesma maneira, os ângulos $D\hat{C}A$ e $B\hat{C}A$ são congruentes, e o eixo r contém a bissetriz do ângulo $\hat{C}$.

b) As diagonais $\overline{DB}$ e $\overline{AC}$ formam quatro ângulos em torno do ponto X. Logo, pela reflexão em relação a r, esses ângulos têm a mesma medida.



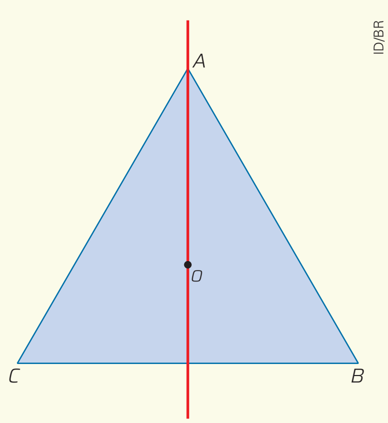
Assim, os ângulos $D\hat{X}A$ e $B\hat{X}A$ são congruentes. Como $\overline{BD}$ é um segmento de reta, também podemos concluir que a soma dos ângulos $D\hat{X}A$ e $B\hat{X}A$ é 180°. Logo, cada um deles é um ângulo reto e, consequentemente, as diagonais do quadrilátero são perpendiculares.

R2 **Identifique todas as simetrias de um triângulo equilátero.**

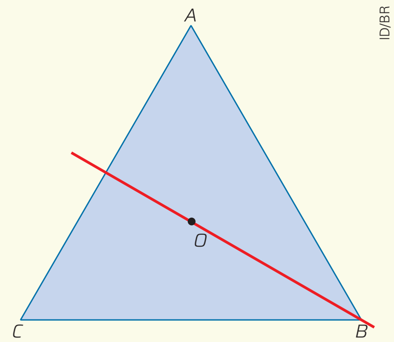
Resolução

Como todo triângulo equilátero é isósceles, ele tem três eixos de simetria de reflexão. Os eixos passam pelos vértices e pelo ponto médio do lado oposto a cada vértice.

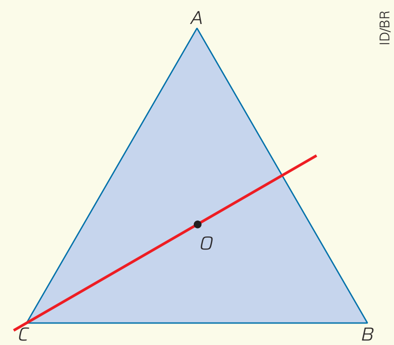
O eixo que passa pelo vértice A e pelo ponto médio do lado $\overline{BC}$:



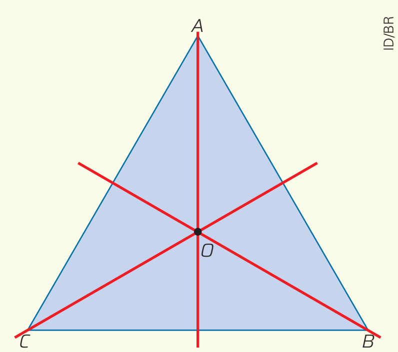
O eixo que passa pelo vértice B e pelo ponto médio do lado $\overline{AC}$:



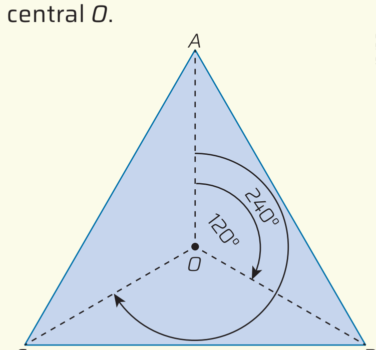
O eixo que passa pelo vértice C e pelo ponto médio do lado $\overline{AB}$:



Representando em uma única ilustração todos os eixos de simetria de reflexão de um triângulo equilátero, temos:

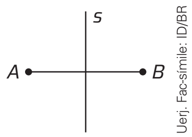


Agora, vamos observar o ponto O de encontro dos três eixos de reflexão. Podemos identificar três triângulos que têm um dos vértices em O e os outros dois nos vértices do triângulo equilátero. Cada um desses triângulos é simétrico do triângulo ABO por uma rotação de 120° ou de 240° em torno do ponto central O.



1 **Indique a resposta correta no caderno.** Alternativa **c**.

(Uerj) Considerando o conceito de simetria, observe o desenho abaixo.



Uerj. Fac-símile: ID/BR

Os pontos *A* e *B* são simétricos em relação à reta *s*, quando *s* é a mediatriz do segmento *AB*. Observe este novo desenho.

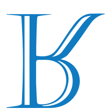
Uerj. Fac-símile: ID/BR

Em relação à reta *s*, a imagem simétrica da letra R apresentada no desenho é:

a) 

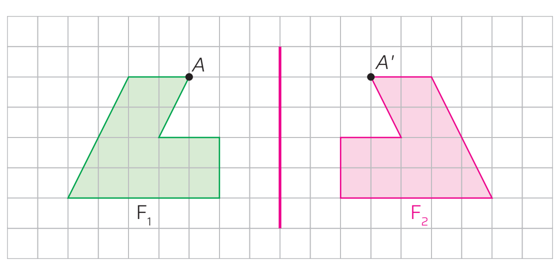
b) 

c) 

d) 

Ilustrações: Uerj. Fac-símile: ID/BR

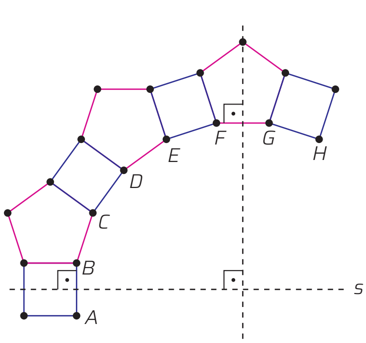
2 **Copie a figura a seguir no caderno e obtenha a imagem simétrica a F_1 por uma reflexão, de tal modo que o ponto *A*' seja simétrico ao ponto *A*.**



ID/BR

3 **Resolva a atividade a seguir e indique no caderno a resposta correta.** Alternativa **b**.

(Uerj) Três pentágonos regulares congruentes e quatro quadrados são unidos pelos lados conforme ilustra a figura a seguir.



Uerj. Fac-símile: ID/BR

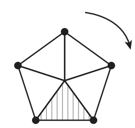
Acrescentem-se outros pentágonos e quadrados, alternadamente adjacentes, até se completar o polígono regular *ABCDEFGH...A*, que possui dois eixos de simetria, indicados pelas retas *r* e *s*. Se as retas perpendiculares *r* e *s* são mediatrizes dos lados *AB* e *FG*, o número de lados do polígono *ABCDEFGH...A* é igual a:

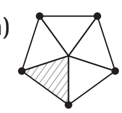
a) 18
b) 20
c) 24
d) 30

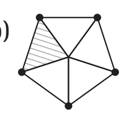
4 **Determine todas as simetrias que podem ser observadas em um pentágono regular. Faça um desenho para ajudar você na resolução.**
Consulte a resposta no Manual do Professor.

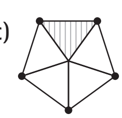
5 **Indique a resposta correta no caderno.**

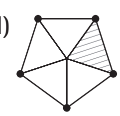
(OBM) Se girarmos o pentágono regular abaixo, de um ângulo de 252°, em torno do seu centro, no sentido horário, qual figura será obtida? Alternativa **b**.

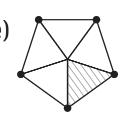


a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Ilustrações: OBM. Fac-símile: ID/BR

6. Verdadeiras: **a** e **b**. Falsas: **c** (Basta considerar um pentágono regular e verificar que nenhuma de suas diagonais é eixo de simetria do pentágono.) e **d** (O único retângulo que tem quatro eixos de simetria é o quadrado. Os retângulos não quadrados têm apenas dois eixos de simetria.)

6 **Considere as seguintes afirmações sobre polígonos regulares e decida quais delas são verdadeiras. No caderno, justifique as afirmações corretas e apresente um contraexemplo para as que são falsas.**

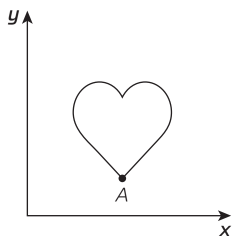
a) Em um polígono regular de quantidade de lados ímpar, o número de eixos de simetria axial é igual ao número de lados do polígono, e todos os eixos são retas que passam pelos vértices e pelos pontos médios dos lados opostos aos vértices.
b) Em um polígono regular de quantidade de lados par, o número de eixos de simetria axial também é igual ao número de lados do polígono; porém, metade dos eixos são retas que passam por pares de vértices opostos, e a outra metade são retas que passam pelos pontos médios de lados opostos do polígono.
c) Em todo polígono regular, suas diagonais são sempre eixos de simetria de reflexão do polígono.
d) Todo retângulo possui quatro eixos de simetria de reflexão.

Na atividade **6**, analise com os estudantes o significado de "contraexemplo".

Não escreva no livro.

7 **Registre a resposta correta no caderno.**

(Enem) Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o "giro" de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem: Alternativa **c**.



Enem. Fac-símile: ID/BR

1ª) Reflexão no eixo *x*;

2ª) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto *A*;

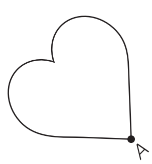
3ª) Reflexão no eixo *y*;

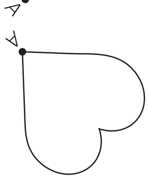
4ª) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto *A*;

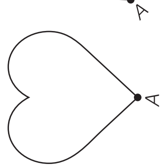
5ª) Reflexão no eixo *x*.

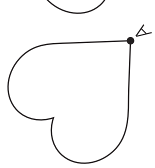
Qual a posição final da figura?

a) 

d) 

b) 

e) 

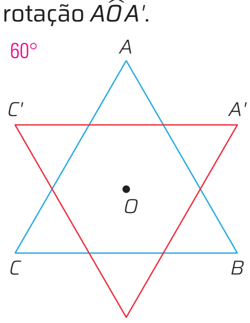
c) 

Ilustrações: Enem. Fac-símile: ID/BR

8 **A partir de uma rotação, em torno do centro *O*, do polígono regular de lados em azul, obteve-se o mesmo polígono regular de lados em vermelho.**

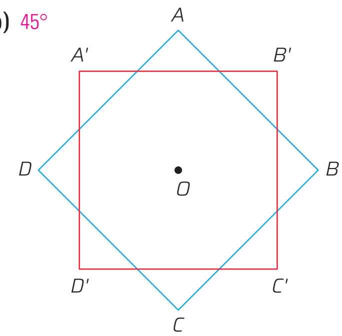
Determine, em cada caso, a menor medida do ângulo de rotação $A\hat{O}A'$.

a) 60°



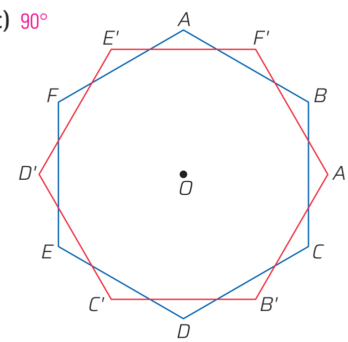
ID/BR

b) 45°



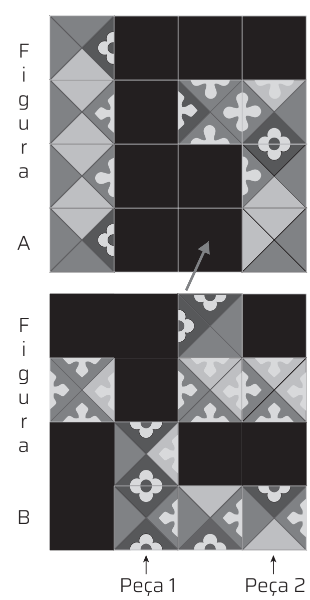
Ilustrações: ID/BR

c) 90°



9 **Registre a resposta correta no caderno.**

(Enem) As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura A e 8 peças no tabuleiro da figura B. As peças são retiradas do tabuleiro da figura B e colocadas no tabuleiro da figura A na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.
Alternativa **c**.



Enem. Fac-símile: ID/BR

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura A colocando a peça

a) 1 após girá-la 90° no sentido horário.

b) 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.

c) 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.

d) 2 após girá-la 180° no sentido horário.

e) 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

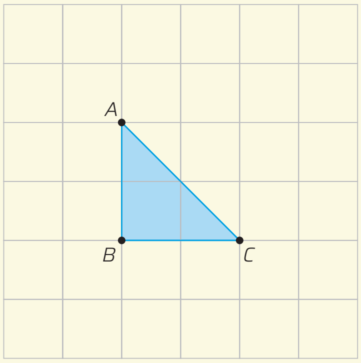
Há diversos tipos de *software* de geometria dinâmica *on-line*; escolha um deles e apresente-o aos estudantes ou dê a eles algumas opções e incentive-os a usar o tipo de *software* que preferirem. As etapas apresentadas podem ser realizadas, por exemplo, no GeoGebra.

TECNOLOGIA

Os *softwares* de Geometria dinâmica possibilitam criar diversas figuras. Nesta seção, acompanhe como utilizar um *software* desse tipo para construir figuras com base nos conhecimentos das isometrias que você estudou. Para isso, utilize *on-line* ou baixe e instale um *software* de Geometria dinâmica. Alguns programas desse tipo podem ser encontrados gratuitamente na internet. Caso opte por baixar o *software*, lembre-se de verificar se você está baixando o arquivo de um *site* confiável.

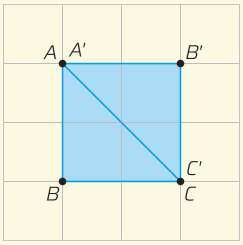
Exemplo 1 – Simetria de reflexão

1ª etapa: Você deve construir um triângulo retângulo. Para isso, com a ferramenta “Polígono”, clique em três pontos de modo a obter o triângulo.



ID/BR

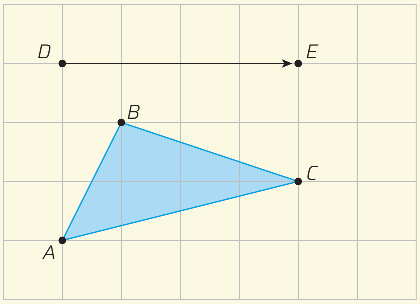
2ª etapa: Construa um triângulo simétrico ao triângulo *ABC*, de modo que ele seja uma reflexão pela reta que contém o segmento $\overline{AC}$. Para isso, com a ferramenta “Reflexão em relação a uma reta” selecionada, clique no triângulo *ABC* e no lado $\overline{AC}$. A figura *A'B'C'* construída é simétrica a *ABC* por reflexão sobre $\overline{AC}$.



ID/BR

Exemplo 2 – Simetria de translação

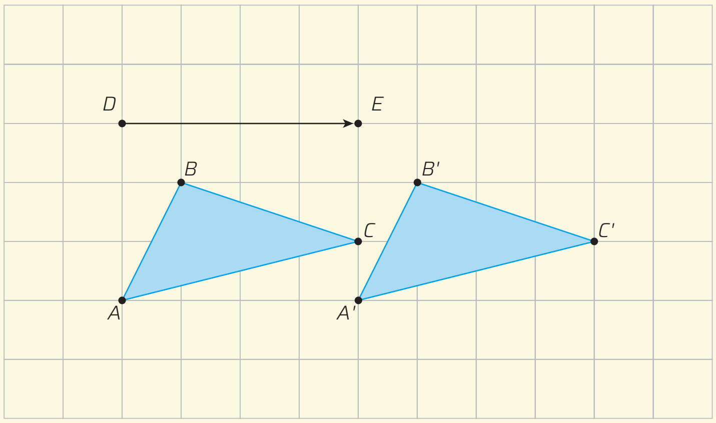
1ª etapa: Com as ferramentas “Polígono” e “Vetor”, construa um triângulo *ABC* e um segmento orientado $\overrightarrow{DE}$, respectivamente.



ID/BR

Não escreva no livro.

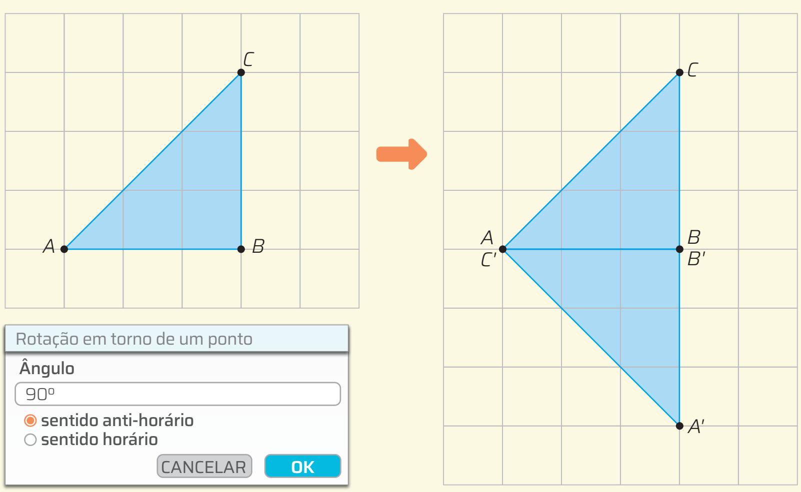
2ª etapa: Para construir um triângulo que é a imagem do triângulo *ABC*, obtida por uma translação definida pelo segmento orientado $\overrightarrow{DE}$, use a ferramenta "Translação por um vetor" selecionada, clique no triângulo e, em seguida, no segmento orientado. A figura *A'B'C'* construída é simétrica a *ABC* por translação em relação a $\overrightarrow{DE}$.



ID/BR

Exemplo 3 – Simetria de rotação

Podemos construir figuras com a ferramenta "Rotação em torno de um ponto". Para isso, construa um triângulo retângulo isósceles *ABC*. Com a ferramenta "Rotação em torno de um ponto" selecionada, clique no triângulo e no vértice *B*. Uma caixa se abrirá. Digite 90° e selecione "sentido anti-horário". O triângulo *A'B'C'* é simétrico ao triângulo *ABC* por rotação de 90º no sentido anti-horário em torno do ponto *B*.



Ilustrações: ID/BR

ATIVIDADES

1 **Reproduza o exemplo 1 em um *software* de Geometria dinâmica e responda às questões a seguir.**

a) Movimente os vértices do triângulo *ABC*. O que acontece com os vértices do triângulo *A'B'C'*?

b) Tente movimentar os vértices do triângulo *A'B'C'*. O que aconteceu?

2 **Agora, reproduza o exemplo 2 no mesmo *software* e, em seguida, responda às questões.**

a) Movimente os vértices do triângulo *ABC*. O que aconteceu com os vértices do triângulo *A'B'C'*?

b) Movimente o ponto *D*. O que aconteceu com os triângulos *ABC* e *A'B'C'*?

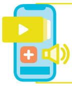
1. a) Os vértices do triângulo *A'B'C'* se movem também, de acordo com o vértice do triângulo *ABC* que foi movimentado.

1. b) Não é possível movimentar o vértice *B'* (não coincide com o vértice *B*), mas é possível movimentar os vértices *A'* e *C'*, pois eles coincidem com os vértices *A* e *C*, respectivamente.

2. a) Os vértices *A'*, *B'* e *C'* são movimentados de acordo com a movimentação dos vértices *A*, *B* e *C*, respectivamente.

2. b) O triângulo *ABC* permanece sem se movimentar, e o triângulo *A'B'C'* move-se de acordo com a alteração na posição do ponto *D* do segmento orientado.

Na atividade **4**, ao utilizar noções de transformações isométricas para fazer a releitura de uma obra de arte, os estudantes podem desenvolver a habilidade **EM13MAT105**. Além disso, essa atividade os coloca em contato com a dimensão estética da Matemática e oferece oportunidades para que eles possam expressar e aperfeiçoar a criatividade, contribuindo para o desenvolvimento das competências gerais **3** e **4**. Nesse sentido, sugerimos um trabalho integrado com a área de Linguagens e suas Tecnologias, com o intuito de mobilizar as competências específicas **6** e **7** dessa área. Os estudantes poderão aplicar seus conhecimentos sobre linguagens artísticas e reconstruir produções autorais de maneira criativa, além de utilizar práticas de linguagem no ambiente digital (como *software* de geometria dinâmica). Por fim, é fundamental ressaltar que atividades em grupo são essenciais para o desenvolvimento da competência geral **9**. Oportunidades como essa promovem a cultura de paz, pois permitem que os estudantes pratiquem a empatia e aprendam a respeitar diferentes opiniões.



Ilusão de ótica e transformações geométricas

O objeto digital permite explorar o fato de que as transformações geométricas são fundamentais para a criação de ilusão de ótica, uma vez que permitem manipular formas e espaços de maneira a enganar nossa percepção.

3. a) Foi utilizada a ferramenta “Polígono” para construir o triângulo retângulo e isósceles *ABC* e a ferramenta “Rotação em torno de um ponto”. Então, foram selecionados o triângulo e o ponto que é vértice do ângulo reto e indicados o ângulo de rotação de 90° e o sentido anti-horário.

3. b) Resposta pessoal. Há mais de uma maneira de construir o quadrado utilizando a ferramenta “Rotação em torno de ponto” e o triângulo *ABC*.

3 Em um *software* de Geometria dinâmica, reproduza o exemplo **3** e construa um quadrado utilizando a ferramenta “Rotação em torno de um ponto” e o triângulo *ABC*.

a) Quais procedimentos você usou?

b) Compare sua construção com a de um colega e verifique se vocês fizeram da mesma maneira.

4 Agora, observe esta obra de arte e faça o que se pede a seguir.

Luiz Sacilotto. Coleção particular

SACILOTTO, Luiz. *C022*. Recorte de vinil sobre duraplac, 60 cm × 60 cm.

a) Usando um *software* de Geometria dinâmica, faça uma releitura da obra *C022*. Procure explorar todas as isometrias que você conhece. Para se inspirar, faça uma pesquisa sobre o artista plástico paulista Luiz Sacilotto (1924-2003). Resposta pessoal.

b) Vocês podem organizar uma exposição para compartilhar os trabalhos criados pela turma. Nesse momento, é importante que vocês conversem sobre como a realização da atividade foi planejada, o que os inspirou, que isometrias vocês usaram, etc. Resposta pessoal.

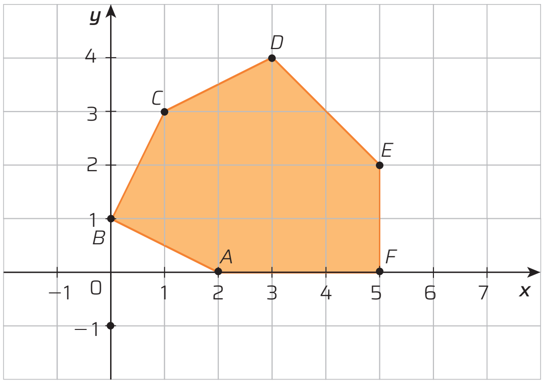
REFLEXÕES, TRANSLAÇÕES E ROTAÇÕES NO PLANO CARTESIANO

Como vimos, os movimentos rígidos são funções do plano no plano. Quando consideramos um referencial cartesiano no plano, esses movimentos podem ser descritos como funções que transformam as coordenadas do ponto inicial em coordenadas do ponto final.

Vamos conhecer como algumas reflexões, translações e rotações podem ser descritas em coordenadas dos pontos.

Reflexões em relação aos eixos coordenados

Observe o polígono *ABCDEF* a seguir.



ID/BR

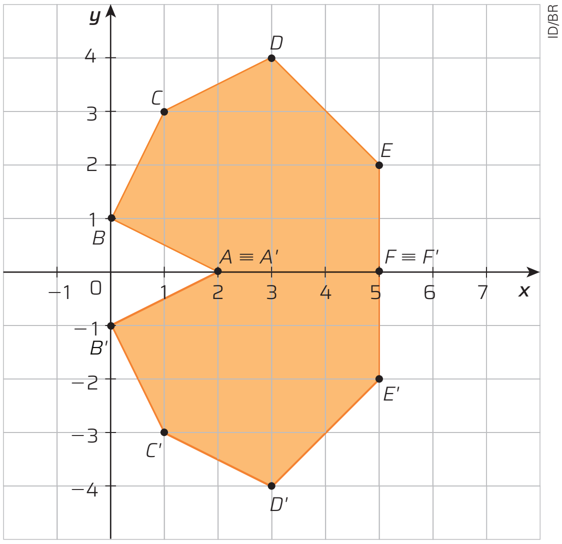
Não escreva no livro.

Considere a função S que associa a cada ponto (x, y) do plano cartesiano o ponto $(x, -y)$ desse plano.

Vamos representar por A', B', C', D', E' e F' os pontos imagens correspondentes a A, B, C, D, E e F.

$$S(A) = S(2, 0) = (2, 0) = A'$$
$$S(B) = S(0, 1) = (0, -1) = B'$$
$$S(C) = S(1, 3) = (1, -3) = C'$$
$$S(D) = S(3, 4) = (3, -4) = D'$$
$$S(E) = S(5, 2) = (5, -2) = E'$$
$$S(F) = S(5, 0) = (5, 0) = F'$$

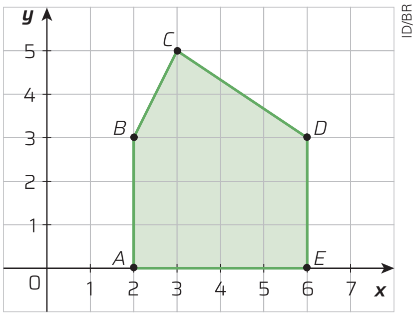
A função S transforma as coordenadas do polígono $ABCDEF$ nas coordenadas do polígono $A'B'C'D'E'F'$, simétrico ao polígono original em relação ao eixo de reflexão Ox. Observe:



O eixo Ox funciona como um espelho que reflete $ABCDEF$ sobre $A'B'C'D'E'F'$.

Translações na direção dos eixos coordenados

Observe o pentágono $ABCDE$ a seguir.

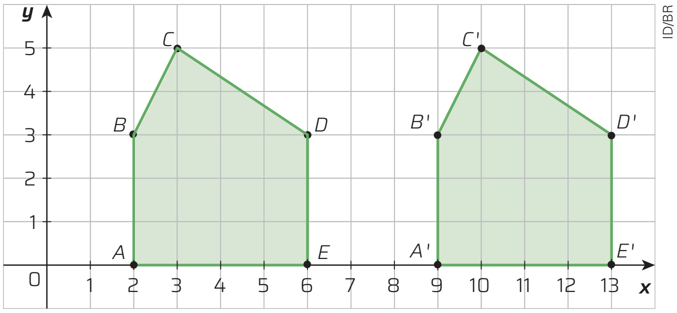


Considere a função T que associa a cada ponto (x, y) do plano o ponto $(x + 7, y)$.

Vamos representar por A', B', C', D' e E' os pontos imagens correspondentes aos vértices do pentágono $ABCDE$.

$$T(A) = T(2, 0) = (9, 0) = A'$$
$$T(B) = T(2, 3) = (9, 3) = B'$$
$$T(C) = T(3, 5) = (10, 5) = C'$$
$$T(D) = T(6, 3) = (13, 3) = D'$$
$$T(E) = T(6, 0) = (13, 0) = E'$$

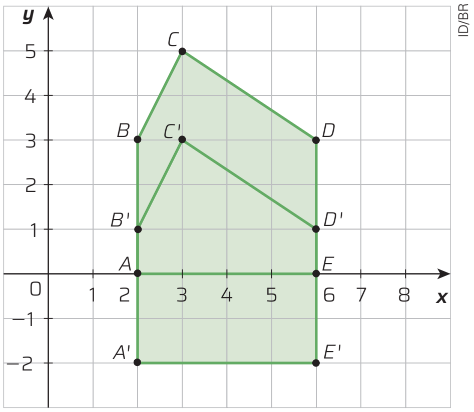
A função T transformou as coordenadas do pentágono $ABCDE$ nas coordenadas do pentágono $A'B'C'D'E'$, congruente ao anterior, mas que se encontra deslocado sete unidades no sentido positivo do eixo Ox. As ordenadas dos pontos foram mantidas, e as abscissas, acrescidas de sete unidades.



O que aconteceria com o pentágono $ABCDE$ se aplicássemos a ele a transformação $R(x, y) = (x, y - 2)$?

Respondendo a essa pergunta: ele ficaria deslocado duas unidades para baixo, no sentido negativo do eixo Oy.

Observe:

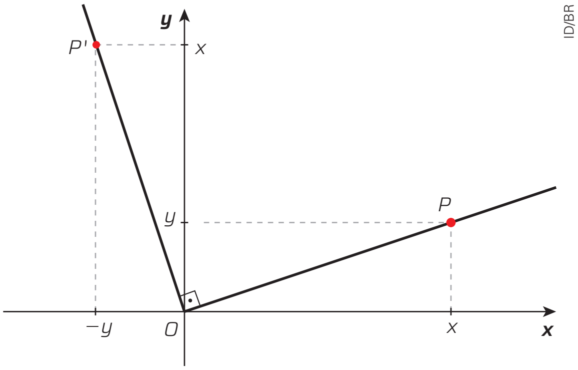


As funções T e R definem translações no plano. No primeiro caso, a função define uma translação no sentido positivo de Ox e, no segundo, no sentido negativo de Oy.

Rotações no plano cartesiano

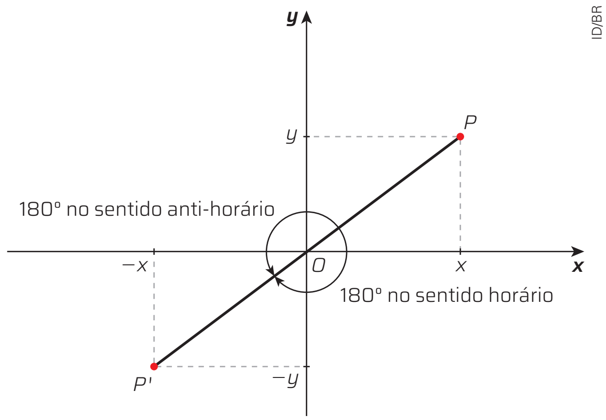
Considere a função R, definida para todo ponto do plano, da seguinte forma: $R(x, y) = (-y, x)$.

Podemos representá-la graficamente assim:



A transformação R corresponde a uma rotação de 90° em torno da origem $O(0, 0)$ no sentido anti-horário.

Agora, considere a função K, definida para todo ponto do plano, da seguinte maneira: $K(x, y) = (-x, -y)$. Podemos representá-la graficamente assim:

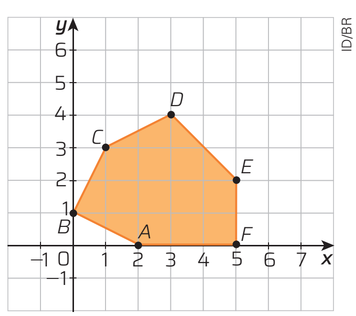


A transformação K corresponde a uma rotação de 180° em torno da origem $O(0, 0)$ no sentido horário ou no sentido anti-horário.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Consulte as respostas dos problemas e exercícios propostos **12** a **14** no Manual do Professor.

10 **Reproduza no caderno o hexágono *ABCDEF* a seguir. Depois, faça o que se pede.**

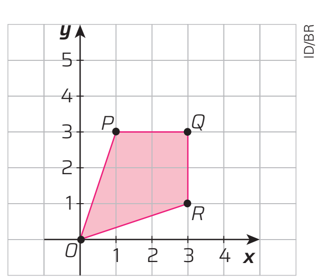


a) Aplique a função $R(x, y) = (-x, y)$ para determinar o polígono $A'B'C'D'E'F'$. $A'(-2, 0)$; $B'(0, 1)$; $C'(-1, 3)$; $D'(-3, 4)$; $E'(-5, 2)$; $F'(-5, 0)$.

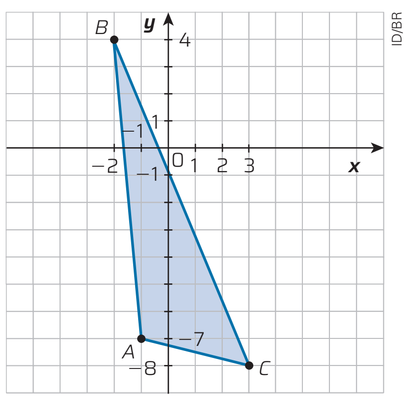
b) Que relação existe entre o polígono e a sua imagem?
O polígono *ABCDEF* e sua imagem *A'B'C'D'E'F'* são simétricos em relação ao eixo *y*.

11 **Reproduza novamente o hexágono *ABCDEF* da atividade 10 e aplique a função $V(x, y) = (-x, -y)$. Que transformação foi feita no hexágono? A nova figura é, ou não, congruente à figura original?**
Foram feitas duas reflexões em relação aos eixos *x* e *y*, ou uma rotação de 180° em torno do ponto (0, 0); a figura é congruente.

12 **Reproduza no caderno o desenho a seguir e gire o polígono em 180° em torno de *O* no sentido anti-horário.**

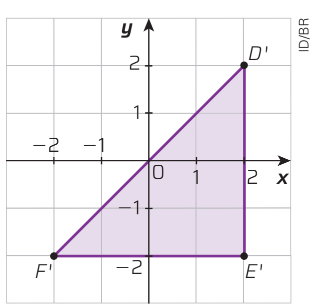


13 **Observe o triângulo *ABC* representado a seguir.**



Reproduza esse triângulo no caderno e construa o triângulo $A'B'C'$ transladado seis unidades para a esquerda e quatro unidades para cima.

14 **O triângulo $D'E'F'$ é a translação de quatro unidades para a direita e sete unidades para baixo do triângulo *DEF*. Reproduza o triângulo $D'E'F'$ no caderno e construa o triângulo *DEF*.**



O trabalho com este tópico possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT105**, pois os estudantes vão usar as noções de transformações homotéticas.

O foco do tópico "Movimentos não rígidos no plano" é mostrar a relação entre as diferentes maneiras de abordar um mesmo conceito, no caso, a semelhança ao comparar as definições nas duas geometrias. É importante que os estudantes conheçam diferentes linguagens e maneiras de definir conceitos e provar propriedades de figuras. Assim, espera-se que eles percebam que a constante de dilatação ou de contração e a constante de proporcionalidade ou de semelhança tratam do mesmo número e que o movimento de homotetia substitui os casos de semelhança de triângulos da geometria euclidiana.

MOVIMENTOS NÃO RÍGIDOS NO PLANO

Até aqui, tratamos dos movimentos rígidos na geometria das transformações, analisando os movimentos e os conceitos importantes para distinguir as definições de congruência em cada geometria.

Apesar de existirem vários movimentos não rígidos, vamos estudar um específico: a **homotetia**.

A homotetia é uma transformação que está relacionada à ampliação e à redução de figuras, de modo que não haja deformação. Ou seja, características como a forma, os ângulos, os paralelismos e a razão entre segmentos correspondentes são preservadas.

Para iniciar o estudo de homotetia, observe as figuras a seguir.

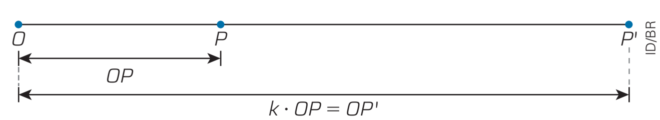
figura 1 figura 2 figura 3

Note que todas as imagens constituem uma representação de um desenho de estrela e podemos afirmar que a figura **1** é uma redução da figura **2** ou que a figura **2** é uma ampliação da figura **1**. Entretanto, a figura **3** não é uma ampliação nem uma redução das outras duas figuras.

Para definirmos homotetia, vamos considerar um ponto O, chamado de centro de homotetia, e uma constante k, denominada constante de proporcionalidade, de modo que k seja qualquer número real e diferente de zero.

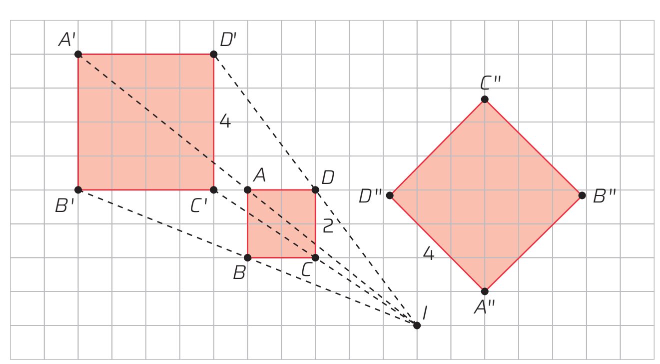
A homotetia que leva um ponto P, do plano, a um ponto P', também do plano, é tal que:

- O, P e P' são colineares, isto é, pertencem a uma mesma reta;
- $OP' = k \cdot OP$.



O segmento $\overline{OP}'$ foi construído partindo de O e com k vezes o comprimento do segmento $\overline{OP}$.

Duas figuras homotéticas são semelhantes. Entretanto, nem sempre duas figuras semelhantes são homotéticas. Observe o exemplo a seguir.



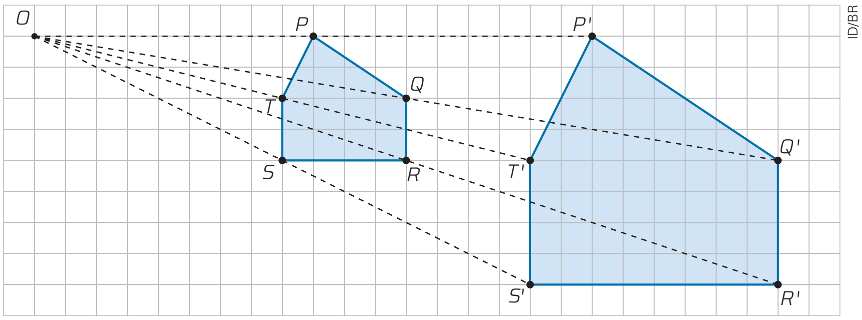
Os quadrados $ABCD$, $A'B'C'D'$ e $A''B''C''D''$ são semelhantes. Perceba que as medidas de seus lados são proporcionais e seus ângulos são congruentes. Mas apenas os quadrados $ABCD$ e $A'B'C'D'$ são homotéticos. Observe que não é possível determinar um centro de homotetia (ponto I) de modo que ele e os pontos correspondentes dos quadrados $ABCD$ e $A''B''C''D''$ sejam colineares. Isso também acontece com os quadrados $A'B'C'D'$ e $A''B''C''D''$.

Homotetia direta

Quando P' está na mesma semirreta de $\overrightarrow{OP}$ e o centro de homotetia é exterior ao segmento que une os pontos homotéticos, dizemos que a homotetia é direta.

Exemplo

Fixado o ponto O e escolhida a constante $k = 2$, o pentágono $P'Q'R'S'T'$ é a imagem da homotetia definida por O que corresponde à duplicação do pentágono $PQRST$.



Perceba que $OP' = 2 \cdot OP$, $OQ' = 2 \cdot OQ$, $OR' = 2 \cdot OR$, $OS' = 2 \cdot OS$ e $OT' = 2 \cdot OT$.
Além disso, essa relação é válida para qualquer ponto do pentágono $PQRST$ e o ponto correspondente no pentágono $P'Q'R'S'T'$. Nesse caso, a homotetia corresponde a uma **dilatação** no plano.

Também podemos pensar que o pentágono $PQRST$ é a imagem do pentágono $P'Q'R'S'T'$ pela homotetia com centro em O, mas com constante de proporcionalidade $k = \frac{1}{2}$. Nesse caso, a homotetia corresponde a uma **contração** no plano.

Note que o centro O é exterior aos segmentos $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$, $\overline{RR'}$, $\overline{SS'}$ e $\overline{TT'}$.

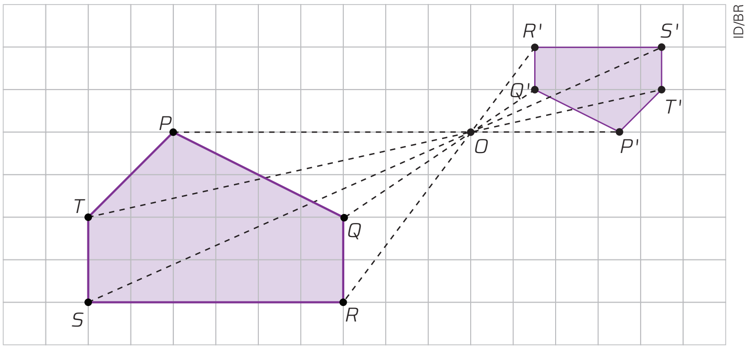
Em uma homotetia direta, temos:
- uma redução da figura, se $0 < k < 1$;
- a própria figura, se $k = 1$;
- uma ampliação da figura, se $k > 1$.

Homotetia inversa

Quando P' está na semirreta oposta a $\overrightarrow{OP}$ e o centro de homotetia é interior ao segmento que une os pontos homotéticos, dizemos que a homotetia é inversa. Nesse caso, a constante de proporcionalidade k é menor que zero, ou seja, $k < 0$.

Exemplo

Fixado o ponto O e escolhida a constante $k = -\frac{1}{2}$, o pentágono $P'Q'R'S'T'$ é a imagem da homotetia definida por O que corresponde à imagem inversa do pentágono $PQRST$ reduzida à metade.



Perceba que $OP' = \frac{OP}{2}$, $OQ' = \frac{OQ}{2}$, $OR' = \frac{OR}{2}$, $OS' = \frac{OS}{2}$ e $OT' = \frac{OT}{2}$.

Se julgar oportuno, comente com os estudantes que o termo "invertida" em "contração invertida" e "dilatação invertida" significa que os segmentos orientados da figura transformada têm sentidos contrários aos da figura original.

Além disso, essa relação é válida para qualquer ponto do pentágono $PQRST$ e o ponto correspondente no pentágono $P'Q'R'S'T'$. Nesse caso, a homotetia corresponde a uma **contração invertida** no plano.

Também podemos pensar que o pentágono $PQRST$ é a imagem do pentágono $P'Q'R'S'T'$ pela homotetia com centro em O, mas com constante de proporcionalidade $k = -2$. Nesse caso, a homotetia corresponde a uma **dilatação invertida** no plano.

Note que o centro O é interior aos segmentos $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$, $\overline{RR'}$, $\overline{SS'}$ e $\overline{TT'}$.

Em uma homotetia inversa, temos:
- uma redução da figura invertida, se $-1 < k < 0$;
- a própria figura invertida, se $k = -1$;
- uma ampliação da figura invertida, se $k < -1$.

As homotetias no plano têm várias propriedades. Vamos conhecer duas delas.

- A imagem de um segmento por uma homotetia é outro segmento.
- Se um triângulo $A'B'C'$ é a imagem de um triângulo ABC por uma homotetia, então os dois triângulos são semelhantes, ou seja, têm ângulos correspondentes de mesma medida e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais. Além disso, a constante de semelhança coincide com a constante de proporcionalidade k da homotetia.

Na geometria das transformações, com o conceito de homotetia, podemos definir a semelhança entre figuras da seguinte maneira:

Complementando as transformações geométricas

O objeto digital aprofunda o estudo sobre transformações geométricas, proporcionando a visualização dinâmica de algumas figuras.

Duas figuras são semelhantes no plano se, e somente se, uma delas é imagem da outra pela composição de uma isometria e uma homotetia.

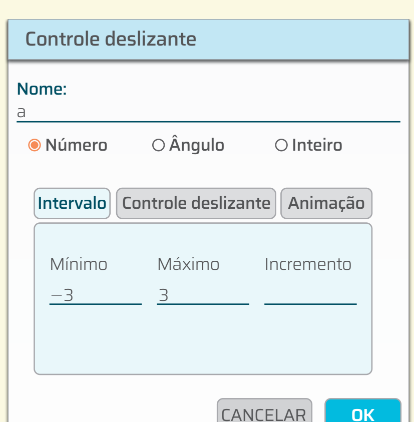
Na segunda etapa da seção *Tecnologia*, colocamos a letra "*b*" entre aspas para não confundir os estudantes na hora de digitar. No momento da digitação no *software*, espera-se que eles digitem apenas *b*, sem as aspas. Isso também vale para outros momentos das descrições das etapas. Para realizar a seção *Tecnologia*, utilizamos o *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

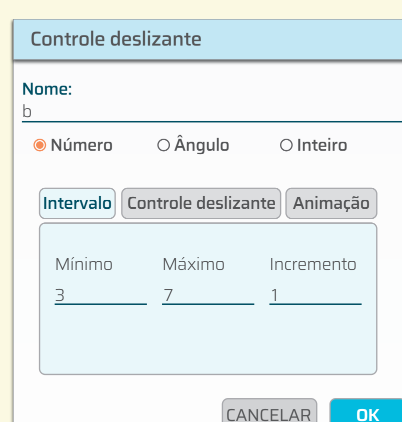
TECNOLOGIA

Podemos usar um *software* de Geometria dinâmica para construir figuras homotéticas. Acompanhe as etapas a seguir para ampliar e reduzir polígonos usando homotetia.

Ao realizar essa etapa, reforce com a turma que, ao definirmos um controle deslizante com um incremento de 1, isso significa que os valores da variável, nesse caso a variável *b*, irão variar "em passos" de 1 unidade. Por exemplo, se o controle deslizante está configurado para ir de 0 até 5 com um incremento de 1, ao mover o controle deslizante, os valores de *b* poderão ser 0, 1, 2, 3, 4 e 5, aumentando ou diminuindo em 1 a cada movimento.

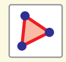
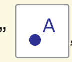
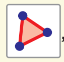
1ª etapa: Utilizando a ferramenta "Controle deslizante" a=2, crie dois controles deslizantes: *a*, com intervalo de -3 a 3, e *b*, com intervalo de 3 a 7. O controle deslizante *b* deve ter incremento igual a 1.



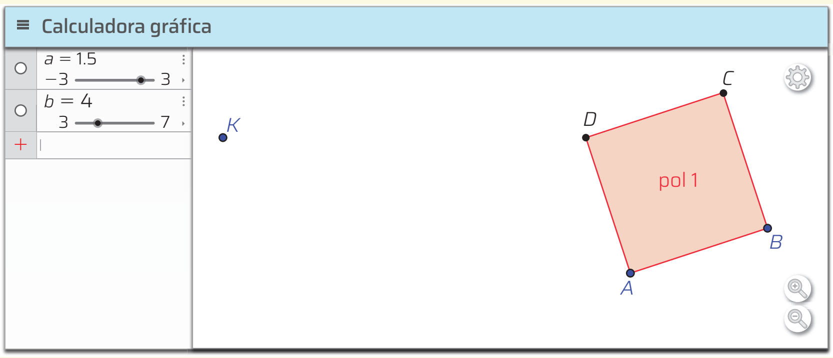


Ilustrações: Nelson Matsuda/ID/BR

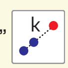
Não escreva no livro.

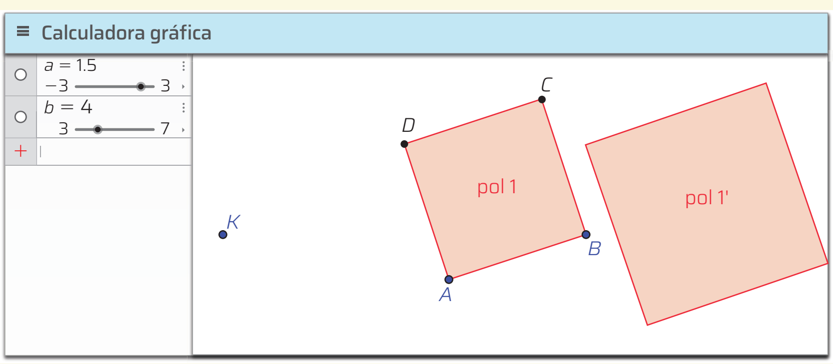
2ª etapa: Utilizando as ferramentas "Polígono regular"  e "Ponto" , construa um polígono regular de *b* lados e um ponto *K*, fora do polígono. Para isso, com a ferramenta "Polígono regular" , clique na tela em dois lugares distintos. Na caixa que se abrirá, digite "b", que é o nome do controle deslizante que você criou para determinar o número de lados. Clique em "OK", e o polígono aparecerá na tela. Para construir o ponto *K*, com a ferramenta "Ponto" selecionada, clique em qualquer lugar da tela, fora do polígono criado.

Ilustrações: Nelson Matsuda/ID/BR



Nelson Matsuda/ID/BR

3ª etapa: Com a ferramenta "Ampliar a partir do ponto"  selecionada, clique no polígono e depois no ponto *K* e digite "a" na caixa que abrir. Essa será a razão de homotetia (correspondente ao primeiro controle deslizante que você criou). Ao deslizar o controle *a*, você obterá uma ampliação ou uma redução da figura inicial de acordo com o valor de *a*. Por exemplo:



Nelson Matsuda/ID/BR

ATIVIDADES

1 Varie o valor de *a* e de *b* deslizando os controles. Em seguida, responda: O que acontece com a figura:

a) quando $a > 1$? Obtém-se uma figura ampliada.

b) quando $a = 1$? Obtém-se uma figura congruente.

c) quando $0 < a < 1$? Obtém-se uma figura reduzida.

d) quando $a < 0$? Obtêm-se figuras invertidas.

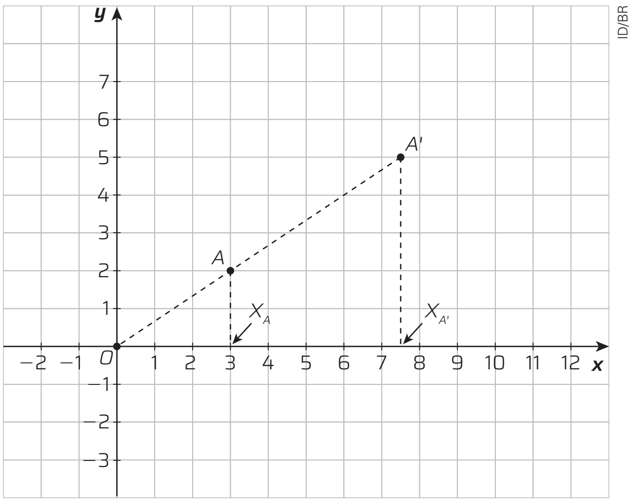
2 O que acontece com a figura se você movimentar o ponto *K*?
O centro de homotetia é alterado, mudando a posição da figura obtida.

3 Com um *software* de Geometria dinâmica, construa um quadrado *ABCD* com lados medindo 3 cm. Em seguida, usando a ferramenta "Ampliar a partir do ponto", construa outros dois quadrados: um com lados medindo o dobro do lado de *ABCD*, e outro com lados medindo a metade do lado de *ABCD*. Consulte a resposta no Manual do Professor.

HOMOTETIAS NO PLANO CARTESIANO

As homotetias, assim como as isometrias, quando estudadas no plano cartesiano, se relacionam às coordenadas dos pontos.

Considere a homotetia cujo centro de homotetia seja a origem $O(0, 0)$ do plano cartesiano e cuja constante de proporcionalidade seja $k = 2{,}5$.



A imagem A' do ponto A, por essa homotetia, deve ser tal que A' pertence à semirreta $\overrightarrow{OA}$ e a medida do segmento $\overline{OA'}$ é $OA' = 2{,}5 \cdot OA$.

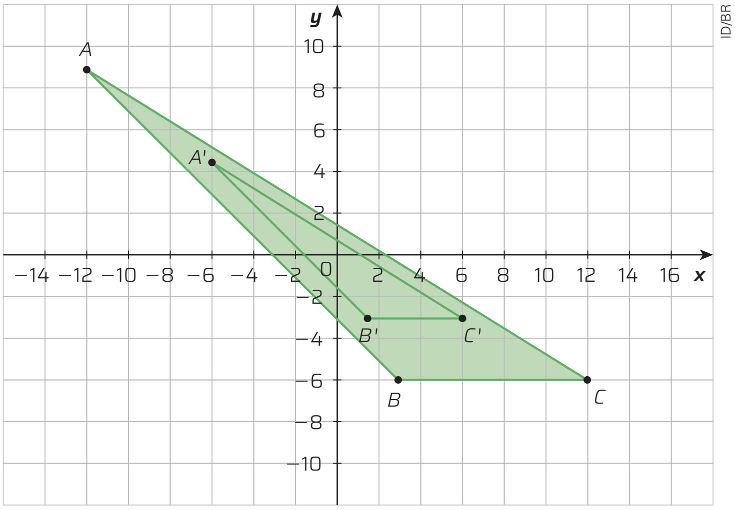
Os triângulos OAX_A e $OA'X_{A'}$ são semelhantes com constante de proporcionalidade $k = 2{,}5$. Assim, se as coordenadas de X_A são $(3, 0)$, temos $X_{A'}(7{,}5; 0)$, pois $7{,}5 = 2{,}5 \cdot 3$.

Do mesmo modo, sabemos que a ordenada do ponto A' é 5, pois a ordenada de A é 2 e $2{,}5 \cdot 2 = 5$.

A imagem de um ponto pela homotetia que tem centro na origem do plano cartesiano é obtida multiplicando-se as coordenadas desse ponto pela constante de proporcionalidade da homotetia.

Exemplo 1

Considere a homotetia cujo centro de homotetia seja a origem $O(0, 0)$ do plano cartesiano e cuja constante de proporcionalidade seja $k = 0{,}5$. A imagem do triângulo ABC por essa homotetia é o triângulo $A'B'C'$.



Não escreva no livro.

Sabendo que as coordenadas dos vértices do triângulo ABC são $A(-12, 9)$, $B(3, -6)$ e $C(12, -6)$, as coordenadas do triângulo homotético $A'B'C'$ podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$(x, y) \rightarrow (0{,}5 \cdot x; 0{,}5 \cdot y)$$

Assim:

$$A(-12, 9) \rightarrow A'(0{,}5 \cdot (-12); 0{,}5 \cdot 9) = A'(-6; 4{,}5)$$

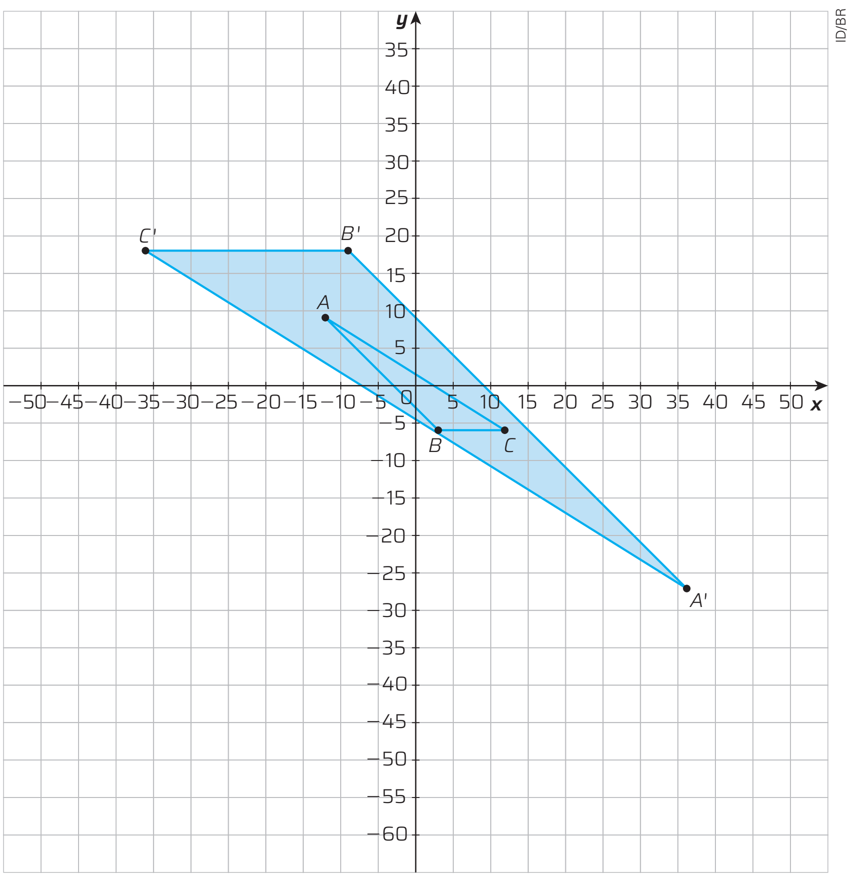
$$B(3, -6) \rightarrow B'(0{,}5 \cdot 3; 0{,}5 \cdot (-6)) = B'(1{,}5; -3)$$

$$C(12, -6) \rightarrow C'(0{,}5 \cdot 12; 0{,}5 \cdot (-6)) = C'(6; -3)$$

Observe que, nessa situação, foi representada uma homotetia direta de redução.

Exemplo 2

Agora, considere a homotetia cujo centro de homotetia seja a origem $O(0, 0)$ do plano cartesiano e cuja constante de proporcionalidade seja $k = -3$. A imagem do triângulo ABC por essa homotetia é o triângulo $A'B'C'$.



Sabendo que as coordenadas dos vértices do triângulo ABC são $A(-12, 9)$, $B(3, -6)$ e $C(12, -6)$, as coordenadas do triângulo homotético $A'B'C'$ podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$(x, y) \rightarrow (-3 \cdot x, -3 \cdot y)$$

Assim:

$$A(-12, 9) \rightarrow A'(-3 \cdot (-12), -3 \cdot 9) = A'(36, -27)$$

$$B(3, -6) \rightarrow B'(-3 \cdot 3, -3 \cdot (-6)) = B'(-9, 18)$$

$$C(12, -6) \rightarrow C'(-3 \cdot 12, -3 \cdot (-6)) = C'(-36, 18)$$

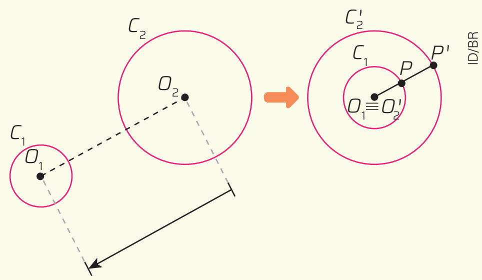
Observe que, nessa situação, foi exemplificada uma homotetia inversa de ampliação.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R3 **Com base no conceito de homotetia, demonstre que duas circunferências são sempre semelhantes.**

Resolução

Considere duas circunferências, C_1 e C_2, no plano. Sempre é possível transladar uma delas de modo que elas fiquem concêntricas.



Observe que uma translação levou C_2 a C'_2, que é concêntrica em relação a C_1.

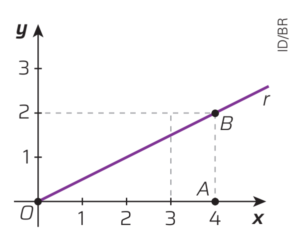
A homotetia de centro $O_1 \equiv O'_2$ e a constante de proporcionalidade $k = \frac{r_2}{r_1}$, em que r_1 é a medida do raio da circunferência C_1, e r_2, a medida do raio da circunferência C_2, levam cada ponto P de C_1 a um ponto P' em C'_2.

De fato, se $O_1P = r_1$, $O_1P' = k \cdot r_1$ é verdadeiro se, e somente se, $O_1P' = \frac{r_2}{r_1} \cdot O_1P = r_2$. Logo, C_1 e C_2 são semelhantes.

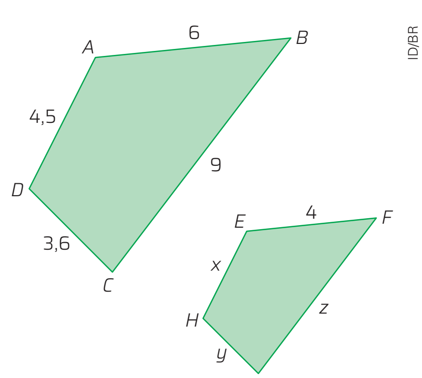
Os textos das atividades propostas utilizam diferentes maneiras e termos para se referir a homotetias e semelhança de figuras. Sugerimos analisar esses textos com os estudantes, para que se familiarizem com essa diversidade de expressar as mesmas ideias e os mesmos conceitos.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

15 **Qual é a medida da área do triângulo obtido pela homotetia de razão $\frac{1}{3}$ do triângulo OAB?** $\frac{4}{9}$



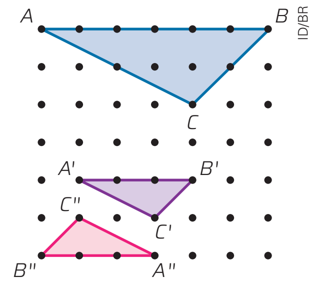
16 **Os quadriláteros indicados a seguir são homotéticos. A imagem do quadrilátero *EFGH* por essa homotetia é o quadrilátero *ABCD*.**



a) Determine a constante de proporcionalidade dessa homotetia. $k = \frac{3}{2}$

b) Calcule os valores de x, y e z. $x = 3$, $y = 2{,}4$ e $z = 6$.

17 **Pedro e Iara estavam estudando transformações geométricas no plano. Eles decidiram analisar os triângulos representados a seguir.**



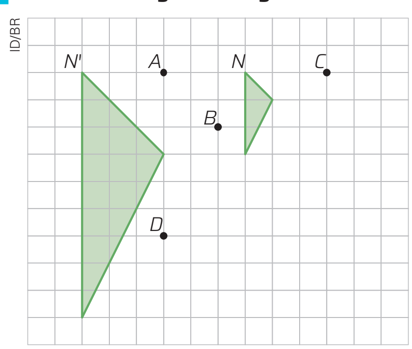
a) Pedro afirmou que o triângulo *ABC* é o triângulo *A'B'C'* transladado. Iara discordou dele e disse se tratar de uma transformação não rígida no plano. Quem está com a razão: Pedro ou Iara? Iara

b) Pedro afirmou corretamente que as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes. A que corresponde o ponto de encontro dessas retas? Ao centro de homotetia.

c) Iara afirmou que existe uma homotetia que transforma *ABC* em *A'B'C'*. Ela está correta? Em caso afirmativo, qual seria a constante de proporcionalidade dessa homotetia? Sim; $\frac{1}{2}$

d) Analise os três triângulos da imagem e escreva, no caderno, quais transformações você nota entre eles. Deixe registradas as justificativas que validem sua análise. Respostas pessoais. Resposta possível: Entre os triângulos *ABC* e *A'B'C'*, há homotetia com razão de proporcionalidade igual a $\frac{1}{2}$.

18 **Observe a figura a seguir.**



Consulte as respostas dos itens **b** e **c** no Manual do Professor.

O triângulo *N'* é a imagem do triângulo *N* por uma homotetia.

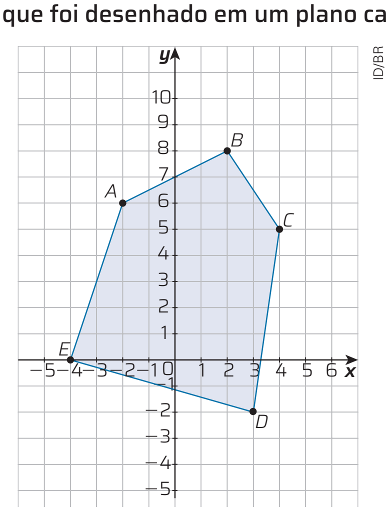
a) Qual dos pontos, *A*, *B*, *C* ou *D*, é o centro da homotetia que leva *N* a *N'*? O ponto *C*.

b) Reproduza o triângulo *N* em uma malha quadriculada e marque também o ponto *B*. Em seguida, construa o triângulo *M*, que é uma imagem de *N* por uma homotetia de centro em *B* e razão de proporcionalidade $k = -2$.

c) Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, reproduza o triângulo *N'* e marque também o ponto *D*. Em seguida, construa o triângulo *L*, que é uma imagem de *N'* por uma homotetia de centro em *D* e razão de proporcionalidade $k = \frac{3}{4}$.

19 **Dois decágonos regulares são homotéticos, e a razão de proporcionalidade entre eles é $\frac{1}{4}$. Se o menor tem perímetro de 260 cm, quanto mede cada lado do maior decágono?** 104 cm

20 **Observe o pentágono *ABCDE*, que foi desenhado em um plano cartesiano.** Consulte a resposta no Manual do Professor.



Determine as coordenadas dos vértices do pentágono *A'B'C'D'E'*, que corresponde à imagem de *ABCDE* por uma homotetia de razão 2 e cujo centro da homotetia coincide com a origem do plano cartesiano, e desenhe esse polígono.

CÁLCULO RÁPIDO

Cálculos de raízes e de medidas de áreas de polígonos serão solicitados muitas vezes na resolução de problemas de Geometria. Por isso, vamos trabalhar sua habilidade de realizar esses cálculos mentalmente.

1 **Escreva os dois números inteiros mais próximos de cada uma das raízes quadradas, um deles menor que a raiz e o outro maior que ela.**

a) $\sqrt{50}$ 7 e 8　b) $\sqrt{24}$ 4 e 5　c) $\sqrt{8}$ 2 e 3　d) $\sqrt{32}$ 5 e 6　e) $\sqrt{90}$ 9 e 10　f) $\sqrt{120}$ 10 e 11

2 **Muitas vezes, ao resolver um problema, precisamos simplificar o valor de uma raiz. Para isso, basta fatorar o radicando, por exemplo, $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$**

Use essa técnica e simplifique as raízes da atividade **1**. **a)** $5\sqrt{2}$; **b)** $2\sqrt{6}$; **c)** $2\sqrt{2}$; **d)** $4\sqrt{2}$; **e)** $3\sqrt{10}$; **f)** $2\sqrt{30}$

3 **Calcule mentalmente a medida da área de cada polígono.**

a) Triângulo de base 5 cm e altura 4 cm em relação a essa base. 10 cm²
b) Triângulo retângulo cujos catetos medem 10 cm e 7 cm. 35 cm²
c) Paralelogramo cuja base mede 5 cm e cuja altura em relação a essa base mede 3 cm. 15 cm²
d) Quadrado cujo perímetro mede 24 cm. 36 cm²

PARA RECORDAR

1 **Vamos relembrar a seguinte propriedade dos triângulos: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.**

Utilize essa propriedade para responder às questões a seguir.

a) Dois ângulos de um triângulo medem, respectivamente, 20° e 30°. Quanto mede o terceiro? 130°
b) Em um triângulo com dois ângulos iguais, o ângulo diferente mede 20°. Quanto mede cada um dos ângulos iguais? 80°
c) Um triângulo pode ter dois ângulos retos? Por quê?

1. c) Não, pois, se a figura tiver dois ângulos internos retos e outro de medida qualquer, a soma das medidas desses ângulos internos será maior que 180°.

2 **Qual é a medida da área do polígono *ABCD*, em que *A*(2, 2), *B*(6, 6), *C*(4, 8) e *D*(0, 6) são os vértices?**
18 unidades de área.

3 **Indique a resposta correta no caderno.**

(Enem) Uma pessoa pratica quatro atividades físicas – caminhar, correr, andar de bicicleta e jogar futebol – como parte de seu programa de emagrecimento. Essas atividades são praticadas semanalmente de acordo com o quadro, que apresenta o número de horas diárias por atividade.

Dia da semana	Caminhar	Correr	Andar de bicicleta	Jogar futebol
Segunda-feira	1,0	0,5	0,0	2,0
Terça-feira	0,5	1,0	0,5	1,0
Quarta-feira	0,0	1,5	1,0	0,5
Quinta-feira	0,0	2,0	0,0	0,0
Sexta-feira	0,0	0,5	0,0	2,5

Ela deseja comemorar seu aniversário e escolhe o dia da semana em que o gasto calórico com as atividades físicas praticadas for o maior. Para tanto, considera que os valores dos gastos calóricos das atividades por hora (cal/h) são os seguintes:

Atividade física	Caminhar	Correr	Andar de bicicleta	Jogar futebol
Gasto calórico (cal/h)	248	764	356	492

O dia da semana em que será comemorado o aniversário é Alternativa **c**.

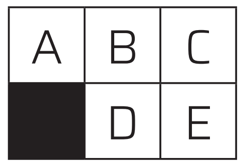
a) segunda-feira.
b) terça-feira.
c) quarta-feira.
d) quinta-feira.
e) sexta-feira.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Seu desafio agora é resolver estes três problemas e perceber que cada um deles exigirá uma estratégia totalmente diferente da utilizada para resolver os outros dois.

1 **Registre a resposta correta no caderno.** Alternativa **c**.

(ESPM-SP) Um jogo consiste de 5 casas marcadas com as letras A, B, C, D e E como mostra a figura abaixo. Dois jogadores alternam-se em suas jogadas, escolhendo uma casa de cada vez. Ao escolher uma das casas, ela e todas as casas que se encontram acima e à direita dela são eliminadas. Vence o jogador que eliminar as últimas casas.



ID/BR

Para garantir sua vitória, o jogador que inicia a partida deverá escolher a casa marcada com a letra:

a) A **b)** B **c)** C **d)** D **e)** E

2 **Carlos, Luís, Marcos e Nélson adoram o que fazem. As profissões deles são jardineiro, cozinheiro, alfaiate e motorista de ônibus. Descubra qual é a profissão de cada um, seguindo as pistas.**

- Carlos não sabe costurar.
- Luís é o cozinheiro.
- Marcos é alérgico à maioria das plantas.
- Carlos não sabe dirigir.
- Nélson não é alfaiate.

Marcos: alfaiate;
Carlos: jardineiro;
Luís: cozinheiro;
Nélson: motorista.

3 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente.

Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto? Alternativa **b**.

a) 600, 550, 350
b) 300, 300, 150
c) 300, 250, 200
d) 200, 200, 100
e) 100, 100, 50

PALAVRAS-CHAVE

Para informações sobre como elaborar um mapa mental consulte as *Orientações específicas* deste capítulo.

Essa retomada das simetrias no plano, que correspondem aos movimentos rígidos e à homotetia como um movimento não rígido, permitiu que você conhecesse a Geometria do plano sob diferentes perspectivas. Agora é hora de fazer uma síntese de suas aprendizagens e verificar o que não ficou evidente e precisa ser revisto.

Para isso, sugerimos que você elabore um mapa mental. Uma possibilidade é começar pela palavra “semelhança” e, a partir dela, relacionar os movimentos no plano que foram estudados. Outra palavra importante e que deve estar presente em seu mapa é “congruência”. Durante essa tarefa, explique com suas palavras cada um dos movimentos no plano. Utilize desenhos e diferentes exemplos. Não se esqueça de incluir o plano cartesiano.

Mostre seu mapa a um colega e confira com ele se você se esqueceu de alguma ideia importante. Caso julgue necessário, complemente seu mapa, para ter um bom material de consulta quando precisar rever alguma das noções estudadas neste capítulo.

MATEMÁTICA E CULTURA

O objetivo desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes ao desenvolver habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propor que vivenciem um processo investigativo. Trabalham-se, assim, as competências específicas **1** e **2** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Esta seção contempla ainda as competências gerais **3** e **4** propostas pela BNCC, valorizando manifestações artísticas e culturais e utilizando conhecimentos artísticos para os estudantes se expressarem e partilharem informações, o que possibilita uma integração com as áreas de Linguagens e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, bem como com o tema contemporâneo transversal Diversidade cultural. Além disso, esta seção favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT105**, pois apresenta como as noções de transformações geométricas foram usadas em diferentes produções humanas. Trabalhos integrados com os professores de Arte e História podem ser propostos para explorar a competência específica **6** da área de Linguagens e suas Tecnologias e a competência específica **1** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

O azulejo português

Em 6 de maio, em Portugal, comemora-se o Dia Nacional do Azulejo, e o Museu Nacional do Azulejo, situado na cidade de Lisboa, é um dos mais tradicionais museus lusitanos. Em 2015, o governo português preparou estudos para que esse objeto cultural se tornasse um patrimônio reconhecido pela Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco). O azulejo é, portanto, uma peça tão emblemática para os portugueses, que um museu, uma data comemorativa e até uma candidatura a patrimônio cultural da humanidade já foram dedicados a ele nesse país.

Com seus desenhos e suas figuras característicos, esse artefato cerâmico é uma interessante peça que nos ajuda a entender de modo bastante prático como as transformações geométricas podem ser usadas no dia a dia.

Para isso, observe a seguir fotos que mostram fachadas e paredes com diferentes padrões de azulejos portugueses.

PARA EXPLORAR

Site

GOOGLE ARTS & CULTURE. ***Museu Nacional do Azulejo*****. [*S. l.*], 2024. Disponível em: https://artsandculture.google.com/partner/national-azulejo-museum. Acesso em: 24 set. 2024.**

Acesse o *link* para fazer uma visita virtual guiada ao Museu Nacional do Azulejo, localizado em Lisboa, Portugal, e explorar os padrões geométricos e as simetrias dos mais diversos azulejos portugueses, que datam do século XV até hoje.

Alexandra Shishkina/Alamy/Fotoarena

Pintura feita em azulejos portugueses. Vila Franca de Xira, Portugal. Foto de 2023.

auralaura/Shutterstock.com/ID/BR

Os azulejos também são usados em fachadas de estabelecimentos e residências portuguesas, como essa localizada em Aveiro, Portugal. Foto de 2023.

Aproveite a temática desta seção e promova uma roda de conversa, a fim de que os estudantes debatam a importância do azulejo na cultura e na história portuguesa. Além disso, é possível explorar a relação entre o azulejo português, a etnomatemática e algumas ideias trabalhadas neste capítulo, como as transformações geométricas. Ao estudar os padrões geométricos, por exemplo, pode ajudar os estudantes na compreensão de como as comunidades utilizam a geometria em sua arte, que refletem suas tradições e valores, visto que os azulejos são um símbolo da identidade cultural portuguesa.

Não escreva no livro.

Gabriela Beres/Shutterstock.com/ID/BR

Detalhe de decoração de azulejos no palácio da Pena, em Sintra, Portugal. Foto de 2024.

Catrina Genovese/Shutterstock.com/ID/BR

Banco externo com aplicações de azulejos portugueses, em casa localizada em Algarve, Portugal. Foto de 2024.

Conectando ideias

Os azulejos portugueses são uma expressão da cultura lusitana, refletindo influências históricas e artísticas, como a herança mourisca. Dessa perspectiva, a etnomatemática, presente no estudo dos azulejos portugueses, ajuda a promover uma visão mais inclusiva e abrangente da Matemática, pois valoriza a diversidade cultural e reconhece que a Matemática é uma construção humana influenciada por diferentes contextos culturais.

1 **Escolha uma das fotos apresentadas, observe os azulejos portugueses e identifique se há transformações geométricas que poderiam ser utilizadas na formação de padrões e quais seriam elas. Se preferir, faça no caderno um esboço dos azulejos para facilitar a visualização na hora de estudá-los.** Resposta pessoal.

2 **Reúnam-se em grupos de três integrantes para fazer o que se pede a seguir.** Resposta de acordo com a pesquisa realizada pelos estudantes.

a) Pesquisem painéis, fachadas e objetos decorados com azulejo português e analisem as temáticas e as formas escolhidas para a confecção, entre outros aspectos que acharem pertinentes. Relacionem os desenhos com as transformações geométricas estudadas e com outros conteúdos da Geometria.

b) Inspirados nessa pesquisa, criem um painel que simule o estilo dos azulejos portugueses. Os azulejos devem apresentar alguma das transformações geométricas estudadas. Para a escolha da temática, usem narrativas e elementos característicos da região em que moram. Ao final, organizem um mural e exponham seus painéis para apreciação dos colegas da escola.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

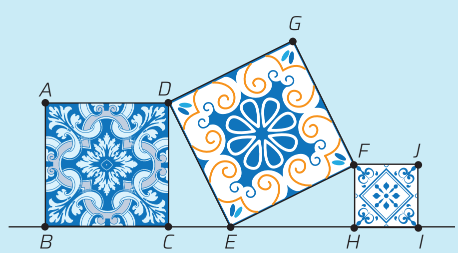
Algumas questões de processos seletivos apresentam situações que exigem leitura atenta do texto e das imagens e o uso de conhecimentos geométricos para que possamos solucioná-las.

Em alguns casos, podemos retirar informações de desenhos ou imagens que já se encontram na questão e, em outros, precisamos fazer desenhos e esboços que nos auxiliem na resolução. Você vai trabalhar com essa habilidade nas questões desta seção.

VESTIBULAR EM CONTEXTO

Proponha a leitura desta questão e solicite aos estudantes que tentem resolvê-la sem consultar a resolução apresentada no livro. Em seguida, peça que comparem a estratégia e o registro que utilizaram com aqueles apresentados no livro.

(Uerj) Os azulejos quadrados *ABCD*, *DEFG* e *FHIJ* foram dispostos em um mostruário, conforme ilustrado na imagem. Nesse arranjo, os vértices *B*, *C*, *E*, *H* e *I* são colineares.



Uerj. Fac-símile: ID/BR

As medidas das áreas revestidas pelos azulejos *ABCD*, *DEFG* e *FHIJ*, em cm², são, respectivamente, 93, 157 e *X*.

O lado, em centímetros, do azulejo de menor área é igual a:

a) 5

b) 6

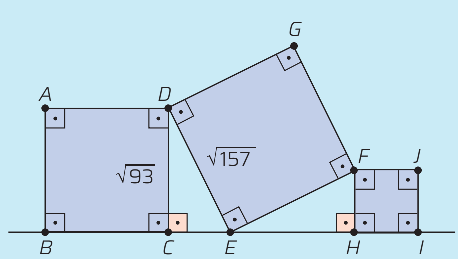
c) 7

d) 8

Resolução

Dadas as áreas dos azulejos *ABCD* e *DEFG*, podemos obter as medidas de seus lados, em cm, que são iguais a $\sqrt{93}$ e $\sqrt{157}$, respectivamente.

Agora, vamos desenhar um esquema para representar os azulejos conforme ilustrado no enunciado do problema, indicando algumas medidas.



Uerj. Fac-símile: ID/BR

Considerando o triângulo *CED*, utilizamos o teorema de Pitágoras para determinar a medida *CE*:

$$(\sqrt{157})^2 = (\sqrt{93})^2 + CE^2$$

$$CE^2 = 157 - 93$$

$$CE = \sqrt{64} = 8$$

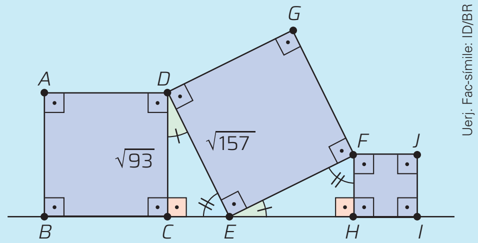
Agora, note que:

- med $(E\hat{D}C)$ + med $(C\hat{E}D) = 90°$ (I)
- med $(F\hat{E}H)$ + med $(C\hat{E}D) = 90°$ (II)

De (I) e (II), obtemos:

med $(E\hat{D}C)$ + med $(C\hat{E}D)$ = med $(F\hat{E}H)$ + med $(C\hat{E}D) \Rightarrow$ med $(E\hat{D}C)$ = med $(F\hat{E}H)$

Assim, obtemos também med ($C\hat{E}D$) = med ($H\hat{F}E$).

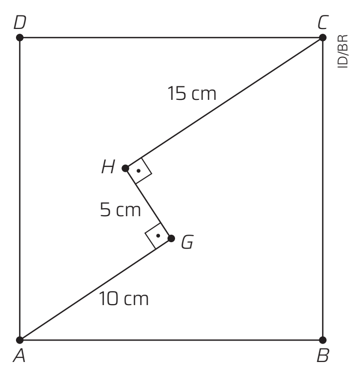


Pelo caso de congruência de triângulos ALA, temos que os triângulos *CED* e *HFE* são congruentes.
Logo, $FH = CE = 8$.
Portanto, o azulejo de menor área tem lado medindo 8 cm, e a alternativa **d** é a correta.

Explorando a estratégia

Utilize o que aprendeu e resolva a questão a seguir, relacionada a funções do 1º grau. Como na questão resolvida, faça a leitura do enunciado e elabore um plano de resolução.

1 **(UPE) A formiga Avelina partiu do vértice *A* do quadrado *ABCD* e chegou ao vértice *C* caminhando sobre os segmentos *AG*, *GH* e *HC*, cujas medidas podem ser observadas na figura a seguir. O seu amigo Belinho também partiu do vértice *A*, mas este chegou ao vértice *C* caminhando sobre os lados *AB* e *BC*. Considere $\sqrt{13} = 3{,}6$.** Alternativa **c**.



Portanto, é correto afirmar que

a) Avelina percorreu 6 cm a mais que Belinho.
b) Avelina percorreu 5 cm a mais que Belinho.
c) Belinho percorreu 6 cm a mais que Avelina.
d) Belinho percorreu 5 cm a mais que Avelina.
e) Avelina e Belinho percorreram a mesma distância.

Utilize o que aprendeu e resolva a questão a seguir, relacionada a funções do 1º grau. Como na questão resolvida, faça a leitura do enunciado e elabore um plano de resolução.

2 **(Enem) Um túnel viário de uma única via possui a entrada na forma de um triângulo equilátero de lado 6 m. O motorista de um caminhão com 3 m de largura deve decidir se passa por esse túnel ou se toma um caminho mais longo. Para decidir, o motorista calcula a altura que esse caminhão deveria ter para tangenciar a entrada do túnel. Considere o caminhão como um paralelepípedo reto.**

Essa altura, em metro, é Alternativa **e**.

a) 3
b) $3\sqrt{2}$
c) $3\sqrt{3}$
d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

TRIGONOMETRIA

Fenômenos que se repetem periodicamente e que estão à nossa volta podem ser descritos e estudados pela Matemática. Você consegue imaginar algum?

Um desses fenômenos é a variação da pressão sanguínea de uma pessoa em repouso. Essa variação obedece a um ciclo, e cada ciclo completo equivale a um batimento cardíaco. Esse tipo de variação pode ser modelado por uma função trigonométrica.

Nesta unidade, vamos realizar um estudo sobre as relações trigonométricas em triângulos, suas propriedades e as relações entre lados e ângulos. Além disso, vamos conhecer e analisar as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente e resolver problemas relacionados a situações que podem ser descritas por essas funções. Por fim, vamos resolver equações trigonométricas simples, chamadas de equações trigonométricas fundamentais.

OBJETIVOS

- Utilizar as propriedades de triângulos para definir as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.
- Conhecer e aplicar conhecimentos de Trigonometria para resolver problemas do dia a dia, como calcular distâncias inacessíveis.
- Relacionar os números reais a ângulos e a arcos no ciclo trigonométrico.
- Generalizar as razões trigonométricas para funções definidas no conjunto dos números reais.
- Construir, ler e interpretar gráficos de funções trigonométricas.
- Elaborar argumentos e escrever conclusões.

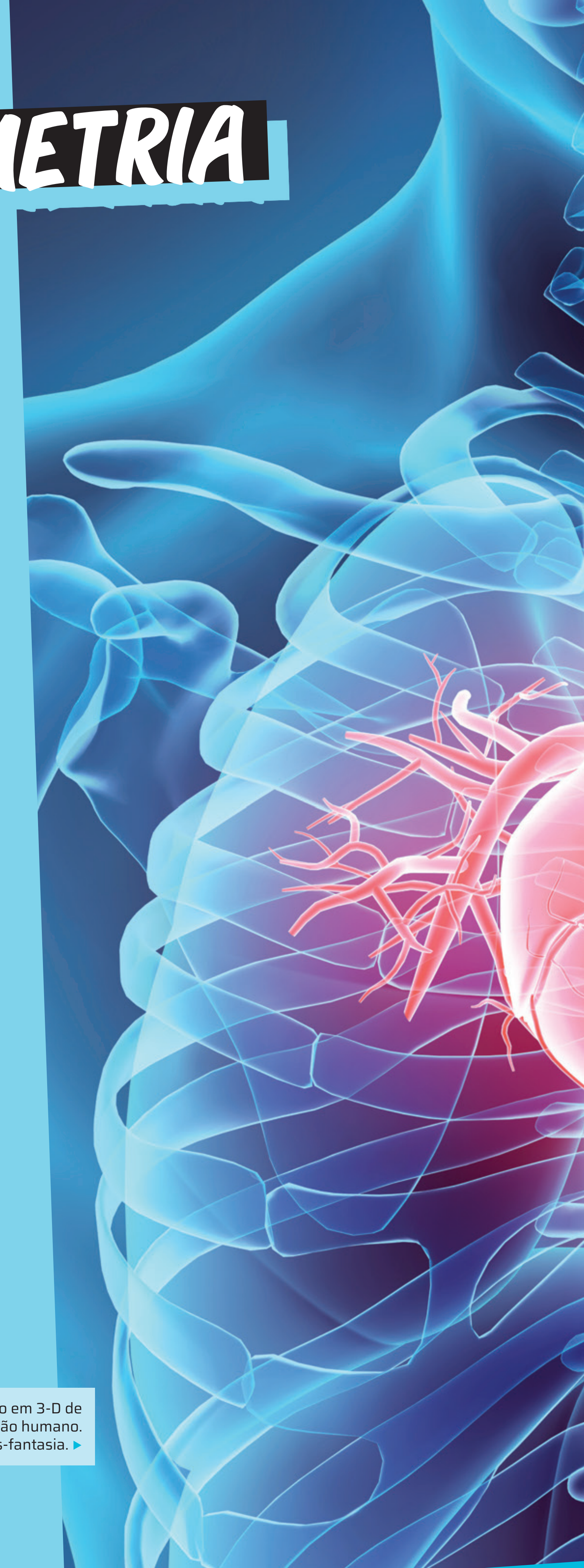
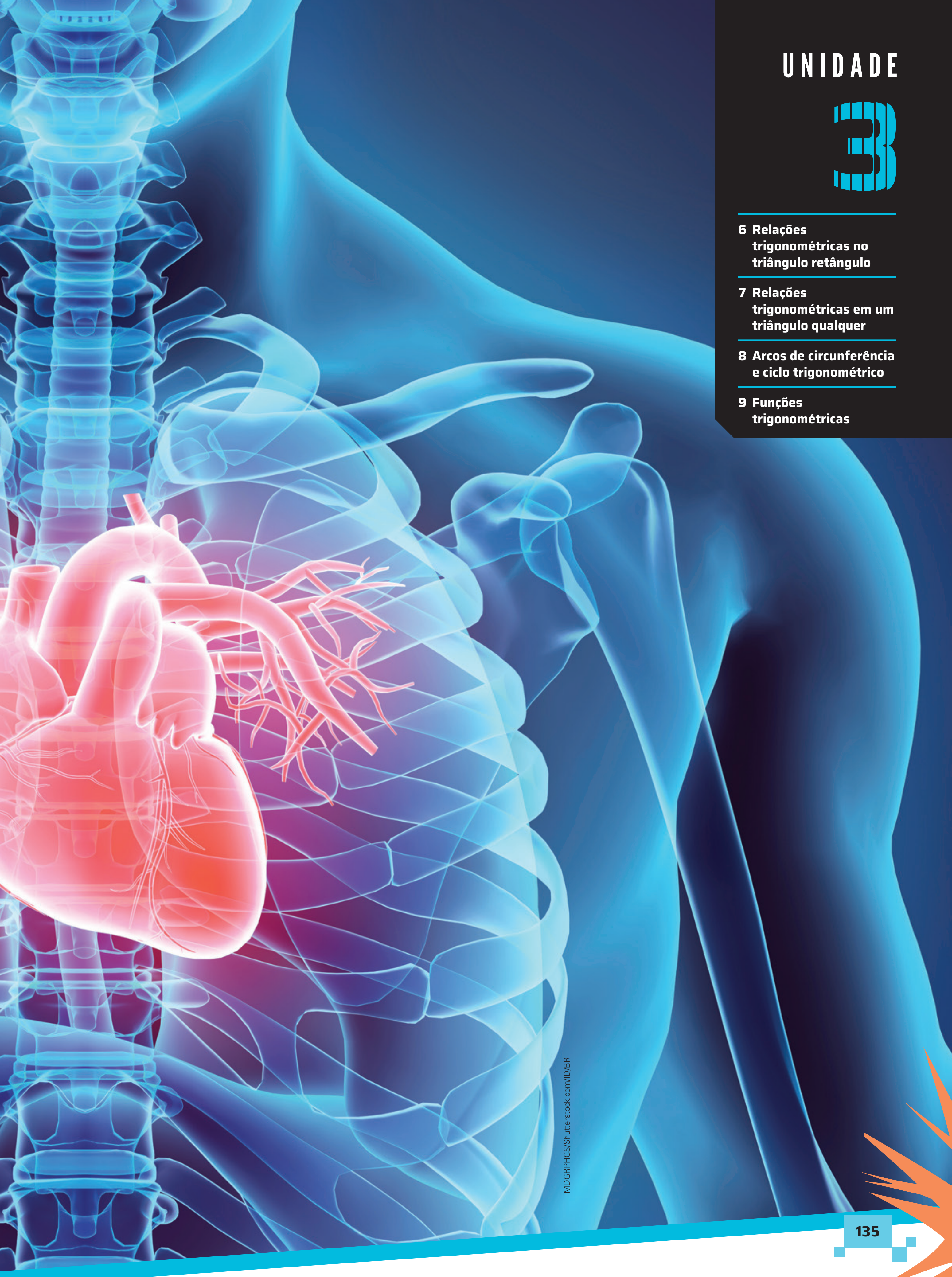


Ilustração em 3-D de um coração humano. Cores-fantasia.



MDGRPHCS/Shutterstock.com/ID/BR

UNIDADE 3

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

NESTE CAPÍTULO

- Relações trigonométricas no triângulo retângulo
- Cálculo de seno, cosseno e tangente de ângulos especiais
- Tabela trigonométrica
- Relação entre seno, cosseno e tangente

Nelson Matsuda/ID/BR

Além de apresentar as razões trigonométricas no triângulo retângulo, este capítulo tem como objetivo mostrar aspectos da origem da Trigonometria na história da humanidade e propor a resolução de problemas de medição de distâncias inacessíveis. Se possível, convide os professores de História, Geografia, Filosofia e Sociologia para conversar com os estudantes sobre os contextos históricos, geográficos, políticos, econômicos e sociais relacionados às Grandes Navegações, a fim de desenvolver a competência específica **1** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e a competência geral **1**.

PARA EXPLORAR

Livro

Portelinha, Douglas. *O segredo do rei*. São Paulo: Grupo Editorial Atlântico, 2023.

Mergulhe nas intrigas emocionantes das Grandes Navegações, em que personagens históricas e fictícias se encontram em uma trama repleta de mistérios.

Para complementar, proponha um trabalho interdisciplinar com o componente curricular da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Para isso, peça aos estudantes que pesquisem, em livros, artigos ou *sites*, informações sobre personalidades femininas conhecidas historicamente por terem algum envolvimento nas Grandes Navegações. Depois, caso os estudantes tenham acesso a dispositivos eletrônicos e à internet, proponha que elaborem um pequeno vídeo, ou colagem virtual, com o resultado da pesquisa e o compartilhem com a comunidade escolar por meio de uma postagem. Ao final, promova uma roda de conversa com a turma. Comente o fato de que Isabel (1451-1504), rainha de Castela, levantou dinheiro para a viagem de Cristóvão Colombo às Américas e que dona Ana de Sousa, rainha Nzinga (1582-1663), conhecida como a soberana dos reinos do Dongo e de Matamba (atual Angola), na África, participou das negociações com os portugueses, na época das Grandes Navegações, e resistiu às tentativas de colonização.

Você já se perguntou como foi possível aos portugueses atravessar o oceano Atlântico em pleno século XVI, quando nem mesmo existiam mapas das novas terras?

Até o século XV, sem os mapas, os instrumentos e os conhecimentos de hoje, os portugueses praticavam a navegação marítima sempre costeando o litoral entre os portos do Atlântico e do Mediterrâneo, utilizando naus, barcas e barinéis. A navegação dessas embarcações dependia, principalmente, do conhecimento empírico que o piloto tinha em relação à rota a ser seguida.

Agora, para complementar os seus conhecimentos sobre esse assunto, leia o texto a seguir e analise a imagem.

As Grandes Navegações

Desde o início do século XV, os portugueses costeavam a África Ocidental sempre rumo ao sul, seguindo a maneira medieval de navegar, ou seja, nunca se afastando da costa. Segundo algumas fontes de pesquisa, por volta de 1420, o infante Dom Henrique (1394-1460), de Portugal, conhecido como O Navegador, fundou um instituto de pesquisas náuticas e um observatório astronômico em Sagres, no cabo de São Vicente. As obras de Ptolomeu e de outros estudiosos antigos foram, então, levadas para o instituto, e seus ensinamentos foram utilizados nas explorações. Conta-se que, certa vez, um dos capitães do infante Dom Henrique teria observado: "Com todo o respeito ao renomado Ptolomeu, chegamos a conclusões opostas às suas".

Tanto no observatório como no instituto, havia matemáticos alemães e cartógrafos italianos que preparavam mapas das terras e dos mares explorados desde 1450. Utilizando a Trigonometria, os primeiros recalcularam a circunferência terrestre, empregando o reduzido valor atribuído por Ptolomeu ao comprimento de um grau, com o que acabaram por obter uma estimativa favoravelmente pequena. Foi com base nessa avaliação que, em 1474, fez-se um gráfico da rota da circum-navegação da Terra pelo rumo oeste.

Os portugueses iniciaram a exploração na direção leste, com Bartolomeu Dias (c. 1450-1500) dobrando o cabo da Boa Esperança, em 1488, e Vasco da Gama (1469-1524) alcançando a Índia, pelo mesmo caminho, em 1498. Os espanhóis, ao contrário, arrojaram-se para o lado oeste, com Colombo (1451-1506) chegando às Índias Ocidentais em 1492. Tanto Colombo como Vasco da Gama tiveram de atravessar grandes extensões oceânicas, sem o menor vislumbre de terra. Para que novas viagens pudessem ocorrer, a elaboração de cartas marítimas e o desenvolvimento de métodos para determinar a posição de um navio em alto-mar tornaram-se necessários. A feitura dessas cartas, que abrangiam grandes áreas, envolvia, em geral, problemas de determinação das posições relativas de pontos sobre a superfície da Terra e de representação da sua esfericidade em um mapa plano. A determinação da posição de um navio em alto-mar e da localização das terras recém-descobertas exigia processos de medição de latitude e longitude dos lugares, que envolviam cálculos trigonométricos.

Não escreva no livro.

Após a leitura do texto, comente com os estudantes que o termo “infante” é um título da nobreza portuguesa dado a todos os filhos legítimos do rei que não são o primogênito (herdeiro direto ao trono). Dom Henrique era o terceiro filho do rei João I de Portugal e, por isso, recebeu esse título.

Neste capítulo, vamos estudar a Trigonometria, uma área da Matemática que nasceu da necessidade que o ser humano tinha de entender o mundo ao seu redor e de vencer desafios que exigiam medições de grandes distâncias e orientação para se aventurar por terras e mares desconhecidos.

A Trigonometria trata da resolução de problemas que envolvem triângulos. A origem dessa palavra é grega: *trigonos* significa “triângulo” e *metrein* significa “medir”.

Ela tem um enorme valor prático em variados campos, como Engenharia, Arquitetura, navegação marítima ou aérea e Astronomia, e também está na base do estudo de fenômenos periódicos da Física, da Medicina e da Eletrônica.

Vamos iniciar nosso estudo conhecendo as razões trigonométricas em um triângulo retângulo.

Nelson Matsuda/ID/BR

Biblioteca Nacional da França. Paris. Fotografia: ID/BR

Reprodução de carta feita pelo cartógrafo português Domingos Teixeira, na segunda metade do século XVI.

Antes de iniciar o estudo deste tema, sugerimos um experimento que dará maior significado às razões trigonométricas e que contribuirá para a aquisição da competência geral **2**. Consulte a descrição desse experimento nas *Orientações específicas* deste capítulo.

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

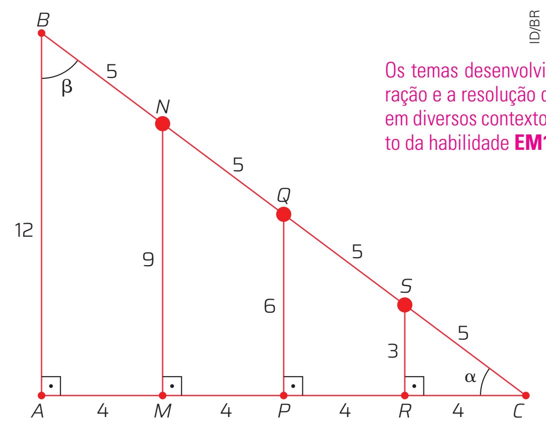
Do ponto de vista da Matemática, o desenvolvimento da Trigonometria está associado à descoberta de constantes nas relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo retângulo.

Essas relações nos triângulos retângulos permitem, entre outras coisas, calcular a medida de um lado do triângulo, desde que se conheçam as medidas de um ângulo e de outro lado; ou calcular a medida de um ângulo, conhecendo-se as medidas de dois dos três lados do triângulo. Verifique quais são essas relações e note que elas dependem do ângulo considerado, mas que **independem das medidas dos lados do triângulo retângulo** que contém esse ângulo.

Analise os triângulos retângulos representados na figura a seguir, nos quais:

$$\overline{AB} \, // \, \overline{MN} \, // \, \overline{PQ} \, // \, \overline{RS}$$

Se necessário, retome com os estudantes os conceitos relacionados à semelhança de triângulos.



Os temas desenvolvidos neste capítulo permitem a elaboração e a resolução de problemas que envolvem triângulos em diversos contextos, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**.

Pela semelhança de triângulos, podemos estabelecer três razões entre as medidas dos lados desses triângulos.

- **Razões entre as medidas dos catetos opostos ao ângulo α e as medidas das hipotenusas**

$$\frac{RS}{SC} = \frac{3}{5} \qquad \frac{PQ}{QC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \qquad \frac{MN}{NC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

As razões estabelecidas neste exemplo são iguais à constante $\frac{3}{5}$ e são chamadas de **seno de α**. Neste caso, indicamos por: sen $\alpha = \frac{3}{5}$

- **Razões entre as medidas dos catetos adjacentes ao ângulo α e as medidas das hipotenusas**

$$\frac{RC}{SC} = \frac{4}{5} \qquad \frac{PC}{QC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \qquad \frac{MC}{NC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

As razões obtidas neste exemplo são iguais à constante $\frac{4}{5}$ e são chamadas de **cosseno de α**. Neste caso, indicamos por: cos $\alpha = \frac{4}{5}$

- **Razões entre as medidas dos catetos opostos ao ângulo α e as medidas dos catetos adjacentes ao ângulo α**

$$\frac{SR}{RC} = \frac{3}{4} \qquad \frac{QP}{PC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \qquad \frac{NM}{MC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \qquad \frac{BA}{AC} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

As razões obtidas neste exemplo são iguais à constante $\frac{3}{4}$ e são chamadas de **tangente de α**. Neste caso, indicamos por: tg $\alpha = \frac{3}{4}$

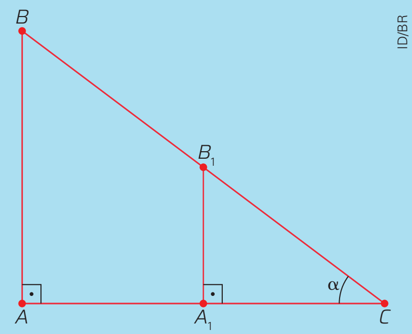
Do mesmo modo, podemos calcular as razões entre as medidas dos lados dos triângulos para o ângulo β. Fazendo isso, obtemos:

- razões entre as medidas dos catetos opostos ao ângulo β e as medidas das hipotenusas (seno): sen $\beta = \frac{4}{5}$
- razões entre as medidas dos catetos adjacentes ao ângulo β e as medidas das hipotenusas (cosseno): cos $\beta = \frac{3}{5}$
- razões entre as medidas dos catetos opostos ao ângulo β e as medidas dos catetos adjacentes ao ângulo β (tangente): tg $\beta = \frac{4}{3}$

Não escreva no livro.

Se necessário, retome o teorema de Tales, estudado no capítulo 4 deste volume.

De modo geral, para um triângulo retângulo em A qualquer, sendo $\widehat{C}$ um ângulo agudo de medida α, segundo o teorema de Tales, temos as seguintes relações:



Em todo triângulo retângulo, o **seno** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{A_1B_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC}$$

Em todo triângulo retângulo, o **cosseno** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{A_1C}{B_1C} = \frac{AC}{BC}$$

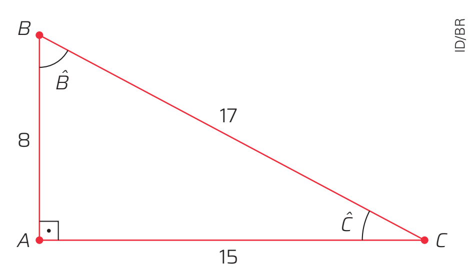
Em todo triângulo retângulo, a **tangente** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{A_1B_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC}$$

Exemplo 1

Na figura ao lado, temos:

- $\text{sen}\ \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{17}$; $\text{sen}\ \widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{17}$
- $\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{17}$; $\cos \widehat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{15}{17}$
- $\text{tg}\ \widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{8}$; $\text{tg}\ \widehat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{15}$



Exemplo 2

Um observador de 1,70 m de altura está a 20 m de distância de uma torre, observando-a sob um ângulo de 56°. Acompanhe como podemos calcular a altura H da torre.

Apresente aos estudantes uma tabela trigonométrica como a que se encontra na página 144 do Livro do Estudante. Essa tabela será analisada com mais detalhe em um tópico adiante neste capítulo.

$$\text{tg}\ 56° = \frac{h}{20}$$

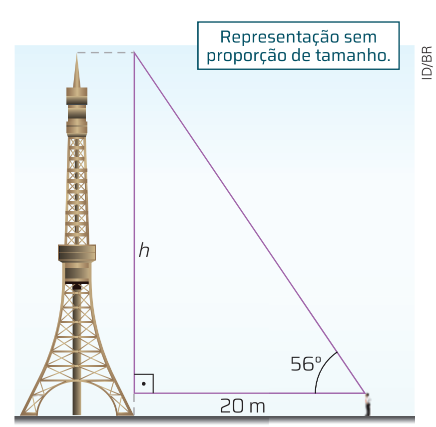
Consultando uma tabela trigonométrica ou utilizando uma calculadora científica, encontramos tg 56° ≃ 1,4826. Assim:

$$h \simeq 20 \cdot 1{,}4826 \simeq 29{,}65$$

Como precisamos levar em consideração a altura do observador, a altura da torre é dada por:

$$H \simeq 29{,}65 + 1{,}70$$
$$H \simeq 31{,}35$$

Logo, a altura da torre é aproximadamente 31,35 m.



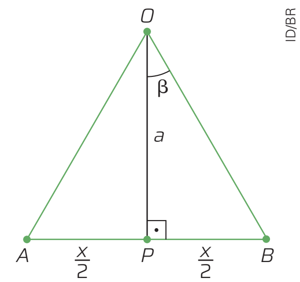
Cálculo do apótema de um polígono regular

Você provavelmente já estudou como calcular a área de um polígono regular utilizando a medida do apótema desse polígono. E se você não conhecer a medida do apótema do polígono regular? Acompanhe a seguir como podemos determinar essa medida usando uma razão trigonométrica.

Considere um polígono regular de n lados. Sabemos que:

- ele pode ser dividido em n triângulos isósceles;
- a medida de seu ângulo central α é dada por $\alpha = \frac{360°}{n}$;
- o apótema do polígono regular é o segmento de reta que une o centro do polígono a um dos lados do polígono, formando um ângulo de 90°;
- a área (A) é dada por $A = \frac{P \cdot a}{2}$, sendo P o perímetro do polígono e a a medida do apótema.

A figura ao lado mostra um dos triângulos isósceles resultante da divisão do polígono de n lados em n triângulos isósceles. Note que o apótema $\overline{OP}$ desse polígono coincide com a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABO. Além disso, o apótema $\overline{OP}$ divide o lado $\overline{AB}$ em duas partes de medidas iguais e é bissetriz do ângulo central $\hat{O}$.



Assim, no triângulo retângulo BOP, temos ângulo $\beta = \frac{\alpha}{2}$, ou seja:

$$\beta = \frac{360°}{2n}$$

$$\beta = \frac{180°}{n}$$

Para calcular a medida a do apótema, podemos utilizar tg β:

$$\text{tg}\ \beta = \frac{\frac{x}{2}}{a}$$

$$\text{tg}\ \frac{180°}{n} = \frac{x}{2a}$$

$$a = \frac{x}{2 \cdot \text{tg}\ \frac{180°}{n}}$$

Aprender o cálculo da medida do apótema de um polígono regular utilizando a tangente de um ângulo auxilia os estudantes a obter mais um método para o cálculo da área de polígonos regulares, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307**. Se considerar pertinente, retome os conceitos relacionados a esse conteúdo.

Portanto, a medida do apótema de um polígono de n lados é dada por $a = \frac{x}{2 \cdot \text{tg}\ \frac{180°}{n}}$.

CÁLCULO DE SENO, COSSENO E TANGENTE DE ÂNGULOS AGUDOS ESPECIAIS

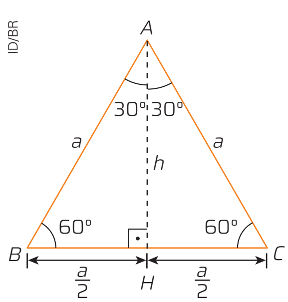
No estudo da Trigonometria, há alguns ângulos agudos que são frequentemente utilizados: os de 30°, de 45° e de 60°.

Com base em algumas propriedades geométricas conhecidas, é possível calcular o valor do seno, do cosseno e da tangente desses ângulos.

Seno, cosseno e tangente de 30° e de 60°

Em um triângulo equilátero, com lados de medida a, sabemos que qualquer uma das alturas mede $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

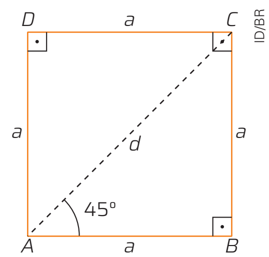
No $\triangle AHB$, a seguir, temos:



- $\text{sen}\ 30° = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$
- $\cos 30° = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg}\ 30° = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{sen}\ 60° = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$
- $\text{tg}\ 60° = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$

Seno, cosseno e tangente de 45°

Em um quadrado com lados de medida a, sabemos que uma diagonal mede $d = a\sqrt{2}$.



No $\triangle ABC$, temos:

- $\text{sen } 45° = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg } 45° = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{a}{a} = 1$

Para facilitar a consulta, podemos organizar em um quadro os valores obtidos.

	30°	**45°**	**60°**
sen	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
tg	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

PARA EXPLORAR

Livro

Poskitt, Kjartan. *Medidas desesperadas*: comprimento, área e volume. São Paulo: Melhoramentos, 2012 (Coleção Saber Horrível).

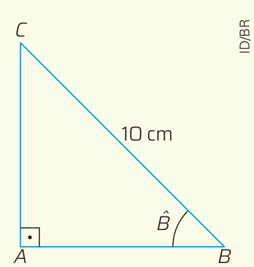
Nesse livro, no tópico "Ângulos, ângulos e mais ângulos", é possível rever a noção de ângulos e como medi-los.

Se necessário, antes de apresentar os problemas resolvidos, retome o teorema de Pitágoras, estudado anteriormente.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 10 cm e o seno de um dos ângulos agudos vale 0,8. Calcule as medidas dos catetos.**

Resolução



De acordo com o enunciado, $\text{sen } \hat{B} = 0{,}8$. Então:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

$$0{,}8 = \frac{AC}{10}$$

$$AC = 8$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$

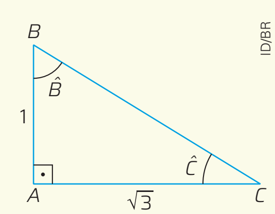
$$(AB)^2 + 8^2 = 10^2$$

$$(AB)^2 = 100 - 64$$

$$AB = 6$$

Logo, os catetos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ medem 8 cm e 6 cm, respectivamente.

R2 **Calcule as medidas dos ângulos agudos do triângulo retângulo ao lado.**



Resolução

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

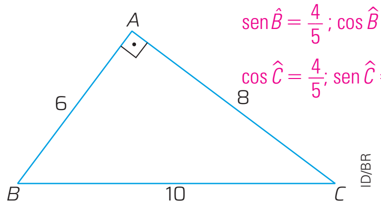
$$\text{tg } \hat{B} = \sqrt{3}$$

Portanto, $\text{med}(\hat{B}) = 60°$.

Como $\text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 90°$, então $\text{med}(\hat{C}) = 30°$.

1 **Calcule o seno, o cosseno e a tangente de cada ângulo agudo.**

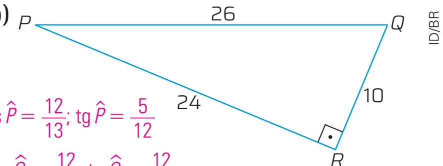
a)



$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{4}{5}$; $\cos\hat{B} = \frac{3}{5}$; $\text{tg}\,\hat{B} = \frac{4}{3}$

$\cos\hat{C} = \frac{4}{5}$; $\text{sen}\,\hat{C} = \frac{3}{5}$; $\text{tg}\,\hat{C} = \frac{3}{4}$

b)

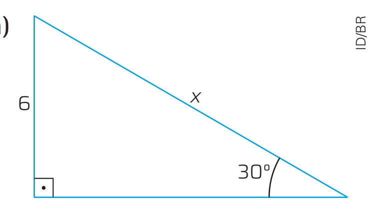


$\text{sen}\,\hat{P} = \frac{5}{13}$; $\cos\hat{P} = \frac{12}{13}$; $\text{tg}\,\hat{P} = \frac{5}{12}$

$\cos\hat{Q} = \frac{5}{13}$; $\text{sen}\,\hat{Q} = \frac{12}{13}$; $\text{tg}\,\hat{Q} = \frac{12}{5}$

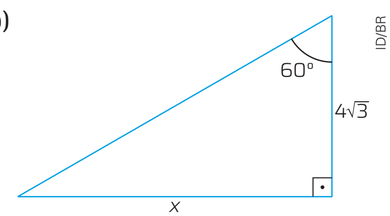
2 **Calcule o valor de *x* em cada caso.**

a)



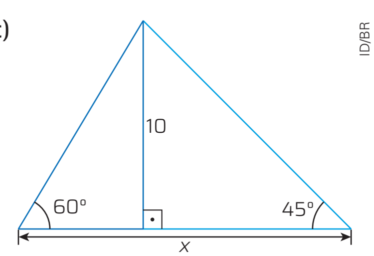
$x = 12$

b)



$x = 12$

c)



$x = 10 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

3 **Em um triângulo retângulo, um cateto mede 10 cm e o cosseno do ângulo agudo adjacente a ele vale 0,6. Calcule as medidas dos outros lados.** $\frac{40}{3}$ cm e $\frac{50}{3}$ cm.

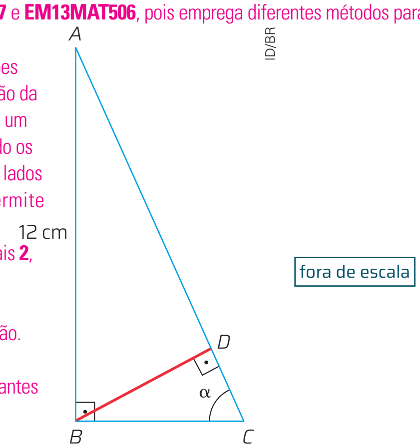
4 **Em um triângulo retângulo, os catetos medem 9 m e $9\sqrt{3}$ m. Calcule as medidas dos ângulos agudos desse triângulo.** 30° e 60°.

5 **Em um retângulo, uma diagonal mede 12 m e forma um ângulo de 30° com um dos lados. Calcule o perímetro desse retângulo.** $12 \cdot (1 + \sqrt{3})$ m

6 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(UEA-AM) A figura mostra os triângulos retângulos *ABC* e *BCD*, em que $AB = 12$ cm e $m(B\hat{C}D) = \alpha$.

A atividade **7** contribui para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT307** e **EM13MAT506**, pois emprega diferentes métodos para deduzir expressões de cálculo e analisa funções que envolvem a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam. Além disso, permite o desenvolvimento das competências gerais **2**, **7** e **9**, pois exercita a curiosidade intelectual por meio da investigação. Momentos como esse possibilitam aos estudantes exercitar a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.



Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = 0{,}8$ e que o ponto *D* está sobre o lado $\overline{AC}$, a medida do segmento $\overline{DC}$ é igual a
Alternativa **a**.

a) 5,4 cm.
b) 3,6 cm.
c) 4,5 cm.
d) 6,3 cm.
e) 7,2 cm.

7 **Considerando que *x* é a medida do lado de um polígono regular de *n* lados, faça o que se pede.**

a) O apótema de um polígono regular de *n* lados é dado por $a = \dfrac{x}{2 \cdot \text{tg}\,\frac{180°}{n}}$ e a área desse polígono pode ser dada por $A = \dfrac{P \cdot a}{2}$, em que *P* é o perímetro do polígono. Com base nessas informações, escreva uma fórmula que permita calcular a área *A* de qualquer polígono regular em função da quantidade *n* de lados e da medida *x* do lado.
$A = \dfrac{n}{4 \cdot \text{tg}\left(\frac{180°}{n}\right)} \cdot x^2$

b) Calcule a área de um eneágono regular cujo lado mede 10 cm utilizando a fórmula obtida no item **a**.
Aproximadamente 618 cm².

c) Converse com um colega sobre a função obtida no item **a**. É possível afirmar que a área de qualquer polígono regular de *n* lados varia com o lado *x* de acordo com uma função de 2º grau? Justifique.
Consulte a resposta no Manual do Professor.

8 **Em um triângulo retângulo *ABC*, a hipotenusa $\overline{BC}$ e o cateto $\overline{AB}$ medem 14 cm e 8 cm, respectivamente. Nesse triângulo, é traçada a altura $\overline{AH}$. Calcule *AH* e *CH*.**

9 **Em um paralelogramo de dimensões 6 cm e 8 cm, um ângulo mede 30°. Calcule as medidas das alturas desse paralelogramo.** $h_1 = 3$ cm e $h_2 = 4$ cm.

10 **Em um trapézio isósceles, a base menor vale 10 cm, um lado oblíquo mede 8 cm e um ângulo é 60°. Calcule o perímetro e a altura desse trapézio.**
$P = 44$ cm e $h = 4\sqrt{3}$ cm.

11 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

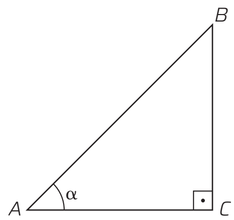
(Uece) As medidas dos ângulos internos de um triângulo são respectivamente 30°, 60° e 90°. Se a medida do maior lado deste triângulo é 4 cm, então, a medida, em cm, da altura relativa a este lado é: Alternativa **c**.

a) $\sqrt{2}$.
b) $\sqrt{6}$.
c) $\sqrt{3}$.
d) $\sqrt{5}$.

8. $AH = \frac{8\sqrt{33}}{7}$ cm; $CH = \frac{66}{7}$ cm.

12 **Escreva a resposta correta no caderno.**

(UFJF-MG) Considere um triângulo ABC retângulo em C e α o ângulo $B\hat{A}C$. Alternativa **d**.



UFJF-MG. Fac-símile: ID/BR

Sendo $AC = 1$ e sen $\alpha = \frac{1}{3}$, quanto vale a medida da hipotenusa desse triângulo?

a) 3

b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

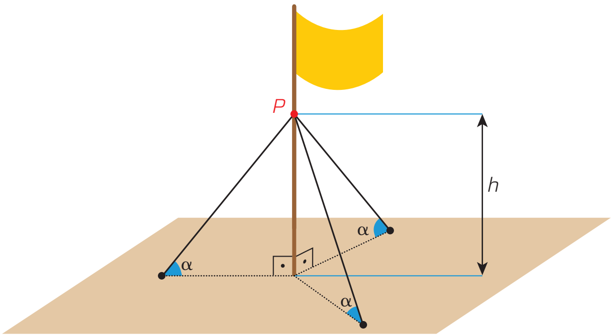
c) $\sqrt{10}$

d) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

e) $\frac{3}{2}$

13 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) O mastro de uma bandeira foi instalado perpendicularmente ao solo em uma região plana. Devido aos fortes ventos, três cabos de aço, de mesmo comprimento, serão instalados para dar sustentação ao mastro. Cada cabo de aço ficará perfeitamente esticado, com uma extremidade num ponto P do mastro, a uma altura h do solo, e a outra extremidade, num ponto no chão, como mostra a figura.



Enem. Fac-símile: ID/BR

Os cabos de aço formam um ângulo α com o plano do chão.

Por medida de segurança, há apenas três opções de instalação:

- opção I: $h = 11$ m e $\alpha = 30°$
- opção II: $h = 12$ m e $\alpha = 45°$
- opção III: $h = 18$ m e $\alpha = 60°$

A opção a ser escolhida é aquela em que a medida dos cabos seja a menor possível.

Qual será a medida, em metro, de cada um dos cabos a serem instalados? Alternativa **c**.

a) $\frac{22\sqrt{3}}{3}$

b) $11\sqrt{2}$

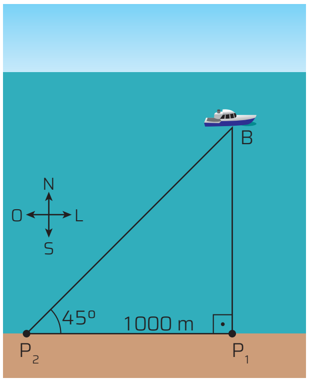
c) $12\sqrt{2}$

d) $12\sqrt{3}$

e) 22

14 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(UEL-PR) Um indivíduo em férias na praia observa, a partir da posição P_1, um barco ancorado no horizonte norte na posição B. Nesta posição P_1, o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 90°, como mostrado na figura a seguir.



UEL-PR. Fac-símile: ID/BR

Ele corre aproximadamente 1000 metros na direção oeste e observa novamente o barco a partir da posição P_2. Neste novo ponto de observação P_2, o ângulo de visão do barco, em relação à praia, é de 45°. Qual é a distância P_2B aproximadamente? Alternativa **c**.

a) 1000 metros

b) 1014 metros

c) 1414 metros

d) 1714 metros

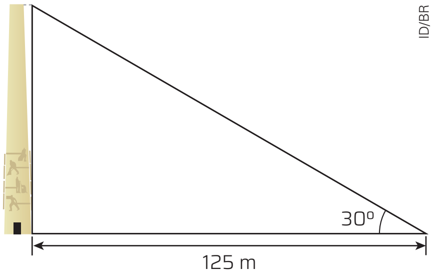
e) 2414 metros

15 **Um dos pontos turísticos do município de São Paulo (SP) é o Obelisco Mausoléu aos Heróis de 32, popularmente conhecido como Obelisco do Ibirapuera. Esse monumento, projeto do escultor ítalo-brasileiro Galileo Ugo Emendabili (1898-1974), presta uma homenagem aos estudantes e soldados mortos durante a Revolução Constitucionalista de 1932.**


Henrique Westin/iStock/Getty Images

Monumento Obelisco Mausoléu aos Heróis de 32, em São Paulo. Foto de 2018.

Analise a seguir a representação do Obelisco e determine, de acordo com a imagem, a altura visível, em metro, desse monumento. Aproximadamente 72 m.



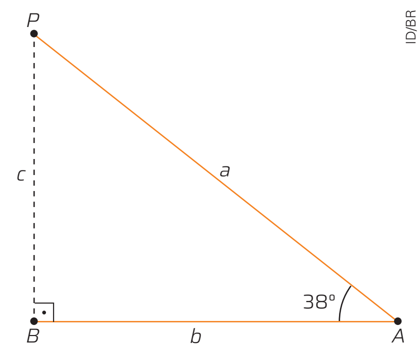
ID/BR

Após o desenvolvimento deste tópico, sugira aos estudantes que construam outros triângulos retângulos, com régua e transferidor, e comparem os valores das razões trigonométricas calculadas por eles com os valores em uma tabela trigonométrica ou mesmo com as informações obtidas em uma calculadora científica. Explicite que essa foi a primeira estratégia para a construção das tabelas trigonométricas até chegarmos à que se encontra na página 286 do Livro do Estudante.

CONSTRUINDO A TABELA TRIGONOMÉTRICA

Vamos determinar experimentalmente as razões trigonométricas do ângulo de 38° desenhando-o com o auxílio de um transferidor.

Por um ponto P qualquer de um lado do ângulo, traçamos uma perpendicular relativa ao outro lado, determinando o ponto B, e medimos os lados $\overline{AP}$, $\overline{PB}$ e $\overline{BA}$ do triângulo retângulo obtido.



Tomando o milímetro como unidade de medida, temos $BA = 48$, $PB = 38$ e $AP = 61$. Então:

$\text{sen } 38° = \frac{PB}{AP} \simeq 0{,}6$ $\cos 38° = \frac{BA}{AP} \simeq 0{,}8$ $\text{tg } 38° = \frac{PB}{BA} \simeq 0{,}8$

Esse é um processo experimental e não muito preciso para a determinação das razões trigonométricas de um ângulo agudo, pois tanto na construção do ângulo com o transferidor como na medição dos lados sempre ocorrem imprecisões na maneira de medir, o que pode gerar erros de cálculo.

Ao longo da história, os matemáticos determinaram essas razões por variados processos. Hoje, há cálculos que permitem obtê-las com quantas casas decimais se queira, inclusive utilizando uma calculadora.

Com os valores dos senos, dos cossenos e das tangentes calculados grau a grau e até em minutos, foi possível construir tabelas ou tábuas trigonométricas para serem consultadas sempre que a resolução de um problema exigir o conhecimento de um desses valores (consulte a tabela da página 286).

Em nosso exemplo, para conhecermos o valor do seno, do cosseno e da tangente de 38°, basta consultar a linha da tabela na qual esse ângulo aparece. Observe.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
38°	0,61566	0,78801	0,78129

Outra opção é usarmos uma calculadora científica, como veremos na seção *Tecnologia* a seguir.

TECNOLOGIA

Algumas calculadoras têm teclas para as funções trigonométricas. Com elas, podemos determinar o valor do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo qualquer ou, ainda, sabendo o valor do seno, do cosseno ou da tangente, podemos calcular a medida do ângulo correspondente.

Para obter o valor de um seno, digitamos o ângulo correspondente a ele e apertamos a tecla sin.

Para calcular o sen 38°, digitamos 3 8 sin.

No visor, aparecerá o número 0,615661475.... Isso significa que sen 38° = 0,615661...

Trata-se de um número irracional; logo, sua dízima não é periódica.

Analogamente, 3 8 cos e 3 8 tan nos fornecem, respectivamente, cos 38° = 0,788010... e tg 38° = 0,781285...

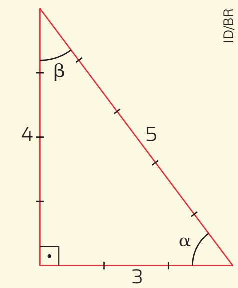
Para determinar o ângulo cujo valor do seno já temos, digitamos o valor desse seno e apertamos as teclas SHIFT e sin^{-1}.

Explique aos estudantes que o tipo de tecla e a ordem das teclas podem variar de acordo com o modelo de calculadora utilizado e auxilie-os, caso necessário. Comente que algumas calculadoras apresentam a tecla sen em vez de sin.

Não escreva no livro.

Exemplo

Quais são as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos lados têm 3, 4 e 5 unidades?



Sabemos que sen $\alpha = \frac{4}{5}$.

Teclando 4 ÷ 5 = SHIFT $\sin^{-1}$, obtemos no visor 53,13010236.

Isso significa que $\alpha \simeq 53,13°$.

Como vimos, a tecla $\sin^{-1}$ determina a correspondência inversa do seno, ou seja:

- sin fornece o seno do ângulo, sabendo-se a medida do ângulo;
- $\sin^{-1}$ fornece a medida do ângulo, sabendo-se o seno do ângulo.

A medida do ângulo que determinamos no exemplo anterior foi expressa na forma decimal. Mas a calculadora pode expressá-la também em graus, minutos e segundos.

A tecla ° ' " transforma os graus, minutos e segundos em número real. Já a segunda função dessa tecla, acionada com as teclas SHIFT e ←, transforma a representação decimal em graus, minutos e segundos.

Portanto, em nosso exemplo, se quisermos transformar a medida do ângulo (53,13010236) em graus, minutos e segundos, apertamos a tecla SHIFT e depois ° ' " ← (segunda função da tecla) e obtemos no visor 53°7'48".

Passemos agora ao ângulo β.

Como $\cos \beta = \frac{4}{5}$, fazemos 4 ÷ 5 = SHIFT $\cos^{-1}$.

Aparecerá no visor 36,86989765, ou seja, $\frac{4}{5} \simeq \cos 36,87°$.

Para que a medida do ângulo seja expressa em graus, minutos e segundos, digitamos SHIFT ° ' " ←. Com isso, obtemos $\beta \simeq 36°52'11,63"$, com aproximação de centésimos de segundo indicados pelo número 63 após os 11 segundos.

ATIVIDADE

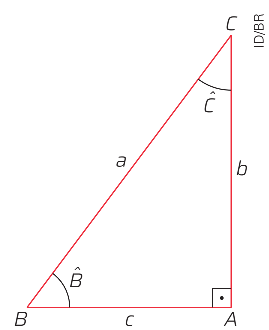
1 **Agora, use uma calculadora científica para determinar o seno, o cosseno e a tangente de 60°, de 89° e de 120°. Compare os resultados obtidos com os valores apresentados na tabela trigonométrica da página 286. Qual é a diferença entre eles?**

A diferença está na precisão dos valores, pois a calculadora fornece resultados com mais casas decimais.

RELAÇÕES ENTRE SENO, COSSENO E TANGENTE

Como as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente se referem a um mesmo triangulo retângulo, elas têm algumas relações entre si. Acompanhe.

Na figura ao lado, temos:



- $\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a}$
- $\text{tg}\,\hat{B} = \frac{b}{c}$
- $\cos\hat{C} = \frac{b}{a}$
- $b^2 + c^2 = a^2$
- $\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$
- $\text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{a}$
- $\text{tg}\,\hat{C} = \frac{c}{b}$

Dividindo sen $\hat{B}$ por cos $\hat{B}$, obtemos:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \text{tg}\,\hat{B}$$

A tangente de um ângulo agudo é o quociente entre o seno e o cosseno desse ângulo.

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$$

Dividindo os membros de $b^2 + c^2 = a^2$ por a^2, temos:

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

Substituindo $\frac{b}{a}$ por sen $\widehat{B}$ e $\frac{c}{a}$ por cos $\widehat{B}$, obtemos:

$$\text{sen}^2\ \widehat{B} + \cos^2 \widehat{B} = 1$$

A soma dos quadrados do seno e do cosseno de um ângulo agudo é igual a 1.

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

De sen $\widehat{B} = \frac{b}{a}$ e cos $\widehat{C} = \frac{b}{a}$, obtemos sen $\widehat{B}$ = cos $\widehat{C}$; e, de cos $\widehat{B} = \frac{c}{a}$ e sen $\widehat{C} = \frac{c}{a}$, concluímos que cos $\widehat{B}$ = sen $\widehat{C}$.

Como med($\widehat{B}$) + med($\widehat{C}$) = 90°, isto é, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são complementares, podemos afirmar que:

O seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do complemento desse ângulo e vice-versa.

$$\text{sen}\ \alpha = \cos (90° - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \text{sen}\ (90° - \alpha)$$

Com essas relações, conhecendo o valor do seno ou do cosseno de um ângulo α, é possível determinar as outras razões trigonométricas de α, bem como as de seu ângulo complementar.

Exemplo 1

Se sen α = 0,6 e cos α = 0,8, então:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4}$$

Exemplo 2

Se sen $\alpha = \frac{5}{13}$, com α agudo, e usando a relação $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, obtemos:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{12}{13}$$

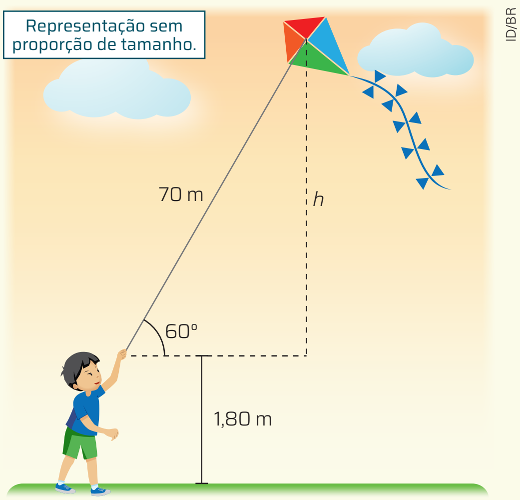
Exemplo 3

Dado sen 40° ≃ 0,643. Como o complemento de 40° é 50°, temos cos 50° ≃ 0,643.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Anote suas dúvidas ao ler cada atividade a seguir. Depois, discuta sobre elas com os colegas e o professor.

R3 **Analise a imagem a seguir. Nesse caso, o vento mantém o fio da pipa esticado, formando um ângulo de 60° com a horizontal. Quando se desenrolam 70 m de fio, a que altura fica a pipa?**
(Considere que a mão esquerda do menino está a 1,80 m do chão, aproximadamente.)



Resolução

Podemos calcular a distância pedida utilizando sen 60°.

Na figura, $\text{sen } 60° = \dfrac{h}{70}$.

Consultando o quadro da página 141, temos $\text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Então:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{70}$$

$$h = 70 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 35\sqrt{3}$$

A altura que a pipa está do chão é dada por:

$$h + 1{,}8 = 35\sqrt{3} + 1{,}8 \simeq 62{,}4$$

Logo, a pipa fica a aproximadamente 62,4 m do chão.

R4 **Sabendo que sen 20° $\simeq$ 0,342, calcule sen 70°, cos 70° e tg 70°.**

Resolução

Vamos calcular inicialmente cos 70°.

$$\cos 70° = \text{sen } (90° - 70°)$$

$$\cos 70° = \text{sen } 20°$$

$$\cos 70° \simeq 0{,}342$$

Sabemos que sen 70° = cos 20°, então vamos calcular primeiro cos 20° aplicando a seguinte relação: $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$$\cos^2 20° = 1 - \text{sen}^2\ 20°$$

$$\cos^2 20° = 1 - (0{,}342)^2$$

$$\cos^2 20° \simeq 0{,}883$$

$$\cos 20° \simeq 0{,}940$$

Então:

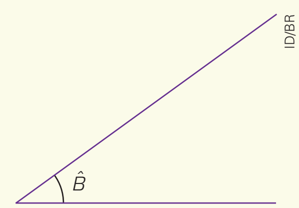
$$\text{sen } 70° = \cos 20° \simeq 0{,}940$$

Por fim, a partir de sen 70° e cos 70°, calculamos tg 70°.

$$\text{tg } 70° = \frac{\text{sen } 70°}{\cos 70°}$$

$$\text{tg } 70° = \frac{0{,}940}{0{,}342} \simeq 2{,}749$$

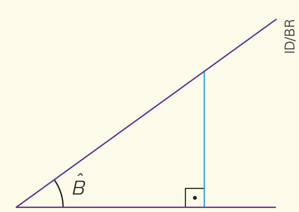
R5 **Sem usar o transferidor, calcule a medida aproximada do ângulo a seguir.**



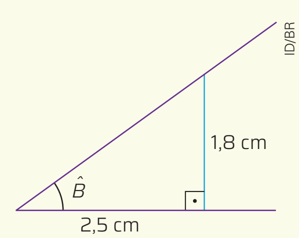
Resolução

Para calcular a medida de $\hat{B}$, traçamos uma perpendicular a um dos lados do ângulo, de modo a obter um triângulo retângulo.

É conveniente que a perpendicular esteja afastada do vértice do ângulo para que possamos lidar com valores maiores para os catetos, o que melhorará a aproximação, gerando menor erro. Por exemplo:



Então, medimos os catetos do triângulo representado.



Desse triângulo, obtemos:

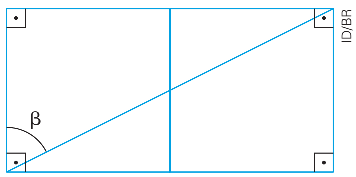
$$\text{tg } \hat{B} = \frac{1{,}8}{2{,}5} = 0{,}72$$

Consultando a tabela trigonométrica da página 286, percebemos que a tangente mais próxima de 0,72 é a do ângulo de 36°. Logo, $\hat{B} \simeq 36°$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16 Os ângulos do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 são congruentes aos do triângulo retângulo de lados 9, 12 e 15? Por quê? Sim, os lados dos dois triângulos apresentam medidas proporcionais, então, os ângulos não são alterados e têm medidas iguais.

17 Dados os quadrados representados a seguir, calcule a medida aproximada do ângulo β. $\beta \simeq 63{,}4°$



18 O triângulo ABC é retângulo em A, e $\text{sen}\ \hat{C} = \frac{12}{13}$. Calcule $\text{tg}\ \hat{B}$. $\frac{5}{12}$

19 Use a tabela trigonométrica da página 286 para calcular:

a) $10 \cdot \text{sen}\ 25°$ Aproximadamente 4,2262.

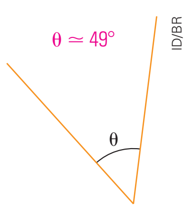
b) $\text{sen}\ 20° + \text{sen}\ 30°$ Aproximadamente 0,8420.

20 Qual é o ângulo cujo seno é igual ao cos 68°? 22°

21 Qual é o ângulo cujo cosseno é igual ao sen 25°? 65°

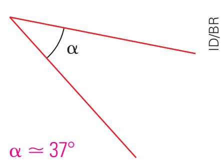
22 Determine as medidas aproximadas dos ângulos θ e α sem usar o transferidor.

a)



$\theta \simeq 49°$

b)



$\alpha \simeq 37°$

23 Construa um triângulo retângulo com um ângulo de 32°.

a) Determine o seno, o cosseno e a tangente desse ângulo. $\text{sen}\ 32° \simeq 0{,}53$; $\cos 32° \simeq 0{,}85$; $\text{tg}\ 32° \simeq 0{,}62$

b) O mesmo triângulo permite determinar as razões de outro ângulo? Se sim, como? Sim; $\text{sen}\ \alpha = \cos(90° - \alpha)$ ou $\cos \alpha = \text{sen}\ (90° - \alpha)$.

c) Se sua resposta para o item **b** for "sim", indique o seno e o cosseno desse ângulo. $\cos 58° \simeq 0{,}53$; $\text{sen}\ 58° \simeq 0{,}85$

24 Responda às questões.

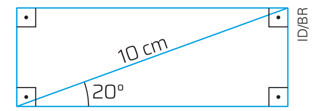
a) Um avião levanta voo formando um ângulo de 20° com o solo. Depois de percorrer 1000 m, que altura ele atinge? 342 m.

b) E ao final de 1500 m? 513 m.

c) O piloto deseja atingir uma altura superior a 700 m ao final de 2000 m de percurso. Para isso, ele terá de levantar voo com um ângulo superior ou inferior a 20°? Superior.

d) Elabore mais duas perguntas para esse problema: uma que envolva altitude e outra que envolva o ângulo que o avião faz com o solo quando levanta voo. Resposta pessoal.

25 A diagonal de um retângulo mede 10 cm e forma um ângulo de 20° com a base dessa figura.



a) Quanto mede a base do retângulo? Aproximadamente 9,4 cm.

b) Obtenha a altura do retângulo por dois processos diferentes. Aproximadamente 3,4 cm.

c) Qual é a medida do ângulo que a diagonal forma com a altura? 70°

26. Consulte as respostas dos itens **a** e **b** no Manual do Professor.

26 Desenhe uma semicircunferência com 10 cm de raio.

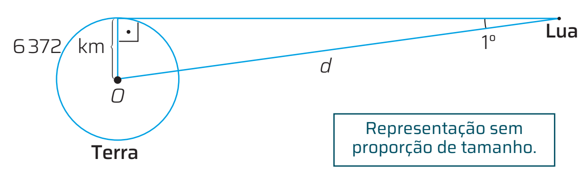
a) Use um transferidor e marque na semicircunferência ângulos de 10 em 10 graus até 90°.

b) Meça os segmentos que achar necessário e construa um quadro de senos, cossenos e tangentes para os ângulos que você marcou.

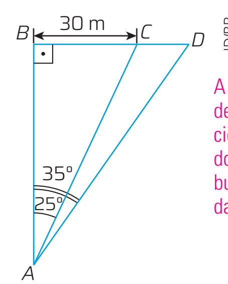
c) Compare os valores que você obteve com os valores que aparecem na tabela da página 286. A que conclusão você chegou?

Os valores são parecidos; os da tabela são mais precisos, com mais casas decimais.

27 O esquema a seguir representa a distância entre a Terra e a Lua. Calcule essa distância com base nos dados da figura. Aproximadamente 365 157 km.

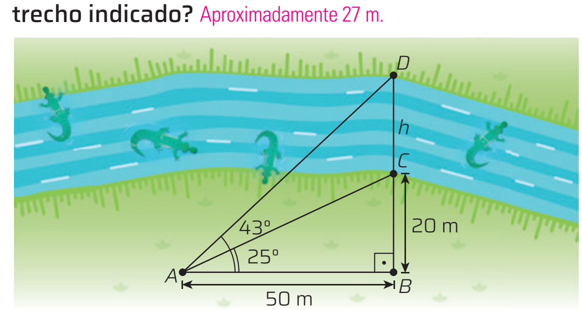


28 As indicações dadas pela figura permitem calcular a distância CD? Em caso afirmativo, qual é essa distância? Sim. $CD \simeq 15$ m.



A atividade **26** incentiva o desenvolvimento da capacidade de argumentação dos estudantes, contribuindo para a aquisição da competência geral **7**.

29 Uma ponte passando por $\overline{BD}$ vai ser construída sobre um rio. As margens desse rio são inacessíveis (estão infestadas de jacarés). Os pontos C e D são vistos a partir dos pontos A e B. Qual é a largura do rio no trecho indicado? Aproximadamente 27 m.



Na discussão do item **d** da atividade **24**, peça aos estudantes que socializem suas perguntas com a classe, para que todos analisem e resolvam os novos problemas apresentados, propiciando o diálogo e contribuindo para a aquisição da competência geral **9**. Momentos como esse possibilitam aos estudantes exercitar a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.

A produção dos estudantes nas atividades **32** e **33** pode ser usada para avaliação de conhecimentos adquiridos e identificação do que precisa ser retomado.

30 Escreva a alternativa correta no caderno.

(UFPA) Considere as seguintes informações:

- De dois pontos A e B, localizados na mesma margem de um rio, avista-se um ponto C, de difícil acesso, localizado na margem oposta.
- Sabe-se que B está distante 1 000 metros de A.
- Com o auxílio de um teodolito (aparelho usado para medir ângulos), foram obtidas as seguintes medidas: $B\hat{A}C = 30°$ e $A\hat{B}C = 80°$.

Deseja-se construir uma ponte sobre o rio, unindo o ponto C a um ponto D entre A e B, de modo que seu comprimento seja mínimo. Podemos afirmar que o comprimento da ponte será de aproximadamente: Alternativa **a**.

a) 524 metros.
b) 532 metros.
c) 1 048 metros.
d) 500 metros.
e) 477 metros.

(Dados: Considere sen 80° = 0,985; sen 70° = 0,940; cos 80° = 0,174; cos 70° = 0,340.)

31 **Uma construtora está asfaltando uma estrada que tem um declive de 9%, isto é, a cada 100 m na horizontal, a estrada desce 9 m. Qual é o ângulo de inclinação dessa estrada?** Aproximadamente 5°.

32 **Uma loja pretende colocar uma escada rolante para dar acesso ao primeiro andar. Sabe-se que a altura da escada terá de ser 7 m. Com base nessas informações, elabore uma pergunta que envolva a altura e o comprimento da escada.** Resposta pessoal.

33 **Crie um problema cuja resolução necessite do uso da tabela trigonométrica.** Resposta pessoal.

A leitura do texto "Como medir ângulos" contribui para a aquisição da competência geral **1**, valorizando conhecimentos sobre o mundo físico que permitem entender e explicar a realidade.
Na seção *Matemática e topografia*, do próximo capítulo, o assunto sobre medidas de distâncias inacessíveis sem realizar medição direta, assim como as medições que são feitas por topógrafos e engenheiros, será retomado e ampliado.

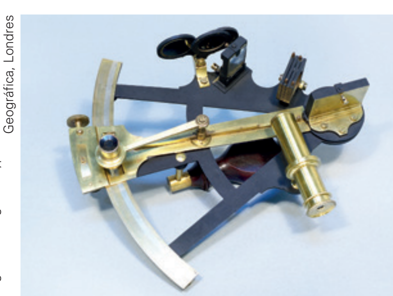
Como medir ângulos

Para medir ângulos em terrenos ou construções, topógrafos e engenheiros utilizam aparelhos que oferecem grande precisão – os **teodolitos**.

Inventados no século XIX pelo italiano Ignacio Porro (1801-1875), esses aparelhos, hoje modernizados, são constituídos fundamentalmente por um óculo (instrumento provido de lentes para ampliar a visão) que se move horizontal e verticalmente, permitindo a leitura de ângulos em dois discos (ou limbos), devidamente graduados e protegidos.

Mas nem sempre foi assim. Ao longo dos séculos, outros aparelhos mais simples foram usados, como os **astrolábios** e os **sextantes** na navegação marítima, para determinar medidas angulares relativas aos astros.


Museu Marítimo Nacional, Londres. Fotografia: Bridgeman Images/Easy Mediabank
Astrolábio europeu do século XIV.


Bridgeman Images/easypix Brasil-Real Sociedade Geográfica, Londres
Sextante do século XIX.


Dmitry Kalinovsky/Shutterstock.c
Profissional usando teodolito.

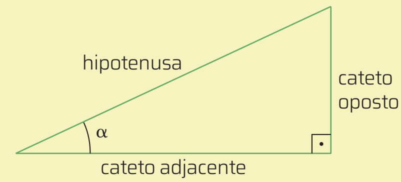
Nos séculos XVII e XVIII, os trabalhos de topografia ainda eram feitos com aparelhos muito rudimentares, como o **grafômetro**, pouco mais que um transferidor graduado, fixo a uma régua e a uma base, como se vê na imagem ao lado.

O **transferidor** também é um sistema simples e improvisado de determinação de ângulos. Com ele, porém, não é possível alcançar o rigor dos teodolitos, necessário para o traçado de um túnel ou de uma estrada ou para o levantamento cartográfico de uma região.


De Agostini/Easy Mediabank
Grafômetro do século XIX.

CÁLCULO RÁPIDO

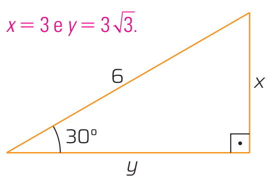
Alguns ângulos, como os de 30° e de 60°, aparecem constantemente em situações-problema. Memorizar os valores do seno e do cosseno desses ângulos pode auxiliar bastante; por isso, lembre-se:



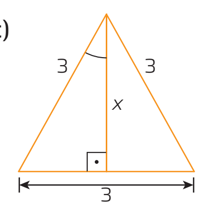
- $\text{sen } 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$
- $\cos 30° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Se $\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$, então: medida do cateto oposto = medida da hipotenusa · sen α
- Se $\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$, então: medida do cateto adjacente = medida da hipotenusa · cos α

1 Use essas informações para calcular rapidamente os valores de x e de y em cada situação.

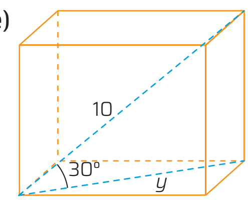
a) $x = 3$ e $y = 3\sqrt{3}$.



c) $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

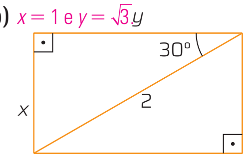


e)

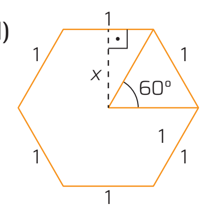


$x = 5$ e $y = 5\sqrt{3}$.

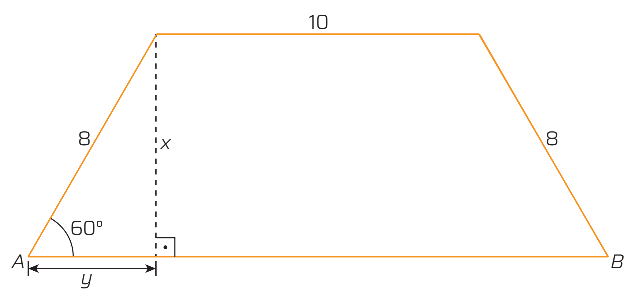
b) $x = 1$ e $y = \sqrt{3}y$



d) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



2 Calcule os valores de x, y e AB.



$x = 4\sqrt{3}$; $y = 4$; $AB = 18$

PARA RECORDAR

1 Com azulejos brancos e amarelos foi construída a figura **1** e, com ela, foi composta uma faixa, etapa por etapa, formando em sequência as figuras **2**, **3** e assim por diante. Quantos azulejos brancos e amarelos terá a faixa completa que corresponde à figura **50** dessa sequência?

350 azulejos amarelos e 650 azulejos brancos.

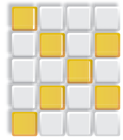


Figura 1

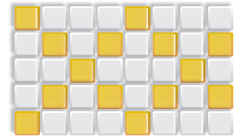


Figura 2

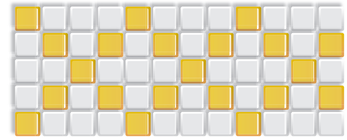


Figura 3

Ilustrações: ID/BR

2 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Enem) Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio.

Quantos alunos compraram somente um bilhete? Alternativa **d**.

a) 34 b) 42 c) 47 d) 48 e) 79

3 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Uma torneira está gotejando água em um balde com capacidade de 18 litros. No instante atual, o balde se encontra com ocupação de 50% de sua capacidade. A cada segundo caem 5 gotas de água da torneira, e uma gota é formada, em média, por 5×10^{-2} mL de água.

Quanto tempo, em hora, será necessário para encher completamente o balde, partindo do instante atual? Alternativa **b**.

a) 2×10^{1}

b) 1×10^{1}

c) 2×10^{-2}

d) 1×10^{-2}

e) 1×10^{-3}

1. FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Passo a passo	Jarro com 8 litros	Jarro com 5 litros	Jarro com 3 litros
Início	Cheio	Vazio	Vazio
Do 1º para o 2º jarro	3	5	Vazio
Do 2º para o 3º jarro	3	2	3
Do 3º para o 1º jarro	6	2	Vazio
Do 2º para o 3º jarro	6	Vazio	2
Do 1º para o 2º jarro	1	5	2
Do 2º para o 3º jarro	1	4	3
Juntando o 1º e o 3º jarros (fim)	4	4	Vazio

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Os dois problemas propostos exigem que você faça algum tipo de registro, como desenho, esquema, lista ou tabela. Verifique como esse registro, independentemente de qual for, é um importante apoio ao seu pensamento. Depois, compare com os registros dos colegas. Isso pode ampliar seu repertório de maneiras de registrar e de pensar.

1 **Catarina e Gustavo precisavam dividir igualmente 8 litros de leite que estavam em um jarro, mas eles tinham apenas outros dois jarros sem marcas: em um deles cabiam exatamente 3 litros e, em outro, 5 litros. Como eles conseguiram dividir o leite entre eles?**

2 **Mariana, Daniele, Rita e Júlia trabalham no município de Curitiba como arquiteta, empreiteira, farmacêutica e professora, não necessariamente nessa ordem. Leia as informações a seguir e descubra qual é a ocupação de cada uma delas.**

- A farmacêutica ganha exatamente duas vezes o que a professora ganha.
- A arquiteta ganha exatamente duas vezes o que a farmacêutica ganha.
- A empreiteira ganha exatamente duas vezes o que a arquiteta ganha.
- Embora Mariana tenha mais idade que qualquer pessoa que ganhe mais dinheiro que a Daniele, esta não ganha duas vezes o que a Mariana ganha.
- Júlia ganha, exatamente, R$ 3 776,00 mais que a Rita. Mariana: farmacêutica; Daniele: empreiteira; Rita: professora; Júlia: arquiteta.

Os conhecimentos deste capítulo são básicos para o estudo e a aprendizagem dos capítulos restantes da unidade. Por isso, é importante analisar essa produção dos estudantes para identificar a necessidade de retomada de conteúdos individualmente ou com a turma toda.

PALAVRAS-CHAVE

Este capítulo merece ser registrado com muito cuidado porque traz informações essenciais para o capítulo seguinte e para a continuação do estudo de Trigonometria. Explique os termos a seguir usando desenhos, textos e exemplos.

- Triângulo retângulo
- Seno
- Cosseno
- Tangente
- Tabela trigonométrica

Verifique se é necessário reler o texto do livro ou tirar dúvidas com o professor.

MATEMÁTICA E PAPIRO DE RHIND

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **3** e **4** propostas pela BNCC ao utilizar os conhecimentos historicamente construídos para exercitar a curiosidade, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções. Também possibilita um trabalho integrado com os professores de História e Geografia, a fim de mobilizar a competência específica **1** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Além disso, a seção explora os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Multiculturalismo. Convide um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para participar das discussões; assim, ele poderá contribuir para a aprendizagem dos estudantes, fornecendo o contexto e o aprofundamento necessários a respeito da relevância do estudo de documentos históricos para a construção de conhecimentos, além de falar sobre registros da matemática na Antiguidade, feitos em papiros.

O problema 56

Garantir que as “paredes” de uma pirâmide tivessem inclinação correta era fundamental em sua construção. Já imaginou o desastre que aqueles enormes blocos de pedra causariam ao desmoronar por causa de um erro de cálculo?

Curadores do Museu Britânico, Londres. Fotografia: Art Collection 2/Alamy/Fotoarena

Fragmento do papiro de Rhind mantido no Museu Britânico, em Londres, Reino Unido, especificamente no departamento do Egito Antigo e Sudão.

Oshi/iStock/Getty Images

O complexo formado por três pirâmides em Gizé, no Egito, é bastante visitado por turistas do mundo todo. A maior delas, conhecida como Grande Pirâmide de Gizé, foi dedicada ao antigo faraó Quéops, que viveu no século XXVI a.C. Foto de 2023.

Portanto, é fácil admitir o quanto a Matemática era importante para a sociedade egípcia. Tanto que, entre os seus antigos escritos preservados, chama a atenção o papiro de Rhind, também conhecido como papiro de Amósis (ou Ahmes). Esse papiro, datado de 1650 a.C., é atribuído ao escriba Amósis e traz a descrição de dezenas de problemas matemáticos. Um deles é o problema 56, que trata de uma relação trigonométrica.

Para saber mais sobre esse tema, leia o trecho a seguir.

Problemas de inclinação

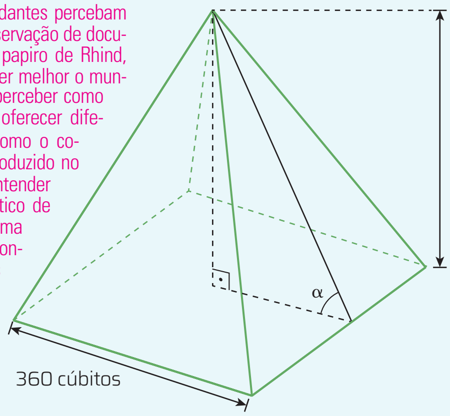
Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa preocupação que levou os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo. Na tecnologia moderna, é usual medir o grau de inclinação de uma reta por uma razão entre segmentos verticais e horizontais que é recíproca da usada costumeiramente no Egito. A palavra egípcia *seqt* significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura. O *seqt* correspondia assim, exceto quanto a unidades de medida, ao termo usado hoje pelos arquitetos para indicar a inclinação de uma parede. A unidade de comprimento vertical era o cúbito; mas para medir a distância horizontal a unidade usada era a “mão”, das quais havia sete em um cúbito. Portanto, o *seqt* da face de uma pirâmide era o quociente do afastamento horizontal pelo vertical, o primeiro medido em mãos, o segundo, em cúbitos.

No Problema 56 do Papiro de Ahmes, pede-se o *seqt* de uma pirâmide que tem 250 cúbitos (ou *ells*) de altura e uma base quadrada com lado de 360 cúbitos. O escriba começa dividindo 360 por 2, depois divide o resultado por 250, obtendo $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$. Multiplicando o resultado por 7, deu o resultado de $5\frac{1}{25}$ em mãos por cúbitos. Em outros problemas sobre pirâmides no Papiro de Ahmes, o *seqt* dá $5\frac{1}{4}$, o que está um pouco mais de acordo com o da grande Pirâmide de Quéops, com lado de base 440 cúbitos e altura 280, o *seqt* sendo $5\frac{1}{2}$ mãos por cúbito.

Boyer, Carl B.; Merzbach, Uta C. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. p. 36.

Fazendo uma aproximação com o atual estudo da Trigonometria, podemos dizer que o problema 56 busca determinar a medida da cotangente do ângulo formado entre qualquer face da pirâmide e sua base. Para isso, Amósis constrói um triângulo retângulo, como o representado a seguir.

2. Espera-se que os estudantes percebam que a descoberta e a preservação de documentos antigos, como o papiro de Rhind, nos ajudam a compreender melhor o mundo em que vivemos e a perceber como chegamos até aqui, por oferecer diferentes perspectivas de como o conhecimento humano é produzido no decorrer dos tempos. Entender o conhecimento matemático de sociedades antigas é uma maneira de identificar o contexto em que os saberes desses povos afloraram, observando que um tipo muito semelhante de conhecimento pode surgir em lugares e épocas diferentes e por diversas razões.



ID/BR

Cotangente

O termo "cotangente" significa "tangente do complemento" e é definida para ângulos cuja medida da tangente é diferente de zero. Para calcular a medida da cotangente de um ângulo, basta calcular o inverso da medida de sua tangente. Podemos também definir a cotangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo como sendo a razão entre a medida do cateto adjacente a este pela medida do seu cateto oposto.

Com base nisso, ele conseguiu calcular a medida de *seqt*, a cotangente do ângulo α, utilizando a Trigonometria no triângulo retângulo, ou algo muito próximo a isso, com a medida da altura da pirâmide e de metade da medida do comprimento do lado da base. Atualmente, podemos calcular, com aproximação muito boa, o valor que Amósis aproximou para $5\frac{1}{2}$ em mãos por cúbito.

Conectando ideias

1 **Em grupos, busquem entender a Trigonometria presente no texto citado. Para isso, desenhem um triângulo retângulo e coloquem na figura os dados sobre a pirâmide do problema 56.**

Notem que é preciso ajustar as unidades, os cúbitos e as mãos para obter o *seqt* da pirâmide.

a) Calculem o *seqt* com os dados do problema 56 e confiram se o resultado coincide com o apresentado no texto. $5\frac{1}{25}$

b) No Egito Antigo, apenas as frações de numerador igual a 1 eram utilizadas; por isso, o resultado foi escrito na forma $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$. Expliquem como esse valor era obtido. $\frac{18}{25} - \frac{1}{2} = \frac{36}{50} - \frac{25}{30} = \frac{11}{50} = \frac{10}{50} + \frac{1}{50} = \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$

c) Que relação existe entre o *seqt* do Egito Antigo e as razões trigonométricas que vocês estudaram neste capítulo? $\text{tg}\,\hat{B} = \frac{1}{seqt}$

2 **O continente africano é identificado como o berço da Matemática por abrigar sociedades como a do Egito Antigo, que produziram os primeiros conhecimentos dessa área, muitas vezes relacionados à própria cultura, e que tiveram grande impacto para seu desenvolvimento.**

<u>O acesso ao conhecimento matemático preservado em documentos antigos é importante para a compreensão do mundo em que vivemos?</u>

- Em grupos de cinco integrantes, pesquisem a descoberta e a preservação de documentos históricos de modo geral e, especialmente, de documentos antigos relacionados ao desenvolvimento da Matemática.
- Anotem as suas observações, buscando entender o contexto sociopolítico e cultural dos povos antigos e de que maneira a região de produção do conhecimento, a linguagem utilizada e o contexto da época contribuíram para o avanço dos estudos da Matemática.
- Em um dia previamente definido, façam uma apresentação dos resultados da pesquisa. Resposta pessoal.

Davi Augusto/ID/BR

CAPÍTULO 7

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

NESTE CAPÍTULO

- Razões trigonométricas de ângulos obtusos
- Lei dos senos
- Teorema da área
- Lei dos cossenos

Este capítulo trabalha as razões trigonométricas para ângulos maiores que o ângulo reto. Os estudantes terão acesso a ferramentas importantes para modelar e resolver situações-problema que envolvam ângulos e medidas em triângulos quaisquer, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**. A situação inicial abordada neste tópico permite o trabalho interdisciplinar com História, ao explorar a evolução de instrumentos de medição, e com Geografia, não só ao apresentar a profissão de topógrafo, mas também ao explorar mapas de relevo.

Desde a Antiguidade, egípcios, chineses, gregos, árabes, romanos e babilônios já utilizavam diversos instrumentos que, embora bastante rudimentares, serviam para delimitar propriedades, traçar rotas comerciais e erguer construções.

Com as invenções da luneta astronômica pelo astrônomo alemão Kepler (1571-1630), do barômetro pelo italiano Torricelli (1608-1647), do cronômetro marítimo pelo britânico John Harrison (1693-1776), e, principalmente, com a construção dos primeiros teodolitos a partir do século XVI, foi possível medir com precisão ângulos horizontais e ângulos verticais.

A invenção do GPS (sigla para *global positioning system*) em 1972 (popularizado, no Brasil, por volta dos anos 2000) revolucionou os métodos da **topografia**, permitindo determinar posições estáticas ou em movimento com mais rapidez e precisão.

Mais recentemente, o uso de diversas tecnologias, incluindo o uso de *drones*, facilitou ainda mais a captura de imagens que auxiliam o topógrafo em suas atividades profissionais.

Descrever e representar graficamente o relevo e as características de uma localidade são algumas das tarefas realizadas por um topógrafo.

Observe a seguir uma representação tridimensional de mapa topográfico do mundo, destacando diferentes relevos.

FrankRamspott/iStock/Getty Images

Representação tridimensional e sem escala do relevo terrestre.

PARA EXPLORAR

Textos

PEREIRA, Natalia. Topógrafo: saiba o que faz esse profissional e as oportunidades de trabalho. *Vai de Conteúdo*, [*s. l.*], 30 ago. 2023. Disponível em: https://vaidebolsa.com.br/blog/mercado-de-trabalho/topografo/. Acesso em: 20 ago. 2024.

Esse texto apresenta detalhes sobre as atividades desempenhadas por um topógrafo.

FORTUNATO, José Carlos. Artigo: comparação entre topografia com drones × topografia tradicional. *MundoGeo*, [*s. l.*], 26 jun. 2018. Disponível em: https://mundogeo.com/2018/06/26/artigo-comparacao-entre-topografia-com-drones-x-topografia-tradicional/. Acesso em: 20 ago. 2024.

Nesse artigo, são detalhados os recursos tecnológicos utilizados em levantamentos planialtimétricos.

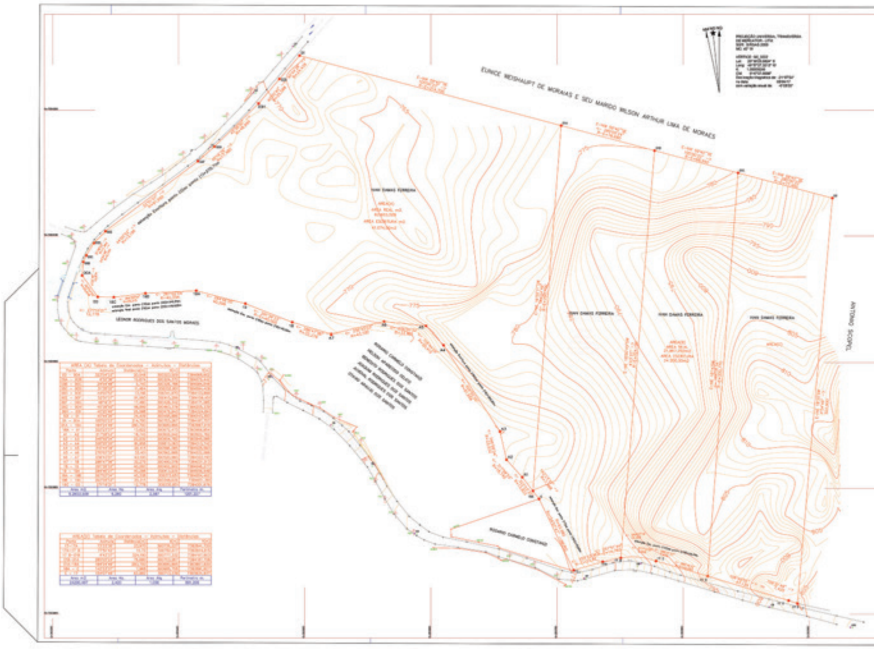
Hoje, o levantamento topográfico de uma localidade registra a posição dos pontos com coordenadas *x* e *y* e a altitude de cada ponto. O resultado é chamado de levantamento planialtimétrico.

Observe, nas imagens a seguir, a vista aérea de uma região e essa mesma região representada em um levantamento planialtimétrico.

Mostrar aos estudantes o avanço tecnológico relacionado a medições contribui para o desenvolvimento da competência geral **1**.

Google Earth/Google Images

Imagem de satélite de uma região em Cotia (SP). Imagem de 2020.



Graw Topografia Agrimensura Geodésica/Acervo do cedente

Mapa de levantamento topográfico de uma região em Cotia (SP).

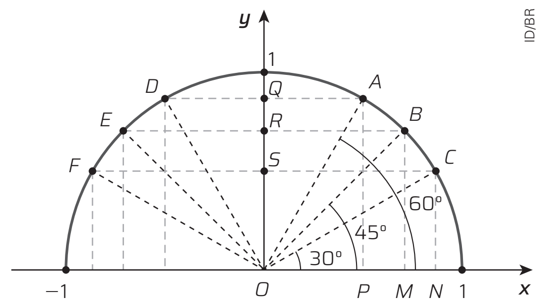
Neste capítulo, vamos estender a outros tipos de triângulo a possibilidade de relacionar medidas de lados e ângulos, o que permitirá entender como são feitas as medições de distâncias, sejam as realizadas por topógrafos, sejam as que estão presentes na programação de aplicativos, como o GPS e os mapas de localização.

Incentive os estudantes a ler os textos indicados no boxe *Para explorar*. Em seguida, proponha uma discussão sobre a profissão de topógrafo e a importância desse profissional em nossa sociedade. Valorize o conhecimento prévio dos estudantes sobre esse tema e também sobre o uso de *drones* e o potencial dessa tecnologia. Essa proposta contribui para o desenvolvimento da competência geral **6** e possibilita um trabalho com culturas juvenis ao integrar temas como *drones* e tecnologias similares, que são relevantes para os jovens atualmente.

Proponha aos estudantes que leiam individualmente este tópico e listem suas dúvidas. Em seguida, converse com eles a respeito do que aprenderam e das dúvidas que tiveram. A compreensão do raciocínio empregado neste tópico permite a extensão das razões para ângulos obtusos, o que facilitará, no momento adequado, o entendimento do ciclo trigonométrico e a definição das funções trigonométricas no plano cartesiano.

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE ÂNGULOS OBTUSOS

No plano cartesiano a seguir, foi traçada uma semicircunferência de raio 1 e centro na origem. Nela, foram marcados os pontos A, B e C e os pontos D, E e F, que são, respectivamente, simétricos aos pontos A, B e C em relação ao eixo Oy.



ID/BR

Observe o ponto A, cuja posição na semicircunferência determina o ângulo central $A\hat{O}P$ de medida 60º.

Nos eixos coordenados, temos:

$$\cos 60° = \frac{OP}{OA} \qquad \text{e} \qquad \text{sen } 60° = \frac{AP}{OA}$$

Como $OA = 1$, podemos escrever:

$$OP = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad OQ = AP = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para os pontos B e C, que determinam, respectivamente, ângulos centrais de 45° e de 30°, também podemos associar as medidas dos segmentos nos eixos às razões trigonométricas desses ângulos.

Ponto B

$$OM = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$OR = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ponto C

$$ON = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$OS = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

A partir do plano cartesiano, podemos associar cada ângulo a um ponto da semicircunferência e obter nos eixos os valores do cosseno e do seno desse ângulo. Na Figura **1**, temos:

- $OA = 1$
- $OP = \cos \alpha$
- $OQ = \text{sen } \alpha$
- (P, Q): coordenadas cartesianas do ponto A

Desse modo, podemos estender os conceitos de seno e de cosseno para os ângulos reto e nulo. Verifique que, na figura **2**, temos:

- $A(0, 1)$
  sen 90° = 1
  cos 90° = 0
- $B(1, 0)$
  sen 0° = 0
  cos 0° = 1

Para ângulos obtusos, podemos obter os valores de seno e de cosseno da mesma forma. Na figura **3**, temos:

- $(-OP, OQ)$: coordenadas cartesianas do ponto A
- $OQ = \text{sen } \alpha$
- $-OP = \cos \alpha$

Além disso, para o ângulo raso, temos:

- sen 180° = 0
- cos 180° = −1

Ilustrações: ID/BR

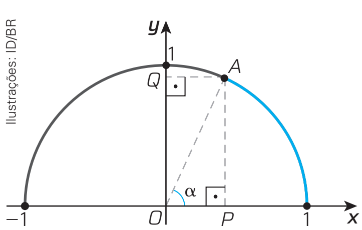


Figura 1

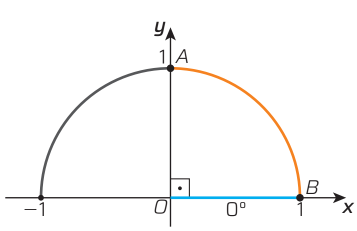


Figura 2

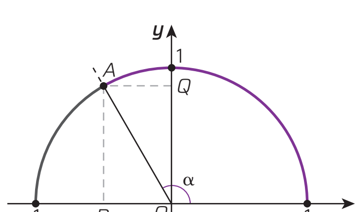
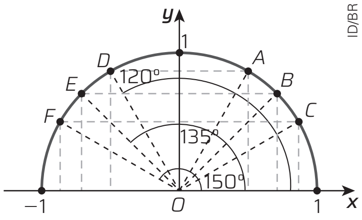


Figura 3

Não escreva no livro.

Considerando novamente a semicircunferência de raio 1 e centro na origem, observe que o ponto *D* corresponde ao ponto *A*, o ponto *B* corresponde ao ponto *E* e o ponto *C* corresponde ao ponto *F*.



Desse modo, podemos relacionar as razões trigonométricas correspondentes a esses pontos.

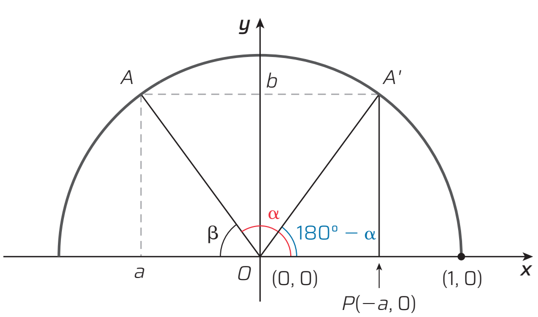
- Como o ponto *D* determina o ângulo de 120° com coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, temos que $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ e $\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- As coordenadas do ponto *E* são $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, e ele determina o ângulo de 135°. Assim, $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{sen } 135° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- O ponto *F* determina o ângulo de 150° com coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Logo, $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$.

Na semicircunferência do plano cartesiano, podemos provar uma propriedade importante para ângulos suplementares.

Se $\alpha + \beta = 180°$ (ou seja, $\beta = 180° - \alpha$), então:

- $\text{sen } \alpha = \text{sen } (180° - \alpha)$
- $\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)$

Considere a figura a seguir e observe que essa propriedade pode ser justificada pela simetria dos pontos *A* e *A'* em relação ao eixo *Oy*.



Para manter a relação existente entre tangente, seno e cosseno de ângulos agudos, definimos a tangente de um ângulo obtuso como:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Assim, por exemplo:

- para $\alpha = 120°$, temos:

$$\text{tg } 120° = \frac{\text{sen } (180° - 120°)}{-\cos (180° - 120°)}$$

$$\text{tg } 120° = \frac{\text{sen } 60°}{-\cos 60°}$$

$$\text{tg } 120° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{tg } 120° = -\sqrt{3}$$

- para $\alpha = 135°$, temos:

$$\text{tg } 135° = \frac{\text{sen } (180° - 135°)}{-\cos (180° - 135°)}$$

$$\text{tg } 135° = \frac{\text{sen } 45°}{-\cos 45°}$$

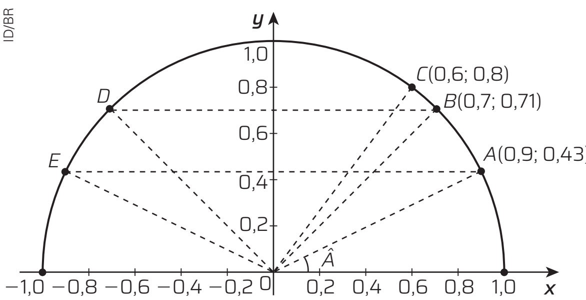
$$\text{tg } 135° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\text{tg } 135° = -1$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 No plano cartesiano a seguir, foi traçada uma semicircunferência de raio 1 e centro na origem. Nela, foram marcados os pontos *A*, *B* e *C* e os pontos *D* e *E*, que são, respectivamente, simétricos aos pontos *B* e *A* em relação ao eixo *Oy*. Calcule os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos correspondentes aos pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*. Consulte a resposta na página 159.

ID/BR



2 Sendo sen 37° ≃ 0,60182 e cos 37° ≃ 0,79864, calcule o valor aproximado de:

a) sen 143° sen 143° ≃ 0,60182

b) tg 143° tg 143° ≃ −0,75356

3 Calcule o valor aproximado das razões trigonométricas indicadas em cada item, sabendo que:

sen 39° ≃ 0,63	cos 16° ≃ 0,96
sen 53° ≃ 0,80	cos 67° ≃ 0,39
sen 75° ≃ 0,97	cos 88° ≃ 0,03

a) sen 141° aproximadamente 0,63

b) sen 127° aproximadamente 0,80

c) sen 105° aproximadamente 0,97

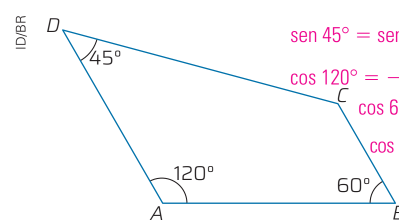
d) cos 164° aproximadamente −0,96

e) cos 113° aproximadamente −0,39

f) cos 92° aproximadamente −0,03

4 Calcule o seno e o cosseno dos quatro ângulos internos do quadrilátero *ABCD*.

ID/BR



$\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{sen } 45° = \text{sen } 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ e $\cos 60° = \frac{1}{2}$; $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

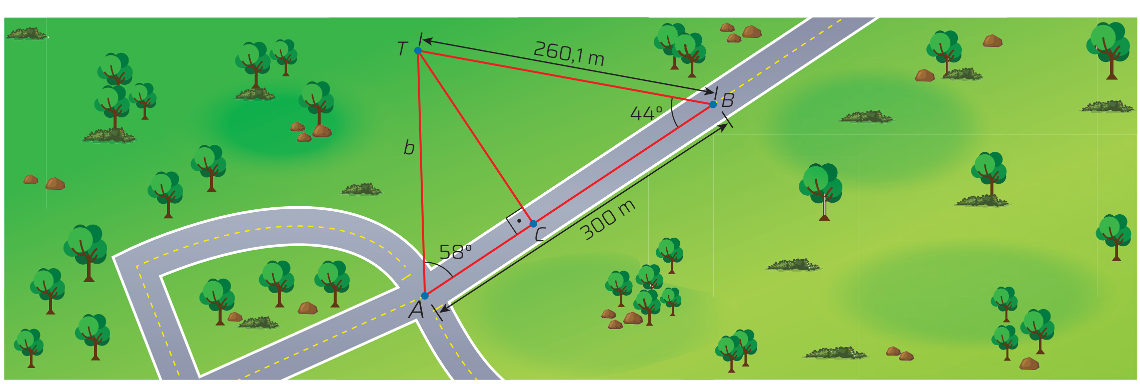
LEI DOS SENOS OU TEOREMA DOS SENOS

Muitos dos problemas trigonométricos envolvem triângulos em sua resolução. Já vimos como resolver problemas de trigonometria usando triângulos retângulos e, agora, vamos estudar os que envolvem triângulos acutângulos ou obtusângulos.

Você lembra qual é a diferença entre esses tipos de triângulo? Um triângulo acutângulo tem todos os ângulos agudos e um triângulo obtusângulo tem apenas um de seus ângulos obtuso.

Acompanhe a seguir uma situação que propõe um problema que envolve triângulo acutângulo.

Um construtor desenhou sobre um mapa um esquema para indicar a localização de um terreno.



ID/BR

Observe que ele representou um ponto *A* no cruzamento de duas estradas e o ponto *B* a 300 m de *A*, na estrada principal.

O ponto *T* pertence ao terreno, e a menor distância entre esse ponto e a estrada principal $\overline{AB}$ corresponde a $\overline{TC}$, que é perpendicular a $\overline{AB}$.

Nesse esquema, podemos identificar três triângulos, *ABT*, *ACT* e *BCT*, sendo que:

- o triângulo *ABT* é acutângulo;
- *ACT* e *BCT* são triângulos retângulos.

Como o construtor deve proceder para calcular as distâncias entre *A* e *T* e entre *T* e *C*?

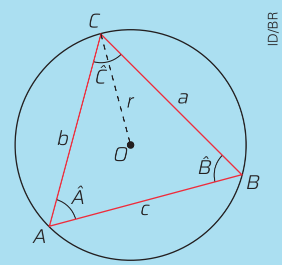
Peça aos estudantes que leiam esta parte do texto e reproduzam os desenhos no caderno para acompanhar a lógica da demonstração.

No esquema, observe que precisamos determinar as medidas de $\overline{TA}$ e de $\overline{TC}$, que são lados do triângulo retângulo *ACT*. Além disso, $\overline{TA}$ é lado do triângulo *ABT* e $\overline{TC}$ é lado do triângulo *BCT*. Como você faria para determinar essas medidas?

Para fazer esses cálculos, vamos estudar a lei dos senos, que diz:

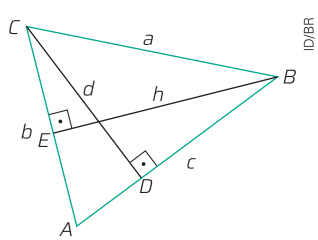
Em todo triângulo, as medidas dos lados *a*, *b* e *c* são proporcionais aos **senos dos ângulos opostos** a cada um deles, e a constante de proporcionalidade é a medida do diâmetro (2*r*) da circunferência circunscrita a esse triângulo.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2r$$



Antes de resolver o problema do construtor, acompanhe a demonstração da lei dos senos para um triângulo acutângulo.

Considere o $\triangle ABC$ acutângulo a seguir e duas de suas alturas, *d* e *h*.



Observe que:

- no triângulo *BCD*, retângulo em *D*, temos $\text{sen}\,\hat{B} = \frac{d}{a}$ e, no triângulo *ACD*, retângulo em *D*, $\text{sen}\,\hat{A} = \frac{d}{b}$. Disso decorre que:

$$d = a \cdot \text{sen}\,\hat{B} \qquad \text{e} \qquad d = b \cdot \text{sen}\,\hat{A}$$

Então:

$$a \cdot \text{sen}\,\hat{B} = b \cdot \text{sen}\,\hat{A} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}$$

- no triângulo *BCE*, retângulo em *E*, temos $\text{sen}\,\hat{C} = \frac{h}{a}$ e, no triângulo *ABE*, retângulo em *E*, $\text{sen}\,\hat{A} = \frac{h}{c}$. Ou seja:

$$h = a \cdot \text{sen}\,\hat{C} \qquad \text{e} \qquad h = c \cdot \text{sen}\,\hat{A}$$

Então:

$$a \cdot \text{sen}\,\hat{C} = c \cdot \text{sen}\,\hat{A} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

Considerando os resultados obtidos, podemos escrever que:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

Agora, falta provar a última parte da igualdade. Então, vamos demonstrar, por exemplo, que $\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2r$.

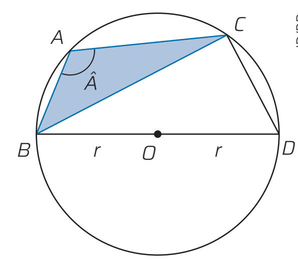
Temos três possibilidades para a abertura do ângulo $\hat{A}$: ele pode ser obtuso, reto ou agudo. Faremos a demonstração considerando $\hat{A}$ obtuso. Para as outras possibilidades, a dedução é análoga e mais simples.

1.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
$\hat{A}$	0,43	0,9	0,48
$\hat{B}$	0,71	0,7	1,01
$\hat{C}$	0,8	0,6	1,33
$\hat{D}$	0,71	−0,7	−1,01
$\hat{E}$	0,43	−0,9	−0,48

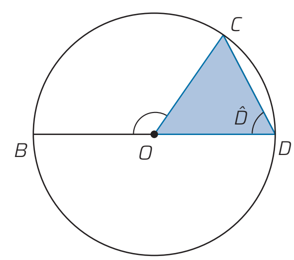
Peça aos estudantes que leiam esta parte do texto e reproduzam os desenhos no caderno para acompanhar a lógica da demonstração.

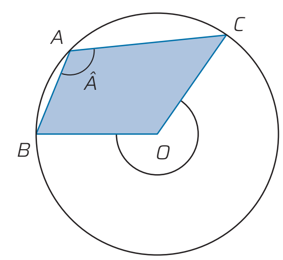
Dados um triângulo ABC, com $\widehat{A}$ obtuso, e uma circunferência circunscrita a esse triângulo, vamos traçar o diâmetro $\overline{BD}$ da circunferência.



ID/BR

A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é a metade da medida do ângulo central correspondente. Assim, temos:





Ilustrações: ID/BR

$\text{med}(\widehat{D}) = \dfrac{\text{med}(B\widehat{O}C)}{2}$ $\qquad$ $\text{med}(\widehat{A}) = \dfrac{360° - \text{med}(B\widehat{O}C)}{2}$

Com base nessas relações, podemos escrever:

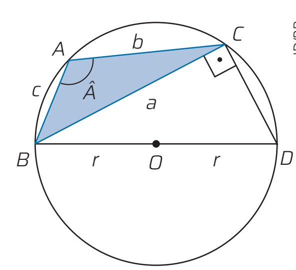
$$\text{med}(\widehat{D}) + \text{med}(\widehat{A}) = \frac{\text{med}(B\widehat{O}C)}{2} + \frac{360° - \text{med}(B\widehat{O}C)}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

Ou seja, $\widehat{D}$ e $\widehat{A}$ são suplementares e podemos concluir que:

$$\text{sen}\,\widehat{A} = \text{sen}\,\widehat{D} \quad (1)$$

Observe na figura a seguir que o triângulo BCD é retângulo em $\widehat{C}$, pois $\text{med}(\widehat{C}) = \dfrac{180°}{2}$. Assim:

$$\text{sen}\,\widehat{D} = \frac{a}{2r}$$



ID/BR

Da igualdade (1), podemos concluir que:

$$\text{sen}\,\widehat{A} = \frac{a}{2r} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = 2r$$

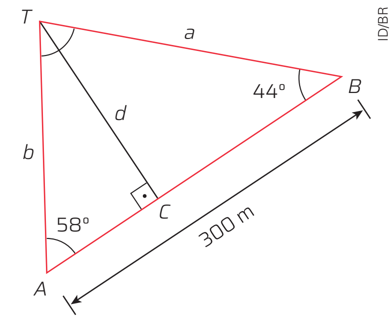
É possível demonstrar que a mesma propriedade vale para os demais lados:

$$\frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = 2r \quad \text{e} \quad \frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} = 2r$$

Portanto:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\widehat{C}} = 2r$$

Agora, vamos resolver o problema do construtor, apresentado no início deste tópico.



No triângulo ABT, temos:

$$\text{med}\left(B\hat{T}A\right) = 180° - 58° - 44° = 78°$$

Com as informações que estão no esquema e com o apoio da tabela trigonométrica com os valores dos senos, que está na página 286, temos:

$$\frac{a}{\text{sen } 58°} = \frac{b}{\text{sen } 44°} = \frac{300}{\text{sen } 78°}$$

$$b = \frac{300 \cdot \text{sen } 44°}{\text{sen } 78°} \Rightarrow b \simeq \frac{300 \cdot 0{,}69466}{0{,}97815} \simeq 213$$

Portanto, a distância do ponto T ao ponto A é de, aproximadamente, 213 m.

Uma vez conhecida a distância entre os pontos A e T, podemos calcular, no triângulo retângulo ATC, a medida do lado $\overline{TC}$.

$$\text{sen } 58° = \frac{d}{b}$$

$$d = b \cdot \text{sen } 58° \Rightarrow d \simeq 213 \cdot 0{,}84805 \Rightarrow d \simeq 181$$

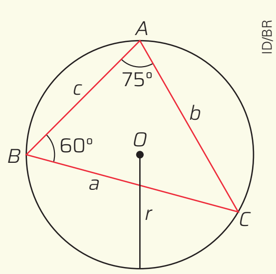
Logo, a menor distância entre o ponto T e a estrada principal que passa por $\overline{AB}$ é, aproximadamente, 181 m.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **Em um triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio r, med$\left(\hat{A}\right) = 75°$, med$\left(\hat{B}\right) = 60°$ e $a = 6\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$ cm. Calcule b, c e r, sabendo que sen $75° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.**

Resolução

Para facilitar a visualização da situação-problema, vamos fazer um esboço do triângulo ABC inscrito em uma circunferência.



De imediato, concluímos que, se med$\left(\hat{A}\right) = 75°$ e med$\left(\hat{B}\right) = 60°$, então med$\left(\hat{C}\right) = 45°$. Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2r$$

$$\frac{6\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}{\text{sen } 75°} = \frac{b}{\text{sen } 60°} = \frac{c}{\text{sen } 45°} = 2r$$

$$\frac{6\cancel{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}}{\dfrac{\cancel{\sqrt{6} + \sqrt{2}}}{4}} = \frac{b}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 2r$$

$$\frac{6}{\dfrac{1}{4}} = \frac{b}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 2r$$

$$24 = \frac{b}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 2r$$

Então:

- $24 = \dfrac{b}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow b = 12\sqrt{3}$
- $24 = \dfrac{c}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow c = 12\sqrt{2}$
- $24 = 2r \Rightarrow r = 12$

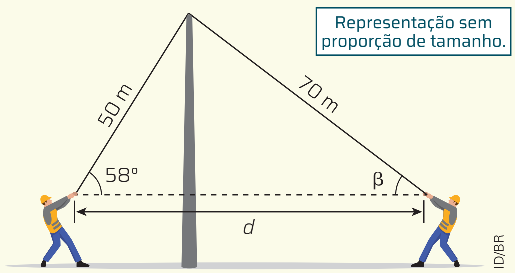
Portanto, o lado b mede $12\sqrt{3}$ cm; o lado c, $12\sqrt{2}$ cm; e o raio r, 12 cm.

Espera-se que os estudantes respondam que, com o esquema, fica mais fácil entender o que o texto informa e, assim, utilizar as ferramentas de Matemática que eles aprenderam.

R2 **Dois operários conseguem manter um poste na posição vertical esticando dois cabos de aço com 50 m e 70 m. Se o cabo mais curto forma um ângulo de 58° com a horizontal, que distância os operários mantêm entre si?**

Resolução

Vamos fazer um esquema da situação.



Por que é importante desenhar um esquema da situação? Converse com os colegas e o professor.

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{50}{\text{sen } \beta} = \frac{70}{\text{sen } 58°} \Rightarrow \text{sen } \beta = \frac{5 \cdot \text{sen } 58°}{7}$$

Consultando a tabela trigonométrica da página 286, encontramos sen 58° ≃ 0,84805. Então:

$$\text{sen } \beta \simeq \frac{5 \cdot 0{,}84805}{7} \simeq 0{,}60575$$

Agora, procuramos na tabela trigonométrica a medida do ângulo cujo seno se aproxime de 0,60575.

Portanto, $\beta \simeq 37°$.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, temos:

$$180° - (58° + 37°) = 85°$$

Então:

$$\frac{d}{\text{sen } 85°} = \frac{70}{\text{sen } 58°} \Rightarrow \frac{d}{0{,}99619} = \frac{70}{0{,}84805} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \simeq 82$$

Portanto, a distância entre os operários é aproximadamente 82 m.

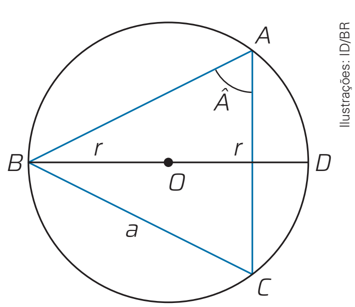
As atividades deste bloco contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**, pois levam os estudantes a aplicar as leis do seno e do cosseno para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

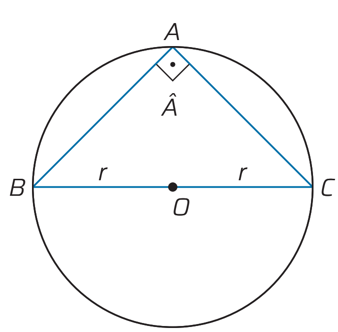
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

5 **Reúna-se com um colega para demonstrar que $\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2r$ no caso de $\hat{A}$ ser agudo ou reto.**

Observem que os desenhos a seguir podem auxiliá-los nessa tarefa.

Consulte a resposta no Manual do Professor.

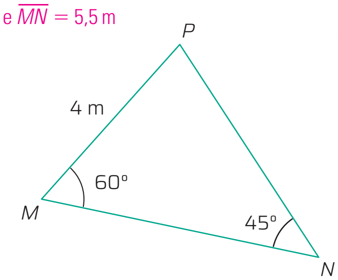




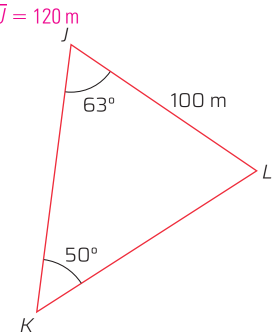
$2r = a$

6 **Considere os triângulos de cada item e determine o que se pede.**

a) Calcule a medida de $\hat{P}$ e a medida de $\overline{MN}$.
$\hat{P} = 75°$ e $\overline{MN} = 5{,}5$ m



b) Calcule as medidas de $\hat{L}$ e de $\overline{KJ}$.
$\hat{L} = 67°$ e $\overline{KJ} = 120$ m



7 **Calcule o comprimento da base de um triângulo isósceles em que os lados iguais medem 20 metros e os ângulos congruentes medem 72°.** 12 m.

Nas atividades **5** e **13**, incentive a troca de conhecimentos e descobertas entre as duplas. Momentos como esses contribuem para a aquisição da competência geral **9**, pois possibilitam aos estudantes praticar a empatia e aprender a respeitar diferentes opiniões.

8 Um triângulo ABC está inscrito em uma circunferência de raio r. Se a corresponde à medida do lado oposto a $\widehat{A}$, calcule:

a) a, dados $r = 6$ e $\text{med}(\widehat{A}) = 30°$. $a = 6\sqrt{6}$

b) r, dados $a = 12$ e $\text{med}(\widehat{A}) = 60°$. $r = 4\sqrt{3}$

9 Para resolver cada item, considere um triângulo ABC, em que a é a medida de $\overline{BC}$, b é a medida de $\overline{AC}$ e c é a medida de $\overline{AB}$. Agora, calcule:

a) a, dados $b = 8$, $\text{med}(\widehat{A}) = 60°$ e $\text{med}(\widehat{B}) = 45°$. $a = 4\sqrt{6}$

b) a e b, dados $\text{med}(\widehat{A}) = 105°$, $\text{med}(\widehat{C}) = 45°$, $c = 10$ e $\text{sen } 105° = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. $b = 5\sqrt{2}$

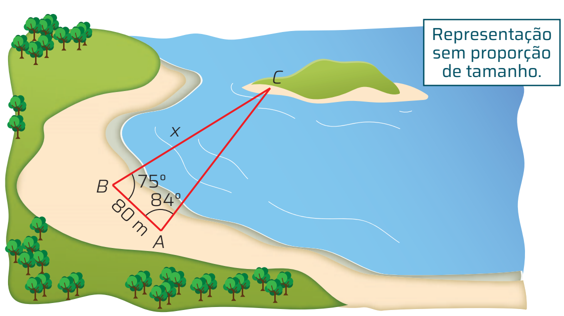
c) $\widehat{C}$, dados $b = \sqrt{2}$, $c = 2$ e $\text{med}(\widehat{B}) = 30°$. $\text{med}(\widehat{C}) = 45°$ ou $\text{med}(\widehat{C}) = 135°$

d) $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$, dados $a = 20\sqrt{3}$, $b = 20$ e $\text{med}(\widehat{B}) = 30°$. $\text{med}(\widehat{A}) = 60°$ e $\text{med}(\widehat{C}) = 90°$ ou $\text{med}(\widehat{A}) = 120°$ e $\text{med}(\widehat{C}) = 30°$

Sugestão: esboçar o triângulo de cada item pode auxiliar na resolução.

10 Analise o esquema a seguir e, com base nele, calcule a distância x entre a praia e a ilha. 224 m.

ID/BR

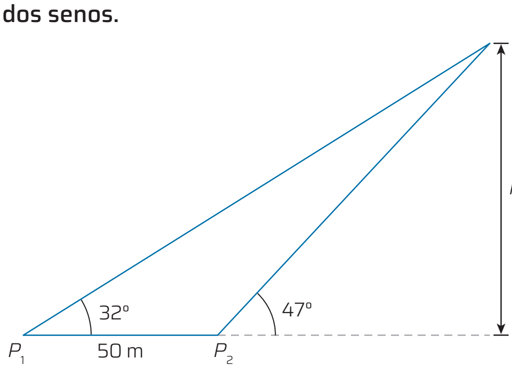


11 Calcule $\widehat{C}$ em um triângulo ABC, sabendo que $\dfrac{a + b}{2c} = \text{sen } \widehat{A} + \text{sen } \widehat{B}$. $\text{med}(\widehat{C}) = 30°$ e $\text{med}(\widehat{C}) = 150°$

12 Considere um triângulo ABC, em que os ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são opostos, respectivamente, aos lados de medidas a, b e c. Mostre que, se $b \cdot \text{sen } \widehat{B} = c \cdot \text{sen } \widehat{C}$, então o triângulo ABC é isósceles.
Consulte a resposta no Manual do Professor.

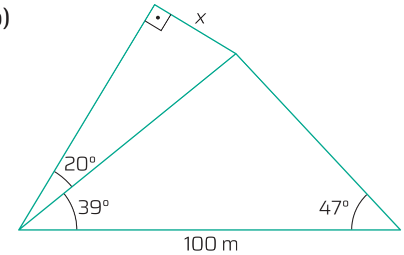
13 Reúna-se com um colega. Com base no que foi visto anteriormente, para cada uma das figuras a seguir elaborem um problema que possa ser resolvido pela lei dos senos.

a)



ID/BR

b)

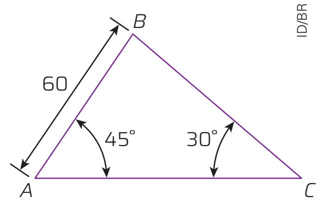


ID/BR

Agora, troquem com outra dupla os problemas que vocês elaboraram. Uma dupla resolve o problema que a outra criou.

14 **Escreva a alternativa correta no caderno.** Alternativa **a**.

(Selecon-MT) Um topógrafo, após algumas medidas realizadas em campo, obteve o triângulo indicado na figura a seguir.



ID/BR

APROXIMAÇÕES
$\sqrt{2} = 1{,}4$
$\sqrt{3} = 1{,}7$
$\sqrt{6} = 2{,}4$

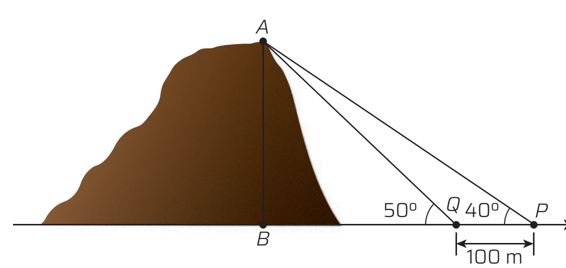
(Dimensões dos elementos lineares em metros)

Considerando as aproximações e as dimensões apresentadas, o lado BC do triângulo mede:

a) 42 m
b) 51 m
c) 72 m
d) 84 m

15 **Registre a alternativa correta no caderno.** Alternativa **d**.

(Uerj) Admita que uma pessoa na posição P avista o ponto A mais alto de um morro sob um ângulo de 40°. Ao caminhar 100 m sobre a reta horizontal PB, até a posição Q, ela avista o mesmo ponto sob o ângulo de 50°. O esquema a seguir representa essa situação, sendo AB a altura do morro em relação à reta horizontal PB.



Uerj. Fac-símile: ID/BR

Considere os seguintes valores das razões trigonométricas:

α	sen α	cos α	tg α
40°	0,64	0,77	0,84
50°	0,77	0,64	1,19

A altura AB, em metros, é igual a:

a) 212,0
b) 224,6
c) 232,0
d) 285,6

Utilize os problemas produzidos pelos estudantes na atividade **13** para avaliar a coerência entre o texto escrito e os desenhos e se a lei dos senos foi usada na resolução dos problemas.

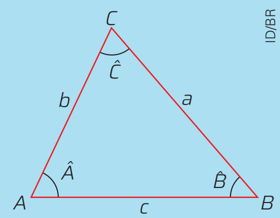
TEOREMA DA ÁREA

Este tópico apresenta mais um método para a obtenção da medida da área de um triângulo, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT307**.

Geralmente, utilizamos as medidas da base e da altura de um triângulo para calcular sua área. Entretanto, há outra maneira de calcular a área de um triângulo qualquer.

A área S de um triângulo qualquer é igual à metade do produto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo formado por esses lados.

O teorema da área nos diz que:



$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen}\,\widehat{A}$$

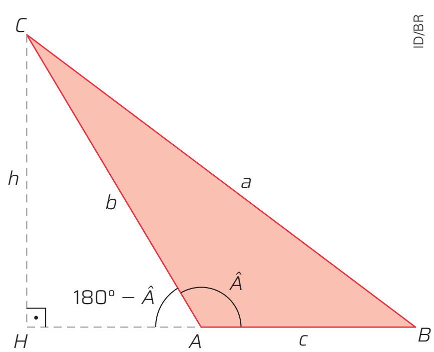
$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \text{sen}\,\widehat{B}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\,\widehat{C}$$

Vamos provar, por exemplo, que $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen}\,\widehat{A}$.

Temos três possibilidades: $\widehat{A}$ é obtuso, $\widehat{A}$ é reto ou $\widehat{A}$ é agudo. Faremos a demonstração da primeira possibilidade, isto é, considerando $\widehat{A}$ obtuso.

Dado o triângulo ABC a seguir, traçamos a altura $\overline{CH}$, de medida h, relativa ao lado $\overline{AB}$.



No triângulo AHC, temos:

$$\underbrace{\text{sen}\left(180° - \widehat{A}\right)}_{\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{h}{b}$$

$$h = b \cdot \text{sen}\,\widehat{A}$$

A área do triângulo ABC é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$$

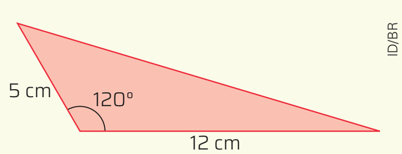
$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

Substituindo h por $b \cdot \text{sen}\,\widehat{A}$ em $S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$, obtemos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen}\,\widehat{A}$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R3 **Calcule a área do triângulo a seguir.**



Resolução

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 \cdot \text{sen}\,120°$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = 15\sqrt{3}$$

Portanto, a área do triângulo é igual a $15\sqrt{3}$ cm².

R4 **Calcule o ângulo formado pelos lados de medidas 6 m e 8 m em um triângulo de área 12 m².**

Resolução

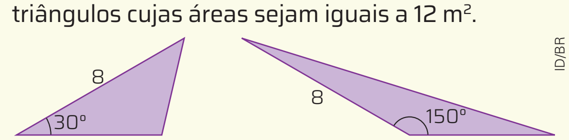
$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \text{sen}\,\alpha$$

$$12 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \text{sen}\,\alpha$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$$

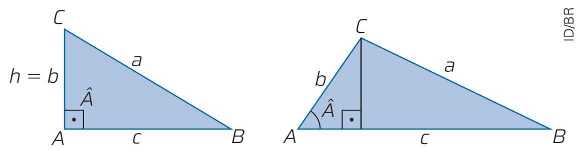
$$\alpha = 30° \text{ ou } \alpha = 150°$$

Isso significa que, nessa situação, é possível ter dois triângulos cujas áreas sejam iguais a 12 m².



PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16 Reúna-se com um colega para provar que o teorema da área também é válido nos casos em que $\widehat{A}$ é reto e $\widehat{A}$ é agudo. Tomem como base os triângulos a seguir. Consulte a resposta no Manual do Professor.



Â é reto   Â é agudo

17 Calcule a área do triângulo indicado em cada item.

a) Os lados de medidas 5 cm e 6 cm formam um ângulo de 60°. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm²

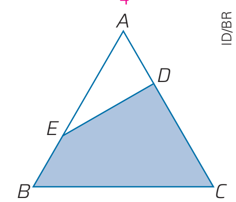
b) Os lados de medidas 4 cm e 7 cm formam um ângulo de 135°. $7\sqrt{2}$ cm²

18 Calcule, em função de *r*, a área de um:

a) hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio *r*; $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$ u.a.

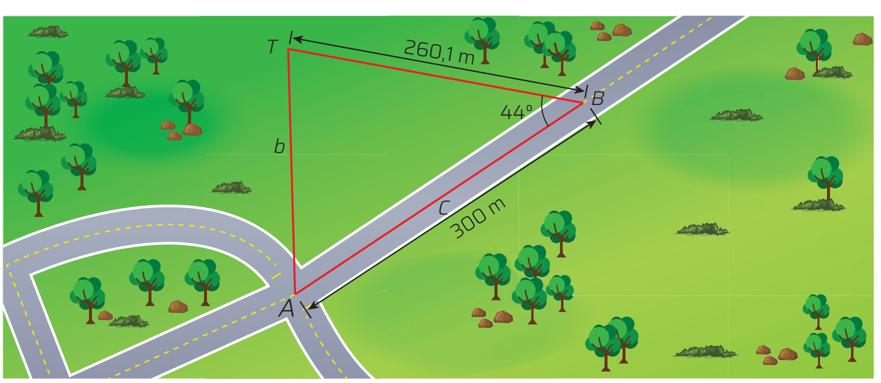
b) octógono regular inscrito em uma circunferência de raio *r*. $2\sqrt{2}\,r^2$ u.a.

19 Na figura a seguir, o $\triangle ABC$ é equilátero com lado de medida 3 cm, $CD = 2$ cm e $BE = 1$ cm. Calcule a área do quadrilátero *BCDE*. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ cm²



LEI DOS COSSENOS OU TEOREMA DOS COSSENOS

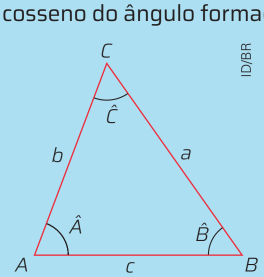
Vamos voltar ao problema do construtor do início do tópico "Lei dos senos ou teorema dos senos" e imaginar que o problema dele seja medir a distância entre o ponto *T* e o ponto *A* e que, por algum motivo, ele não conseguisse medir o ângulo de 58°. Por isso, além de obter o valor do ângulo 44°, ele mediu a distância entre o ponto *T* e o ponto *B*.



Pelo esquema, é possível observar que precisamos determinar a medida de um dos lados do triângulo, conhecendo a medida do ângulo oposto a esse lado e a medida dos outros dois lados.

Para resolver esse problema, precisamos estudar a **lei dos cossenos**.

Em todo triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

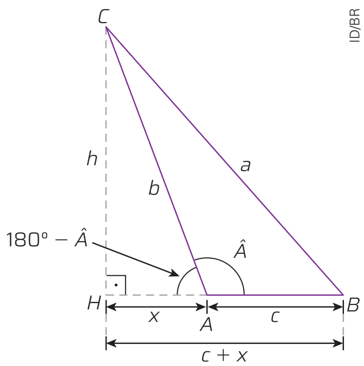


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \widehat{C}$$

Vamos provar, por exemplo, que $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \widehat{A}$.

Temos três possibilidades: $\widehat{A}$ é obtuso, $\widehat{A}$ é reto ou $\widehat{A}$ é agudo. Faremos a demonstração para a primeira possibilidade.

Dado o triângulo ABC a seguir, traçamos a altura $\overline{CH}$, de medida h, relativa ao lado $\overline{AB}$.



No $\triangle AHC$, temos:

$$\underbrace{\cos\left(180° - \widehat{A}\right)}_{-\cos \widehat{A}} = \frac{x}{b}$$

$$x = -b \cdot \cos \widehat{A} \quad (1)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle AHC$, obtemos:

$$x^2 + h^2 = b^2 \quad (2)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle BHC$, temos:

$$(c + x)^2 + h^2 = a^2 \quad (3)$$

$$c^2 + 2cx + x^2 + h^2 = a^2$$

Substituindo (1) e (2) em (3), obtemos:

$$c^2 + 2c\left(-b \cdot \cos \widehat{A}\right) + b^2 = a^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \widehat{A}$$

Pergunte aos estudantes qual é o resultado bastante conhecido mencionado no texto. Espera-se que eles respondam que, quando $\hat{A}$ é reto, a lei dos cossenos coincide com o teorema de Pitágoras.

Quando $\widehat{A}$ é reto, a lei dos cossenos coincide com um resultado bastante conhecido.

Agora, podemos resolver o problema do início deste tópico.

Pela lei dos cossenos, temos:

$$b^2 = 300^2 + 260{,}1^2 - 2 \cdot 300 \cdot 260{,}1 \cdot \cos 44°$$

$$b^2 = 45\,391{,}81$$

$$b = \sqrt{45\,391{,}81} \simeq 213$$

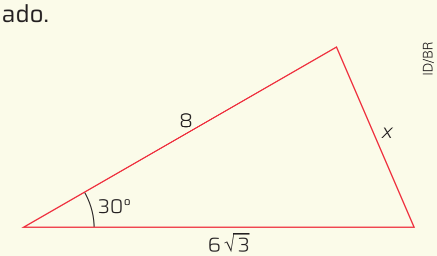
Logo, a distância do ponto T até o ponto A é, aproximadamente, 213 m. Note que esse resultado é igual ao calculado na página 161.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R5 **Em um triângulo, dois lados consecutivos de medidas $6\sqrt{3}$ cm e 8 cm formam um ângulo de 30°. Calcule a medida do terceiro lado.**

Resolução

Primeiro, vamos esboçar o triângulo descrito no enunciado.



Pela lei dos cossenos, temos:

$$x^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2 + 8^2 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \cos 30°$$

$$x^2 = 36 \cdot 3 + 64 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = 28$$

$$x = 2\sqrt{7}$$

Portanto, o terceiro lado mede $2\sqrt{7}$ cm.

R6 Calcule a área do triângulo cujos lados medem 7 cm, 5 cm e 4 cm.

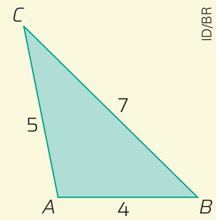
Resolução

Pela lei dos cossenos, temos:

$7^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos \widehat{A}$

$49 = 25 + 16 - 40 \cdot \cos \widehat{A}$

$\cos \widehat{A} = -\dfrac{1}{5}$



Substituindo $\cos \widehat{A}$ por $-\dfrac{1}{5}$ em $\text{sen}^2\, \widehat{A} + \cos^2 \widehat{A} = 1$ e notando que $\text{sen}\, \widehat{A} > 0$, obtemos:

$\text{sen}^2\, \widehat{A} + \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 = 1$

$\text{sen}^2\, \widehat{A} = 1 - \dfrac{1}{25}$

$\text{sen}\, \widehat{A} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

Pelo teorema da área, temos:

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \text{sen}\, \widehat{A}$

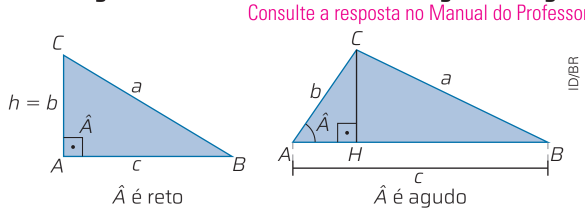
$S = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

$S = 4\sqrt{6}$

Portanto, a área do triângulo é igual a $4\sqrt{6}$ cm².

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

20 Reúna-se com um colega para provar que a lei dos cossenos também é válida nos casos em que $\widehat{A}$ é reto e $\widehat{A}$ é agudo. Tomem como base os triângulos a seguir. Consulte a resposta no Manual do Professor.



21 Em um triângulo, calcule: **b)** 45°

a) a medida do lado oposto ao ângulo de 60° formado pelos lados de medidas 6 cm e 8 cm. $2\sqrt{13}$ cm

b) a medida do ângulo oposto ao lado médio, sabendo que os lados medem $6\sqrt{5}$ m, 10 m e $2\sqrt{10}$ m.

c) c, dados $a = 6\sqrt{2}$ m, $b = 2\sqrt{13}$ m e $\text{med}(\widehat{B}) = 45°$.

d) $\widehat{B}$, dados $a = 8$ cm, $b = 2\sqrt{7}$ cm e $c = 2\sqrt{3}$ cm. 30°

c) $c = 10$ m ou $c = 2$ m

22 Em um paralelogramo, de dimensões 6 dm e 10 dm, um dos ângulos mede 60°. Calcule as medidas das diagonais. $d_1 = 2\sqrt{19}$ dm e $d_2 = 14$ dm

23 Considere um triângulo ABC, em que os ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ são opostos, respectivamente, aos lados de medidas a, b e c. Mostre que, se $b + c = 2a$ e $\text{med}(B\widehat{A}C) = 60°$, então o triângulo ABC, cujos lados medem a, b e c, é equilátero.

24 Investigue o enunciado do problema a seguir e verifique qual informação falta para sua resolução. Depois, acrescente esta informação e resolva o problema.

Calcule a área de um triângulo no qual um lado mede 8 cm, um ângulo mede 30° e outro lado mede 4 cm. $8\sqrt{3}$ cm²

Antes de resolver a próxima atividade, relembre o significado de círculo circunscrito a um triângulo.

25 Considere o $\triangle ABC$ com $BC = 15$ dm, $AC = 7$ dm e $AB = 20$ dm. Calcule:

a) a área do $\triangle ABC$; 42 dm²

b) $\text{med}(B\widehat{A}C)$; Aproximadamente 37°.

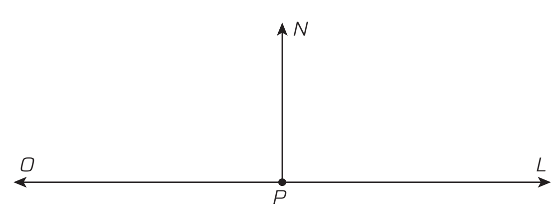
c) o raio do círculo circunscrito ao $\triangle ABC$. 12,5 dm

26 Calcule a área de um triângulo no qual um ângulo mede 45°, um lado tem medida 8 cm e o ângulo oposto a ele mede 75°. $\left(\text{Use sen } 75° = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\right)$

$16(3 - \sqrt{3})$ cm²

27 Faça um esquema para representar um polígono regular com 12 lados inscrito em um círculo de raio r. Depois, calcule, em função de r, o lado desse polígono. Aproximadamente $0{,}52r$.

28 Um barco navegou 200 km partindo do ponto P em direção ao nordeste, de modo que sua trajetória formou um ângulo de 30° com $\overline{PO}$. Depois, ele percorreu 100 km em direção ao leste. Em linha reta, quanto o barco terá de se deslocar para regressar ao ponto P? Aproximadamente 265 km.



29 Resolva.

a) Em um triângulo, os lados de medidas 2 cm e $(\sqrt{3} + 1)$ cm formam um ângulo de 60°. Calcule as medidas do terceiro lado e do ângulo oposto ao lado de medida 2 cm. $\alpha = 45°$

b) Em um triângulo, um dos lados mede $(\sqrt{3} - 1)$ m e o ângulo oposto a outro lado, de medida $\sqrt{6}$ m, vale 120°. Calcule as medidas do terceiro lado e do ângulo oposto a esse lado. 2 m; $\text{med}(\widehat{x}) = 45°$

24. A informação que falta para resolver o problema é que o lado que mede 4 cm deve ser oposto ao ângulo de 30°. Acrescentando esta informação ao problema temos que a área do triângulo é igual $8\sqrt{3}$ cm².

Antes de resolver a atividade **30**, leia e procure o significado das palavras desconhecidas. Depois, faça uma lista dos procedimentos que você deve adotar para resolvê-la.

30 **Indique a alternativa correta no caderno.** Alternativa **e**.

(Unesp) No dia 11 de março de 2011, o Japão foi sacudido por terremoto com intensidade de 8,9 na Escala Richter, com o epicentro no Oceano Pacífico, a 360 km de Tóquio, seguido de *tsunami*. A cidade de Sendai, a 320 km a nordeste de Tóquio, foi atingida pela primeira onda do *tsunami* após 13 minutos.

(*O Estado de S. Paulo*, 13 mar. 2011. Adaptado.)

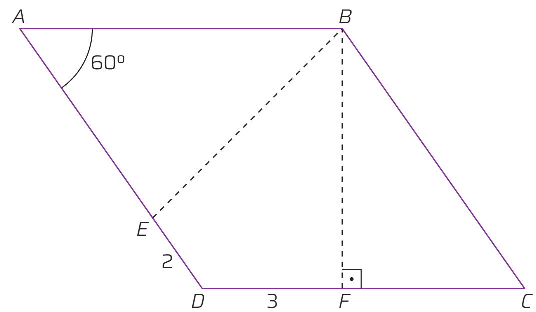
Unesp. Fac-símile: ID/BR

Baseando-se nos dados fornecidos e sabendo que $\cos\alpha \simeq 0{,}934$, onde α é o ângulo Epicentro-Tóquio-Sendai, e que $2^8 \cdot 3^2 \cdot 93{,}4 \simeq 215\,100$, a velocidade média, em km/h, com que a 1ª onda do *tsunami* atingiu até a cidade de Sendai foi de:

a) 10.
b) 50.
c) 100.
d) 250.
e) 600.

31 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Unicamp-SP) No losango abaixo, qual é a medida do comprimento do segmento BE? Alternativa **c**.



Unicamp-SP. Fac-símile: ID/BR

a) $\sqrt{26}$.
b) $\sqrt{27}$.
c) $\sqrt{28}$.
d) $\sqrt{29}$.

CÁLCULO RÁPIDO

Vamos retomar o cálculo rápido com medidas. Agora, o foco são os ângulos.

1 **Determine o ângulo suplementar de:**

a) 18° 162°
b) 95° 85°
c) 57° 123°
d) 112° 68°
e) 29° 151°
f) 30° 150°
g) 66° 114°
h) 71° 109°
i) 87° 93°
j) 8° 172°

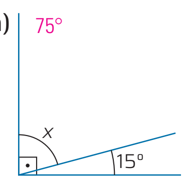
2 **Sabendo que med($\hat{A}$), med($\hat{B}$) e med($\hat{C}$) indicam as medidas dos três ângulos de um triângulo ABC, calcule mentalmente o ângulo desconhecido em cada caso.**

Lembre-se: a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

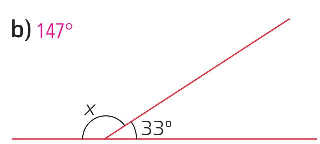
a) $\text{med}(\hat{A}) = 53°$ e $\text{med}(\hat{B}) = 25°$
b) $\text{med}(\hat{A}) = 39°$ e $\text{med}(\hat{C}) = 41°$
c) $\text{med}(\hat{B}) = 35°$ e $\text{med}(\hat{C}) = 2 \cdot \text{med}(\hat{B})$
d) $\text{med}(\hat{A}) = 108°$ e $\text{med}(\hat{B}) = \frac{1}{3} \cdot \text{med}(\hat{A})$
e) $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) = 105°$ e $\text{med}(\hat{B}) = 2 \cdot \text{med}(\hat{A})$

3 **Calcule mentalmente o valor de x em cada caso.**

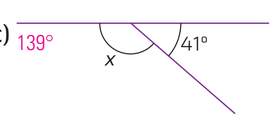
a) 75°



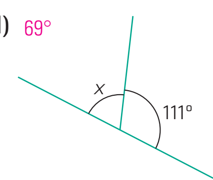
b) 147°



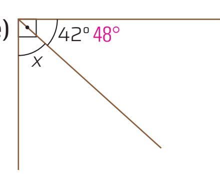
c) 139°



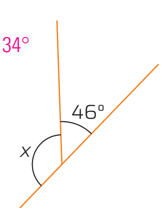
d) 69°



e) 48°



f) 134°



Ilustrações: ID/BR

4 **Considere um triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$, tal que med($\hat{A}$)= 42°. Quanto medem $\hat{B}$ e $\hat{C}$?** 69°

5 **Em um triângulo retângulo ABC em $\hat{A}$, sabe-se que med($\hat{B}$)= 32°. Quanto mede $\hat{C}$?** 58°

2. a) $\text{med}(\hat{C}) = 102°$ **c)** $\text{med}(\hat{A}) = 75°$; $\text{med}(\hat{C}) = 70°$ **e)** $\text{med}(\hat{A}) = 35°$; $\text{med}(\hat{B}) = 70°$; $\text{med}(\hat{C}) = 75°$
b) $\text{med}(\hat{B}) = 100°$ **d)** $\text{med}(\hat{B}) = 36°$; $\text{med}(\hat{C}) = 36°$

Não escreva no livro.

PARA RECORDAR

1 **Três ângulos em um quadrilátero medem, respectivamente, 70°, 80° e 100°. Quanto mede o quarto ângulo?** 110°

2 **Um quadrilátero pode ter três ângulos com medidas maiores que 90°? E quatro? Justifique suas respostas.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

3 **Escreva a alternativa correta no caderno.** Alternativa **a**.

(Enem) Deseja-se comprar determinado produto e, após uma pesquisa de preços, o produto foi encontrado em 5 lojas diferentes, a preços variados.

- Loja 1: 20% de desconto, que equivale a R$ 720,00, mais R$ 70,00 de frete;
- Loja 2: 20% de desconto, que equivale a R$ 740,00, mais R$ 50,00 de frete;
- Loja 3: 20% de desconto, que equivale a R$ 760,00, mais R$ 80,00 de frete;
- Loja 4: 15% de desconto, que equivale a R$ 710,00, mais R$ 10,00 de frete;
- Loja 5: 15% de desconto, que equivale a R$ 690,00, sem custo de frete.

O produto foi comprado na loja que apresentou o menor preço total. O produto foi adquirido na loja:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

4 **Indique a alternativa correta no caderno.** Alternativa **c**.

(Enem) Uma pessoa comprou uma caixa com 25 bombons por 5 reais. Resolveu revendê-los de forma avulsa a um preço único. Não resistindo à tentação, durante a venda, comeu cinco bombons. Obteve, mesmo assim, com a venda dos bombons restantes, um lucro de 20% sobre o valor pago pela caixa.

Qual foi o valor, em real, de venda de cada bombom?

a) 0,20
b) 0,24
c) 0,30
d) 0,35
e) 0,40

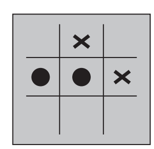
FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Os dois problemas apresentados são simples, apesar da impressão que causam na primeira leitura dos enunciados.

1 **Registre no caderno a alternativa correta.** Alternativa **b**.

(Enem) O jogo da velha é um jogo popular, originado na Inglaterra. O nome "velha" surgiu do fato de esse jogo ser praticado, à época em que foi criado, por senhoras idosas que tinham dificuldades de visão e não conseguiam mais bordar. Esse jogo consiste na disputa de dois adversários que, em um tabuleiro 3×3, devem conseguir alinhar verticalmente, horizontalmente ou na diagonal 3 peças de formato idêntico. Cada jogador, após escolher o formato da peça com a qual irá jogar, coloca uma peça por vez, em qualquer casa do tabuleiro, e passa a vez para o adversário. Vence o primeiro que alinhar 3 peças.

No tabuleiro representado a seguir, estão registradas as jogadas de dois adversários em um dado momento. Observe que uma das peças tem formato de círculo e a outra tem a forma de um xis. Considere as regras do jogo da velha e o fato de que, neste momento, é a vez do jogador que utiliza os círculos.


Enem. Fac-símile: ID/BR

Para garantir a vitória na sua próxima jogada, esse jogador pode posicionar a peça no tabuleiro de:

a) uma só maneira.
b) duas maneiras distintas.
c) três maneiras distintas.
d) quatro maneiras distintas.
e) cinco maneiras distintas.

2 **Em uma festa estão presentes 15 casais, cada qual de uma nacionalidade diferente da dos demais. Será feito um sorteio entre essas trinta pessoas ao acaso, uma por uma. Qual é o menor número de pessoas que deverão ser sorteadas para, com certeza, garantir a formação de um casal de mesma nacionalidade?** 16

Proponha a resolução e a correção das situações criadas pelos estudantes entre pares. Assim, essas produções podem ser valiosos instrumentos de avaliação, na medida em que:
- permitem identificar o que cada estudante aprendeu e como utiliza a linguagem matemática;
- o estudante exerce a leitura e analisa textos produzidos pelos colegas, em mais uma oportunidade de aprendizagem.

PALAVRAS-CHAVE

Escreva no caderno o que você aprendeu sobre lei dos senos e lei dos cossenos.

Em seguida, crie duas situações para medir distâncias: uma em que a lei dos senos seja necessária na medição e outra em que seja necessária a lei dos cossenos.

MATEMÁTICA E TOPOGRAFIA

O objetivo desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes, desenvolver habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propor que vivenciem um processo investigativo, trabalhando, assim, as competências específicas **1** e **2** da área de Matemática e suas Tecnologias, a habilidade **EM13MAT308** e as competências gerais **1** e **2** propostas pela BNCC, na medida em que os estudantes utilizam a lei dos senos para resolver problemas que envolvem cálculos de área de triângulos. Também possibilita explorar os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia, Meio Ambiente e Tecnologia.

A Trigonometria na topografia

Para ampliar os conhecimentos dos estudantes sobre topografia, convide um professor de Geografia para participar das discussões.

Você já precisou desenhar um lugar para outra pessoa, descrevendo as principais características dele?

Em alguns casos, as descrições de um lugar podem ser representadas em mapas ou em maquetes. Esses tipos de representação precisam ser feitos com precisão, por meio de cálculos e elementos geométricos. Esse é um dos desafios da topografia.

Introdução à topografia

[...]

Topografia basicamente é a descrição do lugar. Não através de texto ou foto, mas sim através de um desenho que contenha elementos que possam pormenorizar as dimensões do lugar, sua orientação, localização em relação ao globo terrestre, implantações que tenham ocorrido no local, como estradas, túneis, casas etc.

No desenho é representado ainda o relevo do lugar, acidentes naturais e artificiais, tudo com precisão, para que se possa planejar com maior eficiência algum empreendimento agrícola, algum projeto de açude ou tão somente verificar seus limites e confrontantes, entre outros. [...] Todas as distâncias no desenho são distâncias horizontais, articuladas a partir de técnicas e cálculos de projeções em um plano. Um exemplo são as curvas de nível que representam as formas do relevo local no plano.

Lima, Simoney Ferreira. *Topografia*. Manaus: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas, 2012. p. 33-34. Disponível em: http://proedu.rnp.br/bitstream/handle/123456789/1475/Topografia_WEB_R.pdf?sequence=1. Acesso em: 28 jul. 2024.

Irene Miller/Shutterstock.com/ID/BR

Topógrafa utilizando equipamento para medir ângulos e distâncias simultaneamente em levantamentos topográficos.

Representações sem proporção de tamanho.

ID/BR

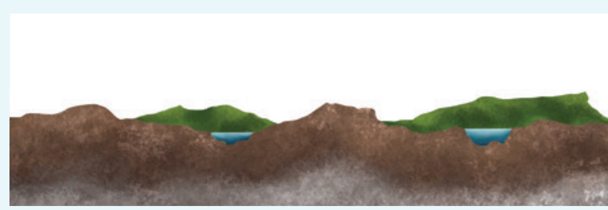


Figura 1: A altimetria é responsável por estabelecer as relações do ponto de vista vertical, em que é possível observar que o terreno é acidentado, com altitudes diferentes.

ID/BR

Figura 2: A planimetria relaciona as medidas lineares e de ângulos em um plano horizontal, em que se faz uma análise plana do terreno. Note que é possível perceber o traçado do rio, mas não são fornecidas informações sobre as altitudes.

Há dois eixos considerados essenciais para a topografia: a planimetria e a altimetria. Nos dois casos, utiliza-se a Trigonometria para a realização de cálculos e de medições, uma vez que os pontos de referência de um terreno podem ser estabelecidos mediante elementos geométricos.

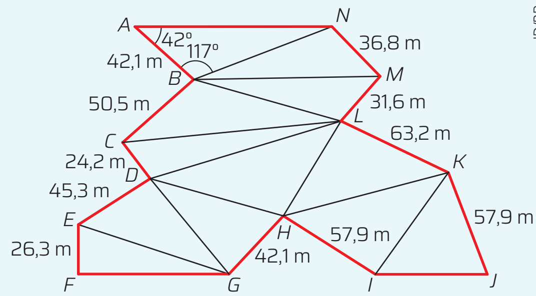
Agora, vamos entender melhor o funcionamento da topografia com um exemplo prático. Observe nas Figuras **1** e **2** desta página a representação de um mesmo terreno em dois planos diferentes: em um corte vertical e visto de cima.

Na planimetria, há duas técnicas que podem ser aplicadas na análise do local: o levantamento por triangulação, em que a região é dividida em triângulos, e o levantamento por intersecção, que possibilita descobrir as medidas dos segmentos dos triângulos que são mais difíceis de serem obtidas – no caso da Figura **2**, as medidas dos segmentos que atravessam o rio.

Não escreva no livro.

Agora, vamos imaginar que a região delimitada com o fio vermelho, na Figura **2**, precisa ser estudada por causa da contaminação proveniente de uma enchente e que os técnicos, conhecendo as medidas de todos os segmentos, com exceção dos segmentos $\overline{AN}$, $\overline{FG}$ e $\overline{IJ}$, desejam calcular a área do polígono *ABCDEFGHIJKLMN*.

Suponha que a divisão por triângulos tenha sido feita de acordo com a figura a seguir.



ID/BR

Uma vez que os técnicos conseguem enxergar todos os vértices dos triângulos quando estão posicionados em cada um dos vértices de qualquer triângulo, para o triângulo *ABN*, por exemplo, eles podem determinar o terceiro ângulo.

$$\widehat{N} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} \Rightarrow \widehat{N} = 180° - 42° - 117° \Rightarrow \widehat{N} = 21°$$

Usando a lei dos senos, eles conseguem calcular as medidas dos outros dois lados, $\overline{AN}$ e $\overline{BN}$. E, finalmente, com a fórmula do cálculo de área, os técnicos vão obter a área ***S*** do triângulo *ANB*:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AN \cdot BN \cdot \text{sen } \widehat{N} \quad \text{ou} \quad S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BN \cdot \text{sen } \widehat{B} \quad \text{ou} \quad S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AN \cdot \text{sen } \widehat{A}$$

De acordo com as medidas de lados e de ângulos obtidas anteriormente, eles podem optar pelo cálculo mais conveniente.

Ao aplicar os mesmos passos aos outros triângulos, os técnicos podem calcular a medida total da área da região delimitada pelo polígono vermelho e dar continuidade, assim, aos estudos sobre a contaminação da região.

Vimos, nesse exemplo, uma forma de explicar o uso da Trigonometria como base para os cálculos que envolvem o estudo da topografia. Na prática, os topógrafos já têm ferramentas mais eficientes para realizar esse cálculo, que consistem em traçar um mapa em escala do contorno do terreno em um plano cartesiano e determinar as coordenadas de cada vértice do contorno usando a lei dos senos. Mesmo nesse caso, a Trigonometria está presente na determinação das coordenadas dos vértices da região cuja área se quer determinar.

Conectando ideias

1 **Determine a área do triângulo *NBM*, sabendo que o ângulo correspondente ao vértice *B* mede 35° e o ângulo correspondente ao vértice *M* mede 57°, da mesma maneira como foi calculada a área do triângulo *ABN*.**

Aproximadamente 1 431,8 m².

2 **A cidade de Porto Alegre apresenta características topográficas que favorecem a ocorrência de enchentes. Além de conhecer o relevo do local, há outras ações que podem ser tomadas para evitar desastres como os que aconteceram no Rio Grande do Sul, em 2024.**

<u>Quais são as diferentes formas de prevenção de enchentes?</u>

- Reúna-se com alguns colegas. Façam uma pesquisa em fontes diversas sobre temas como: a topografia do Rio Grande do Sul; diferentes formas de escoamento de água em centros urbanos; a importância do urbanismo sustentável e de políticas públicas para a prevenção de enchentes.
- Escrevam um texto com os resultados obtidos na pesquisa e apresentem-no à turma. Discutam os principais pontos pesquisados.

Você reconhece o esforço que precisa fazer para enfrentar situações novas como as desta última atividade?

A reflexão dos estudantes para responder à pergunta favorece o desenvolvimento da competência socioemocional autoconhecimento.

2. As características topográficas da cidade de Porto Alegre não são a única causa desse acontecimento. No entanto, analisar o fenômeno sob esse ponto de vista nos ajuda a entender o comportamento da água das chuvas em relação às peculiaridades do relevo no entorno da cidade. Essa análise abre espaço para discutir outros problemas que provocaram a enchente. Certamente, o professor de Geografia poderá auxiliar nessa pesquisa e fornecer outros pontos de vista para a discussão dos estudantes. Incentive-os a expressar como se sentem acerca desse tema. É importante também que eles reflitam sobre as diferentes possibilidades de planejamento para a prevenção de desastres naturais, tendo em vista a valorização da ciência e do fazer científico.

Peça aos estudantes que, em duplas, retomem os textos que eles elaboraram para as seções *Palavras-chave* dos capítulos **6** e **7** desta unidade. Essa retomada deve ajudá-los com a Trigonometria trabalhada neste e nos próximos capítulos. Se possível, leia com eles alguns dos textos produzidos. Caso haja estudantes que ainda tenham dúvidas referentes aos assuntos estudados, este é o momento ideal para resolvê-las.

ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA E CICLO TRIGONOMÉTRICO

NESTE CAPÍTULO

- Ângulos
- Arcos de circunferência
- Grau e radiano
- Ciclo trigonométrico

Sugerimos um trabalho em parceria com o professor de Física, com o objetivo de enriquecer a discussão a respeito de Astronomia e, assim, contribuir para o desenvolvimento da competência específica **2** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Os estudantes podem pesquisar temas que envolvam cálculo de distâncias inacessíveis e Trigonometria.

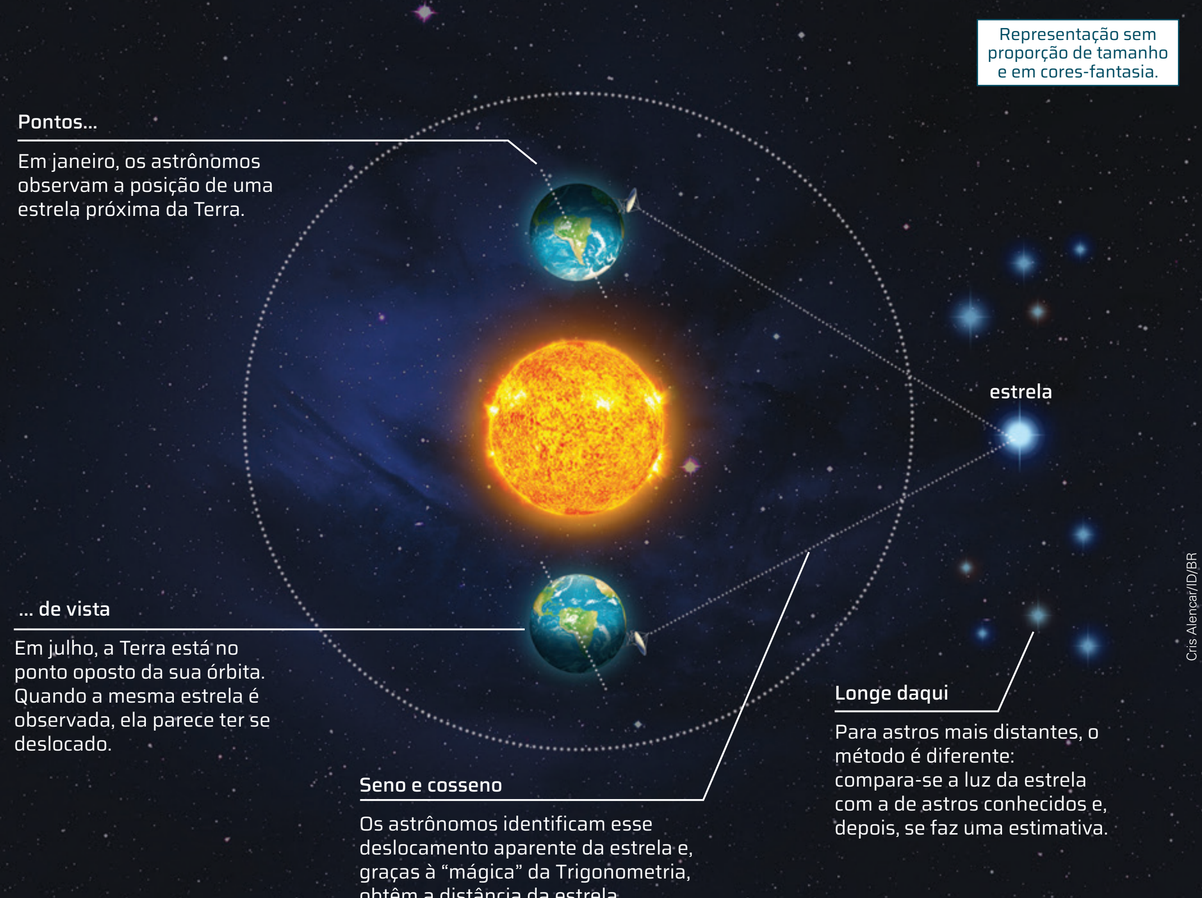
A Trigonometria, entre todas as áreas da Matemática que contribuem para o conhecimento científico, certamente é de fundamental importância para a Astronomia, o estudo do Universo. Essas duas áreas de conhecimento praticamente “nasceram” juntas. Pesquisas arqueológicas e registros indicam que, já por volta de 4000 a.C., na região da Mesopotâmia, o céu era cuidadosamente observado para que se pudesse entender o movimento de objetos celestes visíveis a olho nu. Paralelamente às observações, as estimativas de distâncias, tamanhos e posições já eram pensadas a partir de representações com triângulos, e a posição dos planetas conhecidos na época era representada por meio de círculos fracionados em partes iguais, usando a base 60.

Sob a influência da astronomia desenvolvida pelos babilônios, Hiparco de Niceia (?a. C. - após 127 a.C.), considerado o “pai da Trigonometria” e também o maior astrônomo da Antiguidade, construiu a primeira tabela trigonométrica de que se tem notícia, com os valores das cordas de ângulos de 0° a 180°. A tabela foi utilizada por ele para determinar o nascer (visibilidade a partir da Terra) e o ocaso de diversas estrelas.

Na Idade Média, ficou evidente a estreita relação entre as duas ciências, Astronomia e Trigonometria, devido ao interesse em desvendar nosso lugar no céu (geocentrismo ou heliocentrismo) e em descrever as leis que governam os movimentos dos corpos celestes. Analise a seguir uma representação de como era feita a medida da distância da Terra até uma estrela.

Régua nas estrelas

Entenda como se monta a equação que mede a distância da Terra até as estrelas.



Entre os matemáticos e astrônomos que contribuíram para o que hoje estudamos em Trigonometria, há mulheres que se destacam, como Hipátia de Alexandria (c. 355 d.C.-415 d.C.) e a escocesa Mary Somerville (1780-1872). Hipátia foi diretora da Academia de Alexandria, onde lecionava Filosofia, Matemática e Astronomia. Ela contribuiu para a criação de um novo modelo de astrolábio, instrumento utilizado para determinar a posição de astros. Já Mary era autodidata e, com seu extenso conhecimento matemático e da língua francesa, foi convidada a traduzir para o inglês trabalhos de outros cientistas, como Laplace, contribuindo para a difusão de conhecimentos matemáticos e astronômicos para o público britânico. O trabalho realizado por ela, além da tradução, incluiu comentários e explicações sobre os conceitos e as teorias desses cientistas.

Entre os muitos avanços da parceria entre Astronomia e Trigonometria, destaca-se o trabalho do alemão Friedrich Bessel (1784-1846), que, em 1838, conseguiu detectar a distância da Terra à estrela 61 Cygni utilizando cálculos trigonométricos com medidas angulares em relação ao movimento da Terra em sua órbita.

Ao longo do século XX, a Trigonometria se expandiu para outras ciências físicas, deixando de ser exclusiva dos avanços da Astronomia. Além disso, os avanços científicos e tecnológicos impulsionaram as investigações sobre o Universo, contando com outros conhecimentos matemáticos além da Trigonometria.

PARA EXPLORAR

Livro

VALLADARES, Renato J. Costa. *O jeito matemático de pensar*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2012.

Sugerimos que, ao longo deste ano, você leia esse livro. Nele, o autor procura mostrar, a cada capítulo, como a Matemática faz parte de nossa vida e está presente até mesmo em situações que não envolvem essa ciência. Dê preferência à leitura dos capítulos "A Matemática e a cultura geral" e "Sensibilidade matemática".

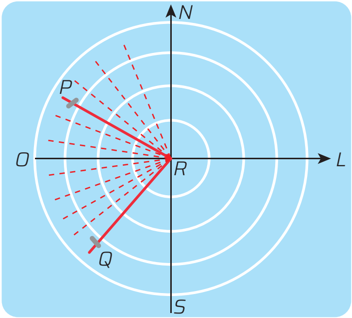
NOÇÃO DE ÂNGULO

Este tópico é essencial para a compreensão de ciclo trigonométrico e das funções no ciclo. A medição de arcos usando como unidade o próprio raio da circunferência e a definição da medida de ângulos centrais e de arcos com a mesma unidade (radianos) são assuntos bastante complexos e devem ser trabalhados aos poucos, de modo que os estudantes possam efetivamente entender o ciclo trigonométrico como uma reta real "enrolada" na circunferência de raio de medida 1.

Leia a situação a seguir.

Um radar capta dois obstáculos, e um deles está no ponto P. O raio detector $\overline{RP}$, que pode ser visto na tela do radar, faz um ângulo de 151° com a semirreta $\overrightarrow{RL}$. A distância de P à origem R é de 1 km. Quais são as coordenadas do obstáculo P?

O outro obstáculo está sobre a bissetriz do terceiro quadrante, no ponto Q. Podemos concluir, assim, que o raio detector do radar descreve um ângulo de 225° desde a posição inicial $\overrightarrow{RL}$. Se Q dista 1 km de R, quais são as coordenadas de Q?



ID/BR

Na situação descrita, como em muitas outras, geralmente relacionadas aos movimentos de rotação, é necessário considerar ângulos cuja medida da abertura seja superior a 90°, a 180° e até a 360°.

De fato, se o raio detector partisse da posição $\overrightarrow{RL}$ e tivesse dado duas voltas completas antes de detectar P, teria descrito:

$$2 \cdot 360° + 151°, \text{ ou seja, } 871°$$

Há também movimentos de rotação de sentido contrário a esse, como é o caso do movimento dos ponteiros do relógio analógico.

Se observássemos um relógio como o da foto ao lado durante 50 minutos, notaríamos que o ponteiro dos minutos descreve um ângulo de 300°.

Para distinguir esses dois sentidos, que podem ser descritos nas rotações, assumimos um como positivo e o outro como negativo.

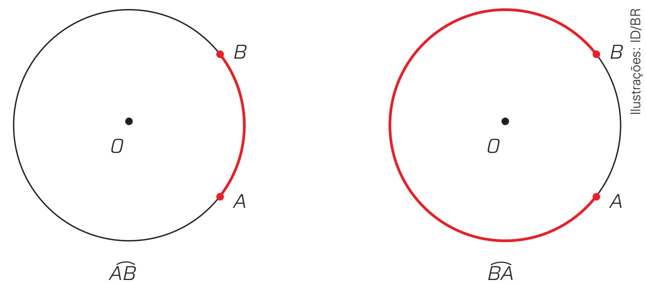
Neste capítulo, vamos aprender um novo conceito, o de ciclo trigonométrico, que vai ajudar a compreender melhor os ângulos de medida maior que 180° e estender os cálculos de seno, cosseno e de tangente para esses ângulos. Mas, antes, vamos estudar arcos de circunferência e como medir esses arcos.

Photoongraphy/Shutterstock.com/ID/BR

Relógio analógico.

ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

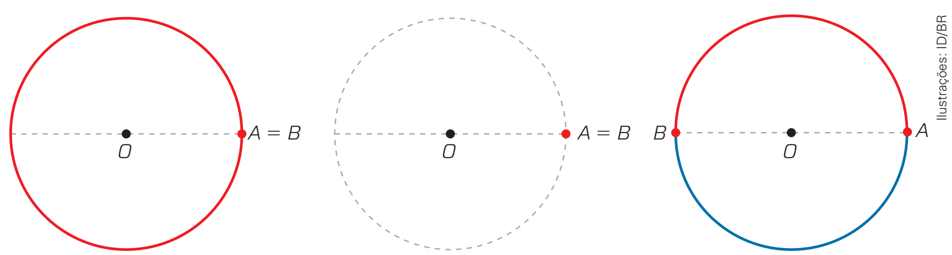
Dois pontos, A e B, dividem uma circunferência em duas partes denominadas **arcos**. A e B são as extremidades de cada um desses arcos, que indicaremos por $\overset{\frown}{AB}$ ou $\overset{\frown}{BA}$.



Para diferenciar esses arcos, convencionamos percorrer a circunferência no sentido anti-horário. Assim, $\overset{\frown}{AB}$ é o arco formado pelos pontos da circunferência entre A e B, percorridos no sentido anti-horário, isto é, de A para B, enquanto $\overset{\frown}{BA}$ é o arco formado pelos pontos da circunferência entre B e A, percorridos no sentido anti-horário, ou seja, de B para A.

Se A coincide com B, temos um **arco de uma volta** ou um **arco nulo**.

Se A e B são as extremidades de um mesmo diâmetro, temos um **arco de meia-volta**.



$\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BA}$: arcos de uma volta

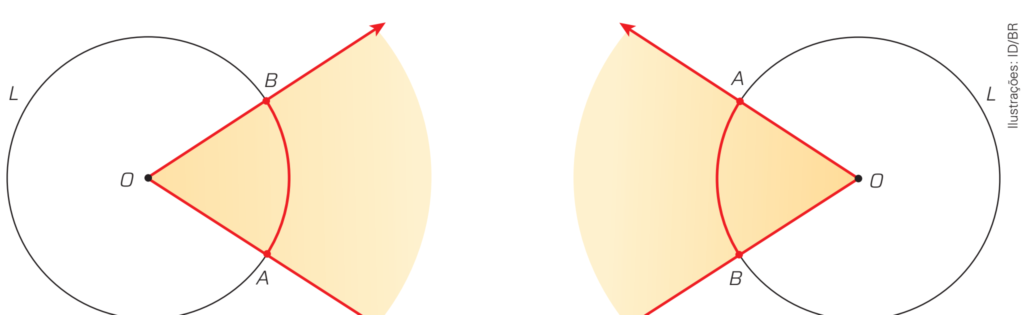
$\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BA}$: arcos nulos

$\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BA}$: arcos de meia-volta

ÂNGULO CENTRAL

Todo ângulo com vértice no centro de uma circunferência L, cujos lados intersectam L, é denominado **ângulo central** relativo a L.

O arco de circunferência contido no interior de um ângulo central é chamado de **arco correspondente** a esse ângulo.



$\overset{\frown}{AB}$: arco correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$.

$A\hat{O}B$: ângulo central correspondente ao arco AB.

De modo recíproco, a todo arco de L corresponde um único ângulo central de L. Essa relação entre arcos e ângulos de uma circunferência nos permite definir maneiras de medir arcos a partir da medida do ângulo central correspondente.

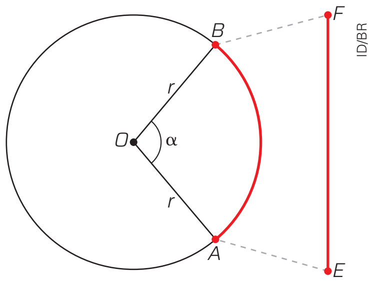
MEDIDA DE ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

Há dois tipos de medida para arcos de circunferência: **medida linear** e **medida angular**.

A medida linear de um arco *AB* é seu **comprimento**, ou seja, a distância linear entre suas extremidades. Obter a medida do comprimento do arco *AB* equivale a "esticar" o arco e determinar um segmento de reta *EF* cujo comprimento seja igual ao do arco *AB*.

Já a **medida angular** do arco *AB* está relacionada à medida do **ângulo central** correspondente a esse arco, ou seja, a medida angular do arco *AB* é igual à medida do ângulo central α associado a ele.

$$\text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \text{med}\left(A\hat{O}B\right)$$

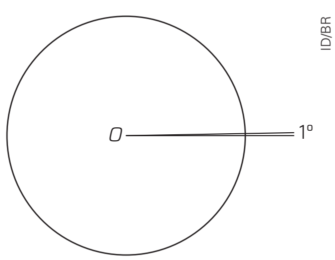


As unidades mais usadas para a medida angular de arcos de circunferência são o **grau** e o **radiano**.

Primeiro, vamos estudar a medida de ângulos em grau e, depois, em radiano.

Medida em graus

O grau é a unidade de medida de ângulos mais utilizada em Geometria. Ele é definido dividindo-se uma circunferência em 360 ângulos centrais congruentes entre si. Cada um desses ângulos equivale a um ângulo de um grau (1°), e definimos a medida angular do arco correspondente como igual a um grau.



$\frac{1}{360}$ da volta completa da circunferência mede 1°.

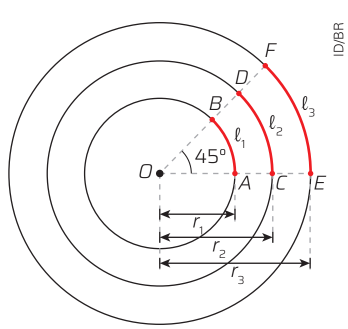
Dividindo-se um arco de 1° em 60 partes congruentes entre si, cada um dos arcos formados corresponde a um arco com medida angular de um minuto (1').

Dividindo-se um arco de 1' em 60 partes congruentes entre si, cada um dos arcos formados corresponde a um arco com medida angular de um segundo (1").

Portanto, temos: **1° = 60'** e **1' = 60"**.

Se um arco de circunferência mede *a* graus, *b* minutos e *c* segundos, escrevemos **a° b' c"**.

Agora, analise a figura a seguir.



Como o ângulo central $A\hat{O}B$ mede 45°, dizemos que a medida angular do arco *AB* é 45°.

Note que os arcos *AB*, *CD* e *EF* têm a mesma medida angular (45°), apesar de suas medidas lineares serem diferentes. Para explorar a localização de pontos relacionados a ângulos notáveis, consulte o jogo Batalha naval circular, proposto nas *Orientações específicas* deste capítulo.

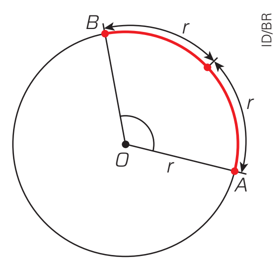
Medida em radiano

Embora o grau seja a unidade de medida de ângulos mais utilizada, quando se trata da medida angular de arcos, há outra unidade de medida usual em Trigonometria: o **radiano**.

Um arco de 1 radiano (1 rad) é um arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência que o contém.

Podemos dizer também que o ângulo de medida 1 radiano é o ângulo central correspondente a um arco de comprimento igual à medida de seu raio.

Medir um arco em radiano significa responder à seguinte pergunta: Quantos arcos de comprimento igual à medida de um raio da circunferência cabem no arco que se deseja medir?



Por exemplo, um arco de 2 rad corresponde ao arco de comprimento igual à medida de dois raios da circunferência.

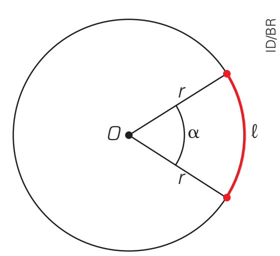
Como o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$ é $2r$, temos:

$$\text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \text{med}\left(A\hat{O}B\right) = 2 \text{ rad}$$

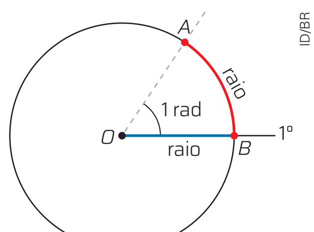
Ou seja, a medida angular de $\overset{\frown}{AB}$ é 2 rad.

De modo geral, indicando por α a medida em radiano de um arco de comprimento ℓ contido em uma circunferência de raio de medida r, podemos escrever:

$$\boxed{\alpha = \frac{\ell}{r}}$$



Note que α é o número de vezes que r cabe em ℓ.



É importante observar que a medida de um arco, em radiano, só é numericamente igual ao comprimento desse arco se $r = 1$, isto é, se a medida do raio for igual a uma unidade de medida de comprimento.

Caso julgue oportuno, escolha alguns objetos circulares e proponha aos estudantes que meçam o diâmetro (de medida d) e o comprimento (de medida C) da circunferência de cada um desses objetos. Em seguida, peça a eles que calculem a relação $\frac{C}{d}$. Espera-se que eles encontrem resultados próximos do valor de π, o que permitirá a comprovação experimental de que $C = \pi \cdot d = 2\pi \cdot r$, ou seja, o raio de medida r de qualquer circunferência cabe 2π vezes no comprimento de medida C. Esse trabalho contribui para a aquisição da competência geral **2**, por exercitar a curiosidade intelectual e a resolução de problemas.

Relações entre as unidades de medição de arcos

Agora, vamos estudar algumas relações entre grau e radiano. Como o comprimento da circunferência é igual a $2\pi r$, o raio cabe 2π vezes (aproximadamente 6,28 vezes) na circunferência.

Logo, temos as seguintes relações entre as medidas de arcos:

- $360^\circ = 2\pi$ rad ($\simeq$ 6,28 rad)
- $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad ($\simeq$ 1,57 rad)
- $180^\circ = \pi$ rad ($\simeq$ 3,14 rad)
- $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ rad ($\simeq$ 0,785 rad)

As medidas de arcos de circunferência em grau e em radiano são, portanto, diretamente proporcionais. Acompanhe.

$$\frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi} = \frac{90}{\frac{\pi}{2}} = \frac{45}{\frac{\pi}{4}}$$

Esse fato possibilita obter a equação de conversão de unidades pela regra de três simples.

Medida em grau		Medida em radiano
a	———	α
360	———	2π

$$\boxed{\frac{a}{360} = \frac{\alpha}{2\pi} \text{ ou } \frac{a}{180} = \frac{\alpha}{\pi}}$$

Como exemplo, vamos calcular a medida em grau de um arco de medida 1 radiano.
Usando a relação, temos:

Medida em grau		Medida em radiano
a	———	1
360	———	2π

$$\frac{a}{360} = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow a = \frac{360}{2\pi} \Rightarrow a \simeq 57$$

Portanto, um arco de medida 1 radiano mede aproximadamente 57°.

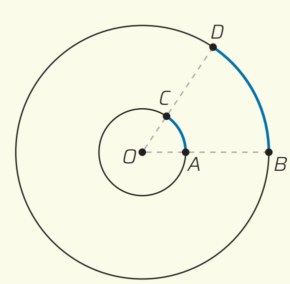
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **Na figura ao lado, temos duas circunferências coplanares de mesmo centro O.**

Considerando $OA = 2$ cm, $CD = 4$ cm e $\text{med}(\overset{\frown}{AC}) = 3$ cm, calcule:

a) a medida de $A\hat{O}C$, em radiano;

b) o comprimento de $\overset{\frown}{BD}$, em centímetro.



ID/BR

Resolução

a) $\text{med}(A\hat{O}C) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AC})}{OA} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Portanto, $A\hat{O}C$ mede 1,5 rad.

b) Como o raio da circunferência maior mede 6 cm ($AO + CD$) e sendo ℓ o comprimento de $\overset{\frown}{BD}$, temos:

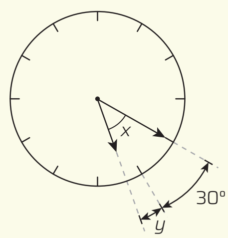
$\text{med}(B\hat{O}D) = \frac{\ell}{r} \Rightarrow 1{,}5 = \frac{\ell}{6} \Rightarrow \ell = 9$

Portanto, o comprimento de $\overset{\frown}{BD}$ é 9 cm.

R2 **Calcule a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos quando o relógio mostra 5 h 20 min.**

Resolução

O menor ângulo formado por quaisquer duas marcas consecutivas de horas tem medida $\frac{360°}{12} = 30°$. A medida x, em grau, do ângulo solicitado é $x = 30° + y$.



Para o cálculo de y, note que, enquanto o ponteiro dos minutos percorre uma volta inteira (360°), o ponteiro das horas percorre um ângulo de medida 30°.

Logo, temos a seguinte regra de três:

Ângulo descrito pelo ponteiro dos minutos		Ângulo descrito pelo ponteiro das horas
360°	———	30°
120°	———	y

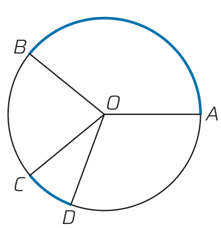
$$\frac{360°}{120°} = \frac{30°}{y} \Rightarrow y = 10°$$

Portanto, $x = 40°$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Durante a resolução de cada um dos problemas a seguir, investigue se ele se assemelha a algum dos exercícios resolvidos e se é preciso consultá-lo. Depois, confira com os colegas se eles pensaram como você.

1 **Na figura a seguir, O é o centro da circunferência de raio de medida 4 cm.**



a) Calcule a medida de $A\hat{O}B$, em radiano, sabendo que o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$ é 10 cm. 2,5 rad

b) Calcule o comprimento de $\overset{\frown}{CD}$, em centímetro, dado $\text{med}(C\hat{O}D) = 0{,}8$ rad. 3,2 cm

2 **Transforme em radiano:**

a) 40° $\frac{2\pi}{9}$ rad

b) 36° $\frac{\pi}{5}$ rad

c) 25° $\frac{5\pi}{36}$ rad

d) 15° $\frac{\pi}{12}$ rad

e) 24° $\frac{2\pi}{15}$ rad

f) 80° $\frac{4\pi}{9}$ rad

3 **Transforme em grau:**

a) $\frac{\pi}{12}$ rad 15°

b) $\frac{\pi}{8}$ rad 22° 30′

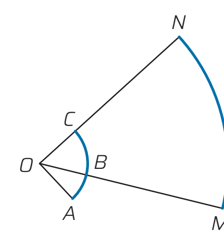
c) $\frac{5\pi}{9}$ rad 100°

d) $\frac{7\pi}{16}$ rad 78° 45′

e) $\frac{7\pi}{15}$ rad 84°

f) $\frac{11\pi}{45}$ rad 44°

4 **Na figura ao lado, $\overset{\frown}{AC}$ e $\overset{\frown}{MN}$ são arcos contidos em circunferências de um mesmo plano e de mesmo centro O, com $OM = 8$ cm, $OB = 2$ cm, $\text{med}(\overset{\frown}{MN}) = 12$ cm e $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 2$ cm.**



Calcule:

a) a medida de $A\hat{O}C$, em radiano. 2,5 rad

b) o comprimento de $\overset{\frown}{AC}$, em centímetro. 5 cm

5 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Uece) Em um relógio analógico circular usual, quando a hora observada é 6h20min, a medida em graus do menor ângulo entre o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos é Alternativa **d**.

a) 68.

b) 62.

c) 65.

d) 70.

6 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UEG-GO) Dois pontos percorrem uma circunferência de raio unitário em sentidos contrários, partindo do mesmo ponto no mesmo instante. Um percorre a distância de $\frac{14\pi}{3}$ rad no sentido anti-horário e para, enquanto o outro percorre $\frac{43\pi}{6}$ rad no sentido horário e também para. Quando os dois pontos terminam o percurso, a distância entre eles é Alternativa **a**.

a) $\frac{\pi}{6}$ rad

b) $\frac{\pi}{3}$ rad

c) $\frac{\pi}{4}$ rad

d) $\frac{\pi}{2}$ rad

e) $\frac{2\pi}{3}$ rad

Não escreva no livro.

CIRCUNFERÊNCIA ORIENTADA E CICLO TRIGONOMÉTRICO

Até agora, estudamos as razões trigonométricas para ângulos com medidas que variam de 0° (ou 0 rad) até 180° (ou π rad). Mas, para definirmos funções trigonométricas, é preciso estender o significado dessas razões para qualquer número real.

Para isso, vamos estudar o que são circunferências orientadas e ciclos trigonométricos.

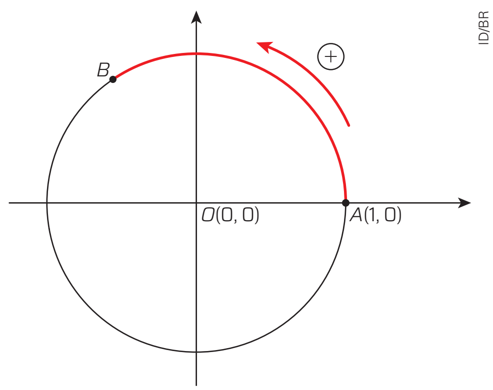
Organize a turma para a leitura coletiva deste tópico. Durante a leitura, faça pausas para comentários e análise das imagens, dos destaques, etc. Em seguida, peça aos estudantes que fechem os livros e listem as principais ideias do tópico. Anote-as no quadro e peça-lhes que façam o mesmo no caderno. Essa lista será útil para a resolução das próximas atividades.

Circunferência orientada

No plano cartesiano, vamos considerar a circunferência orientada, de centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $O(0, 0)$, cujo raio mede 1 unidade de comprimento.

Vimos, no início deste capítulo, que, em diversas situações, podemos adotar diferentes sentidos em uma circunferência para arcos e ângulos formados.

Escolhemos, então, como **sentido positivo** o de percurso **anti-horário** dos arcos, que serão medidos a partir do ponto $A(1, 0)$ de intersecção da circunferência com o semieixo positivo das abscissas.



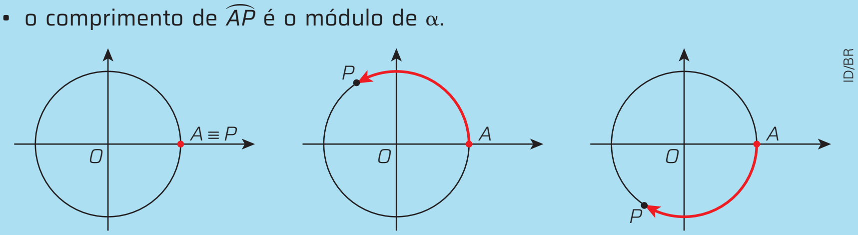
Ciclo trigonométrico

O **ciclo trigonométrico** corresponde à circunferência orientada de centro O e raio unitário ($r = 1$), na qual escolhemos um ponto de origem dos arcos e o sentido de seu percurso.

No ciclo trigonométrico, a medida absoluta α, em radiano, de um arco e o comprimento ℓ desse arco são iguais, pois $\alpha = \frac{\ell}{r}$ e $r = 1$. Esse fato é o motivo de escolhermos $r = 1$.

Podemos associar a cada número real α um único ponto P do ciclo trigonométrico, de modo que:

- se $\alpha = 0$, P coincide com A;
- se $\alpha > 0$, percorremos a circunferência no sentido anti-horário;
- se $\alpha < 0$, percorremos a circunferência em sentido horário;
- o comprimento de $\overset{\frown}{AP}$ é o módulo de α.



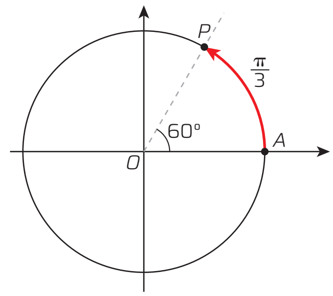
$\text{med}(\overset{\frown}{AP}) = 0$ $\text{med}(\overset{\frown}{AP}) = \alpha$, se $\alpha > 0$ $\text{med}(\overset{\frown}{AP}) = -\alpha$, se $\alpha < 0$

O ponto P é a **imagem** de α no ciclo trigonométrico.

Acompanhe alguns exemplos.

Exemplo 1

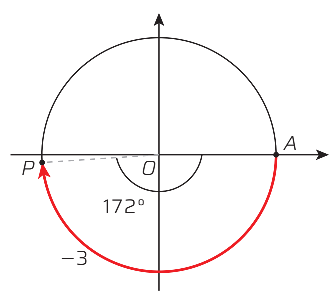
Para obter a imagem de $\frac{\pi}{3}$, partimos do ponto *A* e percorremos, no sentido anti-horário, um arco de comprimento $\frac{\pi}{3}$ rad, que corresponde ao ângulo central de 60°.



ID/BR

Exemplo 2

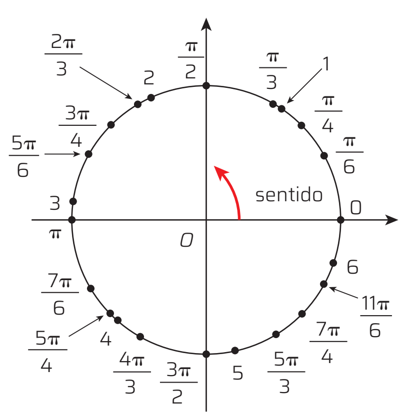
Para obter a imagem de −3, partimos do ponto *A* e percorremos, no sentido horário, um arco de comprimento 3 rad, que corresponde ao ângulo central de aproximadamente 172°, medidos no sentido horário a partir de *A*.

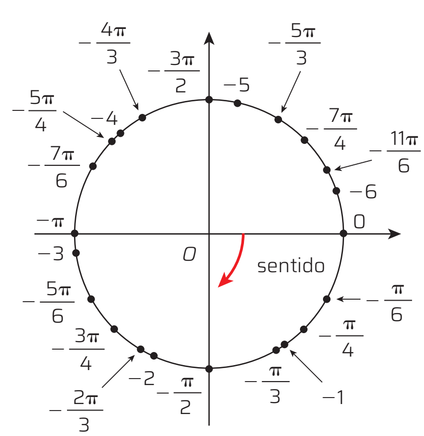


ID/BR

Note que a cada número estamos associando um ponto do ciclo trigonométrico, de modo que os pontos sejam as imagens desses números.

Verifique alguns números nos ciclos trigonométricos representados a seguir.





Ilustrações: ID/BR

Lembre-se de que o módulo de um número é igual ao seu valor, se o número é positivo, e é igual ao seu oposto, se o número é negativo. O módulo de um número *x* é sempre um valor positivo, representado por |*x*|.

Se o módulo de α for maior que 2π, devemos percorrer mais de uma volta no ciclo trigonométrico para obter a imagem de α.

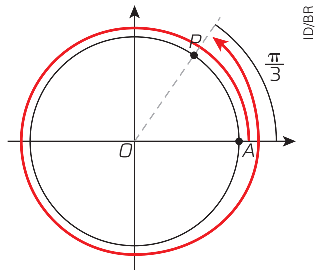
Exemplo 3

Vamos localizar a imagem de $\frac{7\pi}{3}$ no ciclo trigonométrico. Partindo do ponto *A*, vamos percorrer no sentido anti-horário uma volta completa, o que corresponde

Não escreva no livro.

a 2π. Em seguida, ainda no mesmo sentido, percorremos um arco de comprimento $\frac{\pi}{3}$, pois:

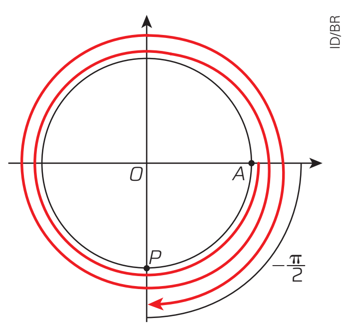
$$\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$$



Exemplo 4

Vamos localizar a imagem de $-\frac{9\pi}{2}$ no ciclo trigonométrico. Partindo do ponto *A*, vamos percorrer no sentido horário duas voltas completas, o que corresponde a -4π. Em seguida, ainda no mesmo sentido, percorremos um arco de comprimento $\frac{\pi}{2}$, pois:

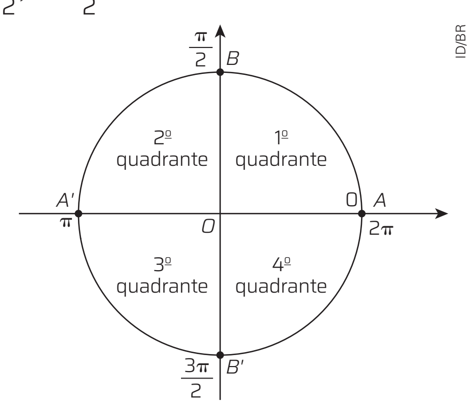
$$-\frac{9\pi}{2} = -\frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -4\pi - \frac{\pi}{2}$$



Quadrantes no plano cartesiano e o ciclo trigonométrico

Você já conhece os quatro quadrantes do plano cartesiano. Note que:

- todos os arcos de medida entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ estão contidos no 1º quadrante;
- todos os arcos de medida entre $\frac{\pi}{2}$ e π estão contidos no 2º quadrante;
- todos os arcos de medida entre π e $\frac{3\pi}{2}$ estão contidos no 3º quadrante;
- todos os arcos de medidas entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π estão contidos no 4º quadrante;
- os pontos dos eixos coordenados (*A*, *B*, *A'* e *B'*) correspondem, respectivamente, aos arcos 0, $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{3\pi}{2}$.

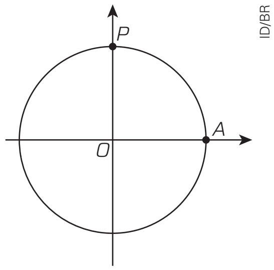


Arcos côngruos

Vamos analisar o que ocorre no ciclo trigonométrico com as imagens dos números $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi$, $\frac{\pi}{2} + 6\pi$, ... e com as imagens dos números $\frac{\pi}{2} - 2\pi$, $\frac{\pi}{2} - 4\pi$, $\frac{\pi}{2} - 6\pi$, ...

Partindo do ponto A no sentido anti-horário, percorremos um arco de comprimento $\frac{\pi}{2}$, localizamos o ponto P e, em seguida:

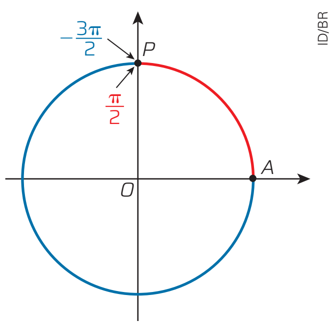
- no **sentido anti-horário**, percorremos 1, 2, 3, ... voltas completas, chegando sempre ao ponto P. Isso significa que $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi$, $\frac{\pi}{2} + 6\pi$, ... têm a mesma imagem P.
- no **sentido horário**, percorremos 1, 2, 3, ... voltas completas, chegando sempre ao ponto P. Isso significa que $\frac{\pi}{2} - 2\pi$, $\frac{\pi}{2} - 4\pi$, $\frac{\pi}{2} - 6\pi$, ... têm a mesma imagem P.



Dois arcos contidos no ciclo trigonométrico são **côngruos** se tiverem a mesma origem e a mesma extremidade.

Podemos representar esses números, genericamente, por $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, em que k é a variável que assume valores inteiros, e afirmar que os números expressos por $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma imagem P no ciclo trigonométrico ou que os arcos de origem A cujas medidas são dadas por $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma extremidade P. Note que a variável k representa o número de voltas percorridas.

Por exemplo, perceba na figura a seguir que os arcos de medida $\frac{\pi}{2}$ (em vermelho) e $-\frac{3\pi}{2}$ (em azul) são côngruos, pois têm a mesma origem e a mesma extremidade.



De fato, note que $-\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + (-1) \cdot 2\pi$.

As medidas dos arcos côngruos a um arco de medida a são dadas por:

- $a + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, para a em radiano.
- $a + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$, para a em grau.

Se $0 \leqslant a < 2\pi$ (ou $0° \leqslant a < 360°$), o arco de medida a é a **determinação principal** ou a **1ª determinação não negativa** desses arcos côngruos. No exemplo, $\frac{\pi}{2}$ é a determinação principal de $-\frac{3\pi}{2}$.

Vamos considerar as medidas $\alpha_1 = a + k_1 \cdot 2\pi$ e $\alpha_2 = a + k_2 \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, de dois arcos côngruos. Calculando $\alpha_1 - \alpha_2$, obtemos:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = (k_1 - k_2)2\pi$$

Como $k_1 - k_2$ é inteiro, definimos que:

A diferença entre as medidas de dois arcos côngruos é igual ao produto de um **número inteiro** por 2π (ou é múltiplo de 360°).

Acompanhe alguns exemplos a seguir.

Exemplo 5

Os arcos de medidas $\frac{21\pi}{5}$ e $-\frac{9\pi}{5}$ no ciclo trigonométrico são côngruos, pois:

$$\frac{21\pi}{5} - \left(-\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{21\pi}{5} + \frac{9\pi}{5} = 6\pi = 3 \cdot 2\pi \text{ (é múltiplo de } 2\pi\text{)}$$

Logo, no ciclo trigonométrico, os dois arcos têm a mesma origem A e a mesma extremidade.

Exemplo 6

Os arcos de medidas $\frac{37\pi}{7}$ e $\frac{16\pi}{7}$ no ciclo trigonométrico não são côngruos, pois:

$$\frac{37\pi}{7} - \frac{16\pi}{7} = \frac{21\pi}{7} = 3\pi$$

Note que 3π não é produto de nenhum número inteiro por 2π. Isso significa que, no ciclo trigonométrico, esses arcos têm a mesma origem A, mas não a mesma extremidade.

Exemplo 7

Os arcos de medidas 3 645° e 5 445° são côngruos, pois:

$$3\,645° - 5\,445° = -1\,800° = -5 \cdot 360° \text{ (é múltiplo de } 360°\text{)}$$

Logo, no ciclo trigonométrico, os dois arcos têm a mesma origem A e a mesma extremidade.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R3 **Calcule a determinação principal dos arcos de medida:**

a) 4 120° b) −170° c) −4 550° d) -33π e) $\frac{47\pi}{6}$ f) $-\frac{67\pi}{3}$

Resolução

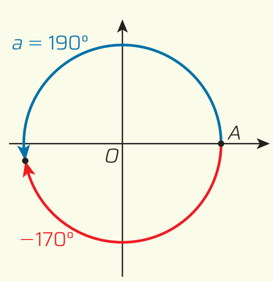
a) Dividindo 4 120° por 360°, temos:

$$\begin{array}{r|l} 4\,120 & 360 \\ \hline 520 & 11 \\ 160 & \end{array}$$

Podemos escrever: $4\,120° = 160° + 11 \cdot 360°$

Logo, a determinação principal tem medida 160°.

b) A determinação principal dos arcos côngruos a −170° é o arco de medida a, $0° \leqslant a < 360°$, que tem a mesma origem A e a mesma extremidade do arco de medida −170°.



ID/BR

Logo, a determinação principal tem medida: $a = 360° - 170° = 190°$

c) Dividindo 4 550° por 360°, temos:

$$\begin{array}{r|l} 4\,520 & 360 \\ \hline 950 & 12 \\ 230 & \end{array}$$

$4\,550° = 12 \cdot 360° + 230°$

$-4\,550° = -12 \cdot 360° - 230°$

Logo, a determinação principal tem medida: $a = 360° - 230° = 130°$

d) Dividindo 33π por 2π, temos:

$$33\pi = 16 \cdot 2\pi + \pi$$
$$-33\pi = -16 \cdot 2\pi - \pi$$

Logo, a determinação principal tem medida:
$$a = 2\pi - \pi = \pi$$

e) Podemos escrever $\frac{47\pi}{6}$ como:

$$\frac{47\pi}{6} = \frac{36\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = \underbrace{6\pi}_{\text{3 voltas completas}} + \frac{11\pi}{6}$$

Logo, a determinação principal tem medida $\frac{11\pi}{6}$.

f) Podemos escrever $-\frac{67\pi}{3}$ como:

$$-\frac{67\pi}{3} = -\frac{66\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \underbrace{-22\pi}_{\text{11 voltas completas}} - \frac{\pi}{3}$$

A determinação principal dos arcos côngruos a $-\frac{67\pi}{3}$ é o arco de medida a, $0 \leqslant a < 2\pi$, que tem a mesma origem A e a mesma extremidade do arco de medida $-\frac{67\pi}{3}$.

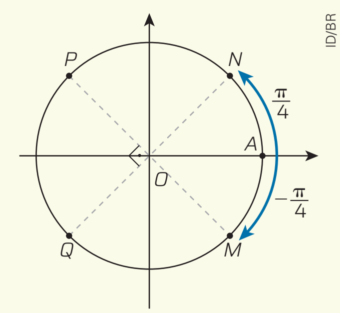
Logo, a determinação principal tem medida:
$$a = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

R4 **Determine no ciclo trigonométrico as imagens dos números $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.**

Resolução

Atribuindo a k alguns valores inteiros, temos:

- $k = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{0\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$ (ponto M);
- $k = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{1\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ (ponto N);
- $k = 2 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ (ponto P);
- $k = 3 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = -\frac{5\pi}{4}$ (ponto Q);
- $k = 4 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi$ (ponto M);
- $k = 5 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$ (ponto N); etc.



PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7 **Indique a medida de alguns arcos com a mesma origem e a mesma extremidade que o arco de 192°.** Algumas medidas: 552° e 912°.

8 **Indique a medida de alguns ângulos com a mesma origem e a mesma extremidade que o ângulo de −140°.** Algumas medidas: 580° e 1 660°.

Antes de resolver a atividade **9**, releia a atividade **R4**.

9 **Calcule a medida da determinação principal dos arcos de medida:**

a) 724° 4°
b) 2 380° 220°
c) 1 529° 89°
d) −790° 290°
e) −2 200° 320°
f) $\frac{29\pi}{7}$ $\frac{\pi}{7}$ rad
g) $\frac{20\pi}{3}$ $\frac{2\pi}{3}$ rad
h) $\frac{26\pi}{5}$ $\frac{6\pi}{5}$ rad
i) $\frac{13\pi}{3}$ $\frac{\pi}{3}$ rad
j) $-\frac{5\pi}{3}$ $\frac{\pi}{3}$ rad
k) $-\frac{29\pi}{5}$ $\frac{\pi}{5}$ rad
l) $-\frac{37\pi}{7}$ $\frac{5\pi}{7}$ rad

10 **Sejam A, B, C, D e E, em sentido anti-horário e nessa ordem, os vértices de um pentágono regular inscrito em um ciclo trigonométrico, com A na origem dos arcos. Determine a expressão geral dos arcos de origem A e extremidade em cada um dos outros pontos.** Consulte a resposta Manual do Professor.

11 **O polígono $AA_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ é um octógono regular inscrito em um ciclo trigonométrico, com vértices percorridos em sentido anti-horário e A na origem dos arcos. Determine a expressão geral dos arcos de origem A e extremidade em cada um dos outros vértices do octógono.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

12 **Elabore uma atividade utilizando elementos parecidos com os da atividade 10.**

A proposta da atividade **12** é que os estudantes elaborem um problema utilizando o repertório que adquiriram com as diversas situações que resolveram até o momento.

Explique aos estudantes que o tipo de tecla e a ordem das teclas podem variar de acordo com o modelo de calculadora utilizado e auxilie-os, caso necessário. Comente que algumas calculadoras apresentam a tecla sen em vez de sin.

TECNOLOGIA

As calculadoras científicas permitem calcular o seno, o cosseno e a tangente de arcos com suas medidas em grau ou em radiano. Existem diferentes modelos de calculadora científica. Vamos apresentar dois deles.

1º tipo: Calculadora com a tecla MODE

Nesse modelo, ao apertar uma ou duas vezes a tecla Mode, aparecem as seguintes opções:

Deg (*degree*, que, em inglês, significa “grau”), **Rad** (radiano), **Gra** (grado)

O **grado** é definido dividindo-se uma circunferência em 400 partes congruentes entre si.

Para calcular sen 57°, precisamos apertar a tecla Mode, selecionar **Deg** e apertar as teclas sin 5 7 =.

Aparecerá no visor 0,838670567.

Da mesma forma, é possível calcular cos 57° e tg 57° apertando as teclas:

cos 5 7 = e tan 5 7 =

Os resultados serão cos 57° = 0,544639035 e tg 57° = 1,539864964.

Para calcular sen $\frac{\pi}{3}$, precisamos apertar a tecla Mode, selecionar **Rad** e apertar as teclas sin (SHIFT π ÷ 3) =. Aparecerá 0,866025403.

Da mesma forma, é possível calcular cos $\frac{\pi}{3}$ e tg $\frac{\pi}{3}$ apertando as teclas:

cos (SHIFT π ÷ 3) = e tan (SHIFT π ÷ 3) =

Os resultados serão cos $\frac{\pi}{3}$ = 0,5 e tg $\frac{\pi}{3}$ = 1,732050808.

2º tipo: Calculadora sem a tecla MODE

Esse modelo não tem a tecla Mode, mas tem a tecla DRG, que é uma tecla polivalente: ao pressionar essa tecla uma vez, aparece no visor **Deg** (grau); outro toque faz o modo mudar para **Rad** (radiano); e um terceiro toque faz mudar para **Gra** (grado).

Para calcular o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de 65°, devemos fazer aparecer no visor a opção **Deg** e, em seguida, selecionar as teclas:

- 6 5 sin : vai aparecer no visor o número 0,906307787.
- 6 5 cos : vai aparecer no visor o número 0,422618261.
- 6 5 tan : vai aparecer no visor o número 2,144506921.

Para calcular sen $\frac{5\pi}{6}$, devemos fazer aparecer no visor a opção **Rad** e, em seguida, selecionar as teclas 5 × π / 6 = sin. Aparecerá 0,5.

Da mesma forma, é possível calcular cos $\frac{5\pi}{6}$ e tg $\frac{5\pi}{6}$ apertando as teclas:

5 × π / 6 = cos e 5 × π / 6 = tan

Os resultados serão cos $\frac{5\pi}{6}$ = −0,866025403 e tg $\frac{5\pi}{3}$ = −0,577350269.

Agora, utilize uma calculadora científica, de qualquer um dos dois tipos vistos anteriormente, para realizar as atividades propostas. Antes de começar, certifique-se de apagar todos os registros que estiverem nela.

ATIVIDADES

1 Com a calculadora científica, calcule o seno, o cosseno e a tangente de três ângulos do 1º quadrante e três do 2º quadrante. Em seguida, represente esses três ângulos no ciclo trigonométrico.

Resposta pessoal.

2 Utilizando as teclas de funções trigonométricas de uma calculadora científica, determine a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cuja medida do cateto adjacente a um ângulo de 25° é 9 cm. Aproximadamente 10 cm.

CÁLCULO RÁPIDO

Mais uma vez aqui estão alguns desafios para auxiliar no desenvolvimento de sua habilidade de cálculo. As atividades **1** e **2** serão muito úteis para o que você vai aprender no próximo capítulo.

1 Calcule a medida, em grau, correspondente às medidas em radiano.

(Lembre-se: 2π rad equivalem a 360°.)

a) π 180°

b) $\frac{\pi}{2}$ 90°

c) $\frac{\pi}{4}$ 45°

d) $\frac{\pi}{3}$ 60°

e) $\frac{\pi}{6}$ 30°

f) $\frac{\pi}{12}$ 15°

g) $\frac{\pi}{10}$ 18°

h) $\frac{\pi}{20}$ 9°

i) $\frac{2\pi}{3}$ 120°

j) $\frac{4\pi}{3}$ 240°

k) $\frac{3\pi}{4}$ 135°

l) $\frac{5\pi}{4}$ 225°

Retome o que você aprendeu no capítulo 3 deste livro sobre regras de arredondamento de números. Elas serão necessárias na próxima atividade.

2 Use $\sqrt{2} \simeq 1{,}42$, $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$ e $\pi \simeq 3{,}14$ para calcular os valores aproximados com uma casa decimal após a vírgula.

a) $2\sqrt{2}$ 2,8

b) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$ 1,4

c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 0,4

d) $2\sqrt{3}$ 3,5

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,9

f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 0,6

g) 2π 6,3

h) $\frac{\pi}{4}$ 0,8

3 Considerando $a = 64$, determine mentalmente o valor das seguintes expressões:

a) $\frac{a}{4}$ 16

b) $\sqrt{a}$ 8

c) $3\sqrt{a}$ 24

d) $a - 100$ −36

e) $\frac{a - 80}{2}$ −8

f) $\sqrt{a} + 36$ 44

g) $\sqrt{a} \cdot 36$ 288

h) $\frac{128}{a}$ 2

i) a + 49 113

4 Considerando $p = x + y$, $q = 2x + 1$ e $r = 2x$, determine o valor das seguintes expressões:

a) $p + q$ $3x + y + 1$

b) $p - q$ $-x + y - 1$

c) $p + q - r$ $x + y + 1$

d) $2r^2$ $8x^2$

e) pr $2x^2 + 2xy$

f) $2p - q$ $2y - 1$

g) $-2p$ $-2x - 2y$

h) pq $2x^2 + x + 2xy + y$

i) $p - r$ $-x + y$

5 Resolva os problemas mentalmente.

a) Qual é a medida do perímetro de um octógono regular cujos lados medem 2 cm? 16 cm.

b) Quantos meses existem em cinco anos? 60 meses.

c) A área de um quadrado mede 100 m². Quanto mede o lado desse quadrado? 10 cm.

d) Qual é a medida da área aproximada de um círculo com 2 m de raio? Aproximadamente 12,6 m².

e) A pulsação de uma pessoa está em 80 batimentos por minuto. Quantos batimentos são medidos em 30 segundos, em 15 segundos e em uma hora? 40 batimentos em 30 segundos, 20 batimentos em 15 segundos e 4 800 batimentos em 1 hora.

PARA RECORDAR

Com essas atividades, vamos retomar conhecimentos importantes que não podem ser esquecidos.

1 **Resolva a atividade e indique a alternativa correta no caderno.** Alternativa **e**.

(Obmep) José utilizou exatamente 2 023 peças quadradas de 1 cm de lado para preencher vários tabuleiros retangulares de 7 cm por 17 cm. Quantos tabuleiros José conseguiu preencher?

a) 717 b) 177 c) 117 d) 71 e) 17

2 **Registre a alternativa correta no caderno.** Alternativa **a**.

(UFRR) Para resolver o problema de lotação de pacientes com covid-19, um determinado hospital decidiu adquirir um terreno triangular cujos lados medem 120 m, 160 m e 200 m, para a construção de uma nova ala hospitalar com um único pavimento térreo de base retangular. Se dois lados consecutivos da nova ala hospitalar serão construídos sobre os lados menores do triângulo, então a maior área possível para esta construção é de:

a) 4 800 m² b) 5 600 m² c) 2 400 m² d) 7 200 m² e) 1 200 m²

3 **Indique a alternativa correta no caderno.** Alternativa **b**.

(Enem) Em janeiro do ano passado, a direção de uma fábrica abriu uma creche para os filhos de seus funcionários, com 10 salas, cada uma com capacidade para atender 10 crianças a cada ano. As vagas são sorteadas entre os filhos dos funcionários inscritos, enquanto os não contemplados pelo sorteio formam uma lista de espera. No ano passado, a lista de espera teve 400 nomes e, neste ano, esse número cresceu 10%.

A direção da fábrica realizou uma pesquisa e constatou que a lista de espera para o próximo ano terá a mesma quantidade de nomes da lista de espera deste ano. Decidiu, então, construir, ao longo desse ano, novas salas para a creche, também com capacidade de atendimento para 10 crianças cada, de modo que o número de nomes na lista de espera no próximo ano seja 25% menor que o deste ano.

O número mínimo de salas que deverão ser construídas é

a) 10.   b) 11.   c) 13.   d) 30.   e) 33.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Nos problemas a seguir, a análise das alternativas é essencial para a resolução.

1 **Escreva a alternativa correta no caderno.** Alternativa **d**.

Hoje pela manhã fui ao caixa eletrônico sacar R$ 1000,00 para pagar o eletricista pelo serviço prestado. Chegando ao caixa eletrônico, percebi que as cédulas disponíveis para saque eram de R$ 20,00 e de R$ 50,00.

Com base nessas informações, é correto afirmar que, ao realizar o saque, entre as cédulas poderia haver:

a) 7 cédulas de R$ 50,00.

b) 11 cédulas de R$ 50,00.

c) 24 cédulas de R$ 20,00.

d) 30 cédulas de R$ 20,00.

2 **Resolva a atividade e indique a alternativa correta no caderno.** Alternativa **b**.

(Unicamp-SP) Luísa estava conversando com seu irmão ao telefone quando passou perto de uma feira de adoção de animais. Ela comentou que, na feira, havia cachorros, gatos e pintinhos.

O irmão, curioso, perguntou-lhe quantos gatos havia. Luísa, que adora charadas matemáticas, limitou-se a dizer que a quantidade de gatos somada à quantidade de pintinhos era 4 a mais do que a quantidade de cachorros, e que a quantidade de gatos somada à quantidade de cachorros era 6 a mais do que a quantidade de pintinhos.

O irmão de Luísa, que adora as aulas de matemática, rapidamente chegou à resposta correta. Havia quantos gatos para adoção?

a) 4   b) 5   c) 6   d) 7

PALAVRAS-CHAVE

O trabalho com esta seção vai auxiliar você no estudo do tema do capítulo e, ao mesmo tempo, avaliar o que foi aprendido e o que é necessário ser retomado ou aperfeiçoado.

Organize um resumo do capítulo com as palavras-chave a seguir, redigindo uma breve explicação para cada uma delas, com desenhos e exemplos.

- Medida de arcos em grau e em radiano
- Ciclo trigonométrico
- Arcos côngruos

Aproveite também para esclarecer dúvidas sobre o que ainda não sabe, consultando novamente o livro e, se necessário, conversando com o professor.

MATEMÁTICA E CARTOGRAFIA

Nesta seção, são trabalhadas as competências gerais **1**, **2** e **4** propostas pela BNCC ao possibilitar aos estudantes a utilização dos conhecimentos historicamente construídos para exercitar a curiosidade, se expressar e partilhar informações, em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. O objetivo desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes, desenvolvendo habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propondo a eles que vivenciem um processo investigativo. Além disso, esta seção permite integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal Ciência e Tecnologia. Com base nisso, pode ser proposto um trabalho integrado com os professores de História e Geografia, a fim de explorar a competência específica **1** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e ampliar os conhecimentos dos estudantes sobre Cartografia.

Elaboração de mapas

No mundo grego antigo, eram considerados sábios aqueles que se interessavam por estudos diversos e produziam conhecimento a respeito desses temas. Eratóstenes (276 a.C.-194 a.C.) foi um desses sábios. Há mais de 2 mil anos, ele foi capaz de constatar corretamente que a Terra era redonda e também fez os cálculos necessários para medir a circunferência do planeta. E ele obteve o resultado com uma porcentagem muito baixa de erro.

Museu de Belas Artes de Montreal, Canadá. Fotografia: Peter Horree/Alamy/Fotoarena

STROZZI, Bernardo. *Eratóstenes ensinando em Alexandria*, 1635. Óleo sobre tela, 78,9 cm × 99,4 cm.

O sábio grego se interessava por matemática, filosofia, astronomia e literatura. Seus trabalhos foram muito importantes para as primeiras ideias de localização, sendo utilizados em diversos estudos em áreas como a Geografia e a Cartografia. É atribuído a Eratóstenes, por exemplo, o desenvolvimento dos conceitos de paralelo e meridiano, que são fundamentais para as coordenadas geográficas latitude e longitude.

Leia os trechos a seguir para entender mais sobre esses elementos e perceber como a Matemática e a Cartografia estão conectadas.

As coordenadas geográficas

O globo terrestre serve para localizar um determinado ponto ou região da Terra [...] sendo necessário criar um sistema de coordenadas para dar a localização precisa de um ponto no globo.

Para isso, utilizamos as chamadas **coordenadas geográficas**: latitude e longitude.

A **latitude** de um ponto P é a medida do arco de meridiano que passa por P situado entre o paralelo que contém P e [...] [a linha do Equador]. A latitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 90° N (norte) ou de 0° a 90° S (sul).

A **longitude** de um ponto P é a medida do arco de paralelo que passa por P situado entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich. A longitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 180° E (leste) ou de 0° a 180° W (oeste).

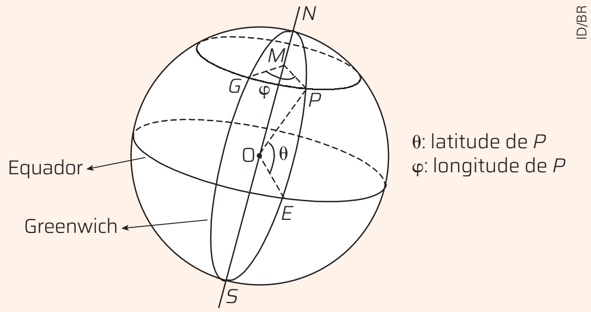
PARA EXPLORAR

Vídeo

ERATÓSTENES e a circunferência da Terra. [*S. l.*: *s. n.*], 2015. 1 vídeo (6 min 41 s). Publicado pelo canal Socius Scientiam. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=fu9Z7YuXLVE. Acesso em: 23 set. 2024.

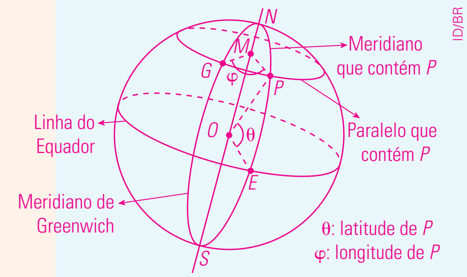
Nesse vídeo, trecho da série Cosmos, o cientista e divulgador científico Carl Sagan demonstra como Eratóstenes chegou à conclusão de que a Terra era redonda, além de explicar os cálculos feitos pelo matemático grego e o experimento que utilizou para basear suas suposições.

Na figura a seguir, temos que $\theta = m(\angle\ EOP)$ é a latitude de P, enquanto [...] $\varphi = m(\angle GMP)$ é a longitude de P. Pontos sobre um mesmo paralelo possuem latitudes iguais e pontos sobre um mesmo meridiano possuem longitudes iguais.



ALVES, Sérgio. A geometria do globo terrestre. *In*: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2., 2004, Salvador. *Minicurso* [...]. Salvador: UFBA, 2004. p. 10-11. Disponível em: http://www.bienasbm.ufba.br/M29.pdf. Acesso em: 23 set. 2024.

Ao analisar a imagem com a turma, mostre qual é o meridiano que contém *P* e qual é o paralelo que contém *P*.



Também é papel da Cartografia elaborar as cartas e os mapas, transpondo a representação da Terra para o plano. Para isso, os cartógrafos contam com alguns conceitos da Matemática, como podemos ler no trecho a seguir.

Desde a origem da cartografia, a matemática sempre constituiu a base para a formulação e a construção do conteúdo desse campo do conhecimento científico [...]. O cartógrafo, para elaborar um mapa ou uma carta, seus produtos mais significativos, precisa dos conhecimentos matemáticos, já que a representação gráfica constitui uma operação de transposição de dados esféricos existentes no mundo real para o plano. Razão e proporção estão assim presentes desde o início na produção cartográfica. [...]

ROCHA, Maria Lúcia; MENDES, Maria José. A história da Matemática e as projeções cartográficas: investigando conteúdos matemáticos através da dimensão das representações da superfície da Terra. *In*: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 10., 2013, Campinas. *Anais* [...]. Campinas: Unicamp, 2013. p. 1-2. Disponível em: https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/anais-snhm/article/view/76. Acesso em: 23 set. 2024.

2. O professor de Geografia poderá ajudar na busca de informações sobre os desafios na elaboração de um mapa-múndi, aquele que busca representar a superfície curva da Terra em um plano. É importante que todos tenham a oportunidade de participar ativamente da pesquisa e da produção da linha do tempo, para que possam ter domínio do conteúdo estudado e posteriormente apresentado pelo grupo em um dia previamente combinado.
As respostas dos estudantes ao último item apresentam evidências da competência socioemocional autogestão.

Conectando ideias

1 **Considerando que os ângulos θ e φ da imagem apresentada medem, respectivamente, 60° e 40°, responda:**

a) Quais são as coordenadas geográficas do ponto *P*? 60° N 40° E

b) Qual é a menor distância entre o ponto *P* e o ponto *E*? E entre o ponto *P* e o ponto *G*? Aproximadamente 6 679,16 km. Aproximadamente 4 452,77 km.

2 **Representar uma superfície esférica em uma superfície plana tem sido um grande desafio para a Cartografia.**

Qual é a relação da Matemática com o desenvolvimento da Cartografia na tarefa de transpor para um plano as características de uma superfície curva?

- Em grupos de até cinco estudantes, façam uma pesquisa sobre o desenvolvimento da elaboração de cartas e de mapas ao longo da história.
- Investiguem quem foram os cartógrafos e estudiosos que enfrentaram o desafio de reproduzir superfícies curvas em um plano.
- Analisem quais conhecimentos da Matemática foram utilizados pelos cartógrafos na produção dos mapas.
- Construam uma linha do tempo sobre a elaboração de mapas, incluindo informações sobre os cartógrafos que vocês pesquisaram.
- Estabeleçam um dia para apresentar a produção do grupo aos colegas. Compartilhem entre si as descobertas que fizeram.
- ! Durante as atividades, você agiu rapidamente ou esperou pelos outros? Você manteve o foco e resistiu a distrações?

CAPÍTULO 9

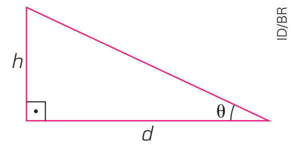
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

NESTE CAPÍTULO

- Função seno
- Função cosseno
- Relação fundamental da Trigonometria
- Função tangente
- Relação entre tangente, seno e cosseno
- Variação, gráfico e conjunto imagem das funções seno, cosseno e tangente

O assunto de introdução do capítulo favorece a competência específica **3** de Matemática e suas Tecnologias, pois demonstra como conceitos matemáticos são utilizados na resolução de problemas em diversos contextos.

No ciclismo, é comum representar a inclinação de um trecho na forma de porcentagem. Essa porcentagem equivale à tangente do ângulo representado por θ na figura a seguir. Um trecho plano tem 0% de inclinação, e uma subida de 45° (tg θ = 1) tem 100% de inclinação.



$$\text{tg}\ \theta = \frac{h}{d}$$

Competições de ciclismo, como a Volta da França (Tour de France), costumam adotar classificações dos trechos de subida de acordo com a inclinação.

A Volta da França, realizada pela primeira vez em 1903, é considerada a competição de ciclismo mais tradicional e popular do mundo. Os competidores percorrem um trajeto de aproximadamente 3,5 mil km divididos em 21 etapas.

Leia, a seguir, alguns trechos de uma notícia sobre a edição de 2024 dessa competição.

Ciclista quebra marca histórica no Tour de France 2024

Atleta da Eritreia se tornou o primeiro negro a vencer uma etapa da principal competição de ciclismo do mundo

Dario Belingheri/Velo/Getty Images

Biniam Girmay comemorando na linha de chegada como vencedor da terceira etapa do Tour de France 2024, em Turim, Itália. Foto de 2024.

A prova mais icônica de ciclismo mundial, o Tour de France, começou e, com ela, feitos inéditos acontecem e as lágrimas se tornam parte do espetáculo. A história que emocionou esta semana foi escrita por Biniam Girmay, o primeiro negro e africano a vencer uma etapa da competição [...].

O atleta de 24 anos, da equipe Intermarché-Wanty, chegou com um peso e responsabilidade neste segundo ano competindo a Volta da França, que foi de quebrar barreiras, marcas e preconceitos.

– Desde que comecei a andar de bicicleta, sempre sonhei em fazer parte do Tour de France. Agora, não posso acreditar, vencer o Tour de France no meu segundo ano em um grande *sprint*, para mim, é inacreditável – falou Girmay emocionado.

O ciclista nascido na Eritreia venceu a terceira etapa do Tour, a mais longa da edição com 230,8 quilômetros, [...] com início em Piacenza e que terminou em Turim, no Estádio Olímpico Grande Torino, palco dos Jogos Olímpicos Turim 2006, na Itália.

[...]

Se julgar oportuno, comente com os estudantes algumas curiosidades acerca dessa prova. Por exemplo, em 2019, pela primeira vez na história, a Volta da França teve como campeão um sul-americano, o colombiano Egan Bernal. Conte-lhes também que, em 2020, essa prova foi adiada por causa da pandemia de covid-19.

Como funcionam as etapas do Tour de France

O Tour de France é dividido em 21 etapas ao longo de 23 dias, com dois dias reservados para descanso. A corrida começa em Florença, Itália, no dia 29 de junho e termina em Nice, França, no dia 21 de julho.

Para continuar no Tour de France, um ciclista deve completar a etapa do dia anterior dentro de um tempo limite, que varia conforme a velocidade média do dia. Se um ciclista não completar uma etapa ou abandonar, ele é automaticamente eliminado da competição.

CORAZZA, Cacau. Ciclista quebra marca histórica no Tour de France 2024. *NSC Total*, [*s. l.*], 2 jul. 2024. Disponível em: https://www.nsctotal.com.br/noticias/ciclista-quebra-marca-historica-no-tour-de-france-2024. Acesso em: 5 out. 2024.

Dario Belingheri/Velo/Getty Images


Visão geral de pelotão de ciclistas na etapa 4 do Tour de France 2024, em Valloire, França. Foto de 2024.

Trajeto Tour de France

João Miguel A. Moreira/ID/BR

Fonte de pesquisa: 2024 route. *In*: LE Tour. [*S. l.*: *s. n.*], [2024]. Disponível em: https://www.letour.fr/es/recorrido-general. Acesso em: 7 out. 2024.

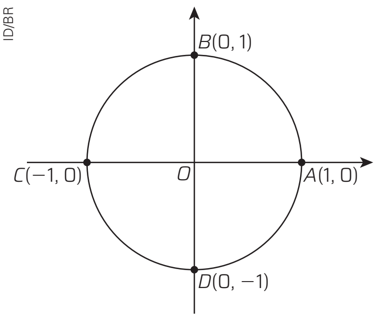
Na Volta da França, as subidas são classificadas em Cat 4 (mais fácil), Cat 3, Cat 2, Cat 1 e HC (mais difícil). A sigla HC significa *hors catégorie* (“sem categoria”) e corresponde a subidas muito acentuadas, com 15 km a 20 km de comprimento e com inclinações que passam de 10%. Qual será o ângulo de inclinação θ de uma subida de categoria HC nessa famosa prova de ciclismo?

Neste capítulo, vamos estudar as funções **seno**, **cosseno** e **tangente** no ciclo trigonométrico e voltar para responder a essa questão.

Essas funções têm aplicações não apenas dentro dos estudos da Matemática. Na Física, por exemplo, elas são bastante utilizadas em fórmulas como: Peça ao professor de Física que explique aos estudantes os significados das fórmulas apresentadas e suas aplicações. Esse diálogo favorece o desenvolvimento da competência específica **1** de Matemática e suas Tecnologias.

$v_x = v \cdot \cos\theta$ | $v_y = v \cdot \operatorname{sen}\theta$ | $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{v_2}{R \cdot g}$ | $\tau_y = F \cdot d \cdot \cos\theta$ | $F_{at} = \mu \cdot P \cdot \cos\theta$

Essas são algumas das fórmulas estudadas na Cinemática e na Dinâmica, partes da Mecânica que analisam os movimentos.

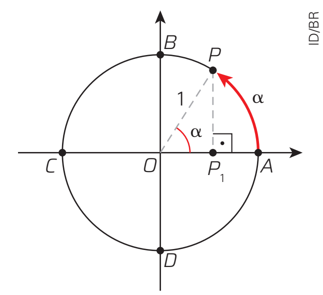


FUNÇÃO SENO

Vamos considerar um ciclo trigonométrico centrado na origem O de um sistema cartesiano ortogonal e com a origem A dos arcos no semieixo positivo das abscissas.

Lembrando que, no ciclo trigonométrico, o raio é tomado como uma unidade de comprimento, então o ponto A tem coordenadas (1, 0).

Na figura a seguir, α é a medida do ângulo agudo $A\hat{O}P$ e o ΔOP_1P é retângulo.



Assim, para esse triângulo, podemos escrever:

$$\text{sen } \alpha = \frac{P_1P}{OP}$$

Sendo $OP = 1$ e P_1P a ordenada de P, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{P_1P}{1}$$

$$\text{sen } \alpha = P_1P$$

Portanto:

$$\text{sen } \alpha = \text{ordenada de } P$$

Podemos, então, ampliar o conceito de seno para qualquer número real α usando a ordenada de P, que é a imagem de α no ciclo trigonométrico.

Usualmente, as três funções (seno, cosseno e tangente) são apresentadas de uma só vez. No entanto, conhecendo a dificuldade dos estudantes para compreender a passagem de sen α, com α no ciclo trigonométrico, para a função seno, optamos por desenvolver uma função de cada vez, detalhando mais a primeira delas (a função seno) e deixando mais espaço para que os próprios estudantes desenvolvam o estudo das outras duas. Dessa forma, eles têm três chances distintas para se familiarizar com as funções trigonométricas e, portanto, mais possibilidades de aprender.

Função seno (sen) é a função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número α associa a ordenada do ponto P, imagem de α no ciclo trigonométrico.

$$\text{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

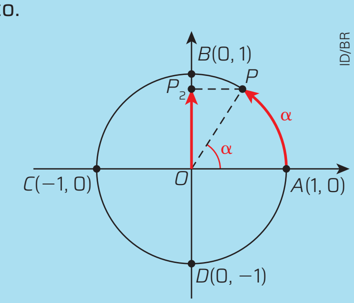
$$\alpha \mapsto \text{sen } \alpha = OP_2$$

OP_2 é a medida algébrica do segmento $\overline{OP_2}$.

Dizemos também que OP_2 é o seno de $A\hat{O}P$ ou de $\overset{\frown}{AP}$ e indicamos:

$$\text{sen } (A\hat{O}P) = \text{sen } (\overset{\frown}{AP})$$

$$\text{sen } (A\hat{O}P) = OP_2$$



O eixo Oy passa a ser denominado **eixo dos senos**.

PARA EXPLORAR

Livro

Valladares, Renato J. Costa. *O jeito matemático de pensar*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2012.

O capítulo 3 desse livro trata da relação entre a Matemática, questões culturais e questões técnicas. Vale a pena ler!

Casos particulares

A figura anterior nos permite observar que, quando α assume os valores zero, $\frac{\pi}{2}$, π ou $\frac{3\pi}{2}$, o ponto P coincide, respectivamente, com $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$ e $D(0, -1)$. Nesse caso, temos:

- $\text{sen } 0 = \text{sen } 0° = 0$
- $\text{sen } \frac{\pi}{2} = \text{sen } 90° = 1$
- $\text{sen } \pi = \text{sen } 180° = 0$
- $\text{sen } \frac{3\pi}{2} = \text{sen } 270° = -1$

Sempre que possível, oriente os estudantes a ler as imagens do livro, identificando seus elementos e intencionalidade. Isso os ajuda a perceber que o livro é um recurso para o aprendizado e que as imagens são parte desse aprendizado.

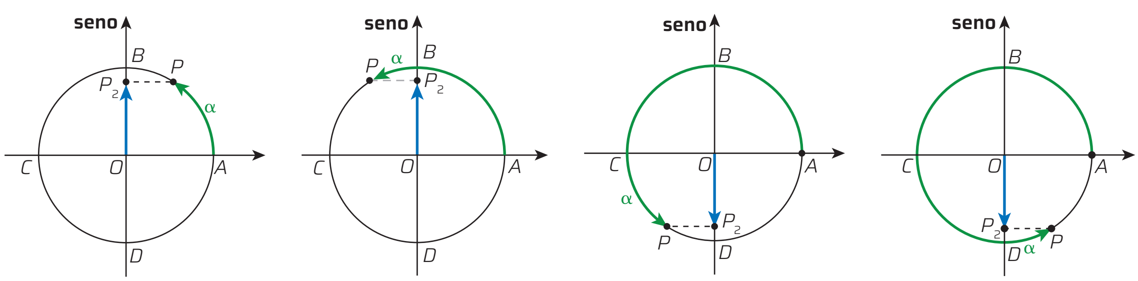
Sinal da função seno

Ao investigar as relações e a representação dos arcos notáveis, os estudantes ganham familiaridade com o ciclo trigonométrico e com a definição do seno de arcos. Essa proposta valoriza o desenvolvimento de estratégias de investigação e pode ser complementada com a construção de um modelo do ciclo trigonométrico em papel.

Vamos analisar o sinal de sen α quando P, imagem de α no ciclo trigonométrico, pertence a cada um dos quadrantes.

Em cada figura a seguir, P_2 é a projeção ortogonal de P sobre o eixo dos senos.

Ilustrações: ID/BR

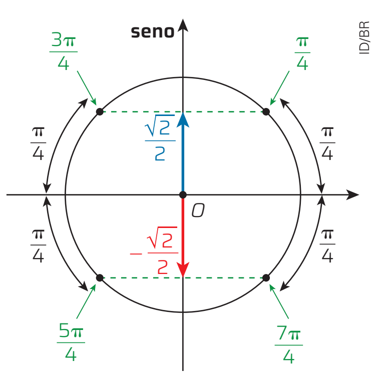


P_2 acima do centro O: sen $\alpha > 0$	P_2 acima do centro O: sen $\alpha > 0$	P_2 abaixo do centro O: sen $\alpha < 0$	P_2 abaixo do centro O: sen $\alpha < 0$

Alguns valores notáveis

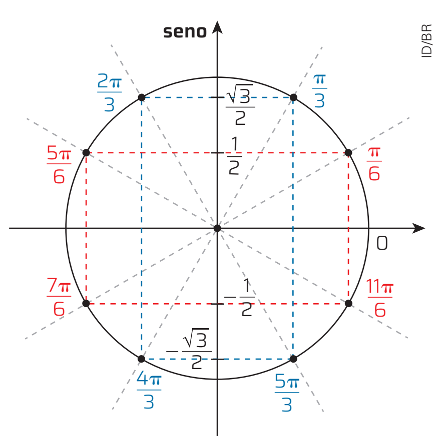
Assim como na trigonometria do triângulo retângulo, na trigonometria do ciclo trigonométrico há ângulos que são mais utilizados e, por isso, são conhecidos como **notáveis**. São eles: $30°\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$, $45°\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$, $60°\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$ e seus múltiplos.

Observe que, ao usar o valor do seno de $\frac{\pi}{4}(45°)$ e a simetria em relação ao eixo das abscissas, podemos obter mais alguns valores dos senos de múltiplos de $\frac{\pi}{4}(45°)$:



- sen $\frac{\pi}{4}$ = sen 45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$
- sen $\frac{3\pi}{4}$ = sen 135° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$
- sen $\frac{5\pi}{4}$ = sen 225° $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- sen $\frac{7\pi}{4}$ = sen 135° $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Da mesma maneira, podemos obter os valores dos senos de múltiplos de $30°\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$ e de $60°\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$.

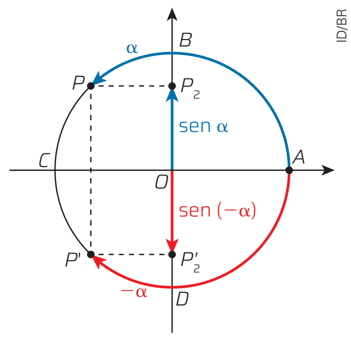


No quadro a seguir estão listados os ângulos notáveis, alguns de seus múltiplos e os valores do seno desses ângulos.

α (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Seno do oposto de um número

Qualquer que seja o número real α, as imagens P e P' no ciclo trigonométrico (respectivamente de α e de $-\alpha$) são simétricas em relação ao eixo das abscissas, e suas projeções ortogonais sobre o eixo dos senos, P_2 e P'_2, são simétricas em relação ao centro O. Logo:



$\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

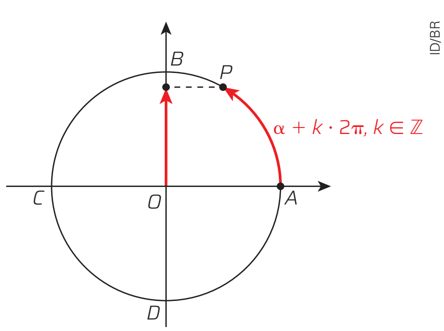
Essa igualdade nos permite calcular o seno de números negativos a partir do seno de números positivos.

Exemplos

- $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
- $\text{sen}\,(-90°) = -\text{sen}\,90° \Rightarrow \text{sen}\,(-90°) = -1$

Senos de arcos côngruos

Qualquer que seja o número real α, os arcos de medidas α e $\alpha + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, com origem em A, têm a mesma extremidade P. Logo:



$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(\alpha + k \cdot 2\pi)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplos

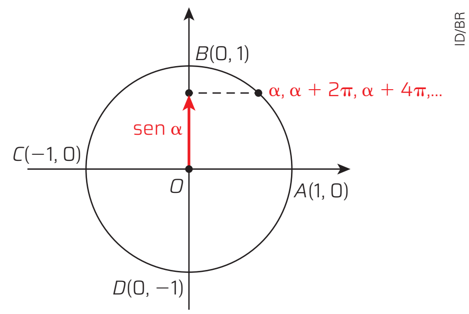
- $\text{sen}\,2\pi = \text{sen}\,4\pi = \text{sen}\,6\pi = \text{sen}\,0 = 0$
- $\text{sen}\,810° = \text{sen}\,450° = \text{sen}\,90° = 1$
- Para calcular $\text{sen}\,\frac{35\pi}{3}$, é preciso considerar a determinação principal desse arco, que mede $\frac{5\pi}{3}$.

Então:

$$\text{sen}\,\frac{35\pi}{3} = \text{sen}\,\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Periodicidade, domínio e imagem da função seno

Observe que há repetição dos valores de sen α de 2π em 2π, de 4π em 4π, de 6π em 6π, etc. Na linguagem matemática, dizemos que a função seno é uma **função periódica**.



$$\text{sen } \alpha = \text{sen } (\alpha + 2\pi) = \text{sen } (\alpha + 4\pi) = \text{sen } (\alpha + 6\pi) = \ldots = \text{sen } (\alpha + k \cdot 2\pi), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Seno é uma função periódica de período 2π.

De modo geral, dizemos que uma função f é **periódica** se existe $p > 0$ que satisfaça a seguinte condição:

$f(x + p) = f(x)$, para todo $x \in D(f)$.

O menor valor positivo de p é o **período** de f.

O **domínio** da função seno é $\mathbb{R}$ porque sempre podemos tomar a ordenada de um ponto que represente qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Como os valores do seno são as ordenadas dos pontos do ciclo trigonométrico, o seno assume todos os valores entre -1 e 1 e, por essa razão, a **imagem** da função seno é igual a $[-1, 1]$. Daí:

$-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

No tópico "Variação, gráfico e conjunto imagem das funções seno, cosseno e tangente" deste capítulo, vamos verificar novamente que $\text{Im(sen)} = [-1, 1]$.

Oriente os estudantes a ler em duplas as atividades resolvidas e a analisar as resoluções apresentadas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R1 **Calcule o valor do seno solicitado em cada item.**

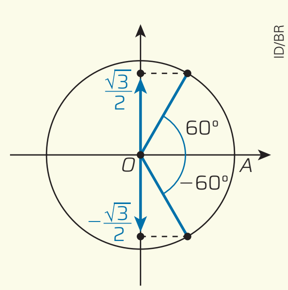
a) sen $(-60°)$ **b)** sen $1485°$ **c)** sen $2x - \text{sen}^2 x$, para $x = \frac{7\pi}{6}$

Resolução

É importante relacionarmos os ângulos dados à sua determinação principal, que estudamos no capítulo anterior, e a um ângulo do 1º quadrante, do qual conhecemos as razões trigonométricas.

a) Observe a representação de sen $(-60°)$ e sen $60°$ no ciclo trigonométrico.

$$\text{sen } (-60°) = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



b) $1485° = 4 \cdot 360° + 45°$

A determinação principal de 1485° é 45°; então:

$$\text{sen } 1485° = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) $x = \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

Repare que $\frac{7\pi}{6}$ está no 3º quadrante, então sen $\frac{7\pi}{6}$ será negativo:

$$\text{sen } \frac{7\pi}{6} = -\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{-1}{2}$$

Note que:

$$2x = \frac{14\pi}{6} = 2\pi + \frac{2\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

A determinação principal de $\frac{14\pi}{6}$ é $\frac{\pi}{3}$; então:

$$\text{sen } \frac{14\pi}{6} = \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Daí:

$$\text{sen } 2x - \text{sen}^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - 1}{4}$$

R2 **Sabendo que Im(sen) = [−1, 1], determine a imagem da função $f(\alpha) = 2 + 3$ sen α.**

Resolução

Fazendo $y = 2 + 3$ sen α, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{y - 2}{3}$$

Como $-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$-1 \leqslant \frac{y-2}{3} \leqslant 1$$

$$-3 \leqslant y - 2 \leqslant 3$$

$$-1 \leqslant y \leqslant 5$$

Portanto, $\text{Im}(f) = [-1, 5]$.

R3 **Determine m para que a equação sen $x = -3m + 4$ seja possível.**

Resolução

Como $-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$-1 \leqslant -3m + 4 \leqslant 1$$

$$-5 \leqslant -3m \leqslant -3$$

$$\frac{5}{3} \geqslant m \geqslant 1$$

Portanto, $1 \leqslant m \leqslant \frac{5}{3}$.

R4 **Determine o período da seguinte função:**

$$f(\alpha) = 2 \text{ sen} \left(3\alpha + \frac{\pi}{5}\right)$$

Resolução

Como o período da função seno é 2π, basta obter a amplitude do intervalo ao qual α pertence quando $3\alpha + \frac{\pi}{5}$ percorre um intervalo de tamanho 2π. Para isso, determinamos α_1 e α_2, tais que:

$$3\alpha_1 + \frac{\pi}{5} = 0 \qquad\qquad 3\alpha_2 + \frac{\pi}{5} = 2\pi$$

$$3\alpha_1 = -\frac{\pi}{5} \qquad \text{e} \qquad 3\alpha_2 = 2\pi - \frac{\pi}{5}$$

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{15} \qquad\qquad \alpha_2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{15}$$

Logo, a amplitude do intervalo de variação de α é:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = \left|-\frac{\pi}{15} - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{15}\right)\right|$$

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = \frac{2\pi}{3}$$

Portanto, o período de $f(\alpha) = 2$ sen $\left(3\alpha + \frac{\pi}{5}\right)$ é $\frac{2\pi}{3}$.

As atividades **1**, **2**, **3**, **4**, **9** e **12** correspondem a problemas centrais. As outras podem ser propostas como tarefa complementar, para que os estudantes trabalhem individualmente os procedimentos algébricos envolvidos nos cálculos com razões trigonométricas e números irracionais.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Leia as atividades desta seção e identifique quais delas se assemelham às atividades da seção *Problemas e exercícios resolvidos*. Isso vai ajudar você em caso de dúvidas.

1 **Calcule.**

a) sen 390° $\frac{1}{2}$

b) sen 4 080° $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) sen (−765°) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 **Descubra o ângulo α do 4º quadrante cujo:**

a) sen $\alpha = -\frac{1}{2}$; 330°

b) sen $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Não existe.

3 **Calcule o valor de cada expressão.**

a) sen 0° · sen 135° + sen 30° · sen 360° 0

b) $\text{sen } \frac{\pi}{3} \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{2} - \text{sen } \frac{4\pi}{3} \cdot \text{sen } \frac{2\pi}{3}$ $\frac{3 - 2\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{3}\,(\text{sen } 120° - \text{sen } 240°)}{\text{sen } 330° - \text{sen } 180°}$ -6

d) $\frac{\sqrt{2} \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4} - \text{sen } \frac{5\pi}{6}}{\text{sen } \pi + \text{sen } \frac{7\pi}{6}}$ -1

e) sen 390° · sen 90° + sen 450° · sen 750° 1

Não escreva no livro.

4 Calcule o valor de:

a) $\text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2} + \text{sen}\,2x - \text{sen}\,3x$, para $x = \frac{\pi}{2}$; 2

b) $\frac{\text{sen}\,2x + \text{sen}\,4x}{\text{sen}\,x + \text{sen}\,3x}$, para $x = \frac{\pi}{6}$. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

5 Determine o sinal de y em cada caso.

a) $y = \text{sen}\,100° + \text{sen}\,170°$ $y > 0$

b) $y = \text{sen}\,\frac{7\pi}{5} \cdot \text{sen}\,\frac{19\pi}{12}$ $y > 0$

c) $y = \dfrac{\text{sen}\,\frac{7\pi}{10} \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{5}}{\text{sen}\,\frac{9\pi}{8} + \text{sen}\,\frac{8\pi}{5}}$ $y < 0$

6 Calcule sen α para α igual a $-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6}, -\pi, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}, -\frac{11\pi}{6}$ e -2π. Consulte a resposta no Manual do Professor.

7 Calcule o valor de:

a) $y = \text{sen}\,x + \text{sen}\,2x + \text{sen}\,3x + \text{sen}\,4x$, para $x = -60°$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $y = 4^{\text{sen}\,x} + 9^{\text{sen}\,3x} + 5^{\text{sen}\,6x}$, para $x = -30°$. $\frac{29}{18}$

8 Calcule o valor de:

a) $\text{sen}\,399\pi$ 0

b) $\text{sen}\,\frac{247\pi}{6}$ $-\frac{1}{2}$

c) $\text{sen}\left(-\frac{53\pi}{4}\right)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9 Em cada caso, calcule y em função de sen α.

a) $y = \text{sen}\,(\alpha - 2\pi) + \text{sen}\,(\alpha + 2\pi) + \text{sen}\,(\alpha + 4\pi) + \text{sen}\,(\alpha - 4\pi)$ $y = 4 \cdot \text{sen}\,\alpha$

b) $y = \text{sen}\,(-\alpha - 2\pi) - \text{sen}\,(-\alpha - 4\pi) + \text{sen}\,(-\alpha + 2\pi) + \text{sen}\,(-\alpha + 4\pi)$ $y = -2 \cdot \text{sen}\,\alpha$

10 Indique o máximo e o mínimo valor que pode ter cada uma das expressões a seguir.

a) $5 \cdot \text{sen}\,\beta$ Mínimo: -5 Máximo: 5

b) $\text{sen}\,\beta + 3$ Mínimo: 2 Máximo: 4

c) $\frac{1}{2 + \text{sen}\,\beta}$ Mínimo: $\frac{1}{3}$ Máximo: 1

11 Determine o conjunto imagem de cada função.

a) $f(\alpha) = -2 + 3\,\text{sen}\,\alpha$ $Im(f) = [-5, 1]$

b) $f(\alpha) = 1 - 2\,\text{sen}\,\alpha$ $Im(f) = [-1, 3]$

12 Determine m para que cada equação a seguir seja possível.

a) $\text{sen}\,x = 2m - 1$ $0 \leqslant m \leqslant 1$

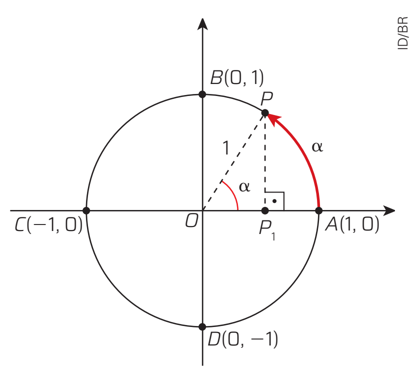
b) $\text{sen}\,x = -3m + 5$ $\frac{4}{3} \leqslant m \leqslant 2$

Em caso de dúvida, volte a analisar a atividade **R3**.

FUNÇÃO COSSENO

Para estudar a função cosseno, organize os estudantes em grupos e peça-lhes que leiam e comentem o texto, sob sua supervisão. Depois, proponha uma discussão para analisar com eles as semelhanças e as diferenças entre as funções seno e cosseno, a fim de sistematizar a aprendizagem e sanar eventuais dúvidas.

Na figura a seguir, α é a medida do ângulo agudo $A\hat{O}P$, e o ΔOP_1P é retângulo.



A partir da definição de cosseno para ângulos agudos em um triângulo retângulo, podemos escrever:

$$\cos\alpha = \frac{OP_1}{OP}$$

Sendo $OP = 1$ e $\overline{OP_1}$ a abscissa de P, temos:

$$\cos\alpha = \frac{OP_1}{1}$$

$$\cos\alpha = OP_1$$

Portanto:

$$\boxed{\cos\alpha = \text{abscissa de } P}$$

Podemos, assim, ampliar o conceito de cosseno para qualquer número real α, usando a abscissa do ponto *P*, que é a imagem de α no ciclo trigonométrico.

Função cosseno (**cos**) é a função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número α associa a abscissa do ponto *P*, imagem de α no ciclo trigonométrico.

$$\text{cos}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

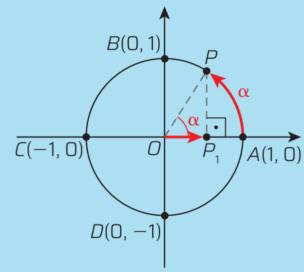
$$\alpha \mapsto \cos\alpha = OP_1$$

Dizemos também que OP_1 é o cosseno de $A\hat{O}P$ ou de $\overset{\frown}{AP}$ e indicamos:

$$\cos\left(A\hat{O}P\right) = \cos\left(\overset{\frown}{AP}\right)$$

$$\cos\left(A\hat{O}P\right) = OP_1$$

O eixo *Ox* passa a ser denominado **eixo dos cossenos**.



Casos particulares

Na figura anterior, observamos que, quando α assume os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π ou $\frac{3\pi}{2}$, o ponto *P* coincide, respectivamente, com *A*(1, 0), *B*(0, 1), *C*(−1, 0) e *D*(0, −1). Então, temos:

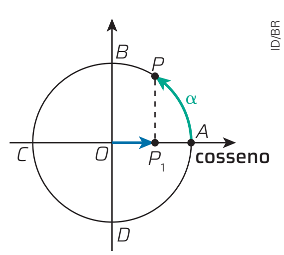
- $\cos 0 = \cos 0° = 1$
- $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$
- $\cos\pi = \cos 180° = -1$
- $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos 270° = 0$

Sinal da função cosseno

Vamos analisar o sinal de $\cos\alpha$ quando *P*, imagem de α no ciclo trigonométrico, pertence a cada um dos quadrantes.

Em cada figura a seguir, P_1 é a projeção ortogonal de *P* sobre o eixo dos cossenos.

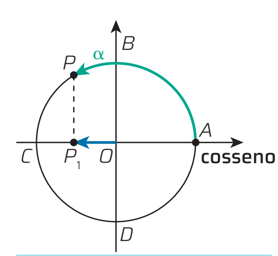
***P* no 1º quadrante**



P_1 à direita do centro *O*:

$\cos\alpha > 0$

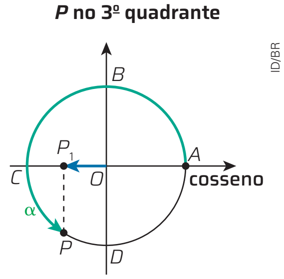
***P* no 2º quadrante**



P_1 à esquerda do centro *O*:

$\cos\alpha < 0$

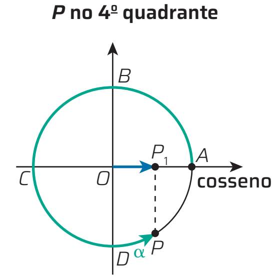
***P* no 3º quadrante**



P_1 à esquerda do centro *O*:

$\cos\alpha < 0$

***P* no 4º quadrante**



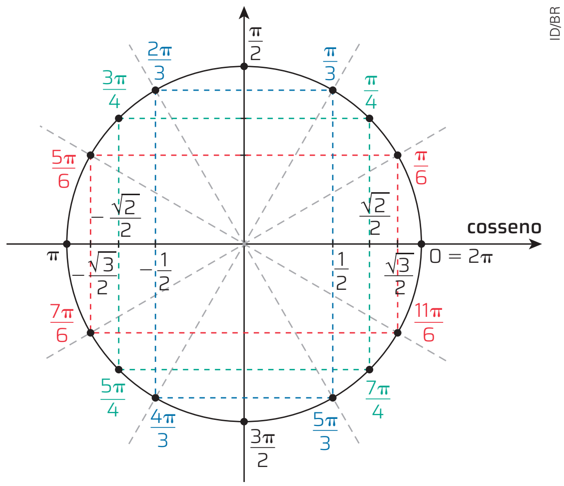
P_1 à direita do centro *O*:

$\cos\alpha > 0$

Alguns valores notáveis

Do mesmo modo que os senos, os cossenos de 30° $\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$, 45° $\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$, 60° $\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$ e seus múltiplos também são bastante utilizados em problemas de funções trigonométricas.

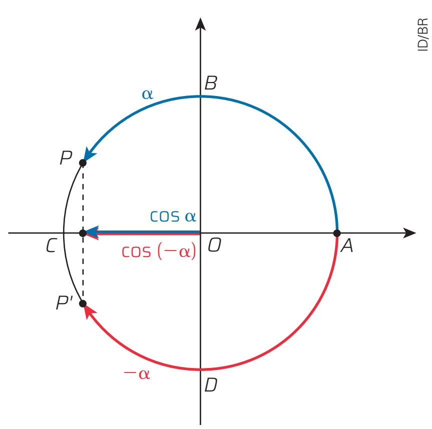
Observe que, ao usar os valores dos cossenos de $\frac{\pi}{6}$ (30°), $\frac{\pi}{4}$ (45°) e $\frac{\pi}{3}$ (60°) e a simetria em relação aos eixos coordenados, podemos obter os valores dos cossenos dos múltiplos desses ângulos.



α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Cosseno do oposto de um número

Qualquer que seja o número real α, as imagens P e P' no ciclo trigonométrico, respectivamente de α e de $-\alpha$, são simétricas em relação ao eixo das abscissas. Logo:



$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Assim, quando α é um número negativo, seu cosseno pode ser calculado a partir do cosseno de $-\alpha$, que será um número positivo.

Exemplos

- $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(-120°) = \cos 120° \Rightarrow \cos(-120°) = -\frac{1}{2}$
- $\cos(-\pi) = \cos(\pi) \Rightarrow \cos(-\pi) = -1$

Função par e função ímpar

Dada uma função $f: A \to B$, dizemos que:

- f é **par** se, e somente se, $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in A$;
- f é **ímpar** se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in A$.

A função cosseno, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é uma função par. Observe que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

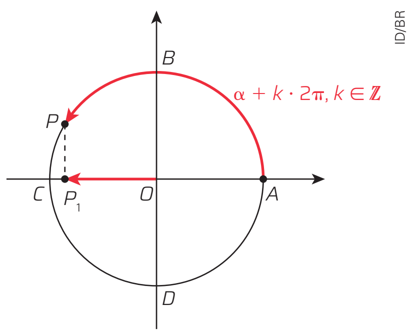
$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(-x) = \cos(-x) = \cos x \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

A função seno, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é uma função ímpar. Observe que $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \text{sen}\,x \Rightarrow f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen}\,x \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Cosseno de arcos côngruos

Qualquer que seja o número real α, os arcos de medidas α e $\alpha + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem A e a mesma extremidade P. Logo:



$\cos\alpha = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplos

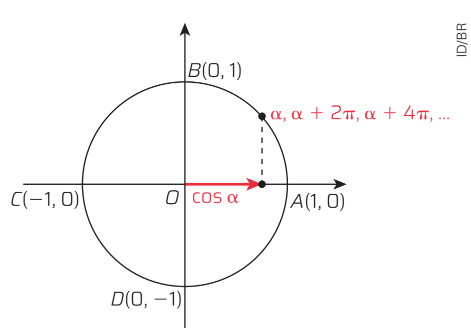
- $\cos 8\pi = \cos 6\pi = \cos 4\pi = \cos 2\pi = \cos 0 = 1$
- $\cos\frac{9\pi}{2} = \cos\frac{7\pi}{2} = \cos\frac{5\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$
- $\cos\frac{26\pi}{3}$

  A determinação principal do arco de medida $\frac{26\pi}{3}$ rad mede $\frac{2\pi}{3}$ rad. Então:

  $\cos\frac{26\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{26\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Periodicidade, domínio e imagem da função cosseno

Observe que há repetição dos valores de $\cos\alpha$ de 2π em 2π, de 4π em 4π, de 6π em 6π, etc.



$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 4\pi) = \cos(\alpha + 6\pi) = \ldots = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Cosseno é uma função periódica de período 2π.

Analise com os estudantes os principais erros que podem ter cometido na resolução das atividades **13** a **19**. Depois, organize com eles uma lista de cuidados que devem ter para evitar esses erros em outras atividades.

O **domínio** da função cosseno é $\mathbb{R}$ porque sempre podemos tomar a abscissa de um ponto que represente qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Como os valores do cosseno são as abscissas dos pontos do ciclo trigonométrico, a função cosseno assume todos os valores entre -1 a 1 e, por essa razão, a **imagem** dessa função é igual a $[-1, 1]$. Daí:

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13 Calcule o valor de:

a) $\cos 3\,990°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos \frac{35\pi}{3}$ $\frac{1}{2}$

c) $\cos(-3\,465°)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos\left(-\frac{40\pi}{3}\right)$ $-\frac{1}{2}$

14 Calcule o valor em cada caso.

a) $\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{5\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\cdot\cos\frac{5\pi}{6}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{\cos 60° - \sqrt{3}\cdot\cos 210°}{\sqrt{3}\cdot\cos 330° - \cos 120°}$ 1

15 Admitindo satisfeitas as condições de existência, simplifique:

a) $\dfrac{a^2\cdot\cos 180° + b^2\cdot\cos 0°}{-a\cdot\cos 45° + b\cdot\cos 225°}$ $\sqrt{2}(a-b)$

b) $\dfrac{(a+b)\cdot\cos\frac{3\pi}{4} + b\cdot\cos\frac{3\pi}{2}}{a\cdot\cos\frac{\pi}{4} + b\cdot\cos\frac{7\pi}{4}}$ -1

16 Calcule o valor de:

a) $y = \cos x + \cos 3x + \cos 4x$, para $x = -60°$; -1

b) $y = (\cos 6x + 5\cdot\cos 12x)^{\cos 4x}$, para $x = -\frac{\pi}{6}$. $\frac{1}{2}$

17 Escreva a alternativa correta no caderno.

(Eear-FAB) Qual o valor da elongação, em metros, no instante t = 5 s no MHS descrito abaixo pela equação? Observação: a equação está expressa em unidades do Sistema Internacional de Unidades. Alternativa **d**.

$$x = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

a) 2,5

b) $-2{,}5$

c) 5

d) -5

18 Determine o sinal de:

a) $y = \cos(-220°)\cdot\cos(-140°) + \cos(-70°)\cdot\cos(-350°)$ $y > 0$

b) $y = \dfrac{\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(-\frac{9\pi}{5}\right)}{\cos\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\cdot\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)}$ $y > 0$

19 Expresse y em função de $\cos\alpha$.

a) $y = \cos(\alpha + 2\pi) + \cos(\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 4\pi) - \cos(\alpha - 4\pi)$ $2\cos\alpha$

b) $y = \cos(-\alpha - 2\pi) + \cos(-\alpha + 2\pi) + \cos(-\alpha - 4\pi) + \cos(-\alpha + 4\pi)$ $4\cos\alpha$

RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

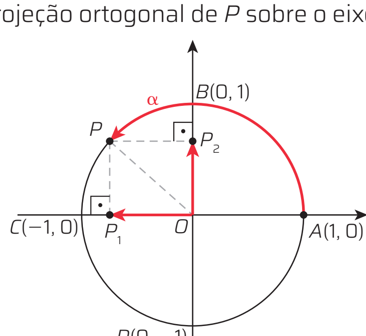
Em um triângulo retângulo, em que α é a medida de um dos ângulos agudos, é válida a relação:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Essa relação é denominada **relação fundamental da Trigonometria**.

Vamos ampliá-la para qualquer número real α.

Qualquer que seja o número real $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$, existe o triângulo OPP_1, em que P é a imagem de α no ciclo trigonométrico e P_1 é a projeção ortogonal de P sobre o eixo das abscissas.



ID/BR

No $\triangle OPP_1$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(P_1P)^2 + (OP_1)^2 = (OP)^2$$

Mas temos que:

- $P_1P = OP_2 = |\text{sen}\ \alpha|$
- $OP_1 = |\cos \alpha|$
- $OP = 1$

Então:

$$(\text{sen}\ \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

Agora, vamos analisar o que ocorre quando $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Temos duas situações:

1ª situação: Quando k assume valores pares

- Se P coincide com A, então: $\text{sen}\ \alpha = 0$ e $\cos \alpha = 1$
- Se P coincide com C, então: $\text{sen}\ \alpha = 0$ e $\cos \alpha = -1$

2ª situação: Quando k assume valores ímpares

- Se P coincide com B, então: $\text{sen}\ \alpha = 1$ e $\cos \alpha = 0$
- Se P coincide com D, então: $\text{sen}\ \alpha = -1$ e $\cos \alpha = 0$

Em cada um desses casos, a substituição de $\text{sen}\ \alpha$ e $\cos \alpha$ pelos respectivos valores em $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nos mostra a validade da relação. Portanto:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Em duplas, utilizem esta sequência de atividades resolvidas do seguinte modo: estudem a atividade **R5** e, depois, resolvam as atividades **20** e **21** da seção *Problemas e exercícios propostos*; analisem a atividade **R6** e, então, resolvam a atividade **23**; estudem a atividade **R8** e façam as atividades **25** e **27**.

R5 **Sendo $\text{sen}\ \alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\cos \alpha$.**

Resolução

Substituindo $\text{sen}\ \alpha$ por $-\frac{3}{5}$ em $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, temos:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ ou } \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

Mas $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, então $\cos \alpha < 0$. Portanto, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

R6 **Prove que $\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2\ \text{sen}^2 \alpha - 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.**

Resolução

$$\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \underbrace{(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_{1}(\text{sen}^2 \alpha - \underbrace{\cos^2 \alpha}_{1 - \text{sen}^2 \alpha})$$

$$\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \text{sen}^2 \alpha - (1 - \text{sen}^2 \alpha)$$

$$\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2\ \text{sen}^2 \alpha - 1$$

R7 **Sendo $\text{sen}\ \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$, determine:**

a) $\text{sen}\ \alpha$ e $\cos \alpha$;

b) o quadrante ao qual pertence a extremidade do arco de medida α.

Resolução

a) Vamos montar um sistema com a equação dada e a relação fundamental da Trigonometria.

$$\begin{cases} \text{sen}\ \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5} & (1) \\ \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 & (2) \end{cases}$$

De (1), obtemos $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{5} - \cos \alpha$.

Aproveite a oportunidade e verifique como as duplas estão compreendendo os problemas e exercícios resolvidos e aplicando esse conhecimento na resolução das atividades propostas. Oportunidades como essa contribuem para a aquisição da competência geral **9** da BNCC, pois possibilitam aos estudantes exercitar a empatia e aprender a respeitar diferentes saberes e opiniões.

Substituindo em (2), obtemos:

$$\left(\frac{1}{5} - \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{1}{25} - \frac{2}{5} \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 - 10 \cos \alpha + 50 \cos^2 \alpha = 25$$

$$25 \cos^2 \alpha - 5 \cos \alpha - 12 = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ ou } \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

Substituindo em (1):

- $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, obtemos $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$;
- $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, obtemos $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$.

b) Se $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ e $\text{sen } \alpha = -\frac{3}{5}$, então a extremidade do arco de medida α está no 4º quadrante.
Se $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ e $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$, então a extremidade do arco de medida α está no 2º quadrante.
Portanto, a extremidade do arco de medida α está no 2º ou no 4º quadrante.

R8 **Determine k para que se tenha, simultaneamente, $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{k-2}}{k}$ e $\cos \alpha = \frac{2}{k}$.**

Resolução

Condição de existência:

- para $\frac{\sqrt{k-2}}{k}$, $k - 2 \geqslant 0$ e $k \neq 0$;
- para $\frac{2}{k}$, $k \neq 0$.

Logo, a condição de existência para $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{k-2}}{k}$ e $\cos \alpha = \frac{2}{k}$ é $k \geqslant 2$.

Substituindo $\text{sen } \alpha$ por $\frac{\sqrt{k-2}}{k}$ e $\cos \alpha$ por $\frac{2}{k}$ na equação fundamental, temos:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{k-2}}{k}\right)^2 + \left(\frac{2}{k}\right)^2 = 1$$

$$\frac{k-2}{k^2} + \frac{4}{k^2} = 1$$

$$k^2 - k - 2 = 0$$

$k = 2$ (satisfaz a condição de existência $k \geqslant 2$) ou

$k = -1$ (não satisfaz a condição de existência $k \geqslant 2$)

Portanto, $k = 2$.

As atividades a seguir são mais complexas que as anteriores. Sugerimos que dê aos estudantes um tempo maior para a resolução delas, uma vez que eles precisarão relacionar o que aprenderam de seno e de cosseno, representação de arcos no ciclo trigonométrico e cálculo algébrico para a simplificação de expressões e a resolução de equações. Oriente-os a utilizar a lista elaborada por eles no final das atividades **13** a **19** sobre os cuidados ao resolver exercícios de Trigonometria.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

20 Calcule:

a) $\cos \alpha$, sabendo que $\text{sen } \alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $-\frac{12}{13}$

b) $\text{sen } \alpha$, sabendo que $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; $-\frac{15}{17}$

c) $\cos \alpha$, dado $\text{sen } \alpha = -\frac{4}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\frac{3}{5}$

d) $\text{sen } \alpha$, dado $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. $\frac{2}{3}$

21 Calcule:

a) $\cos \alpha$, sabendo que $\text{sen } \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$; $\pm \frac{5}{7}$

b) $\text{sen } \alpha$, sabendo que $\cos \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$. $\pm \frac{7}{9}$

22 Admitindo satisfeitas as condições de existência, simplifique:

a) $\frac{(\text{sen } \alpha + \cos \alpha)^2 - 4 \text{ sen } \alpha \cdot \cos \alpha}{(\text{sen } \alpha - \cos \alpha)^2}$ 1

b) $\frac{a \cdot \text{sen}^2 \alpha + a \cdot \cos^2 \alpha - b \cdot \text{sen}^2 \alpha - b \cdot \cos^2 \alpha}{2a - 2b}$ $\frac{1}{2}$

23 Calcule os valores de **sen α** e **cos α** que satisfazem a condição $2 \text{ sen } \alpha + \cos \alpha = -2$. Consulte a resposta no Manual do Professor.

24 Prove que: Consulte as respostas no Manual do Professor.

a) $\cos^4 \alpha - \text{sen}^4 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

b) $\frac{2 + \cos \alpha - 2 \text{ sen}^2 \alpha}{1 - \text{sen}^2 \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} = 2$

25 Resolva as equações em x. Consulte as respostas no Manual do Professor.

a) $x^2 - 2x + \text{sen}^2 \alpha = 0$

b) $x^2 - (\text{sen } \alpha + \cos \alpha)x + \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha = 0$

c) $\text{sen } \alpha \cdot x^2 - 2(\text{sen } \alpha - \cos \alpha)x - 4 \cos \alpha = 0$, $\alpha \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

d) $x^2 - 2(\cos \alpha) \cdot x - 1 - \text{sen}^2 \alpha = 0$

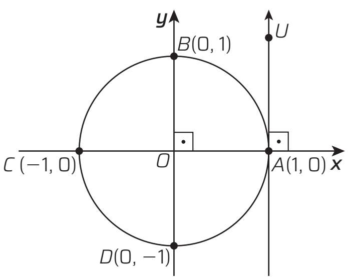
26 Determine k para que se tenha, simultaneamente, $\text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{-2k+2}}{k}$ e $\cos \alpha = \frac{1}{k}$. $k = -3$ ou $k = 1$.

27 Determine os valores de k para que cada uma das condições a seguir seja possível.

a) $\text{sen } \alpha = \frac{2-k}{3}$ $-1 \leqslant k \leqslant 5$

b) $\cos \beta = \frac{3k-4}{2}$ $\frac{2}{3} \leqslant k \leqslant 2$

FUNÇÃO TANGENTE

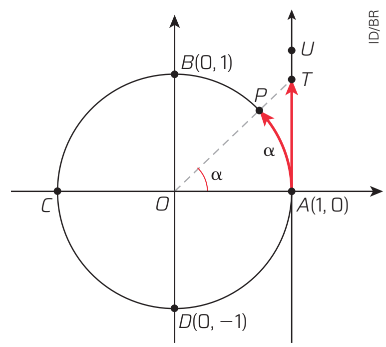


Pela origem A dos arcos, vamos considerar o eixo $\overleftrightarrow{AU}$ com as seguintes características:

- $\overleftrightarrow{AU}$ é paralela a Oy;
- a unidade de medida e o sentido de $\overleftrightarrow{AU}$ são os mesmos de Oy;
- $\overleftrightarrow{AU}$ é tangente à circunferência trigonométrica no ponto A.

Na figura a seguir, α é a medida do ângulo agudo $A\hat{O}P$, P é a imagem de α no ciclo trigonométrico, e T é ponto de intersecção de $\overleftrightarrow{AU}$ com $\overleftrightarrow{OP}$.

Podemos, então, ampliar o conceito de tangente para um número real α, usando a ordenada de T.



Como o $\triangle OAT$ é retângulo, podemos escrever:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{AT}{OA}$$

Sendo $OA = 1$ e AT a ordenada de T, temos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{AT}{1} = AT$$

Portanto:

$$\boxed{\text{tg}\ \alpha = \text{ordenada de } T}$$

Antes de darmos a definição de tangente, observe que o ponto T existe se, e somente se, P não coincide com B ou D.

Como a B e a D correspondem os números $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, podemos dizer que:

Existe T, ponto de intersecção de $\overleftrightarrow{AU}$ com $\overleftrightarrow{OP}$, se, e somente se, P é a imagem de $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, no ciclo trigonométrico.

Observe que a restrição $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ é natural porque, se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, não existirá tg α, pois sabemos que $\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$. Como $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1$, teríamos:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{1}{0}$$

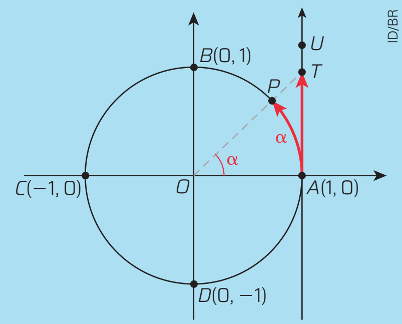
Portanto, nesse caso, tg α não existe.

Geometricamente, podemos analisar esse fato observando que, à medida que α se aproxima de $\frac{\pi}{2}$, a tg α assume valores cada vez maiores, sem que haja um valor para representar tg $\frac{\pi}{2}$.

Função tangente (**tg**) é a função, de $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$ em $\mathbb{R}$, que a todo número α pertencente ao domínio associa a ordenada do ponto T, intersecção de $\overleftrightarrow{AU}$ com $\overleftrightarrow{OP}$, em que P é a imagem de α no ciclo trigonométrico.

$$\text{tg}: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$

$$\alpha \mapsto \text{tg } \alpha = AT$$



Dizemos também que AT é a tangente de $A\hat{O}P$ ou de $\overset{\frown}{AP}$ e indicamos:

$$\text{tg}\left(A\hat{O}P\right) = \text{tg}\left(\overset{\frown}{AP}\right)$$

$$\text{tg}\left(A\hat{O}P\right) = AT$$

O eixo $\overleftrightarrow{AU}$ passa a ser denominado **eixo das tangentes**.

Casos particulares

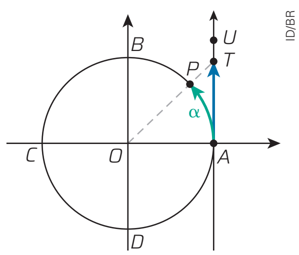
Na figura anterior, observamos que, quando α assume os valores zero ou π, P coincide, respectivamente, com A ou C, e T coincide com $A(1, 0)$. Logo:

- $\text{tg } 0 = \text{tg } 0° = 0$
- $\text{tg } \pi = \text{tg } 180° = 0$

Sinal da função tangente

Vamos estudar o sinal de tg α quando P, imagem de α no ciclo trigonométrico, pertence a cada um dos quadrantes.

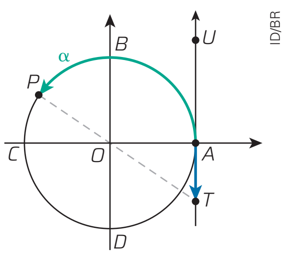
_P_ no 1º quadrante



T acima de A:

$\text{tg } \alpha > 0$

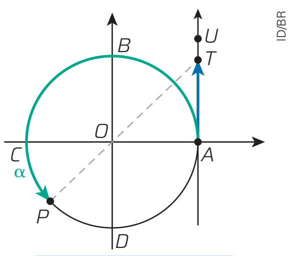
_P_ no 2º quadrante



T abaixo de A:

$\text{tg } \alpha < 0$

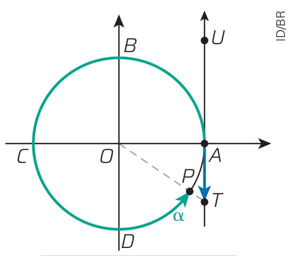
_P_ no 3º quadrante



T acima de A:

$\text{tg } \alpha > 0$

_P_ no 4º quadrante

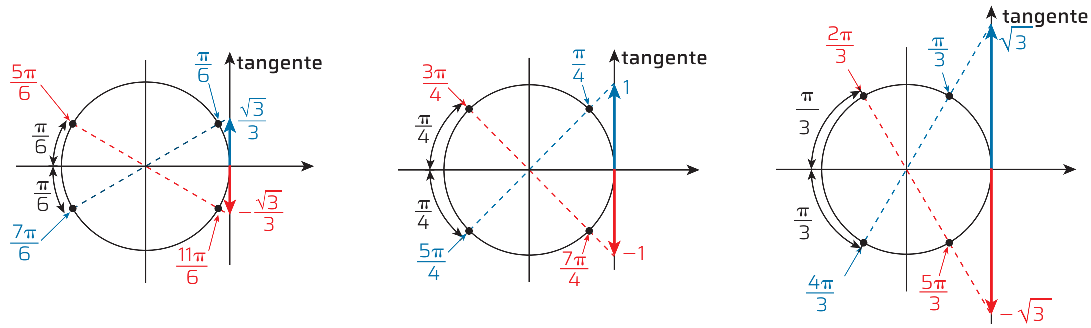


T abaixo de A:

$\text{tg } \alpha < 0$

Alguns valores notáveis

As tangentes dos ângulos $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{\pi}{4}$ rad, $\frac{\pi}{3}$ rad e seus múltiplos também são bastante utilizadas. Por isso, aplicando os valores das tangentes de $\frac{\pi}{6}$ (30°), $\frac{\pi}{4}$ (45°) e $\frac{\pi}{3}$ (60°) e a simetria em relação ao eixo das abscissas, vamos obter mais alguns valores da função tangente.



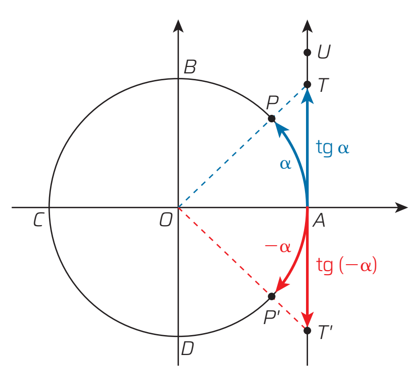
Ilustrações: ID/BR

$\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \text{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = \text{tg}\,45° = 1$	$\text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$
$\text{tg}\,\frac{5\pi}{6} = \text{tg}\,150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = \text{tg}\,135° = -1$	$\text{tg}\,\frac{2\pi}{3} = \text{tg}\,120° = -\sqrt{3}$
$\text{tg}\,\frac{7\pi}{6} = \text{tg}\,210° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{tg}\,\frac{5\pi}{4} = \text{tg}\,225° = 1$	$\text{tg}\,\frac{4\pi}{3} = \text{tg}\,240° = \sqrt{3}$
$\text{tg}\,\frac{11\pi}{6} = \text{tg}\,330° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{tg}\,\frac{7\pi}{4} = \text{tg}\,315° = -1$	$\text{tg}\,\frac{5\pi}{3} = \text{tg}\,300° = -\sqrt{3}$

Tangente do oposto de um número

Qualquer que seja o número real α, as imagens P e P' no ciclo trigonométrico (respectivamente de α e de $-\alpha$) são simétricas em relação ao eixo das abscissas e, para $\alpha \in D(\text{tg})$, as intersecções de $\overleftrightarrow{OP}$ e $\overleftrightarrow{OP'}$ com $\overleftrightarrow{AU}$ (respectivamente T e T') são simétricas em relação a A. Logo:

Por esse fato, dizemos que a função tangente é **função ímpar** e podemos calcular $\text{tg}\,(-\alpha)$ a partir de $\text{tg}\,\alpha$.



ID/BR

$$\text{tg}\,(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha,\ \alpha \in D(\text{tg})$$

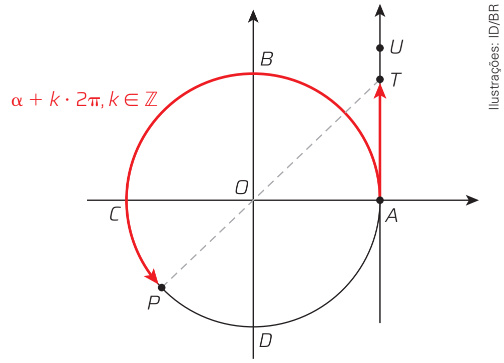
Se possível, solicite aos estudantes que retornem ao boxe da página 200, que trata de função par e função ímpar, para verificar que a função tangente é ímpar.

Exemplos

- $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\text{tg}\,\frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{tg}\,(-45°) = -\text{tg}\,45° \Rightarrow \text{tg}\,(-45°) = -1$

Tangente de arcos côngruos

Qualquer que seja o número real α, os arcos de medidas α e $\alpha + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem A e a mesma extremidade P. Logo:



$$\text{tg } \alpha = \text{tg } (\alpha + k \cdot 2\pi),\ \alpha \in \text{D(tg)},\ \text{para todo } k \in \mathbb{Z}$$

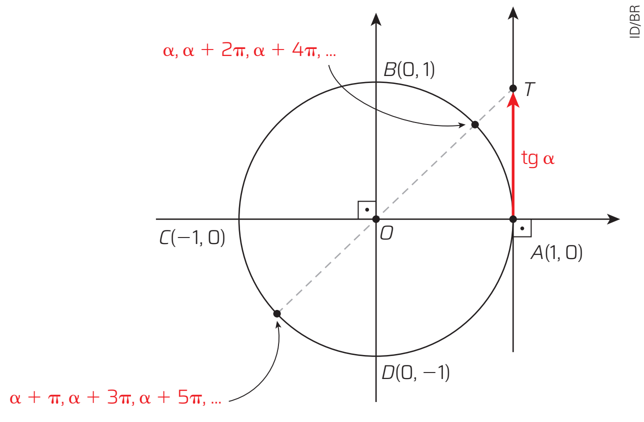
Exemplos

- $\text{tg } 6\pi = \text{tg } 4\pi = \text{tg } 2\pi = \text{tg } 0 = 0$
- Para calcular $\text{tg } \frac{32\pi}{3}$, é preciso considerar a determinação principal desse arco, que mede $\frac{2\pi}{3}$ rad.
  Logo:
  $\text{tg } \frac{32\pi}{3} = \text{tg } \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

Periodicidade, domínio e imagem da função tangente

Vamos verificar a periodicidade da função tangente.

Observe que há repetição dos valores de tg α de π em π, de 2π em 2π, de 3π em 3π, etc.



$$\text{tg } \alpha = \text{tg } (\alpha + \pi) = \dots = \text{tg } (\alpha + k\pi),\ \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

Tangente é uma função periódica de período π.

O **domínio** da função tangente é $\text{D} = \mathbb{R} - \left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

A **imagem** da função tangente está contida em $\mathbb{R}$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

28 Determine o sinal de y em cada caso.

a) $y = \text{tg } 110° + \text{tg } 340°$ $y < 0$

b) $y = \text{tg } \frac{\pi}{5} \cdot \text{tg } \frac{6\pi}{5}$ $y > 0$

29 Calcule o valor de:

a) $\text{tg } 180° \cdot \text{tg } 210° + \text{tg } 210° \cdot \text{tg } 225°$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{tg } 2\pi + \text{tg } \frac{\pi}{6} \cdot \text{tg } \frac{5\pi}{3} + \text{tg } \frac{4\pi}{3}$ $-1 + \sqrt{3}$

30 Simplifique:

a) $\dfrac{-a^2 \cdot \text{tg } 135° - b^2 \cdot \text{tg } 315° - 2ab \cdot \text{tg } 45°}{a^2 \cdot \text{tg } 30° + b^2 \cdot \text{tg } 330°}$ $\sqrt{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$

b) $\dfrac{\text{tg } \frac{7\pi}{6} - \text{tg } \frac{11\pi}{6}}{\text{tg } \frac{2\pi}{3} + \text{tg } \frac{5\pi}{4} \cdot \text{tg } \frac{7\pi}{4} + \text{tg } \frac{\pi}{3}}$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

31 Calcule o valor de:

a) $\text{tg } x + \text{tg } 3x + \text{tg } 5x + \text{tg } 7x$, para $x = 45°$; 0

b) $\text{tg } x + \text{tg } 2x + \text{tg } 4x + \text{tg } 6x$, para $x = \frac{\pi}{6}$. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

32 Calcule o valor de:

a) $\text{tg } x + \text{tg } 2x + \text{tg } 4x$, para $x = -30°$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{tg } 2x + \text{tg } 3x$, para $x = -\frac{2\pi}{3}$. $-\sqrt{3}$

33 Determine o sinal de: $y < 0$

$$y = \frac{\text{tg } (-440°) + \text{tg } (-580°)}{\text{tg } (-640°) \cdot \text{tg } (-530°)}$$

34 Calcule:

a) $\text{tg } 5100°$ $\sqrt{3}$ b) $\text{tg } \frac{51\pi}{4}$ -1 c) $\text{tg } (-7350°)$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

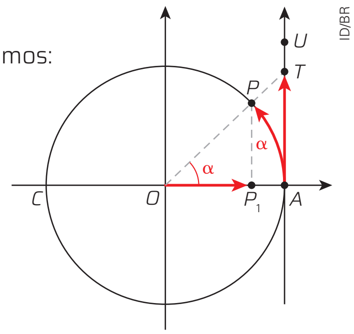
35 Vamos voltar ao problema do início deste capítulo. De acordo com os tipos de subida na prova de ciclismo Volta da França, uma subida de 45° tem 100% de inclinação.

a) Qual é o ângulo de subida dos trechos HC com inclinação superior a 10%? 4,5°

b) Determine, em metros, quanto sobe, em relação à posição inicial, um ciclista que percorre 15 km de uma subida com categoria HC.
Aproximadamente 1 050 m.

RELAÇÃO ENTRE TANGENTE, SENO E COSSENO

Qualquer que seja $\alpha \in D(\text{tg})$, se $\alpha \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, existem os triângulos retângulos OAT e OP_1P semelhantes.



Aplicando a esses triângulos uma consequência do Teorema de Tales, temos:

$$\frac{|AT|}{|P_1P|} = \frac{|OA|}{|OP_1|}$$

$$\frac{|\text{tg } \alpha|}{|\text{sen } \alpha|} = \frac{1}{|\cos \alpha|}$$

$$|\text{tg } \alpha| = \frac{|\text{sen } \alpha|}{|\cos \alpha|}$$

A análise dos sinais de tg α, sen α e cos α nos possibilita escrever a relação sem módulos.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Agora, vamos examinar o que ocorre para $\alpha = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

- Quando k assume valores pares, P coincide com A e $\text{tg } \alpha = 0$, $\text{sen } \alpha = 0$ e $\cos \alpha = 1$.
- Quando k assume valores ímpares, P coincide com C e $\text{tg } \alpha = 0$, $\text{sen } \alpha = 0$ e $\cos \alpha = -1$.

A substituição desses valores nos mostra a validade de $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$ também para $\alpha = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

R9 Calcule:

a) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{6}$

b) $\text{tg}\,(-330°)$

Resolução

a) $\text{tg}\,\frac{5\pi}{6} = \frac{\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{5\pi}{6}}$

$\text{tg}\,\frac{5\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\text{tg}\,\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{tg}\,(-330°) = -\text{tg}\,330°$

$\text{tg}\,(-330°) = -\frac{\text{sen}\,330°}{\cos 330°}$

$\text{tg}\,(-330°) = -\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\text{tg}\,(-330°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

R10 Determine o período de $f(\alpha) = 3 + 2\,\text{tg}\left(4\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$.

Resolução

Como o período da função tangente é π, basta obter a amplitude do intervalo ao qual α pertence quando $4\alpha + \frac{\pi}{3}$ percorre um intervalo de tamanho π. Para isso, determinamos α_1 e α_2, tais que:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + \frac{\pi}{3} = 0 \\ 4\alpha_2 + \frac{\pi}{3} = \pi \end{cases}$$

Logo, $\alpha_1 = -\frac{\pi}{12}$ e $\alpha_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$, e a amplitude do intervalo de variação de α é:

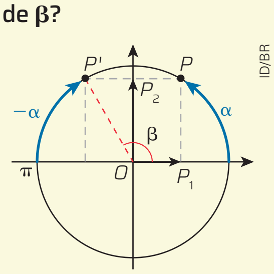
$$|\alpha_1 - \alpha_2| = \left|-\frac{\pi}{12} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right)\right|$$

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, o período de $f(\alpha) = 3 + 2\,\text{tg}\left(4\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ é $\frac{\pi}{4}$.

R11 **Considere que α e β são arcos suplementares, ou seja, $\alpha + \beta = \pi$, e que α pertence ao 1º quadrante. Que relações existem entre os valores de seno, cosseno e tangente de α e de β?**

Resolução



Sejam P o ponto do 1º quadrante do ciclo trigonométrico correspondente a α e P' o ponto do ciclo trigonométrico correspondente a β.

O ponto P' é obtido subtraindo-se α do arco de medida π, pois:

$$\alpha + \beta = \pi$$

$$\beta = \pi - \alpha$$

Observe que P e P' são simétricos em relação ao eixo Oy, daí eles terem a mesma ordenada e suas abscissas terem o mesmo valor com sinais opostos.

$$\boxed{\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(\pi - \alpha)} \quad \boxed{\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)}$$

Para a tangente, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,(\pi - \alpha)}{-\cos(\pi - \alpha)}$$

$$\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\,(\pi - \alpha)$$

$$\boxed{\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\,(\pi - \alpha)}$$

Dedique atenção especial à atividade **R11**, pois ela apresenta uma nova relação entre seno, cosseno e tangente de ângulos suplementares. Comente com os estudantes que as relações encontradas são válidas mesmo quando α não for um ângulo do 1º quadrante.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Antes de resolver esta sequência de exercícios, observe que a atividade **R9**, da seção *Problemas e exercícios resolvidos*, ajuda na resolução das atividades **40**, **43** e **44** e que a atividade **R10** ajuda na resolução da atividade **42**. Para solucionar as atividades **36**, **37**, **38** e **41**, pode ser conveniente reler os tópicos "Função seno", "Função cosseno" e "Função tangente" deste capítulo.

36 Para os arcos de medida α do 4º quadrante, quais das afirmações seguintes são verdadeiras? Registre as alternativas no caderno.

a) sen α decresce quando α cresce. Falsa.
b) cos α cresce quando α cresce. Verdadeira.
c) tg α é negativa. Verdadeira.
d) sen $\alpha < 0$. Verdadeira.
e) tg $\alpha > -2$. Falsa.
f) sen α e cos α têm o mesmo sinal. Falsa.
g) tg α e cos α têm o mesmo sinal. Falsa.

37 Indique um ângulo α, em grau, no 3º quadrante com:

a) $\text{sen}\ \alpha = -\frac{1}{2}$
b) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\text{tg}\ \alpha = \sqrt{3}$
d) $\text{sen}\ \alpha = \cos \alpha$
e) $\text{sen}\ \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
f) $\text{sen}\ \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

38 Identifique os quadrantes em que: **e)** 2º quadrante.

a) o seno e a tangente são negativos; 4º quadrante.
b) o cosseno cresce quando o ângulo cresce, e o seno é negativo; 3º ou 4º quadrantes. **c)** 4º quadrante.
c) a tangente é negativa e o cosseno é positivo;
d) o produto do seno pelo cosseno é negativo;
e) o seno e o cosseno são decrescentes; **d)** 2º ou 4º quadrantes.
f) a tangente e o seno são positivos;
g) a tangente é positiva e o cosseno é negativo;
h) a tangente cresce e o seno decresce quando o ângulo cresce; 2º ou 3º quadrantes.
i) o seno é positivo e a tangente é negativa;
j) o seno e o cosseno são crescentes. 4º quadrante.

f) 1º quadrante. **g)** 3º quadrante. **i)** 2º quadrante.

39 Calcule:

a) sen 270° − sen 180° + cos 90° -1
b) tg 180° + cos 180° − sen 180° -1
c) 3 sen 90° + 2 cos 180° + sen 30° $\frac{3}{2}$

40 Sendo $\text{sen}\ \alpha = -\frac{1}{3}$ e $\alpha \in$ 4º quadrante, calcule cos α e tg α. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\text{tg}\ \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

41 Descreva a variação do sinal e do crescimento das funções seno, cosseno e tangente quando o ângulo varia entre 180° e 450°. Consulte as respostas no Manual do Professor.

42 Determine o período de cada função.

a) $f(\alpha) = 2 + \text{sen}\left(3\alpha + \frac{\pi}{5}\right)$ $\frac{2\pi}{3}$
b) $f(\alpha) = -1 + 4\cos\left(-2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ π
c) $f(\alpha) = 3 + 2\ \text{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{8}\right)$ $\frac{\pi}{4}$

43 Calcule tg α, dados:

a) $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; $\frac{5}{12}$
b) $\text{sen}\ \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. $-\frac{2\sqrt{10}}{3}$

44 Calcule tg α, dados:

a) $\text{sen}\ \alpha = -\frac{3}{5}$ $\pm\frac{3}{4}$
b) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ $\pm\frac{12}{5}$

45 Sendo $\text{tg}\ \alpha = \frac{3}{4}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcule sen α e cos α.
$\text{sen}\ \alpha = -\frac{3}{5}$ e $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, sendo $\alpha \in$ 3ºQ.

46 Se $\cos^2 \alpha - 5\cos \alpha + 3 - \text{sen}^2\ \alpha = 0$, calcule tg α. $\pm\sqrt{3}$

47 Prove que: Consulte a resposta no Manual do Professor.

a) $\frac{1}{1 + \text{tg}^2\ \alpha} + \text{sen}^2\ \alpha = 1$

b) $\frac{(\text{sen}\ \alpha + \cos \alpha)^2}{1 - \text{sen}^2\ \alpha} - \left(\frac{\text{sen}\ \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = 4\ \text{tg}\ \alpha$

c) $\frac{1 - \text{tg}^2\ \alpha}{1 + \text{tg}^2\ \alpha} = 1 - 2\ \text{sen}^2\ \alpha$

48 O exercício a seguir contém erro em sua resolução. Encontre-o e resolva o exercício corretamente.
Consulte a resposta no Manual do Professor.

Se $4\ \text{tg}^2\ \alpha + \text{tg}\ \alpha - 3 = 0$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule sen α.

Resolução:

Substituindo tg α por y, obtemos:

$$4y^2 + y - 3 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \text{ ou } y = -1$$

Então, tg $\alpha = \frac{3}{4}$ ou tg $\alpha = -1$.

Como α está no 2º quadrante, então tg $\alpha = \frac{3}{4}$ e sen $\alpha \geqslant 0$. Assim:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\ \alpha}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\text{sen}^2\ \alpha}{1 - \text{sen}^2\ \alpha} = \frac{9}{16}$$

$$9 - 9\ \text{sen}^2\ \alpha = 16\ \text{sen}^2\ \alpha$$

$$\text{sen}\ \alpha = -\frac{3}{5} \text{ ou } \text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5}$$

O valor que satisfaz a condição sen $\alpha \geqslant 0$ é $\frac{3}{5}$. Logo, sen $\alpha = \frac{3}{5}$.

ID/BR

VARIAÇÃO, GRÁFICO E CONJUNTO IMAGEM DAS FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE

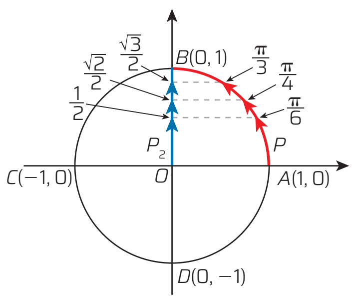
Para estudar o comportamento das funções trigonométricas, basta analisar o que ocorre com cada uma em um intervalo cujo tamanho seja o período da função e estender a todo seu domínio.

Função seno

Como o período de $f(\alpha) = \text{sen}\ \alpha$ é 2π, faremos o estudo da variação de f para $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Em cada figura, P é a imagem de α no ciclo trigonométrico e $OP_2 = \text{sen}\ \alpha$.

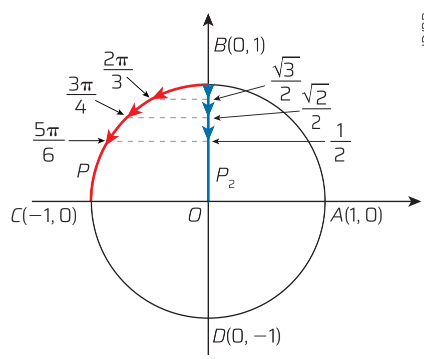
- ***P* no 1º quadrante**



ID/BR

Imagine que P percorra o ciclo trigonométrico de A para B. À medida que isso acontece, P_2 percorre o eixo dos senos de O para B, ou seja, **aumentando** α de zero a $\frac{\pi}{2}$, sen α **aumenta** de zero a 1. Portanto, seno é uma **função crescente** no 1º quadrante.

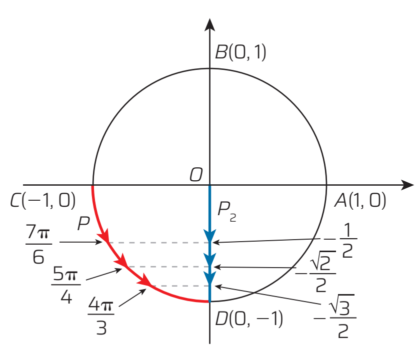
- ***P* no 2º quadrante**



ID/BR

À medida que P percorre o ciclo trigonométrico de B para C, P_2 percorre o eixo dos senos de B para O, ou seja, **aumentando** α de $\frac{\pi}{2}$ a π, sen α **diminui** de 1 a zero. Portanto, seno é uma **função decrescente** no 2º quadrante.

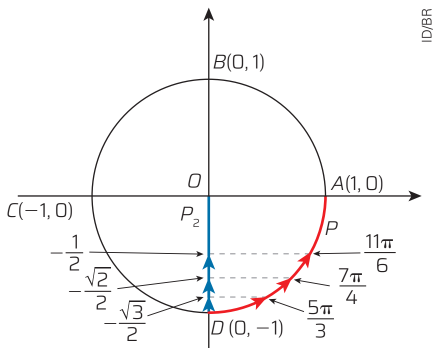
- ***P* no 3º quadrante**



ID/BR

À medida que P percorre o ciclo trigonométrico de C para D, P_2 percorre o eixo dos senos de O para D, ou seja, **aumentando** α de π a $\frac{3\pi}{2}$, sen α **diminui** de zero a -1. Portanto, seno é uma **função decrescente** no 3º quadrante.

- ***P* no 4º quadrante**

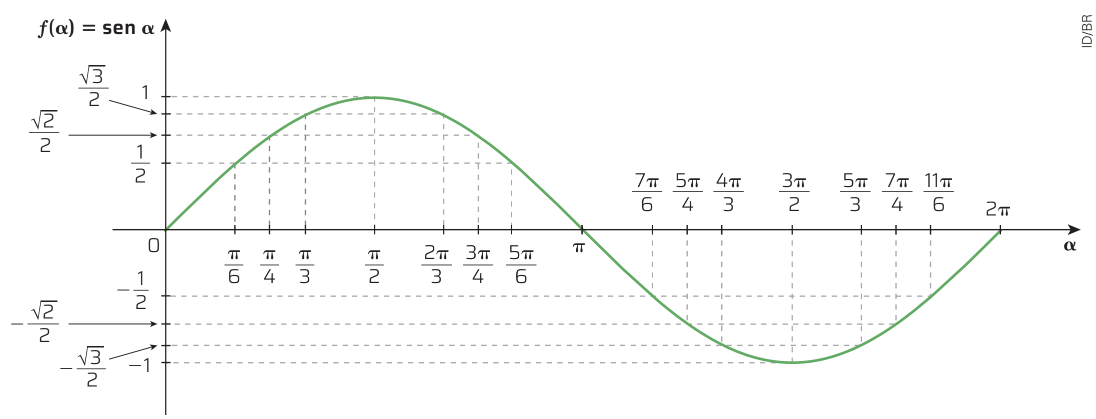


À medida que P percorre o ciclo trigonométrico de D para A, P_2 percorre o eixo dos senos de D para O, ou seja, **aumentando** α de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, sen α **aumenta** de -1 a zero. Portanto, seno é uma **função crescente** no 4º quadrante.

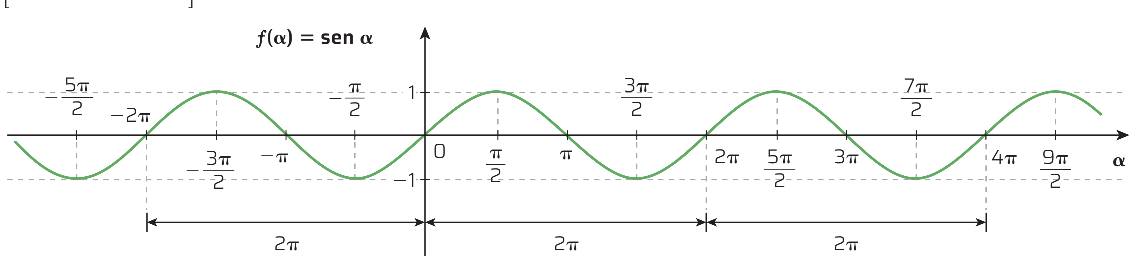
Com todas as informações que temos até aqui sobre a função $f(\alpha) = \text{sen}\ \alpha$, podemos construir seu gráfico no plano cartesiano colocando α no eixo das abscissas e sen α no eixo das ordenadas.

Assim, para $\alpha \in [0, 2\pi]$, temos:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0



Obtemos o gráfico de $f(\alpha) = \text{sen}\ \alpha$, para $\alpha \in D(\text{sen}) = \mathbb{R}$, repetindo o gráfico anterior em cada intervalo $[k \cdot 2\pi, (k+1)2\pi]$, com $k \in \mathbb{Z}$.



O gráfico cartesiano da função seno é denominado **senoide**.

O estudo da variação nos mostra, mais uma vez, que $f(\alpha) = \text{sen}\ \alpha$ tem valor mínimo -1, valor máximo 1 e assume todos os valores reais entre -1 e 1. Portanto:

$$-1 \leqslant \text{sen}\ \alpha \leqslant 1, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

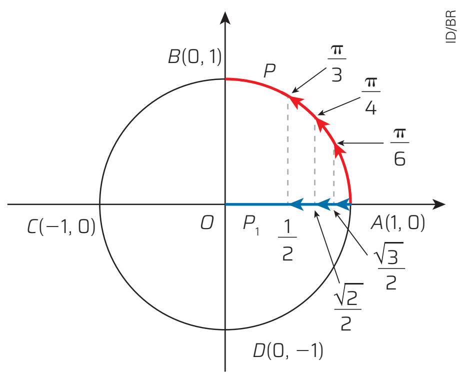
$$\text{Im(sen)} = [-1, 1]$$

Função cosseno

Como o período de $f(\alpha) = \cos \alpha$ é 2π, faremos o estudo da variação de f para α $[0, 2\pi]$.

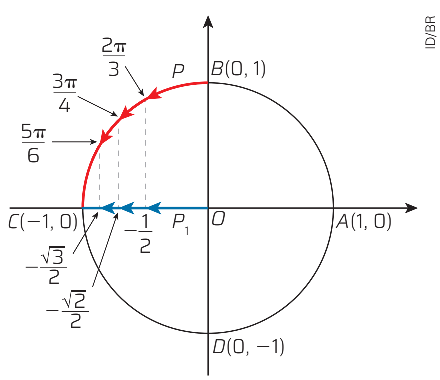
Em cada figura, P é a imagem de α no ciclo trigonométrico e $OP_1 = \cos \alpha$.

- ***P* no 1º quadrante**



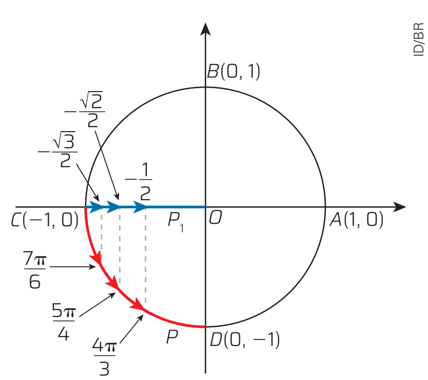
Imagine que P percorra o ciclo trigonométrico de A para B. À medida que isso acontece, P_1 percorre o eixo dos cossenos de A para O, ou seja, **aumentando** α de zero a $\frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha$ **diminui** de 1 a zero. Portanto, cosseno é uma **função decrescente** no 1º quadrante.

- ***P* no 2º quadrante**



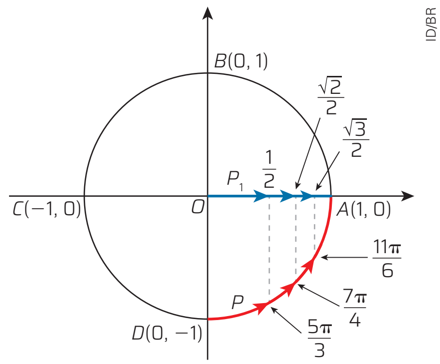
À medida que P percorre o ciclo trigonométrico de B para C, P_1 percorre o eixo dos cossenos de O para C, ou seja, **aumentando** α de $\frac{\pi}{2}$ a π, $\cos \alpha$ **diminui** de zero a -1. Portanto, cosseno é uma **função decrescente** no 2º quadrante.

- ***P* no 3º quadrante**



À medida que P percorre o ciclo trigonométrico de C para D, P_1 percorre o eixo dos cossenos de C para O, ou seja, **aumentando** α de π a $\frac{3\pi}{2}$, $\cos \alpha$ **aumenta** de -1 a zero. Portanto, cosseno é uma **função crescente** no 3º quadrante.

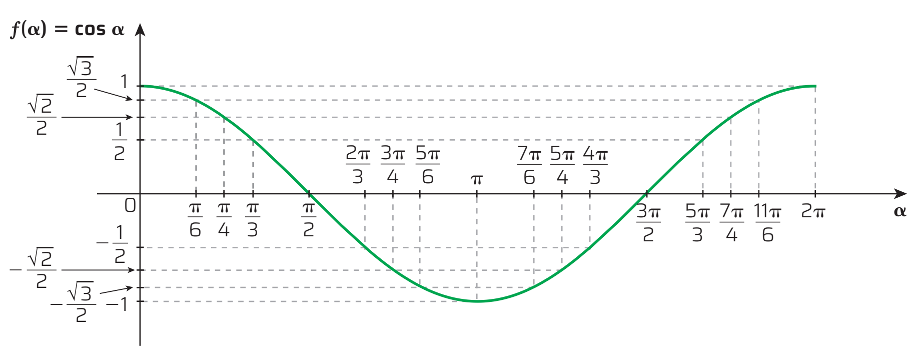
- ***P* no 4º quadrante**



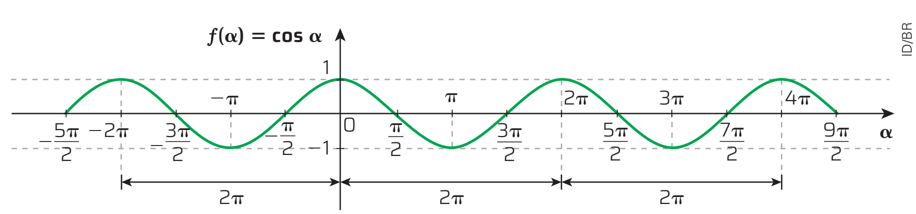
À medida que P percorre o ciclo trigonométrico de D para A, P_1 percorre o eixo dos cossenos de O para A, ou seja, **aumentando** α de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, cos α **aumenta** de zero a 1. Portanto, cosseno é uma **função crescente** no 4º quadrante.

Esboçando o gráfico cartesiano de $f(\alpha) = \cos \alpha$, para $\alpha \in [0, 2\pi]$, temos:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Obtemos o gráfico de $f(\alpha) = \cos \alpha$, para $\alpha \in D(\cos) = \mathbb{R}$, repetindo o gráfico anterior em cada intervalo $[n \cdot 2\pi, (n + 1)2\pi]$, com $n \in \mathbb{Z}$.



O gráfico cartesiano da função cosseno é também uma senoide, deslocada de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda.

O estudo da variação nos mostra, mais uma vez, que $f(\alpha) = \cos \alpha$ tem valor mínimo -1, valor máximo 1 e assume todos os valores reais entre -1 e 1. Portanto:

Curvas importantes da Trigonometria

O objeto digital explora de maneira aprofundada as curvas fundamentais da Trigonometria, detalhando as funções seno e cosseno, relacionando-as com fenômenos periódicos, como o movimento de pêndulos e molas.

$-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\text{Im}(\cos) = [-1, 1]$

TECNOLOGIA

Há diversos tipos de calculadora gráfica *on-line*; as etapas apresentadas podem ser realizadas em diversos *softwares*, como o GeoGebra.

Podemos usar um *software* de calculadora gráfica para construir gráficos de funções trigonométricas. Vamos construir juntos, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das seguintes funções:

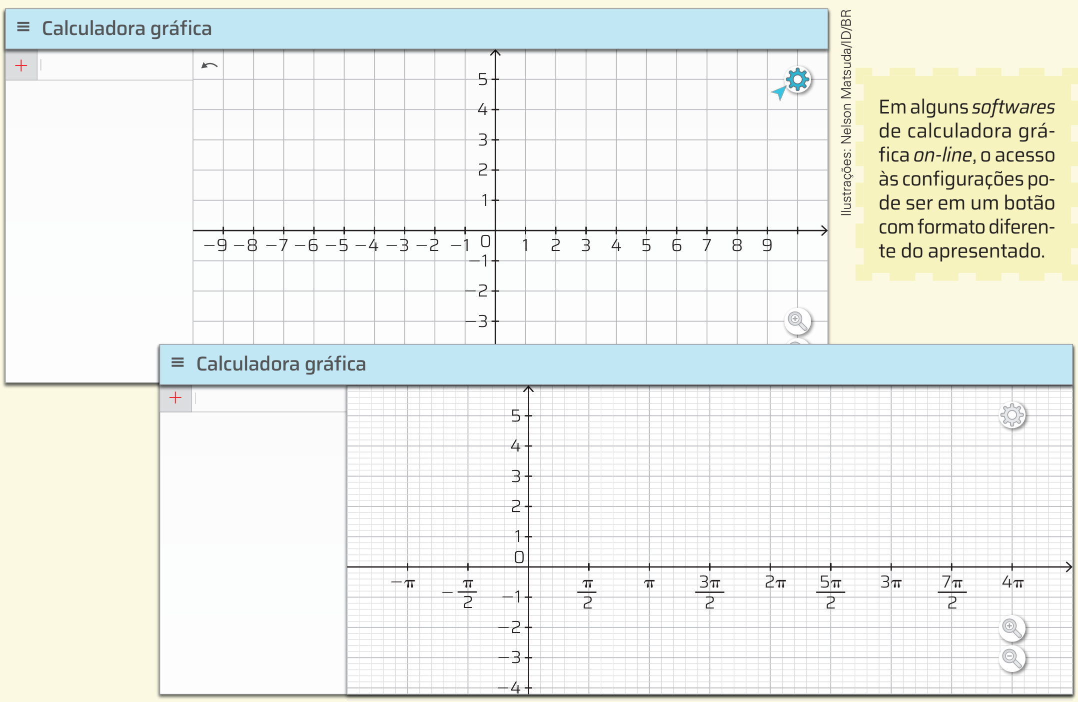
$$f(x) = \text{sen}(x)$$

$$g(x) = \cos(x)$$

$$h(x) = \text{tg}(x)$$

Acompanhe as etapas:

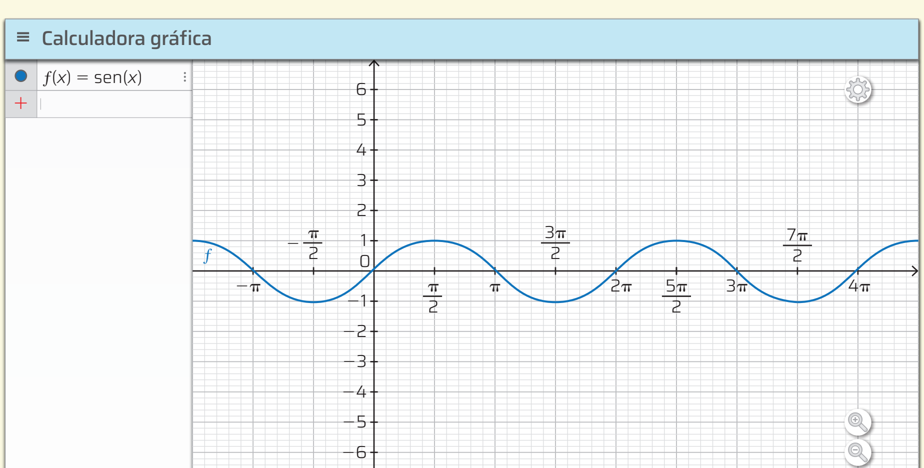
1ª etapa: Inicialmente, vamos ajustar a distância entre as marcas do eixo Ox para $\frac{\pi}{2}$. Para isso, buscamos nas configurações a opção que permite editar as preferências desse eixo. Observe o que ocorre.



Ilustrações: Nelson Matsuda/ID/BR

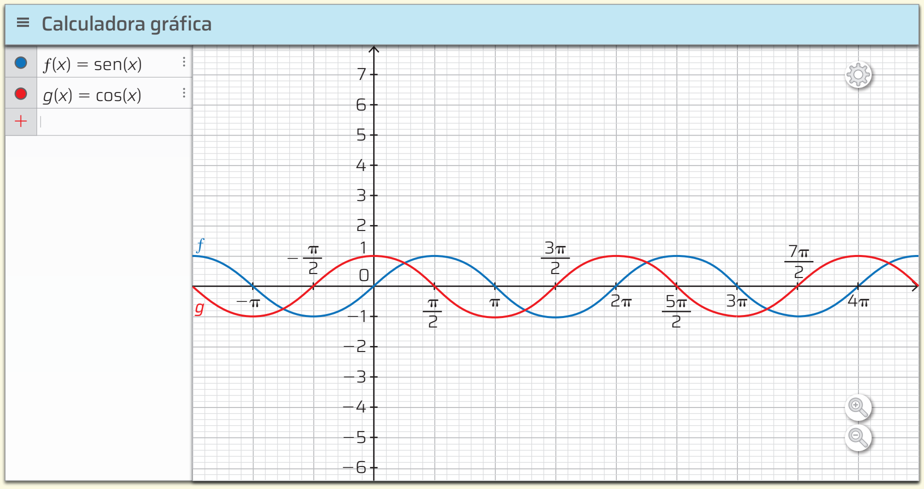
Em alguns *softwares* de calculadora gráfica *on-line*, o acesso às configurações pode ser em um botão com formato diferente do apresentado.

2ª etapa: Para construirmos o gráfico da função $f(x) = \text{sen}(x)$, digitamos a função no campo de entrada de dados e clicamos em "Enter". O gráfico da função aparecerá prontamente na tela.



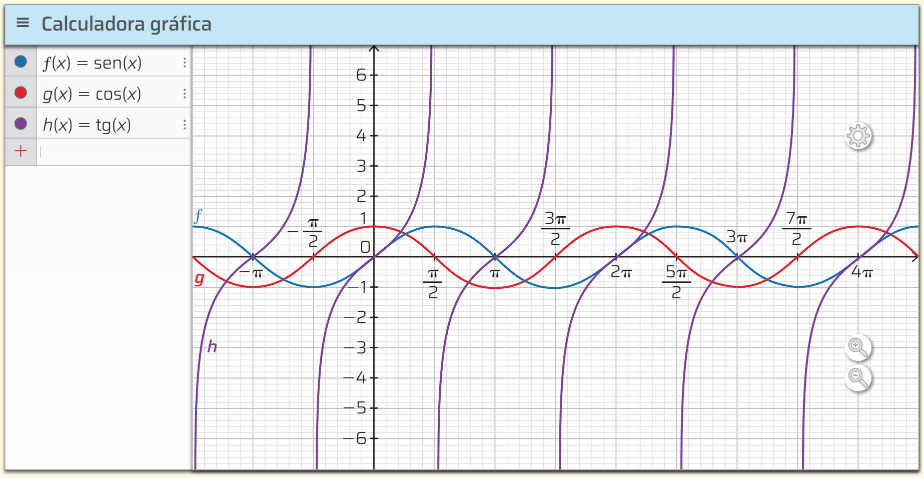
Nelson Matsuda/ID/BR

3ª etapa: Agora, construímos o gráfico da função $g(x) = \cos(x)$ digitando a função no campo de entrada de dados.



Nelson Matsuda/ID/BR

4ª etapa: Por fim, construímos o gráfico da função $h(x) = \text{tg}(x)$. Assim, os gráficos correspondentes às três funções ficarão visíveis na tela, no sistema de eixos cartesianos.



Nelson Matsuda/ID/BR

ATIVIDADE Respostas pessoais.

1 **Utilizando um *software* de calculadora gráfica, determine as coordenadas de uma intersecção entre:**

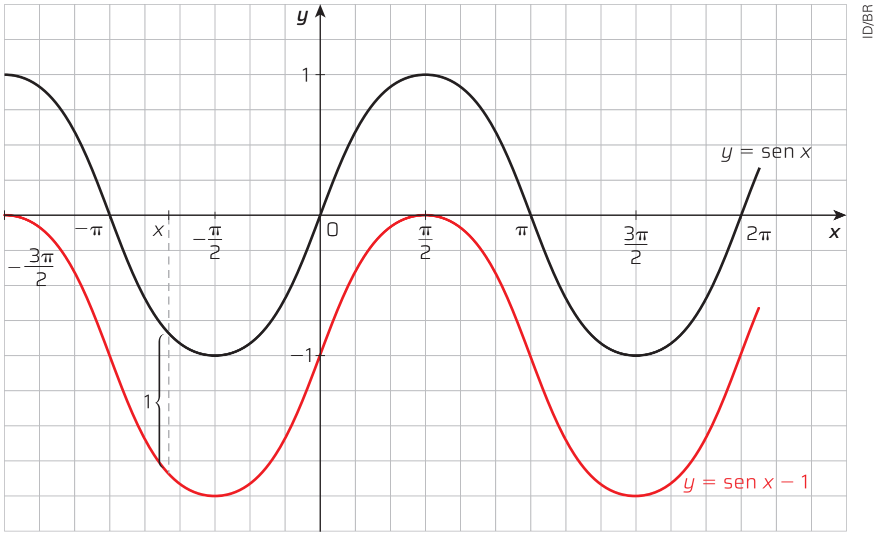
a) as funções f e g;
b) as funções f e h;
c) as funções g e h;
d) a função f e o eixo x;
e) a função g e o eixo x;
f) a função h e o eixo x.

Translação e simetria dos gráficos das funções seno e cosseno

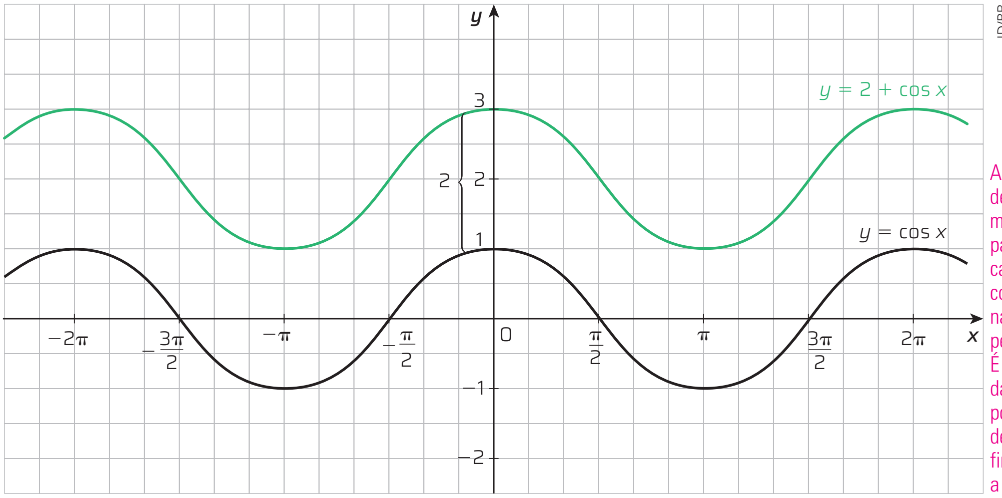
Você já sabe que, muitas vezes, quando temos um problema complexo para resolver, uma estratégia é começar pela resolução de problemas mais simples e correlacionados. Essa ideia pode ser aplicada na construção de gráficos, ou seja, alguns gráficos podem ser construídos tendo como base gráficos que já conhecemos. Vamos entender o que isso significa construindo o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x - 1$ com base no gráfico de $g(x) = \text{sen } x$. Para isso, vamos usar a ideia de **translação**.

Repare que podemos escrever f da seguinte maneira: $f(x) = g(x) - 1$. Além disso, sabemos que $(x, g(x))$ é um ponto do gráfico de $g(x) = \text{sen } x$ e que $(x, g(x) - 1)$ é um ponto do gráfico de f. Assim, o gráfico de f pode ser obtido pela translação do gráfico de g em uma unidade no sentido negativo de Oy.

Utilizar as noções de translação e de simetria na construção de gráficos de funções trigonométricas contribui para a aquisição da habilidade **EM13MAT105**.

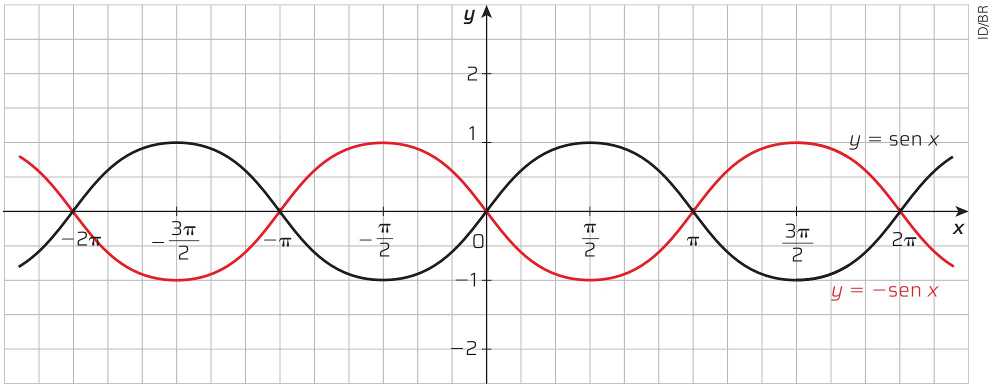


Agora, acompanhe como é possível construir o gráfico de $h(x) = 2 + \cos x$ com base no gráfico de $j(x) = \cos x$. Podemos escrever $h(x)$ como $h(x) = 2 + j(x)$. Além disso, usando o mesmo raciocínio anterior, sabemos que $(x, j(x))$ é um ponto do gráfico de $j(x) = \cos x$ e que $(x, 2 + j(x))$ é um ponto do gráfico de h. Assim, o gráfico de h pode ser obtido pela translação do gráfico de j em duas unidades no sentido positivo de Oy. Observe na imagem a seguir.



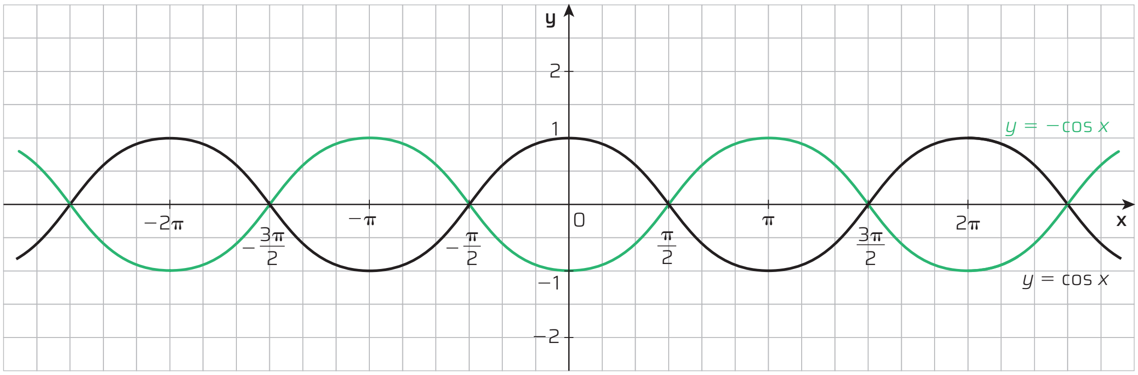
A relação entre coordenadas fica definida por expressões da forma $H(x + c, y)$ ou $V\ (x, y + c)$ para cada ponto (x, y) do plano cartesiano, que definem funções correspondentes a translações na direção dos eixos Ox e Oy, respectivamente.
É importante explicar aos estudantes que esse conhecimento pode ser aplicado na construção de gráficos sempre que possível, a fim de evitar perda de tempo com a produção de tabelas de pontos.

Além da translação, podemos utilizar outros recursos que já conhecemos para construir gráficos de funções que não dominamos completamente. Observe a seguir como é possível construir o gráfico da função $m(x) = -\text{sen}\ x$ com base no gráfico de $n(x) = \text{sen}\ x$ utilizando a ideia de **simetria**.



Observe que os gráficos das funções m e n são simétricos em relação ao eixo das abscissas.

Agora, acompanhe o que ocorre com as funções $p(x) = -\cos x$ e $q(x) = \cos x$.



O gráfico de $p(x) = -\cos x$ é simétrico ao gráfico de $q(x) = \cos x$ em relação ao eixo das abscissas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R12 **Esboce o gráfico cartesiano de cada função.**

a) $f(\alpha) = \text{sen } 2\alpha$

b) $f(\alpha) = 3 \text{ sen } 2\alpha$

c) $f(\alpha) = 2 + \text{sen } 2\alpha$

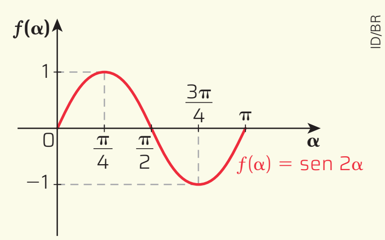
d) $f(\alpha) = -\text{sen } 2\alpha$

e) $f(\alpha) = |\text{sen } 2\alpha|$

Resolução

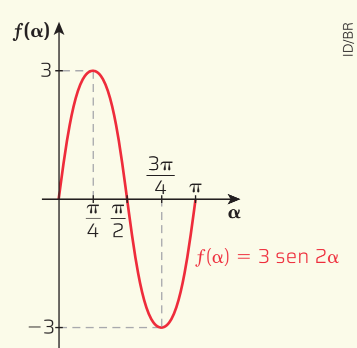
a) Como seno é uma função periódica de período 2π, basta variar 2α em um intervalo de amplitude 2π. Atribuindo a 2α valores convenientes pertencentes a $[0, 2\pi]$ e calculando α e $f(\alpha)$, temos:

2α	α	$f(\alpha)$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
π	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
2π	π	0



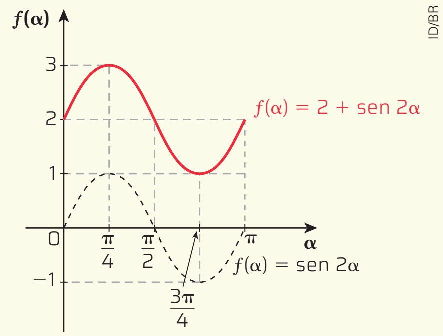
b) A ordenada de cada ponto do gráfico de $3 \text{ sen } 2\alpha$ é a ordenada do respectivo ponto do gráfico de $\text{sen } 2\alpha$ multiplicada por 3.

2α	α	sen 2α	$f(\alpha)$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1	3
π	$\frac{\pi}{2}$	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1	-3
2π	π	0	0

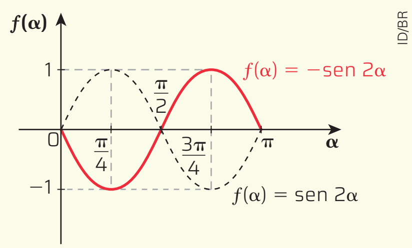


Não escreva no livro.

c) A ordenada de cada ponto do gráfico de $2 + \text{sen } 2\alpha$ é a ordenada do respectivo ponto do gráfico de $\text{sen } 2\alpha$ somada a 2. Então, transladando o gráfico de $\text{sen } 2\alpha$ para cima em 2 unidades, obtemos o gráfico de $2 + \text{sen } 2\alpha$.

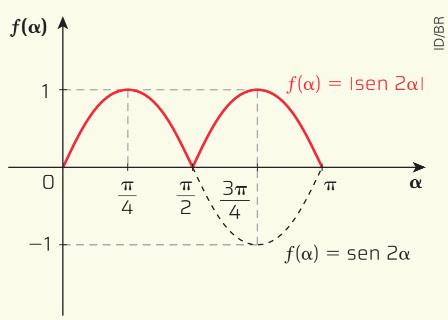


d) O gráfico de $-\text{sen } 2\alpha$ é simétrico ao gráfico de $\text{sen } 2\alpha$ em relação ao eixo das abscissas.



e) $|\text{sen } 2\alpha| = \begin{cases} \text{sen } 2\alpha, \text{ para sen } 2\alpha \geqslant 0 \\ -\text{sen } 2\alpha, \text{ para sen } 2\alpha < 0 \end{cases}$

Então, o gráfico de $|\text{sen } 2\alpha|$ coincide com o gráfico de 2α para $2\alpha > 0$ e é simétrico a ele em relação ao eixo das abscissas para $\text{sen } 2\alpha < 0$.



No item **b** da atividade **51**, é preciso interpretar no mesmo sistema cartesiano os gráficos de $f(\alpha) = -1 + 2 \text{ sen } \alpha$ e $g(\alpha) = -\alpha$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

49 Esboce o gráfico de cada função. Consulte a resposta no Manual do Professor.

a) $f(\alpha) = 2 + 1 \text{ sen } \alpha$
b) $f(\alpha) = 1 - \text{sen } \alpha$
c) $f(\alpha) = -1 + 2 \text{ sen } \alpha$
d) $f(\alpha) = 1 - 2 \text{ sen } \alpha$
e) $f(\alpha) = |-2 + \text{sen } \alpha|$
f) $f(\alpha) = |\text{sen } \alpha| - 1$

Em caso de dúvidas, releia a atividade **R12**.

50 Compare os gráficos dos itens **a** e **b** da atividade **49** com o gráfico da função $y = \text{sen } \alpha$, sendo $\alpha \in [0, 2\pi]$. Qual é a diferença entre eles?

50. O gráfico do item **a** é obtido na translação de $y = \text{sen } \alpha$ em 2 unidades pelo eixo y no sentido positivo. O gráfico do item **b** é obtido na translação de $y = \text{sen } \alpha$ em 1 unidade pelo eixo y e pela reflexão do gráfico obtido em relação a y.

51 Utilize os gráficos feitos na atividade **49** e responda às questões a seguir.

a) Quantos valores de α satisfazem a igualdade $2 + \text{sen } \alpha = 0$? Nenhum.

b) Quantos valores de α satisfazem a igualdade $-1 + 2 \text{ sen } \alpha = -\alpha$? Um.

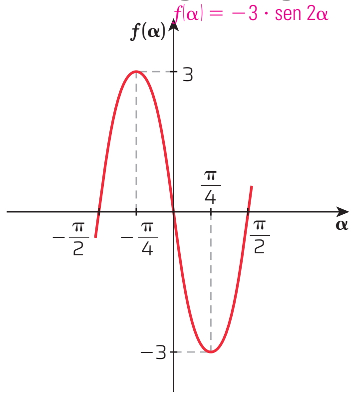
52 Determine o período e o conjunto imagem e esboce o gráfico de cada função. Consulte a resposta no Manual do Professor.

a) $f(\alpha) = \text{sen}\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$
b) $f(\alpha) = 2 \text{ sen } 2\alpha$

A atividade **60** é um pouco mais elaborada, pois exige a interpretação de gráficos, bem como a análise da intersecção dos gráficos trigonométricos e funções afins ($y = 1$ ou $y = \alpha$). O item **b** é um bom exemplo de equações que não podem ser resolvidas, mas para as quais é possível determinar quantas são suas raízes e estimar sua posição.

53 Determine a função trigonométrica cujo gráfico está parcialmente dado na figura a seguir.

$f(\alpha) = -3 \cdot \text{sen}\, 2\alpha$



54 Determine o conjunto imagem de cada função.

a) $f(\alpha) = -3 + 2 \cos \alpha$ $\text{Im}(f) = [-5, -1]$

b) $f(\alpha) = -4 - 2 \cos \alpha$ $\text{Im}(f) = [-6, -2]$

55 Determine m para que cada equação seja possível.

a) $\cos x = -4m + 3$ $\frac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$

b) $\cos x = -2m - 5$ $-3 \leqslant m \leqslant -2$

56 Esboce os gráficos das funções. Consulte a resposta no Manual do Professor.

a) $f(\alpha) = 1 + \cos \alpha$

b) $f(\alpha) = 2 - \cos \alpha$

c) $f(\alpha) = -1 + 2 \cos \alpha$

d) $f(\alpha) = -1 - 2 \cos \alpha$

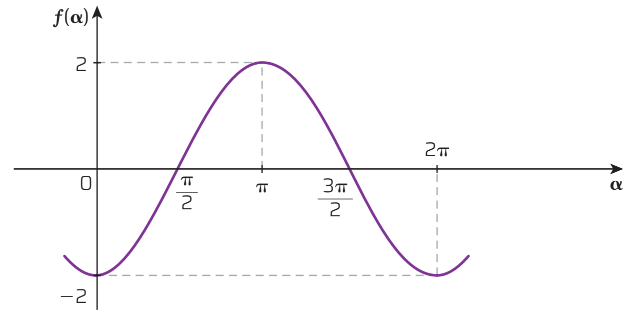
e) $f(\alpha) = |-1 + \cos \alpha|$

f) $f(\alpha) = |\cos \alpha| + 2$

57 Compare os gráficos dos itens **a** e **b** da atividade anterior com o gráfico da função $y = \cos \alpha$, sendo $\alpha \in [0, 2\pi]$. Qual é a diferença entre eles?

Consulte a resposta no Manual do Professor.

58 Determine a função trigonométrica que melhor se adapta ao gráfico da figura a seguir. $f(\alpha) = -2 \cdot \cos \alpha$



59 Determine o período e o conjunto imagem e esboce o gráfico de cada função. Consulte a resposta no Manual do Professor.

a) $f(\alpha) = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $f(\alpha) = -3 \cos 2\alpha$

c) $f(\alpha) = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$

60 Use os gráficos feitos na atividade anterior para responder às questões.

a) Para quais valores de $\alpha \in [0, 2\pi]$ tem-se $2 \cos \frac{\alpha}{2} = 1$? $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

b) Considere a igualdade $-3 \cos \alpha = \alpha$. Para quantos valores de α essa igualdade é válida? Em qual quadrante se encontra cada um desses valores?

Há três valores de α que satisfazem a equação nos 1º, 2º e 4º quadrantes.

O estudo dos fenômenos periódicos contribui para o desenvolvimento da competência específica **2** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, da competência específica **1** da área de Matemática e suas Tecnologias e da habilidade **EM13MAT306** da área de Matemática e suas Tecnologias, pois aborda situações sobre a dinâmica da vida, da Terra e do cosmo, recorrendo à Trigonometria para a resolução de problemas.

Fenômenos periódicos e as funções seno e cosseno

Incentive os estudantes a dar outros exemplos de fenômenos periódicos do cotidiano deles.

O fenômeno periódico das marés

O objeto digital enriquece o entendimento sobre o fenômeno periódico das marés, elucidando como as influências do Sol e da Lua afetam suas variações.

No dia a dia, encontramos diversos fenômenos que se repetem após um mesmo intervalo de tempo. Por exemplo, os meses do ano se repetem a cada 12 meses, os dias da semana se repetem a cada 7 dias, etc.

Na natureza, há vários fenômenos físicos que são periódicos, ou seja, que se repetem em um intervalo de tempo determinado. É o caso do movimento das marés, do movimento dos planetas, das fases da Lua, entre outros.

As funções trigonométricas, principalmente as funções seno e cosseno, são periódicas e, portanto, costumam ser usadas como base para descrever fenômenos periódicos. Essa descrição é aproximada, pois as funções que efetivamente descrevem esses fenômenos são bem mais complexas.

Período e frequência

O menor intervalo de tempo em que ocorre a repetição de determinado fenômeno é chamado de **período**, e o número de vezes que o fenômeno ocorre em determinada unidade de tempo é chamado de **frequência**. Período e frequência são grandezas físicas utilizadas em situações de movimentos como os de vaivém, ou seja, de movimentos repetitivos, também chamados de **movimentos periódicos**.

O período (p) é o inverso da frequência (f), ou seja, essas grandezas se relacionam da seguinte maneira: $p = \frac{1}{f}$.

Castleski/Shutterstock.com/ID/BR

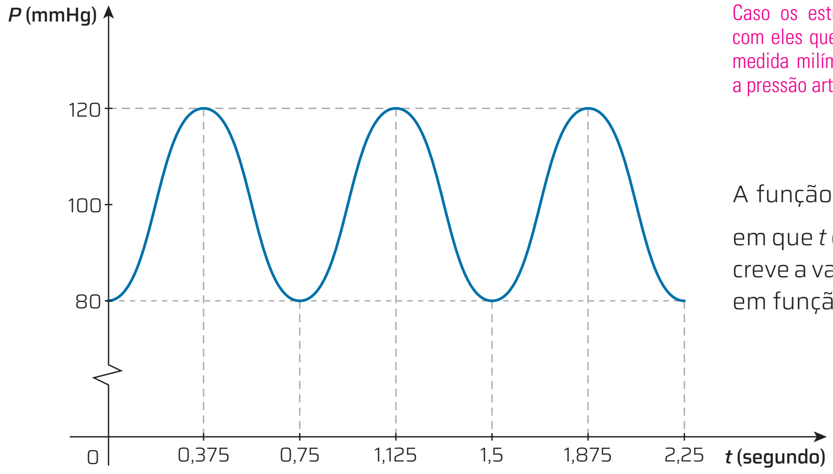
Fases da Lua.

Exemplo

A pressão arterial ou sanguínea é a força que o sangue exerce sobre as paredes das artérias. Ela atinge o valor máximo quando o coração se contrai e bombeia o sangue e atinge o valor mínimo quando o coração está em repouso, ou seja, varia no intervalo de tempo entre um batimento cardíaco e o seguinte. A variação da pressão sanguínea de uma pessoa em repouso é um fenômeno que se repete periodicamente.

Observe a seguir o gráfico e a expressão que representa a variação da pressão sanguínea ideal de um adulto.

ID/BR



Caso os estudantes tenham curiosidade, comente com eles que o termo "mmHg" indica a unidade de medida milímetro de mercúrio, utilizada para medir a pressão arterial.

A função $P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$, em que t é o tempo, em segundo, descreve a variação da pressão sanguínea em função do tempo.

Analisando o gráfico de P, percebemos que a pressão arterial é considerada ideal quando está entre 80 mmHg e 120 mmHg e que essa variação acontece em um intervalo de tempo de 0,75 segundo.

Podemos observar o intervalo de tempo em que um fenômeno periódico acontece e determinar o período de uma função ao analisar seu gráfico. Se o gráfico não for dado, podemos determinar o período da maneira descrita a seguir.

Comparando a expressão $f(t) = a + b \cdot \cos(ct + d)$ com $P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$, temos:

- $a = 100$
- $b = -20$
- $c = \frac{8\pi}{3}$
- $d = 0$

Se achar conveniente, comente com os estudantes que, entre profissionais da área da saúde, é comum dizer que a pressão está, por exemplo, "12 por 8". Esses números são uma maneira de expressar o intervalo entre 80 e 120 mmHg descritos. Se possível, permita que os estudantes comentem vivências com o contexto da pressão arterial, se já a mediram ou se conhecem alguém com problemas de saúde que alteram esses valores ideais, entre outros. Propostas como essa favorecem o desenvolvimento da competência geral **1**, pois valorizam conhecimentos e experiências.

Funções da forma $f(t) = a + b \cdot \cos(ct + d)$ ou $f(t) = a + b \cdot \text{sen}(ct + d)$ têm período $\frac{2\pi}{c}$. Assim, o período p de $P(t)$ é:

$$p = \frac{2\pi}{c}$$

$$p = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}}$$

$$p = \frac{3}{4}$$

$$p = 0{,}75$$

Conhecendo o período, podemos também descobrir a frequência cardíaca F, em minuto, para uma pessoa em repouso.

Sabemos que 0,75 s é o mesmo que 0,0125 min, então:

$$p = \frac{1}{F}$$

$$F = \frac{1}{p}$$

$$F = \frac{1}{0{,}0125}$$

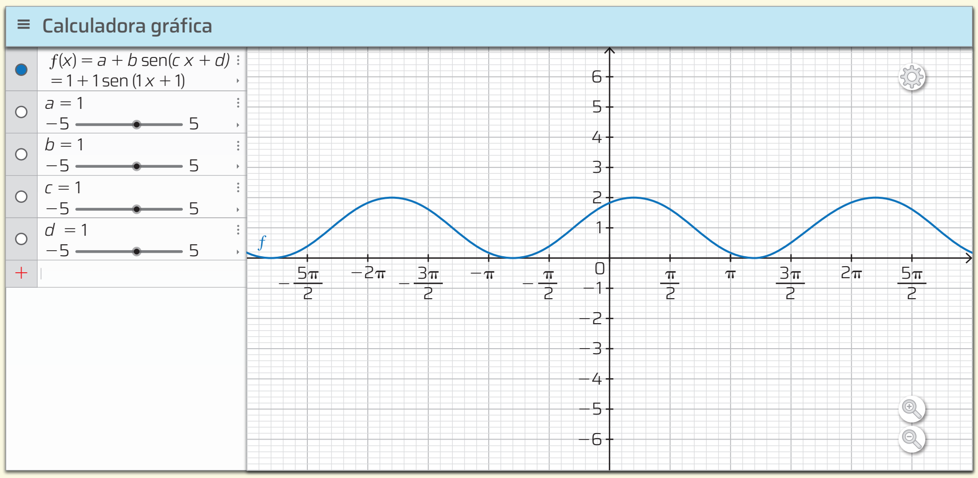
$$F = 80$$

Logo, a frequência cardíaca dessa pessoa em repouso é de 80 batimentos por minuto.

TECNOLOGIA

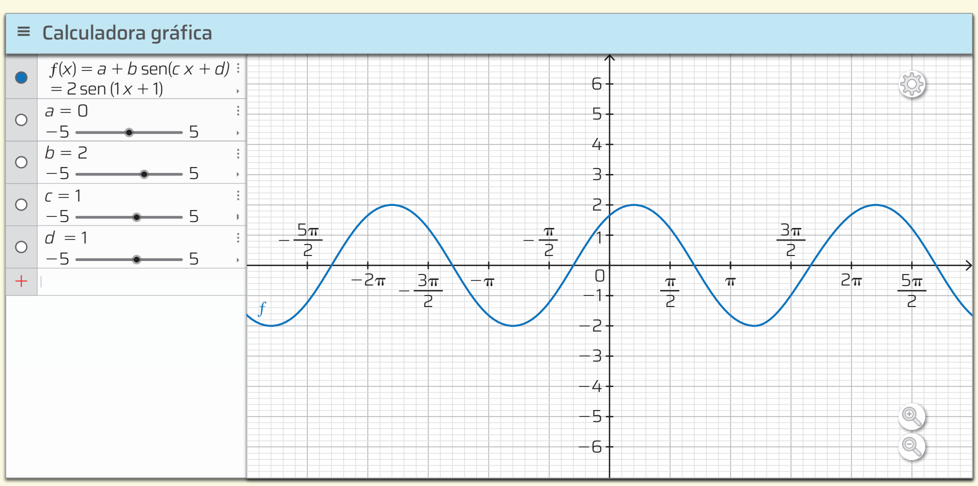
Podemos usar um *software* de calculadora gráfica para observar o que acontece com o gráfico da função $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$.

1ª etapa: Ajustamos a escala do eixo x para $\frac{\pi}{2}$. Em seguida, no campo de entrada de dados, digitamos a função $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$. Note que o valor 1 foi atribuído aos parâmetros a, b, c e d.



Nelson Matsuda/ID/BR

2ª etapa: Os botões deslizantes podem ser usados para alterar os valores de a, b, c e d. Vamos verificar o que acontece com o gráfico da função f quando $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$ e $d = 1$.



Nelson Matsuda/ID/BR

Atividades

1 Qual é a lei de formação da função f cujo gráfico foi gerado na 2ª etapa? $f(x) = 2\text{sen}(x + 1)$

2 Acesse um *software* de calculadora gráfica e reproduza o exemplo apresentado. Em seguida, modifique os parâmetros a, b, c e d e escreva o que cada um deles causou no gráfico na função f. a: o gráfico transladou para cima ou para baixo; b: a amplitude do gráfico aumentou ou diminuiu; c: o período aumentou ou diminuiu; d: o gráfico transladou para a direita ou para a esquerda.

3 De maneira semelhante ao apresentado no exemplo, utilize um *software* de calculadora gráfica e realize construções para observar o que acontece com o gráfico da função $g(x) = a + b \cdot \cos\,(cx + d)$ ao variarmos os parâmetros a, b, c e d. Em seguida, escreva um texto explicitando suas observações quanto à mudança do gráfico de acordo com a variação desses parâmetros. Resposta pessoal.

R13 (Enem) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o *apogeu* e o *perigeu*, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15 \cdot \cos(0{,}06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no *apogeu* e no *perigeu*, representada por S.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

a) 12 765 km.
b) 12 000 km.
c) 11 730 km.
d) 10 965 km.
e) 5 865 km.

Resolução

A leitura cuidadosa desse texto é muito importante. O que está sendo pedido é a distância entre a posição máxima e a mínima do satélite em relação a um ponto, o centro da Terra.

Portanto, precisamos descobrir o valor máximo e o valor mínimo da função $r(t)$. Na expressão algébrica que define r no instante t, a variável t está presente somente no denominador da fração. Nesse caso, o valor de $r(t)$ será máximo quando o denominador atingir o menor valor possível, e o valor de $r(t)$ será mínimo quando o valor do denominador for o maior possível.

O denominador $1 + 0{,}15 \cdot \cos(0{,}06t)$ depende do $\cos(0{,}06t)$ e, nesse caso, sabemos quais são os valores máximo e mínimo da função cosseno para qualquer valor de t.

Então:

- $r(t)$ será máximo quando $\cos(0{,}06t)$ for mínimo, ou seja, quando $\cos(0{,}06t) = -1$;
- $r(t)$ será mínimo quando $\cos(0{,}06t)$ for máximo, ou seja, quando $\cos(0{,}06t) = 1$.

Portanto:

- $r_{\text{máximo}} = \dfrac{5\,865}{1 + 0{,}15 \cdot (-1)} = \dfrac{5\,865}{0{,}85} = 6\,900$
- $r_{\text{mínimo}} = \dfrac{5\,865}{1 + 0{,}15 \cdot 1} = \dfrac{5\,865}{1{,}15} = 5\,100$

Mas:

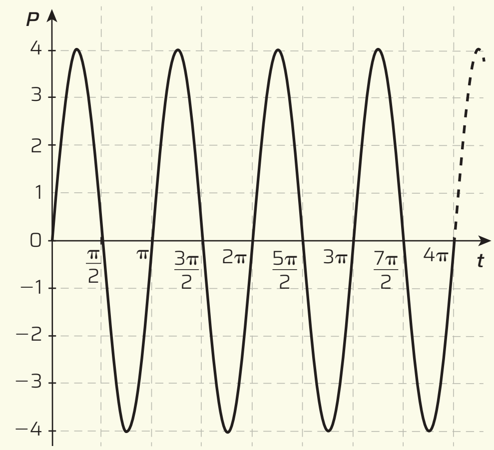
$S = r_{\text{máximo}} + r_{\text{mínimo}} = 6\,900 + 5\,100 = 12\,000$

Logo, S atinge o valor de 12 000 km.

Portanto, a alternativa **b** é a correta.

R14 (Enem) Os movimentos ondulatórios (periódicos) são representados por equações do tipo $\pm A$ sen $(wt + \theta)$, que apresentam parâmetros com significados físicos importantes, tais como a frequência $w = \frac{2\pi}{T}$, em que T é o período; A é a amplitude ou deslocamento máximo; θ é o ângulo de fase $0 \leq \theta < \frac{2\pi}{w}$, que mede o deslocamento no eixo horizontal em relação à origem no instante inicial do movimento.

O gráfico representa um movimento periódico, $P = P(t)$, em centímetro, em que P é a posição da cabeça do pistão do motor de um carro em um instante t, conforme ilustra a figura.



Enem. Fac-símile: ID/BR

A expressão algébrica que representa a posição $P(t)$, da cabeça do pistão, em função do tempo t, é:

a) $P(t) = 4$ sen $(2t)$.
b) $P(t) = -4$ sen $(2t)$.
c) $P(t) = -4$ sen $(4t)$.
d) $P(t) = 4$ sen $\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$.
e) $P(t) = 4$ sen $\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolução

Observando o gráfico, vemos que a função é periódica com período π; então:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

Ou seja, a função é do tipo $\pm A$ sen $(2t)$, o que mostra que as alternativas corretas só podem ser **a** ou **b**.

Para $t = \frac{\pi}{4}$, temos:

$$P(t) = 4$$

Logo, $P(t) = 4$ sen $(2t)$.

Portanto, a alternativa **a** é a correta.

61 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Unicamp-SP) A seguir, são apresentadas quatro funções, definidas para $x \in \mathbb{R}$; são também apresentados quatro esboços de gráficos. Alternativa **b**.

Funções:

$f(x) = \text{sen}(x) + \frac{\pi}{4}$

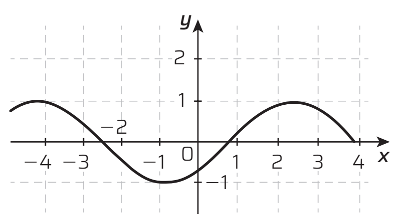
$g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$h(x) = \text{sen}(x - \frac{\pi}{4})$

$p(x) = \cos(x) + \text{sen}(x)$

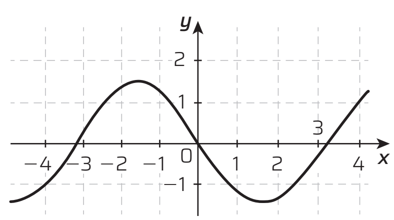
Gráficos:

(i)

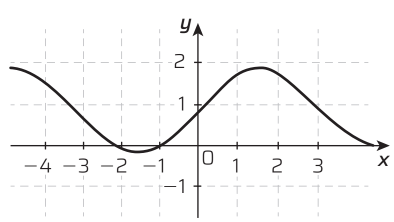


Unicamp-SP. Fac-símile: ID/BR

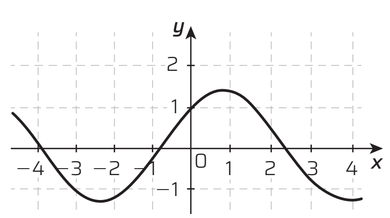
(ii)



(iii)



(iv)



A opção que descreve corretamente a correspondência entre as funções e seus gráficos é:

a) (I) e $g(x)$; (II) e $h(x)$; (III) e $p(x)$; (IV) e $f(x)$.

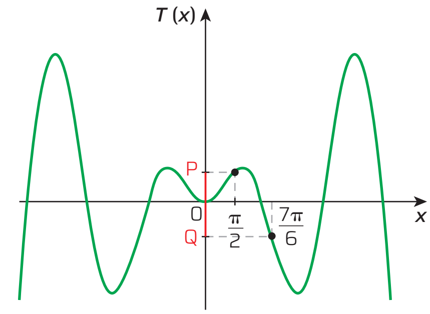
b) (I) e $h(x)$; (II) e $g(x)$; (III) e $f(x)$; (IV) e $p(x)$.

c) (I) e $p(x)$; (II) e $h(x)$; (III) e $g(x)$; (IV) e $f(x)$.

d) (I) e $f(x)$; (II) e $g(x)$; (III) e $p(x)$; (IV) e $h(x)$.

62 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(FCMSC-SP) A figura indica o gráfico da função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x \cdot \text{sen}(x)$, e a abscissa de dois dos seus pontos, cujas ordenadas são P e Q.



ID/BR

Nas condições descritas, P + Q é igual a Alternativa **a**.

a) $-\frac{\pi}{12}$

b) $\frac{\pi}{18}$

c) $-\frac{\pi}{3}$

d) $-\frac{\pi}{6}$

e) $-\frac{\pi}{18}$

63 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(UERR) Por meio de um estudo, verificou-se que a temperatura média mensal em Boa Vista no período de 36 meses, de 2018 a 2020, pode ser modelada pela função $F(t)$ a seguir, com valor em graus Celsius.

$$F(t) = 3\text{sen}\left[\frac{\pi}{3}(t-1)\right] + 30$$

Nessa função, t pertence ao intervalo [1, 36], $t = 1$ corresponde ao mês de janeiro de 2018, $t = 2$, ao mês de fevereiro de 2018 e assim sucessivamente.

De acordo com esse estudo, a temperatura média mensal em Boa Vista durante o período observado foi Alternativa **a**.

a) superior a 31 °C em fevereiro de 2019 e inferior a 29 °C em novembro de 2019.

b) superior a 31 °C em abril de 2018 e inferior a 29 °C em outubro de 2019.

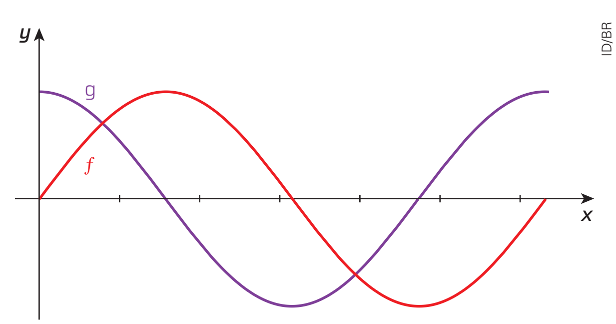
c) superior a 31 °C em agosto de 2019 e inferior a 29 °C em janeiro de 2020.

d) superior a 31 °C em junho de 2018 e inferior a 29 °C em outubro de 2019.

e) superior a 31 °C em julho de 2019 e inferior a 29 °C em dezembro de 2019.

64 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(UPF-RS) Na figura a seguir estão representadas as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por $f(x) = \text{sen}x$ e $g(x) = \cos x$.



ID/BR

O conjunto solução da inequação $g(x) < f(x)$ é: Alternativa **e**.

a) $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right[$

b) $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$

c) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

e) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$

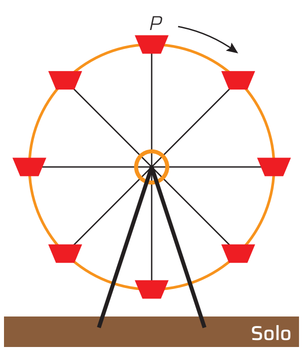
65 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Uece) Se M e m são respectivamente os valores máximo e mínimo que a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3\text{sen}^2 x + 7\cos^2 x$ pode assumir, então o produto $M \cdot m$ é igual a Alternativa **c**.

a) 24. b) 15. c) 21. d) 18.

66 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) A figura ilustra uma roda-gigante no exato instante em que a cadeira onde se encontra a pessoa P está no ponto mais alto dessa roda-gigante.

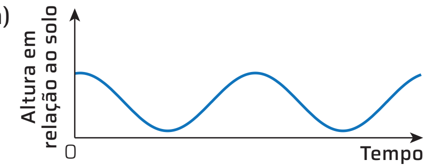


Enem. Fac-símile: ID/BR

Com o passar do tempo, à medida que a roda-gigante gira, com velocidade angular constante e no sentido horário, a altura da cadeira onde se encontra a pessoa P, em relação ao solo, vai se alterando.

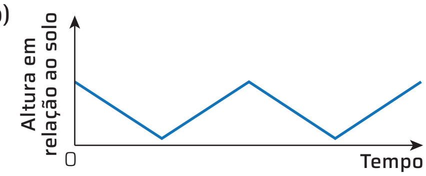
O gráfico que melhor representa a variação dessa altura, em função do tempo, contado a partir do instante em que a cadeira da pessoa P se encontra na posição mais alta da roda-gigante, é Alternativa **a**.

a)

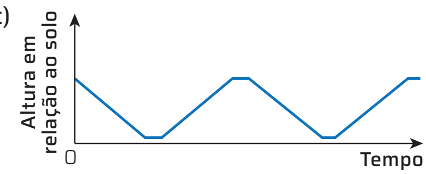


Enem. Fac-símile: ID/BR

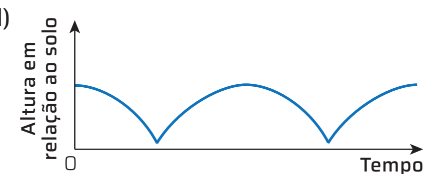
b)



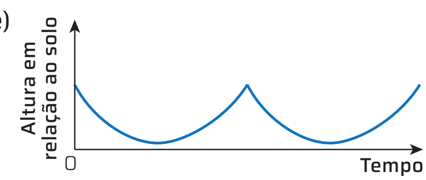
c)



d)



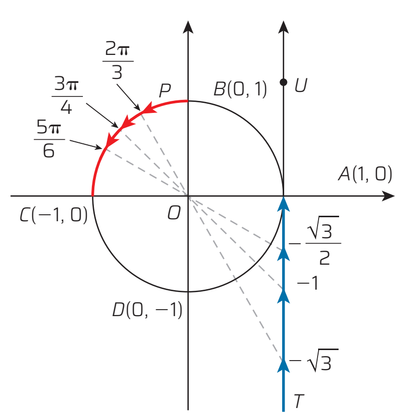
e)



Função tangente

Como o período de $f(\alpha) = \text{tg}\,\alpha$ é π, faremos o estudo da variação de f para $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Em cada figura a seguir, P é a imagem de α no ciclo trigonométrico e $AT = \text{tg}\,\alpha$.

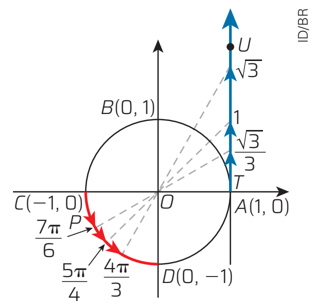
- ***P* no 2º quadrante**



ID/BR

Imagine que P percorra o ciclo trigonométrico de B (exclusive) para C (inclusive). À medida que isso acontece, T percorre o semieixo não positivo das tangentes no sentido ascendente até atingir A, ou seja, **aumentando** α em $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, tg α **aumenta** em $]-\infty, 0]$. Portanto, tangente é uma **função crescente** no 2º quadrante.

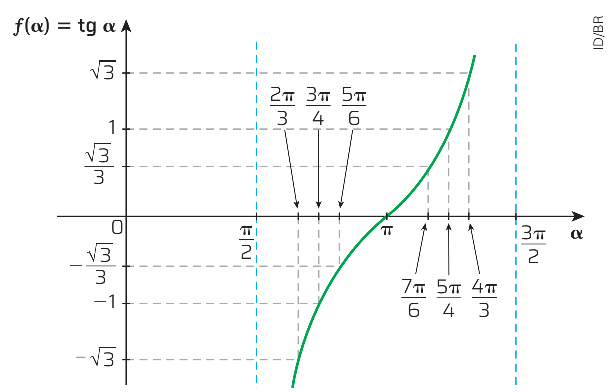
- ***P* no 3º quadrante**



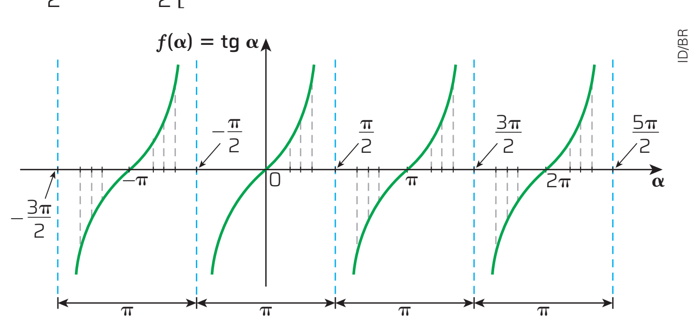
À medida que P percorre o ciclo trigonométrico de C (inclusive) para D (exclusive), T percorre o semieixo não negativo das tangentes, a partir de A, em sentido ascendente, ou seja, **aumentando** α em $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, tg α **aumenta** em $[0, +\infty[$. Portanto, tangente é uma **função crescente** no 3º quadrante.

Esboçando o gráfico cartesiano de $f(\alpha) = \text{tg } \alpha$ para $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, temos:

α	$f(\alpha)$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
π	0
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	$\sqrt{3}$



Obtemos o gráfico de $f(\alpha) = \text{tg } \alpha$, para $\alpha \in D(\text{tg}) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$, repetindo o gráfico anterior em cada intervalo $\left](2n-1)\frac{\pi}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{2}\right[$, com $n \in \mathbb{Z}$.



As retas perpendiculares que passam pelos pontos de abscissas $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são chamadas de **assíntotas** do gráfico da função tangente.

O estudo da variação pelo gráfico nos mostra que $f(\alpha) = \text{tg } \alpha$ assume todos os valores reais. Portanto:

$$\text{Im(tg)} = \mathbb{R}$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R15 Esboce o gráfico cartesiano de $f(\alpha) = \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Resolução

O domínio D(f) é constituído pelos números reais α que satisfazem a condição:

$$\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha \neq \pi + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

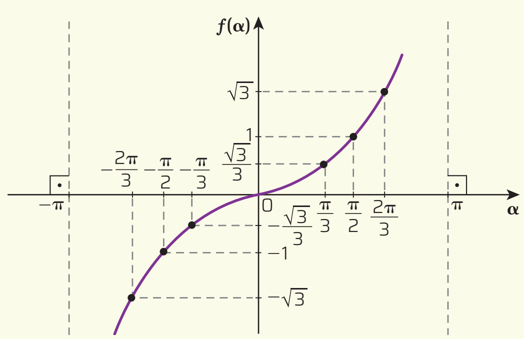
Então, as assíntotas do gráfico de f são as retas perpendiculares ao eixo das abscissas que passam pelos pontos de abscissas ..., -5π, -3π, $-\pi$, π, 3π, 5π, ...

Como tangente é uma função periódica de período π, fazemos $\frac{\alpha}{2}$ variar em um intervalo de amplitude π contido no domínio da tangente. Alguns desses intervalos são:

$\left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\left]\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right[$.

Atribuindo a $\frac{\alpha}{2}$ alguns valores pertencentes a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, calculando α e $f(\alpha)$ e traçando as assíntotas pelos pontos de abscissa $-\pi$ e π, obtemos o gráfico de $f(\alpha) = \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

$\frac{\alpha}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
α	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$f(\alpha)$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



Se considerar oportuno, proponha aos estudantes que façam a atividade **67** usando um *site* ou aplicativo de Geometria dinâmica.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

67 Esboce o gráfico de cada função. Consulte a resposta no Manual do Professor.

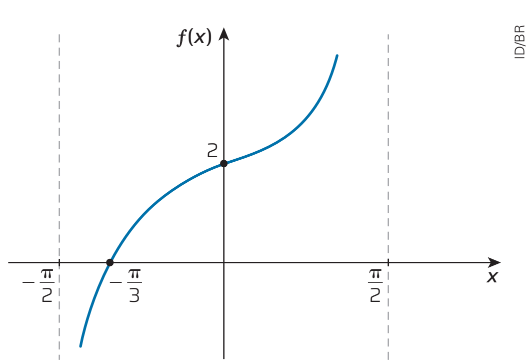
a) $f(\alpha) = |\text{tg}\,\alpha|$

b) $f(\alpha) = \text{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $f(\alpha) = \text{tg}\,2\alpha$

68 Sabendo que o gráfico a seguir é o gráfico de $f(x) = a + b\,(\text{tg}\,x)$, determine os valores de a e de b.

$a = 2$ e $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



CÁLCULO RÁPIDO

1 **Responda às questões a seguir calculando mentalmente.**

a) Dois números, quando adicionados, somam 10 e, quando multiplicados, têm produto 24. Quais são esses números? Os números são 6 e 4.

b) Joana é três anos mais velha que Pedro, e Clara é dois anos mais nova que Pedro. As idades dos três, somadas, resultam em 43 anos. Qual é a idade de cada um deles? Joana tem 17 anos, Pedro tem 14 anos e Clara tem 12 anos.

c) Um carro percorre uma distância com velocidade de 20 m/s. Quantos metros ele percorre em uma hora? Quanto tempo ele leva para percorrer 1 km? 72 000 m. 50 segundos.

d) Qual é mais rápido: o carro *A*, que percorre 100 m em 10 s, ou o carro *B*, que percorre 50 km em 1 h? Por quê? O carro *B*. O mais rápido é o que percorre 50 km em 1 hora, pois 100 metros em 10 s equivalem a 36 km/h.

2 **Considerando $p = 3$ e $q = 4$, ache os valores de:**

a) $\sqrt{q} + 32$ 34

b) $\sqrt{q + 32}$ 6

c) $\sqrt{p^2} + \sqrt{q^2}$ 7

d) $\sqrt{p^2 + q^2}$ 5

3 **Escreva cada expressão sem o uso de parênteses.**

a) $3x + 2(3x - 4)$ $9x - 8$

b) $-1 + (6 - x)^2$ $x^2 - 12x + 35$

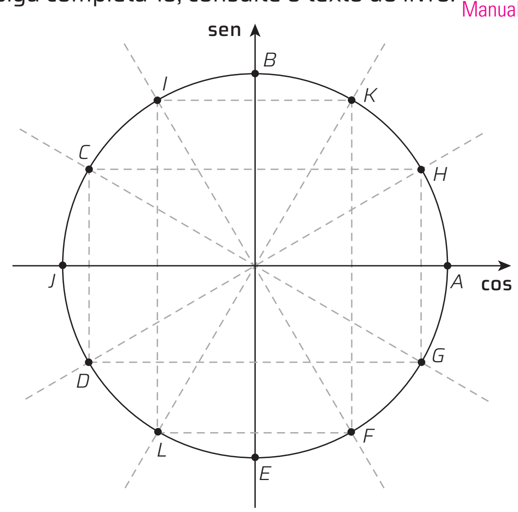
c) $4ab(c - 1)$ $4abc - 4ab$

d) $2x(x - 3y) + 5y$ $2x^2 - 6xy + 5y$

Verifique se, após a leitura, os estudantes compreenderam o que é solicitado na atividade **4**. Auxilie-os na organização do quadro, de modo que ele tenha treze linhas e cinco colunas. Depois, oriente-os a preencher primeiro os dados que sabem de memória e, depois, completar os dados que não sabem utilizando o ciclo trigonométrico ou as medidas no quadrado e no triângulo equilátero que permitiram calcular seno e cosseno de 30°, 60° e 45°. Caso julgue pertinente, proponha a eles que acrescentem mais uma coluna ao quadro e completem-na com os valores da tangente de cada arco, calculados a partir do seno e do cosseno.

4 **Memorizar a posição dos principais arcos no ciclo trigonométrico e os valores de seus senos e cossenos pode auxiliar na resolução de problemas.**

Considere, então, os pontos indicados no ciclo trigonométrico a seguir e organize no caderno um quadro como o que está apresentado após a figura. Depois, complete-o tentando buscar as respostas pela análise do desenho. Caso não consiga completá-lo, consulte o texto do livro. Consulte a resposta no Manual do Professor.



ID/BR

	Arco (em grau)	Arco (em radiano)	Seno do arco	Cosseno do arco
Ponto *A*	//////////////////	//////////////////	//////////////////	//////////////////
Ponto *B*	//////////////////	//////////////////	//////////////////	//////////////////
Ponto *C*	//////////////////	//////////////////	//////////////////	//////////////////
⋮	//////////////////	//////////////////	//////////////////	//////////////////

PARA RECORDAR

Para continuar aprendendo, é sempre bom retomar o que é importante. Que tal resolver alguns problemas para relembrar?

1 **Escreva no caderno a alternativa correta.**

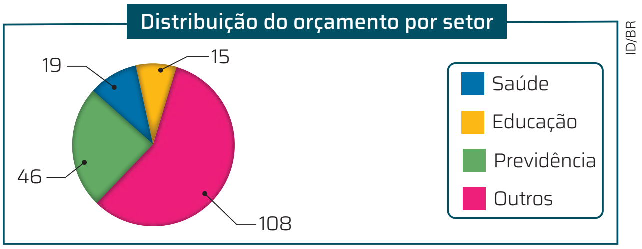
(Enem) A conta de telefone de uma loja foi, nesse mês, de R$ 200,00. O valor da assinatura mensal, já incluso na conta, é de R$ 40,00, o qual dá direito a realizar uma quantidade ilimitada de ligações locais para telefones fixos. As ligações para celulares são tarifadas separadamente. Nessa loja, são feitas somente ligações locais, tanto para telefones fixos quanto para celulares. Para reduzir os custos, o gerente planeja, para o próximo mês, uma conta de telefone com valor de R$ 80,00.

Para que esse planejamento se cumpra, a redução percentual com gastos em ligações para celulares nessa loja deverá ser de: Alternativa **e**.

a) 25%. b) 40%. c) 50%. d) 60%. e) 75%.

2 **Uma função quadrática tem o eixo y como eixo de simetria. A distância entre os zeros da função é de 4 unidades, e o valor mínimo da função é −5. Qual é essa função?** $f(x) = \frac{5x^2}{4} - 5$

3 **O gráfico a seguir mostra como os 188 milhões de reais do orçamento de um município foram distribuídos entre os setores de saúde, educação, previdência e outros.**



Dados fornecidos pela Prefeitura do município.

Se os 46 milhões de reais gastos com a previdência tivessem sido totalmente repassados aos demais setores, de modo que 50% fossem destinados à saúde, 40% à educação e 10% aos outros, determine o aumento que o setor de saúde teria tido:

a) em reais; 23 milhões de reais.

b) em porcentagem, em relação à sua dotação inicial, aproximadamente. Aproximadamente 121%.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

Lembre-se de que resolver problemas não convencionais é o objetivo desta seção, pois permite que os estudantes desenvolvam procedimentos pessoais de resolução e de registro.

1 **Em uma classe há 20 estudantes: 14 deles têm olhos castanhos, 15 têm cabelos negros, 17 têm mais de 40 kg e 18 medem 1,50 m. Mostre que ao menos 4 estudantes têm todas as características indicadas.**
Consulte a resposta no Manual do Professor.

2 **Faltou luz na casa de um rapaz e, sem poder enxergar no escuro, ele quer pegar um par de meias dentro de uma gaveta que contém seis diferentes tipos de pares de meia. Qual é o número mínimo de meias que ele terá de pegar a fim de conseguir formar um par de meias iguais?**
Sete meias, assim haverá, com certeza um par completo e cinco meias avulsas.

PALAVRAS-CHAVE

As palavras-chave deste capítulo são:

- Função seno
- Função cosseno
- Função tangente

Escreva no caderno o que você sabe dessas funções e ilustre o texto com exemplos e gráficos.
Um bom resumo pode auxiliar a rever o que você estudou e tornar-se fonte de consulta.

MATEMÁTICA E SINESTESIA

O objetivo desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes, desenvolver habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propor que vivenciem um processo investigativo, trabalhando, assim, as competências específicas **1** e **2** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Esta seção permite que sejam trabalhadas as competências gerais **1**, **2**, **3** e **4** propostas pela BNCC, uma vez que os estudantes exercitam a curiosidade, a criatividade e as diferentes linguagens para investigar e compreender manifestações culturais e artísticas. Além disso, o tema abordado possibilita uma integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e com a área de Linguagens e suas Tecnologias, além de contemplar os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Multiculturalismo. Pode ser proposto um trabalho integrado com o professor de Arte a fim de explorar a competência específica **6** da área de Linguagens e suas Tecnologias.

Davi Augusto/ID/BR

Enxergando os sons

Você sabia que existem pessoas que sentem um cheiro ao ler uma palavra ou enxergam uma cor ao escutar um som?

Leia o texto a seguir para saber mais sobre essa condição rara.

É bem improvável que o leitor esteja vendo cada uma das letras ou palavras desta breve nota com cores distintas. Se sim, dois avisos: i) elas estão em tinta preta; ii) é provável que o leitor seja portador de um quadro que acomete menos de 1% da população mundial: a sinestesia, sobre a qual há novidades.

A sinestesia, que tem raízes familiares, é tão estranha quanto desconhecida. Sua versão mais comum parece ser a chamada sinestesia auditiva: a pessoa vê cores quando escuta sons. Mas há também quem veja cores ao ler, sentir cheiros, enxergar formas ou tocar objetos. A lista de "deflagradores" é longa.

[...]

Vieira, Cássio Leite. Escuto cores, vejo sons... *Ciência Hoje*, Rio de Janeiro, mar. 2009. Disponível em: https://cienciahoje.org.br/artigo/escuto-cores-vejo-sons/. Acesso em: 9 out. 2024.

Pessoas sinestésicas podem ter sensações visuais que são causadas por certos sons. Trata-se de uma condição neurológica que afeta uma pequena parte da população mundial.

Por outro lado, mesmo sem ter sinestesia, é possível a qualquer pessoa "ver" um som, ou melhor, é possível enxergar a representação gráfica de um som. Para fazer isso, contamos com a ajuda da linguagem matemática.

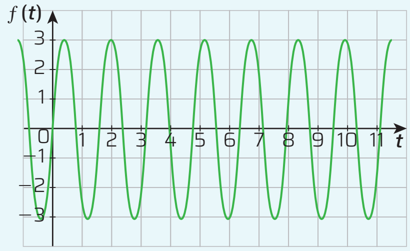
Antes de tudo, porém, precisamos recorrer a alguns conceitos da Física, que é a área do conhecimento que estuda as ondas. Para a Física, o som é uma onda mecânica, ou seja, que se propaga apenas em meios materiais (na água, no ar e nos sólidos). Como ondas têm período e frequência, podemos usar as funções seno e cosseno, que também são periódicas, para representar visualmente as ondas sonoras em um gráfico.

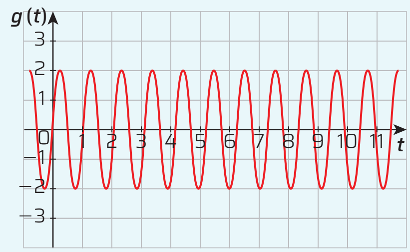
Analisando a frequência (F) do som, dada em hertz (Hz), podemos descobrir se esse som é agudo (quando a frequência é mais alta) ou grave (quando a frequência é mais baixa) ou até descobrir a qual nota musical ele se refere. É possível observar a frequência em um gráfico ou na expressão da função de onda.

Para exemplificar a relação entre a onda sonora e sua respectiva função, suponha que um som qualquer N seja representado aproximadamente pela onda cujo gráfico é dado pela soma das funções $f(t) = 3 \cdot \text{sen}\,(4t)$ e $g(t) = 2 \cdot \text{sen}\,(6t)$, que também representam aproximadamente as ondas de outros dois sons, L e M,

Não escreva no livro.

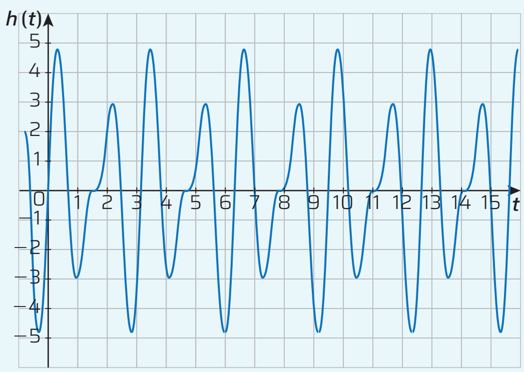
respectivamente. Assim, a função que analisaremos é dada por $h(t) = f(t) + g(t) =$ $= 3 \cdot \text{sen}\ (4t) + 2 \cdot \text{sen}\ (6t)$, em que t é o tempo de propagação. Os gráficos das funções $f(t)$ e $g(t)$ são os seguintes:





Ilustrações: ID/BR

Somando as funções, obtemos o seguinte gráfico para $h(t)$, que corresponde ao som N:



ID/BR

Assim, esses gráficos representam visualmente os sons L, M e N e mostram como poderíamos “enxergá-los” ao ouvi-los, usando, para isso, a Matemática.

PARA EXPLORAR

Simulador

Tour trigonométrico. PhET Interactive Simulations. Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_all.html?locale5pt_BR. Acesso em: 9 out. 2024.

Analise o comportamento das funções trigonométricas com o auxílio desse simulador *on-line*. Você pode testar valores para seno, cosseno e tangente de um ângulo em grau e em radiano.

Conectando ideias

1 **Pesquise a definição de “timbre” para a acústica e explique como é possível notar a diferença de uma mesma nota musical sendo produzida por instrumentos musicais diferentes.** Consulte a resposta no Manual do Professor.

2 **Na Arte, também é dado o nome de sinestesia ao recurso de linguagem que envolve misturar alguns dos cincos sentidos (paladar, audição, visão, tato e olfato) para produzir determinado efeito criativo.**

É possível perceber quando foi usado o recurso da sinestesia em uma produção artística?

- Organizem-se em grupos. Cada grupo deverá escolher uma obra artística: pode ser pintura, letra de música, poema, escultura, etc. O importante é que essa obra tenha usado o recurso da sinestesia.
- Observem como a sinestesia é representada na obra e anotem suas observações.
- Preparem uma apresentação oral da obra escolhida. É importante mencionar, nessa apresentação, o nome da obra e do artista, além de explicar como a sinestesia foi utilizada nela para produzir um efeito artístico.

Resposta de acordo com a pesquisa realizada pelos estudantes.

É relevante que os estudantes percebam a diferença entre a sinestesia utilizada como recurso de linguagem por artistas, que misturam sensações em suas obras de modo intencional e com objetivos diversos, e a sinestesia como uma condição neurológica, em que a pessoa não tem controle sobre a mistura de sensações realizadas no próprio cérebro. Compreender a importância da ação intencional do artista em uma obra de arte vai ajudar os estudantes a distinguir melhor cada tipo de sinestesia e, também, a analisar com mais propriedade a obra escolhida.
O professor de Arte ou o de Língua Portuguesa poderá auxiliar os estudantes em suas observações, enriquecendo a discussão.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Para resolvermos algumas situações do dia a dia, podemos simplificar a situação, com um desenho ou esquema que nos ajude a aplicar conceitos e cálculos. A leitura cuidadosa de uma imagem ou de um texto descritivo repletos de informações nos permite selecionar os dados necessários para a resolução, assim nos concentramos no que é essencial para uma estratégia de resolução. Analise a questão a seguir e busque encontrar o triângulo cujas medidas nos permitem solucionar o problema.

VESTIBULAR EM CONTEXTO

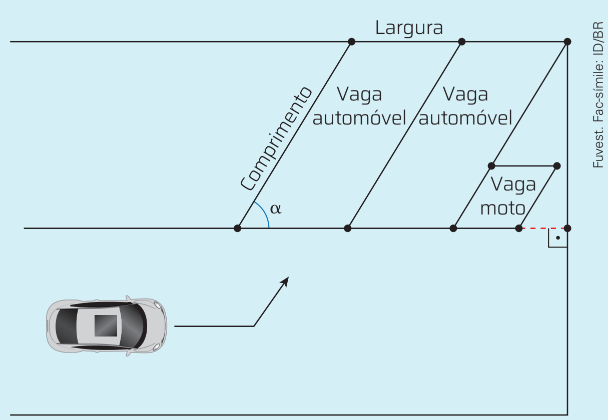
(Fuvest-SP) No Código de Obras e Edificações da Prefeitura de São Paulo, encontra-se a regulamentação para vagas de estacionamento em um edifício para diferentes tipos de veículos. De acordo com o código, as dimensões de uma vaga de estacionamento são estabelecidas de acordo com o tipo de veículo, conforme a seguinte tabela:

Tabela: Dimensões das vagas de estacionamento em função do tipo de veículo (medidas em metros).

Tipos de veículos	Vagas para estacionamento	
	Largura	Comprimento
Automóvel	2,20	4,50
Carro para pessoa com deficiência	3,70	5,00
Moto	1,00	2,00
Utilitário	2,50	5,50
Caminhão leve	3,10	8,00

Código de Obras e Edificações da Prefeitura de São Paulo. Adaptado.

Na figura a seguir, é apresentada parte de um projeto de garagem para um edifício. Foram projetadas vagas para automóveis e uma vaga para moto, no formato de paralelogramo, com ângulo α de medida 60°.



Após a vaga da moto, restou um espaço na garagem. Os responsáveis pela obra estão avaliando a possibilidade de colocar algum objeto que possa ser utilizado pelos condôminos do edifício. Qual a medida do segmento destacado (tracejado) nesse espaço?

Note e adote: $\cos(60°) = 0{,}5$; $\text{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) 0,75 m
b) 1,15 m
c) 1,25 m
d) 2,20 m
e) 2,25 m

Resolução

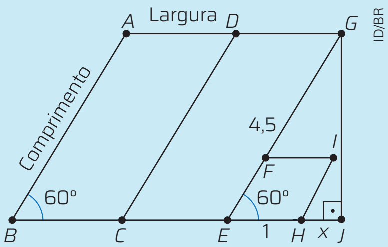
De acordo com as informações da tabela e da figura apresentada, podemos elaborar o esquema a seguir e realizar os cálculos.

No triângulo *EJG*, temos que:

$$\cos 60° = \frac{1+x}{4{,}5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1+x}{4{,}5}$$

$$x = \frac{4{,}5-2}{2} = 1{,}25$$

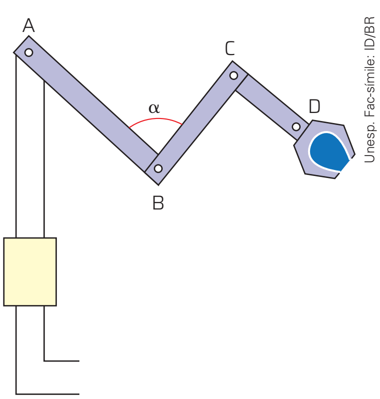


Portanto, o segmento tracejado na figura mede 1,25 m e a alternativa **c** é a correta.

Explorando a estratégia

1 **Indique no caderno a alternativa correta.**

(Unesp) A figura indica o projeto de um braço mecânico em que $\overline{AB}$ assume função próxima de um bíceps humano, $\overline{BC}$ de um antebraço e $\overline{CD}$ de um punho. Sabe-se que a medida de $\overline{AB}$ supera a de $\overline{CD}$ em 11 cm e que a medida de $\overline{BC}$ é 8 cm. Alternativa **e**.

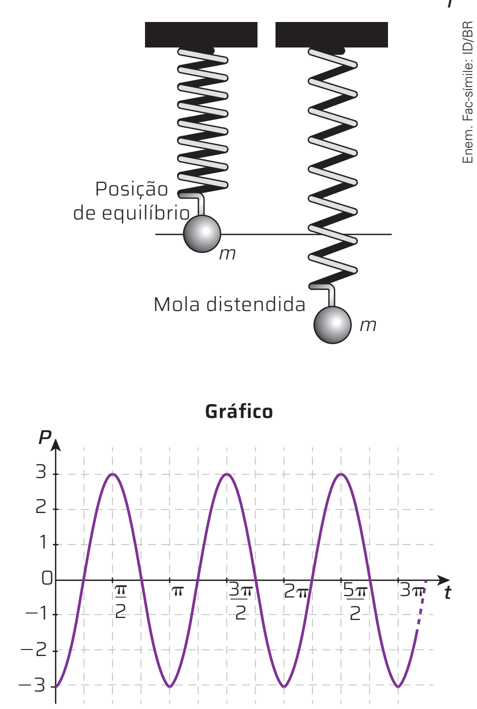


Se, para $\alpha = 60°$, a distância entre os pontos *A* e *C* do mecanismo é igual a $8\sqrt{3}$ cm, a extensão máxima horizontal do braço mecânico, em cm, é igual a

a) 31. b) 28. c) 30. d) 27. e) 29.

2 **Escreva no caderno a alternativa correta.**

(Enem) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição *P* (em cm) da massa *m* em função do tempo *t* (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A\cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm A\,\text{sen}(\omega t)$, em que $A > 0$ é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período *T* pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$.



A expressão algébrica que representa as posições *P*(*t*) da massa *m*, ao longo do tempo, no gráfico, é

a) $-3\cos(2t)$
b) $-3\,\text{sen}(2t)$
c) $3\cos(2t)$
d) $-6\cos(2t)$
e) $6\,\text{sen}(2t)$

Alternativa **a**.

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

As senhas são elementos importantes em nosso dia a dia para desbloquear aparelhos eletrônicos, utilizar cartões e acessar dados bancários, entre outras finalidades. No mundo digital, elas são necessárias para realizar várias atividades e conectar-se de qualquer lugar a diversos serviços *on-line*. Dessa maneira, criar senhas seguras torna-se algo obrigatório para evitar que dados pessoais acabem ficando ao alcance de outras pessoas. Um dos fatores que contribuem para a segurança de uma senha é aumentar a variedade de combinações possíveis, diversificando as especificações de seu formato. Por exemplo, a quantidade de combinações possíveis para senhas formadas apenas por números é bem menor que a quantidade de arranjos formados por números e letras e menor ainda que as possibilidades constituídas de letras, números e caracteres especiais.

Nesta unidade, vamos estudar duas áreas da Matemática – análise combinatória e probabilidade – que nos darão ferramentas para resolver problemas relacionados a diversas áreas do conhecimento, inclusive para determinar a quantidade de combinações possíveis para uma senha segura de acordo com o nível de segurança desejado.

OBJETIVOS

- Utilizar a contagem que envolve agrupamentos de elementos – ordenáveis ou não – na resolução de problemas.
- Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da probabilidade de eventos em experimentos aleatórios.

O acesso a um dispositivo como o computador está vinculado à definição de um usuário e de uma senha. ▶

UNIDADE 4

Day of Victory Studio/Adobe.com/ID/BR

ANÁLISE COMBINATÓRIA

NESTE CAPÍTULO

- Procedimentos de contagem
- Princípio fundamental da contagem
- Permutação
- Arranjo
- Combinação

Neste capítulo, iniciamos o estudo sobre análise de dados, explorando os temas **contagem** e **análise combinatória**. Inicialmente, esse estudo será feito sem o uso de fórmulas, para que os estudantes se apropriem do princípio fundamental da contagem e, em seguida, com o uso de fórmulas, para que compreendam o sentido delas e valorizem seu uso. Dessa maneira estaremos trabalhando o raciocínio por abdução, ou seja, pela análise de casos particulares o estudante busca justificativas plausíveis para posterior generalização e a fórmulas correspondentes. O estudo deste capítulo contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT310**, na medida em que os estudantes interpretam o texto, mobilizam conhecimentos na resolução de problemas e registram a solução usando a linguagem matemática de maneira adequada.

Dê tempo para que os estudantes reflitam sobre as questões propostas nesta abertura de capítulo para, em seguida, tentar resolvê-las.

À medida que avançar na teoria, retome as respostas iniciais dos estudantes às perguntas, a fim de analisar e discutir as resoluções com eles.

Representações sem proporção de tamanho entre si.

Analise as fotografias a seguir e, depois, reflita sobre as questões relacionadas a cada uma delas.

Joa Souza/Shutterstock.com/ID/BR

As placas que identificam automóveis são uma combinação de letras e números. Foto de 2023.

DenPhotos/Shutterstock.com/ID/BR

Smartphone.

Quantas placas de automóvel podem ser formadas com quatro letras e três algarismos? 456 976 000 placas de automóvel.

10^9 ou 1 000 000 000 números de telefone.

Quantos números de telefone de nove dígitos podem ser criados com os algarismos de 0 a 9?

Quantas senhas de computador podem ser criadas com seis caracteres, utilizando apenas letras minúsculas e algarismos, dos quais pelo menos dois sejam letras e um deles seja algarismo? 1 851 266 560 senhas de computador.

mangpor2004/Shutterstock.com/ID/BR

O *laptop* é um dispositivo portátil, de uso pessoal e profissional.

Responder a essas questões permite estimar a quantidade possível de linhas telefônicas e o tamanho da frota de automóveis ou, ainda, o potencial de segurança nas transações comerciais que exigem senhas.

Vamos iniciar o estudo de uma área da Matemática que analisa dados e busca quantificá-los. A contagem organizada de grande número de dados é conhecida como **análise combinatória**, que é o foco de estudo deste capítulo.

Não escreva no livro.

PROBLEMAS DE CONTAGEM

Aprender a organizar e a contar um grande número de possibilidades exige modos adequados para ordenar informações. Vamos começar estudando esses modos em diferentes situações de contagem.

Leia cada enunciado com calma para compreender o que se pede, identificando palavras ou expressões que você não conheça e procurando o significado delas em um dicionário. Depois, acompanhe cada resolução, analisando as escolhas feitas.

Exemplo 1

Suponha que Carlos tenha quatro camisas: uma branca (B), uma azul (A), uma preta (P) e uma vermelha (V), e três calças: uma branca (B), uma preta (P) e uma azul (A). De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir, com as roupas que possui, usando uma camisa e uma calça?

Ele poderá escolher qualquer uma das quatro camisas e, para cada camisa escolhida, optar por qualquer uma das três calças.

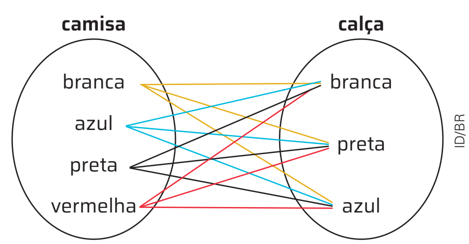
Podemos resolver esse problema de vários modos.

1º modo: Escrevendo os grupos possíveis de camisa e calça.

(camisa B, calça B) (camisa A, calça B) (camisa P, calça B) (camisa V, calça B)
(camisa B, calça P) (camisa A, calça P) (camisa P, calça P) (camisa V, calça P)
(camisa B, calça A) (camisa A, calça A) (camisa P, calça A) (camisa V, calça A)

Portanto, há 12 maneiras diferentes de Carlos se vestir.

2º modo: Representando em diagramas entre conjuntos.



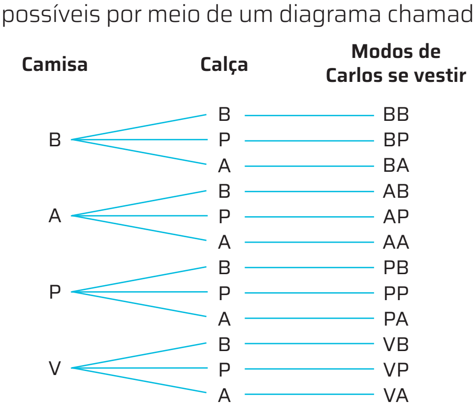
Aplicando esse método, também é possível concluir que há 12 maneiras diferentes de Carlos se vestir.

3º modo: Organizando as informações em um quadro.

Calça / Camisa	Branca	Preta	Azul
Branca	BB	BP	BA
Azul	AB	AP	AA
Preta	PB	PP	PA
Vermelha	VB	VP	VA

Portanto, há 12 maneiras diferentes de Carlos se vestir ($4 \cdot 3 = 12$).

4º modo: Visualizando as opções possíveis por meio de um diagrama chamado **árvore de possibilidades**.



Portanto, há 12 maneiras diferentes de Carlos se vestir.

5º modo: Fazendo um desenho.

ID/BR

Portanto, há 12 maneiras diferentes de Carlos se vestir.

6º modo: Fazendo um esquema.

Camisa	**Calça**
4 possibilidades	3 possibilidades

Para cada escolha de camisa, há três possibilidades de calça e, portanto, ao todo, há 12 possibilidades diferentes de Carlos se vestir.

Exemplo 2

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3 e 6?

Note que a palavra "distintos" tem aqui o significado de "diferentes"; logo, números como 333 ou 113 não podem ser contados.

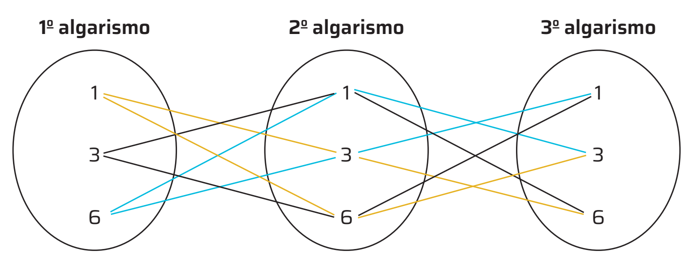
Vamos resolver o problema utilizando alguns dos recursos vistos anteriormente.

1º modo: Escrevendo todos os números possíveis.

136 163 316 361 613 631

Portanto, podemos formar seis números distintos.

2º modo: Usando diagramas entre conjuntos.



ID/BR

Note que, para essa situação, o diagrama não é tão compreensível. Imagine como seria o diagrama se fôssemos formar números de cinco algarismos!

3º modo: Usando a árvore de possibilidades.

1º algarismo	**2º algarismo**	**3º algarismo**	**Número formado**
1	3	6	136
	6	3	163
3	1	6	316
	6	1	361
6	1	3	613
	3	1	631

Portanto, podemos formar seis números distintos.

4º modo: Fazendo um esquema.

1º algarismo	**2º algarismo**	**3º algarismo**
3 possibilidades	2 possibilidades	1 possibilidade

Como os números devem ser formados por algarismos distintos, para cada uma das três possibilidades de escolha do primeiro algarismo sobram duas para a escolha do segundo algarismo e, escolhido este, só há uma possibilidade para a escolha do terceiro algarismo, o que dá um total de seis possibilidades.

Nesta seção, o objetivo é levar os estudantes a pensar na organização dos processos de contagem, sem a preocupação com generalizações. Mais adiante, as generalizações darão origem às fórmulas para contagem em casos específicos.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Em cada atividade, procure utilizar dois ou mais recursos para a resolução. Não despreze nenhuma forma de representação: use desenhos, quadros e diagramas ou faça listas dos elementos ou dos resultados possíveis. Se tiver dúvidas, retome os exemplos.

1 **Um jogo de dominó tradicional consiste em peças retangulares, cada uma dividida em duas seções. Cada seção tem de 0 a 6 pequenos pontos. Considerando todas as combinações possíveis, quantas peças há em um jogo de dominó?** 28 peças.

2 **No lançamento simultâneo de cinco moedas, em que pode sair cara ou coroa em cada uma, quantos e quais são os resultados possíveis?** Consulte a resposta no Manual do Professor.

3 **Em um jogo com dois dados comuns, quais e quantas são as somas possíveis de todos os números que poderão sair na face superior quando os dois dados forem lançados?** São 11 somas possíveis: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

4 **Número palíndromo é aquele que, tanto da esquerda para a direita quanto da direita para a esquerda, tem a mesma leitura, por exemplo: 121, 13 531 ou 122 221.**

a) Dê um exemplo de números palíndromos de três e de quatro algarismos. Resposta pessoal.

b) Quantos números palíndromos de três algarismos há em nosso sistema de numeração? 90 números.

c) Com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, quantos palíndromos de quatro algarismos conseguimos formar? 25 números.

d) É possível que um número palíndromo tenha todos os seus algarismos diferentes? Por quê? Não, porque, para que um número seja palíndromo, deve haver ao menos um par de algarismos iguais.

5 **Responda no caderno:**

a) De quantas maneiras diferentes seis pessoas podem se acomodar em um automóvel que leva quatro pessoas atrás e duas na frente, sabendo que todas são habilitadas a dirigir? 720 maneiras.

b) Nesse mesmo automóvel, uma das pessoas insiste em dirigir. De quantas maneiras diferentes os lugares restantes poderão ser ocupados? 120 maneiras.

6 **Usando todas as letras de uma palavra, podemos formar anagramas com elas. Os anagramas foram muito utilizados no passado como códigos de mensagens secretas e ainda hoje são usados como códigos de computadores e em jogos.**

a) CAOL é um dos anagramas da palavra COLA. Dê outros dois anagramas para essa palavra, sendo que eles não precisam necessariamente formar uma palavra. Exemplos de resposta: CALO, LOCA, OLCA e ALOC.

b) Quantos anagramas podemos obter da palavra COLA? 24 anagramas.

c) Quantos anagramas da palavra COLA começam com C? 6 anagramas.

d) Quantos anagramas da palavra COLA não começam com L? 18 anagramas.

7 **Alguns truques com palavras também envolvem a Matemática. Observe:**

A	M	O
M	O	
O		

De quantas maneiras distintas podemos obter a palavra AMO nesse caso, mesmo que não seja em uma única linha, partindo sempre do A e indo para a direita e/ou para baixo? 4 maneiras.

8 **Usando a regra da atividade anterior, determine de quantas maneiras diferentes podemos obter a palavra AMORA.** 16 maneiras.

9 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Efomm-RJ) Dados um círculo e cinco cores distintas, de quantas maneiras podemos pintar todos os quadrantes deste círculo, se os quadrantes cuja fronteira é uma linha não podem receber as mesmas cores? Alternativa **a**.

a) 260

b) 190

c) 120

d) 60

e) 20

Ao final, organize um painel de soluções para que os estudantes apresentem, analisem e comparem as resoluções que deram aos problemas.

PARA EXPLORAR

Livro

VALLADARES, Renato J. Costa. *O jeito matemático de pensar*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2012.

Leia o capítulo “Pesca, Senado e racionamento” e saiba como os cálculos matemáticos auxiliam na preservação ambiental e em outros contextos.

O texto sugerido no boxe *Para explorar* permite um trabalho integrado com os componentes curriculares Geografia e Biologia e tem como objetivo analisar questões ambientais e propor intervenções na área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias por meio de conhecimentos matemáticos.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Ao resolver os problemas anteriores, utilizamos diferentes procedimentos para representar as contagens que fizemos. No entanto, em todos eles, mesmo sem explicitar, aplicamos o **princípio fundamental da contagem** ou **princípio multiplicativo**.

Para entendermos o princípio fundamental da contagem, podemos retomar o exemplo **1** e lembrar que havia 12 possibilidades diferentes de Carlos se vestir porque ele poderia escolher qualquer uma das quatro camisas e, para cada camisa escolhida, combiná-la com qualquer uma das três calças.

Informalmente, o que esse princípio diz é que, se temos um acontecimento formado por diversas etapas (no exemplo **1**, a primeira etapa pode ser “escolher a camisa”, e a segunda, “escolher a calça”) e sabemos o número de possibilidades para cada uma dessas etapas se realizar, ao multiplicarmos esses números, teremos a quantidade de possibilidades de o acontecimento completo se realizar.

De modo geral, o princípio fundamental da contagem pode ser enunciado assim:

Se um acontecimento A_1 pode ocorrer de m_1 maneiras diferentes e, para cada maneira de A_1 ocorrer, um acontecimento A_2 pode ocorrer de m_2 maneiras diferentes; e se, para cada maneira de A_1 e de A_2 ocorrerem, um acontecimento A_3 pode ocorrer de m_3 maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de ocorrerem A_1, A_2 e A_3 é:

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$$

O mesmo se aplica a dois ou a mais de três acontecimentos.

Considerando a complexidade do raciocínio combinatório e a importância do **princípio fundamental da contagem**, é recomendável que as atividades resolvidas sejam analisadas por você em conjunto com os estudantes, destacando as imagens como apoio ao raciocínio.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Mais uma vez, analise cada atividade resolvida e procure:

- ler o enunciado calmamente para compreender o que se pede;
- identificar palavras ou expressões que você desconheça e procurar o significado delas em um dicionário;
- ver a resolução, analisando cada escolha feita;
- antes de passar para a próxima atividade resolvida, checar as atividades da seção *Problemas e exercícios propostos* e pensar qual (ou quais) delas poderia(m) ser resolvida(s) com a ajuda da atividade resolvida que você acabou de ler.

R1 **Com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 6, podemos formar quantos números de:**

a) três algarismos?

b) três algarismos distintos?

Resolução

a) Os números são da forma C D U, em que cada letra representa, respectivamente, o algarismo da centena, da dezena e da unidade.

Vamos analisar cada um dos algarismos desse número.

- O algarismo das centenas **não** pode ser zero; logo, podemos preencher essa posição com 1, 2, 3 ou 6, ou seja, temos quatro possibilidades.
- O algarismo das dezenas pode ser 0, 1, 2, 3 ou 6 (pode haver repetição); logo, temos cinco possibilidades para essa posição.
- O algarismo das unidades pode ser 0, 1, 2, 3 ou 6 (pode haver repetição); logo, temos cinco possibilidades para essa posição.

Agora, vamos esquematizar:

4 5 5 ← número de possibilidades

$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$

Portanto, podemos formar 100 números.

b) Os números são da forma C D U, em que cada letra representa, respectivamente, o algarismo da centena, da dezena e da unidade, e o algarismo das centenas **não** pode ser zero; logo, para essa posição, temos quatro possibilidades.

Para cada algarismo colocado na posição das centenas, o algarismo das dezenas pode ser qualquer um dos quatro restantes (**não** pode haver repetição); logo, temos quatro possibilidades para preencher a posição das dezenas.

Para cada algarismo das centenas e para cada algarismo das dezenas, o algarismo das unidades poderá ser qualquer um dos três restantes; logo, temos três possibilidades para o algarismo das unidades.

Vamos esquematizar:

4 4 3 ← número de possibilidades

$4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

Portanto, podemos formar 48 números.

R2 Calcule quantos anagramas da palavra PALCO

a) começam com a letra C;

b) **não** terminam com a letra O.

Resolução

a) A primeira letra do anagrama só pode ser C; então:

C

1

Para cada uma das outras posições, como **não** pode haver repetição de letras, temos:

C

1 4 3 2 1 ← número de possibilidades

$1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Portanto, há 24 anagramas que começam com a letra C.

b) Se os anagramas não podem terminar com a letra O, temos apenas quatro letras que podem ocupar a última posição. Escolhendo uma letra na última posição, temos quatro letras que podem ocupar a penúltima posição (incluindo a letra O e excluindo a letra escolhida na última posição). Repetindo esse processo para as demais posições, temos:

1 2 3 4 4 ← número de possibilidades

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$

Portanto, há 96 anagramas que **não** terminam com a letra O.

R3 Com as letras do alfabeto e os algarismos do sistema decimal, calcule a quantidade de senhas (imaginando que pode haver senhas com quatro algarismos iguais a zero) que podem ser criadas com:

a) duas letras seguidas de quatro algarismos;

b) três letras seguidas de quatro algarismos.

Resolução

a) Caracterização da senha:

$\underbrace{\_\_\ \_\_}_{\text{letras}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{algarismos}}$

O alfabeto tem 26 letras, que poderão ser repetidas. O mesmo pode ocorrer com os 10 algarismos do sistema decimal. Logo, temos:

26 26 10 10 10 10 ← número de possibilidades

$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^4 = 6\,760\,000$

Portanto, podem ser criadas 6 760 000 senhas.

b) Caracterização da senha:

$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{letras}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{algarismos}}$

26 26 26 10 10 10 10 ← número de possibilidades

$26^3 \cdot 10^4 = 175\,760\,000$

Portanto, podem ser criadas 175 760 000 senhas.

As atividades **11**, **13** e **14** auxiliam na avaliação de propostas para intervenções na realidade.

Selecione ao menos quatro dessas atividades e explore-as em um painel de soluções. Esse procedimento amplia o repertório dos estudantes no que se refere a ações de resolução de problemas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Se achar necessário, utilize o princípio multiplicativo e a árvore de possibilidades para resolver estas atividades.

10 Resolva novamente as atividades propostas **4** (itens **b** e **c**), **5** e **6** (itens **b**, **c** e **d**) utilizando o princípio fundamental da contagem. Consulte a resposta no Manual do Professor.

11 Uma empresa vai colocar códigos em alguns produtos em fase de testes. Ficou resolvido que, para esses testes, serão usados códigos formados por cinco algarismos diferentes, escolhidos entre 1, 2, 3, 4 e 5. Considerando que cada produto receberá um código, quantos produtos, no máximo, entrarão em fase de testes? 120 produtos.

12 Um salão de festas tem oito portas. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode entrar no salão e sair dele uma única vez? 64 maneiras.

13 Com as letras do alfabeto e os algarismos do sistema decimal, quantas placas podem ser fabricadas com três letras seguidas de quatro algarismos, sabendo que não podem ser feitas placas com quatro algarismos zero? 175 742 424 placas.

14 As placas de identificação de veículos no Brasil são emitidas pelos Departamentos Estaduais de Trânsito (Detran) de cada estado e do Distrito Federal. Desde 1901, o Brasil adotou diversos sistemas de emplacamento. No entanto, foi somente em 1969 que o sistema se tornou alfanumérico: as placas dos automóveis passaram a ser compostas de duas letras e quatro algarismos, com pelo menos um deles diferente de zero. Em 1990, o formato mudou para três letras e quatro algarismos, que não podem ser todos iguais a zero. Desde 2018, as placas seguem o padrão do Mercosul, com quatro letras e três algarismos, também não todos nulos. Em quanto foi possível aumentar a frota de automóveis com a mudança das placas:

a) do sistema de 1969 para o sistema de 1990? 168 983 100 placas.

b) do sistema de 1990 para o sistema de 2018? 280 776 600 placas.

15 Considere estes meios de transporte utilizados para o deslocamento entre as cidades:

- A e B: ônibus, trem e avião;
- B e C: ônibus e trem;
- C e D: ônibus, trem, avião e navio.

Calcule o número de modos de fazer o percurso:

a) A – B – C – D; 24 modos.

b) A – B – A; 9 modos.

c) A – B – C – D – C; 96 modos.

d) B – C – D – C. 32 modos.

16 Em uma escola, há duas rampas que ligam o térreo ao primeiro andar, quatro escadas que conectam o primeiro ao segundo andar, e três escadas que vão do segundo ao terceiro andar. Calcule o número de trajetos possíveis para uma pessoa se deslocar:

a) do andar térreo para o segundo andar; 8 trajetos possíveis.

b) do segundo andar para o terceiro e, a seguir, para o térreo. 72 trajetos possíveis.

17 Com os algarismos 3, 4 e 5, calcule a quantidade de números que podemos formar com:

a) dois algarismos quaisquer; 9 números.

b) dois algarismos distintos. 6 números.

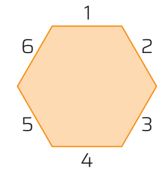
18 Quantos números distintos entre 2 000 e 3 000, podem ser formados utilizando apenas os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, sem repetir nenhum algarismo? 60 números.

19 Usando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 6, quantos números ímpares de três algarismos podemos formar? 50 números.

20 Usando os algarismos 0, 4, 5, 7 e 9, quantos números pares de três algarismos distintos podemos formar? 21 números.

21 Indique a alternativa correta no caderno.

(UFPR) Ana, Beatriz e Carlos escolhem lugares para se sentar em uma mesa hexagonal regular. Cada lugar corresponde a um dos lados do hexágono, que estão numerados de 1 a 6, conforme a figura [a seguir].



UFPR. Fac-símile: ID/BR

Os lados 1 e 4 são considerados lados opostos na mesa, assim como 2 e 5, e 3 e 6. De quantas formas diferentes Ana, Beatriz e Carlos podem escolher os lugares numerados de modo que nenhum deles fique sentado ao lado oposto do outro? Alternativa **a**.

a) 48. b) 36. c) 24. d) 12. e) 8.

22 A mesa de saladas de um restaurante tem alface, pepino, pimentão-verde, cebola, ovos fatiados, pedaços de *bacon* e pequenas torradas de pão. Há quatro temperos disponíveis. Quantos diferentes tipos de salada podem ser preparados com esses ingredientes? Considere que cada tipo de salada inclua pelo menos alface e apenas um tempero. 256 diferentes tipos de salada.

23 Elabore um problema sobre escolha de roupa ou de comida para ser resolvido pelo princípio multiplicativo e cuja resposta seja 24. Resposta pessoal.

24 Quantos são os anagramas da palavra PÁTIO que:

a) começam por vogal? 72 anagramas.

b) terminam com IO? 6 anagramas.

25 Indique no caderno as alternativas corretas.

(Ufal) Considere o conjunto A, formado pelos algarismos de 0 a 9, e analise as afirmações que seguem.

a) Com os elementos de A é possível escrever 32 542 números de 5 algarismos distintos entre si.

b) De todos os números de 4 algarismos distintos entre si que podem ser escritos com os elementos de A, 3 120 são pares.

c) De todos os números de 3 algarismos distintos entre si que podem ser escritos com os elementos de A, 176 são menores que 350.

d) Com os elementos ímpares de A, é possível escrever exatamente 60 números de 3 algarismos distintos entre si.

e) De todos os números de 3 algarismos distintos entre si que podem ser escritos com os elementos de A, 150 são divisíveis por 5. Alternativas **c** e **d**.

26 Elabore um problema para ser resolvido usando uma árvore de possibilidades que tenha a seguinte pergunta: "De quantos modos diferentes eles podem se sentar?". Em seguida, troque o problema que você elaborou com o de um colega, para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Resposta pessoal.

O trabalho com a atividade **26** favorece o desenvolvimento da competência geral **9**. Momentos como esse possibilitam que os estudantes exercitem a empatia e aprendam a respeitar diferentes opiniões.

Durante o estudo das formas de contagem usando permutações, arranjos e combinações, sugerimos que você retome as questões propostas na abertura deste capítulo, resolvendo-as com os estudantes e incentivando-os a comparar as resoluções que propuseram antes do estudo deste tópico e as que podem ser feitas agora, com os recursos da análise combinatória.

OUTRAS FORMAS DE CONTAGEM

As situações-problema que resolvemos até agora neste capítulo exigiram dispor os dados de maneira organizada, de modo a permitir a contagem dos elementos ou resultados possíveis. Como dissemos, o ramo da Matemática que desenvolve modelos que permitem a resolução de problemas desse tipo é chamado **análise combinatória**.

Embora o princípio fundamental da contagem seja a ideia básica para a resolução desses problemas, há alguns processos de contagem que apresentam características especiais e aparecem com frequência. Por isso, vamos analisar algumas dessas maneiras específicas de organizar contagens: as **permutações**, os **arranjos** e as **combinações**.

Permutação

Releia o exemplo **2**, em que se pergunta quantos números diferentes podemos formar usando três algarismos distintos.

Essa situação é o que chamamos de **permutação simples** e se caracteriza pela colocação, em uma fila ordenada, de *n* objetos distintos.

Permutação simples de *n* elementos distintos é todo agrupamento ordenado formado por esses *n* elementos.

A palavra “simples” significa que em cada agrupamento formado **não** haverá repetição de elementos.

Por exemplo, as permutações simples dos elementos ***a***, ***b*** e ***c*** são *abc*, *acb*, *bca*, *bac*, *cab* e *cba*, em um total de seis permutações.

Acompanhe outro exemplo.

Exemplo 1

Vamos calcular de quantas maneiras distintas quatro amigos sentados lado a lado em um banco poderiam ser fotografados. Em cada fotografia, haveria quatro possíveis pessoas para sentar-se na primeira posição do banco. Para cada uma dessas escolhas, haveria três possíveis pessoas para sentar-se na segunda posição, e assim por diante.

1ª posição no banco	2ª posição no banco	3ª posição no banco	4ª posição no banco
4 possibilidades	3 possibilidades	2 possibilidades	1 possibilidade

Seguindo esse raciocínio, teríamos no total 24 diferentes fotografias, pois: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Esse exemplo pode ser generalizado para *n* elementos distintos. Pelo princípio fundamental da contagem, podemos escolher de *n* modos o elemento que ocupará o primeiro lugar da permutação, de $(n - 1)$ modos o elemento que ocupará o segundo lugar, de $(n - 2)$ modos o elemento que ocupará o terceiro lugar, e assim por diante, até que a escolha do último lugar possa ser feita de apenas um modo. Daí o número de permutações de *n* elementos ser:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

O objeto digital oferece uma compreensão detalhada sobre o sistema braile, explorando sua história, características e importância para a inclusão de pessoas cegas ou com baixa visão, além de discutir inovações tecnológicas que visam ampliar o acesso a esse recurso.

O sistema braile

Você sabia que o sistema braile tem 63 caracteres?

O sistema braile, criado em 1820 pelo educador francês Louis Braille (1809--1852), consiste em um conjunto de sinais que representam letras, números e símbolos, de modo a permitir que, pelo tato, as pessoas com deficiência visual possam ler e escrever. Nesse sistema, cada um dos caracteres é formado por um conjunto de seis pontos dispostos em três linhas e duas colunas, sendo que pelo menos um dos pontos se destaca em relevo.

Com isso, para calcular o total de caracteres braile possíveis, pode ser feito o seguinte raciocínio matemático: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$. Como cada conjunto de pontos deve ter pelo menos um ponto em relevo, devemos excluir a possibilidade em que nenhum ponto está em relevo. Assim, temos 63 possibilidades.

@mickart_ID/BR

No detalhe, painel de elevador com números em algarismos indo-arábicos e seus correspondentes em braile.

Fatorial

Em problemas de análise combinatória, surgem, com frequência, expressões do tipo:

- $3 \cdot 2 \cdot 1$
- $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Por exemplo: quando calculamos a quantidade de números com seis algarismos distintos usando 4, 5, 6, 7, 8 e 9, obtemos 720 possibilidades de números nessas condições ($6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$).

Uma maneira de exprimir o produto de todos esses fatores é usar o **fatorial**, indicado por um ponto de exclamação ao lado do maior número.

Acompanhe alguns exemplos.

- $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ (lemos "três fatorial")
- $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ (lemos "quatro fatorial")
- $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ (lemos "cinco fatorial")

Podemos definir:

***n* fatorial** (notação: $n!$), $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, é o produto dos números naturais de n a 1, denotado por:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por motivos que veremos adiante, essa definição será estendida para o caso de $n = 0$. Nesse caso, definimos:

$$0! = 1$$

Note que:

- $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 3 \cdot 2!$
- $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 4 \cdot 3!$
- $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 5 \cdot 4!$

De forma geral: $n! = n \cdot (n-1)!$ para todo $n \geqslant 1$.

Com o símbolo de fatorial, podemos reescrever a fórmula que permite obter o número de permutações de n elementos:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1 = n!$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R4 Com relação aos anagramas da palavra ESCOLA, qual é a quantidade:

a) total deles?

b) dos que começam com consoante?

c) dos que mantêm as letras E, S, A juntas e nessa ordem?

d) dos que mantêm as vogais juntas?

Caso você não se lembre do significado de "anagrama", retome a atividade **6**.

Resolução

a) Cada anagrama é uma permutação simples das letras E, S, C, O, L e A, isto é, de seis elementos. Logo:

$$P_6 = 6! = 720$$

Portanto, existem 720 anagramas.

b) Nesse caso, os anagramas devem começar com as letras S, C ou L.

Em cada um desses três casos, basta permutar as cinco letras restantes. Logo:

$$3 \cdot P_5 = 3 \cdot 5! = 360$$

Portanto, há 360 anagramas de ESCOLA que começam com consoante.

c) O bloco $\boxed{\text{ESA}}$ funciona como se fosse um único elemento; basta, então, permutar os elementos $\boxed{\text{ESA}}$, C, O e L, isto é, quatro elementos. Logo:

$$P_4 = 4! = 24$$

Portanto, há 24 anagramas que mantêm as letras E, S, A juntas e nessa ordem.

d) Cada bloco formado pelas vogais (por exemplo, $\boxed{\text{EOA}}$) funciona como um elemento e, para cada bloco, temos P_4 anagramas (caso análogo ao item **c**).

Permutando também as vogais entre si, o número de anagramas solicitado será:

$$P_3 \cdot P_4 = 3! \cdot 4! = 144$$

Portanto, há 144 anagramas que mantêm as vogais juntas.

R5 **Se formarmos todos os números que se obtêm permutando os algarismos 1, 2, 3 e 4 e os colocarmos em ordem crescente, qual será a posição ocupada pelo número 4 213?**

Resolução

Na sequência citada, 4 213 é precedido pelos números da forma:

$\underline{\ \ 1\ \ }\ \underline{\qquad}\ \underline{\qquad}\ \underline{\qquad}$, que são em um total de 6 números, pois $P_3 = 6$;

$\underline{\ \ 2\ \ }\ \underline{\qquad}\ \underline{\qquad}\ \underline{\qquad}$, que são em um total de 6 números, pois $P_3 = 6$;

$\underline{\ \ 3\ \ }\ \underline{\qquad}\ \underline{\qquad}\ \underline{\qquad}$, que são em um total de 6 números, pois $P_3 = 6$;

$\underline{\ \ 4\ \ }\ \underline{\ \ 1\ \ }\ \underline{\qquad}\ \underline{\qquad}$, que são em um total de 2 números, pois $P_2 = 2$.

Assim:

$$P_3 + P_3 + P_3 + P_2 = 6 + 6 + 6 + 2 = 20$$

Logo, 4 213 é precedido por vinte números e, portanto, na sequência citada, 4 213 é o 21º elemento.

Arranjo

Quando estudamos permutação simples, vimos que ela se caracteriza pela colocação, em uma fila ordenada, de n elementos distintos. No entanto, podemos ter n elementos distintos que desejamos ordenar em filas com p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados, sendo $p \leqslant n$.

Acompanhe alguns exemplos.

Exemplo 2

Vamos determinar o número de termos de duas letras formados pelos elementos **a**, **b**, **c** e **d**.

Note que o primeiro elemento pode ser **a** ou **b** ou **c** ou **d**; logo, para a escolha desse elemento, temos quatro possibilidades. Para cada uma dessas escolhas, temos três possibilidades para a escolha do segundo elemento. Analise a árvore de possibilidades:

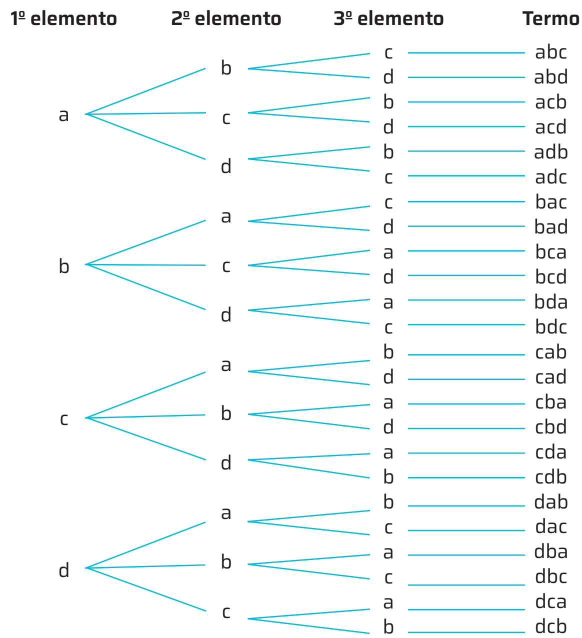
1º elemento	2º elemento	Termo
a	b	ab
	c	ac
	d	ad
b	a	ba
	c	bc
	d	bd
c	a	ca
	b	cb
	d	cd
d	a	da
	b	db
	c	dc

Portanto, o número de termos formados é igual a 12.

Exemplo 3

Agora, vamos determinar o número de termos de três letras formados pelos elementos **a**, **b**, **c** e **d**.

Para a escolha do primeiro elemento, temos quatro possibilidades; para cada uma delas, temos três possibilidades de escolher o segundo elemento; e, para cada escolha feita para o primeiro e o segundo elementos, temos duas possibilidades de escolher o terceiro elemento. Analise a árvore de possibilidades:



Portanto, o número de termos formados é igual a 24.

Nesses dois exemplos, temos o que chamamos de **arranjos simples**.

Arranjo simples de *n* elementos distintos, *p* a *p*, é todo agrupamento ordenado formado por *p* elementos distintos escolhidos entre os *n* elementos dados.

O número *p* é denominado **classe** ou **ordem do arranjo simples** e, pela definição de arranjo, facilmente percebemos que $p \leqslant n$.

O número de arranjos simples de *n* elementos distintos, *p* a *p*, é indicado por $A_{n,\,p}$ ou A_n^p.

Para o cálculo de $A_{n,\,p}$, organizamos um quadro como este:

Escolha do...	Número de possibilidades
1º elemento	n
2º elemento, depois de escolhido o 1º elemento	$n-1$
3º elemento, depois de escolhidos o 1º e o 2º elementos	$n-2$
⋮	⋮
p-ésimo elemento, depois de escolhidos os anteriores	$n-(p-1)$

Portanto:

$$A_{n,\,1} = n$$
$$A_{n,\,2} = n(n-1)$$
$$A_{n,\,3} = n(n-1)(n-2)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

$$A_{n,\,p} = n(n-1)(n-2)\ldots\left[n-(p-1)\right]$$

Note que $A_{n,\,p}$ é o produto de *p* fatores decrescentes em 1 unidade a partir de *n*.

Acompanhe alguns exemplos.

- $A_{4,\,1} = 4$
- $A_{4,\,2} = 4 \cdot (4 - 1) = 4 \cdot 3 = 12$
- $A_{4,\,3} = 4 \cdot (4 - 1)(4 - 2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
- $A_{4,\,4} = 4 \cdot (4 - 1)(4 - 2)(4 - 3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

A permutação é um caso particular de arranjo, quando $n = p$:

$$\boxed{P_n = A_{n,\,n}}$$

Agora, veremos como expressar $A_{n,\,p}$ usando fatoriais.

Como exemplo, vamos utilizar $A_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5$.

Multiplicando e dividindo simultaneamente $7 \cdot 6 \cdot 5$ por $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, temos:

$$A_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow A_{7,\,3} = \frac{7!}{4!} \Rightarrow A_{7,\,3} = \frac{7!}{(7-3)!}$$

Para $A_{n,\,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot \left[n - (p-1)\right]$, multiplicando e dividindo o segundo membro da igualdade por $(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot (n-p-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, temos:

$$A_{n,\,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot \left[n-(p-1)\right] \cdot (n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Assim:

$$\boxed{A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!},\ p \leqslant n}$$

Quando $p = 0$, temos:

$$A_{n,\,0} = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R6 Resolva a equação: $\dfrac{A_{n-1,\,3}}{A_{n,\,3}} = \dfrac{3}{4}$.

Resolução

Note, inicialmente, que:

- existe $A_{n-1,\,3} \Leftrightarrow (n-1) \in \mathbb{N}, n - 1 \geqslant 3 \Rightarrow n \geqslant 4$
- existe $A_{n,\,3} \Leftrightarrow n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3$

Então, a condição de existência é $n \geqslant 4$, com $n \in \mathbb{N}$.

Substituindo $A_{n-1,\,3}$ por $(n-1)(n-2)(n-3)$ e $A_{n,\,3}$ por $n(n-1)(n-2)$ na equação dada, obtemos:

$$\frac{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}(n-3)}{n\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{n-3}{n} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4n - 12 = 3n \Rightarrow n = 12$$

Logo, o conjunto solução é $S = \{12\}$.

R7 **No sistema de numeração decimal, quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar?**

Resolução

Para resolver esse problema, basta calcularmos o número de agrupamentos formados por quatro algarismos distintos, escolhidos entre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, e subtrairmos a quantidade de números da forma $\boxed{0}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$, constituídos por algarismos distintos. Desse modo, temos:

$$A_{10,\,4} - A_{9,\,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$$

Portanto, podemos formar 4 536 números inteiros de quatro algarismos distintos.

Outra maneira de resolver esse problema é utilizando o princípio fundamental da contagem.

Na primeira posição, não podemos colocar o zero; na segunda, eliminamos o algarismo que usamos na posição anterior; e assim por diante. Nesse caso, temos:

9	9	8	7

Dessa maneira, obtemos a quantidade de números inteiros de quatro algarismos distintos:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$$

R8 Calcule a quantidade de números inteiros positivos que sejam menores que 1000 e que tenham algarismos distintos.

Resolução

Dos números inteiros positivos menores que 1000, devemos contar os que têm um algarismo, dois algarismos distintos e três algarismos distintos.

- Quantidade de números inteiros positivos com um algarismo: nove (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
- Quantidade de números inteiros positivos com dois algarismos distintos: são todos os arranjos dos dez algarismos, dois a dois, menos aqueles que começam com zero, ou seja:

$$A_{10,\,2} - A_{9,\,1} = 10 \cdot 9 - 9 = 81$$

- Quantidade de números inteiros positivos com três algarismos distintos: são todos os arranjos dos dez algarismos, três a três, menos aqueles que começam com zero, ou seja:

$$A_{10,\,3} - A_{9,\,2} = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 648$$

Portanto, a quantidade de números inteiros positivos menores que 1000 e com algarismos distintos é:

$$9 + 81 + 648 = 738$$

R9 Qual é a quantidade de anagramas da palavra SEGURO que começam e terminam com vogal?

Resolução

Podemos fazer o seguinte esquema:

vogal ____ ____ ____ ____ vogal

Para preencher as extremidades, temos os elementos E, U e O. Para isso, existem $A_{3,\,2}$ possibilidades.

Para cada uma dessas possibilidades, podemos preencher as posições restantes com as quatro letras que sobraram. Portanto, a quantidade de anagramas da palavra SEGURO que começam e terminam com vogal é igual a:

$$A_{3,\,2} \cdot P_4 = 3 \cdot 2 \cdot 4! = 144$$

Durante a correção das atividades, crie oportunidades para que os estudantes identifiquem causas de possíveis erros cometidos na resolução dos problemas de permutação e arranjo. Uma lista com esses erros e suas soluções pode ser criada para consulta posterior.

As atividades **33** e **34** são muito importantes, pois é a análise da resolução dos problemas pelo princípio fundamental da contagem e pelo modo sistematizado como se fazem permutações e arranjos permite que os estudantes estabeleçam relações entre diferentes formas de pensar e, então, escolham a forma de resolução mais adequada para cada problema.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

As atividades **27** a **31** servem para você praticar um pouco de cálculos com fatorial, relacionando-os com outras operações já conhecidas.

27 Calcule o valor de:

a) $8!$ 40 320

b) $4! + 5!$ 144

c) $(3!)^2 - 5 \cdot 5!$ -564

28 Simplifique:

a) $\dfrac{10!}{9!}$ 10

b) $\dfrac{6 \cdot 7!}{6! \cdot 5}$ $\dfrac{42}{5}$

c) $\dfrac{30!}{27!\,3!}$ 4 060

29 Efetue:

a) $\dfrac{1}{5!} - \dfrac{1}{6!}$ $\dfrac{1}{144}$

b) $\dfrac{10! + 9!}{9! - 8!}$ $\dfrac{99}{8}$

30 Simplifique:

a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ $n(n+1)$

b) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ $(n+2)(n+1)$

31 Efetue:

a) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$ $\dfrac{n}{(n+1)!}$

b) $\dfrac{(n+1)! - n!}{n! - (n-1)!}$ $\dfrac{n^2}{(n-1)}$

32 Resolva o item **a** da atividade **30** de modo errado. Depois, troque sua resolução com um colega para que um descubra o erro do outro. Resposta pessoal.

33 Das atividades propostas de **1** a **22**, quais podem ser resolvidas utilizando arranjos? **5**, **17b**, **18** e **20**.

34 Usando as noções de permutação e arranjo, resolva novamente a atividade **24**. Consulte a resposta no Manual do Professor.

35 Calcule:

a) $A_{10,\,2} + A_{5,\,2}$ 110

b) $A_{4,\,3} \cdot A_{7,\,2}$ 1 008

36 Simplifique:

a) $\dfrac{A_{n,\,3}}{A_{n-1,\,2}}$ n

b) $\dfrac{A_{2n,\,2}}{A_{2n+1,\,2}}$ $\dfrac{2n-1}{2n+1}$

37 Resolva as equações a seguir.

a) $A_{n,\,2} = 56$ $n = 8$

b) $A_{n,\,3} = 8 \cdot A_{n,\,2}$ $n = 10$

38 No sistema decimal, quantos números inteiros positivos de cinco algarismos distintos podemos formar? 27 216 números.

39 Existem quantos números inteiros formados por algarismos distintos maiores que 100 e menores que 1000? 648 números.

40 Quantos números inteiros maiores que 10 e menores que 1000 têm algarismos repetidos? 261 números.

41 Em relação aos anagramas da palavra VISTA, qual é a quantidade: **41. d)** 24 anagramas.

a) total deles? 120 anagramas.

b) dos que começam com T? 24 anagramas.

c) dos que terminam com vogal? 48 anagramas.

d) dos que contêm as letras IA juntas e nessa ordem?

e) dos que mantêm as vogais juntas? 48 anagramas.

42 Retome o problema sobre as senhas de computador proposto na abertura deste capítulo e resolva-o. 1 851 266 560 senhas.

43 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFU-MG) Na criação de um *site* para vendas diretas na rede social, um empreendedor independente adotou um sistema de senhas, solicitando a seus clientes que cadastrassem uma senha com quatro algarismos distintos, do sistema decimal, para que pudessem ter acesso ao *site* e aos produtos oferecidos. Com o sucesso nas vendas, fez-se necessário alterar esse sistema, ampliando o quantitativo de senhas disponíveis para os acessos dos usuários. Dessa forma, foi solicitado que todos os clientes registrassem novas senhas, com cinco algarismos quaisquer.

A razão entre a quantidade máxima de senhas nesse novo sistema, dividido pela quantidade máxima de senhas no sistema anterior, é, aproximadamente, igual a Alternativa **b**.

a) 10 b) 20 c) 6 d) 5

44 **Calcule a quantidade de anagramas da palavra CONVERSA que:**

a) começam e terminam com consoante; 14 400

b) começam com vogal e terminam com consoante; 10 800

c) mantêm as vogais juntas; 4320

d) mantêm as consoantes juntas e em ordem alfabética. 24

45 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFRGS-RS) Uma biblioteca está elaborando etiquetas de identificação para os livros do acervo de tal forma que, em cada etiqueta, são usadas quatro letras distintas, de um alfabeto de 26 letras, e quatro algarismos também distintos, de 0 a 9.

A figura abaixo mostra um exemplo de modelo da etiqueta produzida. Alternativa **c**.

ID/BR

Assinale a alternativa que apresenta o número total de etiquetas distintas produzidas pela biblioteca.

a) $26 + 10$

b) $26 \cdot 10$

c) $A_{26,4} \cdot A_{10,4}$

d) $A_{26,4} + A_{10,4}$

e) $10\,A_{26,4} + 26\,A_{10,4}$

46 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFJF-MG) Para uma viagem, seis amigos alugaram três motocicletas distintas, com capacidade para duas pessoas cada. Sabe-se que apenas quatro desses amigos são habilitados para pilotar motocicletas e que não haverá troca de posições ao longo do percurso. De quantas maneiras distintas esses amigos podem se dispor nas motocicletas para realizar a viagem? Alternativa **d**.

a) 24

b) 72

c) 120

d) 144

e) 720

47 **Junte-se a um colega, escolham uma palavra que não tenha letras repetidas e elaborem uma atividade como a de número 44.** Resposta pessoal.

48 **Modifique a atividade 38 para que a resposta seja: "Há 3 024 números de cinco algarismos que se iniciam com o algarismo 1".** Resposta pessoal.

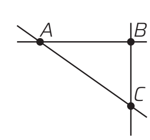
Organize uma lista com os problemas da atividade **48**, para que sejam analisados coletivamente em sala de aula.

Combinação

Vamos estudar um tipo de agrupamento distinto da permutação e do arranjo. Mas antes acompanhe e analise os exemplos a seguir.

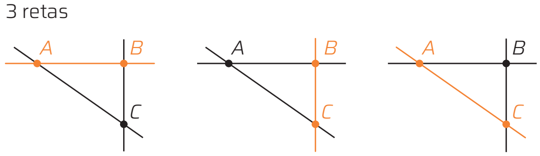
Exemplo 4

Utilizando a figura *ABC*, vamos destacar todas as retas e semirretas determinadas por dois dos três pontos *A*, *B* e *C* para verificar o total de retas e semirretas.



ID/BR

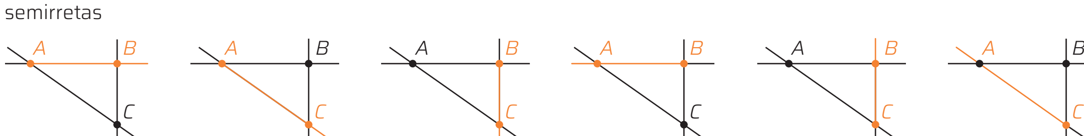
- 3 retas



$\overleftrightarrow{AB}$ $\overleftrightarrow{BC}$ $\overleftrightarrow{AC}$

Ilustrações: ID/BR

- 6 semirretas



$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{CA}$

Ilustrações: ID/BR

- Na descrição das retas, percebemos que a ordem não interfere na contagem: por exemplo, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BA}$ indicam a mesma reta. E dois agrupamentos diferem um do outro somente se tiverem elementos distintos: por exemplo, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ indicam retas distintas. Agrupamentos desse tipo são chamados de **combinações**.
- Já na descrição das semirretas, dois agrupamentos diferem um do outro se tiverem elementos distintos ($\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ indicam semirretas distintas) ou se, tendo os mesmos elementos, estes estiverem em ordem diferente (por exemplo: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ indicam semirretas distintas). Agrupamentos desse tipo são **arranjos** desses três pontos, tomados dois a dois.

Exemplo 5

Vamos considerar quatro moças: Maria (M), Cecília (C), Andreia (A) e Beatriz (B).

- Escolhendo três das quatro moças, vamos formar todos os agrupamentos possíveis.

M — C — A	M — A — B	M — C — B	C — A — B

Esses quatro agrupamentos são **combinações**, pois o grupo formado, por exemplo, por Maria — Cecília — Andreia é igual ao grupo formado por Cecília — Maria — Andreia.

- Escolhendo três das quatro moças e colocando seus nomes em fila (por exemplo, para fotografar as três moças lado a lado), vamos formar todos os grupos possíveis:

M — A — B	C — A — M	A — B — C	B — A — C
M — A — C	C — A — B	A — B — M	B — A — M
M — B — A	C — B — A	A — C — B	B — C — A
M — B — C	C — B — M	A — C — M	B — C — M
M — C — A	C — M — A	A — M — B	B — M — A
M — C — B	C — M — B	A — M — C	B — M — C

Esses 24 agrupamentos são **arranjos**, porque, por exemplo, a série Maria — Cecília — Andreia em uma fotografia é diferente da série Maria — Andreia — Cecília.

Exemplo 6

O grêmio de uma escola, composto de cinco estudantes, precisa organizar uma comissão formada por três de seus membros para conversar com um grupo de professores. De quantos modos diferentes essa comissão pode ser constituída?

Para responder a essa questão, vamos analisar como podemos formar as comissões. Identificando os estudantes por a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, podemos perceber que, para a escolha do primeiro membro da comissão, há cinco possibilidades (a_1 ou a_2 ou a_3 ou a_4 ou a_5); para a escolha do segundo membro, depois de definido o primeiro elemento, há quatro possibilidades; e, para a escolha do terceiro membro, definidos o primeiro e o segundo elementos, restam três possibilidades.

$$\underset{5}{\underset{\downarrow}{\_\_}}\quad \underset{4}{\underset{\downarrow}{\_\_}}\quad \underset{3}{\underset{\downarrow}{\_\_}} \longleftarrow \text{número de possibilidades}$$

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Isso significa que teríamos um total de 60 comissões possíveis. No entanto, existem comissões, como $\{a_1, a_2, a_3\}$ e $\{a_1, a_3, a_2\}$, que são idênticas, mas que foram contadas como se fossem diferentes.

Na verdade, na resposta "60 comissões possíveis", estamos contando cada comissão uma vez para cada ordem de escrita de seus elementos. Como em cada comissão os elementos podem ser escritos em diferentes ordens, um número de vezes correspondente a $P_3 = 3!$, cada uma delas foi contada 6 vezes.

Por isso, a resposta correta não é 60, mas $\frac{60}{6} = 10$, pois aqui a ordem dos elementos não importa.

Nos exemplos **4**, **5** e **6**, foram destacados casos de combinação em comparação com o conceito de arranjo. Mas, afinal, o que é combinação?

Combinação simples de n elementos distintos, tomados p a p ($p \leqslant n$), é todo agrupamento formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados, de modo que a mudança de ordem entre os p elementos não modifique o agrupamento escolhido.

O número de combinações simples de n elementos distintos, p a p, é indicado por $C_{n,\,p}$ ou $\binom{n}{p}$ ou C_n^A.

Cálculo do número de combinações simples

Considere o problema a seguir. Quantos arranjos simples de 3 estudantes podemos formar com um grupo de 5 estudantes (A, B, C, D e E)?

Acompanhe um método para resolver esse problema. Primeiro, fazemos combinações simples e, depois, permutações simples de cada combinação.

Observe, por exemplo, os arranjos simples da combinação (A, B, D):

$$(A, B, D), (A, D, B), (B, A, D), (B, D, A), (D, A, B), (D, B, A) \text{ ou } P_3 = 3!$$

Assim, podemos determinar o número de arranjos simples multiplicando o número de combinações simples dos 5 elementos, tomados 3 a 3, pelo número de permutações simples de 3 elementos:

$$A_{5,\,3} = C_{5,\,3} \cdot P_3 \text{ ou } A_{5,\,3} = 10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 60$$

Generalizando esse raciocínio, podemos dizer que o número de arranjos simples dos n elementos de um conjunto, tomados p a p ($p \leqslant n$), é igual ao produto do número de combinações simples desses n elementos, tomados p a p, pelo número das permutações simples dos p elementos.

Podemos escrever $A_{n,\,p} = C_{n,\,p} \cdot P_p$, com $p \leqslant n$. Assim, $C_{n,\,p} = \dfrac{A_{n,\,p}}{p!}$.

Substituindo $A_{n,\,p}$ por $\dfrac{n!}{(n-p)!}$, obtemos:

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Quando $p = 0$, temos:

$$C_{n,\,n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1 \text{ e } C_{n,\,0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

Por que 0! = 1?

Por que $0! = 1$? E por que $2^0 = 1$? Essas são perguntas legítimas que têm respostas parecidas.

Se relembrarmos, por um lado, a definição de $n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1$ e de 2^n como o produto de n fatores iguais a 2, ou seja, $2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2$, verificaremos que as duas definições, na forma em que estão, não fazem sentido para $n = 0$.

No entanto, se observarmos algumas propriedades e fórmulas verdadeiras para $n \geqslant 1$, como $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ e $\dfrac{2^n}{2^p} = 2^{n-p}$, perceberemos que, no caso de $n = p$, elas precisariam ser modificadas.

Contudo, sabemos que $\binom{n}{n} = 1$ e que $\dfrac{2^n}{2^n} = 1$. Então, para mantermos as propriedades válidas no caso de $n = p$, sem precisar fazer nenhuma ressalva, definimos $0! = 1$ e $2^0 = 1$. Isso, na verdade, é feito por convenção, para conveniência na escrita e na descrição das regras e fórmulas, a fim de que as propriedades das operações continuem válidas.

Tal raciocínio, porém, poderia nos levar ao seguinte questionamento: Por que, então, $\dfrac{0}{0}$ não é igual a 1? Nesse caso, a resposta é diferente. A operação de divisão entre números naturais não está definida quando o divisor é zero, não importa qual seja o valor do dividendo. Na verdade, não existem valores nem para $\dfrac{0}{0}$ nem para $\dfrac{a}{0}$, qualquer que seja o valor de a, porque o quociente de dois números a e b é definido como um número q que satisfaz a relação: $\dfrac{a}{b} = q \Leftrightarrow b \cdot q = a$.

No caso de $b = 0$ e $a \neq 0$, não existe q que torne verdadeira a igualdade $0 \cdot q = a$.

Já quando $a = b = 0$, todo valor de q seria aceitável, porque $0 \cdot q = 0$ vale para qualquer valor de q.

Não é necessário grande aprofundamento no conceito de fatorial (!) e na justificativa para 0! = 1, pois o foco está na compreensão dos processos de contagem, e não na manipulação numérica ou algébrica.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Organize a turma em duplas para que leiam e estudem as atividades resolvidas. Esse estudo servirá de base para que trabalhem a próxima seção, *Problemas e exercícios propostos*.

R10 **Calcule o número de diagonais de um polígono convexo de n lados.**

Resolução

Para resolver esse problema, basta contar o número de segmentos de reta determinados pelos n vértices do polígono e subtrair o número de lados.

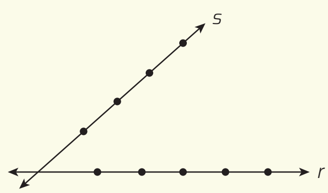
- Número total de segmentos: $C_{n,\,2}$
- Número de lados: n

Logo, o número de diagonais é dado por:

$$C_{n,\,2} - n = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} - n = \frac{(n-1)n}{2} - n =$$

$$= \frac{(n-1)n}{2} - \frac{2n}{2} = \frac{n(n-1-2)}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

R11 **Na figura a seguir, marcamos 4 pontos distintos na reta s e 5 pontos distintos na reta r.**



ID/BR

Calcule o número de:

a) triângulos com vértices nesses pontos;

b) quadriláteros convexos com vértices nesses pontos.

Resolução

a) Como a ordem de citação dos vértices não interfere na contagem, os agrupamentos são combinações. Temos, então:

- triângulos com 2 vértices em s e o outro em r: $C_{4,\,2} \cdot 5$
- triângulos com 2 vértices em r e o outro em s: $C_{5,\,2} \cdot 4$

Assim, o total de triângulos é dado por:

$$C_{4,\,2} \cdot 5 + C_{5,\,2} \cdot 4 = \frac{4!}{2!2!} \cdot 5 + \frac{5!}{2!3!} \cdot 4 =$$

$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 2!} \cdot 5 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} \cdot 4 =$$

$$= 6 \cdot 5 + 10 \cdot 4 = 70$$

Portanto, o número de triângulos com vértices nesses pontos é 70.

Também é possível resolver esse problema contando o total de agrupamentos dos 9 pontos, tomados 3 a 3, e subtraindo o número de agrupamentos, tomados 3 a 3, que não determinam triângulos.

- Total de agrupamentos dos 9 pontos, 3 a 3: $C_{9,\,3}$
- Pontos de s, tomados 3 a 3, que não determinam triângulos: $C_{4,\,3}$
- Pontos de r, tomados 3 a 3, que não determinam triângulos: $C_{5,\,3}$

Assim, o total de triângulos é dado por:

$$C_{9,\,3} - C_{4,\,3} - C_{5,\,3} = \frac{9!}{3!\,6!} - \frac{4!}{3!\,1!} - \frac{5!}{3!\,2!} =$$

$$= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6 \cdot 6!} - \frac{4 \cdot 3!}{3!} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} =$$

$$= 84 - 4 - 10 = 70$$

Portanto, o número de triângulos com vértices nesses pontos é 70.

b) Cada quadrilátero terá 2 vértices em s e 2 vértices em r.

- Número de pares não ordenados em s: $C_{4,\,2}$
- Número de pares não ordenados em r: $C_{5,\,2}$

Assim, o total de quadriláteros convexos é dado por:

$$C_{4,\,2} \cdot C_{5,\,2} = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 2!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} =$$

$$= 6 \cdot 10 = 60$$

Portanto, o número de quadriláteros convexos é 60.

R12 **A turma da 2ª série do Ensino Médio está planejando uma viagem para um acampamento escolar. Para garantir a segurança e o andamento das atividades, o regulamento do acampamento exige que o grupo de acompanhantes seja formado por exatamente 1 coordenador, 1 professor e 2 monitores.**

Para acompanhar a turma, estão disponíveis 3 coordenadores, 4 professores e 5 monitores, que se propuseram a participar da viagem.

Quantos diferentes grupos de acompanhantes podem ser formados, de acordo com o regulamento do acampamento?

Resolução

Vamos usar para a resolução desse problema a notação $\binom{n}{p}$.

Como há 5 monitores, o número de pares distintos de monitores que podem ser formados é:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Devemos escolher 1 entre os 3 coordenadores, 1 entre os 4 professores e 2 entre os 5 monitores.

Portanto, o número de grupos distintos que podem acompanhar a turma é:

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2} = 3 \cdot 4 \cdot 10 = 120$$

R13 (**UFRJ**) **Em todos os 53 finais de semana do ano 2000, Júlia vai convidar duas de suas amigas para sua casa em Teresópolis, sendo que nunca o mesmo par de amigas se repetirá durante o ano.**

a) Determine o maior número possível de amigas que Júlia poderá convidar.

b) Determine o menor número possível de amigas que ela poderá convidar.

Resolução

Usaremos para a resolução desse problema a notação C_n^p.

a) Júlia convidará o maior número possível de amigas quando chamar, a cada vez, amigas que não tenham sido convidadas anteriormente. Como são 53 fins de semana, ela poderá convidar no máximo 106 amigas ($2 \cdot 53 = 106$).

b) Se Júlia fizer uma lista com os nomes de n amigas, o número de pares distintos que poderá formar é:

$$C_n^2 = \frac{n!}{2(n-2)!}$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Se $C_n^2 < 53$, Júlia não poderá levar as amigas em todos os fins de semana sem repetir os pares.

Portanto, n deve ser tal que $C_n^2 \geqslant 53$, isto é:

$\frac{n(n-1)}{2} \geqslant 53 \Rightarrow n(n-1) \geqslant 106 \Rightarrow$

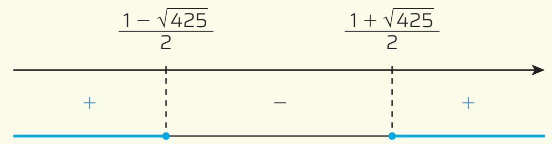
$\Rightarrow n^2 - n - 106 \geqslant 0$

Resolvendo a equação, obtemos:

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 106 = 425$

$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{425}}{2}$

Como se trata de uma inequação, fazemos:



Logo, $n \leqslant \frac{1-\sqrt{425}}{2}$ ou $n \geqslant \frac{1+\sqrt{425}}{2}$.

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n \geqslant \frac{1+\sqrt{425}}{2}$ ou $n \geqslant 11$.

Portanto, o menor número possível de amigas que Júlia poderá convidar é 11.

R14 **Com 6 rapazes e 6 moças, quantos grupos de 5 pessoas podemos formar, tendo em cada um deles:**

a) 2 rapazes e 3 moças?

b) pelo menos 3 moças?

Resolução

a) Número de possibilidades de escolher 2 dos 6 rapazes: $C_{6,\,2}$

Número de possibilidades de escolher 3 das 6 moças: $C_{6,\,3}$

O número de grupos é dado por:

$$C_{6,\,2} \cdot C_{6,\,3} = 300$$

Portanto, é possível formar 300 grupos.

b) Cada grupo poderá ser formado por:

- 3 moças e 2 rapazes; ou
- 4 moças e 1 rapaz; ou
- 5 moças.

Assim, o número de grupos é dado por:

$C_{6,\,3} \cdot C_{6,\,2} + C_{6,\,4} \cdot C_{6,\,1} + C_{6,\,5} =$

$= 20 \cdot 15 + 15 \cdot 6 + 6 = 396$

Portanto, é possível formar 396 grupos.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

As atividades **49** a **51** têm como objetivo auxiliar a memorização das fórmulas relativas ao cálculo de combinações.

49 Calcule: **49. a)** 21; **b)** 322; **c)** $\frac{60}{23}$

a) $C_{7,\,5}$

b) $2!C_{8,\,3} + 3!C_{7,\,4}$

c) $\frac{C_{10,\,3}}{C_{8,\,3} - C_{5,\,3}}$

50 Simplifique:

a) $\frac{C_{n,\,3}}{C_{n-1,\,2}}$ $\frac{n}{3}$

b) $\frac{C_{2n+2,\,2}}{C_{2n,\,2}}$ $\frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)}$

51 Ao resolver as duas atividades a seguir, Ana cometeu alguns erros. Descubra esses erros e corrija-os.

a) $C_{6,\,2} + C_{5,\,3}$ Consulte as respostas no Manual do Professor.

$$\frac{6!}{2!\,(6-2)!} + \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{6!}{2!\,4!} + \frac{5!}{3!\,2!} =$$

$$= \frac{6!}{8!} + \frac{5!}{6!} = \frac{\cancel{6!}}{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}} + \frac{\cancel{5!}}{6 \cdot \cancel{5!}} =$$

$$= \frac{1}{56} + \frac{1}{6} = \frac{6+56}{336} = \frac{62}{336}$$

ID/BR

Nas atividades **58**, **59** e **61**, exploramos a análise e a elaboração de argumentação, contribuindo para a aquisição da competência geral **7**.

b) $C_{7,\,3} + C_{8,\,4} - C_{6,\,3}$

$$\frac{7!}{3!\,(7-3)!} + \frac{8!}{4!\,(8-4)!} - \frac{6!}{3!\,(6-3)} =$$

$$= \frac{7!}{3!\,4!} + \frac{8!}{4!\,4!} - \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{7! \cdot {}^{2}\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3!}\,\cancel{4!}} +$$

$$+ \frac{{}^{2}\cancel{8} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\,\cancel{4!}} - \frac{{}^{2}\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\,\cancel{3!}} =$$

$$= 70 + 420 - 40 = 450$$

ID/BR

52 **Quantos grupos de 3 pessoas podem ser formados com um total de 10 pessoas?** 120 grupos.

53 **Considere 8 pontos distintos, dos quais 3 quaisquer nunca estão alinhados. Calcule o número de triângulos que podemos formar com vértices nesses pontos.** 56 triângulos.

54 **Em uma urna, há 10 fichas numeradas de 1 a 10. De quantos modos podemos retirar 3 fichas para que a soma delas seja maior que ou igual a 9?** 116 modos.

55 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFRR) Em uma certa cidade, foi realizada uma reunião de 5 vereadores e 4 deputados estaduais. Nessa reunião decidiu-se formar uma comissão de 5 (cinco) membros, escolhidos entre eles, para representá-los em uma visita ao governador do estado. Também se decidiu que a comissão deveria possuir pelo menos 3 (três) vereadores.

O número de comissões distintas que podem ser formadas é: Alternativa **b**.

a) 12 b) 81 c) 5 d) 60 e) 84

56 **Conforme o Código de Trânsito Brasileiro (CTB), um motorista pode possuir simultaneamente a categoria A (moto) e uma das categorias B, C, D ou E em sua Carteira Nacional de Habilitação (CNH), desde que atenda aos requisitos necessários para cada categoria.**

Em uma empresa que cumpre todas as exigências legais, há 30 motoristas distribuídos da seguinte forma: 8 motoristas com categoria A, 10 motoristas com categoria B, 5 motoristas com categoria C, 4 motoristas com categoria D e 3 motoristas com categoria E. Cada motorista tem apenas uma categoria em sua CNH. A empresa precisa formar grupos específicos de motoristas para um projeto especial.

a) Quantos grupos distintos podem ser formados com 2 pessoas, sendo um motorista com categoria A e um motorista com categoria B?

b) Quantos grupos distintos podem ser formados com 5 pessoas, sendo um motorista com cada categoria A, B, C, D e E?

c) De acordo com o Código de Trânsito Brasileiro, um motorista de 23 anos pode ter quais das 2 categorias indicadas em sua CNH?

Consulte as respostas no Manual do Professor.

57 **São dadas 2 retas paralelas distintas. Marcam-se 7 pontos distintos em uma delas e 4 pontos distintos na outra. Calcule o número de:**

a) triângulos que podemos desenhar com vértices nesses pontos; 126 triângulos.

b) quadriláteros convexos que podemos desenhar com vértices nesses pontos. 126 quadriláteros.

58 **Verifique como Tiago, Rodrigo e Sofia resolveram esta questão: Quantos grupos de 3 ou mais pessoas podem ser formados com um total de 5 pessoas?**

- Resolução de Tiago:

  $5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 300$

- Resolução de Rodrigo: $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{5} = 50$

- Resolução de Sofia: $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 16$

Explique como cada um pensou e diga quais são as soluções incorretas, justificando sua resposta.

Consulte a resposta no Manual do Professor.

59 **Leia o problema a seguir.**

> Em uma aula de dança de salão, há 5 homens e 5 mulheres. Considerando, nesse caso, que uma dupla de dança deve ser formada por uma mulher e por um homem, de quantos modos diferentes podem ser formadas duplas para uma dança?

Ao resolver esse problema, Pedro pensou: "A primeira pessoa da dupla pode ser escolhida entre as 10 porque pode ser homem ou mulher. Depois que a primeira for escolhida, a segunda só poderá ser escolhida entre as 5 pessoas do sexo oposto ao da primeira. Então há $(10 \cdot 5)$ modos de formar uma dupla para uma dança".

Você concorda com Pedro? Por quê? Resposta pessoal.

60 **Considere um grupo de 3 rapazes e 5 moças. De quantos modos podemos organizá-los em fila, com os rapazes nos extremos?** 4 320 modos.

61 **Considere o problema a seguir.**

> De quantos modos distintos podemos separar os números de 1 a 10 em dois conjuntos de 5 elementos, de modo que 1 e 8 não estejam no mesmo conjunto?

Renato resolveu esse problema assim:

"Os números 1 e 8 ocupam posições como elementos de cada um dos dois conjuntos; então, restam 4 posições a serem preenchidas em cada conjunto, a partir dos 8 números restantes. Assim, a forma de organizar os 8 números no primeiro dos conjuntos é $C_{8,\,4}$ e, para cada uma delas, é possível fazer o mesmo no outro conjunto. Portanto, o total de possibilidades é: $C_{8,\,4} \cdot C_{8,\,4} = 70 \cdot 70 = 4\,900$."

Angélica discordou do colega, dizendo:

"Você está enganado! No primeiro conjunto, de fato, existem $C_{8,\,4}$ possibilidades de organizar os 4 números, pois o quinto número já é 1 ou 8; mas, depois que os 4 números estiverem escolhidos no primeiro conjunto, o segundo conjunto estará determinado: é só colocar nele os 4 números que restaram. Não é preciso multiplicar nada. A resposta do problema é 70 possibilidades $\left(C_{8,\,4} = 70\right)$."

Quem está com a razão? Justifique sua resposta.

Consulte a resposta no Manual do Professor.

62 **(Unifesp) Numa classe há x meninas e y meninos, com $x, y \geqslant 4$. Se duas meninas se retirarem da classe, o número de meninos na classe ficará igual ao dobro do número de meninas.**

a) Dê a expressão do número de meninos na classe em função do número de meninas e, sabendo que não há mais que 14 meninas na classe, determine quantos meninos, no máximo, pode haver na classe. $y = 2x - 4$, para $4 \leqslant x \leqslant 14$; 24 meninos.

b) A direção do colégio deseja formar duas comissões entre os alunos da classe, uma com exatamente 3 meninas e outra com exatamente 2 meninos. Sabendo-se que, nessa classe, o número de comissões que podem ser formadas com 3 meninas é igual ao número de comissões que podem ser formadas com dois meninos, determine o número de alunos da classe. 26 alunos.

63 **Indique a alternativa correta no caderno.**

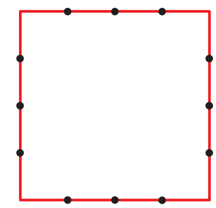
(Uneb-BA) Dentre os jogadores de um clube de esportes, o presidente selecionou 12 jogadores de basquete e 8 jogadores de vôlei com o objetivo de formar uma comissão para representar o clube em um evento internacional. Por razões financeiras, pretende-se constituir a menor comissão possível, mantendo a proporcionalidade entre o número de jogadores de basquete e de vôlei. Nessas condições, quantas comissões diferentes podem ser formadas? Alternativa **d**.

a) 96
b) 248
c) 1656
d) 6160
e) 73 920

64 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Unemat-MT) Sobre cada aresta do quadrado da figura abaixo há três pontos distintos.

Assinale a alternativa correta que corresponde ao número máximo de triângulos (não coincidentes) que pode ser construído, tendo cada vértice sobre uma aresta diferente do quadrado. Alternativa **c**.



Unemat-MT. Fac-símile: ID/BR

a) 12.
b) 27.
c) 108.
d) 324.
e) 81.

65 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Udesc) Um tanque de um pesque-pague contém apenas 15 peixes, sendo 40% destes carpas. Um usuário do pesque-pague lança uma rede no tanque e pesca 10 peixes. O número de formas distintas possíveis para que o usuário pesque exatamente 4 carpas é: Alternativa **e**.

a) 151 200
b) 720
c) 210
d) 185
e) 1 260

66 **Elabore um problema de combinação no qual constem estes dados: os números 10 e 6 e times de vôlei.** Resposta pessoal.

Proponha aos estudantes que troquem entre eles as produções que elaboraram na atividade **66**, para que cada um resolva o problema proposto pelo colega. Aconselhe a leitura cuidadosa dos textos elaborados para verificar se estão bem formulados e se correspondem de fato ao que foi pensado. Essa troca entre os estudantes favorece o desenvolvimento da competência geral **4**.

TECNOLOGIA

Na seção *Tecnologia*, os estudantes conhecem o recurso das calculadoras científicas para o cálculo de fatoriais e, de modo complementar, na seção *Cálculo rápido*, são apresentados recursos aritméticos que facilitam o cálculo de fatoriais e sua utilização nas fórmulas.

Algumas calculadoras têm a tecla x!. Essa tecla auxilia no cálculo de fatoriais e na resolução de problemas de análise combinatória.

Para acioná-la, geralmente utilizamos a tecla 2nd ou SHIFT (segunda função).

Suponha, por exemplo, que você queira calcular 7!. Vamos utilizar uma calculadora científica para realizar esse cálculo.

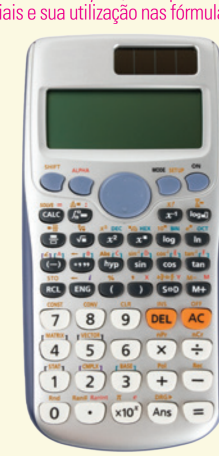
Pressione as teclas na seguinte ordem:

7 SHIFT x! =

Deve ter aparecido o número 5040 no visor da calculadora.

Agora, utilize uma calculadora que tenha a tecla x! para realizar as atividades propostas a seguir.

Antes de começar, certifique-se de apagar todos os registros anteriores. No visor, deve aparecer apenas 0.



Amankris/Shutterstock.com/ID/BR

Calculadora científica.

Pode haver variações entre modelos diferentes de calculadoras científicas (nas teclas específicas e na disposição das teclas, por exemplo). Por isso, é recomendável ler o manual do usuário para entender todas as funcionalidades disponíveis e fazer as adaptações necessárias para resolver o mesmo problema. Na calculadora científica de alguns celulares, por exemplo, é preciso apertar o número e depois a tecla "x!" para obter o resultado do fatorial.

ATIVIDADES

1 **Obtenha os fatoriais a seguir utilizando uma calculadora científica.**

a) 5! 120
b) 6! 720
c) 10! 3 628 800
d) 12! 479 001 600
e) 15! 1 307 674 368 000

2 **Acompanhe dois modos diferentes de obter $A_{10,\,6}$ e, depois, calcule o que se pede em cada item.**

1º) Usando as teclas (e):

1 0 2nd n! ÷ (1 0 − 6) 2nd n! = 151.200

2º) Sem usar as teclas (e):

1 0 2nd n! ÷ 4 2nd n! = 151.200

A opção por um ou outro modo depende de a máquina aceitar ou não os procedimentos de cálculo.

a) $A_{8,\,3} \cdot P_4$ 8 064

b) $A_{10,\,2} - A_{9,\,1}$ 81

c) $5 \cdot C_{10,\,4}$ 1 050

3 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Fuvest-SP) Em um programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possibilidades de sequências dessas músicas serão necessários aproximadamente: Alternativa **e**.

a) 100 dias.
b) 10 anos.
c) 1 século.
d) 10 séculos.
e) 100 séculos.

4 **Para participar do jogo da Mega-Sena, o apostador deve escolher seis números de 1 a 60. Ele ganha o concurso se os seis números apostados forem sorteados. Se um apostador fizesse dois jogos todas as semanas, um para cada sorteio, com a combinação 2, 13, 20, 28, 34, 49 e, por infelicidade, essa fosse a última combinação a ser sorteada, quantos anos o apostador teria de esperar, supondo que nenhuma combinação se repita, para ganhar a Mega-Sena? (Considere 1 ano = 52 semanas.)** 481 mil anos.

Determine um tempo para que os estudantes realizem as atividades da seção *Cálculo rápido*. Você pode propor que façam uma atividade por semana, sempre incentivando-os a calcular mentalmente. Afinal, o objetivo é que aprendam estratégias de cálculo uns com os outros, e não apenas que confiram se as respostas estão corretas. Espera-se que, com o tempo, eles se apropriem de novas formas de calcular e se tornem mais confiantes em suas estratégias de cálculo.

CÁLCULO RÁPIDO

Lembre-se de que esta seção tem como objetivo auxiliar você a continuar desenvolvendo a habilidade de calcular mentalmente. Nos problemas de combinatória, você não deve despender sua energia e atenção com cálculos que podem ser realizados rapidamente. Que tal memorizar alguns deles?

1 **Calcule mentalmente:**

a) $6!$ 720
b) $2!\,5!$ 240
c) $8!$ 40 320
d) $2!\,6!$ 1 440
e) $2!\,7!$ 10 080
f) $\frac{5!}{2!}$ 60
g) $\frac{6!}{2!}$ 360
h) $\frac{7!}{3!}$ 840
i) $\frac{13!}{12!}$ 13

2 **Simplificar ao máximo a expressão antes de calcular seu resultado é uma técnica que auxilia a realizar cálculos. Por exemplo:**

$$\frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot\cancel{5!}}{3!\,\cancel{5!}} = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}}{\cancel{3\cdot2}} = 8\cdot7 = 56$$

Utilize a técnica apresentada e resolva os itens a seguir.

a) $\frac{5!}{3!}$ 20
b) $\frac{6!}{4!}$ 30
c) $\frac{7!}{5!\,2!}$ 21
d) $\frac{9!}{7!}$ 72
e) $\frac{6!}{4!\,2!}$ 15
f) $\frac{8!}{4!\,4!}$ 70
g) $\frac{9!}{6!\,3!}$ 84
h) $\frac{3!\,7!}{9!}$ $\frac{1}{12}$
i) $\frac{5!\,4!\,3!}{7!}$ $\frac{24}{7}$

PARA RECORDAR

As atividades desta seção podem ser propostas aos estudantes no início do capítulo, com o intuito de que eles as resolvam aos poucos e, assim, possam sanar possíveis dúvidas durante esse período.

Lembre-se de que recordar é uma forma de estudar. No entanto, a cada retomada você desenvolve outras habilidades, como a capacidade de ler textos matemáticos, relacionar diferentes conhecimentos, tomar decisões na construção de uma estratégia de resolução, avaliar se o caminho escolhido foi adequado e se a resposta obtida é razoável. Considere esses problemas como mais um momento de aprendizado.

1 **Escreva, na forma decimal, cada uma das frações a seguir.**

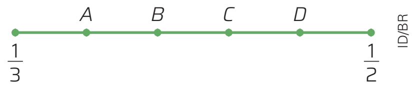
a) $\frac{7}{10}$ 0,7
b) $\frac{5}{3}$ 1,6666...
c) $\frac{41}{25}$ 1,64
d) $\frac{7}{6}$ 1,1666...

2 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Uece) A soma de todas as frações da forma $\frac{n}{n+1}$, onde n é um elemento do conjunto {1, 2, 3, 4, 5}, é: Alternativa **b**.

a) 6,55
b) 3,55
c) 5,55
d) 4,55

3 **Um segmento de reta foi dividido em cinco partes iguais. As extremidades representam as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, como mostra a figura a seguir. Qual dos pontos (*A*, *B*, *C* ou *D*) representa a fração $\frac{2}{5}$?** O ponto *B*.



4 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(PUC-MG) O código de trânsito de certo país adota o sistema de pontuação em carteira para os motoristas: são atribuídos 4 pontos quando se trata de infração leve, 5 pontos por infração grave e 7 pontos por infração gravíssima. Considere um motorista que, durante um ano, cometeu o mesmo número de infrações leves e graves, foi autuado *p* vezes por infrações gravíssimas e acumulou 57 pontos em sua carteira.

Nessas condições, pode-se afirmar que o valor de *p* é igual a: Alternativa **c**.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

5 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Unifor-CE) Em um determinado concurso, um candidato respondeu corretamente 18 das 20 primeiras questões e também acertou $\frac{3}{5}$ das questões restantes da prova. Ao todo, o candidato respondeu corretamente $\frac{2}{3}$ das questões da prova do concurso. Diante dessas informações, podemos concluir que a quantidade de questões respondidas corretamente pelo candidato foi de Alternativa **d**.

a) 45.
b) 50.
c) 55.
d) 60.
e) 65.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

O primeiro problema desta pequena lista é conhecido como problema "verdade-mentira" e sua resolução exige que você se organize e suponha que uma das personagens esteja mentindo até encontrar a verdadeira mentirosa. Já o segundo problema parece mais simples, mas é um desafio real ao seu raciocínio lógico. Vamos aos problemas!

1 **Registre a resposta correta no caderno.**

(Obmep) Vovó Vera quis saber qual de suas cinco netinhas tinha feito um desenho na parede de sua sala. As netinhas fizeram as seguintes declarações:

- Emília: *Não fui eu.*
- Luísa: *Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.*
- Marília: *Não foi a Rafaela nem a Vitória.*
- Rafaela: *Não foi a Luísa.*
- Vitória: *Luísa não está dizendo a verdade.*

Se apenas uma das netinhas mentiu, quem fez o desenho? Alternativa **c**.

a) Emília
b) Luísa
c) Marília
d) Rafaela
e) Vitória

2 **A cidade de Juratambi tem 4 000 habitantes. O número de habitantes que não têm celular é o mesmo dos que têm dois celulares cada um, e todos os outros têm um celular cada um. Quantos celulares os habitantes de Juratambi têm no total?** 4 000 celulares.

Lembre-se de que a produção dos estudantes nesta seção pode ser um instrumento de avaliação, assim como uma maneira de analisar o que é preciso retomar com cada um ou com grupos de estudantes.

PALAVRAS-CHAVE

Nesta seção, a ideia é retomar o que você aprendeu no capítulo. Para isso, você vai comparar as definições de algumas palavras conforme seu uso na linguagem corrente com seu significado específico em Matemática. Depois, vai produzir uma lista de características comuns entre esses sentidos. Esse é um modo de estudar e de memorizar o significado de termos matemáticos que correspondem a conceitos bem precisos.

Com base no que você estudou neste capítulo, encontre as características comuns entre os usos comuns dos termos indicados e os correspondentes em análise combinatória. Retome os conteúdos estudados no livro e suas anotações. Se necessário, consulte outros dicionários. Registre suas conclusões no caderno.

arranjar
[...]
pôr em ordem, dispor de maneira conveniente; arrumar
[...]
[...] adornar
[...]
[...] consertar, reparar
[...]

combinar
[...]
2 estabelecer (uma ação, uma resolução etc. com que outrem concorda)
[...]
3 pôr ordem em, organizar
[...]

permutar
1 mudar ou trocar reciprocamente
[...]
2 trocar em transação comercial
[...]

Instituto Antônio Houaiss. *Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. 1 CD-ROM.

MATEMÁTICA E LEITURA DE MUNDO

Se julgar oportuno, convide um professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para participar das discussões.
Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2** e **5** da Educação Básica propostas pela BNCC e possibilita uma integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e com o tema contemporâneo transversal Ciência e Tecnologia, na medida em que os estudantes valorizam e usam conhecimentos históricos e culturais para explicar a realidade e compreender tecnologias digitais, e exercitam o pensamento científico, crítico e criativo para investigar e resolver problemas.

Resolução de problemas: da Idade Média à contemporaneidade

A análise combinatória é uma das áreas da Matemática que serviram de base para o desenvolvimento da computação. O texto a seguir trata de um dos responsáveis pela criação e pela difusão da análise combinatória. Leia-o e, em seguida, converse com os colegas e o professor a respeito do assunto que é abordado.

O monge "mais letrado do mundo" que criou a base da computação há mais de 1,2 mil anos

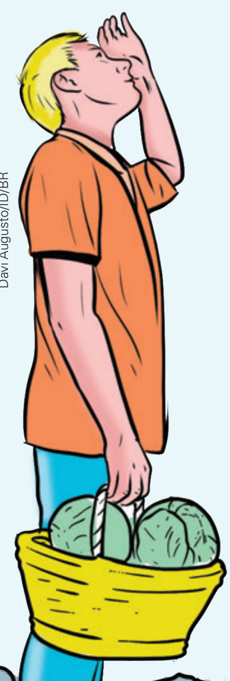
Museu de História da Arte, Viena, Áustria. Fotografia: Hubert/Acervo do fotógrafo

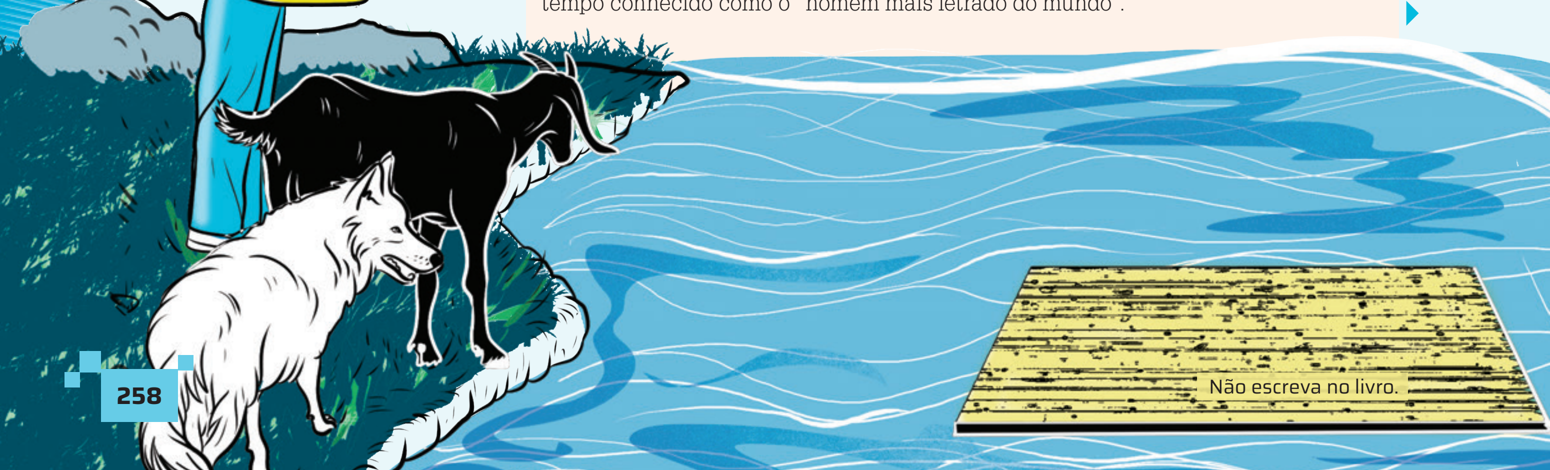
Alcuíno de York (?-804), criador dos desafios que deram origem à análise combinatória, era considerado o homem mais sábio do mundo à época. Estátua do monge no Museu de História da Arte em Viena, Áustria. Foto de 2015.

A Idade Média, que começou com a queda do Império Romano do Ocidente após a invasão de bárbaros germânicos em 476, é frequentemente descrita como uma época de obscurantismo e declínio intelectual – os livros eram raros e a maioria das pessoas não sabia ler.

No entanto, esse período histórico foi muito mais vibrante intelectualmente do que se pode imaginar. Nele surgiu uma série de problemas de lógica para "afiar a mente dos jovens", incluindo o clássico **desafio da balsa** [grifo nosso] ensinado até hoje – sobre o homem que precisa cruzar um rio com um lobo, uma cabra e uma cesta de repolhos. Ele não pode deixar o lobo comer a cabra, nem a cabra comer o repolho, mas na balsa só cabem ele e mais um elemento.

O autor desse e de diversos outros enigmas foi o monge Alcuíno de York – em seu tempo conhecido como o "homem mais letrado do mundo".





Davi Augusto/ID/BR

Não escreva no livro.

Ele escreveu um livro só com esse tipo de problemas. Seus desafios consolidaram na Europa as bases para um ramo da matemática chamado análise combinatória – tipo de cálculo que hoje está por trás da programação de computadores e da criptografia moderna.

[...]

As bases

Embora a ciência não fosse como a de hoje, o conhecimento desenvolvido e preservado na época – como a aritmética e a geometria – criou a plataforma intelectual que tornou possível o desenvolvimento da ciência no futuro.

Muitos historiadores consideram a vida de Alcuíno de York como um ponto de inflexão importante da história intelectual ocidental. Diferentemente dos livros complexos escritos pelos gregos, o trabalho de Alcuíno trazia elementos da vida das pessoas – a cabra, o rio – e incentivava os estudantes a pensarem por si mesmos.

[...]

Os enigmas podem ser resolvidos com tentativa e erro, mas, como explica à BBC a matemática Hannah Fry, "há uma maneira de ordenar claramente as possíveis soluções: a análise combinatória".

"Esse tipo de desafio é a gênese da ideia de análise combinatória: analisar todas as possibilidades e contá-las de forma ordenada, lógica e sistemática", diz a professora da University College London (UCL), em Londres.

"Se você está escolhendo um caminho, tem que analisar todas as rotas possíveis e escolher a mais rápida. Se você envia uma mensagem secreta, o que os criptografistas fazem é ordenar as diferentes possibilidades e encontrar a resposta. Na computação, muito dos experimentos e cálculos feitos pelos cientistas usam a análise combinatória", explica ela.

Segundo a cientista, o programa educativo de Alcuíno tem uma mensagem importante: além de útil, encontrar soluções para problemas de lógica pode ser divertido. Isto, em uma época em que a curiosidade era vista com receio, foi uma ideia revolucionária.

O MONGE "mais letrado do mundo" que criou a base da computação há mais de 1,2 mil anos. *BBC News Brasil*, 30 dez. 2017. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-42485915. Acesso em: 3 out. 2024.

Outro desafio semelhante ao deixado por Alcuíno é este:

Fuga dos piratas

Após uma grande batalha, apenas quatro piratas sobreviveram e conseguiram salvar o tesouro: dois marujos e dois oficiais. Eles precisam levar esse tesouro para terra firme, mas o desembarque é difícil, pois eles só têm um pequeno bote, que comporta 170 kg. Apenas um entre os dois marujos e um entre os dois oficiais estão em condições de remar, e cada um deles pesa cerca de 60 kg. O outro marujo pesa 100 kg, e o outro oficial, 70 kg.

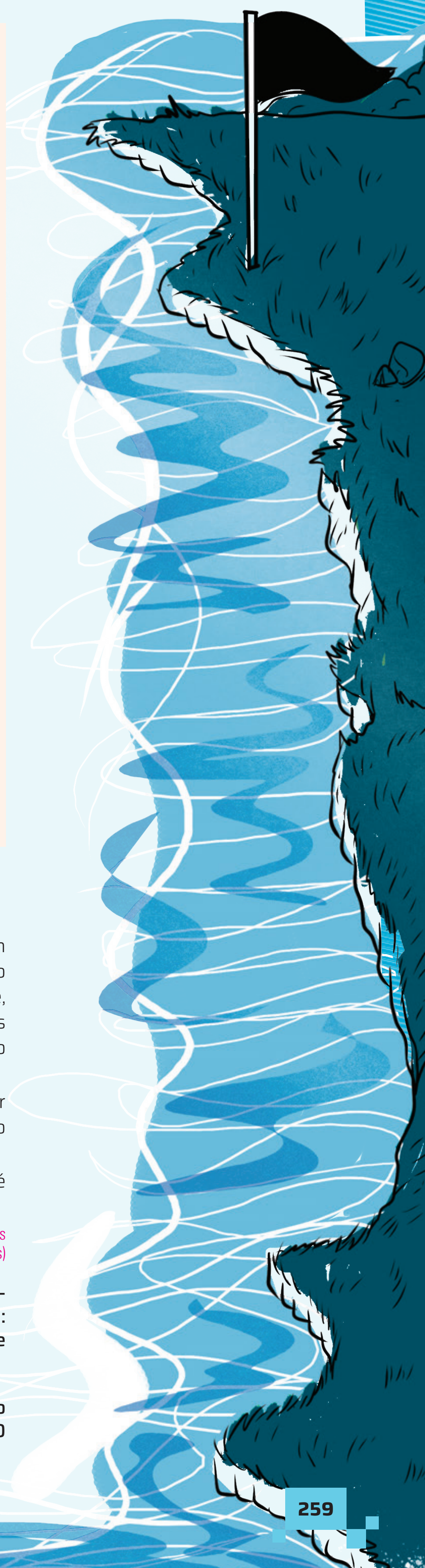
A desconfiança entre eles é grande: marujos e oficiais temem que, em qualquer oportunidade em que o número de marujos ou de oficiais for maior que o do outro grupo, o grupo maior fuja com o tesouro, que pesa 40 kg.

Eles conseguiram um plano para desembarcar que satisfez a todos. Qual é esse plano?

Conectando ideias Converse com os estudantes sobre como a Matemática de hoje teve origem em problemas inusitados e enigmas que permitiram que diferentes matemáticos (em diferentes épocas) organizassem as ideias em teorias como a análise combinatória.

1 **Reúna-se com um colega para resolver os dois desafios de travessia apresentados (desafio da balsa e fuga dos piratas). Em seguida, respondam: Qual deles vocês acharam mais fácil? Por quê? Qual é o menor número de travessias que resolve cada desafio?** Consulte as respostas no Manual do Professor.

2 **Em grupo, façam uma pesquisa e elaborem um trabalho sobre a utilização da análise combinatória na computação e na tecnologia da informação. O objetivo é responder por que a contagem é importante nessas duas áreas.** Respostas pessoais.



CAPÍTULO 11 CAPÍTULO 11 CAPÍTULO 11 CAPÍTULO 11

PROBABILIDADE

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos básicos de probabilidade, inicialmente sem fórmulas, para que os estudantes possam se apropriar das ideias básicas e, em seguida, utilizá-las na resolução de problemas. Depois, trabalharemos o cálculo de probabilidade que envolve experimentos com maior número de elementos, em que será necessário utilizar o que foi visto no capítulo **10**.

NESTE CAPÍTULO

- Probabilidade
- Contagem

Acompanhe a situação a seguir.

A Mega-Sena é um jogo de azar muito popular. Para apostar nesse jogo, é preciso escolher no mínimo seis e no máximo vinte números de 01 a 60. A escolha de apenas seis números é denominada aposta simples.

Nesse jogo, sorteiam-se seis números distintos e são premiadas as apostas que contêm quatro, cinco ou todos os seis números sorteados, chamadas, respectivamente, de quadra, quina e sena. Como não é possível saber antecipadamente quais números serão sorteados, só se pode torcer para que saiam aqueles que escolhemos e nos questionar: Qual é a chance de acertarmos a sena?

Para podermos responder a questões como essa, vamos estudar neste capítulo um pouco da **teoria das probabilidades**.

Celso Pupo/Shutterstock.com/ID/BR

Pessoa preenchendo volante da Mega-Sena.

De acordo com essa teoria, um acontecimento isolado constitui um acaso, mas a análise de grande número de ocorrências desse acontecimento permite prever as chances de ele ocorrer de novo.

Atualmente, as aplicações do cálculo de probabilidades ultrapassam largamente as relacionadas com jogos de azar (dados, cartas, loterias, rifas, etc.), por meio das quais a teoria das probabilidades começou a ganhar força e às quais ela é associada habitualmente. É comum o uso das probabilidades em áreas como política, medicina, biologia, entre outras.

Neste capítulo, vamos estudar a área da Matemática chamada de Probabilidade, que, assim como a Estatística, permite interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente.

O trabalho com este tópico permite desenvolver a habilidade **EM13MAT311**, pois os estudantes vão resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios.

A LINGUAGEM DAS PROBABILIDADES

A teoria das probabilidades é o ramo da Matemática que pesquisa e desenvolve modelos visando estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. Todos esses modelos apresentam variações segundo sua complexidade, mas têm aspectos básicos comuns. Vamos estudar inicialmente a linguagem das probabilidades, que é bastante peculiar.

Leia este trecho coletivamente e peça aos estudantes que deem outros exemplos de experimento aleatório, espaço amostral, evento, etc.

Experimento aleatório, espaço amostral, evento

O jogo da Mega-Sena, em que o jogador não sabe se vai acertar, ou não, a sena, é um experimento aleatório.

Experimento aleatório é todo experimento que, mesmo repetido várias vezes e em condições semelhantes, apresenta resultados imprevisíveis entre os resultados possíveis.

São exemplos de experimentos aleatórios:

- Lançamento de um dado.
- Lançamento de uma moeda.
- Loteria de números.
- Retirada de uma carta do meio de um baralho fora de ordem.
- Abertura de um livro ao acaso para ver o número da página.
- Escolha de um estudante ao acaso para lhe perguntar quantos irmãos ele tem.

Não escreva no livro.

No lançamento de um dado comum, por exemplo, podemos obter um número de 1 a 6, enquanto no lançamento de uma moeda os resultados possíveis são cara ou coroa.

> **Espaço amostral (*S*)** de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

Acompanhe alguns exemplos.

Exemplo 1

No lançamento de um dado de seis faces, o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Chalermphon Srisang/Shutterstock.com/ID/BR

Dado comum de seis faces.

Cunaplus_M.Faba/iStock/Getty Images

Lançamento de uma moeda.

Exemplo 2

No lançamento de uma moeda, o espaço amostral é $S = \{\text{cara, coroa}\}$.

Exemplo 3

Para o sorteio do primeiro número da Mega-Sena, o espaço amostral é $S = \{01, 02, 03, ..., 60\}$. E, para o sorteio dos seis números, o espaço amostral será formado por todos os conjuntos de seis números distintos de 01 a 60.
Nesse caso, com base no que foi estudado no capítulo anterior, sabemos que o espaço amostral, no sorteio da Mega-Sena, tem 50 063 860 resultados possíveis, pois:

$$C_{60,\,6} = \binom{60}{6} = 50\,063\,860$$

No exemplo 1, no lançamento de um dado comum, "o resultado obtido ser menor que 4", por exemplo, é um evento (também chamado de acontecimento) para o espaço amostral $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, representado pelo subconjunto $\{1, 2, 3\}$.

No exemplo 3, no sorteio do primeiro número da Mega-Sena, "o número sorteado ser par" é chamado de evento para o espaço amostral $\{01, 02, ..., 60\}$ e pode ser representado pelo subconjunto $\{02, 04, 06, ..., 60\}$ desse espaço amostral.

De modo geral:

> **Evento** é todo subconjunto de um espaço amostral *S* de um experimento aleatório.

Agora, suponha que alguém, ao assistir ao sorteio da Mega-Sena, diga: "O primeiro número sorteado será menor que 55". Essa pessoa tem maior chance de acertar do que de errar, porque quase todos os números a serem sorteados são menores que 55. Pode ocorrer que o palpite esteja errado, mas o mais esperado é que esteja certo. Sair como resultado do sorteio um número menor que 55 é um **evento muito provável**; não ocorre sempre, mas ocorre com muita frequência.

Observe outros exemplos de eventos muito prováveis no sorteio do primeiro número da Mega-Sena:

- sair um número maior que 7;
- sair um número entre 6 e 56.

Se um jovem disser: "Vai sair o número que é a minha idade", ele estará falando de um **evento pouco provável**. Outros exemplos de eventos pouco prováveis são:

- sair um número maior que 57;
- sair o número 50.

Se um espectador do sorteio disser: “Vai sair um número menor que 100”, não há dúvida de que ele vai acertar, pois esse acontecimento estará correto para qualquer número da Mega-Sena que for sorteado, ou seja, é um **evento certo**. Outros eventos desse tipo são:

- sair um número inteiro;
- sair um número positivo;
- sair um número entre 0 e 61.

Agora, se alguém disser: “Vai sair um número maior que 60”, nesse contexto, estará falando de um acontecimento **impossível**.

De modo geral:

1. a) $S = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$
b) $A = \{(C, C), (K, K)\}$
c) $B = \{(C, K), (K, C)\}$

Se julgar necessário, comente com os estudantes que, em Matemática, utilizamos o símbolo $\varnothing$ para indicar conjunto vazio.

Todo subconjunto unitário de S é denominado **evento simples** ou **elementar**.

Chamamos S de **evento certo** e $\varnothing$ de **evento impossível**.

PARA EXPLORAR

Livro

VALLADARES, Renato J. Costa. *O jeito matemático de pensar*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2012.

Escolha um dos capítulos da quarta parte do livro e leia-o. Em seguida, converse com os colegas sobre o que leu.

Para compreender melhor as classificações de eventos, acompanhe o exemplo.

Exemplo 4

No lançamento de um dado de seis faces, observando o número obtido da face superior, podemos descrever alguns eventos:

- A: obtenção de número par $\rightarrow A = \{2, 4, 6\}$
- B: obtenção de número menor que 3 $\rightarrow B = \{1, 2\}$
- C: obtenção de número maior que 5 $\rightarrow C = \{6\}$ (evento simples)
- D: obtenção do número zero $\rightarrow D = \varnothing$ (evento impossível)
- E: obtenção de um número menor que 7 $\rightarrow E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (evento certo)

Peça aos estudantes que tenham em mãos dados, moedas e alguns baralhos comuns para manuseio durante a resolução de alguns exercícios. Se for possível, organize-os em duplas ou em grupos de quatro estudantes.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Consulte as sugestões de resposta no Manual do Professor.

Consulte o tópico “A linguagem das probabilidades”, caso tenha dúvida ao resolver estes exercícios.

1 **Pegue duas moedas e faça vários lançamentos sobre uma mesa. No caderno, anote o nome das faces, de acordo com o resultado de cada lançamento. Em seguida, descreva:**

a) o espaço amostral;
b) o evento A: obtenção de faces de mesmo nome;
c) o evento B: obtenção de faces de nomes diferentes.

2 **Repita o experimento aleatório anterior utilizando dois dados de seis faces, em vez de moedas, e observe os números que aparecerão nas faces superiores. Em seguida, descreva:**

a) o espaço amostral;
b) o evento A: obtenção de números iguais;
c) o evento B: obtenção da soma 5;
d) o evento C: obtenção da soma 12;
e) o evento D: obtenção da soma 1.

3 **A respeito do problema anterior, pesquise no dicionário os significados da palavra “aleatório”.**

4 **Dê um exemplo de evento:**

a) impossível;
b) possível;
c) pouco provável;
d) muito provável;
e) certo.

5 **Elabore uma frase que comece por:**

a) “É muito provável que amanhã...”
b) “É certo que amanhã...”
c) “É pouco provável que amanhã...”

6 **Elabore uma frase que termine com: “... isso sempre ocorre por acaso”.**

7 **Imagine que você vá colocar em uma caixa bolas vermelhas, verdes e azuis, em um total de 200. Quantas bolas de cada cor você colocaria para que, ao tirar uma bola ao acaso:**

a) fosse muito provável sair uma bola azul?
b) fosse pouco provável sair uma bola azul?
c) fosse impossível sair uma bola azul?

Na atividade **9**, as considerações dos estudantes podem mostrar as percepções deles das aulas de Matemática. Observe um exemplo de eventos que você pode exemplificar, ambos para o espaço amostral *S*, conjunto de todos os estudantes da classe: *A*: estudantes que fizeram a lição de casa; *B*: estudantes que trouxeram o livro de Matemática para a aula.

8 **Em uma caixa, há 150 moedas de R$ 0,50 e 10 moedas de R$ 0,10. Sabendo que você vai tirar uma moeda ao acaso dessa caixa, indique:**

a) um acontecimento muito provável; Retirar uma moeda de R$ 0,50.

b) um acontecimento pouco provável. Retirar uma moeda de R$ 0,10.

9 **Durante uma aula de Matemática, verificam-se muitos eventos. Faça uma lista, no caderno, de dez eventos e classifique-os em certos, impossíveis, pouco prováveis ou muito prováveis. Procure citar pelo menos um evento de cada tipo.** Resposta pessoal.

10 **De um baralho comum com 52 cartas retirou-se uma ao acaso. Indique:**

a) o número de elementos do espaço amostral; 52

b) um evento não simples;

c) um evento simples.

11 **Com relação à atividade anterior, verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação a seguir, justificando sua resposta.**

a) O espaço amostral dos eventos é {copas, espadas, ouros, paus}. Falsa.

b) Retirar uma figura (dama, valete ou rei) é um evento simples. Falsa.

c) Sair um 2 de copas é um evento simples. Verdadeira.

d) O evento certo é sair uma carta vermelha. Falsa.

e) Retirar uma carta de copas é um evento impossível. Falsa.

12 **Elabore alguns itens parecidos aos propostos na atividade 10, que envolve um baralho com dez cartas numeradas de 1 a 10. Troque sua atividade com um colega para que um resolva o que o outro propôs.**

O trabalho com a atividade **12** favorece o desenvolvimento das competências gerais **4** e **9**, uma vez que, nesses momentos, os estudantes se comunicam, exercitam a empatia e aprendem a respeitar diferentes opiniões. Observe os estudantes durante a elaboração dessa atividade. Quando estiverem resolvendo as atividades propostas pelos colegas, avalie-os em relação ao uso adequado da linguagem e à compreensão dos conceitos básicos sobre eventos em um espaço amostral.

PROBABILIDADE

O objeto digital aborda a história da Matemática, focando no surgimento da teoria da probabilidade, impulsionada pelos jogos de azar. Discute como antigos jogos e estudos de matemáticos como Girolamo Cardano e Blaise Pascal contribuíram para o desenvolvimento da probabilidade, destacando suas aplicações modernas.

Surgimento do conceito de probabilidade

Como vimos no tópico anterior, quando lançamos um dado de seis faces, há seis resultados possíveis, ou seja, o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Quando o dado tem superfícies regulares e seu interior é homogêneo, não há razão para que um dos números saia mais facilmente que outro. Todos os números têm a mesma **probabilidade** de sair na face superior.

Por exemplo, se Ana apostar que sairá o número 5 e Paulo disser que vai sair o número 4, nenhum deles estará em vantagem, pois ambos terão **uma chance em seis** de acertar o número escolhido.

Dizemos, então, que a probabilidade de cada um deles acertar é de:

$$1 \text{ em } 6 \text{ ou } \frac{1}{6}$$

Como os estudantes vão resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, eventos em experimentos aleatórios sucessivos e reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, o trabalho com este tópico permite desenvolver as habilidades **EM13MAT311** e **EM13MAT312**.

A menos que especificado ao contrário, vamos admitir que as chances de eventos simples ocorrerem em um espaço amostral *S* (não vazio e finito) sejam iguais e vamos chamar *S* de **espaço de eventos equiprováveis**, para que possamos definir a probabilidade de um evento em *S*.

Seja um evento *A* de espaço amostral finito *S* (não vazio), em que todos os resultados são equiprováveis. A probabilidade de ocorrer o evento *A* é a razão entre o número de elementos de *A* e o número de elementos de *S*.

Indicando por $n(A)$ o número de elementos de *A*, $n(S)$ o número de elementos de *S* e $P(A)$, a probabilidade de ocorrer *A* é determinada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Mostre aos estudantes que existem espaços amostrais nos quais os eventos não têm todos a mesma chance de ocorrer. Por exemplo, no espaço amostral *S*, todos os candidatos a uma vaga de trabalho não terão a mesma chance de ocupá-la, pois a escolha dependerá do currículo, da personalidade e de outros fatores que diferenciam um candidato de outro.

Essa razão foi estabelecida pelo matemático e astrônomo francês Pierre Laplace (1749-1827). Como consequência imediata da definição dessa razão, temos:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \quad \text{ou} \quad 0\% \leqslant P(A) \leqslant 100\%$$

De fato, como $\varnothing \subset A \subset S$, temos: $n(\varnothing) \leqslant n(A) \leqslant n(S)$.

Dividindo os membros dessa dupla desigualdade por $n(S)$, obtemos:

$$\frac{0}{n(S)} \leqslant \frac{n(A)}{n(S)} \leqslant \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

Nos casos extremos, em que a probabilidade é:

- 0, o evento nunca ocorre nesse experimento; é um **evento impossível**;
- 1, o evento ocorre com certeza nesse experimento; é um **evento certo**.

Exemplo 1

Jogando um dado de seis faces e observando a face superior obtida, consideramos o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A quantidade de elementos desse conjunto é $n(S) = 6$. Observe a probabilidade dos seguintes eventos:

- Evento A: obtenção de face de número par.

  Nesse evento, o espaço amostral e a quantidade de elementos podem ser indicados como $A = \{2, 4, 6\}$ e $n(A) = 3$; logo:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

- Evento B: obtenção de face de número menor que 5.

  Nesse evento, o espaço amostral e a quantidade de elementos podem ser indicados como $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e $n(B) = 4$; logo:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \simeq 67\%$$

- Evento C: obtenção da face de número 6.

  Nesse evento, o espaço amostral e a quantidade de elementos podem ser indicados como $C = \{6\}$ e $n(C) = 1$; logo:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{6} \simeq 17\%$$

- Evento D: obtenção da face de número zero.

  Nesse evento, o espaço amostral e a quantidade de elementos podem ser indicados como $D = \varnothing$ e $n(D) = 0$; logo:

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0 = 0\%$$

  Esse é um caso de evento impossível.

Exemplo 2

Jogando dois dados comuns simultaneamente, podemos organizar o espaço amostral em um quadro, com $n(S) = 36$. Observe-o e, em seguida, analise a probabilidade dos eventos A e B.

1º dado / 2º dado	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

- Evento A: obtenção da soma 5.

  Para esse evento, podemos indicar o espaço amostral e a quantidade de elementos assim: $A = \{(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4)\}$ e $n(A) = 4$; logo:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \simeq 11\%$$

- Evento B: obtenção de números iguais.
  Para esse evento, podemos indicar o espaço amostral e a quantidade de elementos assim: $B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ e $n(B) = 6$; logo:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \simeq 17\%$$

Exemplo 3

A Pesquisa Nacional de Violência contra a Mulher foi criada como referência na formulação da Lei Maria da Penha. Segundo a 10ª edição dessa pesquisa, em 2023, 30% das brasileiras já tinham sofrido violência doméstica ou familiar provocada por um homem.
Observe os resultados dessa pesquisa, quando foi perguntado à população feminina do Brasil, em 2023, qual era a idade delas quando sofreram, pela primeira vez, algum tipo de violência doméstica ou familiar provocada por um homem.

Idade em que a população feminina sofreu a primeira agressão — Brasil (2023)

Idade	Número de mulheres
Até 6 anos	154
7 a 11 anos	360
12 a 14 anos	345
15 a 18 anos	1 113
19 a 24 anos	1 528
25 a 29 anos	1 005
30 a 39 anos	1 332
40 a 49 anos	610
50 anos ou mais	246
Não sei/Prefiro não responder	408
Total	**7 101**

Pesquisa Nacional de Violência contra a Mulher. *Observatório da Mulher contra a Violência*. Disponível em: https://www12.senado.leg.br/institucional/omv/pdfs/destaques_pes_nacional_violencia_contra_mulher_digital.pdf/view. Acesso em: 28 set. 2024.

Se uma mulher que respondeu à pesquisa for selecionada ao acaso, a probabilidade de ela ter sofrido a primeira agressão entre 25 e 29 anos é determinada por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1005}{7101} \simeq 14{,}15\%$$

É importante perceber que a probabilidade é uma medida de tendência, e não de certeza. No primeiro evento do exemplo **1**, espera-se que, a cada duas jogadas, saia um número par, mas não se pode garantir que isso ocorra. No entanto, se o dado for perfeito e o jogarmos muitas vezes, a tendência 1:2 se revelará, e isso significa que há 50% de chance de obtermos a face par.

PARA EXPLORAR

Texto

Observatório da Mulher contra a Violência. *Pesquisa Nacional de Violência contra a Mulher*. Brasília, DF: Senado Federal, 2023. Disponível em: https://www12.senado.leg.br/institucional/omv/pdfs/destaques_pes_nacional_violencia_contra_mulher_digital.pdf/view. Acesso em: 28 set. 2024.

Em 2023, na 10ª edição da *Pesquisa Nacional de Violência contra a Mulher*, 74% das entrevistadas perceberam que a violência doméstica e familiar contra a mulher aumentou de 2022 para 2023. O *link* indicado apresenta um resumo com os destaques dessa pesquisa.

@mickart_/ID/BR

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Se possível, realize com os estudantes uma simulação da atividade **R2**.

R1 (Uerj)

POPULAÇÃO AGREDIDA FISICAMENTE NO BRASIL EM 2009		
Cor ou raça	**Homens**	**Mulheres**
Branca	567 000	474 000
Preta	880 000	608 000

Adaptado de IBGE/PNAD, 2009.

A partir dos dados da tabela, escolhe-se ao acaso uma pessoa dessa população. Sabendo que essa pessoa é uma mulher, a probabilidade de ela ser preta é mais próxima de:

a) 0,64
b) 0,56
c) 0,44
d) 0,36

Resolução

Com as informações apresentadas na tabela, podemos considerar o espaço amostral S de todas as mulheres que foram agredidas fisicamente, então $n(S) = 1\,082\,000$.

Ao escolher ao acaso uma mulher da população indicada na tabela, a probabilidade de ela ser preta é:

$$\frac{608\,000}{1\,082\,000} = \frac{304}{541} \simeq 0{,}56$$

Portanto, a alternativa correta é a **b**.

R2 **Uma urna contém 6 bolas vermelhas e 4 pretas. Retirando-se ao acaso uma bola, qual é a probabilidade de ela ser:**

a) vermelha?
b) preta?

Resolução

a) Há 10 bolas na urna, e 6 são vermelhas. Logo, a probabilidade de sortearmos uma bola vermelha ao acaso é dada por:

$$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 60\%$$

b) Do mesmo modo, a probabilidade de sair uma bola preta é dada por:

$$P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 40\%$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

13 **Retome a atividade 2 e faça o que se pede.**

a) Calcule a probabilidade de obter soma maior que ou igual a 5 no lançamento dos dados. Aproximadamente 83%.

b) Calcule a probabilidade de obter soma 3. Aproximadamente 5,6%.

c) O que é maior: a probabilidade de obter soma 1 ou soma 12? Soma 12 é maior.

d) Por que a probabilidade de obter soma 13 é zero? Porque a maior soma possível é 12.

14 **Tirando-se, ao acaso, uma carta de um baralho comum de 52 cartas, qual é a probabilidade de sair um rei?** Aproximadamente 7,7%.

15 **No lançamento de um dado comum, descreva eventos que têm as probabilidades a seguir.**

A atividade **15** permite avaliar a compreensão dos estudantes sobre o significado da probabilidade e o uso da linguagem matemática.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

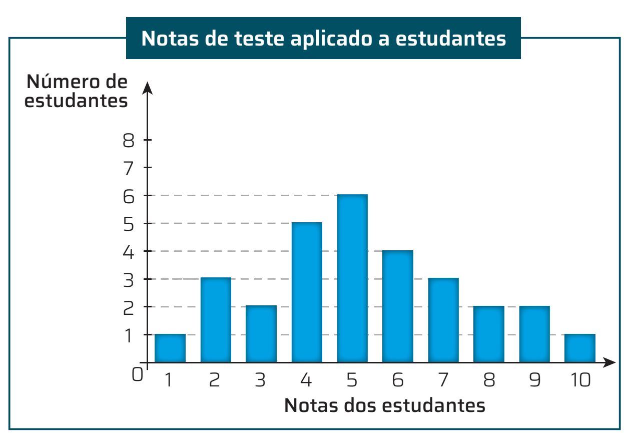
c) 25%

d) 1

e) $\frac{5}{6}$

16 **Dois números naturais diferentes são selecionados do conjunto de números naturais menores que ou iguais a 5. Qual é a probabilidade de que a soma dos dois números seja maior que ou igual ao seu produto?** 60%

17 **As notas de um teste aplicado a um grupo de estudantes estão descritas no gráfico a seguir.**



Dados fictícios.

Com base nesse gráfico, qual é a probabilidade de um estudante escolhido ao acaso ter obtido uma nota superior a 6? Aproximadamente 27,6%.

18 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(UFPR) André, Beatriz e João resolveram usar duas moedas comuns, não viciadas, para decidir quem vai lavar a louça do jantar, lançando as duas moedas simultaneamente, uma única vez. Se aparecerem duas coroas, André lavará a louça; se aparecerem duas caras,

Não escreva no livro.

Beatriz lavará a louça; e se aparecerem uma cara e uma coroa, João lavará a louça. A probabilidade de que João venha a ser sorteado para lavar a louça é de:

Alternativa **e**.

a) 25%.

b) 27,5%.

c) 30%.

d) 33,3%.

e) 50%.

O trabalho com a atividade **19** favorece o desenvolvimento da competência geral **2**. A análise de erros ajuda os estudantes a pensar nas próprias resoluções, a ampliar a capacidade de análise e a desenvolver a habilidade de argumentação. Converse com os estudantes sobre os erros das resoluções e peça-lhes que argumentem sobre esses erros com base no que estão apreendendo.

19 **Observe como Luís resolveu a questão anterior.**

K: cara; *C*: coroa

Espaço amostral: $S = \{(K, K); (K, C); (C, C)\}$

Assim, a probabilidade de João lavar a louça será de $P = \frac{1}{3} = 33{,}3\%$.

Portanto, a resposta correta é a alternativa *d*.

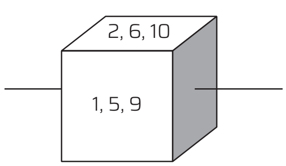
ID/BR

Você concorda com Luís? Justifique sua resposta.

Luís errou a resolução porque desconsiderou um dos elementos do espaço amostral, (*C*, *K*).

20 **Escreva a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Em um cubo, com faces em branco, foram gravados os números de 1 a 12, utilizando-se o seguinte procedimento: o número 1 foi gravado na face superior do dado. Em seguida, o dado foi girado, no sentido anti-horário, em torno do eixo indicado na figura abaixo, e o número 2 foi gravado na nova face superior seguinte, conforme o esquema abaixo.



Enem. Fac-símile: ID/BR

O procedimento continuou até que foram gravados todos os números.

Observe que há duas faces que ficaram em branco.

Ao se jogar aleatoriamente o dado apresentado, a probabilidade de que a face sorteada tenha a soma máxima é: Alternativa **a**.

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{2}{3}$

21 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) No alojamento de uma universidade, há alguns quartos com o padrão superior ao dos demais. Um desses quartos ficou disponível, e muitos estudantes se candidataram para morar no local. Para escolher quem ficará com o quarto, um sorteio será realizado. Para esse sorteio, cartões individuais com os nomes de todos os estudantes inscritos serão depositados em uma urna, sendo que, para cada estudante de primeiro ano, será depositado um único cartão com seu nome; para cada estudante de segundo ano, dois cartões com seu nome; e, para cada estudante de terceiro ano, três cartões com seu nome. Foram inscritos 200 estudantes de primeiro ano, 150 de segundo ano e 100 de terceiro ano. Todos os cartões têm a mesma probabilidade de serem sorteados.

Qual a probabilidade de o vencedor do sorteio ser um estudante de terceiro ano? Alternativa **e**.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{8}$

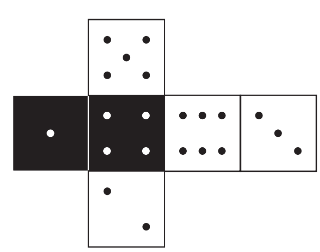
d) $\frac{2}{9}$

e) $\frac{3}{8}$

22 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFSCar-SP) A tabela indica as apostas feitas por cinco amigos em relação ao resultado decorrente do lançamento de um dado, cuja planificação está indicada na figura.

Ana	Face branca ou número par.
Bruna	Face branca ou número 5.
Carlos	Face preta ou número menor que 2.
Diego	Face preta ou número maior que 2.
Érica	Face branca ou número menor que 4.



UFSCar-SP. Fac-símile: ID/BR

Se trocarmos o conectivo "ou" pelo conectivo "e" na aposta de cada um, o jogador que terá maior redução em suas chances de acertar o resultado, em decorrência dessa troca, será: Alternativa **d**.

a) Ana.

b) Bruna.

c) Carlos.

d) Diego.

e) Érica.

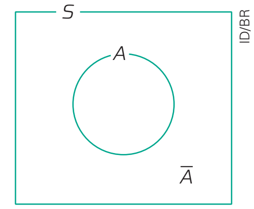
Nas *Orientações específicas* deste capítulo encontra-se o jogo Role os dados, cujo objetivo é promover a reflexão sobre o uso da probabilidade em jogos de azar e a questão da "justiça" nas regras de um jogo.

Quando corrigir os problemas resolvidos pelos estudantes, ou mesmo as avaliações, escolha alguns erros para serem analisados coletivamente. Sugerimos não expor o nome do autor do erro, para preservá-lo de possíveis comentários dos colegas.

Probabilidade de não ocorrer um evento

O trabalho com este tópico permite desenvolver a habilidade **EM13MAT312**, visto que os estudantes vão resolver problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios.

Seja A um evento de espaço amostral S. O conjunto complementar de A em relação a S é o conjunto dos elementos de S que não pertencem a A. Podemos representar isso em um diagrama de Euler-Venn.



A representação de conjuntos com diagramas de Euler-Venn auxiliará na compreensão das próximas definições relativas à probabilidade de não ocorrência de um evento, de ocorrência simultânea de dois eventos ou de ocorrência excludente.

Indicamos a probabilidade de não ocorrer um evento por: $\overline{A}$ ou C_S^A, ou $S - A$.

Em outras palavras, $\overline{A}$ é o evento "não ocorrer A".

Como $n(A) + n(\overline{A}) = n(S)$, dividindo os dois membros por $n(S)$, obtemos:

$$\frac{n(A) + n(\overline{A})}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)}$$

$$\frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(\overline{A})}{n(S)} = 1$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

A probabilidade de não ocorrer um evento é igual a 1 menos a probabilidade de que ele ocorra.

Por exemplo, no lançamento simultâneo de dois dados de seis faces, vamos calcular a probabilidade de obtermos soma diferente de 11, sabendo que $n(S) = 36$.

Sendo A o evento obter soma 11 no lançamento simultâneo de dois dados de seis faces, temos $A = \{(5, 6), (6, 5)\}$ e $n(A) = 2$.

Logo, a probabilidade de obtermos soma 11 é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \simeq 6\%$$

O evento não obter soma 11 no lançamento simultâneo de dois dados de seis faces é $\overline{A}$; temos, então:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} \simeq 94\%$$

Portanto, a probabilidade de obtermos soma diferente de 11 é de aproximadamente 94%.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

23 **Uma urna contém seis bolas verdes, cinco azuis e quatro pretas. Calcule a probabilidade de se retirar, ao acaso, uma bola azul ou uma preta.** 60%

24 **Ao lançar simultaneamente dois dados de seis faces, calcule a probabilidade de se obter faces diferentes.** Aproximadamente 83%.

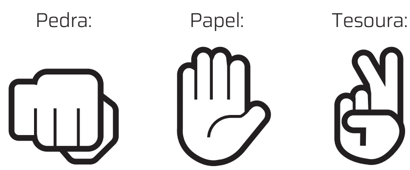
25 **Foram formados todos os anagramas da palavra SAPO. Sorteando um desses anagramas ao acaso, calcule a probabilidade de ele ser diferente de SOPA.** Aproximadamente 96%.

26 **Retirando-se três cartas de um baralho comum de 52 cartas, ao acaso, qual é a probabilidade de sair pelo menos um ás?** Aproximadamente 22%.

Não escreva no livro.

27 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Unicamp-SP) Pedra-papel-tesoura, também chamado ***jankenpon*** ou ***jokempô***, é um jogo recreativo para duas pessoas. Nesse jogo, os participantes usam as mãos para representar os símbolos de pedra, papel e tesoura, conforme mostrado nos ***emojis*** a seguir:



Unicamp-SP. Fac-símile: ID/BR

Pelas regras do jogo, o participante que escolher “pedra” ganha do que escolher tesoura; o participante que escolher tesoura ganha do que escolher papel; por fim, o que escolher papel ganha do que escolher pedra. Se ambos escolherem os mesmos símbolos, eles empatam.

Admitindo que os participantes escolhem os símbolos com igual probabilidade, qual a chance de acontecer pelo menos um empate em três partidas? Alternativa **d**.

a) $\frac{16}{27}$.   b) $\frac{17}{27}$.   c) $\frac{18}{27}$.   d) $\frac{19}{27}$.

Probabilidade da união de eventos

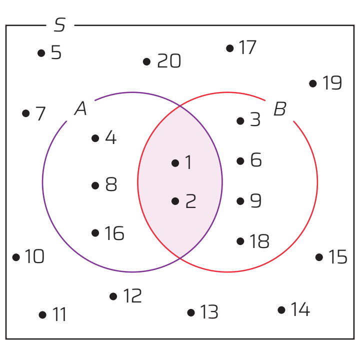
Para compreender a probabilidade da união de eventos, acompanhe a seguinte situação: vamos retirar, ao acaso, uma bola de uma urna que contém vinte bolas numeradas de 1 a 20 e considerar os eventos A “obter um divisor de 16” e B “obter um divisor de 18”.

O trabalho com este tópico permite desenvolver a habilidade **EM13MAT312**, visto que os estudantes vão resolver problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios.

Nessa situação, podemos considerar:

- o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, ..., 20\}$;
- $n(S) = 20$;
- $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ e $n(A) = 5$;
- $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ e $n(B) = 6$.

E podemos representar essa situação em um diagrama de Euler-Venn, desta maneira:



ID/BR

Note que existem elementos que satisfazem:

- apenas o evento A: 4, 8, 16;
- apenas o evento B: 3, 6, 9, 18;
- o evento A e o evento B: 1, 2;
- o evento A ou o evento B: 4, 8, 16, 3, 6, 9, 18, 1, 2.

Sabemos que $\{1, 2\} = A \cap B$ e $\{4, 8, 16, 3, 6, 9, 18, 1, 2\} = A \cup B$.

Podemos afirmar que:
- a ocorrência do evento A **e** do evento B é dada por $A \cap B$;
- a ocorrência do evento A **ou** do evento B é dada por $A \cup B$.

Com base nas informações da situação apresentada, vamos calcular $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$:

- $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{5}{20}$
- $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{6}{20}$
- $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)} = \dfrac{2}{20}$
- $P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(S)} = \dfrac{9}{20}$

Com base nesses resultados, podemos observar que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

De fato, quaisquer que sejam os eventos A e B de um espaço amostral S finito e não vazio, vale a igualdade:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo todos os membros dessa relação por $n(S)$, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

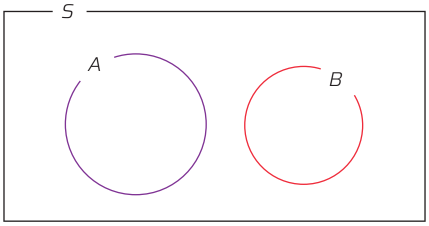
$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

A probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B é igual à probabilidade de ocorrer A mais a probabilidade de ocorrer B menos a probabilidade de ocorrer A e B.

Se A e B são conjuntos disjuntos, isto é, $A \cap B = \varnothing$, os eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos.

Nesse caso, como $n(A \cap B) = 0$ e $P(A \cap B) = 0$, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



ID/BR

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R3 **Em uma comunidade de mil habitantes, quatrocentos são sócios de um clube *A*, trezentos são sócios de um clube *B* e duzentos, de ambos. Qual é a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ser sócia de *A* ou de *B*?**

Resolução

Como $n(S) = 1000$, $n(A) = 400$, $n(B) = 300$ e $n(A \cap B) = 200$, temos:

- $P(A) = \dfrac{400}{1000} = \dfrac{2}{5}$
- $P(B) = \dfrac{300}{1000} = \dfrac{3}{10}$
- $P(A \cap B) = \dfrac{200}{1000} = \dfrac{1}{5}$

Assim, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Portanto, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ser sócia de A ou de B é 50%.

R4 **Uma urna contém quatro bolas amarelas, duas bolas brancas e três bolas vermelhas. Retirando-se uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de ela ser amarela ou branca?**

Resolução

Sejam A_1, A_2, A_3 e A_4 as bolas amarelas, B_1 e B_2 as brancas e V_1, V_2 e V_3 as vermelhas.

Então, $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4, V_1, V_2, V_3, B_1, B_2\}$ e $n(S) = 9$.

- Evento A: retirada de bola amarela
  $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ e $n(A) = 4$.
- Evento B: retirada de bola branca
  $B = \{B_1, B_2\}$ e $n(B) = 2$.

Assim:

- $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{4}{9} \simeq 44,4\%$
- $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{2}{9} \simeq 22,2\%$

Como $A \cap B = \varnothing$, A e B são eventos mutuamente exclusivos. Logo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \simeq 66,6\%$$

Esse problema também pode ser resolvido pelo princípio da probabilidade complementar, porque a probabilidade de a bola retirada ser amarela ou branca é 1 menos a probabilidade de ela ser vermelha:

$$1 - \frac{3}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \simeq 66,6\%$$

Podemos usar uma ou outra resolução, dependendo da que for mais fácil. Às vezes, como nesse caso, é indiferente aplicar qualquer uma das duas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

28 **No lançamento de um dado de seis faces, calcule a probabilidade de se obter face de número par ou face de número menor que 3.** Aproximadamente 67%.

29 **De uma coleção de oito livros de Matemática, cinco de Física e sete de Química, retirou-se um livro, ao acaso. Calcule a probabilidade de esse livro ser de Química ou de Física.** 60%

30 **Lançando-se simultaneamente dois dados de seis faces, calcule a probabilidade de se obter soma:**

a) 8 ou 11; Aproximadamente 19%.

b) par ou ímpar. 100%

31 **Retirando-se ao acaso uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de sair uma carta de ouros ou um valete?** Aproximadamente 31%.

O trabalho com este tópico permite desenvolver a habilidade **EM13MAT312**, visto que os estudantes vão resolver problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios.

Probabilidade condicional

Este é um conceito bem mais complexo; por isso, sugerimos a leitura das explicações iniciais com os estudantes, dando pausas para verificar o que eles estão entendendo, sempre tendo em mente a situação que contextualiza a probabilidade condicional.

Acompanhe a situação descrita a seguir.

Em um grupo de jovens, sabe-se que 40 pessoas assistem ao seriado X, 46 pessoas assistem ao seriado Y, 16 são espectadoras de ambos e 20 não assistem a nenhum dos dois seriados.

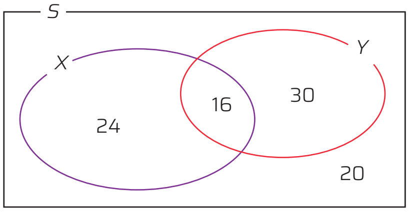
Vamos calcular a probabilidade de:

a) um jovem assistir aos seriados X e Y;

b) um jovem que assiste ao seriado X ser espectador do seriado Y;

c) um jovem que assiste ao seriado Y ser espectador do seriado X.

Perceba, inicialmente, que 24 jovens assistem apenas ao seriado X, e 30 assistem apenas ao seriado Y. Podemos representar essa situação em um diagrama de Euler-Venn. Observe.



ID/BR

No caso do item **a**, o espaço amostral S é formado por todos os jovens. Logo, $n(S) = 90$ e a probabilidade citada é dada por:

$$P(X \cap Y) = \frac{n(X \cap Y)}{n(S)} \Rightarrow P(X \cap Y) = \frac{16}{90}$$

No caso do item **b**, entre os jovens que assistem ao seriado X, devemos destacar os que assistem ao seriado Y. Logo, o espaço amostral desse evento é o conjunto de pessoas que assistem ao seriado X e a probabilidade citada é dada por:

$$\frac{n(X \cap Y)}{n(X)} = \frac{16}{40}$$

No caso do item **c**, entre os jovens que assistem ao seriado Y, devemos analisar os que assistem ao seriado X. Logo, o espaço amostral desse evento é o conjunto de pessoas que assistem ao seriado Y e a probabilidade citada é dada por:

$$\frac{n(X \cap Y)}{n(Y)} = \frac{16}{46}$$

No caso do item **b**, a razão $\frac{n(X \cap Y)}{n(X)}$ é chamada de **probabilidade de *Y* condicionada ao evento *X*** e é indicada por $P(Y|X)$.

No caso do item **c**, a razão $\frac{n(X \cap Y)}{n(Y)}$ é chamada de **probabilidade de *X* condicionada ao evento *Y*** e é indicada por $P(X|Y)$.

Podemos expressar $P(A|B)$ em função de $P(A \cap B)$ e de $P(B)$.

Sejam $A \neq \varnothing$ e $B \neq \varnothing$ eventos de mesmo espaço amostral S.

A probabilidade de ocorrência de A condicionada a B (notação: $P(A|B)$) é o número dado por:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Chamamos essa relação de **probabilidade condicional**.

Dividindo o numerador e o denominador do segundo membro de $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ por $n(S)$, obtemos:

$$P(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R5 **Ao se jogar um dado de seis faces, verificou-se que foi obtida uma face com número maior que 2. Qual é a probabilidade de esse número ser primo?**

Resolução

Temos: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

B: obter face com número maior que 2;

$B = \{3, 4, 5, 6\}$ e $n(B) = 4$

A: obter face com número primo;

$A = \{2, 3, 5\}$

$A \cap B = \{3, 5\}$ e $n(A \cap B) = 2$

Portanto:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$$

R6 **No lançamento simultâneo de dois dados de seis faces, qual é a probabilidade de aparecerem faces com números ímpares, tal que a soma seja 8?**

Resolução

Sendo B: obter a soma das faces igual a 8, temos:

$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ e $n(B) = 5$

Sendo A: obter faces com números ímpares, temos:

$$A = \{(1, 1), (1, 3), ..., (5, 5)\}$$

Assim, $A \cap B = \{(3, 5), (5, 3)\}$ e $n(A \cap B) = 2$.

Portanto:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{5} = 40\%$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

A atividade **34** tem como objetivo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT106**, na medida em que o estudante utiliza probabilidade para analisar uma situação de risco.

32 **No lançamento de um dado comum, calcule a probabilidade de se obter face com número divisível por 2, sabendo que esse número é diferente de 6.** 40%

33 **De um total de 100 estudantes que se destinam aos cursos de História, Letras e Pedagogia, sabe-se que:**

- 30 destinam-se a História e, destes, 20 são mulheres;
- o total de estudantes homens é 50, dos quais 10 se destinam a Letras;
- 10 mulheres destinam-se ao curso de Pedagogia.

Sorteando-se, ao acaso, um estudante desse grupo, qual é a probabilidade:

a) de que ele se destine ao curso de Letras, sabendo que é um homem? 20%

b) de que ele se destine ao curso de História, sabendo que é uma mulher? 40%

c) de que seja uma mulher, sabendo que se destina ao curso de História? Aproximadamente 67%.

34 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Enem) O HPV é uma doença sexualmente transmissível. Uma vacina com eficácia de 98% foi criada com o objetivo de prevenir a infecção por HPV e, dessa forma, reduzir o número de pessoas que venham a desenvolver câncer de colo de útero. Uma campanha de vacinação foi lançada em 2014 pelo SUS, para um público-alvo de meninas de 11 a 13 anos de idade. Considera-se que, em uma população não vacinada, o HPV acomete 50% desse público ao longo de suas vidas. Em certo município, a equipe coordenadora da campanha decidiu vacinar meninas entre 11 e 13 anos de idade em quantidade suficiente para que a probabilidade de uma menina nessa faixa etária, escolhida ao acaso, vir a desenvolver essa doença seja, no máximo, de 5,9%. Houve cinco propostas de cobertura, de modo a atingir essa meta:

Proposta I: vacinação de 90% do público-alvo.

Proposta II: vacinação de 55,8% do público-alvo.

Proposta III: vacinação de 88,2% do público-alvo.

Proposta IV: vacinação de 49% do público-alvo.

Proposta V: vacinação de 95,9% do público-alvo.

Para diminuir os custos, a proposta escolhida deveria ser também aquela que vacinasse a menor quantidade possível de pessoas.

Disponível em: www.virushpv.com.br.
Acesso em: 30 ago. 2014 (adaptado).

A proposta implementada foi a de número Alternativa **a**.

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

35 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(UFPR) Um grupo de pessoas foi classificado quanto ao peso e pressão arterial, conforme mostrado no quadro a seguir:

Pressão	Peso			
	Excesso	Normal	Deficiente	Total
Alta	0,10	0,08	0,02	0,20
Normal	0,15	0,45	0,20	0,80
Total	0,25	0,53	0,22	1,00

Com base nesses dados, considere as seguintes afirmativas:

1. A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso nesse grupo ter pressão alta é de 0,20.
2. Se se verifica que uma pessoa escolhida ao acaso, nesse grupo, tem excesso de peso, a probabilidade de ela ter também pressão alta é de 0,40.
3. Se se verifica que uma pessoa escolhida ao acaso, nesse grupo, tem pressão alta, a probabilidade de ela ter também peso normal é de 0,08.
4. A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso nesse grupo ter pressão normal e peso deficiente é de 0,20.

Assinale a alternativa correta. Alternativa **b**.

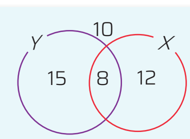
a) Somente as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas 1, 2 e 4 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 2, 3 e 4 são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.

36 **Ao resolver o problema a seguir, Humberto cometeu alguns erros. Encontre esses erros na resolução e corrija-os.**

Em uma turma do Ensino Médio, 20 estudantes praticam futebol, 23 praticam basquete, 8 praticam os dois esportes e 10 não praticam nenhum deles.

a) Qual é a probabilidade de um estudante que pratica futebol ser praticante de basquete? Aproximadamente 35%.

b) Qual é a probabilidade de um estudante que pratica basquete ser praticante de futebol? 40%



Se X é o evento correspondente a "o estudante jogar futebol" e Y o evento correspondente a "o estudante jogar basquete", então: $n(X) = 12$, $n(Y) = 15$, $n(X \cap Y) = 8$. *Assim:*

a) $P(X|Y) = \frac{8}{12} \simeq 66{,}6\%$

b) $P(Y|X) = \frac{8}{15} \simeq 53{,}3\%$

Ilustrações: ID/BR

Antes de iniciar a leitura deste tópico, organize os estudantes em duplas e proponha o problema apresentado. Finalizado o trabalho, leia com eles o tópico e discutam a maneira como as duplas trabalharam para chegar à solução. Desse modo, eles ampliarão o conhecimento a respeito de probabilidade. O trabalho com este tópico permite desenvolver a habilidade **EM13MAT312**, pois os estudantes vão resolver problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Probabilidade da intersecção de eventos

Acompanhe a situação a seguir.

Em um saco, há quatro fichas brancas e seis azuis. Qual é a probabilidade de retirarmos ao acaso, sucessivamente, uma ficha branca e outra azul com reposição?

No saco, há dez fichas para a primeira retirada; logo, existem quatro possibilidades de retirarmos uma ficha branca. Colocando novamente a ficha no saco, na segunda retirada temos as dez fichas outra vez; logo, existem seis possibilidades de sair ficha azul.

Temos, então:

- 24 possibilidades ($4 \cdot 6 = 24$) de sair ficha branca na primeira retirada e azul na segunda;
- 100 possibilidades ($10 \cdot 10 = 100$) de retirar a primeira ficha (10) e de retirar a segunda ficha (10).

A probabilidade de retirarmos uma ficha branca e uma azul, sucessivamente, com reposição da primeira ficha é:

$$P = \frac{24}{100} = 24\%$$

Note que a probabilidade de sair ficha branca na primeira retirada é de $\frac{4}{10} = 40\%$, a de sair ficha azul na segunda retirada é de $\frac{6}{10} = 60\%$ e que:

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{24}{100} = 24\%$$

Desse modo, a probabilidade de sair ficha branca na primeira retirada e azul na segunda é igual ao produto das probabilidades de cada condição. Isso ocorre porque as exigências feitas são independentes, ou seja, o resultado da primeira retirada não influencia os possíveis resultados da segunda retirada.

Se dois eventos, *A* e *B*, que ocorrem em um mesmo espaço amostral, são independentes entre si (a ocorrência de um não influi na ocorrência do outro), a probabilidade de ocorrência de *A* e *B* é igual ao produto das probabilidades de cada um desses eventos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Por exemplo, jogando-se uma moeda duas vezes seguidas, vamos calcular a probabilidade de sair coroa no primeiro e no segundo lançamentos.

Visto que a obtenção de coroa no primeiro lançamento (evento *A*) não interfere no resultado do segundo lançamento (evento *B*), os eventos *A* e *B* são independentes um do outro.

Assim:

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ e } P(B) = \frac{1}{2}$$

E, portanto:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Se dois eventos, *A* e *B*, **não são independentes**, então a fórmula usada acima não é válida. Isso pode ser observado na situação a seguir.

Em um grupo de cem pessoas, quarenta são loiras, trinta usam óculos e vinte são loiras e usam óculos.

No espaço amostral dessas cem pessoas, o evento *A*: "ser loira" e o evento *B*: "usar óculos" não são independentes.

Assim, temos:

- $P(A \cap B) = \frac{20}{100}$
- $P(A) = \frac{40}{100}$
- $P(B) = \frac{30}{100}$

Note que $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

É importante observar que a fórmula para calcular $P(A \cap B)$ não é verdadeira quando os eventos não são independentes. Mais um exemplo é o da situação a seguir, para o lançamento de um dado de seis faces.

Vamos chamar de A o evento "obter um resultado par" e de B o evento "obter um resultado maior que 3". Assim, $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$; então:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ e } P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Mas $A \cap B$ corresponde ao resultado "par e maior que 3", ou seja, $A \cap B = \{4, 6\}$. Logo:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Nesse caso, temos:

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Esta sequência de exercícios apresenta problemas em que a probabilidade é aplicada em situações do dia a dia. Incentive a argumentação e a justificativa das formas de pensar dos estudantes e valorize os diferentes modos de resolução, favorecendo, assim, o desenvolvimento da competência geral **7**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

37 **Lucas quer saber se não vai chover no próximo domingo. Por isso, telefonou para o Serviço Meteorológico e recebeu a previsão de que não choveria nesse dia e que, em média, eles acertavam quatro vezes em cada cinco. Ele ficou animado, apesar da dúvida. Então, lembrou-se de que existia um serviço privado que fazia análises meteorológicas por um sistema diferente. Telefonou e também recebeu a previsão que não se previam chuvas e que, normalmente, acertavam três vezes em cada quatro. Qual é a probabilidade de que não chova nesse dia, pelo ponto de vista meteorológico?** 95%

38 **Uma urna A contém três bolas brancas e duas azuis; uma urna B contém quatro bolas vermelhas e cinco pretas. Retirando-se uma bola de cada urna, ao acaso, calcule a probabilidade de saírem uma bola branca e uma preta.** Aproximadamente 33%.

39 **No lançamento de dois dados de seis faces, calcule a probabilidade de obtermos face 5 em um dado e face par no outro.** Aproximadamente 8%.

40 **Em certo país, uma pesquisa realizada por médicos geriatras indicou que 36% de todos os homens e 40% de todas as mulheres viverão até 80 anos de idade.**

a) Qual é a probabilidade de que os quatro avós de uma pessoa cheguem aos 80 anos de idade? Aproximadamente 2,1%.

b) Qual é a probabilidade de que exatamente três dos quatro avós de uma pessoa vivam até os 80 anos de idade? Aproximadamente 13,6%.

c) Qual é a probabilidade de que um casal de avós, do mesmo ramo familiar, chegue até os 80 anos de idade? Aproximadamente 14,4%.

d) Qual é a probabilidade de que nenhum dos avós viva até os 80 anos de idade? Aproximadamente 14,7%

e) Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos avós viva até os 80 anos de idade? 85,3%

f) Por que a soma das respostas do item **a** até o item **e** não totaliza 1,00? Porque os eventos descritos em **a**, **b** e **c** não são independentes.

41 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Unesp) A tabela indica o chaveamento de 8 times que chegaram às quartas de final de um torneio de futebol. Nos jogos de quartas de final, as porcentagens ao lado de cada time indicam sua probabilidade de seguir adiante no torneio. Nos jogos da semifinal, as probabilidades de cada time dos grupos E e F são iguais a 50%. Alternativa **b**.

Quartas de final

Grupo A

time 1	60%
time 2	40%

Grupo B

time 3	30%
time 4	70%

Semifinal

Grupo E

vencedor do grupo A
vencedor do grupo B

Grupo F

vencedor do grupo C
vencedor do grupo D

Final

vencedor do grupo E
vencedor do grupo F

Quartas de final

Grupo C

time 5	50%
time 6	50%

Grupo D

time 7	45%
time 8	55%

Unesp. Fac-símile: ID/BR

Qual é a probabilidade de o time 1 disputar a final desse torneio contra os times 5 ou 7?

a) 16,25% b) 14,25% c) 15,75% d) 15,50% e) 12,50%

O trabalho com este tópico permite desenvolver as habilidades **EM13MAT310** e **EM13MAT311**, visto que os estudantes vão resolver problemas de contagem que envolvem diferentes tipos de agrupamento de elementos e o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios.

PROBABILIDADE E CONTAGEM

Até este ponto, foi possível descrever o espaço amostral e os conjuntos dos eventos ou contar diretamente o número de elementos desses conjuntos. No entanto, nem sempre isso é possível; quando isso acontece, temos de recorrer à análise combinatória para podermos calcular algumas probabilidades.

Nos exemplos a seguir, em cada enunciado, observe os elementos que permitem optar pelo princípio multiplicativo, pelo arranjo, pela permutação ou pela combinação e o momento em que a probabilidade entra na resolução.

Exemplo 1 Oriente os estudantes a fazer a análise sugerida para cada exemplo desta sequência e, depois, possibilite a troca das análises realizadas.

Uma urna contém seis bolas vermelhas e quatro bolas brancas. Retirando-se simultaneamente duas bolas, ao acaso, calcule a probabilidade de:

a) ambas serem vermelhas;

b) ambas serem brancas.

Note que o espaço amostral S não é formado pelas dez bolas consideradas individualmente, pois a retirada é feita em blocos de duas bolas.

Assim:

$$n(S) = C_{10,\,2} \Rightarrow n(S) = 45$$

Neste tópico, os problemas passam a exigir cálculos com grande número de elementos nos conjuntos que descrevem os experimentos e seu espaço amostral. Assim, este capítulo dá continuidade ao que foi estudado sobre contagem e amplia esse estudo, além de favorecer a retomada dos procedimentos e conceitos da combinatória.

a) Evento A: obter duas bolas vermelhas.

$$n(A) = C_{6,\,2} \Rightarrow n(A) = 15$$

Logo:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} \simeq 33{,}3\%$$

b) Evento B: obter duas bolas brancas.

$$n(B) = C_{4,\,2} \Rightarrow n(B) = 6$$

Logo:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15} \simeq 13{,}3\%$$

Exemplo 2

Uma caixa contém dez modelos diferentes de etiquetas, sendo quatro identificadas com uma letra e seis identificadas com um algarismo. Novas etiquetas serão formadas agrupando-se as dez etiquetas de duas em duas. Calcule a probabilidade de uma etiqueta nova:

a) ter duas letras;

b) ter dois algarismos.

O espaço amostral é formado pelos agrupamentos, dois a dois, das dez etiquetas, com a ordem dos elementos influindo na contagem.

Assim:

$$n(S) = A_{10,\,2} \Rightarrow n(S) = 90$$

a) Evento A: formar etiquetas com duas letras.

$$n(A) = A_{4,\,2} \Rightarrow n(A) = 12$$

Portanto:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15} \simeq 13{,}3\%$$

b) Evento B: formar etiquetas com dois algarismos.

$$n(B) = A_{6,\,2} \Rightarrow n(B) = 30$$

Portanto:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3} \simeq 33{,}3\%$$

Exemplo 3

Com cinco engenheiros e quatro físicos, serão formadas comissões de cinco pessoas. Calcule a probabilidade de uma dessas comissões ser formada por três engenheiros e dois físicos.

O espaço amostral *S* é formado pelas comissões de cinco elementos escolhidos entre os nove profissionais. Logo:

$$n(S) = C_{9,\,5} \Rightarrow n(S) = 126$$

Vamos chamar de *A* a comissão com três engenheiros e dois físicos; assim:

$$n(A) = C_{5,\,3} \cdot C_{4,\,2} \Rightarrow n(A) = 60$$

Portanto:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A) = \frac{60}{126} \Rightarrow P(A) = \frac{10}{21}$$

Exemplo 4

Dois prêmios serão sorteados entre dez pessoas, sendo sete mulheres e três homens. Admitindo que uma pessoa não possa ganhar os dois prêmios, responda às questões.

a) Qual é a probabilidade de que os dois ganhadores sejam homens?

b) Qual é a probabilidade de que ao menos uma mulher receba um prêmio?

O espaço amostral é formado por todos os grupos de duas pessoas entre as dez, ou seja: $n(S) = C_{10,\,2} = \binom{10}{2}$. Assim, temos:

$$n(S) = \frac{10!}{8!\,2!} = \frac{10 \cdot 9}{2!} = 45$$

Portanto, os prêmios podem ser distribuídos de 45 maneiras diferentes.

a) Seja *A* o evento "os dois ganhadores serem homens". O número de grupos com dois homens entre os três possíveis ganhadores do sexo masculino é:

$$n(A) = C_{3,\,2} = \binom{3}{2} = 3$$

Logo, a probabilidade de que os prêmios saiam para dois homens é:

$$\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

b) Seja *B* o evento "ao menos uma mulher receber um prêmio". Acontecer o evento *B* corresponde a não acontecer o evento *A*, ou seja, *B* acontece quando os dois ganhadores não são homens. Logo:

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

Observe que há outros modos de resolver o item **b** sem usar a probabilidade de não ocorrer o evento *A*, calculando $n(B)$ diretamente de uma das seguintes maneiras:

- $n(B) = 45 - n(A)$, pois os casos de pelo menos uma mulher ganhadora são todos do espaço amostral, exceto aqueles em que os dois ganhadores são homens.

$$n(B) = 42 \text{ e } P(B) = \frac{42}{45} = \frac{14}{15}$$

- $n(B)$ é a soma dos casos em que uma mulher entre sete é ganhadora com um homem, mais os casos em que duas mulheres são ganhadoras.

$$n(B) = 3 \cdot \binom{7}{1} + \binom{7}{2} = 3 \cdot \frac{7!}{6!\,1!} + \frac{7!}{5!\,2!} = 3 \cdot 7 + 21 = 42$$

Isso resulta novamente em: $P(B) = \frac{42}{45} = \frac{14}{15}$

O item **b** mostra a simplificação possível na resolução, usando-se a probabilidade de um evento não ocorrer, e ao mesmo tempo destaca a contagem como importante recurso na resolução de problemas de probabilidade.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Escolha alguns exercícios desta sequência para analisar com os estudantes, incentivando-os a argumentar sobre como e por que usaram determinada forma de resolução.

Ao resolver cada atividade desta sequência, faça uma análise como a realizada nos exemplos do tópico "Probabilidade e contagem". Em caso de dúvidas, volte a ler cada um deles.

42 **Em uma cidade de 100 mil habitantes, fez-se um estudo para saber qual era a distribuição dos diversos grupos sanguíneos. Foram feitas análises com mil pessoas e os resultados obtidos foram dispostos no quadro a seguir.** **a)** Não. Porque a amostra representa apenas uma pequena parcela da população.

Grupo sanguíneo	Número de pessoas
A	350
B	116
AB	22
O	512

a) Com essas informações, é possível saber a probabilidade exata de encontrarmos uma pessoa com sangue do tipo B? Por quê?

b) Ao escolhermos uma pessoa ao acaso na cidade, quais das seguintes afirmações seriam verdadeiras em relação a ela? Apenas a segunda e a terceira são verdadeiras.
- A probabilidade de ter sangue do tipo A é de aproximadamente 30%.
- A probabilidade de ter sangue do tipo A é de 35%.
- A probabilidade de ter sangue AB é de cerca de 2%.
- A probabilidade de não ter sangue do tipo O é de 51,2%.

43 **Um cofre tem três rodas na fechadura, e cada uma delas tem 17 letras que vão de A até Q.**

a) Escolhendo uma letra de cada roda, quantos são os códigos possíveis? 4 913 códigos.

b) Uma pessoa esqueceu o segredo, mas sabe que as letras da primeira e da última roda são vogais diferentes e que a letra da segunda roda é consoante. Quantos são os códigos que satisfazem essa condição? 156 códigos.

c) Qual é a probabilidade de essa pessoa acertar já na primeira tentativa? Aproximadamente 3,2%.

44 **Indique as respostas no caderno.**

(Fuvest-SP)

a) Dez meninas e seis meninos participarão de um torneio de tênis infantil. De quantas maneiras distintas essas 16 crianças podem ser separadas nos grupos *A*, *B*, *C* e *D*, cada um deles com 4 jogadores, sabendo que os grupos *A* e *C* serão formados apenas por meninas e o grupo *B*, apenas por meninos? 47 250

b) Acontecida a fase inicial do torneio, a fase semifinal terá os jogos entre Maria e João e entre Marta e José. Os vencedores de cada um dos jogos farão a final. Dado que a probabilidade de um menino ganhar de uma menina é $\frac{3}{5}$, calcule a probabilidade de uma menina vencer o torneio. 35,2%

45 **Para se fazer uma aposta na Mega-Sena, deve-se escolher no mínimo seis números e no máximo vinte números em um espaço amostral {01, 02, 03, 04, 05, ..., 59, 60}.**

Nesse jogo, são sorteados seis números distintos e são premiadas as apostas que contêm quatro (quadra), cinco (quina) ou seis (sena) dos números sorteados. Uma sena é um conjunto de seis números escolhidos de 01 a 60. Calculando o total de combinações possíveis para os seis números em cada sorteio, teremos 50 063 860 possibilidades.

Vamos ver como calcular a probabilidade de alguém ser sorteado com uma quadra em uma aposta mínima (a de seis números). Para acertar uma quadra, mas não uma quina ou sena, quatro dos seis números apostados devem ser sorteados, e os dois outros devem estar entre os 54 números restantes.

Os quatro números podem ser escolhidos de 15 maneiras $\left(\binom{6}{4} = 15\right)$, e os outros dois, de 1431 maneiras $\left(\binom{54}{2} = 1431\right)$. Portanto, há 21465 possibilidades ($15 \cdot 1431 = 21465$) que dariam o prêmio da quadra para o apostador. Isso corresponde à probabilidade de $\frac{21465}{50\,063\,860}$ de ganhar a quadra na Mega-Sena com uma aposta de seis números.

Agora é com você!

a) Faça os cálculos para verificar a probabilidade de um apostador acertar a quina ou a sena com apenas uma aposta de seis números. Quina: 0,00065%; Sena: 0,000002%.

b) Use o que aprendeu para comentar a frase: "Para acertar na Mega-Sena com uma única aposta, tem que ter muita sorte!". Resposta pessoal.

c) Use o que aprendeu para analisar se é verdade que um jogador que aposta vinte números aumenta suas chances de ganhar na Mega-Sena. Resposta pessoal.

46 **Leia novamente a atividade 43. Depois, elabore uma atividade semelhante que envolva segredos de cofres, mas agora formados apenas por números.** Resposta pessoal.

47 **Em certa comunidade, 52% dos habitantes são mulheres e, destas, 2,4% são canhotas. Dos homens, 2,5% são canhotos. Calcule a probabilidade:**

a) de que um indivíduo dessa comunidade, selecionado ao acaso, seja canhoto; 2,448%

b) de que um indivíduo do sexo masculino selecionado ao acaso nessa comunidade seja canhoto. 2,5%

Durante a resolução das atividades, avalie o desempenho dos estudantes não apenas em relação a conceitos e cálculos probabilísticos, mas também quanto aos processos de contagem estudados no capítulo anterior e ao cálculo com fatoriais.

Incentive os estudantes a identificar os momentos em que o uso da calculadora será necessário para realizar alguns cálculos, como é o caso da atividade **47**.

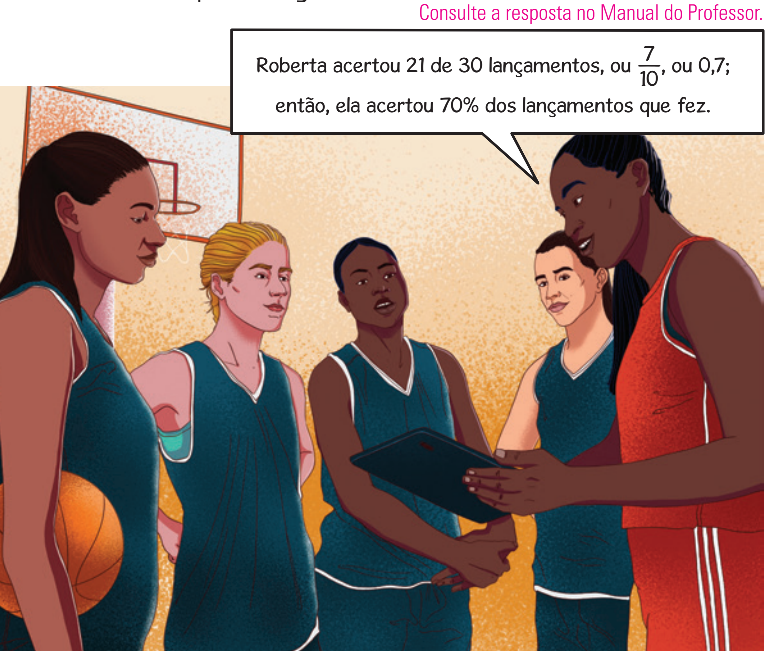
CÁLCULO RÁPIDO

1 Observe o quadro que informa a quantidade de cestas de dois pontos feitas por cinco atletas em um torneio de basquete.

Nome da atleta	Total de acertos	Total de arremessos
Roberta	21	30
Jaqueline	24	40
Paula	10	50
Alice	14	20
Luana	54	60

Observe como Fabiana, a treinadora do time, calculou a porcentagem de acertos de Roberta.

Use a ideia de Fabiana e calcule mentalmente a porcentagem de acerto das demais atletas do time.
Consulte a resposta no Manual do Professor.



@mickart_/ID/BR

2 Determine mentalmente as porcentagens a seguir.

a) 10% de 1200 120

b) 20% de 1200 240

c) 25% de 1200 300

d) 50% de 1200 600

e) 1% de 640 6,4

f) 40% de 640 256

3 Transforme cada fração a seguir em porcentagem.

a) $\frac{12}{20}$ 60%

b) $\frac{8}{20}$ 40%

c) $\frac{10}{20}$ 50%

d) $\frac{5}{25}$ 20%

4 Observe as igualdades e procure identificar os erros cometidos, corrigindo-os.

a) $0{,}18\% = \frac{0{,}18}{100} = 0{,}1800$ $\frac{0{,}18}{100} = 0{,}0018$

b) $\frac{45}{100} = 0{,}45 = 0{,}45\%$ $0{,}45 = 45\%$

c) $1{,}83 = \frac{183}{100} = 18{,}3\%$ $\frac{183}{100} = 183\%$

d) $\frac{0{,}95}{100} = 000{,}95 = 0{,}95$ $\frac{0{,}95}{100} = 0{,}0095$

Lembre-se de que 1 m² = 10 000 cm²; 1 km² = 1 000 000 m²; 1 cm² = 100 mm².

5 Converta:

a) 68 m² em cm²; 680 000 cm²

b) 37,0 km² em m²; 37 000 000 m²

c) 55 678 m² em km²; 0,055678 km²

d) 5,9 cm² em mm²; 590 mm²

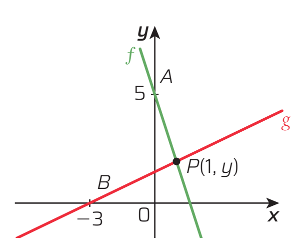
e) 124 603,45 cm² em m². 12,460345 m²

PARA RECORDAR

Você tem estudado muitas coisas. Relembrar algumas delas pode ajudar a avançar.

1 Os gráficos das funções $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + \frac{3}{2}$ estão representados no plano cartesiano a seguir.

Determine as equações das funções f e g, sabendo que o ponto A pertence ao gráfico de f e o ponto B, ao gráfico de g, e que os gráficos dessas funções se intersectam no ponto P. $f(x) = -3x + 5$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

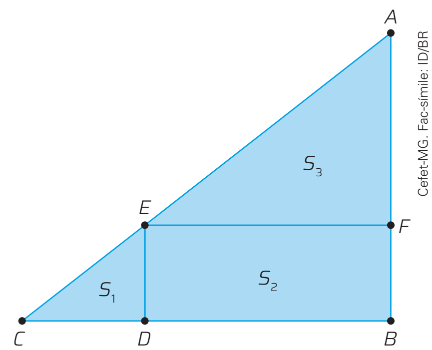


ID/BR

2 **Um pai quer dividir R$ 3 600,00 entre seus três filhos em partes proporcionais à idade deles: 8, 10 e 12 anos. Quanto o filho mais velho receberá a mais do que o filho mais novo?** R$ 480,00

3 **Registre no caderno a alternativa correta.**

(Cefet-MG) A figura abaixo mostra o esboço dos terrenos S_1, S_2 e S_3, em que o quadrilátero *BDEF* é um retângulo e os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$ medem, respectivamente, 30 cm e 60 cm.



Assim, é correto afirmar que a área do terreno: Alternativa **a**.

a) S_3 é igual à área do terreno S_2.

b) S_1 é a metade da área do terreno S_3.

c) S_1 é igual a $\frac{1}{3}$ da área do terreno S_3.

d) S_2 é igual à soma das áreas dos terrenos S_1 e S_3.

4 **Registre a alternativa correta no caderno.**

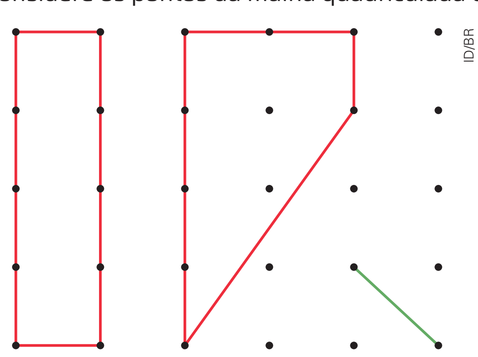
(IFCE) O triângulo *ABC* é retângulo em *A* e tem catetos medindo 12 cm e 24 cm. Os pontos *D*, *E* e *F* são tomados em $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, de tal maneira que *ADEF* é um quadrado. Alternativa **d**.

A área desse quadrado, em centímetro quadrado, vale:

a) 25
b) 49
c) 36
d) 64
e) 81

5 **Indique a alternativa correta no caderno.**

(Famerp-SP) Considere os pontos da malha quadriculada da figura.



Se a soma das áreas dos polígonos indicados em vermelho é igual a 16 cm², então, a medida do segmento de reta indicado em verde é igual a Alternativa **d**.

a) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ cm

b) $4\sqrt{2}$ cm

c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm

d) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm

e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

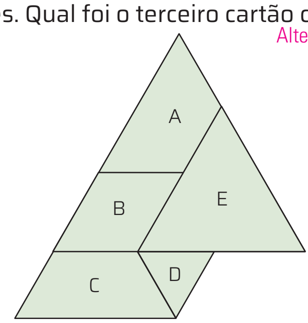
1 **José guarda suas meias e luvas em uma mesma gaveta do armário. Ele tem seis pares de meias azuis, cinco pares de meias verdes, quatro pares de luvas pretas e três pares de luvas cinza. Infelizmente, a gaveta está bastante desarrumada, e as peças estão todas misturadas. Certa manhã de inverno, estava ainda escuro e faltou luz. José precisava de um par de meias e outro de luvas e não conseguia distinguir uma meia de uma luva. Qual é o mínimo de peças que ele tem de tirar da gaveta para ter a certeza de que pegou um par de meias iguais e um par de luvas da mesma cor?**

30 peças.

2 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Obmep) Cinco cartões iguais A, B, C, D e E, em forma de triângulo equilátero, foram colados em uma cartolina, um por vez. A figura mostra como ficaram esses cartões. Qual foi o terceiro cartão colado?

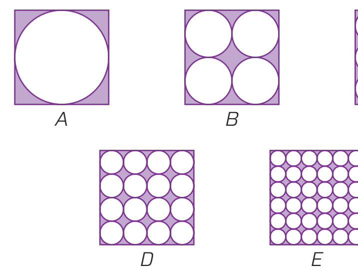
Alternativa **b**.



Obmep. Fac-símile: ID/BR

a) A b) B c) C d) D e) E

3 **As figuras de *A* até *E* representam alvos de um jogo de dardos.**



ID/BR

Analisando as figuras, observamos que todas têm a mesma área nas regiões brancas e roxas. Portanto, qualquer um dos alvos pode ser escolhido.

Os pontos nesse jogo são marcados de acordo com estas regras:

- 1 ponto para quem acerta o dardo dentro de um círculo;
- nenhum ponto para quem acerta o dardo dentro do quadrado, mas fora de um círculo.

Se o dardo for atirado fora do quadrado, pode-se jogá-lo mais uma vez.

Nessas condições, qual dos cinco alvos você escolheria para jogar? Como você justifica sua resposta matematicamente?

Mapas conceituais são representações gráficas semelhantes a diagramas. Eles mostram as relações entre conceitos, que são conectados por palavras, e apresentam uma estrutura que expõe desde os conceitos mais abrangentes até os menos inclusivos. São muito úteis como instrumento para facilitar o aprendizado, que é sistematizado em conteúdo significativo para o estudante. Também são utilizados para auxiliar na ordenação e na sequência hierarquizada dos conteúdos de ensino, possibilitando ao estudante a organização das ideias centrais daquilo que aprendeu em uma aula, em um capítulo do livro ou em um trimestre letivo, por exemplo.

PALAVRAS-CHAVE

Converse com o professor a respeito da ideia de mapa conceitual.

Em geral, para fazer um mapa conceitual, primeiro registramos o tema principal no topo do mapa, em um conceito simples, dentro de um retângulo principal ou de outras figuras geométricas. Em seguida, vêm os outros conceitos que têm alguma relação com o assunto inserido no retângulo principal; são escritos dentro de outras figuras e unidos à figura principal com setas descritivas que estabelecem conexões entre os elementos conceituais.

Use o mapa conceitual a seguir para organizar uma síntese do que estudou neste capítulo. Copie-o no caderno, aproveitando as informações que já foram dadas, e complete-o com o que falta.

UM ESTUDO DA PROBABILIDADE

divide-se em

- A linguagem das probabilidades
  - tem termos principais
    - ///////////
    - ///////////
    - Evento
      - que podem ser
        - Simples
        - ///////////
        - ///////////
- Probabilidade
  - pode ser dividida em
    - Probabilidade de ocorrer um evento *A*
    - Probabilidade de não ocorrer um evento
    - /////////
    - /////////
    - /////////

MATEMÁTICA E SOCIEDADE

O objetivo desta seção é ampliar a formação geral dos estudantes ao desenvolver habilidades de leitura de textos informativos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento e propor que vivenciem um processo investigativo.

O objeto digital acrescenta conhecimentos sobre IDH na medida em que é possível observar países que estão na mesma faixa desse índice.

Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) dos países em 2022

Esta seção favorece as competências gerais **1**, **2**, **4**, **9** e **10** propostas pela BNCC ao valorizar conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo social para entender e explicar a realidade exercitando a empatia e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, agindo com solidariedade. Além disso, possibilita uma integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com o tema contemporâneo transversal Educação em Direitos Humanos. Podem ser propostos trabalhos com os professores de História e Sociologia, a fim de explorar as competências **1**, **5** e **6** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e contribuir para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT104**, pois solicita aos estudantes que interpretem o IDH, investigando os processos de cálculo desse número, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

ID/BR

Índice de Desenvolvimento Humano (IDH)

Você conhece o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH)? De acordo com a Organização das Nações Unidas (ONU), o IDH é uma métrica abrangente que avalia o desenvolvimento humano em uma escala de 0 a 1. Esse índice é calculado utilizando dados sobre renda, saúde e educação da população em determinada região e período.

E qual é o IDH do Brasil? Leia o texto a seguir para saber mais a respeito dessa questão e, depois, converse com os colegas e o professor.

IDH do Brasil sobe em 2022, mas país cai 2 posições em *ranking* da ONU

País ficou em 89º lugar, entre 193 nações

O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) do Brasil cresceu de 2021 para 2022, ao passar de 0,756 para 0,760, segundo dados divulgados nesta quinta-feira (13) [de março de 2024] pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (Pnud).

Por outro lado, o Brasil caiu duas posições no *ranking* global da organização da ONU, passando da 87ª para a 89ª posição, entre 193 nações. Em 2020, o Brasil estava na 84ª colocação, com 0,758 de IDH. Com isso, o país ainda não retomou o [...] índice de 2019, antes da pandemia de covid-19, quando estava com o IDH em 0,764.

O IDH compara indicadores como riqueza, alfabetização, educação, esperança de vida, natalidade e outros, com o intuito de avaliar o bem-estar de uma população. Ele varia de 0 a 1 e é divulgado pelo Pnud em seu relatório anual. Quanto mais próximo de 1, maior é [o] desenvolvimento humano do país.

Entre 1990 e 2022, o IDH do Brasil cresceu 22,6%, registrando quedas apenas nos anos de 2015, 2020 e 2021. Os dados do Pnud ainda mostraram que, desde a pandemia, vem crescendo a distância entre IDHs de países ricos e pobres, revertendo a tendência de aproximação desses índices que vinha sendo observada desde 1990.

Proteção social

A gerente de Programas, Incidências e Campanhas da Oxfam Brasil, Maitê Gauto, destacou que o Brasil vem, desde 2015, em um período de dificuldades econômicas, agravadas pela pandemia.

[...]

Para a especialista da Oxfam Brasil, organização que atua em temas como desigualdade e justiça social, nem mesmo políticas de transferência de renda [...] foram capazes de retomar o IDH [...] do nível pré-pandêmico.

Comparação internacional

Na América Latina e Caribe, o Brasil ficou na 17ª posição, atrás de países como México (77ª, no *ranking* global), Equador (83ª), Cuba (85ª) e Peru (87ª). O topo da lista dos países latino-americanos e caribenhos é formado por Chile (44ª), Argentina (48ª), São Cristóvam e Neves (51ª), Uruguai (52ª) e Antígua e Barbuda (54ª). Os países com piores IDHs da região são Haiti (158ª), Honduras (138ª), Guatemala (136ª), Nicarágua (130ª) e El Salvador (127ª).

Já o *ranking* global é liderado por Suíça, Noruega, Islândia, Hong Kong, Dinamarca e Suécia. Os países com os piores índices são Somália e Sudão do Sul. [...]

León, Lucas Pordeus. IDH do Brasil sobe em 2022, mas país cai 2 posições em *ranking* da ONU. *Agência Brasil*, 14 mar. 2024. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/direitos-humanos/noticia/2024-03/idh-do-brasil-sobe-em-2022-mas-pais-cai-2-posicoes-em-ranking-da-onu. Acesso em: 28 set. 2024.

Não escreva no livro.

Conectando ideias

1 **Como o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) reflete as mudanças sociais e econômicas no Brasil ao longo dos anos, especialmente considerando a posição do país no *ranking* global da ONU?**

1. No caso do Brasil, o IDH reflete como esses aspectos melhoraram ou pioraram ao longo do tempo. Quando o IDH sobe, isso geralmente indica avanços sociais e econômicos, como melhorias na educação e na saúde da população, além de aumento na renda média. No entanto, quedas no IDH podem apontar desafios econômicos ou sociais a serem enfrentados, como crises econômicas ou problemas de acesso a serviços básicos. A posição do Brasil no *ranking* global da ONU mostra como o país se compara com outras nações no que se refere ao desenvolvimento humano, além de ser importante para entendermos nosso progresso em relação aos demais países.

2 **Releia o texto e reflita sobre a relação entre o cálculo do IDH e o bem-estar da população de determinado lugar. Em seguida, faça o que se pede.**

a) Reúnam-se em grupo de três pessoas e façam uma pesquisa sobre o décimo Objetivo de Desenvolvimento Sustentável (ODS): "Reduzir a desigualdade dentro dos países e entre eles". Resposta pessoal.

b) Organizem uma roda de conversa para analisar e debater o que é preciso fazer para que esse objetivo seja atingido. De que maneira você, sua comunidade, o Brasil e o mundo podem contribuir para a diminuição das desigualdades e para o acesso de todos à saúde e à educação de qualidade? Resposta pessoal.

3 **Analise as charges a seguir.**

Duke/Acervo do cartunista

Charge de Duke, 2019.

Arionauro/Acervo do cartunista

Desigualdade social, *charge* de Arionauro, 2016.

Agora, em uma roda de conversa, explique aos colegas e ao professor quais as semelhanças e as diferenças que você percebeu nas charges apresentadas. Durante a troca de ideias, argumente sobre os elementos usados em cada charge para representar a desigualdade social. Respostas pessoais.

Não escreva no livro.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Nesta seção, selecionamos problemas com enunciados longos e muitas informações. Questões desse tipo costumam exigir uma leitura cuidadosa e uma estratégia de resolução, pois o tempo disponível para realizar uma prova oficial é limitado. Portanto, é necessário ler a atividade e identificar as informações necessárias para sua resolução, sem se ater a dados que podem confundir e consumir muito tempo.

Uma estratégia de leitura possível para questões desse tipo pode ser resumida em três etapas.

1. Leia a questão por inteiro e identifique a pergunta do problema.
2. Releia a atividade, anotando **apenas** as informações necessárias para sua resolução.
3. Elabore uma estratégia de resolução e execute-a.

Vamos testar essa estratégia? Leia a atividade a seguir, realize as etapas **1**, **2** e **3** sugeridas acima e só depois confira a resolução apresentada. Combinado?

VESTIBULAR EM CONTEXTO

(Acafe-SC) O ano de 2023 vem apresentando números significativos nos casos de dengue no Estado de Santa Catarina. Até o dia 25 de abril, o relatório apresentado pela Diretoria de Vigilância Epidemiológica apontou 15 604 casos confirmados da doença, somente neste ano. O processo de transmissão da dengue começa a partir de uma pessoa já infectada com o vírus. O mosquito *Aedes aegypti* pica o infectado e leva consigo o vírus que é transmitido para outras pessoas que forem picadas por ele. Mosquitos fêmeas são os únicos que picam humanos, por precisarem extrair do sangue proteínas que ajudam na produção dos ovos. Sessenta por cento das larvas, oriundas de ovos de uma fêmea contaminada, já estarão contaminadas ao eclodirem, isso se chama transmissão transovariana. A probabilidade de uma larva ser um mosquito macho é de 50% e, por fatores ambientais, 10% dos ovos depositados pelo mosquito não chegam na fase adulta.

Determine a probabilidade de um homem adquirir o vírus da dengue na primeira picada de um mosquito *Aedes aegypt*i proveniente do ciclo reprodutivo de uma fêmea contaminada.

a) 3%
b) 30%
c) 27%
d) 15%

Resolução

Vamos resolver essa atividade utilizando a estratégia de leitura apresentada.

1. Leia a questão por inteiro e identifique a pergunta do problema.

   A questão solicita a probabilidade de um homem adquirir o vírus da dengue na primeira picada por um mosquito fêmea contaminado.

2. Releia a atividade, anotando apenas as informações necessárias para sua resolução.
   - A probabilidade de uma larva ser um mosquito macho é de 50% e, consequentemente, a probabilidade de ser um mosquito fêmea também é de 50%.
   - Sessenta por cento das larvas, oriundas de ovos de uma fêmea contaminada, já estarão contaminadas ao eclodirem.
   - A probabilidade de os ovos depositados pelo mosquito não chegarem à fase adulta é de 10%, e, por isso, podemos concluir que a probabilidade de um mosquito estar na fase adulta é de 90%.

3. Elabore uma estratégia de resolução e execute-a.

   Para responder à questão do problema, devemos calcular a probabilidade P de ocorrer a seguinte situação: a larva que se tornará o mosquito a picar o homem deve estar contaminada, esse mosquito deve ser fêmea e deve chegar à fase adulta. Considerando as informações selecionadas anteriormente, temos que:

$$P = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}27 = 27\%$$

Portanto, a probabilidade pedida é 27% e a alternativa **c** é a correta.

Explorando a estratégia

1 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(Enem) Ao realizar o cadastro em um aplicativo de investimentos, foi solicitado ao usuário que criasse uma senha, sendo permitido o uso somente dos seguintes caracteres:

- algarismos de 0 a 9;
- 26 letras minúsculas do alfabeto;
- 26 letras maiúsculas do alfabeto;
- 6 caracteres especiais !, @, #, $, *, &.

Três tipos de estruturas para senha foram apresentadas ao usuário:

- tipo I: formada por quaisquer quatro caracteres distintos, escolhidos dentre os permitidos;
- tipo II: formada por cinco caracteres distintos, iniciando por três letras, seguidas por um algarismo e, ao final, um caractere especial;
- tipo III: formada por seis caracteres distintos, iniciando por duas letras, seguidas por dois algarismos e, ao final, dois caracteres especiais.

Considere p_1, p_2 e p_3 as probabilidades de se descobrirem ao acaso, na primeira tentativa, as senhas dos tipos I, II e III, respectivamente.

Nessas condições, o tipo de senha que apresenta a menor probabilidade de ser descoberta ao acaso, na primeira tentativa, é o Alternativa **a**.

a) tipo I, pois $p_1 < p_2 < p_3$.
b) tipo I, pois tem menor quantidade de caracteres.
c) tipo II, pois tem maior quantidade de letras.
d) tipo III, pois $p_3 < p_2 < p_1$.
e) tipo III, pois tem maior quantidade de caracteres.

2 **Registre a alternativa correta no caderno.**

(UERR) Determinado partido político decidiu apresentar nomes para concorrer a uma vaga de deputado estadual e a uma vaga na Assembleia Legislativa de Boa Vista, no ano de 2022. Dentre os filiados ao partido, trinta possuíam as qualificações necessárias para concorrer a essas duas vagas; eles foram agrupados de acordo com suas autodeclaradas etnias, conforme tabela a seguir. Esses filiados foram apresentados na convenção do partido para a escolha de duas chapas para concorrerem aos dois cargos; cada chapa é composta de dois nomes (o titular e o vice).

Número de candidatos	Etnia
12	pardos
6	indígenas
5	negros
7	brancos

Na situação hipotética apresentada no texto, considere que, dentre os quatro candidatos escolhidos, exatamente dois devem ser de etnia indígena. Nesse caso, o número de maneiras de se escolherem os quatro candidatos é igual a: Alternativa **d**.

a) $30 \times 21 \times 2 \times 7$.
b) $30 \times 2 \times 23$.
c) $30 \times 23 \times 21$.
d) $23 \times 15 \times 12$.
e) $23 \times 21 \times 7$.

TABELA TRIGONOMÉTRICA

Ângulo (em grau)	sen	cos	tg
1	0,01745	0,99985	0,01746
2	0,03490	0,99939	0,03492
3	0,05234	0,99863	0,05241
4	0,06976	0,99756	0,06993
5	0,08716	0,99619	0,08749
6	0,10453	0,99452	0,10510
7	0,12187	0,99255	0,12278
8	0,13917	0,99027	0,14054
9	0,15643	0,98769	0,15838
10	0,17365	0,98481	0,17633
11	0,19087	0,98163	0,19438
12	0,20791	0,97815	0,21256
13	0,22495	0,97437	0,23087
14	0,24192	0,97030	0,24933
15	0,25882	0,96593	0,26795
16	0,27564	0,96126	0,28675
17	0,29237	0,95630	0,30573
18	0,30902	0,95106	0,32492
19	0,32557	0,94552	0,34433
20	0,34202	0,93969	0,36397
21	0,35837	0,93358	0,38386
22	0,37461	0,92718	0,40403
23	0,39073	0,92050	0,42447
24	0,40674	0,91355	0,44523
25	0,42262	0,90631	0,46631
26	0,43837	0,89879	0,48773
27	0,45399	0,89101	0,50953
28	0,46947	0,88295	0,53171
29	0,48481	0,87462	0,55431
30	0,50000	0,86603	0,57735
31	0,51504	0,85717	0,60086
32	0,52992	0,84805	0,62487
33	0,54464	0,83867	0,64941
34	0,55919	0,82904	0,67451
35	0,57358	0,81915	0,70021
36	0,58779	0,80903	0,72654
37	0,60182	0,79864	0,75355
38	0,61566	0,78801	0,78129
39	0,62932	0,77715	0,80978
40	0,64279	0,76604	0,83910
41	0,65606	0,75471	0,86929
42	0,66913	0,74314	0,90040
43	0,68200	0,73135	0,93252
44	0,69466	0,71934	0,96569
45	0,70711	0,70711	1,00000

Ângulo (em grau)	sen	cos	tg
46	0,71934	0,69466	1,03553
47	0,73135	0,68200	1,07237
48	0,74314	0,66913	1,11061
49	0,75471	0,65606	1,15037
50	0,76604	0,64279	1,19175
51	0,77715	0,62932	1,23499
52	0,78801	0,61566	1,27994
53	0,79864	0,60182	1,32704
54	0,80903	0,58779	1,37638
55	0,81915	0,57358	1,42815
56	0,82904	0,55919	1,48256
57	0,83867	0,54464	1,53986
58	0,84805	0,52992	1,60033
59	0,85717	0,51504	1,66428
60	0,86603	0,50000	1,73205
61	0,87462	0,48481	1,80405
62	0,88295	0,46947	1,88073
63	0,89101	0,45399	1,96261
64	0,89879	0,43837	2,05030
65	0,90631	0,42262	2,14451
66	0,91355	0,40674	2,24604
67	0,92050	0,39073	2,35585
68	0,92718	0,37461	2,47509
69	0,93358	0,35837	2,60509
70	0,93969	0,34202	2,74748
71	0,94552	0,32557	2,90421
72	0,95106	0,30902	3,07768
73	0,95630	0,29237	3,27085
74	0,96126	0,27564	3,48741
75	0,96593	0,25882	3,73205
76	0,97030	0,24192	4,01078
77	0,97437	0,22495	4,33148
78	0,97815	0,20791	4,70463
79	0,98163	0,19087	5,14455
80	0,98481	0,17365	5,67128
81	0,98769	0,15643	6,31375
82	0,99027	0,13917	7,11537
83	0,99255	0,12187	8,14435
84	0,99452	0,10453	9,51436
85	0,99619	0,8716	11,43010
86	0,99756	0,06976	14,30070
87	0,99863	0,05234	19,08110
88	0,99939	0,03490	28,63630
89	0,99985	0,01745	57,29000

RESPOSTAS DAS ATIVIDADES DE CÁLCULO

UNIDADE 1 – Matemática financeira e funções: exponencial e logarítmica

CAPÍTULO 1 – Função exponencial

Tecnologia (p. 13)

1. Aproximadamente 53,96; aproximadamente 0,10; aproximadamente 278,38; aproximadamente 3,42.

Problemas e exercícios propostos (p. 14)

1. a) 4
   b) Aproximadamente 0,21.
   c) Aproximadamente 1,22.
   d) Aproximadamente 2,17.
2. a) $\sqrt[3]{36}$
   b) $\frac{\sqrt[4]{5}}{5}$
   c) $\sqrt[3]{49}$
   d) $\frac{\sqrt[5]{25}}{5}$
   e) $\sqrt[3]{10}$
   f) $\sqrt[3]{\frac{36}{49}}$
   g) $\sqrt[5]{8}$
   h) $\sqrt[3]{\frac{100}{9}}$
3. a) 4
   b) $3\sqrt[4]{9}$ ou $3\sqrt{3}$.
   c) $\frac{1}{125}$
   d) $\frac{1}{11}$
   e) $\frac{1}{8}$
   f) $\frac{1}{25}$
4. a) $\sqrt[6]{5}$
   b) $\sqrt[10]{216}$
   c) $3^{6\sqrt{2}}$
   d) 2^x
   e) $\frac{43}{7}$
   f) $-\frac{71}{2}$
6. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{7x-4}$
   b) 5^{2x-4}
7. b) 100 000; 10^{18}; 10^{100}.

Problemas e exercícios propostos (p. 18)

11. a) $m > 1$
    b) $0 < m < \frac{1}{3}$
13. Alternativa **a**.
14. Alternativa **d**.
15. Alternativa **d**.
17. a) C_1 = R\$ 2 240,00
    b) C_5 = R\$ 3 524,68; C_{10} = R\$ 6 211,70; C_{20} = R\$ 19 292,59.
    c) C_1 = R\$ 2 180,00; C_5 = R\$ 3 077,25; C_{10} = R\$ 4 734,73; C_{20} = R\$ 11 200,82.
    e) 16 anos.
18. $x = 243$ kg
19. Alternativa **e**.

Problemas e exercícios propostos (p. 25)

22. a) $S = \{1, 4\}$
    b) $S = \{4\}$
    c) $S = \{-12\}$
    d) $S = \{2\}$
    e) $S = \{4\}$
    f) $S = \{3\}$
    g) $S = \{1\}$
    h) $S = \{1, 2\}$
    i) $S = \{-3\}$
    j) $S = \{-1, 0\}$
23. Alternativa **e**.
24. a) 3
    b) 4
25. Alternativa **e**.
26. 2, 4 e 6.
27. Alternativa **a**.
28. Alternativa **b**.
29. Alternativa **e**.
30. Alternativa **a**.
31. a) $150\sqrt{2}$ mg
    b) $50\sqrt{2}$ mg
32. Alternativa **c**.

Problemas e exercícios propostos (p. 27)

33. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
    b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
    c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
    d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 3\}$
    e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
    f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \frac{6}{5}\right\}$
    g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
    h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$
34. a) $S = [2, +\infty[$
    b) $S =]-\infty, 2]$
    c) $S =]-\infty, 0]$
35. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$
    b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$
    c) $D(f) = \mathbb{R}$
    d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$
36. Alternativa **d**.
37. Alternativa **a**.
38. Alternativa **d**.

Cálculo rápido (p. 28)

1. a) 1 000
   b) 10 000
   c) 0,01
   d) 0,001
   e) 125
   f) 625
   g) 0,2
   h) 0,04
   i) 0,008
2. a) 3
   b) 6
   c) -4
   d) -2
   e) 3
   f) 4
3. a) $\frac{1}{2}$
   b) 4
   c) $\frac{1}{4}$
   d) 5
   e) $\frac{1}{3}$
   f) 2

Para recordar (p. 28)

1. $-0{,}25$
2. 1
4. a) $x = 204$
   b) $x = 2\sqrt{5}$; $y = 4$.

Foco no raciocínio lógico (p. 29)

1. 18 maneiras.
2. 17 triângulos.

CAPÍTULO 2 – Logaritmo e função logarítmica

Problemas e exercícios propostos (p. 37)

1. a) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{8}{125} = 3$
   b) $\log_{32} 16 = \frac{4}{5}$
   c) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$
   d) $\log_8 4 = \frac{2}{3}$
2. a) 4
   b) 3
3. a) 1
   b) 2
   c) -1
   d) 4
4. a) 8
   b) -5
   c) -3
   d) -6
   e) $\frac{10}{3}$
   f) -4
5. a) $x > \frac{1}{2}$
   b) $x < 2$
   c) $1 < x < 3$ e $x \neq 2$
   d) $2 < x < 4$ e $x \neq 3$
6. a) $x = 5\sqrt[3]{5}$
   b) $x = \frac{3}{2}$
   c) $x = 2\sqrt{2}$
   d) $x = 25$
8. a) $\frac{109}{2}$
   b) 2

9. a) 2
   b) 0
10. Alternativa **d**.
11. Alternativa **b**.

Problemas e exercícios propostos (p. 41)

12. a) $\log_a m + \log_a n - \log_a p - \log_a q$
   b) $\log_a 3 + 2\log_a m + 2\log_a (n+1) - 3\log_a (m+2) - \log_a (n-1)$
   c) $\frac{1}{2}\log_a 5 + \frac{1}{3}\log_a (m+n) - \frac{1}{3}\log_a 2 - \frac{1}{2}\log_a (m-n)$
   d) $\frac{2}{3}\log_a (m-1) - \frac{1}{6}\log_a n + \frac{11}{4}$
13. Alternativa **a**.
14. Alternativa **c**.
15. Alternativa **c**.
16. Alternativa **b**.
17. Alternativa **d**.
18. Alternativa **d**.
19. a) Aproximadamente 1,079.
   b) Aproximadamente 2,097.
   c) Aproximadamente 3,556.
   d) Aproximadamente −1,967.
   e) Aproximadamente 0,540.
   f) Aproximadamente 0,678.
20. a) $S = \{3\}$
   b) $S = \{-5, 5\}$
   c) $S = \left\{\frac{1}{20\sqrt{10}}\right\}$
   d) $S = \left\{\frac{6}{7}\right\}$
   e) $S = \{10\}$
21. a) $S = \{(6, -10)\}$
   b) $S = \left\{\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)\right\}$
   c) $S = \{(10^{20}, 10^{10}); (10^{10}, 10^{20})\}$
   d) $S = \{(2, 1)\}$
   e) $S = \{(-1, -3)\}$
   f) $S = \left\{\left(1, \frac{1}{3}\right)\right\}$
22. 2
23. a) $\frac{3(m+n)}{2(m-n)}$
   b) $\frac{m^4(m+1)}{n^2(m+8)}$
   c) $\frac{\sqrt{n}}{(m^2+1)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{(n+1)^2}}$
   d) $\frac{\sqrt{m^2+1}}{a^3 \cdot \sqrt[3]{(n^2+1)} \cdot \sqrt[4]{(m+1)}}$

Tecnologia (p. 42)

1. a) Aproximadamente 0,698970004.
   b) Aproximadamente 0,903089987.
   c) Aparecerá na tela “não existe”, “entrada inválida”, “erro de domínio” ou alguma mensagem similar.
   d) Aproximadamente -0,301029996.
2. 177,83

Problemas e exercícios propostos (p. 44)

24. a) $\frac{1}{3}$
   b) $\frac{1}{2}$
   c) $\frac{1}{3}$
   d) 3
25. Alternativa **c**.
26. a) $S = \{83\}$
   b) $S = \{2\}$
   c) $S = \{5\}$
   d) $S = \{\sqrt{3}\}$
   e) $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$
   f) $S = \{2, 4\}$
   g) $S = \left\{\frac{1}{16}, 16\right\}$
   h) $S = \{2\sqrt[3]{4}\}$
27.

log *x*	1,176	1,301	1,398	1,146	1,653	1,431	1,690	1,748
x	15	20	25	14	45	27	49	56

28. a) Aproximadamente 1,5850.
   b) Aproximadamente 5,9073.
   c) Aproximadamente 1,3634.
   d) Aproximadamente 1,354.
29. a) $\frac{b}{a}$
   b) $\frac{a}{b}$
   c) $\frac{1+a}{2a}$
   d) $\frac{1+a+b}{a+b}$
30. a) 0,33333...
   b) 0,5
   c) 0,33333...
   d) 3
31. Alternativa **c**.
32. Aproximadamente 11,9 anos.
33. a) 20 anos.
   b) 84 anos.

Problemas e exercícios propostos (p. 49)

36. $a = 2$ e $b = 1$
37. $a = -1$ e $b = 4$
38. Alternativa **c**.
39. 8,73%
40. 7 placas de vidro.
41. Alternativa **d**.
42. Alternativa **a**.
43. Alternativa **c**.
44. Alternativa **e**.
45. Alternativa **b**.

Cálculo rápido (p. 51)

1. a) $x = 4$
   b) $x = \frac{1}{64}$
   c) $x = 1000$
   d) $x = \frac{1}{2}$
   e) $x = 2$
   f) $x = 2^{16}$

2. a) $x = 1$
b) $x = -5$
c) $x = -2$
d) $x = 0$
e) $x = 2$
f) $x = 6$

3. a) $x = \frac{1}{9}$
b) $x = \sqrt{2}$
c) $x = 4$
d) $x = \frac{1}{4}$
e) $x = 1$
f) $x = 50$

Para recordar (p. 52)

1. 6 números.
2. a) $f(2n) = 1$; $f(2n + 1) = 2$.
b) $\text{Im}(f) = \{1, 2\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é par}\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é ímpar}\}$
3. Alternativa **d**.
4. Alternativa **a**.
6. a) 27
b) 22,4
c) 22,75
7. Aproximadamente 27% de R$ 230,00.
8. Alternativa **d**.
9. 7 minutos.

CAPÍTULO 3 – Matemática Financeira

Problemas e exercícios propostos (p. 61)

1. Alternativa **b**.
2. 2,85 salários mínimos.
3. 1,63 na moeda local.
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **b**.
6. Alternativa **c**.
7. Alternativa **b**.
8. Alternativa **a**.
9. Alternativa **c**.
10. Alternativa **d**.

Problemas e exercícios propostos (p. 69)

13. R$ 440,00
14. Alternativa **e**.
15. R$ 1800,00
16. R$ 19 038,32
17. R$ 2 528,41
18. 4 meses.
20. Alternativa **c**.
21. Alternativa **b**.

Tecnologia (p. 70)

1. a) R$ 5 308,23
b) R$ 308,23
3. a) Aproximadamente 17 meses.
b) Aproximadamente 3,08%.
c) Aproximadamente R$ 6 863,04.

Problemas e exercícios propostos (p. 76)

22. a) 10,35
b) 11,27
24. 8,5 anos.
25. R$ 4 000,00
26. R$ 25,00
27. R$ 8 100,00
28. R$ 359 870,43
30. R$ 19 544,88
31. $t = 1$; $i = 9\%$; valor depreciado: R$ 1080,00; valor residual: R$ 10 920,00.
$t = 2$; $i = 9\%$; valor depreciado: R$ 982,20; valor residual: R$ 9 937,20.
$t = 3$; $i = 9\%$; valor depreciado: R$ 894,35; valor residual: R$ 9 042,85.
$t = 4$; $i = 9\%$; valor depreciado: R$ 813,86; valor residual: R$ 8 228,99.
32. Alternativa **e**.
33. Alternativa **b**.
34. Alternativa **d**.

Cálculo rápido (p. 78)

1. a) 300
b) 45
c) 1275
2. a) 90
b) 71,2
c) 897
d) 75
e) 30
f) 81
3. a) 200
b) 20
c) 16
d) 150
4. a) 0,4; 0,04; 0,004.
b) 0,004; 0,0004; 0,00004.
c) 6,4; 0,64; 0,064.
d) 0,101; 0,0101; 0,00101.
e) 13; 1,3; 0,13.
f) 1,02; 0,102; 0,0102.
g) 0,04; 0,004; 0,0004.
h) 10,2; 1,02; 0,102.
i) 0,64; 0,064; 0,0064.
5. a) 40; 400; 4 000.
b) 0,4; 4; 40.
c) 640; 6 400; 64 000.
d) 10,1; 101; 1 010.
e) 1300; 13 000; 130 000.
f) 102; 1020; 10 200.
g) 4; 40; 400.
h) 1020; 10 200; 102 000.
i) 64; 640; 6 400.
6. a) 1,5494
b) 154,94
c) 0,15494
d) 15 494
e) 15,494
f) 154,94
7. a) 0,6
b) 0,06
c) 0,04
d) 0,04

Para recordar (p. 78)

1. $D(h) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leq \frac{3}{2}\right\}$
2. a) R$ 8,00
b) R$ 2 000,00
3. a) $(4, -4)$
b) $(-2, 2)$
4. Alternativa **b**.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 82)

1. Alternativa **a**.
2. Alternativa **e**.
3. Alternativa **d**.

UNIDADE 2 – Geometria plana

CAPÍTULO 4 – Geometria euclidiana

Problemas e exercícios propostos (p. 90)

1. a) 8 cm
b) 10 cm
c) 24 cm
2. 17 km
3. 64 cm
4. 15 cm
5. 18 cm
6. a) 50 cm

Problemas e exercícios propostos (p. 94)

8. $x = 4$; $y = 6,6$.
9. $x = 6,5$
10. 12 cm
11. lote 1: 18 m; lote 2: 24 m.
12. a) $z = 32,5$ m, $y = 39$ m e $x = 45,5$ m.
13. Alternativa **e**.

Problemas e exercícios propostos (p. 96)

14. a) $x = 10$
b) $x = 7,5$
15. 5,4 m
16. 24 cm
17. Alternativa **c**.

Problemas e exercícios propostos (p. 98)

18. a) $4\sqrt{3}$ cm²
b) 36 cm²
c) 204 m²
d) 108 m²
e) 96 m²
19. $\frac{1}{4} = 0,25$
20. Alternativa **e**.
21. 16 cm²
22. Alternativa **b**.
23. Alternativa **d**.
24. Alternativa **d**.

Cálculo rápido (p. 99)

1. a) 6
b) 14
c) 14
d) 12,5
e) 9
2. 0,55 m; 5,5 m; 5 500 m; 55 m.
3. 320 000 cm; 0,032 cm; 3 200 cm; 3,2 cm.

4. 45 000 cm^2; 420 000 cm^2; $4{,}2 \cdot 10^9$ cm^2; 420 cm^2.
5. 0,67 m^2; 670 000 m^2; 670 000 000 m^2; 0,000067 m^2.

Para recordar (p. 99)

1. R$ 128,00
3. Aproximadamente 29 m.
4. Alternativa **b**.
5. 60 cm^2
6. Alternativa **a**.
7. Alternativa **c**.
8. Alternativa **b**.

CAPÍTULO 5 – Geometria das transformações

Problemas e exercícios propostos (p. 112)

3. Alternativa **b**.

Problemas e exercícios propostos (p. 126)

15. $\frac{4}{9}$
16. a) $k = \frac{3}{2}$
    b) $x = 3$, $y = 2{,}4$, $z = 6$.
17. c) $\frac{1}{2}$
19. 104 cm

Cálculo rápido (p. 128)

1. a) 7 e 8.
   b) 4 e 5.
   c) 2 e 3.
   d) 5 e 6.
   e) 9 e 10.
   f) 10 e 11.
2. a) $5\sqrt{2}$
   b) $2\sqrt{6}$
   c) $2\sqrt{2}$
   d) $4\sqrt{2}$
   e) $3\sqrt{10}$
   f) $2\sqrt{30}$
3. a) 10 cm^2
   b) 35 cm^2
   c) 15 cm^2
   d) 36 cm^2

Para recordar (p. 128)

1. a) 130°
   b) 80°
2. 18 unidades de área.
3. Alternativa **c**.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 132)

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **e**.

UNIDADE 3 – Trigonometria

CAPÍTULO 6 – Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Problemas e exercícios propostos (p. 142)

1. a) $\text{sen}\,\widehat{B} = \frac{4}{5}$; $\cos\widehat{B} = \frac{3}{5}$;
   $\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{4}{3}$; $\cos\widehat{C} = \frac{4}{5}$;
   $\text{sen}\,\widehat{C} = \frac{3}{5}$; $\text{tg}\,\widehat{C} = \frac{3}{4}$.
   b) $\text{sen}\,\widehat{P} = \frac{5}{13}$; $\cos\widehat{P} = \frac{12}{13}$;
   $\text{tg}\,\widehat{P} = \frac{5}{12}$; $\cos\widehat{Q} = \frac{5}{13}$; $\text{sen}\,\widehat{Q} = \frac{12}{13}$;
   $\text{tg}\,\widehat{Q} = \frac{12}{5}$.
2. a) $x = 12$
   b) $x = 12$
   c) $x = 10 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
3. $\frac{40}{3}$ cm e $\frac{50}{3}$ cm.
4. 30° e 60°.
5. $12 \cdot (1 + \sqrt{3})$ m
6. Alternativa **a**.
7. a) $A = \frac{n}{4 \cdot \text{tg}\left(\frac{180°}{n}\right)} \cdot x^2$
   b) Aproximadamente 618 cm^2.
8. $AH = \frac{8\sqrt{33}}{7}$ cm; $CH = \frac{66}{7}$ cm.
9. $h_1 = 3$ cm e $h_2 = 4$ cm.
10. $P = 44$ cm e $h = 4\sqrt{3}$ cm.
11. Alternativa **c**.
12. Alternativa **d**.
13. Alternativa **c**.
14. Alternativa **c**.
15. Aproximadamente 72 m.

Problemas e exercícios propostos (p. 148)

17. $\beta \simeq 63{,}4°$
18. $\frac{5}{12}$
19. a) Aproximadamente 4,2262.
    b) Aproximadamente 0,8420.
20. 22°
21. 65°
22. a) $\theta \simeq 49°$
    b) $\alpha \simeq 37°$
23. a) sen 32° ≃ 0,53; cos 32° ≃ 0,85; tg 32° ≃ 0,62.
    b) Sim; $\text{sen}\,\alpha = \cos(90° - \alpha)$ ou $\cos\alpha = \text{sen}\,(90° - \alpha)$.
    c) cos 58° ≃ 0,53; sen 58° ≃ 0,85.
24. a) 342 m.
    b) 513 m.
    c) Superior.
25. a) Aproximadamente 9,4 cm.
    b) Aproximadamente 3,4 cm.
    c) 70°
27. Aproximadamente 365 157 km.
28. Sim. $CD \simeq 15$ m
29. Aproximadamente 27 m.
30. Alternativa **a**.
31. Aproximadamente 5°.

Cálculo rápido (p. 150)

1. a) $x = 3$ e $y = 3\sqrt{3}$.
   b) $x = 1$ e $y = \sqrt{3}$.
   c) $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
   d) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   e) $x = 5$ e $y = 5\sqrt{3}$.
2. $x = 4\sqrt{3}$; $y = 4$; $AB = 18$.

Para recordar (p. 150)

1. 350 amarelos; 650 brancos.
2. Alternativa **d**.
3. Alternativa **b**.

Matemática e papiro de Rhind (p. 153)

1. a) $5\frac{1}{25}$
   b) $\frac{18}{25} - \frac{1}{2} = \frac{36}{50} - \frac{25}{30} = \frac{11}{50} = \frac{10}{50} + \frac{1}{50} = \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$
   c) $\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{1}{seqt}$

CAPÍTULO 7 – Relações trigonométricas em um triângulo qualquer

Problemas e exercícios propostos (p. 158)

1.

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
$\widehat{A}$	0,43	0,9	0,48
$\widehat{B}$	0,71	0,7	1,01
$\widehat{C}$	0,8	0,6	1,33
$\widehat{D}$	0,71	−0,7	−1,01
$\widehat{E}$	0,43	−0,9	−0,48

2. a) sen 143° ≃ 0,60182
   b) tg 143° ≃ −0,75356
3. a) sen 141° ≃ 0,63
   b) sen 127° ≃ 0,80
   c) sen 105° ≃ 0,97
   d) cos 164° ≃ −0,96
   e) cos 113° ≃ −0,39
   f) cos 92° ≃ −0,03
4. $\text{sen}\,120° = \text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
   $\text{sen}\,45° = \text{sen}\,135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
   $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ e $\cos 60° = \frac{1}{2}$;
   $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problemas e exercícios propostos (p. 162)

6. a) $\widehat{P} = 75°$; $\overline{MN} = 5{,}5$ m.
   b) $\widehat{L} = 67°$; $\overline{KJ} = 120$ m.
7. 12 m.
8. a) $a = 6\sqrt{6}$
   b) $r = 4\sqrt{3}$
9. a) $a = 4\sqrt{6}$
   b) $b = 5\sqrt{2}$
   c) $\text{med}(\widehat{C}) = 45°$ ou $\text{med}(\widehat{C}) = 135°$.
   d) $\text{med}(\widehat{A}) = 60°$ e $\text{med}(\widehat{C}) = 90°$ ou $\text{med}(\widehat{A}) = 120°$ e $\text{med}(\widehat{C}) = 30°$.
10. 224 m.
11. $\text{med}(\widehat{C}) = 30°$ e $\text{med}(\widehat{C}) = 150°$.
14. Alternativa **a**.
15. Alternativa **d**.

Problemas e exercícios propostos (p. 165)

17. a) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm^2
    b) $7\sqrt{2}$ cm^2

18. a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$ u.a.

b) $2\sqrt{2}r^2$ u.a.

19. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ cm²

Problemas e exercícios propostos (p. 167)

21. a) $2\sqrt{13}$ cm
b) 45°
c) $c = 10$ m ou $c = 2$ m
d) 30°

22. $d_1 = 2\sqrt{19}$ dm e $d_2 = 14$ dm.

24. $8\sqrt{3}$ cm²

25. a) 42 dm²
b) Aproximadamente 37°.
c) 12,5 dm

26. $16(3 - \sqrt{3})$ cm²

27. Aproximadamente $0{,}52r$.

28. Aproximadamente 265 km.

29. a) $\alpha = 45°$
b) 2 m; $\text{med}(\hat{x}) = 45°$.

30. Alternativa **e**.

31. Alternativa **c**.

Cálculo rápido (p. 168)

1. a) 162°
b) 85°
c) 123°
d) 68°
e) 151°
f) 150°
g) 114°
h) 109°
i) 93°
j) 172°

2. a) $\text{med}(\hat{C}) = 102°$
b) $\text{med}(\hat{B}) = 100°$
c) $\text{med}(\hat{A}) = 75°$; $\text{med}(\hat{C}) = 70°$.
d) $\text{med}(\hat{B}) = 36°$; $\text{med}(\hat{C}) = 36°$.
e) $\text{med}(\hat{A}) = 35°$; $\text{med}(\hat{B}) = 70°$; $\text{med}(\hat{C}) = 75°$.

3. a) 75°
b) 147°
c) 139°
d) 69°
e) 48°
f) 134°

4. 69°

5. 58°

Para recordar (p. 169)

1. 110°
3. Alternativa **a**.
4. Alternativa **c**.

Foco no raciocínio lógico (p. 169)

1. Alternativa **b**.
2. 16

Matemática e topografia (p. 171)

1. Aproximadamente 1431,8 m².

CAPÍTULO 8 – Arcos de circunferência e ciclo trigonométrico

Problemas e exercícios propostos (p. 178)

1. a) 2,5 rad
b) 3,2 cm

2. a) $\frac{2\pi}{9}$ rad
b) $\frac{\pi}{5}$ rad
c) $\frac{5\pi}{36}$ rad
d) $\frac{\pi}{12}$ rad
e) $\frac{2\pi}{15}$ rad
f) $\frac{4\pi}{9}$ rad

3. a) 15°
b) 22° 30'
c) 100°
d) 78° 45'
e) 84°
f) 44°

4. a) 2,5 rad
b) 5 cm

5. Alternativa **d**.

6. Alternativa **a**.

Problemas e exercícios propostos (p. 184)

7. Algumas medidas: 552° e 912°.

8. Algumas medidas: 580° e 1660°.

9. a) 4°
b) 220°
c) 89°
d) 290°
e) 320°
f) $\frac{\pi}{7}$ rad
g) $\frac{2\pi}{3}$ rad
h) $\frac{6\pi}{5}$ rad
i) $\frac{\pi}{3}$ rad
j) $\frac{\pi}{3}$ rad
k) $\frac{\pi}{5}$ rad
l) $\frac{5\pi}{7}$ rad

10. A: Origem

$B: \alpha = \frac{2\pi}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$C: \alpha = \frac{4\pi}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$D: \alpha = \frac{6\pi}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$E: \alpha = \frac{8\pi}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

11. A: Origem

$A_1: \alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$A_2: \alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$A_3: \alpha = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$A_4: \alpha = \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$A_5: \alpha = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$A_6: \alpha = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$A_7: \alpha = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tecnologia (p. 185)

2. Aproximadamente 10 cm.

Cálculo rápido (p. 186)

1. a) 180°
b) 90°
c) 45°
d) 60°
e) 30°
f) 15°
g) 18°
h) 9°
i) 120°
j) 240°
k) 135°
l) 225°

2. a) 2,8
b) 1,4
c) 0,4
d) 3,5
e) 0,9
f) 0,6
g) 6,3
h) 0,8

3. a) 16
b) 8
c) 24
d) −36
e) −8
f) 44
g) 288
h) 2
i) 113

4. a) $3x + y + 1$
b) $-x + y - 1$
c) $x + y + 1$
d) $8x^2$
e) $2x^2 + 2xy$
f) $2y - 1$
g) $-2x - 2y$
h) $2x^2 + x + 2xy + y$
i) $-x + y$

5. a) 16 cm
b) 60 meses.
c) 10 cm
d) Aproximadamente 12,6 m².
e) 40 batimentos em 30 segundos, 20 batimentos em 15 segundos e 4 800 batimentos em 1 hora.

Para recordar (p. 186)

1. Alternativa **e**.
2. Alternativa **a**.
3. Alternativa **b**.

Foco no raciocínio lógico (p. 187)

1. Alternativa **d**.
2. Alternativa **b**.

Matemática e Cartografia (p. 189)

1. a) 60° N 40° E
   b) Entre P e E: aproximadamente 6 679,16 km. Entre P e G: aproximadamente 4 452,77 km.

CAPÍTULO 9 – Funções trigonométricas

Problemas e exercícios propostos (p. 196)

1. a) $\frac{1}{2}$
   b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. a) 330°
   b) Não existe.
3. a) 0
   b) $\frac{3-2\sqrt{3}}{4}$
   c) -6
   d) -1
   e) 1
4. a) 2
   b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
5. a) $y > 0$
   b) $y > 0$
   c) $y < 0$
6. $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$; $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
   $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$;
   $\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
   $\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$; $\text{sen}\,(-\pi) = 0$;
   $\text{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$; $\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
   $\text{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$;
   $\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{sen}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
   $\text{sen}\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{sen}\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;
   $\text{sen}\,(-2\pi) = 0$.
7. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
   b) $\frac{29}{18}$
8. a) 0
   b) $-\frac{1}{2}$
   c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
9. a) $y = 4 \cdot \text{sen}\,\alpha$
   b) $y = -2 \cdot \text{sen}\,\alpha$
10. a) Mínimo: -5; máximo: 5.
    b) Mínimo: 2; máximo: 4.
    c) Mínimo: $\frac{1}{3}$; máximo: 1.
11. a) $\text{Im}(f) = [-5, 1]$
    b) $\text{Im}(f) = [-1, 3]$
12. a) $0 \leqslant m \leqslant 1$
    b) $\frac{4}{3} \leqslant m \leqslant 2$

Problemas e exercícios propostos (p. 201)

13. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
    b) $\frac{1}{2}$
    c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
    d) $-\frac{1}{2}$
14. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
    b) 1
15. a) $\sqrt{2}(a-b)$
    b) -1
16. a) -1
    b) $\frac{1}{2}$
17. Alternativa **d**.
18. a) $y > 0$
    b) $y > 0$
19. a) $2\cos\alpha$
    b) $4\cos\alpha$

Problemas e exercícios propostos (p. 203)

20. a) $-\frac{12}{13}$
    b) $-\frac{15}{17}$
    c) $\frac{3}{5}$
    d) $\frac{2}{3}$
21. a) $\pm\frac{5}{7}$
    b) $\pm\frac{7}{9}$
22. a) 1
    b) $\frac{1}{2}$
23. $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -1$ ou
    $\cos\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{3}{5}$.
25. a) $S = \{1-\cos\alpha, 1+\cos\alpha\}$
    b) $S = \{\text{sen}\,\alpha, \cos\alpha\}$
    c) $S = \left\{2, \frac{-2\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\right\}$
    d) $S = \{\cos\alpha - \sqrt{2}, \cos\alpha + \sqrt{2}\}$
26. $k = -3$ ou $k = 1$.
27. a) $-1 \leqslant k \leqslant 5$
    b) $\frac{2}{3} \leqslant k \leqslant 2$

Problemas e exercícios propostos (p. 208)

28. a) $y < 0$
    b) $y > 0$
29. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
    b) $-1+\sqrt{3}$
30. a) $\sqrt{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$
    b) $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$
31. a) 0
    b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
32. a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
    b) $-\sqrt{3}$
33. $y < 0$
34. a) $\sqrt{3}$
    b) -1
    c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
35. a) 4,5°
    b) Aproximadamente 1050 m.

Problemas e exercícios propostos (p. 210)

37. Respostas possíveis:
    a) 210°
    b) 210°
    c) 240°
    d) 225°
    e) 225°
    f) 240°
38. a) 4º quadrante.
    b) 3º ou 4º quadrantes.
    c) 4º quadrante.
    d) 2º ou 4º quadrantes.
    e) 2º quadrante.
    f) 1º quadrante.
    g) 3º quadrante.
    h) 2º ou 3º quadrantes.
    i) 2º quadrante.
    j) 4º quadrante.
39. a) -1
    b) -1
    c) $\frac{3}{2}$
40. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\text{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.
42. a) $\frac{2\pi}{3}$
    b) π
    c) $\frac{\pi}{4}$
43. a) $\frac{5}{12}$
    b) $-\frac{2\sqrt{10}}{3}$
44. a) $\pm\frac{3}{4}$
    b) $\pm\frac{12}{5}$
45. $\text{sen}\,\alpha = -\frac{3}{5}$ e $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$,
    sendo $\alpha \in$ 3º Q.
46. $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$ ou $\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$.

Problemas e exercícios propostos (p. 219)

51. a) Nenhum.
    b) Um.
52. a) $p = \pi$; $\text{Im}(f) = [-1, 1]$.
    b) $p = \pi$; $\text{Im}(f) = [-2, 2]$.

53. $f(\alpha) = -3 \cdot \text{sen } 2\alpha$

54. a) $\text{Im}(f) = [-5, -1]$

b) $\text{Im}(f) = [-6, -2]$

55. a) $\frac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$

b) $-3 \leqslant m \leqslant -2$

58. $f(\alpha) = -2 \cdot \cos \alpha$

59. a) $p = \pi$; $\text{Im}(f) = [-1, 1]$.

b) $p = \pi$; $\text{Im}(f) = [-3, 3]$.

c) $p = 2\pi$; $\text{Im}(f) = [-2, 2]$.

60. a) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

b) Há três valores de α que satisfazem a equação no 1º, no 2º e no 4º quadrante.

Tecnologia (p. 222)

1. $f(x) = 2\text{sen }(x + 1)$

Problemas e exercícios propostos (p. 224)

61. Alternativa **b**.

62. Alternativa **a**.

63. Alternativa **a**.

64. Alternativa **e**.

65. Alternativa **c**.

66. Alternativa **a**.

Problemas e exercícios propostos (p. 227)

68. $a = 2$ e $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Cálculo rápido (p. 228)

1. a) Os números são 6 e 4.

b) Joana tem 17 anos, Pedro tem 14 anos e Clara tem 12 anos.

c) Em uma hora, percorre 72000 m. Ele leva 50 segundos para percorrer 1 km.

d) O carro *B*. O mais rápido é o que percorre 50 km em 1 hora, pois 100 m em 10 s equivalem a 36 km/h.

2. a) 34

b) 6

c) 7

d) 5

3. a) $9x - 8$

b) $x^2 - 12x + 35$

c) $4abc - 4ab$

d) $2x^2 - 6xy + 5y$

Para recordar (p. 229)

1. Alternativa **e**.

2. $f(x) = \frac{5x^2}{4} - 5$

3. a) 23 milhões de reais.

b) Aproximadamente 121%.

Foco no raciocínio lógico (p. 229)

2. Sete meias. Assim haverá, com certeza, um par completo e cinco meias avulsas.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 233)

1. Alternativa **e**.

2. Alternativa **a**.

UNIDADE 4 – Análise combinatória e probabilidade

CAPÍTULO 10 – Análise combinatória

Problemas e exercícios propostos (p. 239)

1. 28 peças.

2. 32 resultados possíveis.

3. 11 somas possíveis: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

4. b) 90 números.

c) 25 números.

5. a) 720 maneiras.

b) 120 maneiras.

6. b) 24 anagramas.

c) 6 anagramas.

d) 18 anagramas.

7. 4 maneiras.

8. 16 maneiras.

9. Alternativa **a**.

Problemas e exercícios propostos (p. 241)

11. 120 produtos.

12. 64 maneiras.

13. 175 742 424 placas.

14. a) 168 983 100 placas.

b) 280 776 600 placas.

15. a) 24 modos.

b) 9 modos.

c) 96 modos.

d) 32 modos.

16. a) 8 trajetos possíveis.

b) 72 trajetos possíveis.

17. a) 9 números.

b) 6 números.

18. 60 números.

19. 50 números.

20. 21 números.

21. Alternativa **a**.

22. 256 diferentes tipos de salada.

24. a) 72 anagramas.

b) 6 anagramas.

25. Alternativas **c** e **d**.

Problemas e exercícios propostos (p. 248)

27. a) 40 320

b) 144

c) -564

28. a) 10

b) $\frac{42}{5}$

c) 4 060

29. a) $\frac{1}{144}$

b) $\frac{99}{8}$

30. a) $n(n + 1)$

b) $(n + 2)(n + 1)$

31. a) $\frac{n}{(n + 1)!}$

b) $\frac{n^2}{(n - 1)}$

33. 5, 17b, 18 e 20.

35. a) 110

b) 1 008

36. a) n

b) $\frac{2n - 1}{2n + 1}$

37. a) $n = 8$

b) $n = 10$

38. 27 216 números.

39. 648 números.

40. 261 números.

41. a) 120 anagramas.

b) 24 anagramas.

c) 48 anagramas.

d) 24 anagramas.

e) 48 anagramas.

42. 1 851 266 560 senhas.

43. Alternativa **b**.

44. a) 14 400 anagramas.

b) 10 800 anagramas.

c) 4 320 anagramas.

d) 24 anagramas.

45. Alternativa **c**.

46. Alternativa **d**.

Problemas e exercícios propostos (p. 253)

49. a) 21

b) 322

c) $\frac{60}{23}$

50. a) $\frac{n}{3}$

b) $\frac{(n + 1)(2n + 1)}{n(2n - 1)}$

52. 120 grupos.

53. 56 triângulos.

54. 116 modos.

55. Alternativa **b**.

56. a) 80 grupos.

b) 4 800 grupos.

c) A e B.

57. a) 126 triângulos.

b) 126 quadriláteros.

60. 4 320 modos.

61. Angélica está com a razão.

62. a) $y = 2x - 4$, para $4 \leqslant x \leqslant 14$; 24 meninos.

b) 26 alunos.

63. Alternativa **d**.

64. Alternativa **c**.

65. Alternativa **e**.

Tecnologia (p. 255)

1. a) 120

b) 720

c) 3 628 800

d) 479 001 600

e) 1 307 674 368 000

2. a) 8 064

b) 81

c) 1 050

3. Alternativa **e**.

4. 481 mil anos.

Cálculo rápido (p. 256)

1. a) 720
   b) 240
   c) 40 320
   d) 1 440
   e) 10 080
   f) 60
   g) 360
   h) 840
   i) 13
2. a) 20
   b) 30
   c) 21
   d) 72
   e) 15
   f) 70
   g) 84
   h) $\frac{1}{12}$
   i) $\frac{24}{7}$

Para recordar (p. 256)

1. a) 0,7
   b) 1,6666...
   c) 1,64
   d) 1,1666...
2. Alternativa **b**.
3. O ponto *B*.
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **d**.

Foco no raciocínio lógico (p. 257)

2. 4 000 celulares.

CAPÍTULO 11 – Probabilidade

Problemas e exercícios propostos (p. 262)

1. a) $S = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$
   b) $A = \{(C, C), (K, K)\}$
   c) $B = \{(C, K), (K, C)\}$
2. a) $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
   b) $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
   c) $B = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$
   d) $C = \{(6, 6)\}$
   e) $D = \varnothing$
8. a) Retirar uma moeda de R$ 0,50.
   b) Retirar uma moeda de R$ 0,10.
10. a) 52
11. a) Falsa.
    b) Falsa.
    c) Verdadeira.
    d) Falsa.
    e) Falsa.

Problemas e exercícios propostos (p. 266)

13. a) Aproximadamente 83%.
    b) Aproximadamente 5,6%.
    c) Soma 12 é maior.
    d) Porque a maior soma possível é 12.
14. Aproximadamente 7,7%.
16. 60%
17. Aproximadamente 27,6%.
18. Alternativa **e**.
20. Alternativa **a**.
21. Alternativa **e**.
22. Alternativa **d**.

Problemas e exercícios propostos (p. 268)

23. 60%
24. Aproximadamente 83%.
25. Aproximadamente 96%.
26. Aproximadamente 22%.
27. Alternativa **d**.

Problemas e exercícios propostos (p. 271)

28. Aproximadamente 67%.
29. 60%
30. a) Aproximadamente 19%.
    b) 100%
31. Aproximadamente 31%.

Problemas e exercícios propostos (p. 273)

32. 40%
33. a) 20%
b) 40%
c) Aproximadamente 67%.
34. Alternativa **a**.
35. Alternativa **b**.
36. a) Aproximadamente 35%.
    b) 40%

Problemas e exercícios propostos (p. 275)

37. 95%
38. Aproximadamente 33%.
39. Aproximadamente 8%.
40. a) Aproximadamente 2,1%.
    b) Aproximadamente 13,6%.
    c) Aproximadamente 14,4%.
    d) Aproximadamente 14,7%.
    e) 85,3%
    f) Porque os eventos descritos em **a**, **b** e **c** não são independentes.
41. Alternativa **b**.

Problemas e exercícios propostos (p. 278)

42. a) Não. Porque a amostra representa apenas uma pequena parcela da população.
    b) Apenas a segunda e a terceira são verdadeiras.
43. a) 4 913 códigos.
    b) 156 códigos.
    c) Aproximadamente 3,2%.
44. a) 47 250
    b) 35,2%
45. a) Quina: 0,00065%;
    Sena: 0,000002%.
47. a) 2,448%
    b) 2,5%

Cálculo rápido (p. 279)

1.

Jogador	Percentual de acerto
Roberta	$\frac{21}{30} = \frac{7}{10} = 0{,}7 = 70\%$
Jaqueline	$\frac{24}{40} = \frac{6}{10} = 0{,}6 = 60\%$
Paula	$\frac{10}{50} = \frac{2}{10} = 0{,}2 = 20\%$
Alice	$\frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0{,}7 = 70\%$
Luana	$\frac{54}{60} = \frac{9}{10} = 0{,}9 = 90\%$

2. a) 120
   b) 240
   c) 300
   d) 600
   e) 6,4
   f) 256
3. a) 60%
   b) 40%
   c) 50%
   d) 20%
5. a) 680 000 cm^2
   b) 37 000 000 m^2
   c) 0,055678 km^2
   d) 590 mm^2
   e) 12,460345 m^2

Para recordar (p. 279)

1. $f(x) = -3x + 5$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.
2. R$ 480,00
3. Alternativa **a**.
4. Alternativa **d**.
5. Alternativa **d**.

Foco no raciocínio lógico (p. 281)

1. 30 peças.
2. Alternativa **b**.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 284)

1. Alternativa **a**.
2. Alternativa **d**.

TRANSCRIÇÃO DOS ÁUDIOS

UNIDADE 1

Podcast – Radioatividade e meia-vida

Página 8

Narradora: Olá! Bem-vindos a mais um episódio do nosso *podcast*! Hoje vamos falar sobre decaimento radioativo e tempo de meia-vida de uma substância.

Vocês já ouviram falar desses conceitos?

Certamente, já ouviram por aí que tudo o que conhecemos é constituído de átomos, e a grande maioria deles se mantém estável na natureza.

Mas, vocês sabiam que alguns átomos são instáveis e, naturalmente, se transformam em outros átomos de menor massa, liberando energia?

Quando esse processo ocorre com a emissão de radiação, ele é chamado de decaimento radioativo.

Mas o que é radiação?

Radiação é um processo físico de emissão e de propagação de energia por meio de ondas eletromagnéticas ou de partículas em movimento.

Parece difícil de entender, né? Mas você já conhece algum tipo de radiação!

Um exemplo é a radiação emitida pelo Sol.

Mas há outros tipos. Sabe o aparelho de micro-ondas, muito utilizado para aquecer alimentos? Pois é, esse é um tipo de radiação que não altera a estrutura do material que está sendo aquecido.

Também há radiações propagadas por compostos químicos, utilizadas, por exemplo, em aparelhos para exames de imagem e tratamento de doenças. Elas também podem ser usadas na geração de energia, na datação de fósseis e, infelizmente, como armas de destruição em massa.

Esse último tipo de radiação deve ser manipulado com muita responsabilidade, pois, ao mesmo tempo que é capaz de salvar vidas, pode causar danos aos seres vivos e ao meio ambiente.

Vamos usar como exemplo um caso muito conhecido no Brasil devido a um incidente radioativo envolvendo o césio 137.

Goiânia, 1987:

Um aparelho de radioterapia, usado no tratamento de câncer, foi descartado de forma inadequada. Mais tarde, esse equipamento foi encontrado por catadores de materiais recicláveis, que acabaram rompendo a cápsula que protegia o material radioativo.

Devido à exposição desse material, 249 pessoas foram contaminadas; muitas morreram e outras convivem até hoje com sequelas provocadas pela radiação emitida pelo césio 137.

Todo o material que teve contato com o césio 137, aproximadamente 13 500 toneladas de rejeitos radioativos, precisou ser enterrado em valas com paredes, chão e tetos de concreto e chumbo, com 1 metro de espessura, para evitar a propagação da contaminação radioativa!

Vocês sabiam que é possível que esse elemento químico continue emitindo radiação, mesmo após ter passado cerca de quarenta anos do incidente?

Isso pode ser comprovado com Matemática!

Por meio de cálculos e com o uso da função exponencial, podemos determinar a meia-vida de isótopos radioativos, como a do césio 137, que é de 33 anos.

A meia-vida é o tempo necessário para que a quantidade de uma substância se reduza pela metade.

Isso quer dizer que, em 2026, 39 anos após o incidente, um pouco menos da metade da massa do césio 137 ainda estará presente no material contaminado!

E ainda vai demorar mais 33 anos, aproximadamente, para que essa quantidade se reduza a um quarto da massa inicial.

Agora, vamos dar outro exemplo para explicar direitinho como funciona a modelagem da meia-vida.

Lembra que mencionamos que a radiação é usada na datação de fósseis? Então, como podemos saber que um osso de determinado animal tem 5 mil anos de idade?

Vamos lá que eu explico!

O dióxido de carbono, que é absorvido pelas plantas, é formado por átomos de oxigênio e de carbono. Cerca de um em cada trilhão de átomos de carbono é carbono 14; os demais são carbono 12. Como os animais e os seres humanos consomem plantas, direta ou indiretamente, eles também absorvem carbono 14.

A razão entre o carbono 12 e o carbono 14 permanece constante na natureza, mesmo com o decaimento do carbono 14, já que ele é continuamente reposto pela alimentação.

Com a morte, os organismos param de absorver novos átomos de carbono. O carbono 14 decai, mas o carbono 12, não, por ser um átomo estável. Assim, a razão entre os dois isótopos do carbono deixa de ser constante, e é por meio da comparação dessa razão que se pode inferir a idade do fóssil.

Isso é muito legal!

E, assim, chegamos ao fim deste episódio sobre decaimento radioativo! Muito obrigada por nos acompanhar até aqui. Foi um prazer ter você conosco!

Espero que você tenha gostado e aprendido algo novo! Até o próximo episódio!

Podcast criado para fins didáticos. Produção de Audioman.

Para compor as informações deste *podcast*, foram consultados o portal da Educação Ambiental do governo de São Paulo, o *site* da Secretaria de Estado de Saúde do estado de Goiás, o portal da Fundação Oswaldo Cruz e o livro *Química: a ciência central*, de Theodore Brown, Bruce Bursten, Eugene LeMay, Catherine Murphy e Patrick Woodward.

Fontes de pesquisa:

Brown, Theodore. L. *et al. Química*: a ciência central. 9. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2007.

Goiás (estado). Secretária de Estado da Saúde. *Césio 137 Goiânia*. Goiânia: Secretária de Estado da Saúde, 8 fev. 2024. Disponível em: https://goias.gov.br/saude/cesio-137-goiania/#:~:text=O%20137Cs%2C%20is%C3%B3topo%20radioativo%20artificial,de%20cerca%20de%2033%20anos. Acesso em: 17 set. 2024.

Radiação. *In*: NuBio. *Sistema de Informação em Biossegurança. Fiocruz*. [Rio de Janeiro]: Fiocruz/MS, [20--]. Disponível em: https://fiocruz.br/biosseguranca/Bis/virtual%20tour/hipertextos/up1/radiacao.html. Acesso em: 17 set. 2024.

Radioatividade. *In*: Dicionário Ambiental. São Paulo: Portal de Educação Ambiental, 2022. Disponível em: https://semil.sp.gov.br/educacaoambiental/prateleira-ambiental/radioatividade/#:~:text=O%20decaimento%20radioativo%20(ou%20transmuta%C3%A7%C3%A3o,energia%20e%20tornar%2Dse%20est%C3%A1vel. Acesso em: 17 set. 2024.

UNIDADE 2

Podcast – Tales de Mileto

Página 93

Narrador: Olá! Bem-vindos a mais um episódio do nosso *podcast*! Hoje, vamos conhecer um grego que inspirou gerações com sua visão inovadora e questionadora e, por isso, é considerado o primeiro dos sete sábios da Grécia: Tales de Mileto.

Mileto era uma antiga cidade grega, localizada à margem do mar Mediterrâneo e hoje situada na Turquia. Foi ali que nasceu, por volta de 624 a.C., um homem de rara inteligência, considerado o primeiro matemático grego.

Tales era um mercador que enriqueceu o suficiente para dedicar parte de sua vida aos estudos. Ele viajou em busca de conhecimento e fez muitas descobertas sobre Astronomia e Matemática.

No Egito, dizem que ele aprendeu Geometria e despertou a admiração dos egípcios ao calcular a altura de uma pirâmide com base em sua sombra. Ali, ele aplicou princípios matemáticos simples, de um modo bastante eficaz. Genial, não é?!

Na Babilônia, provavelmente entrou em contato com tabelas e instrumentos astronômicos. Acredita-se que Tales foi o primeiro homem a prever um eclipse solar, causando assombro em seus contemporâneos. Já pensou como essas pessoas devem ter ficado surpresas? Essa compreensão precisa dos movimentos celestes era impensável para a época! Será que relacionaram com magia?

Tales ficou muito encantado com o que viu em suas viagens e decidiu difundir a Geometria em sua cidade natal. Mas, ele sentiu a necessidade de registrar todas as informações seguindo uma organização lógica, pois percebeu algumas contradições nos registros egípcios e babilônicos.

Assim, ele introduziu no mundo uma ideia revolucionária: as verdades matemáticas precisam ser provadas!

É daí que vem sua fama: Tales foi o primeiro grego a buscar explicações racionais para os fenômenos do mundo, rompendo com a tradição de apresentar conhecimentos baseados em mitos e intuições, algo que predominava na Grécia Antiga.

De volta a Mileto, seu conhecimento foi reconhecido como inovador e ele teve vários discípulos. Um deles foi, alguns anos depois, mestre de um discípulo de grande prestígio: Pitágoras!

Pitágoras foi influenciado pelos estudos de Tales, e é possível que tenham se conhecido, embora Pitágoras seja cerca de cinquenta anos mais jovem.

Além disso, Tales influenciou grandes matemáticos gregos que surgiram séculos depois, como Euclides e Aristóteles, nomes bem conhecidos na história da Matemática. Você certamente já ouviu falar deles.

Aristóteles escreveu que, para Tales, a questão primordial não era o que sabemos, mas como sabemos.

Uma das maiores contribuições de Tales para a Matemática foi o uso do raciocínio lógico para provar teoremas.

Mas... o que é um teorema?

Podemos dizer que os teoremas são registros de informações que se assemelham a receitas de família, aquelas que julgamos verdadeiras e das quais procuramos nos lembrar para usá-las em algum momento.

Imagine que Tales foi a pessoa que testou as receitas conhecidas e as reescreveu de modo estruturado.

Esse método formal de provar teoremas foi tão importante, que até hoje caracteriza grande parte da Matemática moderna.

O teorema de Tales também é aplicado na resolução de problemas complexos, em áreas como construção civil e indústria, além de ser utilizado em medições agrárias e em cálculos espaciais.

Mas você sabia que Tales não se destacou somente como matemático? Ele é conhecido como o primeiro grande filósofo da história ocidental e considerado por muitos o pai da Filosofia, o que indica que ele era um grande pensador.

A Filosofia busca refletir sobre acontecimentos para construir conceitos que possam explicar questões relacionadas à existência. A abordagem racional e sistemática de Tales para explicar o mundo ao nosso redor, sem recorrer a explicações mitológicas ou sobrenaturais, abriu caminho para o pensamento científico, que continua a ser utilizado por estudiosos e cientistas até hoje. Tales foi um dos primeiros a buscar explicações naturais para fenômenos como o movimento dos astros e as mudanças climáticas, propondo que a água era o princípio fundamental de todas as coisas.

Essa perspectiva marcou uma mudança significativa no modo de pensar da época, pois incentivou a busca por respostas baseadas na observação e na razão, em vez de depender exclusivamente da tradição ou da religião. Sua postura investigativa e a tentativa de encontrar uma ordem ou uma causa natural para os eventos do mundo lançaram as bases para o método científico, que envolve a formulação de hipóteses, a observação cuidadosa e a experimentação para testar teorias.

É incrível perceber que sua visão de compreender o Universo continua a ser um alicerce fundamental da ciência moderna.

Certa vez, perguntaram a Tales: "O que é mais difícil?"; e ele respondeu: "Conhecer-se a si mesmo". Inspire-se em Tales e embarque nessa aventura enriquecedora de busca pelo conhecimento.

E, assim, chegamos ao fim deste episódio! Muito obrigado por nos acompanhar até aqui. Espero que você tenha gostado e aprendido algo novo! Até o próximo episódio!

Podcast criado para fins didáticos. Produção de Audioman.

Para compor as informações deste *podcast*, foram consultados o jornal *O Matemático*, número 3, e o livro *História da Matemática*, de Carl Boyer.

Fontes de pesquisa:

Boyer, Carl B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996.

Tales, um dos sete sábios. *O Matemático*, Rio Grande, n. 3, 3 dez. 2016. Disponível em: https://imef.furg.br/images/stories/jm3.pdf. Acesso em: 17 set. 2024.

UNIDADE 4

Podcast – Surgimento do conceito de probabilidade

Página 263

Narrador: Olá! Bem-vindos ao nosso *podcast*! Hoje vamos embarcar em uma fascinante viagem pela história da Matemática e descobrir como surgiu o conceito de probabilidade.

Preparem-se para uma jornada cheia de curiosidades e descobertas!

Sabia que um dos principais motivos para o desenvolvimento da teoria da probabilidade foram – pasmem! – os jogos de azar? Sim, isso mesmo! Esses jogos desempenharam um papel importante na evolução desse campo matemático tão importante.

Você sabe o que são esses jogos? Eu vou explicar em detalhes.

Jogos de azar são aqueles em que a possibilidade de ganhar não depende da habilidade do jogador! Isso significa que, ao contrário de jogos de estratégia ou habilidade, nos quais a experiência e a destreza podem influenciar o resultado, nos jogos de azar tudo está nas mãos do acaso.

Esses jogos estão intimamente associados à ideia de acaso, pois o resultado deles é completamente aleatório e, por isso, não podemos prever com certeza o que vai acontecer. Imagine só: você está jogando cara ou coroa ou lançando dados, e o resultado final não depende de nenhuma estratégia ou habilidade específica que você possa ter, é tudo uma questão de sorte.

Então, o vencedor desse tipo de jogo depende principalmente da sorte! E é exatamente essa imprevisibilidade que torna os jogos de azar tão emocionantes e, ao mesmo tempo, tão desafiadores.

Eu tenho uma história para te contar...

Há indícios de que sociedades antigas, como babilônios, egípcios, gregos e romanos, utilizavam, tanto em jogos quanto em cerimônias religiosas, um ossinho chamado astrágalo, que, em muitos casos, era retirado de cabras e ovelhas. Esses ossinhos eram naturalmente assimétricos e, por isso, ao serem lançados, podiam cair de diversas formas, proporcionando um resultado imprevisível.

Com o passar do tempo, eles foram adaptados e transformados em pecinhas com quatro faces, cada uma marcada com um número, tornando-se, assim, um dos primeiros objetos semelhantes aos dados modernos que conhecemos hoje. Esses objetos eram usados para prever o futuro, tomar decisões e até mesmo para fins educativos, ensinando probabilidade de forma intuitiva.

Apesar de esses povos antigos usarem algo semelhante a dados, não há registros de que havia uma teoria para determinar a chance de cada face ser sorteada a cada jogada.

Os primeiros cálculos probabilísticos foram feitos por estudiosos italianos dos séculos XV e XVI. Entre eles, destacamos Girolamo Cardano, que escreveu *O livro dos jogos de azar* e foi o primeiro a tentar analisar matematicamente os jogos de azar. No livro, ele introduziu e discutiu conceitos como a probabilidade de um evento e a equidade nos jogos, baseando suas análises em princípios aritméticos.

Até Galileu Galilei, inspirado pelo livro de Cardano, calculou a chance de determinados resultados em lançamentos de dois e três dados.

Você sabia que, no lançamento de três dados, a soma 3 só pode ser obtida de uma maneira? Pois é, todos os dados precisam mostrar o número 1, e essa é a única chance de se obter o número 3 no lançamento de três dados!

E a soma 10, você sabe de quantas maneiras pode ser obtida no lançamento de três dados? Há seis combinações possíveis! São elas: (1, 3 e 6), (1, 4 e 5), (2, 2 e 6), (2, 3 e 5), (2, 4 e 4) e (3, 3 e 4).

Agora já sabe, não é? Em um jogo com três dados, é mais fácil que a soma seja 10 do que 3. Então, nesse jogo, escolha a soma 10 para ter mais chances de vencer!

Agora, vamos avançar um pouco mais na história...

O marco do início da teoria da probabilidade ocorreu na metade do século XVII, com a troca de cartas entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat. Nessas trocas, a teoria evoluiu bastante, com a introdução de novos conceitos e a resolução de outros problemas relacionados à probabilidade.

No século XVIII, essa teoria foi ampliada e consolidada por matemáticos como Jakob Bernoulli e Pierre-Simon Laplace.

Bernoulli introduziu o teorema da lei dos grandes números, e Laplace desenvolveu e aplicou métodos analíticos para calcular probabilidades. Foi a partir das obras desses matemáticos que a área da probabilidade ganhou notoriedade.

Enfim, graças aos jogos de azar e à dedicação e curiosidade de grandes pensadores, a probabilidade se tornou um ramo importante da Matemática e tem aplicações em várias áreas, como Biologia, Física, Tecnologia da Informação, Estatística, Ciências Sociais, Economia...

E, assim, chegamos ao fim deste capítulo! Muito obrigado por nos acompanhar até aqui. Espero que você tenha gostado e aprendido algo novo! Até o próximo episódio!

Podcast criado para fins didáticos. Produção de Audioman.

Para compor as informações deste *podcast*, foram consultados os livros *Introdução à história da Matemática*, de Howard Eves, e *História da Matemática*, de Carl Boyer.

Fontes de pesquisa:

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

LISTA DE SIGLAS

Acafe-SC: Associação Catarinense das Fundações Educacionais

Cefet-MG: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

EEAR: Escola de Especialistas de Aeronáutica

Efomm-RJ: Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante

Enem: Exame Nacional do Ensino Médio

EPCAr-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar

ESA-MG: Escola de Sargento das Armas

EsPCEx-SP: Escola Preparatória de Cadetes do Exército

ESPM-SP: Escola Superior de Propaganda e Marketing

Famema-SP: Faculdade de Medicina de Marília

Famerp-SP: Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto

Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia de São Paulo

FCM-MG: Faculdade Ciências Médicas de Minas Gerais

FCMSC-SP: Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo

FGV-SP: Fundação Getulio Vargas

Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular

IFCE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

IME-RJ: Instituto Militar de Engenharia

Insper-SP: Instituto de Ensino e Pesquisa

Mackenzie-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie

OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática

Obmep: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

Provão Paulista (exame seriado aplicado aos estudantes do Ensino Médio da Rede Pública do Estado de São Paulo)

PUC-MG: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

PUC-RS: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

Selecon-MT: Instituto Nacional de Seleções e Concursos

SLMandic Araras-SP: Faculdade São Leopoldo Mandic Araras

UCPel-RS: Universidade Católica de Pelotas

Udesc: Universidade do Estado de Santa Catarina

UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas

Uece: Universidade Estadual do Ceará

UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás

UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina

Uema: Universidade Estadual do Maranhão

Uerj: Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UERR: Universidade Estadual de Roraima

Uesc-BA: Universidade Estadual de Santa Cruz

Ufal: Universidade Federal de Alagoas

UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora

UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais

UFMS: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFPA: Universidade Federal do Pará

UFPB: Universidade Federal da Paraíba

UFPE: Universidade Federal de Pernambuco

UFPR: Universidade Federal do Paraná

UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UFRR: Universidade Federal de Roraima

UFSCar-SP: Universidade Federal de São Carlos

UFT-TO: Universidade Federal do Tocantins

UFU-MG: Universidade Federal de Uberlândia

UnB-DF: Universidade de Brasília

Uneb-BA: Universidade do Estado da Bahia

Unemat-MT: Universidade do Estado de Mato Grosso

Unesp: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas

Unifesp: Universidade Federal de São Paulo

Unifor-CE: Universidade de Fortaleza

Unit-SE: Universidade Tiradentes

UPF-RS: Universidade de Passo Fundo

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A matemática através dos tempos*: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução: Elza F. Gomide; Helena Castro. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

A obra apresenta 25 textos curtos que contam a história da Matemática. Enriquecido com questões e projetos que possibilitam aprofundar o conhecimento nessa área, esse livro inspirou a concepção deste volume sempre que a história da Matemática foi abordada no estudo dos conceitos.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. *Informática e educação matemática*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Nesse livro, encontram-se exemplos do uso da informática para fins educativos. Muitas das abordagens apresentadas serviram de inspiração para a concepção das seções *Tecnologia* desta coleção.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996.

O livro apresenta a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. As informações nele contidas contribuíram para a concepção de várias partes deste volume.

BRASIL. [Constituição (1988)]. *Emenda constitucional n. 59, de 11 de novembro de 2009*. [...] dá nova redação aos incisos I e VII do art. 208, de forma a prever a obrigatoriedade do ensino de quatro a dezessete anos [...]. Brasília, DF: Presidência da República, [2009]. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/Emendas/Emc/emc59.htm. Acesso em: 12 set. 2024.

A emenda constitucional determina a Educação Básica obrigatória e gratuita das crianças a partir de 4 anos de idade aos jovens até 17 anos.

Brasil. Lei n. 13 415, de 16 de fevereiro de 2017. [...] institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. *Diário Oficial da União*: seção 1, Brasília, DF, ano 154, n. 35, p. 1-3, 17 fev. 2017.

Essa lei implementou reformas no Ensino Médio, como a ampliação progressiva da carga horária anual, visando à implantação do período integral nas escolas.

Brasil. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica*: diversidade e inclusão. Brasília, DF: MEC/CNE/Secadi, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/etnico_racial/pdf/diretrizes_curriculares_nacionais_para_educacao_basica_diversidade_e_inclusao_2013.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

O documento apresenta as diretrizes que estabelecem a base nacional comum, responsável por orientar a organização, a articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas das redes de ensino brasileiras.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília, DF: MEC/SEB, 2018a. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

Esse documento normativo, elaborado pelo Ministério da Educação de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, de 1996, estabelece os conhecimentos, as competências e as habilidades que todos os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica, incluindo o Ensino Médio.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC/SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 12 set. 2024.

Os temas contemporâneos transversais têm o objetivo de “explicitar a relação entre os diferentes componentes curriculares de forma integrada, bem como de fazer sua conexão com situações vivenciadas pelos estudantes”. O documento considera os contextos escolar e social, visando à formação dos jovens para o trabalho, a cidadania e a democracia e respeitando as características regionais e locais de tais contextos.

Bushaw, D. *et al*. *Aplicações da matemática escolar*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

Coletânea de artigos de especialistas na área da educação matemática que tratam de exemplos de aplicação da Matemática em diferentes áreas do conhecimento. Alguns desses exemplos foram utilizados na elaboração de problemas e exercícios deste volume.

Cartografia sistemática: projeções cartográficas – exercícios. [São Paulo]: Universidade de São Paulo, [20--]. Disponível em: http://moodle.stoa.usp.br/mod/resource/view.php?id=44856. Acesso em: 30 set. 2024.

Disponível no ambiente virtual Stoa, essa apostila traz atividades para desenhar o mundo em projeções cartográficas diferentes com o uso de *softwares*. Esse material contribuiu para o desenvolvimento de algumas ideias abordadas na seção *Matemática e cartografia* do capítulo 8.

Cazarré, M. Chile relembra dez anos de terremoto que assolou o país. *Agência Brasil*, 27 fev. 2020. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/internacional/noticia/2020-02/chile-relembra-dez-anos-de-terremoto-que-assolou-o-pais. Acesso em: 30 set. 2024.

Essa reportagem relembra um dos eventos naturais mais impressionantes da história do Chile, que resultou na morte de 525 pessoas. Apresenta dados sísmicos e informações sobre o avanço tecnológico voltado a mitigar danos às populações de áreas de risco. Esses dados contribuíram para a elaboração da seção *Matemática e sismografia* do capítulo 2.

Conheça os cinco terremotos mais fortes do mundo. *BBC News Brasil*, 2 abr. 2014. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2014/04/140402_cinco_maiores_terremotos_lgb. Acesso em: 30 set. 2024.

Esse artigo apresenta os cinco terremotos mais intensos, de acordo com a escala Ritcher de magnitude, e os danos que causaram. Esses dados contribuíram para o desenvolvimento da seção *Matemática e sismografia* do capítulo 2.

Coxford, A. F.; Shulte, A. P. (org.). *As ideias da álgebra*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

O livro trata de diversos conceitos algébricos e problemas com resoluções, traz problemas com resoluções e aborda o uso de computadores e de calculadoras no aprendizado da álgebra. Os conteúdos dessa obra serviram de base para a concepção de muitos temas tratados neste volume.

Dolce, O.; Pompeo, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*, v. 9: geometria plana. São Paulo: Atual, 2019.

O livro aborda a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. As informações nele contidas contribuíram para a fundamentação e para a construção de diversos conceitos desenvolvidos no capítulo 4 deste volume.

Dreyer-Eimbcke, O. *O descobrimento da Terra*: história e histórias da aventura cartográfica. 1. ed. São Paulo: Melhoramentos: Edusp, 1992.

O autor narra a história de descobertas que deram origem a surpreendentes representações cartográficas ao longo do tempo e desmistifica a ideia de que as expedições a terras longínquas não foram um empreendimento marítimo e comercial bem planejado pelas grandes potências europeias da época. Esse material contribuiu para a concepção da seção *Matemática e cartografia* do capítulo 8.

Druck, I. de F. *Um pouco da história de potências, exponenciais e logaritmos*. São Paulo: IME-USP, 1995. Relatório técnico do Departamento de Matemática, 95-24, jun. 1995. Disponível em: https://repositorio.usp.br/directbitstream/2cadf663-31c1-4e9f-a985-6084c1d1f9ef/891136.pdf. Acesso em: 1º out. 2024.

Esse trabalho aborda a história de uma cultura que tinha a necessidade de realizar cálculos sem dispor da linguagem matemática conhecida nos dias atuais. O conteúdo sobre logaritmos contribuiu para a introdução ao tema abordado no capítulo 2 deste volume.

Efe. Chile reconstruído não esquece feridas uma década após terremoto. *R7*, 27 fev. 2020. Disponível em: https://noticias.r7.com/internacional/chile-reconstruido-nao-esquece-feridas-uma-decada-apos-terremoto-27022020. Acesso em: 1º out. 2024.

Esse artigo descreve os estragos provocados pelo *tsunami* na costa do Chile após um terremoto e as obras realizadas para conter futuras inundações provocadas por esse evento natural. Essas informações contribuíram para a elaboração da seção *Matemática e sismografia* do capítulo 2 deste volume.

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Departamento de Engenharia Geográfica, Geofísica e Energia. *Cartografia*: sebenta de apoio às aulas teóricas da disciplina de Cartografia. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2018/2019. Disponível em: https://www.studocu.com/pt-br/document/universidade-estadual-paulista/cartografia/cartografia-teoria-2019/84547834. Acesso em: 30 set. 2024.

Essa apostila traz uma compilação de estudos teóricos sobre cartografia. As abordagens sobre representação cartográfica contribuíram para a composição do capítulo 8 deste volume.

Firkowski, H.; Sluter, C. R. 4 Projeções cartográficas. *In*: *Cartografia geral e projeções cartográficas*. Curitiba: Departamento de Geomática, Universidade Federal do Paraná (UFPR), 2008. p. 41-77. Disponível em: https://docs.ufpr.br/~firk/pessoal/projcart/Cap%204%20ProjCart.pdf. Acesso em: 1º out. 2024.

Esse trabalho apresenta a definição de projeção cartográfica, os métodos (planejamento, coleta, representação e dados geográficos) e os processos de abstração e de generalização cartográfica que devem ser aplicados em um mapa para se obter uma representação simplificada e/ou aproximada do mundo. Essas informações foram utilizadas para a elaboração da seção *Matemática e cartografia* do capítulo 8.

Fonseca, F. P.; Oliva, J. *Cartografia*. São Paulo: Melhoramentos, 2013 (Coleção Como Eu Ensino).

Os autores propõem uma nova reflexão sobre o estudo de mapas na Educação Básica, com base em uma metodologia de desnaturalização do mapa e de expressão cartográfica, de interpretação de mapas de ordem cultural e de imagens obtidas por satélites.

Fonseca, M. da C. F. R. (org.). *Letramento no Brasil*: habilidades matemáticas. São Paulo: Ação Educativa: Global, 2004.

O livro apresenta um levantamento de dados sobre habilidades de leitura e escrita matemática da população brasileira. O conteúdo fundamentou a escolha de metodologias utilizadas neste volume e em outros livros desta coleção.

Gardner, H. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Tradução: Maria Adriana V. Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

A obra explica as principais ideias relacionadas à aprendizagem e evidencia como elas podem ser aplicadas em sala de aula. Muitas das propostas desse livro consideram as diferentes maneiras de aprender correspondentes às múltiplas possibilidades da inteligência humana.

Hazzan, S. *Fundamentos de matemática elementar,* v. 5: combinatória e probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

O livro traz diversas definições e demonstrações que contribuíram para a fundamentação e para a construção dos conceitos desenvolvidos neste volume.

Howard, E. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

O livro apresenta a história da Matemática, desde a Antiguidade até os dias atuais, contextualizada pela observação da cultura de cada época retratada.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Coordenação de *Marketing*. Centro de Documentação e Disseminação de Informações. *Acesso e uso de dados geoespaciais*. Rio de Janeiro: IBGE, 2019 (Manuais Técnicos em Geociências, n. 14). Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca-catalogo?view=detalhes&id=2101675. Acesso em: 1º out. 2024.

Essa publicação apresenta metodologias para a utilização de dados geoespaciais, mediante os *softwares* SIG e QGIS, na manipulação, análise, edição, elaboração e impressão de mapas e cartogramas. Essas informações contribuíram para a elaboração da seção *Matemática e cartografia* do capítulo 8.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, [20--]. Disponível em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/# . Acesso em: 1º out. 2024.

Esse *site* contém ilustrações animadas de geografia e de cartografia, com mapas do Brasil e do mundo, que abrangem temas sobre população, clima, política e indicadores sociais, entre outros. As informações desse material contribuíram para explorar a história da cartografia explorada na seção *Matemática e cartografia* do capítulo 8.

Iezzi, G. *Fundamentos de matemática elementar,* v. 3: trigonometria. 9. ed. São Paulo: Atual, 2019.

Esse livro traz diversas definições e demonstrações que contribuíram para a fundamentação e a construção da unidade 3 deste volume.

Iezzi, G.; Dolce, O.; Murakami, C. *Fundamentos de matemática elementar,* v. 2: logaritmos. 10. ed. São Paulo: Atual, 2019.

A obra traz definições e demonstrações que contribuíram para a fundamentação e a construção da unidade 1 deste volume.

Iezzi, G.; Hazzan, S.; Degenszajn, D. *Fundamentos de matemática elementar,* v. 11: matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva. 2. ed. São Paulo: Atual, 2019.

Esse livro traz diversos conteúdos que contribuíram para a fundamentação e a construção do capítulo 3 deste volume.

Krulik, S.; Reys, R. E. (org.). *A resolução de problemas na matemática escolar*. Tradução: Hygino H. Domingues; Olga Corbo. São Paulo: Atual, 2012.

Coletânea de artigos que discutem metodologias de ensino da Matemática. Algumas ideias apresentadas nesse livro contribuíram para a concepção deste volume.

Lindquist, M. M.; Shulte, A. P. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

O livro traz vinte artigos de especialistas da área que tratam de rever a metodologia do ensino de Matemática. Esses textos contribuíram para a fundamentação e a elaboração de conceitos desenvolvidos neste volume.

Mankiewicz, R. *The history of Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press, 2000.

Esse livro apresenta a história da Matemática com reproduções de imagens da Pré-História, da Idade Média e das tábuas de barro babilônicas, além de imagens computacionais.

Neves, I. C. B. (org.). *Ler e escrever*: compromisso de todas as áreas. Porto Alegre: Ed. da UFRGS, 2011.

Esse livro foi estruturado coletivamente, com o intuito de propor situações direcionadas ao trabalho integrado de professores de diversas áreas do conhecimento. As ideias e os saberes apresentados nessa obra fundamentaram a concepção de algumas atividades sugeridas neste volume.

Pais, M. J. *et al*. *Educação financeira*. São Paulo: Leya, 2016.

O livro apresenta princípios básicos da Economia que podem ser úteis na formação de cidadãos, ao conduzir à reflexão sobre hábitos de consumo pessoais e decisões relacionadas ao dinheiro, além de auxiliar na compreensão de como esse recurso circula na sociedade. As informações obtidas nessa obra foram utilizadas na concepção de assuntos abordados no capítulo 3 deste volume.

Paraná. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. *Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE*: produções didático-pedagógicas. Curitiba: Seed/Sued/DPPE/PDE, 2014.Versão *on-line*. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unioeste_mat_pdp_neiva_rosa.pdf. Acesso em: 1º out. 2024.

Esse material apresenta uma unidade didática sobre o estudo de trigonometria e comenta sua relevância para o desenvolvimento tecnológico. O assunto abordado contribuiu para a elaboração do tópico “Fenômenos periódicos e as funções seno e cosseno” do capítulo 9 deste volume.

Powell, A.; Bairral, M. *A escrita e o pensamento matemático*: interações e potencialidades. Campinas: Papirus, 2014 (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

Os autores abordam a importância da escrita na exploração de ideias e raciocínios matemáticos. As ideias desse material foram utilizadas na concepção deste volume.

Pozo, J. I. (org.). *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O autor defende a ideia de que a resolução orientada de problemas promove o ensino de procedimentos para esse fim e ressalta o papel fundamental do docente, ao incentivar os estudantes a criar estratégias para isso. A reflexão proposta no livro contribuiu para a concepção geral deste volume.

Silva, R. J. A. *Contexto e aplicações das funções exponenciais no Ensino Médio*: uma abordagem interdisciplinar. 2015. 86 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2015. Disponível em: http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/18092015Ricardo-Jose-Aguiar-Silva.pdf. Acesso em: 1º out. 2024.

Essa dissertação trata do processo de aprendizagem de estudantes do Ensino Médio no estudo de funções exponenciais e da utilização desse conceito no mundo do trabalho. Esse conteúdo contribuiu para nortear o estudo de funções no capítulo 1 deste volume.

Smole, K. S.; Diniz, M. I. (org.). *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

A obra levanta reflexões com base nas diferentes teorias contemporâneas de ensino e aprendizagem e apresenta propostas pedagógicas inovadoras e exemplos de produções de estudantes. As informações contidas nesse livro contribuíram para a concepção geral deste volume.

Timbó, M. A. *Elementos de cartografia*. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)/Departamento de Cartografia, 2001. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4522618/mod_resource/content/1/elementoscartografia_timbo.pdf. Acesso em: 4 nov. 2024.

O material aborda conhecimentos básicos de cartografia para pesquisadores e profissionais que atuam na área de geoprocessamento. Essas informações contribuíram para a elaboração de algumas ideias abordadas na seção *Matemática e cartografia* do capítulo 8.

Tomaz, V. S.; David, M. M. M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2021 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

A obra expõe algumas vivências em sala de aula para contextualizar diferentes abordagens interdisciplinares no ensino da Matemática. O conteúdo foi utilizado na criação de atividades e na concepção de algumas seções deste volume.

MANUAL DO PROFESSOR

APRESENTAÇÃO

OLÁ, PROFESSOR. BEM-VINDO!
OLÁ, PROFESSORA. BEM-VINDA!

Escrevemos estas orientações com o objetivo de apresentar a você como pensamos ao desenvolver esta coleção e como ela pode contribuir para que os estudantes aprendam mais e melhor.

Sabemos que o livro didático é apenas um recurso no processo dinâmico e complexo que envolve o ensino. Acreditamos que ele pode orientar um percurso e dar apoio com atividades que conduzam os estudantes ao longo dessa caminhada para a aprendizagem.

Com foco no desenvolvimento de competências e de habilidades preciosas para a vida dos estudantes tanto na escola quanto fora dela, os temas e os conceitos apresentados nesta coleção compõem um cenário de significados intencionalmente elaborados dentro de uma lógica de sentidos que pode facilitar conexões entre ideias e, assim, favorecer a formação matemática dos jovens em sua última etapa da Educação Básica.

Por outro lado, temos consciência de que esse desenvolvimento depende não apenas do livro em si, mas também da maneira como ele é trabalhado em sala de aula. Por isso, as orientações a seguir apresentam sugestões didáticas e metodológicas – testadas e aprimoradas por nós ao longo de muitos anos de pesquisa em sala de aula – que constroem a relação entre o conhecimento específico e a formação integral dos estudantes.

Esperamos que a leitura dessas orientações colabore com seu trabalho, não só no sentido da sua formação profissional, mas especialmente para que o estudo da Matemática que idealizamos se torne instrumento transformador para os jovens, proporcionando a eles modos valiosos e potentes de pensar, além de posturas críticas, determinadas e reflexivas acerca da vida e do mundo.

Bom trabalho!

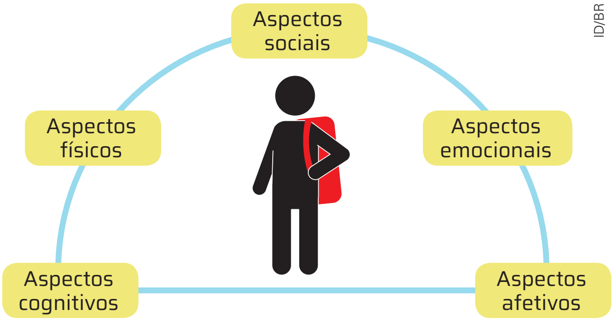
Os autores

SUMÁRIO

PARTE 1 • FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO--METODOLÓGICA E ORGANIZAÇÃO DA OBRA

Esta coleção se insere como uma proposta para assegurar uma das principais premissas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018a) para a etapa do Ensino Médio: o protagonismo do jovem em fazer escolhas e ter voz ativa e responsável na construção de sua formação nesta fase final da Educação Básica.

Alguns princípios da BNCC, presentes também nas Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM) (DCNEM/2011), orientaram a construção dessa proposta de ensino, tanto em seu conteúdo, quanto no modo como foi estruturada. Um desses princípios é a formação integral do estudante, a qual abrange valores e aspectos físicos, cognitivos e socioemocionais. O jovem do século XXI deve ser considerado por inteiro, em especial no que diz respeito a seu direito, assegurado por lei, de ter formação ampla. Assim, a escola se constitui como espaço privilegiado de aprendizado, no qual ele tem acesso a novos conhecimentos, com a possibilidade de ampliar seus horizontes e vivenciar um mundo de descobertas. Ou seja, a escola deve ser o lugar para pensar, projetar, questionar, fazer-se ouvir, aprender a argumentar, a conviver e a desenhar seu futuro, como indivíduo e como parte da coletividade.



ID/BR

Um outro princípio se fundamenta na concepção da juventude como fase importante da vida, percebe os jovens como sujeitos sociais, reconhece a diversidade entre eles como valor e cria condições para que construam sua identidade e estruturem seu projeto de vida. Por isso, esta obra busca propiciar o desenvolvimento de jovens protagonistas que conheçam seus interesses e anseios e se posicionem com fundamento em suas escolhas, decisões e ações, tanto no ambiente escolar quanto fora dele.

Nesta coleção, deu-se também atenção ao contexto educacional contemporâneo, com suas características e seus desafios, levando em consideração as seguintes questões: Como garantir aprendizagens significativas, promover o desenvolvimento de competências e, ao mesmo tempo, dialogar com os interesses dos jovens estudantes, de modo a proporcionar uma relação positiva com o conhecimento? Como construir uma coleção que responda de maneira não fragmentada aos princípios estabelecidos? Como preparar as novas gerações para conduzir com autonomia situações de grande complexidade, seja no contexto escolar, seja em outros âmbitos da vida?

A inserção dos jovens do Ensino Médio no espaço e no tempo da vida social implica permitir que eles vivenciem situações próximas da realidade e do mundo do trabalho. Isso ultrapassa o conjunto de competências da cognição, uma vez que inclui a oportunidade de aprender a se colocar de modo participativo, em cenários intencionalmente planejados para seu desenvolvimento integral. Também é importante que esse desenvolvimento ocorra em um ambiente em que errar, tentar novamente e rever decisões façam parte do processo de aprender e de se preparar para o futuro, com conhecimento e espírito crítico.

O JOVEM DO ENSINO MÉDIO

Considerando as diferentes culturas juvenis, é interessante destacar que o princípio para a concepção desta obra visa compreender o jovem em suas peculiaridades para desenvolver um trabalho pedagógico cujo propósito é a formação integral dos estudantes do Ensino Médio.

> A juventude é, ao mesmo tempo, uma condição social e um tipo de representação. De um lado há um caráter universal, dado pelas transformações do indivíduo numa determinada faixa etária. De outro, há diferentes construções históricas e sociais relacionadas a esse tempo/ciclo da vida (Dayrell; Carrano; Maia, 2014, p. 111).

É preciso considerar cada jovem como sujeito de direitos (muitas vezes negligenciados tanto pela escola quanto pela sociedade), com identidade própria, levando em conta suas diferentes vivências, trajetórias familiares, escolares e comunitárias, moradias, experiências e rotinas. E tudo isso faz parte do que planejamos para sua formação, de modo que os estudantes consigam lidar com a complexidade da vida contemporânea, com todas as incertezas próprias do futuro para o qual precisam se preparar.

Ao longo do Livro do Estudante e das orientações deste manual, o professor conta com orientações práticas para o ensino direcionado a esse jovem. Sempre que pertinente, recomenda-se que o estudante participe de atividades nas quais ele se encontre cognitivamente ativo e integralmente mobilizado, para que se perceba como produtor de conhecimentos e bens culturais, deixando de ser apenas um consumidor de informações.

O JOVEM NA ESCOLA DO ENSINO MÉDIO: SEUS PROJETOS E SUA INDIVIDUALIDADE

A área de Matemática não pode considerar o estudante apenas do ponto de vista deste componente. Uma visão mais ampla nos mostra que, para os jovens brasileiros, a escola ganha diferentes sentidos em função da diversidade de juventudes. Para alguns, ela é parte das expectativas e do planejamento familiar: percebem-na como um passo essencial para acessar a universidade e o mundo do trabalho. Para outros, estar na escola é um desafio cotidiano, em razão de demandas pessoais e familiares, como trabalhar para produzir renda e ajudar a sustentar a família. Há também os que buscam na escola uma possibilidade de ter acesso a outros direitos, como a alimentação e a segurança. Esses e outros tantos sentidos marcam a heterogeneidade de projetos e de posturas dentro da vivência escolar.

Reconhecer as tensões e os desafios presentes nas relações e nas expectativas entre os jovens e deles com seus professores e demais integrantes da comunidade escolar é o primeiro passo para construir pontes entre os interesses juvenis e a própria escola. Trata-se de repensar a escola e seus sujeitos, considerando o contexto contemporâneo, com suas complexidades, possibilidades, limitações e dilemas.

Um caminho apontado pelas DCNEM e pela BNCC refere-se à promoção da participação significativa dos jovens na escola, de modo que eles possam expressar conhecimentos, anseios e necessidades e fazer escolhas. Isso significa romper com a visão de que cabe aos estudantes o exclusivo papel de assistir às aulas e realizar as tarefas propostas, a fim de percebê-los como protagonistas nos processos de tomada de decisão e do processo educativo.

Em relação ao ensino de Matemática, é preciso observar que cada uma das competências específicas e muitas das habilidades associadas a elas apontam para o estudante que se espera formar ao longo do Ensino Médio, não apenas no sentido cognitivo, mas também como indivíduo com um projeto de vida em construção, conquistando saberes para o exercício consciente da cidadania, o que inclui a possibilidade de avançar em seus estudos após o Ensino Médio. A Matemática, especificamente, traz um conjunto importante de saberes e de maneiras de pensar que tanto capacita o estudante para aprender em diferentes áreas quanto favorece a autoconfiança e a determinação para enfrentar os desafios da vida e a realização de seus projetos pessoais.

Por tudo isso, as escolhas metodológicas são essenciais para promover o aprendizado de estudantes com diferentes perfis e modos de aprender, propiciando várias oportunidades para que eles assumam o papel de protagonistas na aquisição de conhecimentos.

Nesta coleção, as orientações apresentadas para o desenvolvimento das atividades e as propostas das seções proporcionam aos estudantes a vivência de diferentes situações e permitem que o professor identifique potencialidades, dificuldades, repertórios prévios e preferências em sua turma. Desse modo, torna-se possível que todos os estudantes sejam valorizados e acolhidos em suas particularidades, tendo o professor como mediador de seu processo de aprendizagem e os colegas como parceiros nessa construção.

As propostas didáticas da problematização e da comunicação favorecem a integração de estudantes com diferentes perfis, pois todos podem contribuir com o que sabem, com o que entenderam e até mesmo com suas incompreensões para rodas de conversa produtivas e colaborativas. Assim, cada um pode contribuir com as capacidades de que já dispõe (uns são bons oradores; outros, bons produtores de texto; outros lidam bem com tecnologias; outros gostam de pesquisar; outros preferem construir esquemas e desenhar) e tem a oportunidade de desenvolver outras capacidades à medida que participa de trabalhos colaborativos e integrados.

Cada livro desta coleção foi idealizado para ser lido pelo estudante. O texto fala com ele e traz atividades com diferentes níveis de complexidade, de modo que todos possam participar. E, por meio da **avaliação formativa**, os estudantes podem ser acolhidos em suas diferenças, personalidades, interesses, estilos e ritmos, sendo encaminhados para saber atuar no mundo, interagindo com outras pessoas e aprendendo na relação que estabelecem com elas, sempre de maneira respeitosa e ética.

INCLUSÃO DE ESTUDANTES COM DEFICIÊNCIA

Para aprofundar as percepções sobre a múltipla diversidade de condições dos estudantes do Ensino Médio, é importante identificar as especificidades das deficiências e dos transtornos. De acordo com o artigo 2º da Lei n. 13 146, de julho de 2015, que instituiu o Estatuto da Pessoa com Deficiência, “Considera-se pessoa com deficiência aquela que tem impedimento de longo prazo de natureza física, mental, intelectual ou sensorial”.

Por sua vez, aqueles com transtornos do neurodesenvolvimento podem apresentar alterações no desenvolvimento psicomotor, movimentos estereotipados, além de apresentar dificuldades relativas à comunicação e à interação social. Esses transtornos englobam uma diversidade de condições que podem variar em nível e em grau, como ocorre com o transtorno do espectro autista (TEA), a deficiência intelectual (DI), o transtorno do déficit de atenção e hiperatividade (TDAH) e os transtornos de aprendizagem, dos quais os mais comuns são a dislexia, a discalculia e a disgrafia.

É necessário compreender os desafios enfrentados pelos jovens que têm transtornos dessa ordem. Muitos também podem apresentar dificuldades relativas à compreensão das emoções dos outros e ao aprendizado acadêmico, além de dificuldades comportamentais, o que demanda a adoção de abordagens pedagógicas específicas para atender às necessidades de cada um.

Outra estratégia eficaz é trabalhar com os jovens habilidades de resolução de problemas e conflitos. Aqueles que apresentam tais transtornos podem se sentir desafiados em situações de conflito, o que pode ser sanado ou amenizado mediante o ensino de habilidades de negociação, escuta e empatia.

Por outro lado, as deficiências agrupam grande diversidade de condições humanas e podem se apresentar em diferentes dimensões, como a intelectual e a física (no caso de pessoas com deficiência auditiva ou visual, de pessoas em cadeiras de rodas, etc.).

Assim como ocorre com os transtornos, é importante garantir ambientes que possam receber estudantes em tais condições e preparar-se para incentivá-los de maneira específica, adaptando propostas pedagógicas e ampliando o repertório escolar relacionado a esse cenário. Desse modo, a arquitetura inclusiva é essencial para facilitar o acesso à escola não só aos estudantes com condições físicas específicas, mas também a outras pessoas que tenham dificuldade de locomoção.

A inclusão desses jovens requer uma política de gestão escolar que garanta a formação deles de acordo com seus direitos e suas possibilidades. É preciso incluir a disponibilização de material didático adaptado, a implementação de estratégias de ensino diferenciadas, como currículo individualizado, o suporte emocional e comportamental (se necessário), a tutoria e o uso de recursos digitais e até mesmo visuais (como cartões de emoções, que ajudam a identificar os próprios sentimentos e compartilhá-los com outras pessoas).

Especificamente em relação à Matemática, pautada na problematização e na comunicação, é preciso destacar que algumas das orientações vão ao encontro das necessidades desses jovens, como é o caso das propostas de trabalho colaborativo, em duplas ou em grupos; a expressão oral ou a dramatização como recursos para entender ou explicar o pensamento; e ainda, o painel de soluções (descrito mais adiante), no qual diferentes formas de pensar e de registrar são válidas e valorizadas.

No entanto, não bastam as estratégias de ensino: é necessário repensar o que ensinar a esse jovem em função de suas possibilidades, estabelecendo um currículo individualizado em relação a todos os componentes. Algumas orientações que podem auxiliar seu planejamento para esses estudantes são:

- **Organizar o trabalho**, de modo que todos saibam o que se espera de cada um. Comece a aula combinando com a turma o que será feito, as tarefas e, se for o caso, as expectativas específicas para os estudantes com deficiência.
- **Selecionar conteúdos** relacionando os conceitos matemáticos ao contexto e às experiências dos estudantes.
- **Utilizar recursos digitais e ferramentas *on-line*** que os estudantes possam acessar de qualquer lugar, inclusive permitindo retomadas ou preparação prévia. As plataformas de aprendizagem *on-line*, os vídeos educativos e os aplicativos interativos podem ser muito úteis.
- **Planejar o ensino colaborativo** por meio do trabalho em grupo e a aprendizagem colaborativa. Diferentes estudantes podem se beneficiar ao compartilhar seus conhecimentos e habilidades.

Por fim, para a real inclusão de estudantes com deficiência, deve-se ter sempre em mente que a ideia é evidenciar, bem como assegurar e promover, em condições de igualdade, que a pessoa com deficiência faz parte do grupo social e deve ser aceita do modo como se apresenta e que o território escolar deve ser um espaço de acolhimento e de cidadania.

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

No contexto da educação integral, de acordo com a BNCC, competência pode ser entendida como:

> […] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 2018a, p. 8).

Isso significa que o desenvolvimento de competências envolve a articulação dos conhecimentos aprendidos, das habilidades desenvolvidas, das atitudes praticadas e dos valores assimilados, tendo em vista os aspectos pessoais, sociais e profissionais de cada indivíduo. Tais competências abrangem as dimensões cognitivas e socioemocionais, entre outras.

Cabe explicitar os múltiplos aspectos relacionados à dimensão socioemocional mencionada pela BNCC:

Dimensão socioemocional

- **Relacionar-se consigo mesmo, desenvolvendo o autoconhecimento e aprendendo a lidar com emoções.**
- **Colaborar com o outro (colegas, professores, etc.), aprendendo conhecimentos significativos.**
- **Fazer escolhas com base em valores e em seu projeto de vida.**
- **Resolver problemas de modo criativo, relacionando conhecimentos, pontos de vista, ideias e contextos diversos.**
- **Definir objetivos e persistir em alcançá-los, em um exercício de projetar-se no futuro e seguir na direção desejada.**
- **Abrir-se para o novo, com curiosidade.**
- **Conectar-se com outros, sejam eles pares, adultos, grupos ou coletivos.**

Ao relacionar as competências cognitivas e socioemocionais à formação integral do sujeito ao longo de toda a Educação Básica, a BNCC formaliza e legitima uma educação comprometida em integrar esses conhecimentos. Eles devem ultrapassar os muros escolares e dialogar com a realidade e a vida de cada estudante, para que - com base em princípios éticos, estéticos e políticos - ele participe da construção de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva.

A BNCC menciona, ainda, a necessidade de a escola do Ensino Médio garantir aos jovens "a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática" (Brasil, 2018a, p. 467). Para isso, é importante:

- perceber a aprendizagem como um trabalho contínuo, a ser aprimorado permanentemente;
- promover situações que possibilitem aos estudantes "compreender e utilizar os conceitos e teorias que compõem a base do conhecimento científico-tecnológico, bem como os procedimentos metodológicos e suas lógicas" (Brasil, 2018a, p. 467);
- conhecer e utilizar as linguagens científicas, de modo a compreender e compartilhar conhecimentos;
- aprender e praticar múltiplos usos de tecnologias digitais.

AS COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Esta coleção cumpre a função de assegurar que o Ensino Médio não descuide do desenvolvimento das dez competências gerais correspondentes às demandas da Educação Básica (Brasil, 2018a). Essas competências gerais resumem os conhecimentos, as habilidades, as atitudes e os valores essenciais que devem ser garantidos na formação escolar dos estudantes, a fim de que eles se desenvolvam como pessoas éticas e justas, respeitando os direitos humanos e promovendo a sustentabilidade ambiental.

Espera-se, assim, que os estudantes sejam capazes de refletir e de buscar soluções para desafios individuais e coletivos, construindo novos saberes e novas formas de pensar e de atuar. Nesse sentido, essas competências sinalizam não apenas o que os estudantes devem aprender na escola do ponto vista cognitivo, mas qual perfil de estudante se pretende formar nas escolas brasileiras, com capacidades cognitivas, sociais e emocionais importantes para a construção de seu projeto de vida e para sua atuação como cidadão.

De fato, são essas dez competências, apresentadas a seguir, que geram a **interdisciplinaridade** em toda a Educação Básica, quando os componentes curriculares e as áreas de conhecimento têm como meta o desenvolvimento de todos os estudantes em direção a essas competências.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(Brasil, 2018a, p. 9-10.)

A concepção de educação preconizada pela BNCC acarreta algumas questões importantes para a organização dos currículos e da escola, e é nesse cenário que esta coleção se insere com intencionalidade e metodologia que vão ao encontro do jovem do século XXI, colocando-o como centro das escolhas curriculares e do planejamento. Nesse contexto, as competências cognitivas e socioemocionais são inseparáveis, do ponto de vista da aprendizagem, em todas as áreas do conhecimento.

Esta coleção privilegia a aquisição das competências gerais, com a certeza de que são particularmente adequadas ao desenvolvimento do pensamento crítico, da argumentação, da criatividade, da colaboração e da capacidade de resolver problemas. Desse modo, temos como objetivo e entendemos:

- o pensamento crítico como a capacidade de analisar, relacionar e sintetizar ideias, fatos e situações, assumindo posicionamentos fundamentados. Saber posicionar-se e assumir a decisão tomada pressupõe o conhecimento, mas não se confunde com ele;
- a argumentação como parte da comunicação em toda atividade humana e nas práticas socioculturais. Isso significa ser capaz de exteriorizar o pensamento para se fazer entender pelo outro. A troca recíproca de argumentos consistentes permite o avanço e a construção de ideias, ações e emoções novas e mais bem estruturadas;
- a criatividade como a capacidade de conectar de modo diferente conhecimentos anteriores ou de buscar soluções novas para situações diversas, ou, ainda, a habilidade de relacionar fatos, ideias e processos na elaboração de algo inédito. A criatividade não deve ser confundida com a genialidade nem com a criação a partir do zero. Trata-se de um esforço interno para pensar de forma diferente do que já está estabelecido, visando alcançar um objetivo;
- a colaboração, essencial no século XXI, como a capacidade de atuar em sinergia com os outros, de modo respeitoso e responsável. Ser colaborativo envolve a empatia e o respeito às diferenças, assim como saber ceder, liderar e ser liderado;
- a capacidade de resolver problemas como a prática de identificar situações que merecem ou precisam ser resolvidas nos mais diversos aspectos, dentro e fora do espaço escolar. A resolução de problemas exige conhecimentos e maneiras de pensar na construção de estratégias e na busca de soluções, assim como o aprendizado no processo de resolução e de transposição e adaptação desses saberes a outros contextos e situações.

Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias

Além de possibilitar o trabalho com as competências gerais da BNCC, a coleção contribui para o desenvolvimento das competências específicas e das habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias.

Indicamos para o professor as competências específicas e as habilidades que serão desenvolvidas ao trabalhar cada capítulo, bem como as competências específicas das outras áreas de conhecimento que também serão favorecidas.

A seguir, estão as competências específicas relativas à área de Matemática e suas Tecnologias previstas na BNCC.

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

(Brasil, 2018a, p. 531.)

Conexão entre as competências gerais e as competências específicas e as habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias

Quando se assume uma concepção de ensino e aprendizagem pautada no desenvolvimento de competências e habilidades, adota-se uma nova maneira de olhar para como se ensina e para como se aprende. Assim, o "como fazer" possibilita o desenvolvimento de processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas.

No contexto das competências e habilidades, a atuação pedagógica não pode ser meramente transmissiva e restrita a um conjunto de conteúdos tradicionalmente estabelecidos desde o século XX. Ao contrário, é preciso que ela seja uma prática orgânica, dinâmica, interativa, colaborativa, em que os estudantes atuem como protagonistas, considerando que o desenvolvimento das competências é, em última instância, o objetivo da Educação Básica.

A prática pedagógica que se espera do professor, portanto, não pode ser meramente instrucional; ela deve se pautar em situações de aprendizagem nas quais os objetos de conhecimento, objetivos de aprendizagem e conteúdos específicos da área estejam relacionados e a serviço das habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes, favorecendo a construção de novos saberes por meio da apropriação ativa e da transferência dos conhecimentos.

As habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias são desenvolvidas ao longo dos três volumes por meio da compreensão de determinados conceitos, do entendimento e da análise de como se dá a resolução de uma atividade e da resolução efetiva de atividades de diferentes tipos. Dessa forma, os estudantes expandem suas opiniões, confrontando-as com o que professores e outros estudantes pensam. A situação conflituosa passa a contar com ferramentas científicas que favorecem a reflexão e podem ser fatores de mediação, diálogo e respeito para com o diferente.

A maneira de ensinar é o ponto-chave para o desenvolvimento das competências gerais e específicas propostas pela BNCC. A metodologia de ensino é o elo entre as diversas habilidades e a formação integral dos estudantes. Por exemplo, ao propor a aprendizagem colaborativa em atividades em duplas ou em grupos, trabalhamos especificamente as competências gerais **8** e **9**, ajudando o jovem a conhecer a si mesmo e ao outro e a lidar com o diferente de modo respeitoso e colaborativo, independentemente de qual seja a habilidade específica da área que é o foco da atividade. Por outro lado, no desenvolvimento de competências específicas, como a **1** e a **2**, propícias a contextos mais significativos, ao conhecimento matemático relacionado a ciências em geral e também a questões socioeconômicas, de saúde ou sustentabilidade, favorecemos a pesquisa e a ampliação de conhecimentos dos jovens, fomentando também o desenvolvimento da competência geral **2** ao levá-los a investigar e se posicionar diante de diferentes questões do mundo atual. Ou, ainda, nas atividades com apoio ou investigação de um recurso tecnológico, os estudantes têm oportunidade de desenvolver as competências gerais **5** e **6** ao utilizar procedimentos e conceitos matemáticos para interpretar e construir modelos e ao utilizar diferentes representações e linguagens da Matemática para buscar ou comunicar soluções para determinadas situações.

Para isso, a coleção propõe o uso de **metodologias ativas**, como a aprendizagem colaborativa e entre pares e a aprendizagem a partir de problemas, não apenas para o desenvolvimento de habilidades, mas também para integrar saberes e promover uma atitude crítica, reflexiva e positiva diante do conhecimento, envolvendo atividades que coloquem os estudantes em situações de cooperação, interação, diversidade e responsabilidade pelo que fazem e pelo que aprendem.

CONEXÃO ENTRE AS COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DA ÁREA DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E A ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Entre outras ações voltadas à promoção de uma educação global e abrangente, que envolva educadores, familiares e comunidade escolar, a BNCC propõe:

> [...] decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem (Brasil, 2018a, p. 16).

No contexto da formação integral dos jovens e da promoção de habilidades, a interdisciplinaridade vai além, construindo oportunidades para que o estudante mobilize aprendizados de múltiplas áreas para desenvolver novas formas de pensar e resolver problemas, sem que cada tema ou procedimento fique restrito a um único componente curricular.

Especificamente na área de Matemática e suas Tecnologias, os temas e os contextos abordados ao longo desta coleção propiciam uma integração com as competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. As ciências, ao utilizar a linguagem matemática para descrever e interpretar fenômenos naturais e sociais, apresentam maneiras de pensar e habilidades que se assemelham às da Matemática, como análise crítica, interpretação de dados e de textos verbais, a investigação e o posicionamento diante de questões e fenômenos em diversos contextos.

A implementação dessa importante perspectiva de atuação interdisciplinar envolve, assim, a colaboração entre professores de diferentes áreas visando a uma abordagem mais ampla e integrada do aprendizado, sempre com o objetivo comum de fomentar nos estudantes habilidades como pensamento crítico, argumentação, criatividade e resolução de situações-problema e de capacitá-los a aplicar conhecimentos diversos para analisar e enfrentar desafios do mundo real de maneira eficiente e inovadora.

A ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

O reconhecimento da relação entre a Matemática e a formação integral dos estudantes implica propostas de ensino, atividades e planejamento das aulas com intencionalidade, de modo a contemplar toda a complexidade de aprendizagens que essa área pode promover.

O ensino da Matemática, visando a uma formação integral ao longo da Educação Básica, deve considerar o tempo em que vivemos e responder às questões que a sociedade nos coloca, o que impõe uma mudança significativa no modo de ensinar. Isso requer escolhas metodológicas que considerem um mundo sem fronteiras para o conhecimento, no qual a aprendizagem só pode ocorrer de modo colaborativo.

Nesse cenário, a comunicação e o enfrentamento de situações-problema complexas mostram-se comprovadamente eficazes para o desenvolvimento de múltiplas capacidades cognitivas e de posturas mais críticas e criativas. Do mesmo modo, a possibilidade de vivenciar diferentes maneiras de ver, dizer e compreender conceitos e ideias abre caminho para o convívio respeitoso e o autoconhecimento, tão necessários na construção de cada identidade e nas escolhas para a vida.

Considerando que as competências cognitivas e socioemocionais são indissociáveis na aprendizagem de Matemática, as metodologias sugeridas e que integram esta coleção foram selecionadas exatamente por sua potencialidade para a formação integral. O objetivo é dar consistência a essa proposta unindo todas as áreas e promover a aprendizagem dos conceitos e das ideias importantes de cada área do conhecimento, inclusive da Matemática.

Na escola, a Matemática passa a ser entendida também como uma ciência com características próprias de pensar e de investigar a realidade e com linguagem específica para descrevê-la. Ao mesmo tempo, colabora com as demais áreas de conhecimento, como a de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e a de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, para que, juntas, possam desenvolver seus modelos e analisar informações.

A Matemática aplicada e também como ciência pura utiliza, em sua linguagem, códigos e símbolos, desenhos, algoritmos, fórmulas e gráficos desenvolvidos ao longo da história. Esse caráter a aproxima da área de Linguagens quando se torna ferramenta para a representação de fenômenos e informações e a quantificação de dados em diferentes áreas do conhecimento.

Ao analisar a BNCC e as facetas da Matemática na escola, é preciso destacar que essa área assume o compromisso com o **letramento matemático** na seguinte perspectiva:

> Letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a Matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias (Brasil, 2012, p. 1).

Por isso, o ensino de Matemática deve ir além dos objetos de conhecimento e das habilidades estabelecidas pela BNCC e assumir, por meio de escolhas metodológicas, a meta de ensinar a linguagem, os conceitos e os procedimentos da Matemática para a resolução de situações-problema nos mais diversos contextos e campos do conhecimento humano.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICO-METODOLÓGICAS PARA A ÁREA DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

A BNCC traz orientações importantes sobre processos de ensino mais adequados para o letramento matemático dos estudantes no Ensino Médio. São eles: a problematização, a modelagem, a investigação e os projetos.

> **[...] Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem** podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (Brasil, 2018a, p. 266, grifo nosso).

Essas orientações devem ser entendidas como uma possível proposta para o ensino coerente com os processos de resolução de problemas e de investigação na forma da problematização; o desenvolvimento de projetos, presente em propostas que ampliam o livro-texto; e a utilização da linguagem matemática para expressar ideias, conceitos e procedimentos, parte importante da formação de leitores e produtores de texto nessa área.

As abordagens metodológicas que inspiraram a concepção desta coleção fundamentam-se na finalidade de contribuir para o processo de ensino-aprendizagem de Matemática numa perspectiva problematizadora, que busca favorecer o trabalho coletivo e colaborativo, bem como promover a autonomia dos estudantes estimulando o constante exercício de reflexão sobre suas aprendizagens.

Algumas dessas abordagens metodológicas para a formação integral dos estudantes podem ser descritas da maneira que se segue.

Problematização: aulas problematizadoras

O desenvolvimento da resolução de problemas depende de as aulas de Matemática serem planejadas intencionalmente para constituir um ambiente repleto de situações-problema, ou seja, uma aula problematizadora – uma aula em que o desafio é constante, na qual experimentar, formular hipóteses, investigar e até mesmo errar são ações frequentes. Esse tipo de ambiente pedagógico possibilita integrar todos os estudantes, convidando-os a usar a Matemática para conhecer a si mesmos, enquanto desenvolvem suas capacidades intelectuais, bem como as habilidades de observação, exploração, análise e reflexão. Além disso, os estudantes com baixa motivação para a Matemática perdem o medo de enfrentar matematicamente situações que lhes são propostas e se tornam mais capazes de controlar os próprios mecanismos de pensamento.

De acordo com Vila e Callejo (2007), são três os fatores que influem em maior grau na efetividade do raciocínio matemático: o conhecimento dos conteúdos matemáticos, a competência no uso dos processos de investigação matemática e a confiança na capacidade de enfrentar e vencer os desafios propostos.

A confiança é fruto da experiência constante de resolver problemas, da presença pedagógica dos professores e de uma avaliação formativa que acompanha e intervém sempre no sentido de promover a aprendizagem.

Raciocinar matematicamente permite desenvolver algumas maneiras de pensar muito próprias da Matemática, entre as quais destacamos o pensar indutivo, o dedutivo, o espacial e o não determinístico. Os jovens aprendem a raciocinar nessas diversas modalidades a partir das evidências que encontram em suas explorações e investigações, baseando-se no que já sabem que é verdade. Aprendem, ainda, a reconhecer as características de um argumento aceitável em Matemática.

Eles desenvolvem raciocínios cada vez mais elaborados, envolvendo análise, comprovação, avaliação, explicação, inferência, justificativa e generalização, se expostos a um ambiente que valoriza a comunicação matemática. Esse ambiente, propício ao desenvolvimento, é criado quando os estudantes têm a oportunidade de debater pontos de vista, explicar e justificar a resolução de um problema, uma inferência ou uma regularidade identificada; deduzir e justificar estratégias usadas e conclusões obtidas; adaptar o conhecido ao desconhecido; transferir uma aprendizagem de um contexto para outro; provar que algo é verdadeiro ou refutar uma hipótese, buscando um contraexemplo para uma conclusão falsa; entre outras possibilidades.

Mobilizar a turma propondo problemas e questões não é o suficiente para o desenvolvimento integral. Essa formação depende também do respeito à diversidade dos estudantes e de suas formas de aprender. Daí a necessidade de complementar ou de utilizar as propostas do livro didático de modo diversificado, promovendo a aprendizagem colaborativa por meio de pesquisas e projetos, com apoio da tecnologia e de textos complementares que podem despertar o interesse de estudantes com diferentes perfis. Alguns exemplos podem ser identificados nas orientações de cada capítulo e nas seções ***Para explorar*** e ***Matemática e...*** presentes no Livro do Estudante. A aula problematizadora se completa com uma estratégia de ensino muito efetiva para a aprendizagem, parte integrante da metodologia ativa de aprendizagem entre pares, denominada painel de soluções.

Painel de soluções

No painel de soluções, os estudantes apresentam diferentes soluções para um problema ou apenas parte delas, com estratégias de resolução. Fisicamente, esse painel pode ser feito na lousa, de modo coletivo, promovendo um debate entre o estudante que apresenta sua solução e os demais colegas. Assim, o painel de soluções é um espaço de discussão no qual os estudantes podem contar aos colegas as escolhas que fizeram para resolver um problema e a maneira que utilizaram para representar suas ideias. Podem também analisar em profundidade duas ou três resoluções com estratégias diferentes para verificar características comuns e diferenças entre elas, posicionando-se em relação a cada resolução.

Assegurar esse espaço é uma maneira de intervenção didática que contribui para a formação integral dos jovens e para o desenvolvimento das habilidades de argumentação e colaboração. Com isso, é possível que a turma conheça diferentes caminhos para a resolução de uma situação e vivencie um momento valioso no qual as estratégias incorretas podem ser discutidas de modo que todos percebam em que erraram e como podem avançar.

Cabe ao professor, como mediador e coordenador da atividade, incentivar a argumentação e o respeito por opiniões diferentes. Isso pode ser feito pela problematização, levantando questões como: Como os dados foram organizados? Todos resolveram da mesma maneira? Quais semelhanças e diferenças vocês identificam nas resoluções?

A problematização, portanto, pode ser feita também no caso de incorreções. Não se trata de detectar erros, mas de aprender com eles, orientando os estudantes para que investiguem e reflitam em um ambiente de confiança, sem julgamentos. Nesse sentido, esse recurso é muito inclusivo, pois nele todos podem colaborar e os erros são bem-vindos como oportunidades de reflexão e de novas aprendizagens.

Para o professor, o painel de soluções é um recurso que permite a observação e o registro das aprendizagens e de eventuais dificuldades de cada estudante, à medida que maneiras diversas de pensar ou de registrar ideias são expostas e discutidas.

Apesar do destaque dado à problematização como forma específica e central das aulas de Matemática, ela se potencializa e se complementa com os demais processos matemáticos para o ensino, uma vez que são eles que estabelecem o ambiente e o conjunto de relações pessoais que favorecem o desenvolvimento de todas as habilidades socioemocionais. Merece especial atenção a metodologia ativa denominada aprendizagem colaborativa.

Aprendizagem colaborativa: o eu e o outro

Aprender com o outro é essencial para a formação do jovem em direção às competências gerais presentes na BNCC, necessárias para as demandas complexas da vida cotidiana ou para o pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. A interação entre os estudantes desempenha papel fundamental no desenvolvimento das capacidades cognitivas, afetivas e de inserção social.

A aprendizagem colaborativa exige a comunicação entre estudantes e entre eles e o professor, o que pode implicar inclusive rever a organização do espaço na sala de aula.

Ao participar de atividades em grupo ou com toda a turma, como sugerido nas orientações ao professor contidas no Livro do Estudante, é natural que o jovem encontre interlocutores com linguagem próxima à sua, mas com habilidades e conhecimentos que podem ser diferentes dos seus. A comunicação e a vivência com o diverso e o semelhante permitem o exercício constante da análise e da reflexão, essenciais à aprendizagem efetiva.

Por isso, o trabalho em grupo, mais do que um tipo de metodologia ativa para o ensino, pode ser considerado um fator imprescindível na relação entre as interações sociais e o desenvolvimento cognitivo; no exercício da postura crítica; na exigência da reflexão por parte do estudante, envolvendo a análise cuidadosa de seus erros; no respeito ao pensamento de outras pessoas que podem divergir de seu raciocínio ou complementá-lo.

Principais contribuições do trabalho em grupo

- **Promover a interação entre os jovens do grupo e entre os grupos.**
- **Favorecer a construção do conhecimento.**
- **Evidenciar diferentes modos de pensar presentes nas ideias matemáticas.**
- **Desenvolver habilidades de raciocínio como investigação, inferência, reflexão e exploração.**

Toda tarefa ou atividade complexa em que um estudante não consegue, individualmente, obter todas as informações e/ou analisá-las, favorece a aprendizagem colaborativa. Como exemplos propostos no livro estão a leitura e a discussão de textos, a resolução de situações-problema, pesquisas sobre a história e a utilização atual de determinado conceito ou a exploração dos recursos e usos de um aplicativo ou de um *software*.

A comunicação e a modelagem matemática

Segundo a *Matriz de avaliação de Matemática: Pisa 2012*, o letramento matemático estabelecido como meta para a formação dos estudantes inclui "utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos" (Brasil, 2012, p. 1).

Por sua vez, entende-se por modelagem matemática o processo de fazer Matemática aplicada, ou seja, partindo-se de um problema complexo, construir uma representação matemática (modelo matemático) capaz de gerar uma solução. Há, ainda, a compreensão da modelagem matemática como a construção de modelos que descrevam situações e fenômenos para explicá-los e fazer previsões ou inferências.

Percebe-se que, no letramento matemático, a modelagem está interligada com a problematização e com a aquisição da linguagem matemática em um sentido amplo. Isso significa que a linguagem e os textos próprios dessa área precisam ser aprendidos nas aulas do componente curricular. Ler e construir gráficos, tabelas, desenhos de objetos em perspectiva ou em forma de desenhos técnicos, como aparecem nos livros didáticos, e ler fórmulas e símbolos de modo correto, assim como produzir textos utilizando esses recursos da linguagem matemática, devem fazer parte do planejamento das aulas e das atividades propostas aos estudantes. A linguagem no sentido completo precisa fazer parte da aprendizagem, e isso se dá pela forma de exposição e pela variedade de textos apresentados e analisados com os estudantes.

Para romper com a prática pedagógica tradicional, pautada pela oralidade do professor e pela escrita do estudante como únicas estratégias de aquisição da linguagem, é necessário trabalhar com os estudantes textos de divulgação científica, manuais técnicos, textos didáticos, vídeos e obras de arte, como será destacado mais adiante na descrição da estrutura do Livro do Estudante.

Além disso, nos momentos de trabalho colaborativo e no painel de soluções, os estudantes têm a oportunidade de (e podem ser incentivados a) desenvolver a comunicação por meio da linguagem oral e escrita, explorando as habilidades de descrição, explicação e questionamento. Isso possibilita melhor organização do pensamento para o desenvolvimento de estruturas conceituais com base nas relações entre os diversos significados de um mesmo conceito. Adicionalmente, há o aprimoramento da capacidade de compreensão de representações e de textos variados, bem como o progressivo incremento das habilidades relacionadas à produção textual.

A construção de modelos exige a linguagem, mas não se restringe a ela. Construir exige repertório, compreensão e oportunidade para exercer esse tipo de produção. Nesse sentido, os livros desta coleção trazem propostas diversificadas como:

- propor problemas de diferentes tipos e níveis de complexidade, de modo que o estudante se sinta confiante para enfrentar desafios maiores;
- trabalhar com problemas abertos, como aqueles que dão origem a pesquisas e projetos, sugeridos ao longo dos capítulos. Esse tipo de proposta solicita do estudante a análise da situação e a elaboração de perguntas possíveis e razoáveis para serem respondidas;
- envolver os estudantes na criação de problemas para determinada situação, ainda que, de início, suas produções sejam imprecisas ou mal formuladas. Essa é uma tarefa que envolve a linguagem e o raciocínio matemático, além dos conhecimentos específicos que podem estar relacionados àquela situação;
- utilizar a abertura de cada unidade como maneira de mobilizar os estudantes para o tema. Propiciar que todos apresentem suas ideias iniciais, seus conhecimentos prévios e até mesmo o que sabem do senso comum, criando condições para que os estudantes valorizem o conhecimento matemático presente em cada capítulo como ferramenta para se posicionar de modo fundamentado nos diversos temas abordados ao mesmo tempo que o professor faz uma avaliação diagnóstica de sua turma.

Ainda como sugestão para a prática pedagógica que visa favorecer o desenvolvimento da comunicação e da modelagem, propomos substituir a ação de responder imediatamente aos estudantes pela ação de fazer novas questões, como: Você pode me explicar como pensou? Como você pode ter certeza de que sua resposta está correta? Será que o que vimos na aula ou o que está no livro-texto pode ajudar você? Que tal escrever do seu modo e depois discutirmos como escrever com a linguagem matemática? Isso desloca o estudante da posição passiva para a responsabilidade de pensar de novo, argumentar e avançar, partindo de questões mais simples que o levem a encontrar as respostas para questões mais complexas.

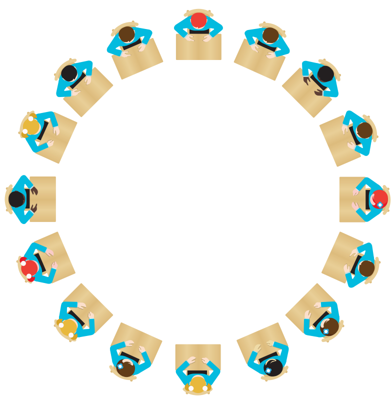
Maneiras de organizar a turma

A aula problematizadora e a aprendizagem colaborativa requerem pensar a organização do espaço na sala de aula, o que, segundo Miguel Arroyo (2004, p. 207), é "a materialização das concepções e práticas inovadoras de educar". Pensar a escola é pensar em um espaço, pois é por meio das relações, reações, vivências e convivências nesses ambientes que professores e estudantes se formam juntos. A organização das carteiras de maneiras distintas em sala de aula tem como objetivo melhor atender às necessidades diversas dos estudantes, promover interações mais significativas e facilitar métodos de ensino mais dinâmicos e participativos.

Organizar as carteiras em círculo ou em U, por exemplo, permite que todos os estudantes se vejam e se ouçam bem, facilitando discussões em grupo e a colaboração e o compartilhamento de ideias. Isso não apenas enriquece a experiência de aprendizagem, mas também ajuda a desenvolver habilidades sociais e comunicativas essenciais para o sucesso dentro e fora da sala de aula. Outra opção para trabalhos em grupo ou para projetos colaborativos com mais de quatro estudantes é organizar as carteiras em ilhas ou em grupos menores, para fomentar um ambiente mais cooperativo. Para atividades que exigem foco individual, como testes ou tarefas de escrita, a organização das carteiras em filas ou em L pode ser mais adequada para reduzir distrações e aumentar a concentração. Observe a seguir a representação de algumas dessas disposições.

Em círculo

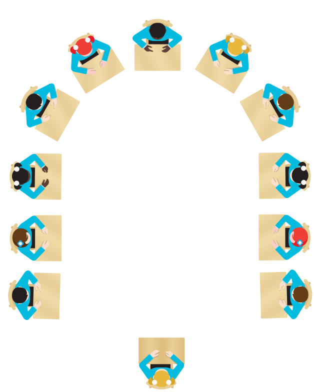
É adequada para debates, discussões em grupo e atividades de compartilhamento.



ID/BR

Em forma de U

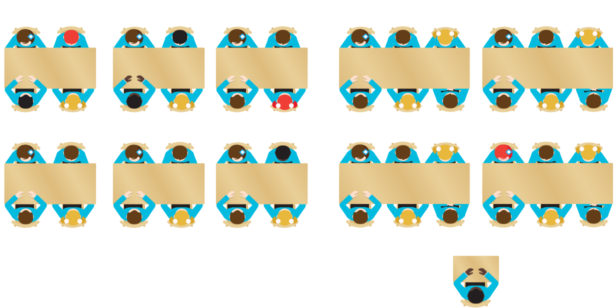
É apropriada para aulas expositivas, discussões e apresentações, permitindo uma boa interação com o professor.



ID/BR

Em grupos ou ilhas

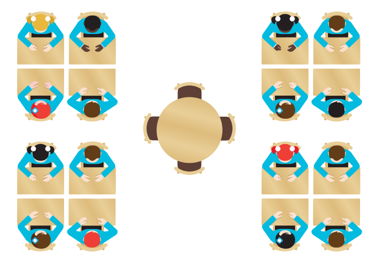
Facilita a realização de projetos e atividades em grupo.



ID/BR

Em estações

É indicada para a aprendizagem baseada em centros de interesse, projetos e rotação por estações.



ID/BR

A flexibilidade na organização das carteiras permite que os professores adaptem o ambiente de acordo com os objetivos específicos de cada aula ou atividade. Essa adaptabilidade é crucial em um mundo educacional em constante mudança, onde as metodologias e as abordagens pedagógicas estão sempre evoluindo para melhor atender às necessidades dos estudantes.

Há, ainda, a possibilidade de utilizar espaços externos à sala de aula, de modo que os estudantes possam experimentar diferentes arranjos em um ambiente mais dinâmico e inclusivo.

A modelagem e a linguagem matemática no Ensino Médio

A aquisição da linguagem matemática é parte importante da construção de modelos para explicar fenômenos ou para estudar ou aplicar uma propriedade.

Uma das competências que se esperam dos estudantes que terminam o Ensino Médio é o domínio das linguagens. Em Matemática, a meta é que o estudante seja capaz de ler, interpretar e produzir textos específicos dessa área. De fato, se tomarmos como propósito que o estudante continue aprendendo após a escola básica, que utilize o que aprendeu para enfrentar situações e problemas da vida real e que produza conhecimentos, a capacidade de comunicar-se matematicamente é um fator que adquire cada vez mais importância ao longo desse percurso.

A Matemática dispõe de um sistema notacional próprio, construído ao longo da história para representar ideias e conceitos. Assim, quando escrevemos algo como $\operatorname{sen} x = 1$ ou $\operatorname{sen} x > 1$, para compreender o que as frases significam não basta lê-las em língua materna ("seno de *x* é igual a um" ou "seno de *x* é maior que um"), visto que há noções, conceitos e procedimentos implicados nessa escrita:

- saber o que exatamente significa $\operatorname{sen} x$;
- entender que o símbolo x representa um valor desconhecido ou indeterminado;
- compreender que o sinal de igualdade ou de desigualdade nessas expressões indica que há algo a ser calculado, mas que, ainda que haja alguma "semelhança" entre as escritas, o uso de $=$ ou $>$ modifica significativamente a natureza da resposta que se busca;
- realizar os cálculos indicados;
- saber interpretar os resultados em um contexto específico e expressar a resolução encontrada seguindo as regras que norteiam a escrita matemática.

Pelo exemplo, é possível perceber que um componente essencial da linguagem matemática é que ela apresenta terminologia e simbologia próprias, que, especialmente no Ensino Médio, são de uso quase exclusivo da escola e da ciência. Certamente, para ler os textos em Matemática e para falar sobre essa área do conhecimento, nos valemos da Língua Portuguesa. No entanto, até mesmo essa leitura não implica uma transposição imediata, uma vez que há termos que, no dia a dia, têm sentidos bem diferentes de seu uso em Matemática, como é o caso de agudo, plano, módulo, grau, diferença, expoente, função ou total. Isso sem falar nas palavras que quase não são mencionadas fora da escola, como cotangente, polinômio e subtraendo.

É comum considerar que, ao ingressar no Ensino Médio, o estudante já tenha fluência na representação e na comunicação matemática por ter cursado o Ensino Fundamental. Também é frequente que se atribuam as dificuldades sentidas pelo estudante para ler e interpretar textos de Matemática a uma baixa fluência na leitura e na interpretação de textos em Língua Portuguesa. Mas, de maneira geral, não é isso que ocorre.

Por outro lado, por melhores que tenham sido as aulas de Matemática no Ensino Fundamental, elas não terão sido suficientes para desenvolver no estudante a competência da comunicação matemática. Ainda que uma parte dessa compreensão tenha se iniciado nos anos escolares anteriores, o estudante precisará do tempo do Ensino Médio para continuar aprendendo a se comunicar matematicamente e ampliar seu repertório.

Considerando que, de modo geral, o contato dos estudantes com a linguagem matemática se dá primariamente na escola e que essa linguagem tem características muito particulares, dominá-la não é simples, e as aulas de Matemática precisam ter espaço para que o estudante se aproprie cada vez mais das formas específicas de expressão nessa área do conhecimento. Para isso, é importante que:

- haja análise e discussão de diferentes representações matemáticas (convencionais ou criadas pelos estudantes), o que é possível, por exemplo, com a elaboração de um painel com diferentes representações para uma dada situação-problema;
- ocorram momentos para discutir os diferentes significados de um símbolo matemático, nos quais o professor – usuário fluente da comunicação matemática – interaja com os estudantes e seja exemplo para eles;
- sejam analisados erros nas escritas produzidas em sala de aula, de modo que os estudantes percebam o que é válido, ou não, em uma escrita matemática;
- haja momentos de leitura de textos matemáticos, para que os estudantes tenham contato com uma escrita matemática produzida por um escritor mais experiente;
- ocorram discussões com base no que os estudantes sabem de expressões matemáticas, para ampliar a compreensão a partir desse levantamento inicial;
- sejam usados dicionários nas aulas de Matemática;
- haja rodas de conversa sobre enunciados de problemas ou termos matemáticos sobre os quais os estudantes tenham dúvidas;
- os estudantes sejam incentivados a escrever uma explicação para um termo ou uma expressão da Matemática;
- haja análise do uso de uma mesma palavra em Matemática e em um contexto não matemático (por exemplo: Onde mais você já ouviu a palavra “domínio”? Que outros significados você conhece para a palavra “diferença” que não seja o da subtração? O que significa “face” em Geometria e fora dela?);
- os estudantes sejam incentivados a identificar em que contextos não matemáticos utilizam certas ideias matemáticas, como a ideia de função.

Essas estratégias favorecem a criação de um ambiente de comunicação matemática e contribuem para o aprimoramento do estudante com relação às regras que orientam as representações matemáticas. Afinal, como se sabe, o domínio de uma linguagem implica saber pensar nessa linguagem, e isso só ocorre quando vivemos em um ambiente que propicia e demanda tal forma de pensamento.

Atividades de pesquisa: investigação e integração

Trabalhos relacionados à pesquisa e à investigação favorecem novas aprendizagens; permitem que os estudantes ordenem conceitos e habilidades previamente dominados de modo a atingir um objetivo; possibilitam ações de planejamento e o desenvolvimento de estratégias de execução; requerem organização, gestão de tempo, análise de limites e possibilidades de ação, tratamento de informações e avaliação das ações empreendidas. Exigem, ainda, cooperação e esforço pessoal, constituindo-se em um verdadeiro exercício de autonomia.

A seção ***Matemática e...*** apresenta a maioria das propostas de pesquisa para a formação integral dos estudantes. Diferentemente da pesquisa acadêmica, que tem por objetivo a produção de novos conhecimentos, a pesquisa escolar até pode gerar novos conhecimentos, mas trabalha também com a reconstrução de conhecimentos já disponíveis e sempre visa à aprendizagem de procedimentos e ao desenvolvimento de habilidades. Buscar, selecionar, tratar, analisar, (re)publicar, redistribuir e remixar informações e conceitos são algumas das muitas habilidades necessárias para o desenvolvimento desse processo.

A pesquisa envolve o acesso a uma diversidade de fontes e à leitura de gêneros variados. Em breves orientações ao longo do Livro do Estudante, e em especial na seção ***Palavras-chave***, esta coleção propõe o uso de comandos como grifar, anotar e fazer sínteses, resumos, mapas mentais, entre outros, de tal maneira que os estudantes possam determinar, registrar e organizar ideias, informações, propriedades e outros pontos de interesse. Nesse processo, espera-se que eles aprendam procedimentos de paráfrase e de citação/menção ao discurso do outro (no caso, o discurso presente no texto de cada capítulo).

Tudo isso compõe um conjunto de ações didáticas e de expectativas de aprendizagem que não combina com o simples “recorta e cola” ou a cópia, mas, sim, com a formação do estudante como produtor de conhecimentos com autonomia e confiança em sua capacidade de aprender.

Ao longo da coleção, por exemplo, em algumas das seções ***Matemática e...***, ***Tecnologia*** e ***Palavras-chave***, bem como em algumas atividades, há sugestões e orientações de projetos de criação ou de construção, pesquisas de opinião, pesquisas visando à melhoria de condições ou à resolução de problemas na escola ou na comunidade, além de propostas que visam analisar como modelos matemáticos podem ajudar a resolver problemas cotidianos. Essas propostas permitem integração com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. A área de Linguagens pode contribuir com a adequação e a qualidade da produção dos estudantes, dependendo de como essa produção deva ser apresentada.

TECNOLOGIA E PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Na BNCC, encontramos uma referência explícita e aprofundada à participação cada vez maior das tecnologias digitais e da computação na vida de todos – no ambiente de trabalho, na escola, em casa, etc. Considerando as diferentes dimensões que caracterizam a computação e as tecnologias digitais – pensamento computacional, mundo digital, cultura digital (Brasil, 2018a) –, a BNCC descreve os conhecimentos, as habilidades, as atitudes e os valores esperados em cada uma dessas perspectivas, desde as competências gerais até os desdobramentos em habilidades em cada área do conhecimento.

Assim, em Matemática é preciso considerar o valor dos recursos tecnológicos para uma formação mais alinhada ao que se espera dos estudantes do século XXI. Celulares, calculadoras, computadores, com todos os seus recursos, inclusive os de Inteligência Artificial, podem ser incorporados às estratégias didáticas nas aulas de Matemática com os seguintes objetivos: favorecer a participação ativa dos estudantes; permitir fácil e rápido acesso a diversas fontes de informação; possibilitar a articulação do texto escrito com imagem, som e movimento; facilitar a simulação de situações e o desenvolvimento de habilidades, como selecionar, organizar e analisar as informações, para utilizá-las adequadamente; auxiliar na abordagem de novas ideias e conceitos; entre outros. A seção ***Tecnologia*** deste livro assume o compromisso de trazer as máquinas e alguns de seus recursos para a aprendizagem de Matemática, visando à maior inserção dos jovens do Ensino Médio no mundo digital, com suas maneiras de acessar, produzir e comunicar informações.

No Livro do Estudante, está presente também o boxe ***Para explorar***, que amplia as possibilidades de abordagem com sugestões de textos, *sites* e vídeos para que o estudante vivencie diferentes tecnologias e os conteúdos de diversas manifestações culturais relacionados ao tema em estudo, de modo que ele possa se posicionar em relação a esses conteúdos de modo fundamentado, tendo como ferramentas os conhecimentos adquiridos no próprio livro.

No entanto, tratando-se da área de Matemática, é preciso ir além. A tecnologia pode desenvolver algumas maneiras próprias de pensar, marcadas pelo raciocínio algorítmico e pela linguagem específica da tecnologia computacional utilizada para descrever processos regrados por etapas bem definidas. Entre esses recursos de linguagem estão os fluxogramas e os algoritmos destacados nas habilidades da BNCC para descrever o processo de resolução de problemas. Ou seja, o desenvolvimento do pensamento computacional extrapola o uso de quaisquer aparelhos. Como esclarece a pesquisadora Jeannette Wing:

> é o processo de pensamento envolvido na formulação de um problema e na expressão de sua(s) solução(ões) de tal forma que um computador – humano ou máquina – possa executá-la(s) (Wing, 2014, tradução nossa).

Em outras palavras, o pensamento computacional pode ser entendido como uma habilidade e um processo para identificar e resolver problemas, de modo que a solução proposta possa ser executada por um computador. Para isso, são utilizados conceitos e práticas comuns à computação (mas não restritos a ela), como a simplificação de situações-problema a partir da identificação de seus elementos essenciais e de similaridades com contextos anteriores (também definida como abstração), a decomposição de problemas em partes menores e a definição de sequência de ações para a realização e automação de tarefas (Grover; Pea, 2013).

Nesse sentido, lembrando que a problematização é a metodologia que favorece diferentes maneiras de pensar, compreender e analisar um mesmo problema, a aliança entre tecnologia e resolução de problemas colabora para o desenvolvimento das seguintes habilidades que compõem o pensar computacional:

- formulação de problemas;
- análise de dados de forma lógica e organizada;
- representação da realidade por meio de abstrações;
- proposição de soluções por meio de identificações e análises críticas dos problemas;
- transferência da solução encontrada para a resolução de problemas análogos.

Compreendendo a lógica que aproxima a resolução de problemas ao pensamento computacional, esta coleção assume intencionalmente experiências didáticas para que esse modo de pensar possa cada vez mais integrar a formação dos estudantes do Ensino Médio, tornando-os aptos a intervir de forma cidadã no meio em que vivem. Como exemplos dessas práticas, temos: a análise necessária para identificar padrões em situações-problema, estabelecendo relações entre os exemplos dados na seção ***Problemas e exercícios resolvidos*** e as atividades da seção ***Problemas e exercícios propostos***; a identificação de características de problemas na *seção* ***Por dentro do Enem e dos vestibulares***; e o encadeamento de processos como o de construção de gráficos de funções ou estatísticos.

ARGUMENTAÇÃO E NÍVEIS INFERENCIAIS DE LEITURA

Compreender a linguagem é entender as relações entre o que está explícito no texto e aquilo que o leitor pensa, conclui e infere por conta própria, com base em seu conhecimento de mundo e em suas experiências de vida. Fazer inferências possibilita ao leitor refletir e gerar novos conhecimentos com base em informações presentes no texto, que passam a fazer parte do conjunto de saberes desse leitor e se tornam a base para suas argumentações. A capacidade de realizar uma leitura em níveis inferenciais é uma característica essencial para a compreensão da linguagem, pois assim, do mesmo modo que o leitor memoriza as informações óbvias no texto, ele também incorpora em si as informações inferidas.

A inferência é um processo cognitivo que vai além da leitura e passa pelo entendimento ou pela suposição de algo desconhecido, fundamentado na observação e no repertório cultural do leitor. Trata-se, então, da conclusão de um raciocínio ou do levantamento de um indício com base no estabelecimento de relações.

A compreensão de um texto depende da qualidade e da quantidade de inferências geradas durante a leitura, visto que os textos contêm informações explícitas e implícitas, sempre deixando lacunas a ser preenchidas pelo leitor. Ao associar informações explícitas a seus conhecimentos prévios, o estudante dá sentido ao que está sendo dito no texto e pratica a apreensão de detalhes, sequências e relações de causa e efeito. Portanto, a inferência ocorre com a interação do leitor com o texto, ou seja, por meio da leitura.

As capacidades de concluir, deduzir, levantar hipóteses, ressignificar informações, formular novos sentidos e argumentar de modo consistente são essenciais para a atuação consciente e responsável do jovem na sociedade, já que assim ele estará preparado para entender contextos históricos, compreender o que está por trás de uma disputa política ou mesmo projetar soluções para problemas reais e cotidianos. Ao gerar uma nova informação partindo de uma anterior, o estudante desenvolve sua capacidade de “ler” os diversos pontos de uma situação e de propor resoluções factíveis que beneficiem a maioria dos envolvidos.

Em sala de aula, o exercício da leitura inferencial e o desenvolvimento da argumentação podem ser feitos de diversas maneiras, tanto na abordagem dos conteúdos como na execução das atividades. É possível formular perguntas que motivem o estudante a antecipar informações e verificar se suas hipóteses são plausíveis, instigando-o a acessar seus conhecimentos prévios nesse processo. Pode-se levar o estudante a explicar o que está implícito em um texto, a preencher lacunas de informação com base em pistas já dadas e a excluir ou confirmar hipóteses levantadas durante a leitura.

Por isso, em diversas seções e textos nas orientações no Livro do Estudante, sugerimos a leitura individual pelo estudante, seguida de discussão com os colegas e o professor do que foi compreendido, o que inclui sanar dúvidas. Assim, propomos o trabalho colaborativo, o painel de soluções e as apresentações das conclusões de pequenos projetos em Matemática como estratégias privilegiadas para o exercício da argumentação.

O PAPEL PRIVILEGIADO DO PROFESSOR

Para que todos os pressupostos apresentados aqui atinjam o propósito de garantir a formação integral dos estudantes enquanto aprendem Matemática, é essencial a ação do professor com uma adequada gestão da aula. Afinal, é no espaço escolar que todas as intenções pedagógicas têm a chance de se tornarem realidade. A mediação focada na aprendizagem de todos vê a aula como processo de interação em que todos devem ser acolhidos e participantes. Por isso, o planejamento das aulas é fundamental para que a escolha das atividades propicie boas experiências de aprendizagem aos estudantes.

No livro *Mentalidades matemáticas* (Boaler, 2018), ao apresentar os resultados de um trabalho de pesquisa prolongado com estudantes em risco de fracasso escolar em Matemática, a pesquisadora estadunidense Jo Boaler afirma que, depois do professor, as tarefas propostas na aula são o recurso mais importante para que os estudantes aprendam Matemática.

As pesquisas conduzidas por Boaler mostram que as propostas didáticas de uma aula ajudam a desenvolver mentalidades matemáticas de crescimento e a criar condições para uma compreensão profunda dos conceitos e dos procedimentos matemáticos.

Para saber se a atividade que se está propondo vai ajudar o estudante a aprender, é preciso compreender o que se deseja ensinar. Então, um bom planejamento, com objetivos bem definidos, é essencial. Um segundo ponto a ser levado em consideração é que a atividade proposta combine duas ou mais das seguintes características: possibilidade de despertar curiosidade e engajamento intelectual; permitir conexões entre temas próprios de Matemática (por exemplo, entre Álgebra e Geometria); envolver colaboração entre pares; e ser desafiadora.

Jo Boaler afirma ainda que **desafio**, **engajamento**, **curiosidade**, **criatividade** e **colaboração** são elementos essenciais para aulas produtivas em Matemática.

Propostas mais elaboradas, como o desenvolvimento de um projeto ou até mesmo a aprendizagem de um novo conceito ou procedimento, não podem ser feitas sem o devido cuidado do professor, desde a escolha do conteúdo até a maneira como a proposta será apresentada aos estudantes, considerando as particularidades e capacidades encontradas em sua turma. O olhar do professor para cada estudante e a escuta atenta do que lhe é dito, buscando entender a razão de cada pergunta, de cada desvio de rota e de cada erro, evidenciam a presença de um educador que busca a formação de pessoas reais, sem idealizações (que em nada contribuem para a aprendizagem efetiva).

O professor preparado para as demandas geradas para a formação integral dos estudantes precisa, assim como eles, estar aberto para aprender e se posicionar criticamente em relação ao que se sabe hoje sobre currículo, aprendizagem, natureza e ensino do conhecimento matemático e de sua aplicabilidade, bem como sobre políticas educacionais do país e de sua região. Nesta coleção, nossa contribuição está nas seções deste manual e na ***Bibliografia comentada*** ao fim deste volume, que buscam explicitar as razões das escolhas e a melhor maneira de utilizar este livro com seus estudantes.

PLANEJAR E AVALIAR EM MATEMÁTICA

O trabalho nos diferentes espaços e momentos de ensino na escola está diretamente associado à gestão do complexo ambiente da sala de aula. Ele exige planejamento e saber lidar com imprevistos que surgem na dinâmica de cada turma. Gerenciar essas questões com sabedoria para resolver impasses transforma cada aula em um momento de aprendizagem tanto para o estudante quanto para o professor.

Embora o planejamento seja fundamental para a aprendizagem efetiva e para o processo de avaliação, ele não pode ser rígido, mas, sim, um instrumento orientador da gestão da aula. Deve ser um norte que sinalize os conhecimentos que serão trabalhados, as diferentes habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes, as atividades idealizadas e os instrumentos para avaliar o que foi de fato construído na realização das atividades propostas.

A base para o planejamento das aulas é o currículo da rede em que cada unidade escolar está inserida. É ele que apresenta a fundamentação para um processo educacional que será vivenciado na escola, visando à formação integral dos estudantes. Tendo-o como norteador, o professor detalha a rota, estabelece objetivos de ensino, determina tempos, espaços e processos. Planejar significa, portanto, organizar e racionalizar a ação docente visando à articulação entre a prática da sala de aula e as problemáticas inerentes ao contexto social e cultural em que a escola está inserida.

É importante que, para cada caso, o professor considere em seu planejamento de aula pontos como: O que se quer ensinar? O que se espera que os estudantes aprendam na aula? Que recursos serão utilizados? Quanto tempo de aula deve estar disponível? Como será feita a organização dos estudantes no espaço da sala? Como iniciar a aula? O que os estudantes farão durante a aula? Como os estudantes vão elaborar seus registros? Como será a finalização da aula? O que será feito como avaliação da aprendizagem dessa aula?

Um aspecto que precisa ser cuidadosamente considerado no planejamento é a escolha das habilidades de aprendizagem que estarão no foco de cada aula, pois são elas que orientam aonde se quer chegar com o processo planejado e, consequentemente, a avaliação da aprendizagem.

Outro desafio é o ensino em salas de aula com muitos estudantes, onde é provável que haja grupos com necessidades e características diversas, sendo necessário planejar uma mesma atividade, ou atividades específicas para cada um desses grupos.

Esta coleção procura auxiliar nessa tarefa de gestão da aula com comentários direcionados ao professor ao longo do Livro do Estudante, propondo:

- a leitura de textos introdutórios e dos problemas resolvidos de cada capítulo de diferentes maneiras: leitura individual e discussão coletiva ou em grupos; leitura compartilhada, em que cada estudante lê uma parte do texto e outro explica o que compreendeu; leitura pelo professor como modelo de leitura de texto matemático; leitura com destaque das ideias centrais ou anotação dessas ideias com as palavras dos estudantes;
- a resolução dos problemas propostos em grupos produtivos, organizados em função de seus conhecimentos ou dificuldades, de modo que o professor possa acompanhar mais de perto um ou dois desses grupos;
- o uso do painel de soluções, que, como descrito anteriormente, é um recurso valioso para a aprendizagem de estratégias, maneiras diversas de registro e de pensamento, que ocorre pela análise coletiva da resolução ou produção de um colega, e pode ser proposto na análise das resoluções dos estudantes em cada seção ***Problemas e exercícios propostos***;
- pesquisas em grupo, com diferentes contribuições e níveis de aprofundamento, de acordo com os conhecimentos dos estudantes, como proposto na seção ***Matemática e...***;
- a abordagem da seção ***Para recordar*** não só como um momento de retomada, mas também como um roteiro de estudo em função das dificuldades apresentadas por alguns estudantes;
- a motivação dos estudantes que têm em seu projeto de vida o Ensino Superior, investigando algumas propostas de questões de provas seletivas de universidades e aplicando os conhecimentos deles na seção ***Por dentro do Enem e dos vestibulares***;
- indicações no boxe ***Para explorar***, que traz uma diversidade de possibilidades para os estudantes ampliarem seus conhecimentos;
- as propostas da seção ***Tecnologia***, em que todos, independentemente de seus saberes, podem rever ou aprofundar a Matemática ao aprender a utilizar planilha eletrônica, calculadora, *software* de geometria dinâmica e outros recursos.

Outra função importante do planejamento é apoiar o professor na avaliação de sua gestão da aula. Após a implementação do que foi pensado, o professor pode reconhecer os pontos positivos e os que precisam ser mais bem elaborados, como: O planejamento proposto abrangeu todas as questões relevantes? Os recursos providenciados foram adequados? Os objetivos da aula e as expectativas em relação aos estudantes foram explicitados? Foram feitas perguntas que mobilizaram aprendizagens? Algumas perguntas deveriam ser alteradas? Se sim, quais? Esses registros permitirão reflexões sobre o planejamento proposto e como foi desenvolvido. A análise é essencial para a qualificação de outros momentos de ensino-aprendizagem no decorrer das aulas em cada turma.

Ainda em relação à Matemática no Ensino Médio, a quantidade de aulas e o tempo mais prolongado podem ser utilizados para o alcance de cada habilidade, em uma crescente de aprendizagem a cada série. Isso significa que o planejamento para o desenvolvimento de cada competência e suas habilidades pressupõe um processo de aprendizagem sem a limitação usual de um bimestre ou um trimestre de ensino.

Além disso, não existe uma ordem de prioridade para o desenvolvimento das competências específicas e das correspondentes habilidades. Essa ordem será estabelecida pelo planejamento do professor, de acordo com os propósitos de seu plano ou das situações didáticas desenvolvidas com os estudantes e, de preferência, em **planejamento integrado** com todos os professores de Matemática e até mesmo com docentes das demais áreas, especialmente das áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Ainda assim, há que considerar que alguns temas ou objetos de conhecimento são prévios a outros, servindo de ferramentas para aprendizagens mais complexas. Um exemplo disso são as funções do 1º grau e a geometria plana. Não se trata de uma ordem rígida, mas de uma sequência lógica, para que os conceitos e procedimentos se construam sobre bases sólidas e coerentes para novas aprendizagens. Apesar de alguns temas, como Estatística e Probabilidade, permitirem maior flexibilidade, eles não devem ser vistos como independentes de outras unidades temáticas, pois as funções, os números e algumas operações entre conjuntos também estão presentes nesses temas, embora pertençam a outra unidade temática. A percepção dessas relações não traz implicações apenas para o planejamento do professor: deve corresponder também à aprendizagem dos estudantes, uma vez que o estabelecimento de conexões entre conceitos, representações e procedimentos constitui aprendizagem mais aprofundada e desejável, como descrito nas competências específicas **3** e **4** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Nas orientações para este livro, para as atividades do capítulo ou uma atividade específica estão descritos os objetos de conhecimento, as habilidades que se pretende desenvolver, as competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias e as competências gerais propostas pela BNCC. Encontram-se também as **expectativas de aprendizagem**, ou seja, o que se espera dos estudantes e que pode orientar a forma de ensino e a avaliação de cada um deles. Além disso, há uma sugestão de cronograma para um planejamento bimestral, trimestral e semestral, que pode ser adequado de acordo com a quantidade de aulas estabelecidas no ano letivo para a área de Matemática e suas Tecnologias. Todas essas indicações visam auxiliar na elaboração do planejamento das aulas com apoio deste material.

AVALIAÇÃO EM UMA PERSPECTIVA AMPLA

Planejar e avaliar são faces de uma mesma moeda, indissociáveis. A avaliação é, sem dúvida, um dos aspectos mais sensíveis e complexos de qualquer planejamento. Na perspectiva da formação integral, a avaliação passa a ser um instrumento de comunicação com o estudante, com os demais professores, com as equipes da escola responsáveis pela formação do jovem e até mesmo com a família.

A avaliação assume o papel de dialogar com o estudante, fornecendo-lhe informações como "isso é o que você sabe agora" ou "isso é o que você ainda não sabe", construindo com ele um projeto de progressão por meio de respostas a questões como: Como vamos seguir daqui para a frente? Com o que e como você se compromete? Como eu, professor, me comprometo e pretendo contribuir para isso? Esse diálogo estabelece um pacto de compromisso recíproco que desvia o foco da nota para o conhecimento e para o autoconhecimento, visto que cada jovem passa a ter consciência do que aprendeu e do que falta aprender, das competências que já desenvolveu e daquelas que serão foco de trabalho, em um ambiente de confiança, e não de mera cobrança.

Quando a avaliação é entendida como parte importante da formação integral dos estudantes, ela deixa de ser considerada uma simples nota atribuída ao final de um período de ensino (um bimestre ou um trimestre, por exemplo), quando cada estudante recebe um número ou um conceito como medida de aprendizagem. A nota, por si só, exclui muitos dos fatores determinantes do processo de aprender. O jovem, sua história, o momento das avaliações, os recursos e o tempo para o estudo individual e até mesmo o instrumento de avaliação utilizado podem ser fatores decisivos para uma nota, sem necessariamente corresponder ao que o estudante aprendeu de fato.

Além disso, um currículo alinhado com a BNCC, ou seja, pautado pelo desenvolvimento de competências e habilidades, visando ao aprofundamento e à consolidação das aprendizagens, não pode se sustentar em processos de avaliação pontuais e meramente numéricos. Ainda que gere uma nota, a avaliação deve corresponder ao projeto da escola no sentido da formação do estudante. Se há um projeto de educação e a escola assume seu papel formador, a avaliação deve sinalizar se o estudante está, ou não, alinhado ao projeto traçado para ele. Nesse sentido, a avaliação deve corresponder aos efeitos da escola na formação do jovem.

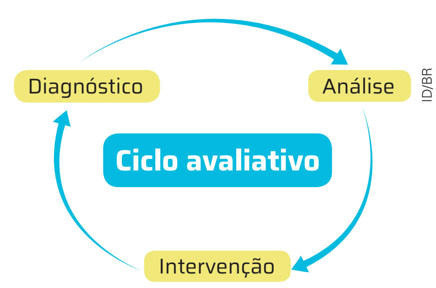
Na perspectiva da formação integral dos estudantes, a avaliação é o processo de coletar, organizar, sistematizar e interpretar dados e informações que ajudam a acompanhar o ensino e a aprendizagem e a tomar decisões a respeito do que fazer para planejar ou replanejar as ações do ensino para a aprendizagem. Esse processo se divide em três etapas: **diagnóstico**, **análise** e **intervenção**.

Um processo avaliativo efetivo da aprendizagem começa com a coleta de dados, ou seja, com um diagnóstico proveniente da observação e do registro do professor, além das diversas produções dos estudantes. Antes de atribuir uma nota ou de emitir qualquer parecer sobre o que o estudante aprendeu, ou não, o professor prossegue com a avaliação realizando a análise das informações coletadas, pautada pela reflexão sobre as aprendizagens esperadas, a atividade proposta e seu desenvolvimento. Essa análise possibilita o terceiro passo da avaliação, que corresponde à tomada de decisão sobre como continuar, o que retomar e como agir em face das aprendizagens dos estudantes. É a fase da intervenção. Completa-se, assim, o ciclo avaliativo.

A intervenção pode ser imediata, quando se identifica algo que os estudantes deveriam saber e essa lacuna pode impedir a continuidade de seu percurso de aprendizagem. Outras vezes, a análise e o planejamento permitem antever que o conhecimento ausente nesse momento pode ser retomado mais adiante em outro tema, tempo ou situação. Nesses casos, a intervenção é pensada e planejada, sem ser imediata. Algumas vezes a intervenção precisa ser realizada com toda a turma; em outras, deve ser aplicada a um grupo específico. Pode-se realizar uma retomada utilizando novos recursos ou elaborando planos de estudo para pequenos grupos, aproveitando recursos da tecnologia (como vídeos), tarefas e leituras.

A intervenção derivada da análise corresponde à recuperação em processo, entendida como um conjunto de ações necessárias para que o estudante se aproprie do conhecimento, e não para simplesmente recuperar o conteúdo. Essa abordagem da recuperação da aprendizagem é formativa no sentido de respeitar o fato de que nem tudo que se ensina é realmente aprendido e muito menos pode ser avaliado de imediato. Na perspectiva da formação integral, é preciso respeitar o tempo do estudante, uma vez que o tempo do ensino pode não ter sido suficiente para que ele aprendesse tudo o que precisava. Portanto, o professor precisa decidir se a avaliação do conteúdo, naquele momento, é justificável. O que não foi aprendido deve ser registrado e incorporado ao planejamento do professor nos próximos períodos de ensino.

Cada intervenção requer nova coleta de dados, um novo diagnóstico e a consequente análise de informações para determinar se a intervenção realizada foi efetiva ou precisa ser repensada. Dessa forma, completa-se o ciclo avaliativo, em constante retroalimentação em direção à aprendizagem de cada estudante.



Quando a avaliação visa à formação integral do estudante, as situações de **erro** são vistas como etapas do processo de aprendizagem. É essencial pensar a intervenção a partir dos erros: pesquisar o percurso que levou a um erro; analisar com o estudante o que falta aprender; ou os cuidados necessários para evitar novos enganos são ações que devem permear o processo de avaliação, uma vez que errar é inerente ao processo de aprender, tanto na escola quanto na vida. O erro é corrigido quando se reflete sobre ele, e não pela simples eliminação da dúvida ou pela punição por algo que ainda não foi aprendido. Na proposta metodológica deste livro, evidenciamos o painel de soluções como um importante aliado para o trabalho consistente com o erro e para a construção de um ambiente propício à aprendizagem.

PARA EXPLORAR

Vídeo

A RELAÇÃO entre currículo e avaliação para promoção da aprendizagem. [*S. l.*: *s. n.*], 2021. 1 vídeo (18 min 17 s). Publicado pelo canal Instituto Reúna. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=V9jJREEjhfE&list=PLYVu0c7CEIRHvH_0N_VX0zfpl_37YydjR&index=6. Acesso em: 27 set. 2024.

No vídeo em inglês legendado em português, o especialista australiano Philip Lambert aborda a relação entre currículo e avaliação, aprofundando a reflexão sobre como construir estruturas avaliativas a partir dos currículos, evitando que elas se tornem instrumentos isolados das práticas pedagógicas.

SOBRE OS INSTRUMENTOS E AS MANEIRAS DE AVALIAR

Não existe processo de avaliação sem a coleta de dados para serem analisados; daí a importância dos instrumentos de avaliação, sua escolha e seus critérios de uso. A seleção e a elaboração de um instrumento de avaliação começam ainda durante o planejamento, quando o professor questiona: O que ensino? Por que ensino? Os estudantes podem aprender isso? Tais questionamentos já apontam para a necessidade de refletir sobre as ações didáticas a fim de garantir o aprendizado dos estudantes.

É importante que a avaliação forneça dados que possibilitem ao professor compreender o que foi aprendido, ou não, e fazer intervenções que permitam ao estudante avançar. Dessa forma, os instrumentos de avaliação podem guiar o olhar do professor nesse sentido. A variedade de instrumentos de avaliação favorece a individualização do processo de ensino e aprendizagem, permitindo que esta seja uma experiência que, embora se realize no coletivo, se torne única para cada estudante.

Há instrumentos a serem utilizados que estão mais diretamente relacionados à obtenção de dados pelo professor. Embora o estudante seja chamado a colaborar, é o professor que centraliza as ações de coleta e análise de dados. É o caso da observação e do registro, da análise da produção dos estudantes, das provas e da análise de erros, instrumentos que podem ser usados em vários momentos.

Na correção de uma tarefa ou de um trabalho em grupo, por exemplo, é possível observar e registrar o que os estudantes aprenderam e permitir que eles apresentem aos colegas suas resoluções, suas dúvidas ou suas imprecisões de linguagem. Essa dinâmica pode ser um bom contexto para uma intervenção ou um acompanhamento desses estudantes nas próximas atividades.

Há situações no próprio Livro do Estudante – quando se propõe ao estudante que organize o que aprendeu, elabore problemas, produza textos após atividades e analise problemas e exercícios com erros na resolução – que podem ser utilizadas com finalidade avaliativa, não necessariamente para que lhe seja atribuída uma nota, mas para obter dados e planejar intervenções. Nessa análise, a oralidade, os desenhos, os gráficos, os esquemas e as escritas pessoais são importantes para acompanhar as percepções e os avanços de cada um. Relembrando que o letramento matemático é uma meta na Educação Básica, avaliar a leitura, a escrita e a utilização da linguagem em diferentes contextos é tão importante quanto assegurar os objetos de conhecimento específicos.

A **autoavaliação** é outro instrumento que pode ser usado com a finalidade de atribuir ao estudante a responsabilidade de avaliar a si mesmo, incentivando a reflexão sobre sua participação e aprendizagem. Cabe ao professor garantir as condições para que esse instrumento cumpra seu objetivo, o que certamente gerará dados valiosos sobre os estudantes e o processo de ensino.

A autoavaliação pode começar de modo muito simples, e até mesmo com salas de aula com muitos estudantes, na forma de uma lista feita pelos estudantes ao final da aula, registrando o que consideram importante em suas aprendizagens. Essa lista pode ser lida por aqueles que o desejarem fazer, como aquecimento para a aula seguinte. O que for mencionado pelos estudantes pode ser registrado como aprendido, e o que não constar das listas precisa ser retomado.

Outro recurso é a **caixa de dúvidas**: os estudantes escrevem suas dúvidas em uma folha de papel e depositam-nas em uma caixa. De posse dessas informações, o professor pode fazer intervenções com a turma ou com alguns estudantes, dependendo do que considera melhor retomar. Esse tipo de instrumento fornece indícios da aprendizagem em processo, sem que seja preciso esperar uma prova, em um momento pontual, para identificar dúvidas e só então intervir.

Com o tempo, é possível propor autoavaliações mais estruturadas, incluindo as habilidades para o século XXI, mas não sem antes construir um ambiente de confiança, no qual os jovens possam falar de si, sem julgamento de valor.

O professor pode, por exemplo, planejar com a turma os itens que devem compor uma autoavaliação ou utilizar propostas do Livro do Estudante que têm essa função, como a seção ***Palavras-chave***.

A seção ***Por dentro do Enem e dos vestibulares*** também pode ser utilizada como instrumento de avaliação. O trabalho com essa seção será explicado mais adiante. Nela, são apresentados diferentes procedimentos de resolução de atividades de exames oficiais e, em seguida, propostas outras atividades que podem ser resolvidas com o uso da estratégia apresentada. Os registros feitos pelos estudantes podem servir de instrumento de avaliação de caráter preparatório para os exames de larga escala. Além disso, vale observar com atenção se os estudantes conseguem aplicar os conhecimentos adquiridos nessa seção na resolução das outras questões desse tipo distribuídas ao longo do volume nas seções ***Problemas e exercícios propostos***.

Esse trabalho pode ser complementado com simulados organizados pelo professor para que os estudantes estejam preparados não apenas em termos de conteúdo, mas também para que eles vivenciem o ambiente e o clima em que essas provas acontecem. No primeiro momento em que os estudantes forem viver uma experiência como essa, transmita a eles orientações como as indicadas a seguir e, sempre que possível, reforce-as.

- Identifique e resolva as questões mais fáceis primeiro. Dessa maneira, você resolve o maior número possível de atividades no tempo estipulado.
- Identifique as questões médias e difíceis para voltar a elas depois.
- Não perca muito tempo tentando resolver uma questão que exige um conceito do qual você não se recorda no momento. Passe para outra atividade e, depois, retome as questões que ficaram para trás. Ao lidar com outras atividades, você pode se lembrar dos conteúdos necessários para resolver essas questões.
- Se as questões exigirem a leitura de textos, primeiro leia a pergunta e, depois, leia o texto com o olhar direcionado. Dessa maneira, você consegue identificar as respostas enquanto realiza a leitura e interpreta o texto.
- Controle o tempo de resolução das questões para que, se você considerar necessário, possa fazer uma pausa e voltar renovado para resolver as demais questões.

O último instrumento é o **portfólio**, uma maneira de documentar os trabalhos realizados pelo estudante, como pesquisas, gráficos, textos, problemas resolvidos, etc., e arquivá-los em uma pasta. O portfólio pode ser entendido como um articulador dos demais instrumentos de avaliação, pois sua organização, realização e utilização o tornam o representante mais adequado para fazer da avaliação um processo compartilhado entre professor e estudante.

Em outra direção, é preciso reconhecer que todo professor deve observar seus estudantes. Trata-se, então, de validar essa **observação** em um instrumento concreto. Um caderno físico ou um arquivo virtual pode conter essas observações, para ser utilizado em momentos de análise pelo professor ou para confrontar suas percepções com as dos estudantes em suas autoavaliações, produções e provas. Breves anotações e comentários sobre a aula podem apoiar intervenções mais assertivas e intencionais.

Nessa perspectiva, o essencial é a decisão de colocar a avaliação a serviço do processo de aprendizagem. Isso faz com que os diversos instrumentos utilizados se organizem em torno de atividades que tenham sentido e relevância para o estudante, em detrimento de exercícios pontuais e artificiais. Dessa maneira, a avaliação se torna, simultaneamente, uma situação de ensino e de aprendizagem.

A meta desse processo de planejamento e avaliação é que os registros do professor, em conjunto com os de seus estudantes, componham a trajetória do trabalho realizado, iluminem o caminhar, criem a memória da vida do grupo e de cada estudante em particular e legitimem as decisões tomadas para a aprendizagem de todos.

Vale ressaltar que grupos numerosos de estudantes podem apresentar desafios para diagnósticos e acompanhamentos individuais, mas favorecem o debate e a troca de ideias. Nesse caso, é proveitoso que os estudantes participem da organização das discussões coletivas ou em grupo em diversos momentos ao longo da coleção. Durante essas vivências, é possível avaliar a interação entre os estudantes e o empenho e o comportamento de cada um deles.

Além disso, é importante promover e favorecer a aprendizagem de estudantes com diferentes perfis e modos de aprender – uma vez que eles são o centro da ação pedagógica – com várias oportunidades para serem protagonistas na aquisição de seus conhecimentos. Os estudantes vivenciam situações diversas que permitem identificar suas potencialidades, suas dificuldades, seus repertórios prévios e suas preferências. Nesse contexto, é possível que todos os estudantes sejam valorizados e acolhidos, porque podem experimentar os fazeres propostos, tendo o professor como mediador de seu processo de aprendizagem e os colegas como parceiros nessa construção.

É fundamental realizar uma avaliação continuada dos estudantes e promover a colaboração entre educadores e educandos, incentivando-se uma postura ativa de ambas as partes no processo de ensino e aprendizagem. Assim, criam-se condições para que o professor possa identificar, combater e, principalmente, prevenir comportamentos que coloquem em risco a saúde mental dos estudantes, como mediador em ocorrências de *bullying* e em ações de prevenção à violência autoprovocada. Além de promover discussões sobre o assunto, é fundamental que os educadores saibam identificar situações de calúnia, constrangimento e ameaça verbal ou física, incentivando o respeito mútuo, a empatia entre os estudantes, o autocuidado e a valorização da vida. Os estudantes precisam se sentir amparados pelos adultos, ter seus problemas reconhecidos e ouvidos e, se necessário, ser encaminhados a um profissional da área da saúde.

O papel do educador é estar alerta, ser empático e contribuir para que os estudantes se sintam emocionalmente confiantes e preparados para lidar com os desafios. Também pode desempenhar um papel na resolução dos conflitos e na conciliação dos envolvidos. Ao proporcionar um ambiente emocionalmente seguro, respeitoso e de confiança entre os estudantes, os educadores podem promover a convivência pautada pela ética e por atitudes e valores essenciais para a vida em sociedade. Com isso em mente, é possível orientá-los sobre a importância do autorrespeito, do respeito ao próximo, da consciência e da responsabilidade em relação aos próprios atos, bem como da necessidade de se colocar no lugar do outro.

Para obter mais informações sobre como prevenir e mediar o *bullying* na escola e evitar ações de violência autoprovocada, os educadores podem procurar cartilhas elaboradas pela Organização Mundial da Saúde (OMS), pela Ordem dos Advogados do Brasil (OAB) e pelo Centro de Valorização da Vida (CVV).

MODELOS AVALIATIVOS

Como foi apresentado anteriormente, a avaliação é o processo de coletar, organizar, sistematizar e interpretar dados e informações que ajudam a acompanhar o processo de ensino e aprendizagem e a tomar decisões sobre o que será necessário fazer para planejar e replanejar as ações de ensino e aprendizagem. Em estreita relação com o que se deseja que os estudantes aprendam, a avaliação tem diferentes funções e é um importante instrumento de regulação das relações entre estudantes e educadores e do processo de ensinar e aprender e um poderoso instrumento de comunicação. A finalidade do processo avaliativo é sempre garantir que as aprendizagens aconteçam. Toda avaliação tem caráter orientador e deve estar associada à garantia de que os estudantes avancem em sua trajetória escolar aprendendo o que se espera no ano em que se encontram.

Há diferentes tipos de avaliação com finalidades distintas e complementares, visando apoiar o professor a tomar suas decisões. Vamos tratar dos modelos diagnóstico, formativo, somativo, comparativo e ipsativo.

Avaliação diagnóstica ou inicial

A **avaliação diagnóstica ou inicial** é utilizada antes do início do processo de ensino para identificar os conhecimentos prévios, as habilidades e as necessidades dos estudantes. Ela costuma ser aplicada no início do ano, mas conceitualmente toda avaliação pode ser considerada diagnóstica e, em essência, todo processo de ensino que se inicia deveria ter um momento em que os estudantes pudessem utilizar seus conhecimentos prévios e reconhecer o que sabem a respeito daquilo que aprenderão.

Esse tipo de avaliação tem como objetivo identificar pontos fortes e fracos dos estudantes antes de se iniciar um novo ano, uma unidade do livro ou um conceito, permitindo um planejamento mais eficaz do ensino. Por exemplo, se o professor vai iniciar um capítulo que trata de Estatística, é interessante propor aos estudantes que escrevam o que sabem a respeito de gráficos e tabelas, uma vez que esses elementos são essenciais para o estudo. Isso servirá para eles como "aquecimento" e dará ao professor uma ideia do que precisará retomar e quão profunda, ou não, deverá ser essa retomada. Os estudantes podem fazer isso em grupo ou produzir uma apresentação de *slides* ou, ainda, citar exemplos.

A avaliação diagnóstica não precisa ser longa e pode ser realizada por meio dos seguintes recursos:

- **Entrevistas individuais** com os estudantes, para discutir seus conhecimentos prévios e identificar áreas de dificuldade.
- **Questionários**, com a utilização de plataformas *on-line*, para diagnosticar as habilidades e os conhecimentos da turma antes de iniciar uma nova unidade do Livro do Estudante.

Prefira avaliações diagnósticas mais curtas, porém frequentes, considerando apenas os conhecimentos pregressos necessários para trabalhar um tema de um mês ou do primeiro trimestre letivo, por exemplo. Isso permite fazer um plano mais focado do conteúdo que precisa ser retomado de imediato. Muitas vezes, o aquecimento inicial e as aulas posteriores tornam desnecessárias grandes revisões iniciais. O texto introdutório e as primeiras atividades do Livro do Estudante podem servir para criar um teste diagnóstico. Elabore questionários com base em tópicos principais do Livro do Estudante dos quais a turma já deveria ter se apropriado.

Avaliação formativa

A **avaliação formativa** é realizada durante o processo de ensino e aprendizagem e tem como objetivo acompanhar o progresso dos estudantes, fornecendo *feedback* contínuo que possibilite melhorar esse processo. Essa avaliação é feita pelo professor e pelos estudantes, pode contar com diversos instrumentos e redireciona continuamente o planejamento. As informações obtidas pela avaliação formativa, portanto, ajudam o professor e os estudantes a identificar áreas que necessitam de melhoria e ajustar o ensino e a aprendizagem em tempo real.

Os instrumentos da avaliação formativa podem incluir, por exemplo: a própria produção dos estudantes durante a aula; pequenas atividades ao final da aula para verificar se a principal ideia desenvolvida foi aprendida, ou não (e, assim, identificar o que eventualmente é necessário retomar na aula seguinte); momentos de autoavaliação dos estudantes. Os instrumentos de avaliação podem divididos em algumas categorias:

- **Observação e registro** – Consiste no registro das observações constantes que o professor faz dos estudantes nas situações de aula, bem como de suas próprias impressões sobre as aulas. Em um caderno, o professor pode organizar um diário de bordo e fazer anotações que o ajudem na tomada de decisões a respeito de suas aulas e apoiem o aprendizado de seus estudantes.
- **Avaliação entre pares** – Constituem sessões de revisão entre pares, nas quais os estudantes avaliam o trabalho dos colegas e fornecem *feedback* sobre isso, por exemplo, com a troca de cadernos entre eles, para que corrijam as atividades uns dos outros, ou pela leitura da seção ***Palavras-chave***.
- **Provas** – Esse instrumento é adequado para avaliar procedimentos específicos, a capacidade do estudante de organizar ideias, sua capacidade de expressão e sua habilidade de apresentar soluções originais. É possível propor provas com consulta ou sem consulta, em duplas ou em grupos maiores, etc. A prova pode ser dissertativa, de múltipla escolha, com itens de resposta construída ou uma combinação de todos esses formatos. As provas, porém, têm suas limitações quando se quer, por exemplo, analisar como os estudantes utilizam conhecimentos em situações em que precisam argumentar com outras pessoas, como em debates ou outras circunstâncias de discussão de ideias.
- **O que aprendi sobre** – Um incentivo para que os estudantes mantenham registros escritos de aprendizagem sobre o que estudaram, sobre dúvidas que tiverem e sobre como se sentem em relação ao próprio progresso. Isso pode ser feito em forma de lista, história em quadrinhos, pequenos textos, tanto em papel quanto em meios digitais.
- **Livro didático** – Os problemas e exercícios de cada seção propostos no Livro do Estudante podem orientar a avaliação formativa se os estudantes, juntamente com o professor, analisarem erros cometidos durante a resolução. A seção ***Palavras-chave***, pensada como um momento de síntese e autoavaliação, pode ser discutida ou realizada em duplas, e o professor pode recolher e ler as produções, dando aos estudantes um retorno sobre erros e acertos, retomando com eles o que julgar necessário. Essa seção pode, ainda, ser uma ferramenta interessante para um portfólio. Também pode ser reservada uma aula quinzenal para que os estudantes se dediquem a revisar o que aprenderam ou pode ser realizado um *quiz* semanal em que eles criem sessões de revisão entre pares, usando a seção ***Para recordar*** do Livro do Estudante.

Avaliação somativa

A **avaliação somativa** ocorre ao fim de um período de ensino, como um bimestre, um semestre ou um ano letivo, e tem o intuito de consolidar o aprendizado dos estudantes em relação aos objetivos estabelecidos. De modo geral, essa avaliação pode ser uma síntese feita com base na avaliação formativa.

O objetivo da avaliação somativa, portanto, é indicar o nível de conhecimento adquirido pelos estudantes ao final de um período de instrução, contendo aspectos burocráticos como atribuição de nota ou conceito exigidos pelo sistema, que são geralmente usados para certificar a conclusão de um curso. Alguns diferentes instrumentos podem ser usados como avaliação somativa:

- **Simulados** – É possível organizar testes que simulem processos seletivos (como os do Enem e de vestibulares) com questões de múltipla escolha, abrangendo noções e conceitos estudados em determinado período do ano letivo. Os estudantes precisam aprender a lidar com esse tipo de processo, com regras mais rígidas de realização, e assim é possível analisar a autonomia e o preparo deles para esse tipo de avaliação. Devemos frisar que é importante que esse não seja o único tipo de instrumento avaliativo do período.
- **Projetos finais** – Projeto final a ser realizado pelos estudantes que englobe diversos conceitos aprendidos ao longo do semestre, como a criação de um modelo matemático, a resolução de um problema complexo ou a aplicação de conceitos matemáticos em um contexto real.
- **Portfólios** – Consistem em um conjunto (físico ou digital) de atividades e trabalhos realizados ao longo do período letivo, incluindo trabalhos corrigidos, reflexões sobre o aprendizado e autoavaliações. Os portfólios devem ser organizados e mantidos pelos estudantes.
- **Livro didático** – As atividades propostas ao longo de cada capítulo do Livro do Estudante podem compor pequenos testes quinzenais mais abrangentes e ter um fechamento conjunto com outros instrumentos de avaliação ao final de um período letivo.

Avaliação comparativa

A **avaliação comparativa** é utilizada para comparar o desempenho de diferentes grupos de estudantes ou de um mesmo grupo de estudantes em diferentes momentos. Ou seja, o objetivo da avaliação comparativa é analisar diferenças no desempenho entre grupos de estudantes (como turmas ou mesmo escolas) ou, ao longo do tempo, buscar entender tendências e efetividade de métodos de ensino.

Em Matemática, o professor pode aplicar os mesmos testes da avaliação somativa em todas as turmas de uma mesma série. Após a aplicação dos testes, é indispensável que sejam realizadas as seguintes etapas:

- **Análise de dados** – Prevê a utilização de ferramentas de análise de dados, como planilhas e gráficos, para comparar os resultados das avaliações (entre diferentes turmas ou períodos letivos) e entender o desempenho dos estudantes.
- **Produção de gráficos de progresso** – Servem para gerar uma visualização eficaz de melhorias ou de declínios no desempenho dos estudantes ao longo do tempo.

Caso sua rede já conte com avaliações comparativas, não há necessidade de criar outra; utilize os dados já existentes para essa comparação e análise.

Avaliação ipsativa

A **avaliação ipsativa** compara o desempenho atual de um estudante com o próprio desempenho anterior, em vez de compará-lo com o desempenho dos colegas. Esse tipo de avaliação pode ser utilizado em Matemática para manter registros das avaliações dos estudantes ou pedir a eles que façam autoavaliações e estabeleçam metas de aprendizagem, revisando essas metas periodicamente para monitorar seu progresso pessoal.

O objetivo principal da avaliação ipsativa é acompanhar o progresso individual e a melhoria contínua dos estudantes, incentivando o desenvolvimento pessoal.

Tanto nas avaliações comparativas quanto nas ipsativas é importante o registro do professor, por meio de anotações constantes ou de gráficos ou mapas, para obter uma visão mais holística do aprendizado dos estudantes/das turmas, o que lhe permitirá fazer ajustes mais precisos no ensino, promovendo um ambiente de aprendizagem mais eficaz e personalizado.

ESTRUTURA DA COLEÇÃO

Esta coleção é composta de três volumes da área de Matemática e suas Tecnologias destinados ao Ensino Médio. Cada volume está organizado em quatro unidades, que, por sua vez, estão divididas em capítulos. Na concepção de cada volume, cuidamos para que os conteúdos fossem distribuídos de maneira organizada e equilibrada, de modo que fossem contempladas todas as unidades temáticas da Matemática previstas na BNCC: Números e Álgebra; Grandezas e Medidas; Estatística e Probabilidade.

Organização geral da obra

Cada volume é composto de quatro unidades e cada volume aborda todas as áreas da Matemática (números e áreas, geometria e medidas, probabilidade e estatística).

VOLUME 1

Unidade 1: Números, análise de dados e funções

- Capítulo 1 – Conjuntos numéricos e intervalos na reta real
- Capítulo 2 – Estatística: dados, variáveis e gráficos
- Capítulo 3 – Relações entre grandezas: funções
- Capítulo 4 – Função afim
- Capítulo 5 – Função quadrática

Unidade 2: Grandezas em geral e áreas

- Capítulo 6 – Grandezas e medidas
- Capítulo 7 – Áreas de figuras planas

Unidade 3: Sequências e progressões

- Capítulo 8 – Sequências numéricas
- Capítulo 9 – Progressões

Unidade 4: Educação financeira e noções de Estatística

- Capítulo 10 – Estatística: amostragem e medidas de tendência central
- Capítulo 11 – Educação financeira e projeto de vida

VOLUME 2

Unidade 1: Matemática Financeira e funções: exponencial e logarítmica

- Capítulo 1 – Função exponencial
- Capítulo 2 – Logaritmo e função logarítmica
- Capítulo 3 – Matemática Financeira

Unidade 2: Geometria plana

- Capítulo 4 – Geometria euclidiana
- Capítulo 5 – Geometria das transformações

Unidade 3: Trigonometria

- Capítulo 6 – Relações trigonométricas no triângulo retângulo
- Capítulo 7 – Relações trigonométricas em um triângulo qualquer
- Capítulo 8 – Arcos de circunferência e ciclo trigonométrico
- Capítulo 9 – Funções trigonométricas

Unidade 4: Análise combinatória e probabilidade

- Capítulo 10 – Análise combinatória
- Capítulo 11 – Probabilidade

VOLUME 3

Unidade 1: Probabilidade e Estatística

- Capítulo 1 – Estatística: medidas de dispersão
- Capítulo 2 – Probabilidade e Estatística

Unidade 2: Geometria espacial

- Capítulo 3 – Sólidos geométricos: poliedros
- Capítulo 4 – Sólidos geométricos: corpos redondos
- Capítulo 5 – Geometria métrica espacial
- Capítulo 6 – Projeções cartográficas

Unidade 3: Programação e pensamento computacional

- Capítulo 7 – Pensamento computacional
- Capítulo 8 – Algoritmos e fluxogramas

Unidade 4: Sistemas lineares e matrizes

- Capítulo 9 – Sistemas lineares
- Capítulo 10 – Matrizes

ESTRUTURA DO LIVRO DO ESTUDANTE

Cada volume da coleção está organizado em unidades e capítulos. Os textos e as atividades foram idealizados para auxiliar o professor no desenvolvimento das aulas, especialmente no que diz respeito à fundamentação teórica de cada tema e também para permitir que o estudante desenvolva autonomia em relação à leitura e à compreensão dos assuntos abordados. Para isso, o texto tem uma linguagem precisa, sem formalismos excessivos. Os exemplos e as atividades resolvidas complementam as explicações e permitem que o estudante reflita sobre a teoria apresentada.

Ao planejar as aulas, o professor pode analisar as orientações que são direcionadas a ele e também aquelas que se destinam ao estudante; assim, poderá compreender melhor e otimizar a proposta pedagógica desta coleção.

Como sugestão, o professor pode diversificar sua aula organizando a turma em duplas ou em grupos e pedindo aos estudantes que leiam o texto sobre o assunto que será abordado. Eles devem procurar entender o que o material explica sobre o tema, discutir o texto, anotar dúvidas e procurar no dicionário palavras cujo significado desconheçam. Além disso, podem produzir, em grupo ou individualmente, um pequeno relatório de leitura, que será apresentado à turma para uma discussão final mediada pelo professor, que pode realizar intervenções necessárias para sanar dúvidas e complementar informações.

A seguir, apresentamos como cada item do Livro do Estudante está organizado.

Abertura de unidade

A abertura de unidade é o primeiro contato dos estudantes com os temas a serem abordados na unidade e com os capítulos que dela fazem parte. Uma imagem e um texto introdutório instigam os estudantes a refletir sobre os temas em questão e a resgatar o que já sabem desses temas. Dessa maneira, o trabalho com a abertura é uma oportunidade de explorar as expectativas e os conhecimentos prévios dos estudantes, tornando-se um primeiro momento de avaliação diagnóstica.

Sempre que possível, é interessante perguntar aos estudantes o que eles conhecem e entendem sobre os temas propostos e o que a imagem lhes sugere. Com base nas respostas, é possível ter os primeiros indícios dos conhecimentos prévios deles e de sua motivação. Esses dados iniciais permitem rever ou aprimorar o planejamento para o trabalho com os objetos de conhecimento de cada capítulo.

Abertura de capítulo

A abertura de cada capítulo foi idealizada tendo como base a metodologia ativa da aprendizagem baseada em problemas (ABP). O texto se inicia com uma questão instigadora cuja resolução nem sempre é possível com o conhecimento matemático anterior. Essa mobilização para aprender se completa com a retomada da questão inicial no próprio texto do estudante. A decisão dessa retomada depende do planejamento do professor, mas há sempre uma sugestão de como fazer isso no texto do estudante.

Um painel de soluções pode ser feito nessa retomada permitindo que o estudante perceba se seu conhecimento de matemática é suficiente para a resolução eficaz do problema, e para que o professor possa avaliar a aprendizagem dos estudantes.

Problemas e exercícios resolvidos

As atividades resolvidas permitem que os estudantes ampliem o repertório de estratégias utilizadas na resolução de problemas e analisem a escrita na linguagem da Matemática, explorando mais de um registro de representação, para que, assim, se apropriem da linguagem e da modelagem matemática e possam se preparar para realizar as atividades propostas.

Problemas e exercícios propostos

Para que os estudantes desenvolvam habilidades que lhes permitam resolver uma variedade de problemas, essa seção traz diversas atividades que os levam a refletir sobre os temas abordados, a praticar o que aprenderam e a estabelecer relações entre os diferentes assuntos tratados no Livro do Estudante e, progressivamente, desenvolver raciocínios mais elaborados.

A quantidade de problemas e exercícios propostos pode variar dependendo da complexidade e das habilidades a serem desenvolvidas por meio do estudo do tema de cada etapa do capítulo. Sempre que o tema permite, o material apresenta problemas relacionados com outras áreas do conhecimento ou com assuntos do dia a dia.

Em alguns momentos, ao longo das atividades propostas, os estudantes são incentivados a:

- retomar um exercício resolvido que possa auxiliá-los na resolução de um problema proposto, de modo a desenvolver o raciocínio por analogia;
- relacionar dois ou mais exercícios, buscando alguma regularidade entre eles;
- deter-se em um exercício por sua complexidade ou por permitir alguma aplicação interessante.

Nesse processo, exigem-se dos estudantes reflexões mais profundas, a fim de que adquiram ferramentas mais valiosas que a simples busca da resposta correta.

O professor pode propor à turma que as atividades sejam resolvidas individualmente, ou colaborativamente em duplas ou em grupos, selecionando algumas para serem feitas em sala de aula, sob sua supervisão, e outras como tarefa extraclasse, a fim de que os estudantes ganhem autonomia.

Como citado anteriormente, o painel de soluções é um importante recurso para a socialização das resoluções de um mesmo problema, com discussão de diferentes estratégias ou maneiras de registro, incentivando-se, assim, a troca de pontos de vista, a construção de argumentos consistentes e o respeito ao outro. Também é importante incluir a análise e a verificação da razoabilidade das respostas obtidas.

O planejamento das aulas e as características de cada turma determinarão se será realizada a resolução de todos os problemas e exercícios propostos ou a seleção de uma parte deles. Além disso, a distribuição das atividades em diferentes aulas é uma estratégia que pode facilitar a manutenção de ideias importantes e centrais e ajudar na recuperação de eventuais dificuldades.

Um aspecto que merece atenção é a proposta de que o estudante, sozinho ou em grupos, elabore problemas. Essa é uma habilidade mais complexa e é solicitada algumas vezes ao longo da coleção, em geral entre os últimos problemas de cada série. Ela está presente na BNCC repetidas vezes entre as habilidades relacionadas à competência específica **3** – “Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente” (Brasil, 2018a, p. 531) – sempre relacionada com a resolução de problemas ligados aos temas e aos conceitos matemáticos explicitados em cada habilidade.

Desse modo, o estudante não só deve se tornar capaz de resolver os problemas propostos no Livro do Estudante ou pelo professor, mas também deve desenvolver a habilidade de elaborar exercícios. Por meio desse procedimento, ele se percebe em um processo criativo do fazer matemático e adquire noções sobre a maneira de utilizar a linguagem matemática, reflete acerca de seus procedimentos e escreve sobre o que é significativo para ele. O professor, por sua vez, obtém elementos para avaliar dúvidas, progressos e necessidades do estudante.

As atividades propostas no Livro do Estudante são diversificadas para que o estudante elabore problemas parecidos com outros já resolvidos por ele, tendo como base uma expressão, uma pergunta, uma resposta ou uma imagem, por exemplo. Esse tipo de atividade permite também que o estudante perceba a relação entre dados, perguntas e respostas, bem como a maneira de articular esses três elementos em um problema.

Certamente, com o objetivo de desenvolvimento da linguagem do letramento matemático é preciso planejar também o que fazer com os problemas elaborados pelos estudantes. Algumas possibilidades são:

- sortear alguns problemas formulados e propor à turma que os resolva;
- distribuir os problemas entre os estudantes de modo que cada um resolva um problema elaborado por um colega;
- organizar uma lista com todos os problemas para que os estudantes os resolvam;
- escolher um problema cuja formulação esteja incompleta ou malfeita para trabalhar como texto a ser reelaborado em conjunto com a turma.

Se os problemas produzidos forem expressos em uma linguagem confusa, não tiverem perguntas ou não apresentarem dados suficientes para a resolução, isso será percebido quando outro estudante for resolvê-lo, e o professor poderá discutir cada problema com a turma, tratando-o como um texto que necessita de reformulação. O mais importante nesse processo é que o estudante sinta que escreve para qualquer leitor, e não apenas para o professor, pois isso incentiva o aperfeiçoamento das produções.

A elaboração de problemas pelo estudante pode compor a avaliação formativa.

Tecnologia

Faz parte da formação em Matemática contribuir para um uso refletido da tecnologia da comunicação e informação, a fim de que o jovem utilize esse recurso como ferramenta de investigação, pesquisa, aprendizagem colaborativa e, muito particularmente, na resolução de problemas.

Ao longo dos volumes desta coleção, sempre que necessário e possível, propusemos atividades variadas que utilizam recursos diversos do computador e da rede mundial de informações (*web*), de modo a favorecer simultaneamente a aprendizagem da Matemática e dos recursos tecnológicos.

A ideia é utilizar as novas mídias e tecnologias educacionais para favorecer as aprendizagens. Optamos por recomendar recursos que são de acesso gratuito ou de distribuição gratuita na internet, de modo que não haja impedimento para resolver os problemas propostos. Assim, buscamos evitar dificuldades para aqueles que não têm familiaridade com o computador.

Nessa seção, o estudante tem contato com textos semelhantes ao de manuais técnicos, na medida em que conhece e explora os recursos de um aplicativo, de um *software* e até, de uma calculadora. O uso da calculadora nesta coleção busca tanto aumentar a eficácia do ensino quanto desenvolver no estudante o senso crítico, o pensamento hipotético e dedutivo, a capacidade de observação e de pesquisa e as estratégias de comunicação. Nossa experiência indica que, quando usada de modo planejado, a calculadora não inibe o pensamento matemático; pelo contrário, tem efeito motivador na resolução de problemas, mobiliza processos de estimativa e cálculo mental, dá aos professores a chance de propor problemas com dados mais reais e auxilia na elaboração de conceitos e na percepção de regularidades.

O emprego da calculadora humaniza e atualiza as aulas e permite que o estudante ganhe mais confiança para trabalhar com problemas e buscar novas experiências de aprendizagem. Portanto, o letramento matemático no âmbito da tecnologia se amplia com a utilização da calculadora, não para que o estudante faça cálculos rotineiros, mas para que domine minimamente as tecnologias presentes em sua realidade cotidiana. Por isso, é importante que as atividades propostas que envolvem o uso de calculadora sejam analisadas pelo professor, para que perceba que o foco são as relações apresentadas e não os cálculos em si, que, em sua maioria, são complexos, envolvem muitos números e podem desviar a atenção do estudante do real objetivo da atividade.

Finalmente, ao professor cabe ainda a tarefa de propor outras situações nas quais as máquinas possam ser úteis, elaborando atividades cujo objetivo seja que o estudante se concentre nos conceitos e nas estratégias, e não nos cálculos propriamente ditos. Ao professor preocupado com o estudante que não tem calculadora, lembramos que uma por grupo de quatro ou cinco estudantes é suficiente para a realização do trabalho e que hoje existem calculadoras nos celulares e nos computadores.

Para explorar

Com foco no letramento no sentido amplo e não apenas matemático, mas também nessa área, ao longo do Livro do Estudante, esse boxe traz sugestões complementares de textos, vídeos, filmes ou *sites*. Os materiais selecionados são apresentados como complementos, e os estudantes podem se organizar para buscá-los em momentos diversos, e não necessariamente em aula. A ideia é despertar no estudante o prazer de conhecer e aprofundar um assunto, bem como para ampliar o conhecimento matemático.

Os livros e os textos curtos (como artigos) sugeridos são de natureza diversa: há textos jornalísticos, narrativos, de divulgação científica, de livros paradidáticos, entre outros. Eles têm a intenção de valorizar a leitura nas aulas de Matemática.

Os vídeos e os filmes, geralmente disponíveis na internet, têm praticamente o mesmo objetivo dos textos, mas ampliam o repertório do estudante ao apresentar novos espaços do mundo digital além dos que ele usualmente acessa.

Os *sites* indicados são sempre de fontes confiáveis e podem se tornar uma ferramenta de aprofundamento autônomo do estudante em determinados assuntos e um meio de descoberta de novos conteúdos correlacionados, uma vez que muitos *sites* contêm *links* e indicações para outros textos e outras páginas da internet que podem expandir ainda mais esse processo de busca de informação de qualidade.

A utilização dessas sugestões pode ser incentivada de diferentes maneiras:

- o professor faz comentários sobre os materiais sugeridos, de modo a instigar a curiosidade dos estudantes para conhecer esses conteúdos;
- os estudantes buscam os materiais individualmente, sem que haja necessidade de qualquer outra intenção pedagógica além de levá-los a conhecer essas sugestões;
- os estudantes podem, em uma data previamente combinada com o professor, conversar sobre as aprendizagens, as dúvidas e as impressões a respeito do material que exploraram;
- os estudantes podem escrever um comentário sobre o que aprenderam ou sobre suas impressões, no jornal ou no blogue da escola, por *e-mail* ou até mesmo por um aplicativo de mensagens. Eles podem emitir suas opiniões críticas sobre o material indicado, inclusive recomendando, ou não, esse material para outras pessoas;
- a turma pode criar um perfil em uma rede social para registrar resenhas ou críticas aos conteúdos sugeridos que eles exploraram;
- ao longo de um semestre, a turma pode criar um jornal de resenhas de textos e vídeos que envolvam a Matemática.

Uma observação importante é que essa ampliação de horizontes com as leituras e os vídeos não seja utilizada para elaborar provas ou para premiar os estudantes com acréscimos nas notas. A intenção é que essa proposta seja vista como opção para saber mais, como forma de a Matemática contribuir para a cultura geral do estudante e que, portanto, seja valorizada pelo conhecimento que propicia.

Cálculo rápido

Ao longo da Educação Básica, os estudantes precisam adquirir habilidades em diferentes modalidades de cálculo: estimativa, com algoritmos pessoais ou convencionais, uso de calculadora e cálculo mental. Para que eles desenvolvam habilidades com cálculo mental e possam perceber seu valor, é preciso que se reserve um tempo da aula para essa finalidade.

É importante compreender que o cálculo mental, como habilidade pessoal, desenvolve-se progressivamente, muitas vezes utilizando o apoio do cálculo escrito para etapas intermediárias até obter o resultado final. À medida que essa habilidade se aprimora, as etapas escritas se abreviam até que ele seja feito quase exclusivamente "de cabeça". Mesmo que os procedimentos apresentados e vivenciados pelo estudante não sejam totalmente incorporados como ferramentas mentais, eles conferem maior flexibilidade para lidar com números, grandezas e operações, além de aumentar a confiança na própria maneira de pensar.

Para recordar

Uma vez que o objetivo maior do ensino de Matemática é contribuir para o desenvolvimento autônomo dos estudantes, entendemos que não basta que aprendam os conceitos presentes em cada capítulo; é preciso que eles mobilizem conhecimentos diversos a qualquer tempo, em função de situações-problema que devam ou desejem enfrentar. Por isso, as atividades propostas nessa seção têm como objetivo fundamental manter vivas as principais ideias já estudadas, como maneira de aprender a estudar e aprender o que é mais relevante em relação a objetos, procedimentos e maneiras de pensar que foram explorados nos capítulos e até em anos anteriores.

Essa seção pode também acolher dificuldades em turmas heterogêneas, uma vez que esses problemas podem ser resolvidos em duplas ou em grupos produtivos. Além disso, na retomada de ideias centrais já estudadas, os estudantes têm a oportunidade de recuperação em processo.

No planejamento das aulas, é aconselhável verificar se há problemas que envolvem habilidades que serão necessárias na abordagem do próximo capítulo a ser trabalhado ou se há problemas que possam servir para o estudante sanar dúvidas identificadas pelo professor em suas observações.

Foco no raciocínio lógico

Essa seção tem como propósito levar os estudantes a resolver problemas não convencionais. De maneira geral, esses problemas não estão relacionados diretamente ao tema do capítulo em que se encontram e não podem ser resolvidos com a aplicação direta de uma equação ou outro processo algorítmico, exigindo sempre do estudante dose considerável de reflexão, criatividade e originalidade.

Os problemas propostos envolvem as mais diversas habilidades e estratégias de resolução, como: tentativa e erro; resolução com apoio de tabelas, diagramas ou desenhos; busca de regularidades; conjectura e levantamento de hipóteses.

Nos três volumes, há uma grande variedade de problemas para o estudante resolver, entre os quais destacamos os chamados problemas de lógica e os de estratégia, cuja resolução requer raciocínio dedutivo e depende do levantamento de hipóteses e de sua checagem imediata. Sugerimos que os problemas sejam trabalhados em duplas.

Mais do que em outros momentos, o **painel de soluções** pode ser usado para a análise dos enunciados, pois a confrontação das soluções e a discussão das possibilidades de resolução são elementos essenciais na abordagem dos problemas.

Inicialmente, os estudantes podem estranhar resolver problemas tão diferentes, especialmente aqueles que não envolvem números. No entanto, com o incentivo e o auxílio do professor, eles podem se desafiar, e é comum que passem a resolver os problemas dessa seção antes mesmo que o professor lhes sugira.

O trabalho com esses problemas torna-se mais eficaz se for constante; por isso, eles não precisam ser propostos todos de uma vez, mas podem ser explorados ao longo do estudo do capítulo. O professor pode, por exemplo, selecionar algum dentre os mais complexos como o "problema da semana" e desafiar os estudantes a resolvê-lo no prazo de uma semana, ao longo da qual podem entregar soluções parciais, consultar os colegas e buscar diferentes estratégias. Em uma data combinada, os estudantes apresentam seus registros e analisam as diversas soluções.

Palavras-chave

Essa seção foi concebida para levar os estudantes a tomar consciência de fatos, conceitos e procedimentos aprendidos ao longo do capítulo, ensinando-os a estudar. Para isso, os estudantes precisam revisar o tema, identificar as ideias centrais e explicá-las com as próprias palavras, acompanhadas de exemplos.

Individualmente, em duplas ou em pequenos grupos, é proposto que os estudantes resumam as principais ideias do capítulo, ilustrem seus resumos com exemplos e outras informações relevantes e façam um balanço de seus conhecimentos.

Eles podem ser incentivados a fazer o resumo ao longo do desenvolvimento do capítulo ou ao final dele. Esse resumo pode ser estruturado como um texto, um quadro-síntese ou uma tabela de dupla entrada que relacione as palavras-chave com suas definições e exemplos correspondentes. Essa atividade pode ser realizada de maneira interdisciplinar com a área de Linguagens para que os estudantes compreendam o que é e como se faz um resumo, um quadro-síntese, um texto informativo, um mapa mental e outros gêneros textuais propostos em cada uma dessas seções.

Essa seção serve também como instrumento ao qual o professor pode recorrer para compor a avaliação formativa e ipsativa, analisando as necessidades e o progresso dos estudantes: ao ler os resumos, poderá identificar dúvidas e incompreensões, conhecimentos adquiridos e extrapolações que cada estudante conseguiu fazer, o que lhe fornecerá uma visão das conquistas e das dificuldades de sua turma.

Matemática e...

O foco dessa seção é levar os estudantes a perceber a Matemática em contextos significativos, relacionando o que está sendo estudado no capítulo com outras áreas do conhecimento e com temas contemporâneos transversais. Ao final de cada capítulo, por meio de um breve artigo de divulgação científica ou um texto informativo, pretendemos estabelecer relações entre a Matemática e diversas situações do dia a dia, outras áreas do conhecimento e alguns dos temas contemporâneos transversais, como educação ambiental, educação financeira e educação para o consumo, educação alimentar e nutricional, educação em direitos humanos, ciência e tecnologia (Brasil, 2018a). A leitura dessa seção precisa ser incentivada para posterior discussão sobre o que foi lido. O eventual interesse dos jovens – ou de um grupo em especial – pode levar ao aprofundamento do tema, com novas pesquisas e produções.

Após o texto principal dessa seção, no item "Conectando ideias", há propostas para que os estudantes explorem situações ou realizem pesquisas para intervenção em sua realidade próxima ou, ainda, se engajem em processos criativos e colaborativos de produção de objetos, textos, imagens e outras formas de comunicação de ideias e aprendizagens.

Com isso, espera-se fomentar neles a curiosidade e a motivação para querer aprender mais, compartilhando suas descobertas e discutindo sobre elas com os colegas. Os estudantes podem ser incentivados a se posicionar sobre o tema, trazendo suas próprias opiniões e conclusões, exercendo sua postura crítica, mas sempre de modo fundamentado e ético.

Todo esse material pode ser divulgado em outras turmas da escola ou em eventos para a comunidade escolar. Também pode ser aproveitado em artigos para o jornal da escola ou em pequenas monografias que alguns professores solicitam aos estudantes.

Essa seção, assim como as demais, exige planejamento, para que os estudantes tenham tempo de refletir e, se necessário, buscar mais informações para se posicionar quanto às questões nela propostas.

Por dentro do Enem e dos vestibulares

Essa seção está localizada ao fim de cada unidade e traz diferentes propostas com orientações e estratégias de como resolver questões de provas oficiais do Enem e de vestibulares, para que os estudantes possam praticar o que aprenderam e mobilizar diversos conhecimentos que foram explorados nos capítulos e até mesmo em outras unidades ou em anos anteriores.

As questões selecionadas para essa seção exigem a leitura de diferentes formas textuais – verbais ou gráficas – e permitem que o estudante aplique diferentes estratégias de resolução apresentadas ao longo do volume.

Antes de demonstrar uma questão resolvida, são apresentadas orientações que podem auxiliar na busca da resolução. Em seguida, o estudante encontra a solução completa da questão inicial, podendo compará-la com a estratégia que utilizou para chegar à resposta. Ao final, são propostas questões parecidas, seja no enunciado, seja na maneira de resolver, para que o estudante aplique o que aprendeu.

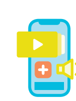
As questões finais dessa seção podem ser utilizadas como instrumento de avaliação ou como tarefas extraclasse ou, ainda, serem discutidas em sala de aula, em duplas, em pequenos grupos ou em um painel de soluções, com a contribuição de todos, de modo a trazer mais evidências da turma e de cada estudante para compor a avaliação formativa, comparativa ou ipsativa, de acordo com o planejamento do professor.

É importante ressaltar que, ao longo do volume, é possível encontrar informações adicionais e complementares ao conteúdo. Esse trabalho é feito no Livro do Estudante com o uso de boxes semelhantes a esse.

Recursos digitais

A obra apresenta, em sua versão digital, 12 objetos digitais para cada volume, totalizando 36 objetos, entre *podcasts*, vídeos, carrosséis de imagens, mapas clicáveis e infográficos clicáveis.

As indicações desses objetos visam valorizar de maneira significativa a apresentação de informações, acrescentando conhecimentos sobre o conteúdo abordado. Esses objetos podem ser localizados no sumário presente no início do Livro do Estudante ou ao longo dos capítulos, por este ícone:



Além disso, as transcrições de todos os áudios estão disponíveis no fim do Livro do Estudante.

PARTE 2 • ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS

Este livro tem como principal objetivo o letramento matemático dos estudantes do Ensino Médio, tendo em vista que essa etapa da Educação Básica deve:

> Garantir a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental [...]. Além de possibilitar o prosseguimento dos estudos a todos aqueles que assim o desejarem, o Ensino Médio deve atender às necessidades de formação geral indispensáveis ao exercício da cidadania e construir "aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea", como definido na Introdução desta BNCC [...] (Brasil, 2018a, p. 464-465).

Considerando esse cenário, estas orientações didáticas têm como objetivo compartilhar com você sugestões que explicitam, com algum detalhamento, a metodologia proposta e as possibilidades de ampliação de um conteúdo que, embora limitado pelas páginas de um livro, pode ser complementado pelo dinamismo de uma sala de aula com estudantes com diferentes perfis e aperfeiçoado com seu conhecimento como profissional da educação.

Na elaboração deste livro, em estreita relação com os fundamentos da BNCC, foi feita a escolha de alguns objetos de conhecimento usuais dos currículos para o Ensino Médio, sempre na perspectiva do desenvolvimento de competências, e não apenas na aquisição do conhecimento em si. Daí a importância da maneira como o livro será utilizado, para que ele possa de fato contribuir para a formação integral dos estudantes.

Para cumprir esse propósito, este manual é parte integrante do Livro do Estudante e precisa ser explorado de modo a colaborar efetivamente para o melhor uso do livro com os estudantes.

O ENSINO ARTICULADO PARA A FORMAÇÃO INTEGRAL DOS ESTUDANTES

Os pressupostos descritos nas orientações gerais deste manual buscaram mostrar que a formação integral é um processo dinâmico e complexo, diferenciado e único para cada estudante. No ensino em turma, no entanto, essa individualização é praticamente impossível; por isso, compreender como se articulam as competências e habilidades selecionadas para cada aula e os objetivos que se deseja alcançar pode ser a resposta para que todos os jovens consigam aprender, ainda que em seu tempo e ritmo próprios.

Na **parte 1** deste manual, destacamos propostas didático-metodológicas que favorecem o trabalho simultâneo com objetos de conhecimento e com o desenvolvimento de competências e habilidades, ressaltando, sempre que possível, a interdisciplinaridade e, orientada pelo planejamento integrado com os professores das áreas de Ciências da Natureza e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Por isso, a proposta é que, durante a leitura destas orientações, você – ciente do objeto de conhecimento tema do capítulo e dos objetivos de aprendizagem que devem ser acompanhados pela avaliação – perceba, nas sugestões metodológicas, como as habilidades e as competências estão interligadas em um processo contínuo e progressivo.

O trabalho com a leitura de textos e de partes da teoria pelos estudantes ou com eles e a solicitação de que eles elaborem situações-problema, pesquisem, desenvolvam estratégias de resolução para problemas mais complexos e discutam em grupos ou em duplas, construindo argumentações consistentes para que se comuniquem com o uso adequado da linguagem, são marcas desta proposta para desenvolver tanto as competências e as habilidades da área de Matemática quanto as competências gerais da BNCC.

ORGANIZAÇÃO GERAL DOS CONTEÚDOS DO VOLUME

O objetivo principal do quadro apresentado a seguir é descrever e organizar os principais objetos de conhecimento, habilidades e expectativas de aprendizagem previstas ao final do estudo apoiado no material deste livro didático. Conforme orientações da BNCC, a forma de ensino e os temas selecionados nas diferentes seções propostas nesta obra permitem a interdisciplinaridade e o desenvolvimento de habilidades de outras áreas do conhecimento. Além disso, apresenta uma sugestão de organização dos conteúdos deste volume em cronogramas de distribuição bimestral, trimestral e semestral. A sequência lógica e progressiva do ensino depende do planejamento do professor, por isso a indicação do número de aulas é apenas uma sugestão para organizar o planejamento e não significa necessariamente que as aulas sejam sucessivas, uma vez que a cada semana ou mês, de acordo com o planejado, mais de um tema/capítulo pode ser trabalhado.

Na coluna das expectativas de aprendizagem estão os pontos de chegada esperados na aprendizagem, que são, portanto, indicadores para a elaboração de instrumentos de avaliação e orientadores da análise do professor sobre o que cada estudante alcançou em relação às habilidades previstas para sua formação em Matemática.

SUGESTÃO DE CRONOGRAMA			CAPÍTULO	Nº DE AULAS	COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS E HABILIDADES DA BNCC	OBJETOS DE CONHECIMENTO
1º semestre	1º bimestre	1º trimestre	1	14	• CE 1 EM13MAT101 • CE 3 EM13MAT304 • CE 5 EM13MAT508	• Funções exponenciais • Gráficos de funções exponenciais • Equações e inequações exponenciais
			2	14	• CE 3 EM13MAT305 • CE 4 EM13MAT403	• Logaritmo de um número • Funções logarítmicas • Gráficos de funções logarítmicas
			3	12	• CE 2 EM13MAT203 • CE 3 EM13MAT303 EM13MAT304 EM13MAT305	• Porcentagem e juros • Relação de dependência entre grandezas • Gráficos e funções (afim e exponencial) • Logaritmos • Conceitos de Matemática Financeira
	2º bimestre		4	16	• CE 3 EM13MAT307 EM13MAT308	• Triângulo retângulo • Teorema de Pitágoras • Teorema de Tales • Relações métricas no triângulo retângulo • Áreas e semelhança de triângulos
		2º trimestre	5	16	• CE 1 EM13MAT105	• Isometrias no plano: reflexão, translação e rotação • O conceito de congruência no plano • Isometrias expressas em coordenadas cartesianas • Homotetia • Homotetias no plano cartesiano
2º semestre	3º bimestre		6	14	• CE 3 EM13MAT307 EM13MAT308 • CE 5 EM13MAT506	• Semelhança de triângulos • Razões trigonométricas no triângulo retângulo • Razões trigonométricas dos ângulos notáveis • Formas de calcular razões trigonométricas de ângulos quaisquer
			7	16	• CE 3 EM13MAT307 EM13MAT308	• Razões trigonométricas de ângulos obtusos • Lei dos senos • Teorema da área • Lei dos cossenos
			8	10		• Ângulos • Arcos de circunferência • Grau e radiano • Ciclo trigonométrico
	4º bimestre	3º trimestre	9	14	• CE 1 EM13MAT105 • CE 3 EM13MAT306	• Funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente • Variação, gráfico e conjunto imagem das funções seno, cosseno e tangente • Relação fundamental da Trigonometria
			10	16	• CE 3 EM13MAT310	• Procedimentos de contagem e análise combinatória • Princípio fundamental da contagem • Permutação • Arranjo • Combinação
			11	14	• CE 1 EM13MAT104 • CE 3 EM13MAT310 EM13MAT311 EM13MAT312	• Probabilidade • Contagem

CE – Competência específica de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio
LGG – Linguagens e suas Tecnologias
CHSA – Ciências Humanas e Sociais Aplicadas
CN – Ciências da Natureza e suas Tecnologias

	OBJETIVOS E EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM/INDICADORES PARA AVALIAÇÃO	COMPETÊNCIAS GERAIS DA BNCC	INTERDISCIPLINARIDADE E COMPETÊNCIAS DE OUTRAS ÁREAS DA BNCC
	• Identificar a relação exponencial de dependência entre duas grandezas. • Construir gráficos de funções exponenciais. • Interpretar gráficos de funções exponenciais. • Utilizar adequadamente a linguagem matemática. • Resolver situações-problema que envolvam variação exponencial entre duas grandezas.	5 e 9	ÁREA DE CN • Competência específica 3 ÁREA DE LGG • Competência específica 1
	• Reconhecer a importância dos logaritmos e sua aplicação na resolução de problemas. • Compreender o conceito de logaritmo e operar com potências. • Resolver equações exponenciais e logarítmicas simples. • Interpretar, ler e construir gráficos de função exponencial e de função logarítmica.	1, 2, 3, 4 e 5	ÁREA DE CN • Competências específicas 1, 2 e 3 ÁREA DE CHSA • Competência específica 1
	• Reconhecer a Matemática aplicada em uma área importante da vida humana. • Aplicar conceitos e propriedades da função exponencial e dos logaritmos na resolução de situações de Matemática Financeira. • Relacionar cálculo de juros a conceitos de função afim, função exponencial e logaritmos. • Interpretar, ler e construir gráficos e textos específicos de Matemática em contextos da Matemática Financeira.	1, 2, 4, 5, 6, 7 e 9	ÁREA DE CHSA • Competência específica 1
	• Utilizar o teorema de Pitágoras e o teorema de Tales. • Aplicar a semelhança de triângulos. • Saber utilizar as relações métricas em um triângulo retângulo. • Resolver problemas que envolvam cálculo de medidas de comprimento e área.	1, 2, 3 e 6	ÁREA DE LGG • Competência específica 3
	• Identificar isometrias e homotetias no plano. • Empregar adequadamente a linguagem matemática. • Descrever isometrias e homotetias no plano cartesiano. • Resolver problemas geométricos relativos a isometrias e homotetias no plano.	1, 2, 3, 4, e 9	ÁREA DE LGG • Competências específicas 6 e 7 ÁREA DE CHSA • Competência específica 1
	• Aplicar a semelhança e a congruência de triângulos. • Utilizar as relações trigonométricas no triângulo retângulo. • Resolver situações-problema que envolvam cálculo de distâncias inacessíveis. • Utilizar calculadora científica para a obtenção de medidas em contextos reais.	1, 2, 3, 4, 5, 7 e 9	ÁREA DE CHSA • Competência específica 1
	• Utilizar a lei dos senos e a lei dos cossenos para resolver problemas. • Calcular a área de triângulos quaisquer e calcular distâncias inacessíveis.	1, 2, 6 e 9	ÁREA DE CN • Competências específicas 1 e 3 ÁREA DE CHSA • Competência específica 1
	• Identificar o radiano como unidade de medida de ângulo e utilizá-lo na resolução de problemas. • Compreender e utilizar a noção de arcos côngruos na resolução de problemas.	1, 2 e 4	ÁREA DE CN • Competência específica 2 ÁREA DE CHSA • Competência específica 1
	• Ler, interpretar, construir e analisar gráficos de funções trigonométricas para definir o sinal, a periodicidade, o domínio e a imagem. • Utilizar conhecimentos sobre funções trigonométricas como recurso para a construção de argumentação e para analisar fenômenos periódicos. • Utilizar as funções trigonométricas para resolver problemas.	1, 2, 3, 4, 5 e 9	ÁREA DE CN • Competência específica 2 ÁREA DE LGG • Competência específica 6
	• Identificar diferentes organizações de dados para decidir a forma adequada de contagem. • Resolver situações-problema de contagem usando diagrama, lista, quadro, árvore de possibilidades e/ou fórmulas. • Utilizar os conhecimentos sobre contagem para construir argumentações.	1, 2, 4, 5, 7 e 9	ÁREA DE CN • Competência específica 3
	• Identificar uma situação de caráter aleatório. • Calcular a probabilidade de ocorrência de um evento dada uma situação-problema, utilizando conhecimentos de contagem e de probabilidade. • Resolver situações-problema que envolvam a probabilidade de ocorrência de eventos no mesmo espaço amostral. • Utilizar conhecimentos de Probabilidade para a construção de argumentação e avaliação em situações diversas.	1, 2, 4, 7, 9 e 10	ÁREA DE CHSA • Competências específicas 1, 5 e 6

ORIENTAÇÕES PARA OS CAPÍTULOS

É importante lembrar que as orientações específicas para cada capítulo funcionam apenas como um roteiro didático. O desenvolvimento das competências que contribuem para a formação integral dos estudantes depende da maneira como você vai conectar essas orientações com outras metodologias.

A problematização, a leitura e a escrita em Matemática são essenciais para esse desenvolvimento. Daí a importância de elas estarem sempre presentes no planejamento de suas aulas, como parte do letramento e da formação do pensar em Matemática.

Assim, é fundamental compreender como se dá a organização dos objetos de conhecimento neste volume.

No início das orientações específicas das unidades, convidamos os estudantes a ler o texto de apresentação do Livro do Estudante para que externem suas percepções sobre a Matemática, que, muitas vezes, é vista como difícil e sem utilidade. Com esse texto, buscamos mostrar a principal contribuição dessa área para a formação de cada estudante, que é aprender a resolver problemas. As técnicas e os conceitos específicos, aliados a uma maneira de pensar característica da Matemática, precisam ser vistos pelos estudantes como ferramentas cognitivas que podem ser transpostas para outras situações na escola e, especialmente, para a vida imediata e futura.

Saber organizar uma situação-problema e elaborar estratégias para resolvê-la, bem como avaliar se a resposta obtida é de fato adequada, são habilidades que se desenvolvem com o estudo da Matemática. Aliado a uma metodologia que favorece a formação integral, o conhecimento matemático será o contexto para muitas situações em que o estudante terá de argumentar, trocar conhecimentos com outros, utilizar a linguagem matemática e tomar decisões.

Por isso, sugerimos que a capacidade de resolver problemas seja um objetivo central do planejamento das aulas, acompanhada de observação e registros dos avanços de cada estudante ao longo das aulas e da utilização deste livro.

Todo o material foi estruturado de modo a possibilitar que, ao final do volume, os estudantes tenham desenvolvido parte das competências específicas da área e algumas das competências gerais da BNCC.

UNIDADE 1 MATEMÁTICA FINANCEIRA E FUNÇÕES: EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

CAPÍTULO 1 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Este capítulo trata de funções e complementa o que os estudantes estudaram nos anos finais do Ensino Fundamental, o que caracteriza uma das finalidades do Ensino Médio, ou seja, a ampliação e o aprofundamento dos conhecimentos que os estudantes trazem da etapa anterior.

Atualmente, expressões como "crescimento exponencial" são veiculadas na mídia com diversos sentidos, tornando-se uma excelente oportunidade para contextualizar o estudo dessas funções, de modo a trabalhar o significado preciso que elas têm em Ciências e em Matemática.

É possível que a leitura da primeira página deste capítulo em conjunto com os estudantes mobilize ideias trazidas por eles, muitas delas pautadas pelo senso comum. Sugerimos que faça com a turma uma lista dessas ideias prévias, que poderão ser confrontadas ao final do estudo deste capítulo.

O problema da epidemia proposto no tópico "Função exponencial" é central para o desenvolvimento deste capítulo e do próximo, que trata de logaritmo e função logarítmica, pois esse problema será retomado à medida que os estudantes adquirirem ferramentas matemáticas que lhes permitam análises mais aprofundadas.

Neste capítulo e no próximo, propomos o uso da calculadora científica para discutir com os estudantes como calcular valores como $2^{\sqrt{2}}$ ou log 5. Assim, a primeira seção ***Tecnologia*** deste capítulo explica como calcular potências de base positiva com expoente irracional na calculadora científica.

As propriedades das potências podem exigir algum tempo de trabalho com a turma, uma vez que elas são a base para a compreensão das principais propriedades da função exponencial e, consequentemente, da função logarítmica.

É importante que a relação entre progressões geométricas e funções exponenciais seja compreendida pelos estudantes, para que, na resolução de problemas, eles possam optar por usar P.G. ou funções, de acordo com o conjunto numérico dos dados e a pergunta formulada no problema.

Na segunda seção ***Tecnologia***, os estudantes vão trabalhar com uma calculadora gráfica – um *software* para o traçado e o estudo de gráficos de funções. O desenvolvimento das etapas dessa seção e das atividades propostas deve ser realizado de acordo com a realidade e as possibilidades da escola. É possível levar os estudantes ao laboratório de informática da escola, se ela dispuser de um, ou trazer para a sala de aula um projetor, para que a turma acompanhe cada etapa executada por você ou, ainda, propor o trabalho dessa seção como atividade extraclasse.

Incentive os estudantes a explorar outros recursos desse *software*, como: colocação da grade no plano, cor dos gráficos, identificação dos eixos e alteração das unidades nos eixos. Essa atividade pode ser feita em pequenos grupos para favorecer a aprendizagem colaborativa.

Após a realização da atividade proposta na seção – de traçado e análise dos gráficos de algumas funções da forma $f(x) = c + a^x$ e $g(x) = c \cdot a^x$ –, verifique se os estudantes perceberam que os gráficos de todas as funções da forma $f(x) = c + a^x$ são obtidos pela translação do gráfico de $h(x) = a^x$ na direção do eixo vertical de c unidades para cima, no caso de $c > 0$, ou de c unidades para baixo, no caso de $c < 0$. Já os gráficos de $g(x) = c \cdot a^x$ alteram a forma de crescimento de $h(x) = a^x$, dependendo do sinal de c e de c ser maior ou menor que 1. Esse tipo de análise permite que os estudantes visualizem rapidamente o gráfico e as propriedades de funções exponenciais com base no gráfico e nas propriedades de $h(x) = a^x$.

De acordo com o processo avaliativo e o planejamento realizados por você, o tópico "Inequações exponenciais" pode ser trabalhado posteriormente, logo após o estudo de função logarítmica, no capítulo **2**. Assim, os estudantes terão completado o estudo das funções e poderão relacionar umas com as outras, antes de se deterem em procedimentos muito específicos para a resolução de determinados tipos de inequação pouco frequentes em aplicações e problemas fora do âmbito da Matemática.

Programe um tempo para resolver com os estudantes os problemas da seção ***Foco no raciocínio lógico***. Os problemas propostos têm como objetivo a organização do pensamento e do registro, para não se perder nenhuma das respostas possíveis nem contar a mesma opção de resposta duas vezes. No painel de soluções, compartilhe as diferentes representações das soluções elaboradas pelos estudantes, de modo que todos possam ampliar o repertório de formas de organizar as possibilidades e de realizar a contagem na resolução de problemas.

Para a avaliação das aprendizagens de funções exponenciais, as rodas de conversa, os painéis de solução com as resoluções dos estudantes e as propostas para que os estudantes elaborem problemas são sempre bons instrumentos de análise do que eles apreenderam. A seção ***Palavras-chave*** contribui para esse processo avaliativo. Sugerimos que os estudantes retomem o que aprenderam neste capítulo, suas anotações e os problemas que resolveram e elaborem duas perguntas que envolvam potências e função exponencial para serem respondidas por um colega. Essa produção compõe um conjunto de indícios de aprendizagem que podem ser analisados por você e gerar um breve parecer, que pode ser compartilhado com cada um dos estudantes, com grupos de estudantes ou com toda a turma. Sua opinião sobre cada um e sobre a turma tem grande valor e serve de estímulo para que os estudantes se engajem cada vez mais no processo de aprendizagem.

A produção dos estudantes para a seção ***Palavras-chave*** poderá ser comparada com a proposta no capítulo **2**. Isso os ajudará a retomar o que aprenderam e a relacionar os assuntos abordados nos dois capítulos: funções exponenciais e logaritmos.

Matemática e pandemia

Esta seção possibilita integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e com o tema contemporâneo transversal Saúde. Um trabalho com o professor de Biologia pode ser proposto a fim de explorar a competência específica **3** de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, além de mobilizar também as habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT304** da área de Matemática e suas Tecnologias.

A pandemia de covid-19 foi um grande desafio. Assim, antes de iniciar a leitura do texto com a turma, sugerimos uma conversa inicial para que os estudantes comentem o que sabem do tema. Conhecer o repertório que eles têm sobre o assunto pode auxiliar na organização do trabalho com a seção.

Depois da conversa inicial, os estudantes podem realizar a leitura do texto individualmente, em duplas ou coletivamente. Após a leitura, se julgar conveniente, proponha uma roda de conversa para que discutam o que compreenderam do texto e esclareçam possíveis dúvidas que possam ter surgido.

O gráfico apresentado requer um tempo para ser analisado pelos estudantes para que eles percebam que, quando a infecção se dissemina sem medidas de proteção, temos um gráfico mais estreito no eixo horizontal e mais alongado na vertical. Em contrapartida, quando a infecção se dissemina com medidas de proteção, ocorre o inverso: a parte estreita se refere ao eixo vertical, e a mais alongada, ao eixo horizontal. Os estudantes também podem observar a curva apresentada no gráfico em três partes verticais: uma à esquerda, uma central e outra à direita, de modo que eles relacionem a parte à esquerda ao crescimento exponencial e a parte à direita ao decaimento exponencial.

Ao final, vale observar a importância da Matemática para fazer previsões de como se comporta a disseminação de uma pandemia, como a de covid-19, e que esses modelos visam sempre auxiliar a compreensão de fenômenos naturais a fim de orientar as ações necessárias para reduzir impactos na sociedade.

Se considerar oportuno, organize os estudantes em pequenos grupos para que pesquisem outras pandemias que já aconteceram e estabeleçam relações com a que foi apresentada na seção.

PARA EXPLORAR

Revista

Conrado, Dália Melissa *et al*. Uso do conhecimento evolutivo na tomada de decisão de estudantes do Ensino Médio sobre questões socioambientais. *Revista Contemporânea de Educação*, v. 7, n. 14, p. 335-358, ago./dez. 2012. Disponível em: https://revistas.ufrj.br/index.php/rce/article/view/1675. Acesso em: 15 out. 2024.

A pesquisa visa destacar a importância do desenvolvimento do pensamento crítico por estudantes, sobretudo em relação a temas socioambientais, como forma de aumentar o engajamento deles em questões científicas de impacto significativo na sociedade, como o enfrentamento de uma pandemia.

Livro

Devlin, Keith. *O gene da matemática*. Rio de Janeiro: Record, 2004.

Nesse livro, além de explorar as conexões entre linguagem e Matemática, o matemático Keith Devlin analisa o funcionamento do cérebro e a beleza dos sistemas matemáticos e explica como nossa habilidade inata de formação de padrões nos permite desempenhar confortavelmente o raciocínio matemático.

Dissertação

Oliveira, Jeanine Alves de. *Projetos de trabalho*: uma contribuição para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2012. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1439. Acesso em: 15 out. 2024.

O trabalho desenvolvido nessa dissertação busca analisar possíveis contribuições da análise matemática de um tema contemporâneo e de interesse geral (como a saúde pública) para estudantes do Ensino Fundamental. Nesse caso, a proposta pode ser adaptada e aprofundada para os estudantes de Ensino Médio, permitindo o aumento da criticidade em relação ao tema.

Periódico

Santos Sobrinho, Manoel Messias; Borges, Antônio Tarciso. Aprendizagem sobre epidemias com simulações computacionais. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 3, n. 1, p. 41-61, jan./abr. 2010. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/618/468. Acesso em: 15 out. 2024.

O estudo discute de que maneira *softwares* educacionais podem ser utilizados por estudantes do Ensino Médio para estudar doenças epidêmicas e as dinâmicas envolvidas em sua disseminação.

Texto

Zorzetto, Ricardo. Para conter o avanço explosivo do coronavírus. *Agência Fapesp*, 20 mar. 2020. Disponível em: https://agencia.fapesp.br/para-conter-o-avanco-explosivo-do-coronavirus/32789/. Acesso em: 15 out. 2024.

O texto discute de que maneira se dá o avanço de uma epidemia, quais são os fatores envolvidos na disseminação de um vírus (especificamente o coronavírus) e o que pode ser feito para minimizar a curva de contágio pela população.

CAPÍTULO 2 LOGARITMO E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Este capítulo complementa o assunto tratado no capítulo anterior. Como as funções exponencial e logarítmica estão relacionadas, podemos retomar conceitos, propriedades e representações estudados.

Sabemos que o estudo dos logaritmos e da função logarítmica é, em geral, mal compreendido pelos estudantes e, muitas vezes, isso se deve ao fato de esse tema, por ser mais complexo, fazer parte de estudos posteriores ao Ensino Médio. Por isso, optamos por enfatizar o logaritmo de um número na resolução de situações-problema que têm como base a função exponencial. Assim, neste capítulo, apresentamos um texto que mostra o uso conjunto da função exponencial e da função logarítmica para quantificar o crescimento exponencial do número de pessoas contaminadas em uma pandemia. Ainda neste volume, o logaritmo volta a ser aplicado na Matemática Financeira, tema bastante relevante na formação dos jovens do Ensino Médio.

Para ajudar os estudantes a entender para que servem os logaritmos, apresentamos sua origem histórica. Dessa maneira, os jovens percebem a Matemática como construção humana em determinado tempo e cultura, na busca por resolver problemas com as limitações e possibilidades de uma época. Temos observado que, com essa abordagem, os jovens demonstram grande interesse por recursos de cálculo hoje ultrapassados em comparação aos algoritmos das operações elementares que aprenderam nos primeiros anos escolares. Além disso, eles apreendem o valor de conhecer as possibilidades de cálculo oferecidas por calculadoras e computadores.

No capítulo, há orientações que auxiliam os estudantes na leitura do livro, de modo a criar espaços para discutir o que entendem dos textos apresentados, se concordam com eles ou se discordam deles, e que podem contribuir, assim, para o desenvolvimento da habilidade de construção de argumentações consistentes.

Durante o estudo das propriedades dos logaritmos, caso julgue pertinente, retome as propriedades das potências, nas quais os estudantes ainda podem apresentar alguma dificuldade.

Para recordar funções

Este jogo tem como objetivo levar os estudantes a revisar as primeiras propriedades de funções polinomiais relativas a domínio, imagem, gráfico, raízes, crescimento, pontos de máximo e de mínimo. Acompanhe, a seguir, algumas sugestões de exploração que podem ser aplicadas.

1ª proposta

Peça aos estudantes que, em grupos de 3 ou 4 integrantes, analisem as cartas do jogo e completem um quadro como este:

Função	$y = 2x + 3$	$y = x^2 - 2$
Classificação	Função de 1º grau	Função de 2º grau
Quanto à(s) raiz (raízes)	Possui uma raiz.	Possui duas raízes reais e diferentes.
Corta o eixo *x*	$-\frac{3}{2}$	$x = 0$ e $x = 1$
Corta o eixo *y*	3	0
Características do gráfico	O gráfico é uma reta crescente.	O gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima. Crescente: $\frac{1}{2}, +8$ Decrescente: $-8, \frac{1}{2}$

Ao final, analise o quadro com os estudantes. As cartas de gráficos serão utilizadas apenas na 1ª proposta.

2ª proposta

Em uma outra aula, os estudantes devem jogar e, se necessário, consultar o quadro da aula anterior. Ao final de uma partida, converse com eles sobre o jogo e as aprendizagens/revisões que ele permitiu.

3ª proposta

Comece uma outra aula pedindo aos estudantes que joguem novamente e que, ao jogar, cada um deles registre as possíveis dificuldades ou dúvidas para a função que achou mais difícil relacionar com as tiras de propriedades. Ao final, peça aos grupos que socializem as anotações e conduza uma discussão sobre as funções, fazendo uma revisão com base no trabalho com o jogo.

- **Número de participantes por grupo**

  3 ou 4 jogadores

- **Material**

  Uma cópia das cartas de funções e das tiras de propriedades, como mostrado mais adiante (depois, as tiras e cartas dessa cópia devem ser recortadas).

- **Regras**
  - As cartas são embaralhadas e colocadas no centro de uma carteira com as faces voltadas para baixo.
  - As tiras de propriedades, também com as faces voltadas para baixo, formam outro monte no centro da carteira.
  - Os participantes decidem a ordem dos jogadores (quem começa a rodada, quem joga em seguida, etc.).
  - Em cada jogada, cada um dos participantes retira uma carta do monte de funções e cinco tiras do monte de propriedades.
  - A seguir, seleciona, entre as tiras que pegou, aquelas com propriedades que sua função possui ou a que a satisfaz e forma seu "banco", colocando, enfileiradas à sua frente, a função e as propriedades selecionadas, de modo a ficarem visíveis aos demais jogadores, que devem conferir se o "banco" está correto para a função. As tiras com propriedades que não se relacionam com a função tirada permanecem em sua mão, podendo ser usadas nas próximas jogadas para as novas cartas de funções.
  - A partir da segunda jogada, se o jogador não tiver nenhuma propriedade para sua função, ele poderá capturar dos "bancos" dos oponentes uma propriedade de cada um, a cada jogada, desde que a propriedade capturada seja condizente com sua função. A captura pode ser bloqueada quando o jogador tiver em seu "banco" três ou mais propriedades de sua função (que, nesse caso, ficam definitivamente com o jogador, junto com a função a que se relacionam). As funções não podem ser capturadas, apenas as tiras de propriedades.
  - A cada jogada, cada um retira dos montes uma nova função e cinco tiras de propriedades, que podem ser colocadas em seu "banco", em quaisquer das funções que lá estão, ou serem usadas para a nova função escolhida.
  - Quando terminar o monte das funções, encerra-se o jogo. Ganha quem tiver mais tiras de propriedades em seu "banco".

- **Variação**
  - As cartas a seguir podem ser complementadas com outras expressões elaboradas pelos próprios estudantes, ou por funções que o professor desejar enfatizar.

- **Modelo de cartas de função**

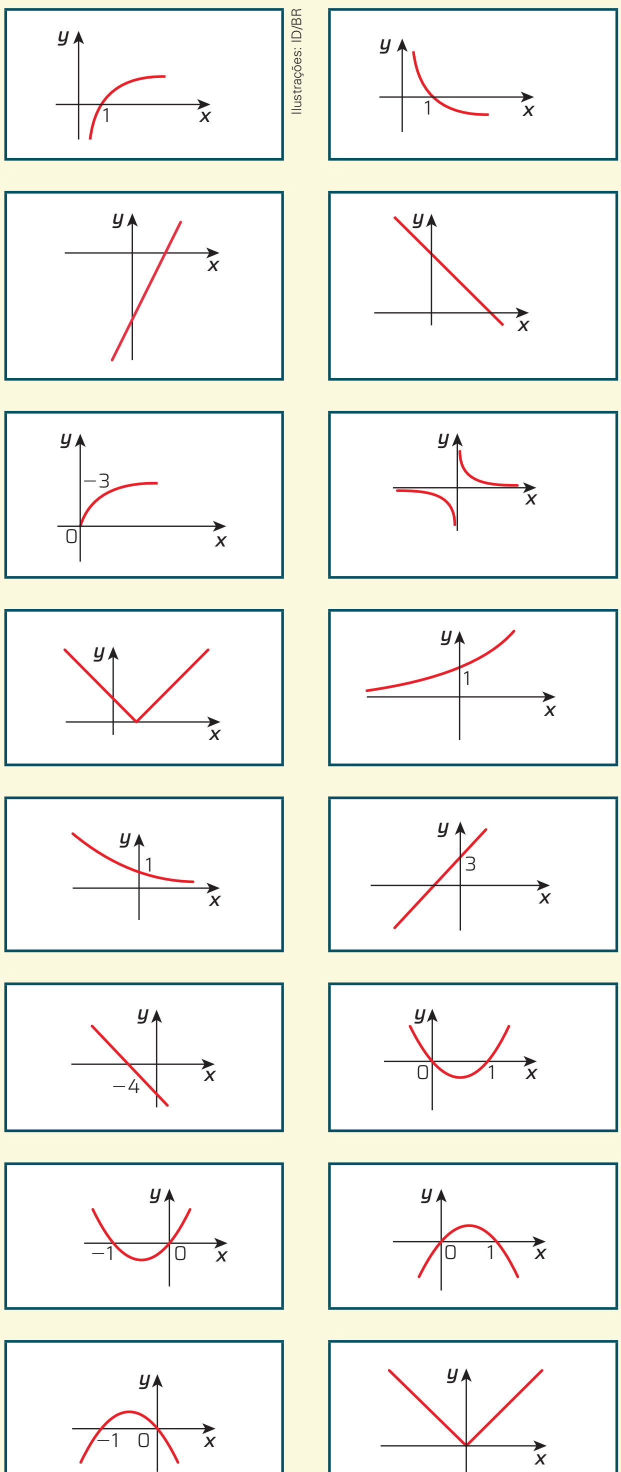
$y = 2x + 3$	$y = 2x - 3$
$y = -x + 4$	$y = -x - 4$
$y = x^2 + x$	$y = x^2 - x$
$y = -x^2 + x$	$y = -x^2 - x$
$y = 2^x$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$y = \log_x$	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$y = \|x\|$	$y = \|x - 2\|$
$y = \sqrt{x}$	$y = \frac{1}{x}$

- **Modelo de tiras de propriedades**

Tem domínio $\mathbb{R}$.	Tem domínio $\mathbb{R}$.
Tem domínio $\mathbb{R}$.	Tem domínio $\mathbb{R}$.
Tem domínio $\mathbb{R} - \{0\}$.	Tem domínio $[0, +\infty[$.
Tem domínio $]0, +\infty]$.	É crescente em seu domínio.
É crescente em seu domínio.	É crescente em seu domínio.
É decrescente em seu domínio.	É decrescente em seu domínio.
É decrescente em seu domínio.	É decrescente em seu domínio.
É crescente e decrescente em intervalos de seu domínio.	É crescente e decrescente em intervalos de seu domínio.

Possui apenas pontos de mínimo.	Possui apenas pontos de máximo.
Possui pontos de máximo e de mínimo.	Possui pontos de máximo e de mínimo.
Não possui pontos de máximo nem de mínimo em seu domínio.	Não possui pontos de máximo nem de mínimo em seu domínio.

- **Modelo de cartas de gráficos**



Ilustrações: ID/BR

Por causa da dificuldade de calcular os valores de logaritmos, a calculadora científica ganha importância e justifica o aprendizado das funções dessa máquina. Por esse motivo, na primeira seção ***Tecnologia*** do capítulo, apresentamos o recurso mais simples de cálculo de logaritmos decimais usando esse tipo de calculadora. Em seguida, mostramos a importância da fórmula de mudança de base para a resolução de problemas que dependem de comportamentos exponenciais com bases diferentes de 10.

Com o objetivo de valorizar a tecnologia, optamos por excluir do Livro do Estudante qualquer referência a métodos de cálculo de logaritmos que utilizam as noções de característica e mantissa, bem como a utilização da tabela de logaritmos. É preciso reconhecer que a calculadora científica permite esse cálculo e que, em processos seletivos, quando uma questão envolve logaritmo, em geral é fornecido o valor que será utilizado na resolução do problema.

A relação entre os gráficos das funções exponencial e logarítmica de mesma base é analisada por meio da simetria de figuras em relação a uma reta e da relação entre os pares ordenados dos gráficos das duas funções. Dessa maneira, os estudantes têm a oportunidade de conhecer um contexto em que faz sentido se tratar de funções inversas.

A relação "o ponto de coordenadas (x, y) pertence ao gráfico de $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (y, x)$ pertence ao gráfico de $g(x) = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$" estabelece simultaneamente a simetria dos gráficos das funções exponencial e logarítmica em relação à reta $y = x$ e a propriedade de uma função ser inversa da outra.

A segunda seção ***Tecnologia*** traz o recurso da calculadora gráfica para o traçado de gráficos, apresentando outros recursos desse *software* e de seu uso para resolver, de modo aproximado, equações que não têm procedimento algébrico para sua resolução.

A seção ***Cálculo rápido*** favorece a resolução de equações exponenciais e logarítmicas que usualmente aparecem na resolução de problemas que envolvem essas funções. No próximo capítulo, sobre Matemática Financeira, esses cálculos podem ser úteis.

Para complementar o estudo deste capítulo, realize com a turma o experimento indicado a seguir no boxe *Para explorar*.

PARA EXPLORAR

Vídeo

***Avalanches e desmoronamentos*. Unicamp, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2012. 1 vídeo (5 min 43 s). Publicado por M3 Matemática Multimídia. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1364. Acesso em: 15 out. 2024.**

Nesse vídeo, é possível encontrar um experimento para que os estudantes aprendam a modelar matematicamente as avalanches causadas por grãos em um recipiente. Também é disponibilizado um PDF com algumas instruções de como conduzir o experimento com os estudantes.

Matemática e sismografia

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **3** e **4** propostas pela BNCC e possibilita integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias (para discutir a competência específica **3** dessa área) e a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, como forma de desenvolver a competência específica **1** relativa a essa área, além de contemplar a habilidade **EM13MAT305** da área de Matemática e suas Tecnologias. Possibilita também trabalhar com os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Meio ambiente. Assim, sugerimos que a discussão da proposta da seção seja feita em parceria com os professores dos componentes curriculares Física, História e Geografia.

Os sismos são muito frequentes, chegando a ser registrados diariamente em pontos diversos da superfície do planeta, mas a grande maioria deles é de baixa magnitude e não é percebida pelas pessoas. Geralmente, são originados de atividades das placas tectônicas, que podem ser: de tensão, quando as placas se afastam; de colisão, quando se aproximam; ou de deslizamento de uma sobre a outra, observado entre placas diferentes ou em uma mesma placa. Os sismos também podem surgir em decorrência de atividades vulcânicas; de falhas geográficas; da ação humana (como em atividades de extração de minerais, combustíveis fósseis, etc., e em grandes explosões, como na queda de grandes edifícios); ou devido à pressão da água em barragens.

Terremotos de grandes magnitudes podem causar muita destruição e mortes, e não só na região do epicentro, mas também nas regiões vizinhas, já que podem se propagar por muitos quilômetros de distância.

Por estarem localizadas em partes do planeta onde ocorrem muitas atividades sísmicas, algumas regiões são mais propícias a terremotos, como o Japão, o Chile, parte dos Estados Unidos e as ilhas da Oceania. O impacto que os terremotos causam varia de acordo com as condições dos países e de suas tecnologias de prevenção e segurança.

Nesta seção, optamos por apresentar a escala Richter, já que é comum textos jornalísticos, por exemplo, informarem a magnitude do tremor nessa escala.

Para complementar, apresente aos estudantes a Escala de Magnitude de Momento (MMS, na sigla em inglês), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, que, assim como a escala Richter, é uma escala logarítmica. Explique a eles que essa ferramenta baseia-se na medição da energia total liberada em um terremoto e é utilizada para ponderar a energia liberada em sismos de magnitude superior a 6,9.

PARA EXPLORAR

Sites

Os cinco terremotos mais fortes da história. *BBC News Brasil*, 9 set. 2023. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/articles/c6pn3ndp7g3o. Acesso em: 15 out. 2024.

A matéria destaca quando e onde aconteceram os cinco terremotos mais devastadores do planeta e quais foram os impactos desses sismos para os locais afetados. Essa matéria pode ser utilizada pelos estudantes na pesquisa que eles farão na atividade **2**.

Sentiu um tremor? Deixe seu depoimento! Centro de Sismologia da USP. Disponível em: http://www.moho.iag.usp.br/eq/dyfi. Acesso em: 15 out. 2024.

O portal do Centro de Sismologia da USP permite que qualquer pessoa reporte um tremor sentido e apresenta um mapa com os locais referentes aos últimos relatos registrados em todo o país.

Veloso, José Alberto Vivas. Terremotos azuis. *Ciência Hoje*, jun. 2016. Disponível em: http://cienciahoje.org.br/artigo/terremotos-azuis/. Acesso em: 15 out. 2024.

Na matéria, é feito um relato de sismos em território brasileiro em diferentes períodos. Há também trechos de textos literários e descrições históricas de alguns desses eventos.

CAPÍTULO 3 *MATEMÁTICA FINANCEIRA*

Este capítulo tem como principal objetivo dar mais significado ao estudo das progressões, da função exponencial e do logaritmo de um número. Além disso, ele permite que você exerça a avaliação formativa processual em relação a conceitos e procedimentos estudados nos capítulos anteriores e que são retomados em alguns momentos, o que cria a oportunidade de os estudantes sanarem eventuais dúvidas remanescentes.

Por sua natureza específica, a aprendizagem da Matemática Financeira também explora objetos de conhecimento tratados no Ensino Fundamental e em outros volumes desta coleção, como porcentagem, proporcionalidade e funções afins, bem como a linguagem e os processos relacionados a esses objetos. Ou seja, este capítulo também favorece a consolidação de aprendizagens e a ampliação de conhecimentos relacionados a temas importantes para a formação integral dos estudantes. Para facilitar essa abordagem, sugerimos a seguir, no boxe ***Para explorar***, a leitura de um texto que traz reflexões sobre etnomatemática.

PARA EXPLORAR

Site

Como o ensino de Matemática pode inovar ao valorizar saberes locais. Fundação Telefônica Vivo, 9 out. 2019. Disponível em: https://www.fundacaotelefonicavivo.org.br/noticias/como-o-ensino-de-matematica-pode-inovar-ao-valorizar-saberes-locais/. Acesso em: 15 out. 2024.

Nesse texto, há sugestões para ampliar o repertório dos estudantes, mostrando-lhes que a diversidade de conhecimentos matemáticos de grupos como agricultores, comerciantes, indígenas e pedreiros pode proporcionar uma aprendizagem significativa da Matemática.

Ao longo do capítulo, nas seções ***Problemas e exercícios propostos***, apresentamos sugestões para a ação em sala de aula, algumas para os estudantes e outras para você. É importante analisar as recomendações para o desenvolvimento da habilidade de leitura. Neste capítulo, em especial, é preciso ler a conta de água, o texto que conta a história da cobrança de juros, a explicação sobre depreciação de um bem e os textos de alguns problemas que são mais longos e têm muitas informações. Ler coletivamente, participar de rodas de leitura compartilhada (um estudante lê um trecho e outros comentam ou explicam o que entenderam do que foi lido), contar aos colegas ou à turma as ideias principais de um texto ou problema, preparar uma breve apresentação de um trecho do livro que traz uma ideia nova ou um novo procedimento são algumas das estratégias que podem favorecer o desenvolvimento da habilidade leitora nas aulas de Matemática.

Reflita sobre como ler textos mais longos e complexos. Ao ler o texto "A ideia de cobrar juros é antiga", os estudantes podem conhecer um pouco da história da Matemática Financeira.

Uma das ideias centrais deste capítulo é a diferenciação entre juros simples e juros compostos. Esse conhecimento poderá ser solicitado em algumas situações cotidianas, por exemplo, quando os estudantes tiverem de lidar com situações que envolvem dados atuais de valores cobrados em multas, empréstimos bancários e financiamentos, seja para a aquisição de bens, seja para investimento no projeto de vida deles.

Durante a resolução de algumas das atividades da seção ***Problemas e exercícios resolvidos***, os estudantes lidam com funções da calculadora comum e da científica, especialmente no cálculo de potências e raízes. Se for necessário, proponha outros cálculos semelhantes, para que eles se apropriem dos recursos da máquina.

Na seção ***Tecnologia***, apresentamos as etapas para utilizar o aplicativo Calculadora do Cidadão. Ao realizar essa proposta na prática, é importante levar em consideração a realidade da turma – por exemplo, se todos os estudantes têm acesso a um *smartphone*. Se necessário, organize-os em pequenos grupos.

No tópico "Funções e juros", os estudantes relacionam os conceitos de juros simples e compostos a representações gráficas de funções afins ou exponenciais, o que lhes oferece outro recurso para entender a diferença e o comportamento de crescimento ou decrescimento dessas duas situações de aplicação de um capital.

A proposta do boxe que trata de arredondamento é bem interessante para uma roda de conversa a respeito do significado de erros e arredondamentos e é bastante pertinente ao conteúdo deste capítulo, já que cálculos com calculadora científica geralmente requerem algum arredondamento dos números obtidos.

Antes de os estudantes resolverem as atividades **1** e **2** propostas na seção ***Para recordar***, sugerimos que seja feito um breve resumo do que eles devem saber sobre funções afins, com as informações essenciais para o conhecimento dessas funções e a continuidade dos estudos em Matemática. Para os problemas propostos, incentive os estudantes a buscar diferentes maneiras de resolução, socialize as diferentes estratégias encontradas e analise com a turma o que foi preciso saber sobre funções afins em cada uma delas.

É possível aproveitar a seção ***Palavras-chave*** para realizar uma avaliação em duplas com os estudantes. Eles organizam o resumo sugerido e você avalia o que aprenderam, as dúvidas que ainda permanecem e em que pontos precisam de ajuda. Faça observações e uma devolutiva, para que possam rever e reorganizar seus textos, se necessário. Esse procedimento avaliativo em dois tempos é um recurso interessante para que os jovens analisem a própria aprendizagem, reflitam sobre seus erros e ampliem a compreensão dos conceitos estudados. Mais que isso, essa proposta é uma maneira de ensinar os estudantes a estudar. Ao retomar, reler, analisar o percurso feito e fazer um resumo com exemplos, eles estão estudando. Ao final, explicite isso a eles, mostrando-lhes como podem aprender mais com essa atividade de revisar tudo o que realizaram nesse tempo de estudo e como ficaram mais confiantes em relação ao que sabem.

Matemática e finanças

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **4** e **5** propostas pela BNCC e possibilita integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, para explorar a competência **1** dessa área, e com os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Educação Financeira, além de trabalhar a habilidade **EM13MAT203** da área de Matemática e suas Tecnologias. Assim, sugerimos que o trabalho proposto seja feito em parceria com os professores de História e de Geografia.

Sempre que possível, é importante discutir questões relativas à Matemática Financeira e ao uso de variáveis financeiras para que os estudantes desenvolvam o letramento financeiro, interpretem o mundo e tenham propriedade na tomada de decisões em situações próximas da realidade que envolvam, entre outros aspectos, compras à vista e a prazo, financiamentos, empréstimos, etc.

Nesse sentido, esses estudos podem vir acompanhados de novas tecnologias do mundo moderno, principalmente aquelas que são bastante utilizadas em algumas áreas do mercado de trabalho, como as planilhas eletrônicas. Você pode enfatizar a necessidade de os estudantes saberem o básico sobre o funcionamento das planilhas eletrônicas, sempre que possível, para aprofundar os estudos sobre esses *softwares*. Se julgar necessário, reserve um tempo da aula para revisar as funcionalidades e os elementos das planilhas eletrônicas relativos à Matemática Financeira.

Como maneira de complementar os estudos sobre Matemática Financeira, sugira aos estudantes que se reúnam em grupos e criem estabelecimentos ou serviços fictícios, como supermercados, bancos, financiadoras e imobiliárias, e construam as opções de compra e venda de seus produtos, empregando os conhecimentos de Matemática Financeira adquiridos no capítulo. Na realização dessa atividade, eles devem anotar as transações e, depois, registrá-las em uma planilha eletrônica. Podem ser criados estabelecimentos ou serviços para vender algum produto utilizando uma dinâmica de juros para pagamentos em parcelas ou empréstimos, por exemplo. O objetivo é que os estudantes realizem as vendas e as compras como ocorrem na realidade para entender melhor como fazer suas compras e quais são os cenários mais favoráveis: a compra à vista ou a prazo, o número de parcelas, o estabelecimento em que compensa mais fazer a compra, o investimento que é mais vantajoso, etc.

Esse trabalho pode ser ampliado e realizado ao longo de todo o ano letivo. Ao final, os projetos das empresas podem ser apresentados em uma feira de ciências da escola ou em um momento com a comunidade escolar, para que os estudantes compartilhem (com a família, os amigos, os funcionários da escola e outras pessoas do entorno) os conhecimentos adquiridos. Essa atividade requer tempo e planejamento, portanto, acompanhe-os na resolução de dúvidas e na elaboração de cada etapa.

Aproveite a temática para debater com os estudantes a importância do consumo sustentável. Para isso, antes de começar as discussões, verifique os conhecimentos prévios deles sobre esse assunto e a opinião que eles têm em relação ao consumo exagerado e aos impactos que podem ser causados no meio ambiente e na sociedade. Em seguida, para finalizar, leia para a turma o texto a seguir.

> [...]
>
> O Consumo Sustentável envolve a escolha de produtos que utilizaram menos recursos naturais em sua produção, que garantiram o emprego decente aos que os produziram, e que serão facilmente reaproveitados ou reciclados. Significa comprar aquilo que é realmente necessário, estendendo a vida útil dos produtos tanto quanto possível. Consumimos de maneira sustentável quando nossas escolhas de compra são conscientes, responsáveis, com a compreensão de que terão consequências ambientais e sociais – positivas ou negativas.
>
> Mudança de comportamento é algo que leva tempo e amadurecimento do ser humano, mas é acelerada quando toda a sociedade adota novos valores. O termo "sociedade de consumo" foi cunhado para denominar a sociedade global baseada no valor do "ter". No entanto, o que observamos agora são os valores de sustentabilidade e justiça social fazendo parte da consciência coletiva, no mundo e também no Brasil. Este novo olhar sobre o que deve ser buscado por cada um promove a mudança de comportamento, o abandono de práticas nocivas de alto consumo e desperdício e [a] adoção de práticas conscientes de consumo.
>
> Consumo consciente, consumo verde, consumo responsável são nuances do Consumo Sustentável, cada um focando uma dimensão do consumo. O consumo consciente é o conceito mais amplo e simples de aplicar no dia a dia: basta estar atento à forma como consumimos – diminuindo o desperdício de água e energia, por exemplo – e às nossas escolhas de compra – privilegiando produtos e empresas responsáveis. A partir do consumo consciente, a sociedade envia um recado ao setor produtivo de que quer que lhe sejam ofertados produtos e serviços que tragam impactos positivos ou reduzam significativamente os impactos negativos no acumulado do consumo de todos os cidadãos.
>
> [...]
>
> BRASIL. Ministério do Meio Ambiente e Mudança do Clima. Consumo sustentável. O que é consumo sustentável. Disponível em: https://antigo.mma.gov.br/responsabilidade-socioambiental/producao-e-consumo-sustentavel/conceitos/consumo-sustentavel.html. Acesso em: 15 out. 2024.

PARA EXPLORAR

Sites

AMORIM, Vitor. *O ensino de matemática financeira*: do livro didático ao mundo real. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/8003561/mod_resource/content/1/2NE-03-Simposio_Nordeste_O-ensino-de-Matematica-Financeira.pdf. Acesso em: 15 out. 2024.

Nesse material, elaborado para o minicurso "O ensino de Matemática Financeira: do livro didático ao mundo real", ministrado no 2º Simpósio da Formação do Professor de Matemática da Região Nordeste, é feita uma análise do ensino de Matemática Financeira para estudantes do Ensino Médio e são fornecidas estratégias para uma nova abordagem do tema.

CRÉDITOS. Portal da Caixa Econômica Federal. Disponível em: http://www.caixa.gov.br/educacao-financeira/voce/creditos/Paginas/default.aspx. Acesso em: 15 out. 2024.

Nessa página do portal da Caixa, são apresentadas as principais modalidades de crédito – opção de uso de dinheiro em que mais se utiliza a cobrança de juros.

Empresa júnior – O que é? E como funciona? Sebrae, 10 mar. 2020. Disponível em: https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/ufs/ap/artigos/empresa-junior-o-que-e-e-como-funciona,e3a048ae422fe510VgnVCM1000004c00210aRCRD. Acesso em: 15 out. 2024.

Em seu *site*, o Sebrae explica de que maneira as empresas juniores funcionam nas universidades e quais são as principais características desse tipo de negócio. Ainda que o artigo seja voltado para o ambiente acadêmico, ele possibilita aos estudantes conhecer esse modelo de inserção no mercado de trabalho para elaborar o plano da empresa sugerido como atividade complementar.

Confortin, Cesar Frederico. Planilha eletrônica: uma ferramenta para o ensino da matemática financeira. Cascavel, Unioeste, *Cadernos PDE*, v. 2, 2014. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unioeste_mat_pdp_cesar_frederico_confortin.pdf. Acesso em: 15 out. 2024.

O trabalho elaborado nesse material tem o objetivo de apresentar a professores o uso da planilha eletrônica para ensinar Matemática Financeira a estudantes da Educação Básica.

Juros e inflação. Portal da Caixa Econômica Federal. Disponível em: https://www.caixa.gov.br/educacao-financeira/voce/juros-inflacao/Paginas/default.aspx. Acesso em: 15 out. 2024.

Essa página explica em linguagem simples o que são juros e taxa de juros, e como são aplicados pelas instituições financeiras, além de apresentar o que é inflação e dar exemplos de como ela afeta o orçamento das pessoas. Inclui um vídeo explicativo curto, de cerca de dois minutos.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Apesar de esta seção ter sido apresentada na parte geral deste manual, vale lembrar aqui que ela tem como objetivos principais desenvolver a habilidade de leitura e ampliar o repertório dos estudantes com estratégias importantes para a resolução de questões que são frequentes em processos seletivos e em exames de larga escala. Assim, ao final de cada unidade, apresentamos propostas diferentes cuja ênfase está mais na reflexão sobre o processo de ler e de resolver as questões que na resolução em si.

O texto inicial, que deve ser lido atentamente, sempre traz algumas pistas dos pontos principais que devem ser analisados nas questões propostas, e os estudantes são desafiados a encontrar no problema resolvido aquilo que se quer destacar como nova aprendizagem de leitura ou de processo de resolução.

A leitura do problema resolvido pode ser feita em duplas pelos estudantes, para que eles tenham a oportunidade de discutir as habilidades de leitura envolvidas na compreensão da questão para sua resolução.

Sugerimos que oriente-os nessa análise mais reflexiva com algumas perguntas: A informação contida no texto inicial está presente na resolução do problema? Seria possível resolver esse problema apenas com a leitura do enunciado e das alternativas? Por quê?

Depois de os estudantes (em duplas ou pequenos grupos) terem resolvido os problemas propostos, é importante propor um painel de soluções. Nesse caso, não apenas para verificar respostas corretas, mas para que eles possam falar sobre como percebem esse tipo de problema e como se sentem ao solucionar questões aparentemente consideradas “difíceis”.

UNIDADE 2 GEOMETRIA PLANA

CAPÍTULO 4 GEOMETRIA EUCLIDIANA

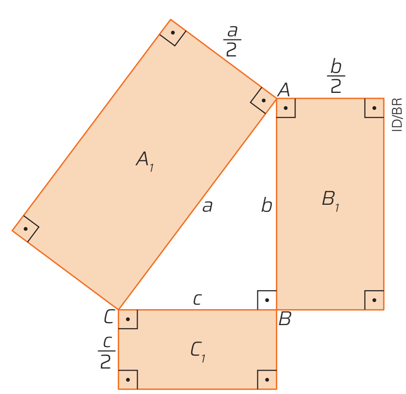
Neste capítulo, fizemos um recorte da geometria euclidiana destacando os principais teoremas e propriedades necessários para a resolução de problemas, especialmente aqueles que envolvem figuras geométricas.

O começo do capítulo traz algumas informações históricas sobre Geometria que, dependendo do interesse dos estudantes, podem ser ampliadas em parceria com os professores de História e Sociologia, que também podem promover uma discussão mais aprofundada sobre a sociedade atual, construída com apoio de novas tecnologias e sempre buscando resolver problemas para a melhoria das relações pessoais e da qualidade de vida.

O tópico “Teorema de Pitágoras” pode ser explorado com base nos conhecimentos que os estudantes trazem do Ensino Fundamental. No entanto, há um aprofundamento quando estendemos a relação de Pitágoras para outras figuras traçadas sobre os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo, e também quando consideramos as ternas pitagóricas. Desenvolva com os estudantes a identificação de ternas pitagóricas, pois essa é uma ferramenta que pode ajudá-los na resolução de problemas mais complexos em que seja possível identificar uma terna e deduzir seus termos, sem precisar fazer cálculos.

Se considerar oportuno, apresente-lhes a ampliação do teorema de Pitágoras construindo retângulos sobre os lados de um triângulo retângulo. Para que os retângulos sejam semelhantes, seus ângulos correspondentes devem ser congruentes e seus lados correspondentes devem ser proporcionais.

Como exemplo, vamos considerar a razão de proporcionalidade entre a medida do lado e a medida da altura do retângulo igual a 2. Outras razões podem ser consideradas, desde que os retângulos sejam semelhantes.



A área A de um retângulo é dada por $A = a \cdot h$, em que a é a medida do lado e h é a altura relativa a esse lado. Assim, temos:

$$\text{Área } (A_1) = a \cdot \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Área } (B_1) = b \cdot \left(\frac{b}{2}\right) = \frac{b^2}{2}$$

$$\text{Área } (C_1) = c \cdot \left(\frac{c}{2}\right) = \frac{c^2}{2}$$

Portanto:

Área (A_1) = Área (B_1) + Área (C_1)

$$\frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Multiplicando os dois membros dessa equação por 2, obtemos $a^2 = b^2 + c^2$, que é o resultado encontrado ao calcular as áreas dos quadrados.

PARA EXPLORAR

Site

Santos, Marconi Coelho dos. *Teorema de Pitágoras*: suas diversas demonstrações. 2011. 42 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia da UEPB, Campina Grande, 2011. Disponível em: http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/678/1/PDF%20-%20Marconi%20Coelho%20dos%20Santos.pdf. Acesso em: 15 out. 2024.

Nessa monografia, encontram-se várias demonstrações do teorema de Pitágoras. Caso julgue interessante, você pode compartilhar algumas delas com os estudantes.

Os tópicos "Teorema de Tales", e "Área de triângulos" trazem as principais consequências do teorema de Tales, que dizem respeito à semelhança de triângulos, além da relação entre áreas e triângulos semelhantes. Alguns dos conhecimentos envolvidos nesses tópicos podem ter sido tratados de maneira mais intuitiva no Ensino Fundamental. Por essa razão, talvez seja necessário mais tempo de estudo e maior detalhamento teórico, em função do que os estudantes se lembrarem. Esse trabalho é importante, pois tais resultados serão muito utilizados na resolução de problemas de geometria plana e de geometria espacial.

Ao final deste capítulo, é interessante destacar os dois processos de cálculo de medidas de comprimento relacionados ao teorema de Pitágoras e ao teorema de Tales.

- O teorema de Pitágoras permite a determinação de uma medida desconhecida em triângulos retângulos, desde que se conheçam as medidas de dois lados desse triângulo.
- O teorema de Tales permite a determinação de uma medida desconhecida em triângulos semelhantes, desde que se tenham três medidas de lados correspondentes.

Muitas vezes, esses fatos são entendidos pelos estudantes como conhecimentos isolados. No entanto, diante de uma situação-problema, eles terão de decidir qual dos métodos utilizar para resolvê-la, e isso ficará mais bem internalizado se eles tiverem a oportunidade de refletir sobre os dois procedimentos ao mesmo tempo, comparando-os e distinguindo quando e como cada um pode ser aplicado na construção de uma estratégia de resolução.

A atividade **1** da seção ***Cálculo rápido*** explora o cálculo de áreas de figuras simples (mas em diferentes posições para exercitar a percepção visual dos estudantes) e conversões entre unidades mais usuais de comprimento e área.

Na seção ***Para recordar***, escolhemos temas importantes e que também serão úteis para as aprendizagens previstas nos próximos capítulos. Os problemas **1** e **2** envolvem conhecimentos de Matemática básica; o problema **3** exige que sejam feitos desenhos para se chegar a uma solução. Embora o problema **5** seja aparentemente complexo, uma análise cuidadosa do desenho permite reduzi-lo a uma situação simples de contagem da área de oito quadrados inteiros e quatro pequenos arcos.

Matemática e desenho geométrico

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **3** e **6** da Educação Básica propostas pela BNCC e possibilita integração com a área de Linguagens e suas Tecnologias. Um trabalho com o professor do componente curricular Arte pode ser proposto a fim de explorar a competência específica **3** da área de Linguagens e suas Tecnologias.

Após os estudantes terem feito a leitura do texto, verifique, em uma roda de conversa, se eles compreenderam a função do desenho geométrico.

Nos exemplos de construções, retome a importância da régua e do compasso e reforce como esses instrumentos devem ser usados na prática. Depois, se julgar interessante, refaça as construções apresentadas na seção no quadro, explicando o passo a passo das construções e sanando eventuais dúvidas.

Nas atividades **1** e **2**, auxilie os estudantes a identificar as ideias iniciais que levem às respostas, uma vez que todos os elementos estão nos exemplos dados ou foram estudados no capítulo. No caso de alguns estudantes não terem os instrumentos necessários, mostre-lhes que é possível construir as figuras utilizando objetos retos no lugar de régua e barbante e lápis em vez de compasso.

A atividade **3** traz aos estudantes a oportunidade de vivenciar um processo criativo. O trabalho com a obra escolhida pode ser orientado pelo professor de Arte com a exibição de releituras de outras obras. O importante é ter em mente que essa atividade não visa apenas às construções geométricas, mas também à maneira como os estudantes agregam suas interpretações pessoais à visão particular e original do autor com a criação de uma nova obra. A utilização dos instrumentos de desenho geométrico vai exigir dos estudantes ainda mais criatividade, o que pode gerar produções muito interessantes. Sugerimos a você que organize um painel para expor os trabalhos à apreciação de todos.

PARA EXPLORAR

Sites

Myrrha, Vânia. O que é releitura? Boteco d'Arte, 16 jul. 2009. Disponível em: https://coresematizes.wordpress.com/2009/07/16/o-que-e-releitura/. Acesso em: 15 out. 2024.

O artigo desse *site*, especializado em arte, arquitetura e *design,* traz um texto simples e exemplos de releituras que mostram visões muito peculiares de obras de arte famosas.

Paraná. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Diretoria de Tecnologias Educacionais. *Régua e Compasso*: geometria dinâmica. Curitiba: Seed, 2010. Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/tutoriais/regua_compasso.pdf. Acesso em: 15 out. 2024.

Um guia para utilizar o *software* educacional Régua e Compasso, elaborado por René Grothmann, que permite a construção e a animação de figuras geométricas. Os estudantes podem investigar como esse e outros instrumentos são empregados por profissionais de diversas áreas do mercado de trabalho.

Reis, Bia. Recriar dá mais sentido à arte. *Nova Escola*, 1º ago. 2005. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/1057/recriar-da-mais-sentido-a-arte. Acesso em: 15 out. 2024.

O texto destaca o objetivo da releitura no âmbito escolar e sua importância na mobilização dos estudantes para a observação de obras de arte e na utilização de diferentes técnicas para a produção das próprias obras.

CAPÍTULO 5 GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES

Este capítulo completa a percepção que esperamos dos estudantes sobre geometria plana. Não se trata de apresentar as transformações no plano de maneira formal e completa, mas de trazer uma perspectiva que difere daquela apresentada a eles no Ensino Fundamental.

Inicialmente, exploramos os movimentos rígidos no plano (chamados de isometrias) como funções do plano no plano (chamadas de transformações) e descrevemos os três movimentos básicos que mantêm as medidas e a forma das figuras: reflexão, translação e rotação.

A leitura do texto pode ser feita pelos estudantes e acompanhada por você. É possível que alguns estudantes não se lembrem de alguns termos. Assim, aproveite o momento para retomar alguns conceitos, como bissetriz, mediatriz, mediana, lados ou ângulos adjacentes ou opostos, e outros assuntos que julgar necessários. Sugerimos que proponha aos estudantes que confeccionem um glossário com esses termos para que eles possam consultá-lo sempre que precisarem.

Verifique se os estudantes compreendem as propriedades do triângulo isósceles, dos ângulos formados entre retas paralelas e uma reta transversal e das diagonais do quadrado, que, no texto, foram analisadas sob a perspectiva da geometria das transformações e comparadas com a geometria clássica.

O conceito de congruência é central nesse conjunto de ideias, uma vez que, na geometria clássica, ele se baseia na distância entre pontos e, na geometria das transformações, ele é definido pelo movimento que leva uma figura a outra. A igualdade entre distâncias passa a ser consequência da existência desse movimento de sobreposição entre as figuras.

Os movimentos rígidos são descritos no plano cartesiano, completando a relação entre Geometria e Álgebra. As isometrias são apresentadas como funções do plano no plano, descritas pelas coordenadas dos pontos iniciais e dos pontos finais transformados.

O estudo das homotetias no plano cartesiano transforma o conceito geométrico em uma relação entre coordenadas de pontos, ou seja, trata o conceito algebricamente, aproximando-o da abordagem da geometria analítica.

Esse trabalho pode ser complementado com uma análise de obras de arte que utilizam as transformações no plano para construir efeitos gráfico-visuais. Alguns artistas e obras que podem ser apresentados aos estudantes são: Alfredo Volpi (1896-1988), *Fachada singela* e *Geométrico em verde e azul*, ambas da década de 1950; Rubem Valentim (1922-1991), *Emblema*, 1978, e *Emblema*, 1987; Vicente do Rego Monteiro (1899-1970), *Pietá*, 1924, e *As religiosas*, 1969. Não deixe de citar as obras do artista holandês Maurits Escher (1898-1972) e as do brasileiro César Romero (1950-), com suas platibandas e faixas, inspiradas nas culturas africanas e na religiosidade brasileira.

Na seção ***Cálculo rápido***, observe os estudantes na realização da atividade **3** e verifique se todos conhecem os termos que aparecem nos itens. Incentive-os a incluir os termos desconhecidos e seus significados no glossário.

Sugerimos que utilize a seção ***Para recordar*** como uma retomada de temas de estudos anteriores e como instrumento de avaliação das aprendizagens esperadas nesta unidade.

Na seção ***Foco no raciocínio lógico***, os problemas são mais elaborados e podem ser resolvidos de diferentes maneiras. Por isso, relembramos a importância do painel de soluções sugerido na parte 1 deste manual para o exercício da argumentação entre os estudantes que pensaram ou registraram suas soluções de modo diferente.

A seção ***Palavras-chave*** propõe aos estudantes que elaborem um mapa mental com as principais ideias e conceitos importantes do capítulo. O objetivo é que eles retomem o que aprenderam e organizem essa aprendizagem no mapa. Esse é mais um instrumento de avaliação que você pode utilizar para acompanhar o desenvolvimento dos estudantes.

Para informações sobre como elaborar um mapa mental, leia ou disponibilize para os estudantes o texto a seguir.

Como fazer um mapa mental, em 4 passos

Criada nos anos [19]70 por psicólogo britânico, técnica é usada para resumir conteúdos em registros que mesclam textos e imagens

Se você é estudante e está nas redes sociais, é bem provável que em algum momento já tenha se deparado com algum mapa mental. [...]. Conhecendo você ou não, saiba que os mapas mentais são ótimos aliados na hora de resumir grandes quantidades de informação; sendo, inclusive, um método mundialmente reconhecido entre especialistas em memorização. [...]

[...]

Um mapa mental nada mais é do que um resumo no formato de diagrama. O *layout* foi criado pelo britânico Tony Buzan (1942-2019) no ano de 1974. O psicólogo, que também era apresentador de TV, se inspirou no estilo de anotações de grandes mentes da História, como Leonardo da Vinci e Albert Einstein, além de aplicar os métodos do professor universitário estadunidense Joseph Donald Novak para chegar no formato.

[...]

O mapa mental de Tony Buzan deve seguir três regras básicas: colocar o tema no centro; ir adicionando informações do meio para as extremidades; e misturar textos, desenhos e cores diferentes. O objetivo é fazer um registro bidimensional de um raciocínio e suas ramificações, sempre focando nos aspectos visuais que o cérebro humano pode associar e memorizar com mais facilidade.

Essa é a principal diferença entre um resumo tradicional e um mapa mental. Além do processo de traduzir grandes informações em pequenas frases, as associações e conexões feitas ao longo do mapa espelham a maneira como o próprio cérebro trabalha: sempre criando novas relações e combinações. Uma informação nunca está isolada.

Acompanhe abaixo o passo a passo para produzir **um mapa mental *online* ou *offline***:

1. Escreva o tema do seu mapa no centro de uma folha de papel horizontal

Você pode decorar esse título da maneira que preferir. Quanto mais visual ele estiver, mais fácil será de "puxá-lo" na memória quando necessário. Por exemplo, em um mapa mental sobre a Política do Café com Leite, você pode desenhar uma xícara de café e um copo de leite.

2. Puxe os principais subtópicos do centro para fora da folha, com setas

Definido o tema central do seu mapa, é hora de pensar nas ramificações que ele terá. Cada subtópico representará um bloco de informação no seu mapa. Por exemplo, em um mapa mental sobre os períodos da Grécia Antiga, o tema central dará origem a cinco grandes ramificações: período Pré-Homérico, Homérico, Arcaico, Clássico e Helenístico.

3. Detalhe cada subtópico com informações resumidas

Com os subtópicos espalhados pela folha, é hora de alimentar o seu mapa. Aqui começamos o trabalho duro, de fato. Até então, estávamos somente dividindo as partes de conteúdo e dando nomes a elas, mas é na hora de detalhar os subtópicos que a arte de resumir entra em ação. Um mapa mental não pode ser uma mera cópia do caderno em um estilo diferente. Portanto, não deixe os conteúdos muito longos: é preciso resumir as informações o máximo possível. O segredo é fazer uso de associações e conexões, abusando de desenhos, setas e formas geométricas – o que nos leva ao próximo tópico.

4. Use setas, traços, símbolos e desenhos

Vai falar da monarquia? Você pode desenhar uma coroa no lugar da palavra. Bombas atômicas da Segunda Guerra Mundial? Desenhe duas bolas pretas que lembrem o formato de bomba dos desenhos animados. Os mapas mentais não precisam ser bonitos, mas, sim, funcionais. Ao fazer desenhos e símbolos, estamos traduzindo informações em registros visuais, criando associações e conexões fáceis – que podem, muito bem, fazer sentido somente para você. Quer explicar que certa substância é hidrofóbica e não se mistura com a água, como o óleo? Você pode desenhar o personagem Cascão, da Turma da Mônica. Os exemplos são infinitos, basta soltar a criatividade e ver o que funciona para você.

Prontinho! Fazer um mapa mental não é nenhuma tarefa impossível – e nem deve ser. A ferramenta é feita para ajudar a compreensão e assimilação de conteúdos. Por mais que Tony Buzan e outros autores teorizem e determinem o que pode ou não pode faltar em um, basta lembrar que o mapa deve funcionar e fazer sentido para você.

Diaz, Luccas. Como fazer um mapa mental, em 4 passos. *Guia do Estudante*, 8 nov. 2023. Disponível em: https://guiadoestudante.abril.com.br/estudo/como-fazer-um-mapa-mental?. Acesso em: 16 out. 2024.

Matemática e cultura

Esta seção contempla as competências gerais **3** e **4** propostas pela BNCC e possibilita integração com as áreas de Linguagens e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com o tema contemporâneo transversal Diversidade Cultural, além de contemplar a habilidade **EM13MAT105**. Trabalhos com os professores de Arte e História podem ser propostos para explorar a competência específica **6** da área de Linguagens e suas Tecnologias e a competência específica **1** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Incentive a leitura do texto e discuta as ideias com os estudantes, reforçando a presença da Matemática na elaboração dos padrões geométricos e simétricos que decoram os azulejos, bem como no formato quadrado das peças. Se julgar necessário, apresente-lhes outros exemplos de azulejos portugueses para que eles se apropriem das formas utilizadas, das temáticas apresentadas e do estilo das peças como um todo. Essa ampliação do repertório será importante para a execução das atividades propostas nesta seção.

Na atividade **1**, é interessante que os estudantes consigam ter uma visualização geral das peças azulejadas; dessa maneira, eles poderão identificar as transformações contidas nessas obras. Para isso, é importante a visualização frontal das estruturas, em especial por causa da perspectiva em que são apresentadas nas imagens. Além desse aspecto, é fundamental que os estudantes considerem as irregularidades oriundas do trabalho artesanal na confecção dos azulejos e na aplicação deles na parede, sendo necessário ignorar imperfeições. É essencial destacar isso, pois é possível que eles argumentem que não há transformações, já que as instalações podem conter irregularidades.

Sugerimos que seja trabalhada a composição de transformações tanto nas imagens analisadas quanto na produção dos painéis, recorrendo-se também à homotetia para o preenchimento adequado do espaço.

Acompanhe os estudantes na confecção dos painéis da atividade **2**, certificando-se de que eles entendam as transformações utilizadas em suas produções. Ao final, sugira a apresentação dos painéis confeccionados por eles a outras pessoas da escola e da comunidade escolar.

PARA EXPLORAR

Sites

***Azulejo**. In*: **Enciclopédia Itaú Cultural de Arte e Cultura Brasileira. São Paulo: Itaú Cultural, 2024. Disponível em: http://enciclopedia.itaucultural.org.br/termo4959/azulejo. Acesso em: 16 out. 2024. Verbete da Enciclopédia.**

Esse verbete traz informações sobre a azulejaria no mundo, destacando as características notáveis dos azulejos portugueses, as técnicas adotadas e como se deu a transferência dessa produção artística para o Brasil. A página pode ser sugerida como fonte de pesquisa para os estudantes responderem ao item **a** da atividade **2**.

Bernardo, André. Uma obra portuguesa com toda certeza. *Nova Escola*, 1º set. 2013. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/2191/uma-obra-portuguesa-com-toda-certeza#. Acesso em: 16 out. 2024.

Aproveite esse texto para saber mais sobre a história da cultura portuguesa por meio de seus azulejos e pensar em como trabalhar o tema em sala de aula, explorando com os estudantes formas de construção dos painéis.

Chagas, André Gripp de Resende. *Análise das propriedades geométricas dos azulejos quadrados*. 2018. 76 p. Dissertação (Mestrado profissional) – Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018. Disponível em: https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/1010060. Acesso em: 17 set. 2024.

O trabalho destaca as propriedades geométricas dos ladrilhamentos com azulejos quadrados, especificamente os elementos de simetria.

Museus e Monumentos de Portugal. *Museu Nacional do Azulejo.* Disponível em: https://www.museusemonumentos.pt/pt/museus-e-monumentos/museu-nacional-do-azulejo. Acesso em: 19 out. 2024.

A página tem informações sobre a história, a coleção e alguns itens do acervo do Museu Nacional do Azulejo.

Vídeo

Azulejos portugueses. [Salvador], 2018. 1 vídeo (4 min 56 s). Publicado pelo canal TV UFBA. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=vnMi7wiHVnk. Acesso em: 16 out. 2024.

Vídeo produzido pela Universidade Federal da Bahia que conta como a azulejaria portuguesa foi utilizada para a ornamentação de espaços sagrados no Brasil e mostra importantes painéis desses azulejos em Salvador.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Converse com os estudantes sobre as estratégias trabalhadas nesta seção. Se considerar oportuno, aproveite o momento para comentar com eles que, em provas oficiais, as questões podem estar ou não separadas por áreas de conhecimento e que não há a indicação do conteúdo a que se refere a questão. Ou seja, para resolvê-las, os vestibulandos devem primeiro identificar os conteúdos envolvidos para, então, aplicar seus conhecimentos.

É importante ressaltar que, em algumas circunstâncias em que há mais de uma possibilidade de resolução, uma pode ser mais simples e rápida que a outra e que, se o repertório do resolvedor for amplo, ele pode ganhar tempo ao escolher a mais rápida, o que é um recurso importante em provas desse tipo.

Aproveite também para explorar os “chutes técnicos”. É fundamental dizer aos estudantes que “chutar” a resposta correta deve ser o último recurso a ser utilizado, mas que, se for necessário recorrer a ele, a análise das alternativas é uma boa estratégia e aumenta a probabilidade de acertos.

Oriente os estudantes a resolver as questões propostas aplicando o que aprenderam. Essas questões podem ser utilizadas como instrumento de avaliação, tarefa extraclasse ou objeto de discussão na sala de aula, em duplas ou em pequenos grupos. Incentive a apresentação das diferentes maneiras de resolução das questões propostas.

UNIDADE 3 TRIGONOMETRIA

CAPÍTULO 6 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Dando continuação ao estudo da grandeza comprimento, trazemos a Trigonometria como a parte da Matemática que se originou da necessidade do ser humano de calcular distâncias inacessíveis.

A Trigonometria tem função de destaque na Matemática do Ensino Médio não apenas pelos problemas que auxilia a modelar e a resolver mas também pelas habilidades de pensamento que desenvolve.

De certa maneira, a Trigonometria estabelece elos entre os conceitos de medidas, geometria plana e funções, permitindo-nos apresentar a história de sua construção como contextualização inicial do estudo.

Com isso, essa área do conhecimento passa a se mostrar útil também na resolução de muitos problemas da atualidade em diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana, como poderá ser visto ao longo do capítulo.

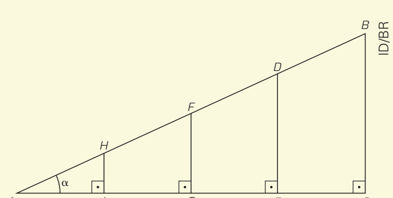
Iniciamos a apresentação do tema mostrando aos estudantes um pouco da história que gerou o desenvolvimento dessa área da Matemática para, em seguida, introduzir conceitos relativos às relações trigonométricas no triângulo retângulo.

O teorema de Pitágoras já havia sido estudado nos anos finais do Ensino Fundamental e retomado em capítulos anteriores. Juntos, os teoremas de Pitágoras e de Tales serão a base para as justificativas e aplicações que os estudantes terão ao longo deste capítulo; portanto, se necessário, retome esses conceitos com eles.

Antes de iniciar o tópico “Relações trigonométricas no triângulo retângulo”, proponha aos estudantes a realização do experimento a seguir.

Experimento

Proponha aos estudantes esta atividade para que experimentem a descoberta das relações trigonométricas. Para isso, eles vão precisar de transferidor, régua e calculadora. Inicialmente, peça a cada um que desenhe três ou quatro triângulos retângulos semelhantes, como no desenho a seguir.



Em seguida, medindo com a régua e com o auxílio da calculadora, peça-lhes que calculem, em cada triângulo, as razões:

- $\dfrac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } A}{\text{medida da hipotenusa}}$;
- $\dfrac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } A}{\text{medida da hipotenusa}}$;
- $\dfrac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } A}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } A}$.

Espera-se que eles encontrem valores iguais (ou próximos, por causa de variações nos instrumentos de medição e nas aproximações) para essas três razões em cada triângulo.

Finalmente, com o transferidor e a régua, solicite-lhes que, em duplas, troquem os desenhos entre si e que construam um triângulo retângulo qualquer com um ângulo congruente a $\hat{A}$ no desenho do colega. Peça então que meçam novamente os lados para calcular as três razões. Oriente os estudantes para que compartilhem as descobertas feitas até o momento. Depois, peça que continuem a leitura do capítulo.

Retome com os estudantes os cálculos das razões feitos nas medições dos triângulos que construíram. Tome como exemplo o triângulo de um estudante escolhido aleatoriamente; supondo que esse triângulo tenha o ângulo α de medida 28°, peça-lhes, então, que escrevam, com base nas medidas feitas: sen 28° $\simeq$ 0,47, cos 28° $\simeq$ 0,88 e tg 28° $\simeq$ 0,53. Eles deverão fazer o mesmo procedimento com diversos ângulos escolhidos previamente pela turma. Depois, ajude-os a comparar os resultados obtidos com os da tabela trigonométrica da página 286 do Livro do Estudante.

É importante que os estudantes vivenciem as medições sugeridas nessa atividade de modo a analisar regularidades e elaborar hipóteses que ganharão significado quando, em seguida, compararem suas descobertas com o texto que define as razões trigonométricas.

Ao final, antes da retomada da leitura do capítulo pelos estudantes, é importante que todos percebam que, dado o ângulo, as três razões terão sempre o mesmo valor em qualquer triângulo retângulo.

Explique-lhes que, por sua vez, qualquer triângulo retângulo que tiver uma das três razões iguais às do triângulo dado tem um dos ângulos congruente a $\hat{A}$, por causa da semelhança entre os triângulos. Ou seja, o ângulo define as três razões, e qualquer uma das três razões define o ângulo. Por isso, elas recebem nomes especiais.

No cálculo das razões trigonométricas, é importante destacar três métodos que podem ser usados para calcular senos, cossenos e tangentes de ângulos:

- cálculo exato, para os ângulos notáveis;
- consulta a uma tabela trigonométrica;
- uso de uma calculadora científica.

Por isso, é importante planejar a aplicação da seção ***Tecnologia*** deste capítulo, visto que a atividade nela proposta permite que os estudantes aprendam a obter as razões trigonométricas de qualquer ângulo, assim como o ângulo, desde que conhecida uma de suas razões trigonométricas.

A seção ***Cálculo rápido*** foi organizada para que os estudantes ganhem agilidade de raciocínio para resolver problemas simples que envolvam as relações trigonométricas básicas com ângulos de 30° e 60°.

Na seção ***Para recordar***, você encontra atividades que são apropriadas para uma revisão em processo, ou mesmo para organizar um trabalho diversificado com a turma, levando em conta a necessidade de retomadas e aprofundamentos pelos estudantes.

Os problemas da seção ***Foco no raciocínio lógico*** foram pensados para desenvolver a leitura, a análise lógica e a busca por estratégias de resolução que não envolvem cálculos, mas que demandam uma organização sistematizada para checar as hipóteses levantadas nas tentativas de resolver os desafios propostos. Esses problemas podem ser resolvidos em duplas. Depois, as duplas podem comparar suas resoluções com as de outros colegas e apresentar argumentações para justificar por que optaram por um ou outro caminho.

Sugerimos que, para a seção ***Palavras-chave***, a turma seja organizada em trios, de modo que, ao escreverem os resumos, os estudantes possam estudar e tirar dúvidas uns com os outros. Sugira que insiram exemplos e desenhos para complementar o resumo que fizeram. Uma sugestão é, ao final, aplicar uma prova com consulta liberada ao resumo feito.

Matemática e papiro de Rhind

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **3** e **4** propostas pela BNCC e possibilita a integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Multiculturalismo. Pode-se propor um trabalho em parceria com os professores de História e Geografia, a fim de explorar a competência específica **1** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Antes de trabalhar o tema da seção, certifique-se de que os estudantes consolidaram as relações trigonométricas estudadas no capítulo para que possam responder à atividade **1**.

Após a leitura do texto pelos estudantes, convide-os a uma roda de conversa para discutir o significado das informações numéricas, das medidas e da razão *seqt*. Acompanhe os grupos na realização das atividades, verificando se compreenderam como o problema 56 foi enunciado e resolvido.

Faça questionamentos para ajudá-los a entender por que a escrita era tão diferente na época em que o texto do papiro foi escrito – provavelmente pela falta de símbolos matemáticos específicos para estabelecer as relações ou por um viés cultural. Se julgar interessante, convide o professor de História para ampliar o que os estudantes já sabem sobre as particularidades da história do Egito Antigo (por exemplo, como eram feitos os diversos tipos de escrita, por quem e em que momento). Você pode reforçar, entre outros aspectos, que a Matemática foi desenvolvida por povos com especificidades próprias, em diversos lugares do planeta e em diferentes períodos da história.

Se julgar oportuno, amplie o trabalho da atividade **2** pedindo aos estudantes que realizem o mesmo tipo de debate sobre os estudos de Matemática em outras épocas (por exemplo, no Renascimento ou nos dias atuais). Outro possível debate pode ser a comparação dos estudos da mesma época, mas em diferentes locais.

PARA EXPLORAR

Vídeo

A MATEMÁTICA no antigo Egito. [*S. l.*: *s. n.*], 2015. 1 vídeo (69 min). Publicado pelo canal Profmat. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=bPGUGdaBPWE. Acesso em: 17 set. 2024.

Nesse vídeo, o professor João Bosco Pitombeira ministra uma aula sobre o Egito Antigo, elencando os principais elementos da Matemática desenvolvidos pelo povo dessa civilização.

Revista

ETNOMATEMÁTICA. *Scientific American*, Brasil, edição especial, n. 11, 2005.

Nessa edição especial da *Scientific American*, a Etnomatemática é abordada com base em diversos povos e civilizações, explicando como e por que a Matemática se desenvolveu em cada região.

CAPÍTULO 7 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

Este capítulo tem como objetivo ampliar as aplicações das razões trigonométricas vistas no capítulo anterior. Agora, essas aplicações serão estendidas a quaisquer triângulos.

Se julgar necessário, peça aos estudantes que procurem no dicionário o significado da palavra "topografia" para que se familiarizem com alguns conceitos que serão trabalhados ao longo do capítulo.

De acordo com o *Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa*, topografia vem do grego *topographia*, e alguns de seus significados são os seguintes:

> **1.** descrição ou delineação exata e pormenorizada de um terreno, de uma região, com todos os seus acidentes geográficos; topologia.
>
> **2.** configuração de uma extensão de terra com a posição de todos os seus acidentes naturais ou artificiais.
>
> [...]
>
> INSTITUTO ANTÔNIO HOUAISS. *Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009. 1 CD-ROM.

Durante a resolução das atividades da primeira seção ***Problemas e exercícios propostos***, fique atento às possíveis dificuldades enfrentadas pelos estudantes no capítulo anterior, pois, nesse momento, eles poderão rever o que foi estudado até o momento e avançar. Assim, os problemas propostos podem ser utilizados como recuperação em processo.

Utilize os problemas produzidos pelos estudantes na atividade **13** dessa seção para avaliar a coerência entre o texto escrito e os desenhos produzidos e se a resolução dos problemas utiliza a lei dos senos. Escolha alguns textos que apresentarem inadequações e, com a autorização dos autores, analise-os com a turma para reformulá-los e torná-los compreensíveis e adequados. Os problemas mais bem elaborados podem ser compartilhados ou usados como tarefa de casa em dias diferentes, sempre citando a autoria. Essas produções são instrumentos valiosos para avaliar a aprendizagem dos estudantes.

Durante a elaboração dos problemas e no momento do compartilhamento com a turma, garanta que o ambiente seja favorável para a troca de ideias e que nenhum estudante se sinta desconfortável, promovendo, sempre que possível, a cultura de paz na sala.

Na seção ***Cálculo rápido***, preparamos uma série de atividades para que os estudantes ampliem a compreensão de medidas de ângulo.

Na seção ***Foco no raciocínio lógico***, temos problemas de estratégia, ou seja, não há uma maneira de resolução evidente, permitindo que vários tipos de registro e estratégia sejam utilizados.

Matemática e topografia

Esta seção contempla as competências gerais **1** e **2** propostas pela BNCC e possibilita integração com as áreas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, bem como com os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia, Meio Ambiente e Economia, além de contemplar a habilidade **EM13MAT308**. Pode ser proposto um trabalho em parceria com os professores de Física, História e Geografia, a fim de explorar as competências específicas **1** e **3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e a competência específica **1** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

O trabalho desenvolvido tem o objetivo de abordar como as relações trigonométricas em um triângulo qualquer podem ser utilizadas na topografia. Incentive a leitura do texto e a realização de uma roda de conversa para que a turma discuta as informações a respeito do campo de atuação da topografia.

Contextualize a topografia como uma área voltada para a descrição e o mapeamento do espaço, sobretudo para executar levantamentos e avaliações de áreas ou terrenos, identificando os pontos significativos do relevo e dos acidentes geográficos, com o objetivo de verificar, entre outras questões, a possibilidade de construir imóveis ou outras estruturas em determinado lugar.

Após a leitura e o debate, certifique-se de que os estudantes compreenderam as relações da lei dos senos e, se necessário, revise o cálculo de áreas de polígonos, principalmente por decomposição em triângulos, para que possam iniciar as atividades.

Mostre a eles o desenvolvimento da fórmula da lei dos senos aplicada à situação-problema da seção, como mostrado a seguir.

$$\frac{AN}{\text{sen}\,\widehat{B}} = \frac{BN}{\text{sen}\,\widehat{A}} = \frac{AB}{\text{sen}\,\widehat{N}}$$

$$\frac{AN}{\text{sen}\,117°} = \frac{BN}{\text{sen}\,42°} = \frac{42{,}1}{\text{sen}\,21°}$$

$$\frac{AN}{\text{sen}\,117°} = \frac{42{,}1}{\text{sen}\,21°}$$

$$AN \simeq 104{,}7$$

$$\frac{BN}{\text{sen}\,42°} = \frac{42{,}1}{\text{sen}\,21°}$$

$$BN \simeq 78{,}6$$

Depois, calcule a área pela aplicação de uma das relações, usando o seno do ângulo entre dois lados de medidas conhecidas, por exemplo:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AN \cdot \text{sen}\,\widehat{A}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 42{,}1 \cdot 104{,}7 \cdot \text{sen}\,42°$$

$$S \simeq 1476{,}6$$

Durante a realização da atividade **1**, avalie a compreensão do texto à medida que os estudantes identificam os dados disponíveis e necessários para o cálculo da área do triângulo *NBM*. Na atividade **2**, oriente-os sobre como realizar as pesquisas. Para isso, conte com o auxílio dos professores de Física, de História e de Geografia.

PARA EXPLORAR

Livro

Kobiyama, Masato *et al*. *Prevenção de desastres naturais*: conceitos básicos. Florianópolis: Organic Trading, 2006. Disponível em: https://cetesb.sp.gov.br/proclima/wp-content/uploads/sites/36/2014/05/prevencaodedesastresnaturaisconceitosbasicos.pdf. Acesso em: 17 set. 2024.

O livro apresenta conceitos e análises de diferentes eventos que aconteceram no Brasil e no mundo ao longo do tempo, bem como medidas preventivas que podem ser tomadas para o gerenciamento de crises motivadas pelos mais diversos tipos de desastres ambientais.

Apostila

Lima, Simoney Ferreira. Técnico em agropecuária: topografia. *Rede e-Tec Brasil*. Manaus: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas, 2012. Disponível em: http://proedu.rnp.br/bitstream/handle/123456789/1475/Topografia_WEB_R.pdf?sequence=1. Acesso em: 17 set. 2024.

Nessa apostila, é possível entender mais sobre conhecimentos de topografia aplicados à agropecuária, com estudos específicos da área. Utilize alguns trechos desse texto caso os estudantes apresentem curiosidade ou dúvidas sobre o assunto e queiram aprofundar os conhecimentos discutidos na seção.

Para complementar o trabalho com essa seção, sugerimos um projeto no qual os estudantes podem conhecer algumas aplicações da Trigonometria e testar, na prática, a medição de distâncias inacessíveis mediante a confecção de teodolitos rudimentares e a utilização do que foi aprendido no texto.

Para mobilizá-los, sugerimos que você organize uma roda de conversa com questionamentos como o seguinte: Quem sabe explicar como os engenheiros conseguem calcular alturas e distâncias de prédios, estradas, pontes, etc., sem medir diretamente essas distâncias?

Observando o que eles entenderam do texto e as hipóteses apresentadas, é possível anotar essas ideias para confronto ao final do projeto, quando souberem mais sobre o assunto e tiverem colocado em prática os conhecimentos.

O projeto "Medindo distâncias inacessíveis", sugerido a seguir, inicia com o convite para que os estudantes se organizem em grupos, construam seus teodolitos ou grafômetros rudimentares e façam experimentações medindo alguns espaços ou construções da escola ou de seu entorno. Por exemplo, eles podem determinar a altura do prédio da escola, de postes, torres e de outras distâncias que não possam ser obtidas diretamente, bem como algumas distâncias que poderão ser conferidas por medição direta, para fins de comparação ao final do projeto.

Aqui, é preciso fazer uma pausa para discutir e retomar a precisão das medidas e os erros cometidos, retomando a ideia de algarismo significativo. Para que isso aconteça, é interessante que uma mesma distância seja medida por dois grupos distintos, de modo que seja possível analisar eventuais discrepâncias nos resultados e conhecer as razões para que isso tenha acontecido: uso dos instrumentos, leitura dos dados, cálculos feitos, entre outras.

Para encerrar o projeto, os estudantes podem produzir relatórios sobre a construção dos instrumentos, as medições feitas e os cálculos realizados.

Por fim, pode ser montada uma exposição com as produções dos estudantes, os relatórios, os desenhos que acompanham as medições feitas e a apresentação dos grupos sobre suas conclusões, de modo que todos possam aprender uns com os outros.

Ao final do capítulo, depois de estudar as leis dos senos e dos cossenos, é possível voltar a este projeto, propondo aos grupos medições mais complexas:

- Medir a altura de uma construção sem se aproximar de sua base.
- Calcular a largura da quadra de esportes ou a distância entre dois prédios considerando a existência de algum obstáculo que impeça a medição direta.

Projeto: Medindo distâncias inacessíveis

1. **Entendendo a proposta**

   Em grupos, serão realizadas medições como as que são feitas por topógrafos e engenheiros. Ainda que os instrumentos utilizados sejam rudimentares, eles serão fundamentados nos mesmos princípios matemáticos.

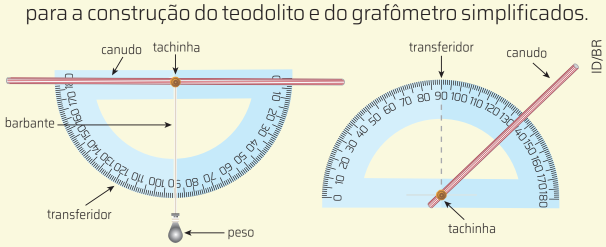
2. **Para começar**

   Antes de realizar as medições, você e os colegas devem construir um teodolito e um grafômetro simplificados. Observem a seguir a lista de materiais necessários para a construção de cada instrumento.

   - dois transferidores (um transferidor para a construção de cada instrumento);
   - dois canudos de papel (um canudo para a construção de cada instrumento);
   - barbante;
   - cola;
   - tachinhas e algo que possa ser usado como peso.

3. **Desenvolvendo o projeto**

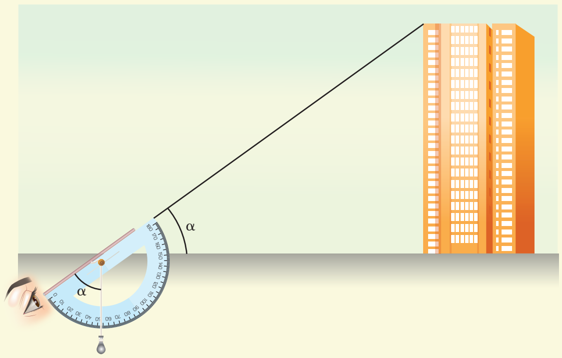
   Observem, nos esquemas a seguir, como utilizar os materiais para a construção do teodolito e do grafômetro simplificados.



Teodolito **Grafômetro**

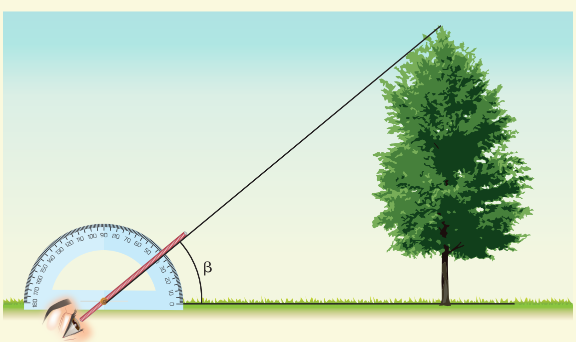
Na sequência, vocês devem calcular as distâncias entre objetos ou locais sem realizar a medição direta, por exemplo, a distância entre dois postes, um em cada lado de uma rua, sem a atravessar para fazer a medição direta.

No caso do teodolito simplificado, deve-se mirar o ponto extremo do que se quer medir para que o barbante com o peso indique o ângulo formado entre a horizontal e a direção do observador ao ponto de mira.



ID/BR

No caso do grafômetro, é preciso primeiro mirar na horizontal para posicionar o transferidor e, em seguida, deslocar a mira para o ponto extremo do que se quer medir. O ângulo indicado no transferidor deve ser lido com cuidado, por causa da espessura do canudo usado como mira.

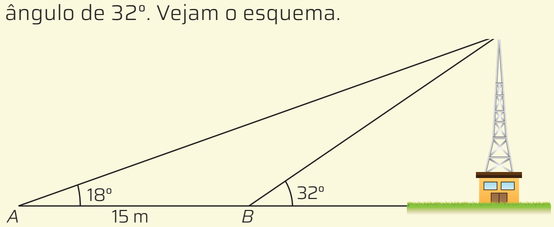


ID/BR

Lembrem-se de que, nos dois casos, para o cálculo de alturas, deve ser acrescentada a altura entre o chão e os olhos de quem efetua a medição.

A seguir, temos um exemplo de como determinar a altura de uma torre sem a medição direta.

Para medir a altura de uma torre de transmissão, foram realizadas duas medições: uma no ponto *A* e outra no ponto *B*, 15 metros adiante, no qual a torre é vista sob um ângulo de 32°. Vejam o esquema.



ID/BR

Depois, com o auxílio de uma calculadora e da tabela trigonométrica, é possível obter a altura aproximada da torre.

4. Apresentação dos resultados

Compartilhem as situações de medição e os resultados obtidos com os colegas e comparem-nos. Se possível, façam a medição direta de algumas das distâncias entre os objetos que vocês calcularam e comparem com os resultados obtidos indiretamente.

CAPÍTULO 8 ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA E CICLO TRIGONOMÉTRICO

Até o capítulo anterior, o foco foi o uso das razões trigonométricas para o cálculo de distâncias e áreas. Este capítulo e o próximo avançam no estudo da Trigonometria ampliando o estudo das funções trigonométricas e suas aplicações mais recentes para descrever fenômenos periódicos nas mais diversas áreas. Este capítulo prepara os estudantes para o estudo das funções, estendendo o conceito de ângulo para além dos triângulos e estabelecendo a relação entre ângulos, arcos de circunferência e o conjunto dos números reais, para que as funções trigonométricas possam ser definidas em $\mathbb{R}$.

Ao ampliar o uso das razões trigonométricas para ângulos obtusos e arcos no ciclo trigonométrico, é importante levar em conta a grande dificuldade dos estudantes para compreender a relação entre ângulos em grau e em radiano e a representação de ângulos e arcos no ciclo trigonométrico, bem como considerar que falhas no entendimento dessas relações podem impedir a aprendizagem das funções trigonométricas. Assim, sugerimos que os tópicos iniciais sejam trabalhados de acordo com a necessidade de reforçar aspectos específicos.

No capítulo, existem sugestões para que o ensino dessas relações se torne mais significativo para os estudantes. A seção ***Cálculo rápido*** também auxiliará nesse sentido.

Observe que, no Livro do Estudante, acompanhando as atividades, há sugestões para a ação do professor em sala de aula. Use-as para desenvolver nos estudantes a habilidade de leitura, especialmente nos textos explicativos e nos exercícios resolvidos.

No boxe *Para explorar* da página 173 do Livro do Estudante, sugerimos o livro *O jeito matemático de pensar*, de Renato J. Costa Valladares (Editora Ciência Moderna). Esse livro traz muitas informações sobre a presença da Matemática em diversos setores de nossa vida. Mas o aspecto mais relevante da obra é explicitar ao leitor a maneira de pensar matematicamente para enfrentar uma situação-problema. Você pode ler, ao longo de todo o ano letivo, o livro com a turma e depois discutir as impressões e aprendizagens destacadas por você e pelos estudantes, de acordo com o interesse apresentado por eles pelas temáticas no decorrer do estudo.

Jogo Batalha-naval circular

Este jogo tem como objetivo auxiliar os estudantes a compreender o ciclo trigonométrico, bem como a localização de arcos notáveis na circunferência.

Sugerimos a prática desse jogo três vezes em dias diferentes, para que os estudantes possam se apropriar da maneira de marcar pontos na circunferência e, também, para que desenvolvam processos de cálculo mental enquanto jogam.

Acompanhe a seguir algumas dicas do que pode ser explorado.

1. Para introduzir o jogo

Peça aos estudantes que leiam as regras e analisem o tabuleiro. Em seguida, converse com eles sobre a composição da esquadra e solicite que marquem suas embarcações no tabuleiro. Por fim, após o jogo, sugira que façam uma lista de dicas sobre o que é preciso saber para jogar.

2. Explore problemas

Ao realizar, por exemplo, o lançamento (3, 270°), o estudante recebeu a confirmação de que tinha atingido o porta-aviões de seu oponente. Sugira que ele liste os possíveis lançamentos que podem ser feitos para atingir todo o navio. E que crie um problema para que seu oponente o resolva.

3. Proponha modificações

Em duplas, os estudantes devem refazer o tabuleiro usando ângulos de 45° em 45°, por exemplo, e podem alterar as regras, que serão descritas mais adiante.

Número de participantes

- 2 jogadores

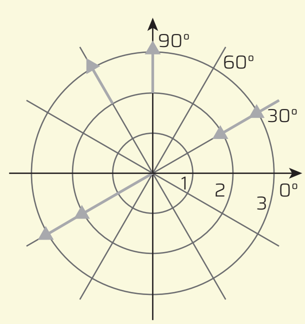
Material necessário

- Um tabuleiro, como o apresentado mais adiante, para cada jogador.

Regras

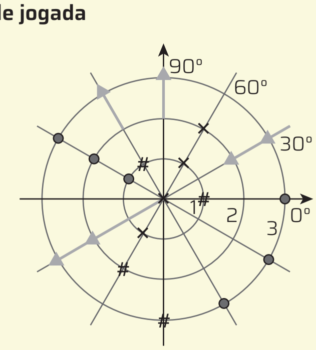
- Em seu tabuleiro, sem que o oponente veja, cada jogador posiciona sua esquadra composta das seguintes embarcações:
  - um porta-aviões (quatro marcas ✕ em posições consecutivas em uma reta ou em uma circunferência);
  - dois submarinos (cada submarino deve ser formado por três marcas ● em posições consecutivas em uma reta ou em uma circunferência);
  - três destróieres (cada destróier deve ser formado por duas marcas ▲ em posições consecutivas em uma reta ou em uma circunferência);
  - quatro fragatas (cada fragata deve ser formada por uma marca **#**).
- Os jogadores decidem quem começa.
- Alternadamente, cada jogador tem direito a "dar um tiro", falando uma posição do tabuleiro da seguinte forma: primeiro a medida do raio da circunferência e depois a medida do ângulo. Por exemplo: (3, 60°).
- Se o tiro atingir algum dos navios do adversário, o oponente diz "acertou" e especifica o tipo de navio atingido. O jogador que acertou o tiro registra o navio do adversário no próprio tabuleiro com uma cor diferente da que usou para marcar a sua esquadra e tem direito a novos tiros até errar.
- No caso de o tiro não atingir nenhum navio, o adversário diz "água" e fica com a vez de jogar.
- O jogo prossegue dessa maneira até que uma das frotas seja totalmente destruída.
- Vence o jogador que conseguir afundar todas as embarcações de seu adversário.

- **Modelo de tabuleiro**



Ilustrações: ID/BR

- **Exemplo de jogada**



Tiro (1, 240°): "Acertou" o porta-aviões   Tiro (3, 60°): "Água"

Na seção ***Tecnologia***, os estudantes têm a oportunidade de calcular as razões trigonométricas de qualquer arco em grau ou em radiano, com o apoio de uma calculadora científica. Se não for possível conseguir uma calculadora desse tipo, programe a realização da aula no laboratório de informática, para que os estudantes possam utilizar a calculadora do computador.

Antes de propor a atividade **2** da seção ***Cálculo rápido***, sugerimos a retomada de uma das regras mais usuais de arredondamento de números. Mesmo que seja apenas uma recordação de algo já aprendido, merece atenção dos estudantes antes de realizarem as atividades **2**, **3** e **5**.

Ainda nessa seção, além das propostas com medidas de ângulo, encontram-se arredondamentos, cálculos algébricos rotineiros e pequenos problemas com medidas diversas. Lembre-se de explorar as propostas duas ou três vezes, no início ou no final da aula. Sugerimos que os exercícios da seção sejam resolvidos em sala de aula, para que seja possível avaliar as necessidades e a evolução dos estudantes durante o trabalho.

A seção ***Para recordar*** apresenta algumas atividades que solicitam dos estudantes a leitura atenta. O excesso de informações precisa ser reconhecido pelo leitor de modo que possa extrair do texto os dados necessários para responder à questão. Essa habilidade deve ser explicitada por você aos estudantes, uma vez que ela é central na resolução de problemas e, em especial, nos testes de processos seletivos.

Na seção ***Foco no raciocínio lógico***, encontram-se dois problemas em que é preciso organizar dados numéricos para tomada de decisão. O registro das possibilidades de modo organizado permite a resolução desses problemas.

Sugerimos que você utilize a seção ***Palavras-chave*** para realizar uma avaliação em dois tempos. Os estudantes organizam o resumo sugerido para que seja avaliado por você e escrevem o que aprenderam, explicitando as dúvidas que tiverem e em que pontos precisam de ajuda. Em seguida, você faz comentários sobre os textos produzidos e os devolve a cada estudante para que possa revê-lo e reorganizá-lo, se necessário. Esse procedimento avaliativo em dois tempos é um recurso interessante para que os estudantes avaliem a própria aprendizagem, reflitam sobre seus erros e ampliem sua compreensão sobre os conceitos estudados.

Matemática e cartografia

Nesta seção, são trabalhadas as competências gerais **1**, **2** e **4** propostas pela BNCC, possibilitando integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com o tema contemporâneo transversal Ciência e Tecnologia. Pode ser proposto um trabalho integrado com os professores de História e Geografia, a fim de explorar a competência específica **1** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

A seção aborda um tópico de estudo da cartografia. Após a leitura do texto pelos estudantes, discuta as ideias, certificando-se de que eles consigam visualizar as representações da geometria esférica. Para isso, aproveite os conhecimentos que eles já têm sobre a Terra e os elementos geográficos apresentados.

Para complementar as informações apresentadas, leia o texto a seguir para os estudantes e, em seguida, realize um debate com eles, a fim de que exponham suas opiniões em relação à importância dos recursos cartográficos para comunicar fatos, fenômenos, entre outros, bem como o uso desse recurso na análise e no entendimento do espaço geográfico, em constante transformação.

A palavra "cartografia" tem origem na língua portuguesa, tendo sido registrada pela primeira vez em 1839 em uma correspondência, indicando a ideia de um traçado de mapas e cartas. Hoje entende[-se a] Cartografia como a representação geométrica plana, simplificada e convencional de toda a superfície terrestre ou de parte desta, apresentada por meio de mapas, cartas ou plantas.

Por meio da Cartografia, quaisquer levantamentos (ambientais, socioeconômicos, educacionais, de saúde etc.) podem ser representados espacialmente, retratando a dimensão territorial, facilitando e tornando mais eficaz a sua compreensão.

[...]

Não se pode esquecer, no entanto, que os mapas, como meios de representação, traduzem os interesses e objetivos de quem os propõe, podendo se aproximar ou se afastar da realidade representada. Além disso, enfrentam [...] as limitações e distorções que inevitavelmente surgem quando da transposição da realidade para o plano.

Todo produto cartográfico é sempre útil e válido para uma determinada aplicação em um determinado instante do tempo.

Introdução à Cartografia. *In*: *Atlas Geográfico Escolar*. [Rio de Janeiro]: IBGE, [2023]. Disponível em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/cartografia/21728-cartografia. Acesso em: 19 set. 2024.

Antes de propor a resolução das atividades propostas, verifique se os estudantes ainda têm dúvidas sobre arcos de circunferência e seus respectivos ângulos antes de prosseguir no desenvolvimento da seção, retomando e resolvendo possíveis questionamentos. Além disso, reforce a orientação espacial, os conceitos de norte, sul, leste e oeste e como são feitas as medidas da latitude e da longitude. Se considerar oportuno, projete o atlas do IBGE (disponível em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/cartografia/21730-coordenadas-geograficas.html; acesso em: 18 set. 2024) ou solicite aos estudantes que o acessem, em especial a seção que define latitude e longitude.

Em seguida, você pode solicitar aos estudantes que observem a imagem que representa o globo terrestre para esclarecer que a longitude é a medida do ângulo do arco de circunferência formado entre o ponto de observação e o meridiano de Greenwich, contido em um paralelo, entre 0° e 180° a leste ou a oeste. A latitude, por sua vez, é a medida do ângulo do arco de circunferência formado entre o ponto de observação e o paralelo do Equador, entre 0° e 90° a norte ou a sul. Em outras palavras, localizam-se o meridiano e o paralelo em que o ponto está localizado e, sobre cada um, traçam-se arcos de circunferência entre o ponto e o meridiano de Greenwich e entre o ponto e o paralelo do Equador, respectivamente. As medidas dos ângulos referentes a esses arcos são, respectivamente, a longitude e a latitude do ponto.

Para finalizar, discuta a importância dos elementos da cartografia para o desenvolvimento, por exemplo, das tecnologias de posição e deslocamento, como o GPS e os voos de avião.

PARA EXPLORAR

Sites

Atlas geográfico escolar. IBGE. Disponível em: https://atlasescolar.ibge.gov.br/. Acesso em: 18 set. 2024

Nessa página, o IBGE apresenta a definição de cartografia e os principais elementos da área. Navegando por outras áreas do portal, é possível acessar mais informações interessantes, como mapas do Brasil e do mundo, a composição da Terra, entre outras. Se julgar necessário, converse com o professor de Geografia para, juntos, realizarem um trabalho complementar sobre o assunto para enriquecer ainda mais a aprendizagem do tema.

Rocha, Maria Lúcia; Mendes, Maria José. *A história da matemática e as projeções cartográficas*: investigando conteúdos matemáticos através da dimensão das representações da superfície da Terra. *In*: Seminário Nacional de História da Matemática, 10., 2013, Campinas, São Paulo, Unicamp. *Anais* [...]. Disponível em: https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/anais-snhm/article/view/76. Acesso em: 18 set. 2024.

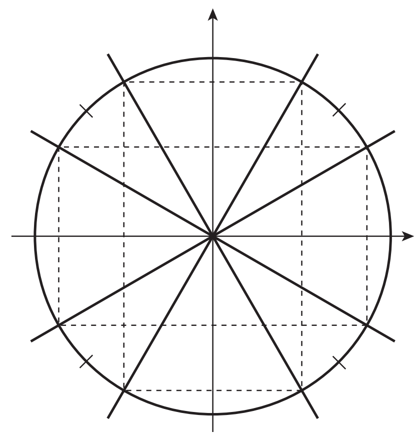
O artigo, de onde foi retirado um dos textos-base desta seção, busca estabelecer pontos de contato entre a Matemática e a cartografia, além de expor as contribuições da primeira área de pesquisa para a segunda. Ele pode servir de fonte de pesquisa para os estudantes responderem à atividade **2**.

CAPÍTULO 9 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Dando continuação ao estudo da Trigonometria, apresentamos as funções seno, cosseno e tangente e estudamos as principais características de cada uma delas em relação a gráfico, domínio e imagem, crescimento e decrescimento.

Se julgar oportuno, ao iniciar o estudo do tópico "Alguns valores notáveis", disponibilize aos estudantes um modelo do ciclo trigonométrico como o apresentado a seguir.

- Modelo de ciclo trigonométrico para que os estudantes se familiarizem com ele e possam utilizá-lo na resolução das atividades propostas.


ID/BR

Neste volume, optamos por trabalhar as funções trigonométricas básicas – seno, cosseno e tangente. As demais funções (secante, cossecante e cotangente) podem ser apresentadas aos estudantes dependendo do projeto de formação estabelecido pela escola, alinhado aos projetos de vida dos estudantes.

PARA EXPLORAR

Site

Matemática Multimídia. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/1033/TELA-a_roda-gigante---o_experimento.pdf. Acesso em: 18 set. 2024.

O experimento "A roda-gigante" visa facilitar a introdução dos conceitos de movimentos periódicos e pontos de máximo e mínimo de funções periódicas. A atividade sugerida nesse experimento envolve a construção de uma roda-gigante em tamanho reduzido feita de material reciclável.

No tópico "Translação e simetria dos gráficos das funções seno e cosseno", ampliamos os conhecimentos dos estudantes sobre a simetria de translação no plano cartesiano.

A relação entre coordenadas fica definida por expressões da forma $H(x + c, y)$ ou $V(x, y + c)$ para cada ponto (x, y) do plano cartesiano, que definem funções correspondentes a translações na direção dos eixos Ox e Oy, respectivamente.

É importante que você explique aos estudantes que esse conhecimento pode ser aplicado na construção de gráficos sempre que possível, a fim de evitar perda de tempo com a produção de tabelas de pontos.

Se julgar necessário, retome com os estudantes o conteúdo sobre função modular, antes de eles resolverem o item **e** da atividade **R12**.

O tópico "Fenômenos periódicos e as funções seno e cosseno" visa dar mais significado ao estudo da Trigonometria. Nos capítulos 6 e 7, os estudantes conheceram as razões trigonométricas no contexto de sua produção histórica, e o objetivo agora é que percebam o avanço desse conhecimento com as funções trigonométricas representando modelos matemáticos para descrever fenômenos diversos.

Os conceitos de período e frequência são trabalhados em contextos significativos, como o período de um batimento cardíaco e a frequência dos batimentos cardíacos por minuto, que auxiliam no entendimento das fórmulas matemáticas apresentadas e contribuem, assim, para uma aprendizagem efetiva.

Se julgar oportuno, realize um trabalho em parceria com os professores de Física e de Biologia a fim de promover uma discussão com os estudantes sobre o assunto e reforçar que a linguagem matemática pode ser utilizada cada vez mais em diversas situações.

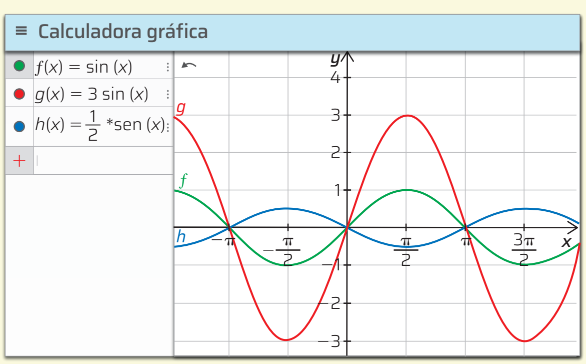
Na segunda seção ***Tecnologia***, os estudantes utilizam mais uma vez um *software* de Geometria dinâmica, agora para realizar simulações envolvendo gráficos de funções trigonométricas. A proposta explora regularidades em gráficos, em relação aos coeficientes a, b, c e d da função seno do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}\,(cx + d)$.

Sugerimos a sistematização de algumas propriedades das funções trigonométricas após o trabalho com a segunda seção ***Tecnologia***.

1. Na relação entre os períodos das funções $f(x) = \text{sen}\,x$ e $g(x) = \text{sen}\,kx$, com $k > 0$, o período de $f(x)$ é igual a 2π e o período de $g(x)$ é igual a $\frac{2\pi}{k}$. Essa relação também é válida para a função $\cos x$.

   Pergunte aos estudantes: Que relação existe entre os períodos das funções $h(x) = \text{tg}\,x$ e $j(x) = \text{tg}\,kx$, para todo x real? Espera-se que eles percebam que o fator k deve ser compreendido como um número que altera a velocidade com que a variável x percorre o eixo das abscissas. Quando $k = 3$, por exemplo, isso significa que, enquanto a variável x percorre um período de tamanho 2π, a variável $3x$ percorre um período de tamanho $\frac{2\pi}{3}$.

2. A adição de uma constante à variável não altera o período da função trigonométrica, ou seja, $y = \text{sen}(c + x)$, $y = \cos(c + x)$ e $y = \text{tg}(c + x)$, para qualquer c real, são funções com o mesmo período das funções seno, cosseno e tangente.



ID/BR

   Espera-se que os estudantes percebam que o efeito da soma dessa constante corresponde à translação do gráfico das funções básicas, sem alterar seus períodos.

3. As duas alterações dos itens anteriores não mudam a imagem das funções básicas. No entanto, se multiplicarmos as funções trigonométricas seno e cosseno por uma constante, alteraremos o intervalo na imagem. Assim:
   - $f(x) = \text{sen}\,x$ tem imagem $[-1, 1]$;
   - $g(x) = 3\,\text{sen}\,x$ tem imagem $[-3, 3]$;
   - $h(x) = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\,x$ tem imagem $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Mostre aos estudantes o gráfico dessas funções em um mesmo sistema de eixo cartesiano.

A seção ***Cálculo rápido*** traz um recurso simples para ajudar os estudantes a memorizar a posição dos principais arcos no círculo trigonométrico e os valores de seus respectivos senos, cossenos e tangentes. Além da Trigonometria, há propostas para que os estudantes ampliem processos de cálculo com medidas e Álgebra.

Matemática e sinestesia

Esta seção permite que sejam trabalhadas as competências gerais **1**, **2**, **3** e **4** propostas pela BNCC e possibilita integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e com a área de Linguagens e suas Tecnologias, além de contemplar os temas contemporâneos transversais Ciência e Tecnologia e Multiculturalismo. Pode ser proposto um trabalho integrado com o professor de Arte a fim de explorar a competência específica **6** da área de Linguagens e suas Tecnologias.

O texto-base utilizado nesta seção tem por objetivo convidar os estudantes a entender melhor o fenômeno da sinestesia, para depois associar as ondas sonoras às funções trigonométricas.

Para atender esse objetivo de modo satisfatório, leia o texto com eles, resolvendo possíveis dúvidas sobre termos e expressões mais ligadas ao estudo de Física. Pode ser interessante conversar com o professor desse componente curricular para que essas informações sejam apresentadas adequadamente, enriquecendo ainda mais o debate proposto pela seção.

Em seguida, permita aos estudantes que relatem sensações sinestésicas que, porventura, tenham experimentado, ainda que não conhecessem esse conceito.

Deixe claro, no entanto, que a associação entre sons, números, letras, formas e cores também pode ser feita de maneira deliberada, isto é, sem que haja necessariamente uma explicação neurológica para isso. Essa informação poderá ajudá-los na resolução da atividade **2**.

Se julgar necessário, aprofunde a discussão sobre sinestesia, apresentando outros textos, vídeos, etc. para estudar com a turma, como maneira de enriquecer e ampliar o repertório dos estudantes sobre o assunto.

Quando começar a discutir sobre a Matemática e a representação gráfica dos sons, avalie se as informações do capítulo relativas às funções trigonométricas foram compreendidas pelos estudantes em grau suficiente para entenderem o comportamento das funções trigonométricas associadas às ondas sonoras. Caso eles apresentem dificuldade, as características das funções podem ser retomadas, por meio de exemplos mais básicos que utilizem $\text{sen}\,t$ ou $\cos t$.

Na resolução das atividades, você tem mais uma oportunidade de avaliar os estudantes em relação à capacidade de buscar informações e analisá-las para fazer escolhas sobre fontes e dados que respondam ao que foi solicitado.

Nesse momento, mais uma vez, os professores de Física e de Arte podem ser convidados para auxiliá-lo.

PARA EXPLORAR

Texto

Rossi, Sueli da Silva. A senoide e os sons musicais. Londrina: Secretaria Estadual de Educação, 2008. Disponível em: http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/md_sueli_silva_rossi.pdf. Acesso em: 18 set. 2024.

Com a proposta indicada nesse trabalho, é possível mostrar aos estudantes outras possibilidades de ligações que podem ser estabelecidas entre as relações trigonométricas e os sons musicais, ampliando o contato entre a linguagem matemática e a Arte.

Vídeo

M3 Matemática Multimídia. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1086. Acesso em: 18 set. 2024

O vídeo "Desenhando ondas", com duração de 10 min, utiliza uma contextualização encenada para explicar como a Matemática e a música podem se relacionar.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Sugira aos estudantes que leiam o problema resolvido e analisem a figura do enunciado. Incentive-os a compartilhar com toda a turma como eles resolveriam o problema para que ampliem o repertório de resoluções e valorizem as estratégias apresentadas pelos colegas, que podem ser diferentes da que foi apresentada na resolução do Livro do Estudante.

Espera-se que os estudantes resolvam as atividades propostas aplicando o que aprenderam. Elas podem ser utilizadas como instrumento de avaliação, tarefa extraclasse ou como objeto de discussão na sala de aula, em duplas ou em pequenos grupos.

Comente com os estudantes que as atividades, embora apresentem histórias diferentes, têm estratégias de resolução semelhantes.

Explique também que as expressões das funções trigonométricas podem parecer complexas, mas que elas são assim exatamente para simplificar cálculos.

Esse tipo de análise mais aprofundada, tanto do texto do problema como da resolução, favorece o desenvolvimento da autoconfiança e da resiliência enquanto os estudantes exercitam a persistência na resolução de problemas, uma vez que eles se sentem mais seguros diante de textos aparentemente difíceis.

UNIDADE 4 ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

CAPÍTULO 10 ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste capítulo, será dada maior ênfase à resolução de problemas de contagem sem a utilização de fórmulas, para que os estudantes possam compreender, primeiramente, o princípio fundamental da contagem e, posteriormente, como ele se relaciona com a resolução de problemas que envolvem permutações, arranjos e combinações. Outro aspecto importante no desenvolvimento do texto para os estudantes é o cuidado em relacionar os conceitos de permutação e arranjo, diferenciando-os de combinação.

Com esse encaminhamento, buscamos desenvolver nos estudantes as habilidades de decidir o melhor modo de resolver um problema que envolva análise combinatória e de se apropriar de algumas maneiras para representar a organização de uma contagem. Esperamos que, ao conhecer as representações por esquemas, tabelas, árvores de possibilidades, etc., cada estudante possa usá-las ou elaborar maneiras pessoais de representação para apoiar seu modo de pensar sobre a organização de uma contagem. Por isso, é essencial que, após a solução dos problemas, haja a socialização das resoluções em sala de aula, para que todos os estudantes conheçam outras formas de registro que podem ampliar seus recursos em outras situações. Não é preciso grande aprofundamento no conceito de fatorial (!) e na justificativa para $0! = 1$, pois o foco está na compreensão dos processos de contagem, e não na manipulação numérica ou algébrica.

Na seção ***Problemas e exercícios propostos***, as atividades **33** e **34** merecem atenção especial, pois favorecem a sistematização para que os estudantes diferenciem permutações e arranjos.

Lembre-se de que as atividades em que eles devem criar um problema foram idealizadas como instrumento de avaliação da aprendizagem. Utilize essas produções para verificar se os estudantes compreenderam os conceitos e se utilizaram a linguagem matemática de maneira adequada.

Na seção ***Tecnologia***, os estudantes conhecem o recurso das calculadoras científicas para o cálculo de fatoriais e, de modo complementar, na seção ***Cálculo rápido***, são apresentados recursos aritméticos que facilitam o cálculo de fatoriais e sua utilização nas fórmulas.

Na seção ***Foco no raciocínio lógico***, encontram-se dois problemas de lógica. O primeiro é relativamente simples; já o segundo exige o levantamento de hipóteses e testagem de cada possibilidade. Eles podem ser desenvolvidos em aulas separadas. O importante é realizar o painel de soluções (ver orientações na parte 1 deste manual) e a discussão sobre as diferentes formas de registro usadas pelos estudantes no desenvolvimento do raciocínio para obter a solução de cada problema.

Na seção ***Palavras-chave***, os estudantes encontram uma proposta diferente: comparar o significado de termos usados em Matemática com seu significado no senso comum. Assim, os estudantes terão de refletir sobre essas diferenças e organizar para si mesmos o significado dos termos "arranjo", "permutação" e "combinação" no sentido estudado neste capítulo.

Matemática e leitura de mundo

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2** e **5** propostas pela BNCC e possibilita integração com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e com o tema contemporâneo transversal Ciência e Tecnologia.

No desenvolvimento desta seção, você pode conversar com os estudantes sobre a importância de Alcuíno de York para a época e para o desenvolvimento da análise combinatória, bem como sobre outros pensadores, cientistas e teóricos que desenvolveram as ideias do monge e ampliaram as possibilidades da ciência e do pensamento científico.

Na realização da atividade **1**, deixe que, a princípio, os estudantes tentem determinar as soluções. Depois, você pode propor um painel de soluções em que diferentes estudantes mostrem como registraram as idas e vindas de cada travessia. Solicite a eles que expliquem os movimentos e o motivo das escolhas. Espera-se que eles não encontrem grandes dificuldades para resolver o primeiro desafio e calcular as possibilidades de resolução. Já no segundo desafio, devido à quantidade de variáveis envolvidas, é preciso mais organização e um registro mais apurado de cada escolha.

Na atividade **2**, oriente os estudantes a pesquisar sobre a quantidade de dados com que um programa ou máquina pode lidar, ou seja, a quantidade de dados que são capazes de suportar, assim como as consequências de um cálculo inadequado para determinada situação ou recurso. Explicite a maneira como deseja que eles façam a apresentação dessa pesquisa e outros pontos necessários, de acordo com a realidade da turma. Ao longo da pesquisa, espera-se que os estudantes percebam que os desenvolvimentos científicos, sobretudo os da área de tecnologia da informação, podem auxiliá-los na resolução de situações-problema variadas.

PARA EXPLORAR

Sites

HARDWARE resolve histórico problema do caixeiro-viajante. *MundoGEO*, [*s. l.*], 4 jun. 2020. Disponível em: https://mundogeo.com/2020/02/11/hardware-resolve-historico-problema-do-caixeiro-viajante/. Acesso em: 18 set. 2024.

O artigo mostra como os programas de computador e a tecnologia da informação ajudaram a resolver o problema do caixeiro-viajante, um problema antigo e elaborado da história da Matemática.

LÓGICA de programação: introdução a algoritmos e pseudocódigo. Devmedia. Disponível em: https://www.devmedia.com.br/logica-de-programacao-introducao-a-algoritmos-e-pseudocodigo/37918. Acesso em: 18 set. 2024.

Nesse *link*, os estudantes podem se familiarizar com a linguagem de programação e aprofundar a pesquisa solicitada na atividade **2**.

Proposições para aguçar [o espírito dos] jovens. *Revista Brasileira de História da Matemática*, [*s. l.*], v. 17, n. 33, p. 73-90. Disponível em: https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/40/38. Acesso em: 18 set. 2024

Parte de uma das obras de Alcuíno de York, traduzida por Frederico J. A. Lopes e publicada em 2017 pela Sociedade Brasileira de História da Matemática, que apresenta 53 dos desafios propostos por Alcuíno, entre eles o famoso desafio da travessia, trabalhado nesta seção.

Vídeo

O problema do caixeiro-viajante. [*S. l.*: *s. n.*], 2014. 1 vídeo (9 min). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=_vKMyRj855A&list=PLKTNxZkADYLtGR6OlWCUlf-Rndu9jGq6j&index=2. Acesso em: 18 set. 2024.

Nesse vídeo, um episódio do programa *Isto é Matemática*, produzido pela Sociedade Portuguesa de Matemática, o professor Rogério Martins discute a complexidade do problema do caixeiro-viajante.

CAPÍTULO 11 PROBABILIDADE

Neste capítulo, optamos por desenvolver um trabalho cuidadoso na compreensão da linguagem de Probabilidade e por ampliar as sugestões e os exemplos de sua relação com outras ciências, além de deixar mais explícitas as situações nas quais ela pode ser utilizada.

Nos primeiros tópicos deste capítulo, são apresentados os conceitos básicos da Probabilidade sem a necessidade dos cálculos de análise combinatória. Essa opção de ensino tem como objetivo o desenvolvimento dos conceitos sem desviar a atenção dos estudantes para cálculos.

Após a resolução da atividade **22**, na seção ***Problemas e exercícios propostos***, encontra-se a sugestão para abordar o jogo "Role os dados", cujos objetivos são o cálculo de probabilidades simples e a percepção de que as condições de um jogo nem sempre são igualitárias. Os estudantes precisarão jogar de duas a três vezes para perceberem que não se trata de um jogo justo. No entanto, terão a oportunidade de alterar as regras do jogo de modo que os jogadores tenham igual chance de vencer.

Consideramos que os jogos criam situações que exigem soluções originais e rápidas. Nesse processo, o planejamento, a busca por melhores jogadas e a utilização de conhecimentos adquiridos anteriormente propiciam o surgimento de novas ideias e a aquisição de novos conhecimentos, bem como o desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico que estão envolvidas no processo de jogar. Os jogos exigem tempo e precisam ser realizados mais de uma vez, até que os estudantes pensem nas propriedades matemáticas que são os objetivos dessas atividades.

A seguir, listamos algumas sugestões para a utilização de jogos.

- Realizar o jogo algumas vezes, em dias diferentes, para que os estudantes tenham tempo para aprender matemática com ele.
- Deixar que os estudantes leiam, interpretem e discutam as regras do jogo.
- Pedir a eles que produzam algum registro escrito após o jogo ou que resolvam problemas com base no jogo.
- Propor aos estudantes que, em grupos, após o jogo sugerido, criem jogos que envolvam os conceitos aprendidos.

Jogo "Role os dados"

- Leia para os estudantes as regras do jogo descritas a seguir ou anote-as no quadro. Em duplas, eles decidem quem será o jogador *A* e quem será o jogador *B*. Nessa etapa, é interessante que não se dê nenhuma pista nem se fale sobre dados não viciados, deixando que os estudantes comecem a jogar sem perceber qual é o jogador com maior chance de vencer; não interferir é uma boa estratégia para que pensem por si mesmos e aprendam durante o jogo.
- Depois de jogar, os estudantes podem analisar se é mais vantajoso ser o jogador *A* ou o jogador *B*, justificando a conclusão a que chegaram. Nesse momento, você pode incentivar que apresentem suas justificativas e, se desejar, pode associá-las ao vocabulário específico da Probabilidade, destacando o espaço amostral, os eventos, etc.
- Finalizada essa etapa, é interessante que justifiquem por que um jogador tem maior probabilidade de ganhar do que o outro.
- Peça-lhes, então, que construam uma representação que mostre as possibilidades para que o jogador *A* e o *B* vençam. Questione se esse registro permite afirmar se o jogo é justo ou injusto.
- As duplas sugerem, então, modificações nas regras para que o jogo seja justo. Nessa etapa, você pode propor a cada dupla que apresente suas propostas para a turma experimentar e ver se concorda com a mudança sugerida.
- Para finalizar, discutam o que é um jogo justo. Caso julgue necessário, comente que, matematicamente falando, para afirmar que os possíveis resultados de um jogo de dados são eventos equiprováveis, é necessário saber também se os dados são "não viciados", certificando-se de que compreendem o sentido dessa expressão.

- **Número de participantes**

  2 jogadores

- **Material**
  - dois dados para cada jogador
  - lápis e papel para anotações

- **Regras**
  - Os participantes decidem quem será o jogador *A* e quem será o jogador *B*.
  - Os jogadores realizam dez jogadas ou partidas.
  - A cada jogada, os jogadores lançam seus dados ao mesmo tempo.
  - O jogador *A* marca um ponto se a diferença entre os números que saírem nos dados for 0, 1 ou 2. O jogador *B* marca um ponto se o valor da diferença for 3, 4 ou 5.
  - Após dez rodadas, vence o jogador com o maior número de pontos.

Ao longo do capítulo, alternamos a representação da probabilidade de um evento utilizando frações, decimais e porcentagem. Por isso, sugerimos que incentive os estudantes a pensar nessas diferentes escritas e na relação entre elas.

No tópico "Probabilidade e contagem", os problemas passam a exigir cálculos com grande número de elementos nos conjuntos que descrevem os experimentos e seu espaço amostral. Assim, este capítulo dá continuação e amplia o que foi estudado sobre contagem.

Durante a resolução das atividades desse tópico, é possível avaliar os estudantes não apenas em relação a conceitos e cálculos probabilísticos, mas também quanto aos processos de contagem estudados no capítulo anterior e ao cálculo com fatoriais.

Na seção ***Cálculo rápido***, a ênfase está no cálculo de porcentagens, para facilitar a resolução de muitos dos problemas propostos. Por isso, essa seção não precisa ser deixada para o final, e suas atividades podem ser distribuídas ao longo do estudo do capítulo.

Na seção ***Foco no raciocínio lógico***, encontram-se três problemas não convencionais, que podem ser resolvidos de diferentes modos. A variedade de modos de pensar e de registros deve ser compartilhada entre a turma para que os estudantes possam ampliar o repertório de estratégias de resolução de problemas, aprendendo uns com os outros.

Na seção ***Palavras-chave***, você e os estudantes têm a oportunidade de elaborar a síntese do capítulo na representação de um mapa conceitual. Siga as observações do Livro do Estudante sobre o que é e para que serve um mapa conceitual.

Ao longo desta unidade, há diversas propostas para que os estudantes analisem resoluções de problemas já desenvolvidas, com e sem erro, comparando semelhanças e diferenças entre elas. Sugerimos que a análise de erros seja utilizada com os estudantes como maneira de avaliação e autoavaliação. Para tanto, sugerimos que você:

- organize uma lista de problemas e peça aos estudantes que os resolvam. Não é necessário que sejam muitos, mas que envolvam as principais ideias do capítulo;
- solicite aos estudantes que resolvam os problemas em folhas avulsas, para que sejam entregues a você;
- compartilhe com os estudantes as estratégias de resolução desenvolvidas por eles, para que repensem as maneiras de resolução que não estão adequadas e conheçam aquelas usadas pelos colegas. Lembre-se de deixar claro que haverá sigilo sobre os autores das resoluções que serão apresentadas. Se, mesmo assim, algum estudante não se sentir confortável com esse procedimento, é importante que se posicione para que não haja constrangimento. De modo geral, poucos estudantes se opõem e, quando veem como é o processo, acabam por não se opor mais;
- analise e corrija as soluções, separando aquelas que estiverem com problemas.

Com esse material, pode-se organizar uma nova atividade da seguinte maneira: primeiro, selecione alguns dos problemas e as soluções apresentadas pelos estudantes e copie-os em uma folha (de todas as turmas e sem identificação de ninguém); em seguida, tire cópias para a turma, que, em duplas, analisarão as soluções, devendo encontrar e corrigir os erros, além de listar dicas de correção do erro e a solução do problema; depois, organize uma correção com os estudantes: conversem sobre os erros, analisem as formas de superação e as dicas dadas e elaborem uma lista coletiva com essas dicas para resolver problemas de contagem e probabilidade; por fim, cada estudante pode ter sua lista individual, e você deve preparar novas atividades que a turma vai resolver consultando o trabalho desenvolvido.

Matemática e sociedade

Esta seção contempla as competências gerais **1**, **2**, **4**, **9** e **10** da Educação Básica propostas pela BNCC e possibilita integração com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e com o tema contemporâneo transversal Educação em Direitos Humanos. Podem ser propostos trabalhos com os professores de História e de Sociologia, a fim de explorar as competências **1**, **5** e **6** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e contribuir para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT104**.

Após a leitura do texto selecionado para a seção, converse com os estudantes sobre as informações apresentadas a respeito do cálculo do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) e das desigualdades sociais no Brasil.

Ao longo das atividades realizadas nesta seção, se julgar necessário, converse com os professores de História, Geografia e Sociologia e solicite a eles que esclareçam os estudantes sobre termos e dados do texto que, inicialmente, podem ser desconhecidos por eles. Esse contato também é interessante, pois, assim, as informações apresentadas no texto podem ser discutidas de perspectivas históricas e antropológicas. Dessa maneira, espera-se que o ambiente seja favorável a discussões sobre racismo estrutural, acesso à saúde e à educação de qualidade, desigualdade econômica, participação da mulher na vida pública, respeito e valorização da pessoa com deficiência e muitos outros assuntos relevantes para o desenvolvimento humano, discutidos, ou não, no texto. Debates como esse contribuem para o desenvolvimento da empatia, do respeito entre os estudantes, além de abordar também questões socioemocionais, favorecendo a promoção e a ampliação da cultura de paz dentro e fora do ambiente escolar.

Após a resolução da atividade **1**, enfatize a importância de os estudantes conhecerem o IDH de um município, por exemplo, na hora de analisar como está o desenvolvimento do município onde vive ou daquele em que pretende morar no futuro, visto que essa medida leva em consideração índices de saúde, educação e renda de um local. Além disso, também é possível entender quais são as necessidades de desenvolvimento do município e cobrar políticas públicas para essas áreas.

Na atividade **2**, auxilie-os na leitura do texto-base da seção, com a ajuda do professor de Geografia, se possível, e com a indicação de pontos que podem ser relevantes para a pesquisa, reforçando sempre que devem ser consultadas fontes confiáveis. Por fim, destaque a importância de documentos como os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) para a proposição de ações em todo o mundo. Aproveite o momento para discutir também com a turma sobre as desigualdades sociais por cor ou raça no Brasil. É importante que eles compreendam a maior vulnerabilidade socioeconômica das populações negra, parda e indígena. Se necessário, proponha que a turma faça uma pesquisa sobre esse tema antes da conversa.

PARA EXPLORAR

Sites

17 objetivos para transformar nosso mundo. Nações Unidas Brasil. Disponível em: https://nacoesunidas.org/pos2015. Acesso em: 18 set. 2024

No documento, elaborado pelas Nações Unidas, são descritos os 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) previstos para todo o mundo, como a erradicação da pobreza, o acesso à saúde e à educação de qualidade e a diminuição das desigualdades sociais.

Desigualdades sociais por cor ou raça no Brasil. *Estudos e Pesquisas* – Informação Demográfica e Socioeconômica, Rio de Janeiro, n. 48, 2022. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101972_informativo.pdf. Acesso em: 18 set. 2024

O texto discute as desigualdades sociais por cor ou raça no Brasil, com base em dados obtidos em pesquisas como o Censo do Ensino Superior e a Pnad Contínua.

Nitahara, Akemi. Pela primeira vez, negros são maioria no Ensino Superior público. *Agência Brasil*, Rio de Janeiro, 13 nov. 2019. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2019-11/pela-primeira-vez-negros-sao-maioria-no-ensino-superior-publico. Acesso em: 18 set. 2024.

O artigo apresenta informações específicas sobre a desigualdade no acesso ao Ensino Superior no Brasil.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

A leitura da parte inicial da seção e do problema resolvido pode ser feita em duplas pelos estudantes, para que eles tenham a oportunidade de discutir as habilidades de leitura envolvidas na compreensão da questão para sua resolução.

Mais que a mera leitura da resolução, é importante que os estudantes percebam que a análise cuidadosa do texto lhes possibilita a apropriação de processos que podem ser utilizados em situações análogas. Sugerimos que os oriente nessa análise mais reflexiva propondo algumas perguntas: A informação contida no texto inicial está presente na resolução do problema? Seria possível resolver o problema apenas com a leitura do enunciado e das alternativas? Como a relação das diferentes informações no texto facilita a resolução da questão?

Nas questões propostas, espera-se que os estudantes apliquem a leitura reflexiva que aprenderam. Em um painel de soluções, eles podem falar como pensaram para resolver cada problema e, eventualmente, conhecer maneiras diferentes de resolução, ampliando, assim, o repertório de estratégias e de registro matemático.

UNIDADE 1 MATEMÁTICA FINANCEIRA E FUNÇÕES: EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

CAPÍTULO 1 FUNÇÃO EXPONENCIAL

TECNOLOGIA (P. 13)

1. Uma possibilidade para chegar ao resultado:

- 1 0 x^2 3 √ =

Aproximadamente 53,96.

- 5 x^2 2 √ ± =

Aproximadamente 0,10.

- 6 x^y π =

Aproximadamente 278,38.

- 3 √ x^y 5 √ =

Aproximadamente 3,42.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 14)

1. a) Uma possibilidade para chegar ao resultado:

8 x^y (2 ÷ 3) =

O resultado é igual a 4.

b) Uma possibilidade para chegar ao resultado:

3 x^y 2 √ ± =

Aproximadamente 0,21.

c) Uma possibilidade para chegar ao resultado:

5 x^y (1 ÷ 8) =

Aproximadamente 1,22.

d) Uma possibilidade para chegar ao resultado:

3 √ x^y 2 √ =

Aproximadamente 2,17.

2. a) $6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2} = \sqrt[3]{36}$

b) $5^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} =$

$= \sqrt[4]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{\sqrt[4]{125}} = \frac{\sqrt[4]{5}}{5}$

c) $(7)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(7)^2} = \sqrt[3]{49}$

d) $(5)^{-\frac{3}{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \sqrt[5]{\frac{1}{125}} =$

$= \frac{1}{\sqrt[5]{125}} = \frac{1}{\sqrt[5]{5^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{5^2}}{\sqrt[5]{5^2}} = \frac{\sqrt[5]{25}}{5}$

e) $(0{,}1)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-\frac{1}{3}} = (10)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$

f) $\left(\frac{6}{7}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{6}{7}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{36}{49}}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{5}} = (2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(2)^3} = \sqrt[5]{8}$

h) $(0{,}3)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{10}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{100}{9}}$

3. a) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

b) $9^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{9^3} = \sqrt[4]{3^6} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3^2} = 3\sqrt[4]{9} = 3\sqrt{3}$

c) $625^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{625^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(5^4)^3}} = \frac{1}{125}$

d) $121^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{121^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{121}} = \frac{1}{11}$

e) $16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(2^4)^3}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

f) $(125)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(125)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(5^3)^2}} = \frac{1}{25}$

4. a) $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = 5^{\frac{4-3}{6}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5}$

b) $6^{0{,}8} : 6^{0{,}5} = 6^{0{,}8-0{,}5} = 6^{0{,}3} = \sqrt[10]{6^3} = \sqrt[10]{216}$

c) $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{\sqrt{50}} = 3^{\sqrt{2}+\sqrt{50}} = 3^{\sqrt{2}+5\sqrt{2}} = 3^{6\sqrt{2}}$

d) $4^x : 2^x = (2^2)^x : 2^x = 2^{2x} : 2^x = 2^{2x-x} = 2^x$

e) $\left(6^{\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}+1} + 49^{-\frac{1}{2}} = 6^{\left((\sqrt{2})^2 - 1^2\right)} + \frac{1}{49^{\frac{1}{2}}} =$

$= 6^{2-1} + \frac{1}{\sqrt{49}} = 6 + \frac{1}{7} = \frac{42+1}{7} = \frac{43}{7}$

f) $\left(2^{0{,}5}\right)^{-2} - \left(\frac{6^{\sqrt{3}}}{6}\right)^{\sqrt{3}+1} = 2^{-1} - \left(6^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1} =$

$= \frac{1}{2} - \left(6^{(\sqrt{3})^2 - 12^2}\right) = \frac{1}{2} - 6^{3-1} =$

$= \frac{1}{2} - 36 = \frac{1-72}{2} = -\frac{71}{2}$

5. Erros:

$4^{x+1} = (2^2)^{x+1} = 2^{2x+2}$ e $16^{\frac{x}{2}} = (2^4)^{\frac{x}{2}} = 2^{2x}$

Simplificação correta: $\frac{2^x \cdot 4^{x+1}}{8^{-x} \cdot 16^{\frac{x}{2}}} =$

$= \frac{2^x \cdot (2^2)^{x+1}}{(2^3)^{-x} \cdot (2^4)^{\frac{x}{2}}} = \frac{2^x \cdot 2^{2x+2}}{2^{-3x} \cdot 2^{2x}} =$

$= 2^{x+2x+2} \cdot 2^{3x} \cdot 2^{-2x} = 2^{3x+2+3x-2x} = 2^{4x+2}$

6. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3x}{2}} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-x} \cdot \left(\frac{27}{8}\right) =$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{7x-4}$

b) $\frac{(4 \cdot 10^{-2})^x \cdot 25 \cdot (25)^{-x}}{(8 \cdot 10^{-3})^x \cdot (125)^2 \cdot (125)^{-x}} =$

$= \frac{2^{2x} \cdot 2^{-2x} \cdot 5^{-2x} \cdot 5^2 \cdot 5^{-2x}}{2^{3x} \cdot 2^{-3x} \cdot 5^{-3x} \cdot 5^6 \cdot 5^{-3x}} = 5^{2x-4}$

7. a) Cada termo da sequência pode ser determinado elevando 10 a um expoente igual à posição do termo na sequência.

b) 5º termo: $a_5 = 10^5 = 100\,000$

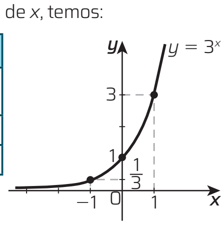
18º termo: $a_{18} = 10^{18}$

100º termo: $a_{100} = 10^{100}$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 18)

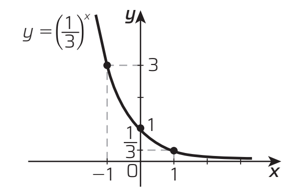
8. a) A função é exponencial com base 3, isto é, com base maior que 1. Calculando y para alguns valores de x, temos:

x	y
−1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3



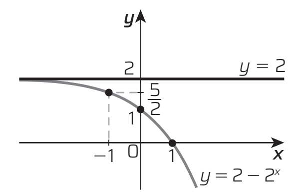
b) A função é exponencial com base $\frac{1}{3}$, isto é, com base menor que 1. Calculando y para alguns valores de x, temos:

x	y
−1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$



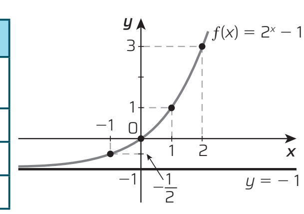
c) A função é exponencial com base 2, isto é, com base maior que 1, multiplicada por −1 e subtraída da função constante igual a 2. Calculando y para alguns valores de x, temos:

x	y
−1	$\frac{5}{2}$
0	1
1	0



9. a) A função é exponencial com base 2, isto é, com base maior que 1, subtraída da função constante igual a 1. Calculando y para alguns valores de x, temos:

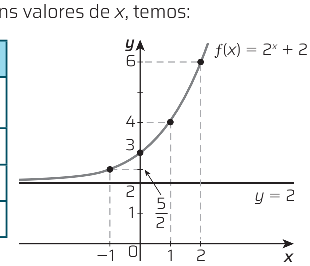
x	y
−1	$-\frac{1}{2}$
0	0
1	1
2	3



$\text{Im}(f) =]-1, +\infty[$

b) A função é exponencial com base 2, isto é, com base maior que 1, adicionada à função constante igual a 2. Calculando y para alguns valores de x, temos:

x	y
−1	$\frac{5}{2}$
0	3
1	4
2	6



$\text{Im}(f) =]2, +\infty[$

10. a) Como $0 < \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$, f é decrescente.

b) Como $\frac{\pi}{2} > 1$, f é crescente.

c) Como $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, f é decrescente.

d) Como $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, f é crescente.

11. a) Para f ser crescente, devemos ter $2m - 1 > 1$.

$2m - 1 > 1 \Rightarrow m > 1$

b) Para f ser decrescente, devemos ter $0 < -3m + 1 < 1$.

$-1 < -3m < 1 - 1$

$0 < 3m < 1$

$0 < m < \frac{1}{3}$

12. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que crescimento exponencial está nas notícias com o significado de crescimento muito grande em um curto período. De maneira análoga, decréscimo exponencial significa um decrescimento muito rápido em um curto período. Verifique também se eles percebem que a expressão "crescimento exponencial", usada na situação que se refere à inteligência artificial, é diferente das outras situações, em que há um modelo matemático por trás da afirmativa de que se trata de um crescimento ou decrescimento exponencial. Nessa citação, o termo "cresce exponencialmente" não está sendo usado no sentido matemático (algo que cresce ou decresce a uma taxa relativa constante), mas como figura de linguagem, que significa "cresce muito rápido".

13. Como a imagem de f é a semirreta $]-1, \infty[$, devemos ter $f(x) = -1 + 2^{x+c}$, pois $a = -1$.

Se $f(1) = 0$, temos:

$1 + 2^{b \cdot 1 + c} = 0 \Rightarrow 2^{b+c} = 2^0 \Rightarrow b + c = 0$

E ainda:

$f(0) = -\frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} = -1 + 2^c \Rightarrow c = -2$

Como $c = -2$, então $b = 2$.

Logo, $abc = -1 \cdot 2 \cdot (-2) = 4$.

Alternativa **a**.

14. $f(x) = b \cdot a^x \Rightarrow f(1) = b \cdot a^1 \Rightarrow 8 = b \cdot a$

$f(2) = b \cdot a^2 \Rightarrow 16 = b \cdot a^2 \Rightarrow 16 = b \cdot a \cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 = 8 \cdot a \Rightarrow a = \frac{16}{8} \Rightarrow a = 2$

Substituindo na equação, temos:

$8 = b \cdot a \Rightarrow 8 = b \cdot 2 \Rightarrow b = \frac{8}{2} \Rightarrow b = 4$

$f(x) = b \cdot a^x \Rightarrow f(x) = 4 \cdot 2^x$

Logo, $f(x) = 4 \cdot 2^x \Rightarrow f(4) = 4 \cdot 2^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(4) = 4 \cdot 16 \Rightarrow f(4) = 64$.

Alternativa **d**.

15. $r(t) = C \cdot 3^{-6t} \Rightarrow r(0) = C \cdot 3^{-6 \cdot 0} \Rightarrow r(0) = C \cdot 3^0 \Rightarrow$

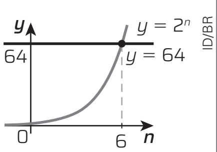
$\Rightarrow r(0) = C$

$\frac{C}{3^1} = C \cdot 3^{-6t} \Rightarrow C \cdot 3^{-1} = C \cdot 3^{-6t} \Rightarrow 3^{-1} = 3^{-6t} \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 = -6t \Rightarrow t = \frac{-1}{-6} \Rightarrow t = \frac{1}{6}$

Alternativa **d**.

16. Resposta pessoal. Primeiro esboçamos o gráfico de $y = 2^n$. Em seguida, traçamos o gráfico de $y = 64$.



Observe que os gráficos se cruzam no ponto (6, 64), que é a solução da equação solicitada.

17. a) $C_1 = 2000(1 + 0{,}12)^1 = 2000(1{,}12) = 2240$

$C_1 =$ R\$ 2 240,00

b) $C_5 = 2000(1{,}12)^5 = 3524{,}68$

$C_5 =$ R\$ 3 524,68

$C_{10} = 2000(1{,}12)^{10} = 6211{,}70$

$C_{10} =$ R\$ 6 211,70

$C_{20} = 2000(1{,}12)^{20} = 19292{,}59$

$C_{20} =$ R\$ 19 292,59

c) $C_1 = 2000(1 + 0{,}09)^1 = 2000(1{,}09)^1 = 2180$

$C_1 =$ R\$ 2 180,00

$C_5 = 2000(1{,}09)^5 = 3077{,}25$

$C_5 =$ R\$ 3 077,25

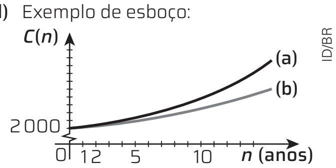
$C_{10} = 2000(1{,}09)^{10} = 4734{,}73$

$C_{10} =$ R\$ 4 734,73

$C_{20} = 2000(1{,}09)^{20} = 11200{,}82$

$C_{20} =$ R\$ 11 200,82

d) Exemplo de esboço:



e) $C = 1000(1 + 0{,}105)^n$

$C = 1000 \cdot 1{,}105^n$

$C \leqslant 5000$

$1000 \cdot 1{,}105^n \leqslant 5000$

$1{,}105^n \leqslant 4000$

$n \leqslant 16$

Logo, o capital será menor ou igual a R\$ 5 000,00 durante 16 anos.

18. Para $x = 1$, temos $y = 0{,}2$; logo:

$0{,}2 = k \cdot 1^r \Rightarrow k = 0{,}2$

Se $x = 32$, temos $y = 0{,}8$; logo:

$0{,}8 = 0{,}2 \cdot 32^r \Rightarrow 2^2 = 2^{5r} \Rightarrow 2 = 5r \Rightarrow r = \frac{2}{5}$

Quando $y = 1{,}8$, temos:

$1{,}8 = 0{,}2 \cdot x^{\frac{2}{5}}$

$x^{\frac{2}{5}} = 3^2$

$\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^5 = (3^2)^5$

$x = 3^5$

Portanto, quando y corresponde a 1,8 t, x corresponderá a 243 kg.

19. $v(t) = 2500 \cdot (1{,}03)^t$

$t \rightarrow$ anos

$m \rightarrow$ meses;

Temos que: $v(t) = 2500 \cdot (1{,}03)^t \Rightarrow v(m) = 2500 \cdot (1{,}03)^{\frac{m}{12}}$.

Alternativa **e**.

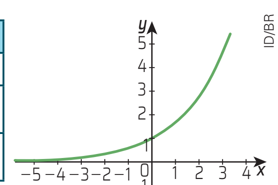
20. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

Consideremos as funções f e g em $\mathbb{R}$, de modo que tenhamos $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ (crescente) e $g(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ (decrescente).

Vamos determinar alguns pontos delas e fazer um esboço de seus gráficos.

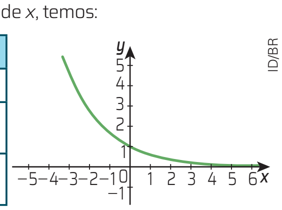
A função f é exponencial com base $\frac{5}{3}$, isto é, com base maior que 1. Calculando $f(x)$ para alguns valores de x, temos:

x	$f(x)$
0	1
1	$\frac{5}{3}$
2	$\frac{25}{9}$



A função g é exponencial com base $\frac{3}{5}$, isto é, com base menor que 1. Calculando $g(x)$ para alguns valores de x, temos:

x	$g(x)$
0	1
1	$\frac{3}{5}$
2	$\frac{9}{25}$



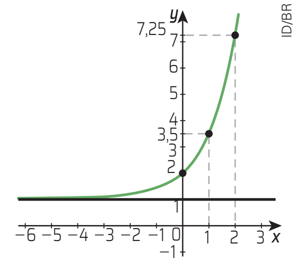
21. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

Como a função exponencial sempre deve ter imagem $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$, podemos considerar qualquer função exponencial adicionada à função constante 1. Assim:

a) Consideremos a função f em $\mathbb{R}$, de modo que $f(x) = 1 + 2{,}5^x$.

b) A função f é exponencial com base 2,5, isto é, com base maior que 1. Calculando $f(x)$ para alguns valores de x, temos:

x	$f(x)$
0	2
1	3,5
2	7,25



TECNOLOGIA (P. 19)

1. a) A diferença entre eles é o formato: um é uma reta, o outro é uma parábola e o outro é uma curva crescente.

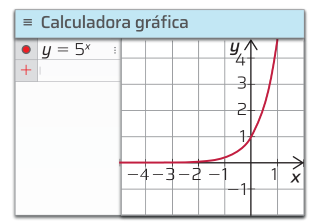
b) Observando os gráficos, vemos que as funções se intersectam no ponto (2, 4), ou seja, quando x assume valor igual a 2, o valor de y será 4 para qualquer uma das funções. Observe:

$f(x) = 2x \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2 = 4$

$g(x) = x^2 \Rightarrow g(2) = 2^2 = 4$

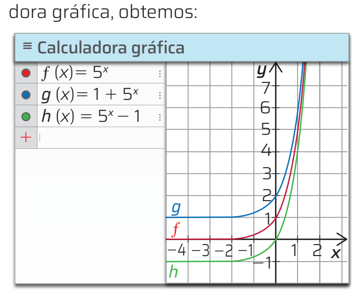
$h(x) = 2^x \Rightarrow h(2) = 2^2 = 4$

2. Construindo o gráfico de $f(x) = 5^x$, obtemos:



a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que o gráfico de g será parecido com o gráfico de f, porém acrescido de uma unidade nos valores das ordenadas; e que o gráfico de h, por sua vez, será parecido com o gráfico de f, porém subtraído de uma unidade nos valores das ordenadas.

b) Construindo os gráficos em uma calculadora gráfica, obtemos:



É possível perceber que o gráfico de g é o gráfico de f, transladado uma unidade para cima, e que o gráfico de h é o gráfico de f transladado uma unidade para baixo.

3. a) Resposta pessoal. Os estudantes podem atribuir valores para x na função $f(x) = 5^x$, compará-los com uma função $j(x) = -5^x$ e, finalmente, compará-los com a função $i(x) = 1 - 5^x$. Por exemplo:

x	$f(x)$
−2	$\frac{1}{25}$
−1	$\frac{1}{5}$
0	1
1	5
2	25

x	$j(x)$
−2	$-\frac{1}{25}$
−1	$-\frac{1}{5}$
0	−1
1	−5
2	−25

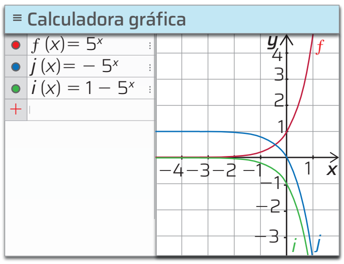
x	$i(x)$
−2	$1 - \frac{1}{25}$
−1	$1 - \frac{1}{5}$
0	$1 - 1 = 0$
1	$1 - 5 = -4$
2	$1 - 25 = -24$

Ao fazer essas comparações, os estudantes devem perceber que os pontos da função f são simétricos aos pontos da função j

em relação ao eixo x e que os pontos da função i têm ordenadas com uma unidade a mais que os pontos da função j.

b) Construindo os gráficos em uma calculadora gráfica, obtemos:

ID/BR

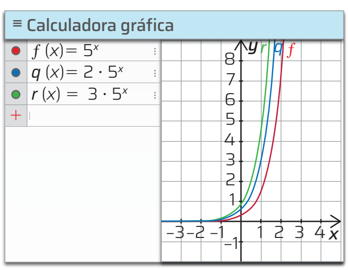


É possível observar que a função j é uma reflexão da função f em relação ao eixo x e que, após a reflexão, a função i é uma translação da função j de uma unidade para cima.

4. a) Resposta pessoal. Os estudantes podem inferir que os gráficos de q e r são parecidos com o gráfico de f, porém as ordenadas terão seus valores multiplicados por 2 e 3, respectivamente.

b) Construindo os gráficos, obtemos:

ID/BR



Podemos observar que os gráficos de f, q e r intersectam o eixo y respectivamente em (0, 1), (0, 2) e (0, 3) e isso faz com que a parte superior do gráfico se aproxime do eixo y.

5. A função m é uma função de 1º grau; já a função n é uma função exponencial. O gráfico de m é uma reta, enquanto o de n é uma curva exponencial.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 25)

22. a) $5^{x^2} \cdot 5^4 = 5^{5x}$

$5^{x^2+4} = 5^{5x}$

$x^2 + 4 = 5x$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 4 \end{cases}$

Portanto, $S = \{1, 4\}$.

b) $7^{2x-1} = 7^x \cdot 7^3$

$7^{2x-1} = 7^{x+3}$

$2x - 1 = x + 3$

$2x - x = 3 + 1$

$x = 4$

Portanto, $S = \{4\}$.

c) $9^{2x} = 27^{x-4}$

$(3^2)^{2x} = (3^3)^{x-4}$

$3^{4x} = 3^{3x-12}$

$4x = 3x - 12$

$x = -12$

Portanto, $S = \{-12\}$.

d) $2^x + 2^{x+3} - 2^{x-1} = 34$

$2^x + 2^x \cdot 2^3 - 2^x \cdot 2^{-1} = 34$

$2^x + 2^x \cdot 8 - \frac{2^x}{2} = 34$

Fazendo 2 elevado a x igual a y, temos:

$y + 8y - \frac{y}{2} = 34$

$2y + 16y - y = 68$

$17y = 68$

$y = 4$

Logo, $2^x = 4$, ou seja:

$2^x = 2^2$

$x = 2$

Portanto, $S = \{2\}$.

e) $5^{x-1} - 5^x + 5^{x+1} = 2625$

$5^x \cdot 5^{-1} - 5^x + 5^x \cdot 5 = 2625$

$\frac{5^x}{5} - 5^x + 5^x \cdot 5 = 2625$

Fazendo $5^x = y$, temos:

$\frac{y}{5} - y + 5y = 2625$

$y - 5y + 25y = 13125$

$21y = 13\,125$

$y = \frac{13\,125}{21} = 625$

Logo, $5^x = 625$, ou seja:

$5^x = 5^4$

$x = 4$

Portanto, $S = \{4\}$.

f) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$

$3^x \cdot 3^{-1} - 3^x + 3^x \cdot 3 = 63$

Fazendo $3^x = y$, temos:

$\frac{y}{3} - y + 3y = 63$

$y - 3y + 9y = 189$

$7y = 189$

$y = \frac{189}{7} = 27$

Logo, $3^x = 27$, ou seja:

$3^x = 3^3$

$x = 3$

Portanto, $S = \{3\}$.

g) $2^{x+2} + 5^x = 3 \cdot 5^x - 2^x$

$2^x \cdot 2^2 + 5^x = 5^x \cdot 3 - 2^x$

$4 \cdot 2^x + 5^x = 5^x \cdot 3 - 2^x$

$4 \cdot 2^x + 2^x = 3 \cdot 5^x - 5^x$

$5 \cdot 2^x = 2 \cdot 5^x$

$\frac{2^x}{5^x} = \frac{2}{5}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{2}{5}$

$x = 1$

Portanto, $S = \{1\}$.

h) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

$(3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

Fazendo $3^x = y$, temos:

$y^2 - 12y + 27 = 0$

$\begin{cases} y_1 + y_2 = 12 \\ y_1 \cdot y_2 = 27 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 3 \text{ e } y_2 = 9$

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

Portanto, $S = \{1, 2\}$.

i) $8 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 1 = 0$

$8 \cdot (2^x)^2 + 7 \cdot 2^x - 1 = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos:

$8y^2 + 7y - 1 = 0$ ($a = 8$; $b = 7$; $c = -1$)

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1)$

$\Delta = 49 + 32 = 81$

$y = \frac{-7 \pm 9}{2 \cdot 8}$

$y_1 = \frac{-7 + 9}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

$y_2 = \frac{-7 - 9}{16} = \frac{-16}{16} = -1$

Logo:

$2^x = -1$ (não convém)

$2^x = \frac{1}{8}$

$2^x = 8^{-1}$

$2^x = 2^{-3}$

$x = -3$

Portanto, $S = \{-3\}$.

j) $5 \cdot 25^x - 6 \cdot 5^x + 1 = 0$

$5 \cdot (5^2)^x - 6 \cdot 5^x + 1 = 0$

Fazendo $5^x = y$, temos:

$5y^2 - 6y + 1 = 0$ ($a = 5$; $b = -6$; $c = 1$)

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1$

$\Delta = 36 - 20 = 16$

$y = \frac{6 \pm 4}{2 \cdot 5}$

$y_1 = \frac{6 + 4}{10} = \frac{10}{10} = 1$

$y_2 = \frac{6 - 4}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Logo:

$5^x = 1$

$5^x = 5^0$

$x = 0$

$5^x = \frac{1}{5}$

$5^x = 5^{-1}$

$x = -1$

Portanto, $S = \{-1, 0\}$.

23. $\begin{cases} (0{,}2)^{5x+y} = 5 \\ (0{,}5)^{2x-y} = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} (5^{-1})^{5x+y} = 5 \\ (2^{-1})^{2x-y} = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x + y = -1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$

$x = -\frac{2}{7}$ e $y = \frac{3}{7}$

Alternativa **e**.

24. a) $7^x = 343$

$7^x = 7^3$

$x = 3$

b) $5^x = 625$

$5^x = 5^4$

$x = 4$

25. $\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{5} = \sqrt[3]{5} \cdot 0{,}04^{x-2} \Rightarrow \frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{5} =$

$= \sqrt[3]{5} \cdot \left[(0{,}2)^2\right]^{x-2} \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{x+0{,}5}}{5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(5^{-1})^{x+0{,}5}}{5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot (5^{-1})^{2x-4} \Rightarrow 5^{-x-0{,}5-1} =$

$= 5^{-2x+4+\frac{1}{3}} \Rightarrow -x - 1{,}5 = -2x + \frac{13}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{26 + 9}{6} \Rightarrow x = \frac{35}{6} < 6.$

Portanto, o valor de x está compreendido entre 5 e 6. Logo, alternativa **e**.

26. $3^{2x} + 3^{2x+2} + 3^{2x+4} = 819$

$3^{2x}(1 + 9 + 81) = 819$

$3^{2x} \cdot 91 = 819$

$(3^x)^2 = \frac{819}{91}$

$3^x = \sqrt{\frac{819}{91}}$

$3^x = 3$

$3^x = 3^1$

$x = 1$

Portanto, os três expoentes pares são 2, 4 e 6.

27. $\frac{144^x + 324^x}{64^x + 729^x} = \frac{6}{7} \Rightarrow \frac{2^{4x} \cdot 3^{2x} + 2^{2x} \cdot 3^{4x}}{2^{6x} + 3^{6x}} =$

$= \frac{6}{7} \Rightarrow \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{6x} + 1} = \frac{6}{7}$

Para $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} > 0$, $\frac{y^2 + y}{y^3 + 1} = \frac{6}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y(y + 1)}{(y + 1)(y^2 - y + 1)} = \frac{6}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow y + 1 \neq 0$, $\frac{y}{y^2 - y + 1} = \frac{6}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6y^2 - 13y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ ou $y = \frac{2}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Soma dos módulos: $S = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| \Rightarrow S = 1.$

Alternativa **a**.

28. $f(t) = c \cdot 3^{2t} \Rightarrow f(0) = c \cdot 3^{2 \cdot 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0) = c \cdot 3^0 \Rightarrow f(0) = c$

$f(t) = 9c \Rightarrow c \cdot 3^{2t} = 9c \Rightarrow$

$\Rightarrow c \cdot 3^{2t} = 3^2 \cdot c \Rightarrow 3^{2t} = 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = \frac{2}{2} \Rightarrow t = 1$ hora

Alternativa **b**.

29. $\frac{4 \cdot 2^x}{4^x} = \frac{1}{64} \Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^x = \frac{1}{64} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{256} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \Rightarrow x = 8$

Alternativa **e**.

30. $18^x \cdot 24^y = 6^{10} \Rightarrow (3^2 \cdot 2)^x \cdot (3 \cdot 2^3)^y =$

$= (2 \cdot 3)^{10} \Rightarrow 3^{2x} \cdot 2^x \cdot 3^y \cdot 2^{3y} = 2^{10} \cdot 3^{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{2x+y} \cdot 2^{x+3y} = 3^{10} \cdot 2^{10}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 2x \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

Substituindo y na equação, temos:

$x + 3y = 10 \Rightarrow x + 3(10 - 2x) = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 30 - 6x = 10 \Rightarrow -x + 6x =$

$= 30 - 10 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{5} \Rightarrow x = 4$

Substituindo o valor de x na equação, temos:

$y = 10 - 2x \Rightarrow y = 10 - 2 \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 10 - 8 \Rightarrow y = 2$

Alternativa **a**.

31. a) Meia-vida equivale a 1 hora = 60 minutos. Então:

$q(60) = \frac{300}{2} = 150$

$150 = 300 \cdot 2^{-k \cdot 60}$

$k = \frac{1}{60}$

Assim:

$q(30) = 300 \cdot 2^{-\frac{1}{60} \cdot 30}$

$q(30) = 150\sqrt{2}$

Portanto, há $150\sqrt{2}$ mg no organismo desse animal imediatamente antes de a segunda dose ser aplicada.

b) Se 200 mg da droga estiver no animal, ele ficará sedado. Para que ele fique sedado mais de 30 minutos, temos:

$q(30) \cdot 200$

$q_0 \cdot 2^{-\frac{1}{60} \cdot 30} \cdot 200$

$q_0 \cdot 200\sqrt{2}$

Logo:

$200\sqrt{2} - 150\sqrt{2} = 50\sqrt{2}$

Portanto, $50\sqrt{2}$ mg é a quantidade mínima da droga que esse animal deve receber.

32. $y = 200\,000{,}00$

$y = V \cdot a^x \Rightarrow 200\,000 = V \cdot a^0 \Rightarrow 200\,000 =$

$= V \cdot 1 \Rightarrow V = 200\,000$

$y = V \cdot a^x \Rightarrow 100\,000 = 200\,000 \cdot a^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^4 = \frac{100\,000}{200\,000} \Rightarrow a^4 = \frac{1}{2}$

$y = V \cdot a^8 \Rightarrow y = 200\,000 \cdot (a^4)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 200\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow y = 200\,000 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow y =$ R\$ 50.000,00

Alternativa **c**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 27)

33. a) $3^{4x-2} < 3^{2x+8}$

$4x - 2 < 2x + 8$

$4x - 2x < 8 + 2$

$2x < 10$

$x < 5$

Portanto:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

b) $5^{3x-1} > 5^{x+7}$

$3x - 1 > x + 7$

$3x - x > 7 + 1$

$2x > 8$

$x > 4$

Portanto:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

c) $10^{x^2-3x} \leqslant 0{,}01$

$10^{x^2-3x} \leqslant 10^{-2}$

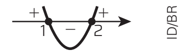
$x^2 - 3x \leqslant -2$

$x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$

Resolvendo a equação correspondente e fazendo a análise de sinal, temos:

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 2$



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

d) $7^{x^2} \cdot 7 \geqslant 7^{4x} \cdot 7^{-2}$

$7^{x^2+1} \geqslant 7^{4x-2}$

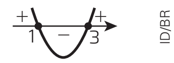
$x^2 + 1 \geqslant 4x - 2$

$x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$

Resolvendo a equação correspondente e fazendo a análise de sinal, temos:

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 3$



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 3\}$.

e) $(0{,}1)^{5x-1} < (0{,}1)^{2x+11}$

Como a base da potência é 0,1 e $0 < 0{,}1 < 1$, então a desigualdade muda de sentido. Assim:

$5x - 1 > 2x + 11$

$5x - 2x > 1 + 11$

$3x > 12$

$x > 4$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

f) $(0{,}2)^{4x+3} > (0{,}2)^{-x+9}$

Como a base da potência é 0,2 e $0 < 0{,}2 < 1$, então a desigualdade muda de sentido. Assim:

$4x + 3 < -x + 9$

$5x < 6$

$x < \frac{6}{5}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{6}{5}\right\}$.

g) $(0{,}6)^{x^2} \leqslant (0{,}6)^4$

Como a base da potência é 0,6 e $0 < 0{,}6 < 1$, então a desigualdade muda de sentido. Assim:

$x^2 \geqslant 4$

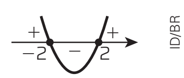
$x^2 - 4 \geqslant 0$

Resolvendo a equação correspondente e fazendo a análise de sinal, temos:

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

h) $(0{,}9)^{x^2} \geqslant (0{,}1)^{x+2}$

Como a base da potência é 0,9 e $0 < 0{,}9 < 1$, então a desigualdade muda de sentido. Assim:

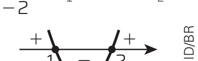
$x^2 \leqslant x + 2$

$x^2 - x - 2 \leqslant 0$

Resolvendo a equação correspondente e fazendo a análise de sinal, temos:

$x^2 - x - 2 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 2$



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

34. a) $2^{x+1} + 2^x \geqslant 12$

$2^x \cdot 2 + 2^x \geqslant 3 \cdot 4$

$3 \cdot 2^x \geqslant 3 \cdot 4$

$2^x \geqslant 4$

$2^x \geqslant 2^2$

$x \geqslant 2$

Portanto, $S = [2, +\infty[$.

b) $3^{x+1} - 3^x + 3^{x-1} \leqslant 21$

$3^x \cdot 3 - 3^x + 3^x \cdot 3^{-1} \leqslant 21$

Fazendo $3^x = y$, com $y > 0$, temos:

$3y - y + \frac{y}{3} \leqslant 21$

$9y - 3y + y \leqslant 63$

$7y \leqslant 63 \Rightarrow y \leqslant 9$

Então: $3^x \leqslant 9$

$3^x \leqslant 9$

$3^x \leqslant 3^2$

$x \leqslant 2$

Portanto, $S =]-\infty, 2]$.

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + 1$

$\frac{1}{3^x} \cdot 2 \geqslant 3^x + 1$

Fazendo $3^x = y$, com $y > 0$, temos:

$\frac{2}{y} \geqslant y + 1$

$\frac{2}{y} - y - 1 \geqslant 0$

$\frac{2 - y^2 - y}{y} \geqslant 0$

Como y é não nulo, temos:

$2 - y^2 - y = 0$

Resolvendo a equação correspondente:

$2 - y^2 - y \geqslant 0$

$-y^2 - y + 2 = 0$ ($a = -1$; $b =$
$= -1$; $c = 2$)

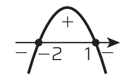
$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 1 + 8 = 9$

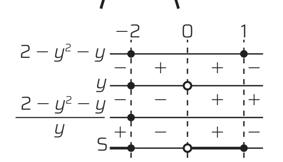
$y = \frac{1 \pm 3}{2 \cdot (-1)}$

$y_1 = \frac{1 + 3}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$

$y_2 = \frac{1 - 3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$

Fazendo o estudo de sinal:





$y < -2 \Rightarrow 3^x < -2$; não convém, pois $3^x > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

$0 < y \leqslant 1 \Rightarrow 0 < 3^x \leqslant 1 \Rightarrow 3^x > 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

$3^x \leqslant 1 \Rightarrow 3^x \leqslant 3^0 \Rightarrow x \leqslant 0$

Portanto, $S =]-\infty, 0]$.

35. a) $(0{,}2)^x - 0{,}008 \geqslant 0$

$(0{,}2)^x \geqslant 0{,}008$

$(0{,}2)^x \geqslant (0{,}2)^3$

Como a base da potência é 0,2 e $0 < 0{,}2 < 1$, então a desigualdade muda de sentido. Assim:

$x \leqslant 3$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$.

b) $(0{,}5)^x - 0{,}25 \geqslant 0$

$(0{,}5)^x \geqslant 0{,}25$

$(0{,}5)^x \geqslant (0{,}5)^2$

Como a base da potência é 0,5 e $0 < 0{,}5 < 1$, então a desigualdade muda de sentido. Assim:

$x \leqslant 2$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$.

c) Como a raiz tem índice 3, temos: $D(f) = \mathbb{R}$.

d) $5^x - 125 \neq 0$

$5^x \neq 125$

$5^x \neq 5^3$

$x \neq 3$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$.

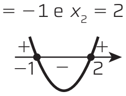
36. $9^{\sqrt{x}} - 8\cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0 \Rightarrow (3^2)^{\sqrt{x}} - 8\cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0 \Rightarrow (3^{\sqrt{x}})^2 - 8\cdot 3^{\sqrt{x}} - 9 = 0$
Fazendo $3^{\sqrt{x}} = y$, temos:
$y^2 - 8y - 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4\cdot(1)\cdot(-9) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta = 64 + 36 \Rightarrow \Delta = 100 \Rightarrow y = \frac{8 \pm 10}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1 = \frac{8+10}{2}$ e $y_2 = \frac{8-10}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{18}{2}$
e $y_2 = \frac{-2}{2} \Rightarrow y_1 = 9$ e $y_2 = -1$
Com isso, para $y = -1$, temos que $3^{\sqrt{x}} = -1$ não convém.
Para $y = 9$, temos:
$3^{\sqrt{x}} = 9 \Rightarrow 3^{\sqrt{x}} = 3^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 2^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 4$
Logo, $k = 4$ está entre $3{,}5 < k < 5{,}5$.
Alternativa **d**.

37. $(0{,}5)^{x^2} \geqslant (0{,}25)^{2x} \Rightarrow (0{,}5)^{x^2} \geqslant \left[(0{,}5)^2\right]^{2x} \Rightarrow$
$\Rightarrow (0{,}5)^{x^2} \geqslant (0{,}5)^{4x}$
Estudando os sinais, temos:
$x^2 \leqslant 4x \Rightarrow x^2 - 4x \leqslant 0 \Rightarrow x(x-4) \leqslant 0$
De acordo com o estudo do sinal, temos:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 4\}$
Alternativa **a**.

38. $4^x - 10\cdot 2^x + 16 = 0 \Rightarrow (2^2)^x - 10\cdot 2^x + 16 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 10\cdot 2^x + 16 = 0$
Fazendo $2^x = y$, temos: $y^2 - 10y + 16 = 0 \Rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4\cdot(1)\cdot(16) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta = 100 - 64 \Rightarrow \Delta = 36 \Rightarrow y = \frac{10 \pm 6}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1 = \frac{10+6}{2}$ e $y_2 = \frac{10-6}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{16}{2}$
e $y_2 = \frac{4}{2} \Rightarrow y_1 = 8$ e $y_2 = 2$
Com isso, para $y = 8$: $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$
Para $y = 2$, temos: $2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1$
Logo, fazendo o estudo dos sinais, temos que o número de soluções que satisfazem esta inequação é 1. Alternativa **d**.

39. **a)** O erro dessa resolução está na passagem da 4ª para a 5ª linha: na desigualdade $2x > -6$, a continuação deveria ser $x > -3$, e não $x > -\frac{1}{3}$.
A resposta correta é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$.
b) O erro dessa resolução está na passagem da 2ª para a 3ª linha: como a base é um número entre 0 e 1, temos $3x + 1 \geqslant 2$, e não $3x + 1 \leqslant 2$.
Assim:
$3x + 1 \geqslant 2$
$3x \geqslant 1$
$x \geqslant \frac{1}{3}$
A resposta correta é
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{3}\right\}$.

40. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:
$(4^x)^{x-1} \geqslant 16$
$(2^2)^{x^2-x} \geqslant 2^4$
$2^{2x^2-2x} \geqslant 2^4$
$2x^2 - 2x \leqslant 4$
$2x^2 - 2x - 4 \leqslant 0$
(O erro está no sinal invertido dessas duas últimas desigualdades.)
Resolvendo a equação correspondente, temos:
$2x^2 - 2x - 4 = 0$
$\begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases} \rightarrow x_1 = -1$ e $x_2 = 2$



ID/BR

Portanto: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$ (essa é a resposta errada).
A resposta correta é:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 28)

1. a) 1 000
b) 10 000
c) 0,01
d) 0,001
e) 125
f) 625
g) $\frac{1}{5} = 0{,}2$
h) $\frac{1}{25} = 0{,}04$
i) $\frac{1}{125} = 0{,}008$

2. a) $2^{\blacksquare} = 8$
$2^{\blacksquare} = 2^3$
Portanto, $\blacksquare = 3$
b) $2^{\blacksquare} = 64$
$2^{\blacksquare} = 2^5$
Portanto, $\blacksquare = 6$
c) $2^{\blacksquare} = \frac{1}{16}$
$2^{\blacksquare} = 2^{-4}$
Portanto, $\blacksquare = -4$
d) $2^{\blacksquare} = 0{,}25$
$2^{\blacksquare} = \frac{1}{4}$
$2^{\blacksquare} = 2^{-2}$
Portanto, $\blacksquare = -2$
e) $3^{\blacksquare} = 27$
$3^{\blacksquare} = 3^3$
Portanto, $\blacksquare = 3$
f) $3^{\blacksquare} = 81$
$3^{\blacksquare} = 3^4$
Portanto, $\blacksquare = 4$

3. a) $\blacksquare^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
Portanto, $\blacksquare = \frac{1}{2}$
b) $\blacksquare^3 = 64 = 4^3$
Portanto, $\blacksquare = 4$
c) $\blacksquare^{-1} = 4 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$
Portanto, $\blacksquare = \frac{1}{4}$
d) $\blacksquare^{-1} = 0{,}2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$
Portanto, $\blacksquare = 5$
e) $\blacksquare^{-2} = 9 = 3^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
Portanto, $\blacksquare = \frac{1}{3}$
f) $\blacksquare^{-2} = 0{,}25 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$
Portanto, $\blacksquare = 2$

PARA RECORDAR (P. 28)

1. Se $A = \frac{x-y}{x}$, $x = \frac{2}{5}$ e $y = \frac{1}{2}$, temos:
$A = \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{4-5}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{-1}{10}}{\frac{2}{5}} =$
$= -\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{2} = -\frac{1}{4} = -0{,}25$

2. Vamos substituir alguns valores de x e y para determinar os coeficientes dessas funções:
- $f(x) = ax + b$
Para $x = -3$, $f(x) = 0$:
$0 = f(-3) = a\cdot(-3) + b \Rightarrow$
$\Rightarrow -3a + b = 0$
Para $x = 0$, $f(x) = 3$:
$3 = f(0) = a\cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$
Substituindo b por 3 em
$-3a + b = 0$, temos:
$-3a + 3 = 0$
$-3a = -3$
$a = 1$
Assim: $f(x) = x + 3$
- $g(x) = mx + n$
Para $x = -1$, $g(x) = 2$:
$2 = g(-1) = m(-1) + n \Rightarrow$
$\Rightarrow -m + n = 2$
Para $x = 0$, $f(x) = 0$:
$0 = g(0) = m\cdot 0 + n \Rightarrow n = 0$
Substituindo n por 0 em $-m + n = 2$, temos:
$-m = 2 \Rightarrow m = -2$
Assim: $g(x) = -2x$
Portanto: $\frac{a-m}{b+n} = \frac{1+2}{3+0} = \frac{3}{3} = 1$

3. Nas condições dadas, podemos obter os triângulos com lados: (1, 6, 6), (2, 6, 6), (3, 6, 6), (4, 6, 6), (5, 6, 6), (6, 6, 6), (5, 5, 6), (5, 4, 6), (5, 3, 6), (5, 2, 6), (4, 3, 6) e (4, 4, 6). Daí:
a) Um triângulo equilátero.
b) Quatro triângulos escalenos.
c) Oito triângulos isósceles (considerando que todo triângulo equilátero é isósceles).

4. a) $x^2 = 96^2 + 180^2$
$x^2 = 9216 + 32400$
$x^2 = 41616$ (com $x > 0$)
$x = 204$
b) $10^2 = x^2 + (4\sqrt{5})^2$
$100 = x^2 + 16\cdot 5$
$x^2 = 100 - 80$ (com $x > 0$)
$x = 2\sqrt{5}$
$(4\sqrt{5})^2 = 8^2 + y^2$
$16\cdot 5 = 64 + y^2$
$y^2 = 80 - 64 = 16$ (com $y > 0$)
$y = 4$

5. a) Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Os quadriláteros *ABCD* e *XYZW*.
b) Resposta pessoal. Exemplo de resposta: As retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.
c) Resposta pessoal. Exemplo de resposta: As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CZ}$.
d) Resposta pessoal. Exemplo de resposta: As retas $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{YW}$.
e) Resposta pessoal. Exemplo de resposta: As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AX}$.
f) Paralelogramo.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 29)

1. Considerando x, y e z o número de cédulas de R\$ 5,00, R\$ 10,00 e R\$ 50,00, respectivamente, temos:
$5x + 10y + 50z = 100$
$x + 2y + 10z = 20$
$10z = 20 - x - 2y$
$z = \frac{20 - x - 2y}{10}$
$z = 2 - \frac{x}{10} - \frac{y}{5}$
Assim, os termos da forma
$\left(x, y, 2 - \frac{x}{10} - \frac{y}{5}\right)$, com $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant x \leqslant 20$, $y \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant y \leqslant 10$ e $z \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant z \leqslant 2$, são soluções do problema. Além disso, x é par.
Temos, então, as soluções do quadro:

x	y	z
0	0	2
0	5	1
0	10	0
2	4	1
2	9	0
4	3	1
4	8	0
6	2	1
6	7	0
8	1	1
8	6	0
10	0	1
10	5	0
12	4	0
14	3	0
16	2	0

x	y	z
18	1	0
20	0	0

Isto é, há 18 maneiras de o caixa eletrônico fazer o pagamento.

(Há outras maneiras de chegar a essa resposta.)

2. 17 triângulos.

MATEMÁTICA E PANDEMIA (P. 30)

Conectando ideias

1. Para facilitar a interpretação da função, podemos montar um quadro como o mostrado a seguir.

Dia	Quantidade de infectados
1	$1 = 2^0$
2	$2 = 2^1$
3	$4 = 2^2$
4	$8 = 2^3$
5	$16 = 2^4$
$\vdots$	$\vdots$
15	$16\,384 = 2^{14}$
$\vdots$	$\vdots$
x	$f(x) = 1 \cdot 2^{x-1}$

Na função, k representa o total de infectados no primeiro dia; a representa o comportamento do vírus (fator de infecção), por exemplo, dobrar, triplicar; x representa os dias; e $f(x)$ representa a quantidade de pessoas infectadas no dia.

2. O erro refere-se ao número de casos no nono dia. Como o número de casos dobra a cada três dias, temos:

1º dia - 1 caso: 2^0 — 6º dia - 4 casos: 2^2

3º dia - 2 casos: 2^1 — 9º dia - 8 casos: 2^3

Portanto, o trecho corrigido ficaria: "No primeiro dia, você tem 1 caso; no terceiro dia, terá 2 casos. Levou três dias para dobrar o valor inicial. No sexto dia, serão 4 casos, no nono dia, serão 8, e assim por diante".

3. Se possível, oriente os estudantes a realizar uma pesquisa sobre as relações existentes entre a dispersão de epidemias e as características ambientais, econômicas, sociais e científicas de outros países, para que eles analisem como diferentes países, desenvolvidos e emergentes, por exemplo, lidaram com a pandemia em 2020. Incentive-os a relacionar o nível de desenvolvimento de um país às medidas econômicas e políticas de saúde adotadas. Além disso, verifique se eles trazem informações de como é o incentivo e o investimento em pesquisas científicas nesses países. Caso considere oportuno, convide um professor da área das Ciências Humanas e Sociais Aplicadas ou da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias para participar de uma roda de conversa sobre o tema.

Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2 LOGARITMO E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 37)

1. a) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{8}{125}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{2^3}{5^3}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^3$

$x = 3$

Portanto, $\log_{\frac{2}{5}} \frac{8}{125} = 3$.

b) $32^x = 16$

$(2^5)^x = 2^4$

$5x = 4$

$x = \frac{4}{5}$

Portanto, $\log_{32} 16 = \frac{4}{5}$.

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$

$(3^{-1})^x = (3)^3$

$-x = 3$

$x = -3$

Portanto, $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$.

d) $8^x = 4$

$(2^3)^x = 2^2$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

Portanto, $\log_8 4 = \frac{2}{3}$.

2. a) Temos que $\log_x 256 = 4$. Precisamos determinar a base, então:

$x^4 = 256$

$x^4 = 4^4$

$x = 4$

Portanto, a base é 4 e $\log_4 256 = 4$.

b) Temos que $\log_x 729 = 6$. Precisamos determinar a base, então:

$x^6 = 729$

$x^6 = 3^6$

$x = 3$

Portanto, a base é 3 e $\log_3 729 = 6$.

3. a) $\log_5 5 = x$

$5^x = 5$

$5^x = 5^1$

$x = 1$

Portanto, $\log_5 5 = 1$.

b) $\log_5 25 = x$

$5^x = 25$

$5^x = 5^2$

$x = 2$

Portanto, $\log_5 25 = 2$.

c) $\log_5 \frac{1}{5} = x$

$5^x = \frac{1}{5}$

$5^x = 5^{-1}$

$x = -1$

Portanto, $\log_5 \frac{1}{5} = -1$.

d) $\log_5 625 = x$

$5^x = 625$

$5^x = 5^4$

$x = 4$

Portanto, $\log_5 625 = 4$.

4. a) $\log_2 256 = x$

$2^x = 256$

$2^x = 2^8$

Portanto, $\log_2 256 = 8$.

b) $\log_{\frac{1}{3}} 243 = x$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 243$

$(3^{-1})^x = 3^5$

$-x = 5$

$x = -5$

Portanto, $\log_{\frac{1}{3}} 243 = -5$.

c) $\log_{\frac{5}{3}} \frac{27}{125} = x$

$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{27}{125}$

$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3^3}{5^3}$

$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^3$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{-x} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$

$-x = 3$

$x = -3$

Portanto, $\log_{\frac{5}{3}} \frac{27}{125} = -3$.

d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{729}{64} = x$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{729}{64}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3^6}{2^6}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^6$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-x} = \left(\frac{3}{2}\right)^6$

$-x = 6$

$x = -6$

Portanto, $\log_{\frac{2}{3}} \frac{729}{64} = -6$.

e) $\log_{2\sqrt{2}} 32 = x$

$(2\sqrt{2})^x = 32$

$\left(2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^5$

$\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^x = 2^5$

$\frac{3x}{2} = 5$

$3x = 10$

$x = \frac{10}{3}$

Portanto, $\log_{2\sqrt{2}} 32 = \frac{10}{3}$.

f) $\log_{10} 0{,}0001 = x$

$10^x = 0{,}0001$

$10^x = 10^{-4}$

$x = -4$

Portanto, $\log_{10} 0{,}0001 = -4$.

5. Temos as seguintes condições de existência para que $\log_a b$ esteja definido:

Base: $a > 0$ e $a \neq 1$.

Logaritmando: $b > 0$.

a) $\log_2(2x - 1)$

Condição de existência do logaritmando:

$2x - 1 > 0$

$2x > 1$

$x > \frac{1}{2}$

Portanto, para $\log_2(2x - 1)$ estar definido, a condição é $x > \frac{1}{2}$.

b) $-4x + 8 > 0$

$4x < 8$

$x < 2$

c) Condição de existência da base:

$3 - x > 0$

$x < 3$

$3 - x \neq 1$

$x \neq 2$

Condição de existência do logaritmando:

$x - 1 > 0$

$x > 1$

Portanto, para $\log_{3-x}(x - 1)$ estar definido, as condições são $1 < x < 3$ e $x \neq 2$.

d) Condição de existência da base:

$x - 2 > 0$

$x > 2$

$x - 2 \neq 1$

$x \neq 3$

Condição de existência do logaritmando:

$-2x + 8 > 0$

$x < 4$

Portanto, para $\log_{x-2}(-2x + 8)$ estar definido, as condições são $2 < x < 4$ e $x \neq 3$.

6. a) Condição de existência: $x > 0$.

$\log_5 x = \frac{4}{3}$

$5^{\frac{4}{3}} = x$

$x = \sqrt[3]{5^4}$

$x = 5\sqrt[3]{5}$ satisfaz a condição $x > 0$.

b) Condição de existência:

$2x - 1 > 0$

$x > \frac{1}{2}$

$\log_4(2x - 1) = \frac{1}{2}$

$4^{\frac{1}{2}} = 2x - 1$

$\sqrt{4} = 2x - 1$

$x = \frac{3}{2}$ satisfaz a condição $x > \frac{1}{2}$.

c) Condição de existência: $x > 0$ e $x \neq 1$.

$\log_x 8 = 2$

$x^2 = 8$

$x = \sqrt{2^2 \cdot 2}$

$x = 2\sqrt{2}$ satisfaz a condição $x > 0$ e $x \neq 1$.

d) Condição de existência: $x > 0$ e $x \neq 1$.

$\log_x 5 = \frac{1}{2}$

$x^{\frac{1}{2}} = 5$

$x = 25$ satisfaz a condição $x > 0$ e $x \neq 1$.

7. Resposta pessoal.

Alguns exemplos:

Sabendo que $2^3 = 8$, podemos fazer:

$\log_2 x = 3$ e $\log_x 8 = 3$

Sabendo que $3^2 = 9$, podemos fazer:

$\log_3 x = 2$ e $\log_x 9 = 2$

Sabendo que $4^3 = 64$, podemos fazer:

$\log_4 x = 3$ e $\log_x 64 = 3$

8. a) $5^2 \cdot 5^{\log_5 2} + \frac{3^2}{3^{\log_3 2}} = 25 \cdot 5^{\log_5 2} + \frac{9}{3^{\log_3 2}} =$

$= 25 \cdot 2 + \frac{9}{2} = \frac{100 + 9}{2} = \frac{109}{2}$

b) $10^{\log_5 2 \cdot \log_{10} 5} = 5^{\log_5 2} = 2$

9. a) $\log_2(\log_3 81)$

$\log_3 81 = x \Rightarrow 3^x = 81 \Rightarrow x = 4$

Então, $\log_2(\log_3 81) = \log_2 4$,

$\log_2 4 = y \Rightarrow 2^y = 4 \Rightarrow y = 2$

Portanto, $\log_2(\log_3 81) = 2$.

b) $\log_5(\log_3(\log_4 64))$

$\log_4 64 = x \Rightarrow 4^x = 64 \Rightarrow x = 3$

Então, $\log_4 64 = 3$.

$\log_5(\log_3(\log_4 64)) = \log_5(\log_3 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 3 = y \Rightarrow 3^y = 3^1 \Rightarrow y = 1$

Então, $\log_3 3 = 1$.

$\log_5(\log_3 3) = z \Rightarrow \log_5 1 = z \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^z = 1 \Rightarrow z = 0$

Portanto, $\log_5(\log_3(\log_4 64)) = 0$.

10. A uma profundidade $x = 12{,}5$, temos:

$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0{,}08 \cdot (12{,}5)$

$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -1$

$10^{-1} = \frac{L}{15}$

$L = 10^{-1} \cdot 15$

$L = 0{,}1 \cdot 15 = 1{,}5$

Alternativa **d**.

11. $\log_8 \sqrt[8]{64} = \log_8 8^{\frac{2}{8}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Alternativa **b**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 41)

12. a) $y = \frac{m \cdot n}{p \cdot q} \Rightarrow \log_a y = \log_a\left(\frac{m \cdot n}{p \cdot q}\right) =$

$= \log_a(m \cdot n) - \log_a(p \cdot q) =$

$= \log_a m + \log_a n - \log_a p - \log_a q$

b) $y = \frac{3m^2 \cdot (n+1)^2}{(m+2)^3 \cdot (n-1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_a y = \log_a\left[\frac{3m^2 \cdot (n+1)^2}{(m+2)^3 \cdot (n-1)}\right] =$

$= \log_a [3m^2 \cdot (n+1)^2] - \log_a [(m+2)^3 \cdot$

$\cdot (n-1)] = \log_a 3 + 2\log_a m +$

$+ 2\log_a (n+1) - 3\log_a (m+2) - \log_a (n-1)$

c) $y = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{m+n}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{m-n}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_a y = \log_a\left[\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{m+n}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{m-n}}\right] =$

$= \log_a \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{m+n} - \log_a \sqrt[3]{2} \cdot$

$\cdot \sqrt{m-n} = \frac{1}{2}\log_a 5 +$

$+ \frac{1}{3}\log_a(m+n) - \frac{1}{3}\log_a 2 - \frac{1}{2}\log_a(m-n)$

d) $y = \sqrt[3]{\frac{(m-1)^2}{\sqrt{n} \cdot \sqrt[4]{a^3}}} \cdot a^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_a y = \log_a\left[\sqrt[3]{\frac{(m-1)^2}{\sqrt{n} \cdot \sqrt[4]{a^3}}} \cdot a^3\right] =$

$= \log_a\left[\frac{(m-1)^2}{\sqrt{n} \cdot \sqrt[4]{a^3}}\right]^{\frac{1}{3}} + \log_a a^3 =$

$= \frac{1}{3} \cdot \log_a \frac{(m-1)^2}{\sqrt{n} \cdot \sqrt[4]{a^3}} + 3 =$

$= \frac{1}{3} \cdot \left[\log_a (m-1)^2 - \log_a \sqrt{n} - \log_a \sqrt[4]{a^3}\right] +$

$+ 3 = \frac{1}{3} \cdot \left[\log_a (m-1)^2 - \log_a n^{\frac{1}{2}} - \log_a a^{\frac{3}{4}}\right] +$

$+ 3 = \frac{1}{3} \cdot \left[2 \cdot \log_a (m-1) - \frac{1}{2} \cdot \right.$

$\left. \cdot \log_a n - \frac{3}{4}\right] + 3 =$

$= \frac{2}{3}\log_a(m-1) - \frac{1}{6}\log_a n + \frac{11}{4}$

13. $\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \log\left(1 - \frac{1}{999}\right) +$

$+ \log\left(1 - \frac{1}{1000}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \ldots +$

$+ \log\left(\frac{998}{999}\right) + \log\left(\frac{999}{1000}\right) =$

$= \log\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{997}{998} \cdot \frac{998}{999} \cdot \frac{999}{1000}\right)$

O produto das frações pode ser simplificado, termo a termo:

$\log \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \cancel{\ldots} \cdot \frac{\cancel{997}}{\cancel{998}} \cdot \frac{\cancel{998}}{\cancel{999}} \cdot \frac{\cancel{999}}{1000} =$

$= \log\left(\frac{1}{1000}\right) = \log 10^{-3} = -3$

Alternativa **a**.

14. Dado que $\log(a) = A$, $\log(b) = B$ e $\log(c) = C$ e utilizando as propriedades de logaritmo, temos:

$\log\left(\frac{a^2 \cdot b}{\sqrt{c}}\right) = \log a^2 \cdot b \cdot c^{-\frac{1}{2}} =$

$= \log a^2 + \log b + \log c^{-\frac{1}{2}} =$

$= 2\log a + \log b - \frac{1}{2}\log c = 2A + B - \frac{1}{2}C$

Alternativa **c**.

15. $3\log_2 \frac{36}{25} + 3\log_2 \frac{6}{27} - 2\log_2 \frac{16}{125} =$

$= \log_2\left(\frac{36}{25}\right)^3 + \log_2\left(\frac{6}{27}\right)^3 - \log_2\left(\frac{16}{125}\right)^2 =$

$= \log_2 \frac{\left(\frac{36}{25}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{27}\right)^3}{\left(\frac{16}{125}\right)^2}$

Simplificando o logaritmando:

$\frac{\left(\frac{36}{25}\right)^3 \cdot \left(\frac{6}{27}\right)^3}{\left(\frac{16}{125}\right)^2} = \frac{\frac{36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 27 \cdot 27}}{\frac{16 \cdot 16}{125 \cdot 125}} = 1$

Retornando ao logaritmo: $\log_2 2 = 1$

Alternativa **c**.

16. $\log 2^2 + \log 2^3 + \log 2^4 + \ldots + \log 2^{50} =$

$= \log 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^{48} \cdot 2^{49} \cdot 2^{50} =$

$= \log 2^{2+3+4+\ldots+48+49+50}$

Assim, o expoente da base 2 no logaritmando é a soma de elementos de uma progressão aritmética (S_n), com primeiro termo (a_1) igual a 2 e último termo (a_n) igual a 50, com 49 termos (n). Para calcular essa soma, temos:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

$S_{49} = \frac{(2 + 50) \cdot 49}{2} = 1274$

Portanto, $\log 2^{1274}$.

Alternativa **b**.

17. $\frac{\log a_n - \log a_1}{\log q + 1} = \frac{\log \frac{a_n}{a_1}}{\log q} + 1 =$

$= \frac{\log \frac{a_1 \cdot q^{n-1}}{a_1}}{\log q} + 1 = \frac{\log q^{n-1}}{\log q} + 1 =$

$= n - 1 + 1 = n$

Alternativa **d**.

18. Para $t = 0$, temos o valor da temperatura inicial:

$T(t) = 30 + 150a^{-0{,}05t}$

$T(0) = 30 + 150a^{-0{,}05 \cdot 0} = 30 + 150a^0 =$

$= 30 + 150 \cdot 1 = 180$

Uma vez que a temperatura inicial é igual a 180, a metade dessa temperatura é 90. Com essa informação, temos:

$T(t) = 30 + 150a^{-0{,}05t}$

$90 = 30 + 150a^{-0{,}05t}$

$\frac{2}{5} = a^{-0{,}05t}$

$\log_a \frac{2}{5} = \log_a a^{-0{,}05t}$

$\log_a 2 - \log_a 5 = -0{,}05t$

$0{,}7 - 1{,}6 = -0{,}05t$

$t = \frac{-0{,}9}{-0{,}05} = 18$

Alternativa **d**.

19. a) $\log 12 = \log(2^2 \cdot 3) = \log 2^2 + \log 3 =$

$= 2 \cdot \log 2 + \log 3 \simeq 2 \cdot 0{,}301 + 0{,}477 \simeq$

$\simeq 1{,}079$

b) $\log 125 = \log 5^3 = 3 \cdot \log 5 =$

$= 3 \cdot \log \frac{10}{2} = 3 \cdot (\log 10 - \log 2) \simeq$

$\simeq 3 \cdot (1 - 0{,}301) \simeq 3 \cdot 0{,}699 \simeq 2{,}097$

c) $\log 3600 = \log(36 \cdot 100) = \log 36 +$

$+ \log 100 = \log(2^2 \cdot 3^2) + \log 10^2 =$

$= \log 2^2 + \log 3^2 + \log 10^2 =$

$= 2 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 + 2 \simeq$

$\simeq 2 \cdot 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477 + 2 \simeq 3{,}556$

d) $\log 0{,}0108 = \log\left(\frac{108}{10000}\right) =$

$= \log 108 - \log 10000 =$

$= \log(2^2 \cdot 3^3) - \log 10^4 =$

$= \log 2^2 + \log 3^3 - \log 10^4 =$

$= 2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 3 - 4 \cdot \log 10 \simeq$

$\simeq 2 \cdot 0{,}301 + 3 \cdot 0{,}477 - 4 \cdot 1 \simeq$

$\simeq 0{,}602 + 1{,}431 - 4 \simeq -1{,}967$

e) $\log(2 \cdot \sqrt{3}) = \log 2 + \log\sqrt{3} =$

$= \log 2 + \log 3^{\frac{1}{2}} =$

$= \log 2 + \frac{1}{2} \cdot \log 3 \simeq$

$\simeq 0{,}301 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}477 \simeq 0{,}540$

f) $\log(3\sqrt[3]{4}) = \log 3 + \log(4)^{\frac{1}{3}} =$

$= \log 3 + \log(2^2)^{\frac{1}{3}} =$

$= \log 3 + \log 2^{\frac{2}{3}} =$

$= \log 3 + \frac{2}{3} \cdot \log 2 \simeq$

$\simeq 0{,}477 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}301 \simeq 0{,}678$

20. a) $\log_2(x-1) + \log_2(x-2) = 1$

Condição de existência:

$\begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$

Aplicando as propriedades de logaritmo:

$\log_2(x-1) + \log_2(x-2) = 1$

$\log_2[(x-1) \cdot (x-2)] = 1$

$2^1 = (x-1) \cdot (x-2)$

$x^2 - 3x = 0$

$x \cdot (x-3) = 0$

Resolvendo a equação:

$x = 0$ não atende a condição de existência.

$x - 3 = 0$

$x = 3$ satisfaz a condição.

Portanto, $S = \{3\}$.

b) $\log_5(x^2 - 1) = 3 \cdot \log_5 2 + \log_5 3$

Condição de existência:

$x^2 - 1 > 0$

$x^2 > 1 \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$

Aplicando as propriedades de logaritmo:

$\log_5(x^2 - 1) = 3 \cdot \log_5 2 + \log_5 3$

$\log_5(x^2 - 1) = \log_5(2^3 \cdot 3)$

$x^2 - 1 = 2^3 \cdot 3$

$x^2 = 25$

$x = \pm 5$

Os dois valores satisfazem a condição de existência, portanto $S = \{-5, 5\}$.

c) $2 \cdot \log x = \log \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

Condição de existência:

$\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow x > 0$

Aplicando as propriedades de logaritmo:

$2 \cdot \log x = \log \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

$\log x^2 = \log \frac{\frac{x}{2}}{10^{\frac{3}{2}}}$

$x^2 = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10^2 \cdot 10}}$

$20\sqrt{10}\,x^2 - x = 0$

$x \cdot (20\sqrt{10}\,x - 1) = 0$

$x = 0$ não atende a condição de existência.

$20\sqrt{10}\,x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{20\sqrt{10}}$

Portanto, $S = \left\{\frac{1}{20\sqrt{10}}\right\}$.

d) $\log_{\frac{1}{2}}(1 - x) - \log_{\frac{1}{2}}(2 - x) = 3$

Condição de existência:

$1 - x > 0 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1$

$2 - x > 0 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < 2$

Aplicando as propriedades de logaritmo:

$\log_{\frac{1}{2}}(1 - x) - \log_{\frac{1}{2}}(2 - x) = 3$

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1 - x}{2 - x}\right) = 3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1 - x}{2 - x}$

$x = \frac{6}{7}$

O valor de x satisfaz a condição de existência, portanto $S = \left\{\frac{6}{7}\right\}$.

e) $\log_2\sqrt{x + 1} + \log_2\sqrt{x + 2} = 1 + \log_2\sqrt{33}$

Condição de existência:

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$

Aplicando as propriedades de logaritmo:

$\log_2\sqrt{x + 1} \cdot \sqrt{x + 2} = \log_2 2 + \log_2\sqrt{33} =$

$= \log_2(2 \cdot \sqrt{33})$

$\sqrt{(x + 1) \cdot (x + 2)} = 2 \cdot \sqrt{33}$

$(x + 1) \cdot (x + 2) = 4 \cdot 33$

$x^2 + 3x - 130 = 0$

Resolvendo a equação de 2º grau:

$x_1 = -13$ não atende a condição de existência.

$x_2 = 10$ atende a condição de existência.

Portanto, $S = \{10\}$.

21. a) $\begin{cases} 2^x = \frac{1}{2^{4+y}} \\ \log_2(2x + y) = 1 \end{cases}$

Desenvolvendo a primeira equação:

$2^x = \frac{1}{2^{4+y}}$

$2^{x+4+y} = 2^0$

$x + 4 + y = 0$

$x + y = -4$

Desenvolvendo a segunda equação:

$\log_2(2x + y) = 1$

$2^1 = 2x + y$

$2x + y = 2$

Resolvendo o sistema:

$\begin{cases} x + y = -4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Temos então: $x = 6$ e $y = -10$

Portanto, $S = \{(6, -10)\}$.

b) $\begin{cases} 8^x = 2^{y+1} \\ \log_3 x = 1 + \log_3 y \end{cases}$

Desenvolvendo a primeira equação:

$(2^3)^x = 2^{y+1}$

$3x - y = 1$

Desenvolvendo a segunda equação:

$\log_3 x = \log_3 3 + \log_3 y$

$\log_3 x = \log_3(3 \cdot y)$

$x = 3y$

Resolvendo o sistema:

$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x = 3y \end{cases}$

Temos então: $x = \frac{3}{8}$ e $y = \frac{1}{8}$

Portanto, $S = \left\{\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)\right\}$.

c) $\begin{cases} \log(xy) = 30 \\ \log x \cdot \log y = 200 \end{cases}$

Desenvolvendo a primeira equação:

$\log x + \log y = 30$

Desenvolvendo a segunda equação:

$\log x = \frac{200}{\log y}$

Temos então:

$\begin{cases} \log x + \log y = 30 \\ \log x = \frac{200}{\log y} \end{cases}$

$\frac{200}{\log y} + \log y = 30$

$(\log y)^2 - 30 \cdot \log y + 200 = 0$

Fazendo $\log y = z$, temos:

$z^2 - 30z + 200 = 0$

$\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 200 = 100$

$z = \frac{30 \pm 10}{2}$

$z_1 = \frac{30 - 10}{2} = \frac{20}{2} = 10$

$z_2 = \frac{30 + 10}{2} = \frac{40}{2} = 20$

Para $y_1 = z_1$, temos:

$\log y_1 = 10 \Rightarrow y_1 = 10^{10}$ e

$\log x_1 = \frac{200}{\log y_1}$

$\log x_1 = \frac{200}{10}$

$\log x_1 = 20$

$x_1 = 10^{20}$

Para $\log y_2 = z_2$, temos:

$\log y_2 = 20 \Rightarrow y_2 = 10^{20}$ e

$\log x_2 = \frac{200}{\log y_2}$

$\log x_2 = \frac{200}{20}$

$\log x_2 = 10$

$x_2 = 10^{10}$

Portanto, $S = \{(10^{20}, 10^{10}); (10^{10}, 10^{20})\}$.

d) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 1 \\ 3^{\log_2 x} = 2^{\log_2 3} \end{cases}$

Desenvolvendo a primeira equação:

$\log_2(x \cdot y) = 1$

$x \cdot y = 2$

Desenvolvendo a segunda equação:

$3^{\log_2 x} = 3^1$

$\log_2 x = 1$

$x = 2$

Do sistema:

$\begin{cases} x \cdot y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$

Temos, então: $y = 1$.

Portanto, $S = \{(2, 1)\}$.

e) $\begin{cases} \log_2 4^x = y + 1 \\ \log_3 3 = x + 2 \end{cases}$

Desenvolvendo a primeira equação:

$2^{y+1} = 4^x$

$2^{y+1} = (2^2)^x$

$y = 2x - 1$

Desenvolvendo a segunda equação:

$3^{x+2} = 3^1$

$x = -1$

Do sistema:

$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Temos, então: $y = -3$.

Portanto, $S = \{(-1, -3)\}$.

f) $\begin{cases} x + y = \frac{4}{3} \\ \log_3 x - \log_3 y = 1 \end{cases}$

Desenvolvendo a segunda equação:

$\log_3\left(\frac{x}{y}\right) = 1$

$\frac{x}{y} = 3^1$

$x = 3y$

Substituindo $x = 3y$ na primeira equação:

$3y + y = \frac{4}{3}$

$y = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Portanto, $S = \left\{\left(1, \frac{1}{3}\right)\right\}$.

22. Temos que: $x > 0$, $x \neq 1$, $\log_x 7 = -\frac{1}{3}$, então:

$\log_x 7 = -\frac{1}{3}$

$x^{-\frac{1}{3}} = 7$

$x^{-1} = 7^3 \Rightarrow \frac{1}{x} = 7^3$

Substituindo $\frac{1}{x} = 7^3$ em $\log_{\frac{1}{x}} 7^6$:

$\log_{7^3} 7^6 = a$

$(7^3)^a = 7^6$

$3a = 6$

$a = 2$

Portanto, $\log_{\frac{1}{x}} 7^6 = 2$.

23. a) $\log_a y = \log_a(m + n) +$
$+ \log_a 3 - \log_a(m - n) - \log_a 2$

$\log_a y = \log_a\left[\frac{(m + n) \cdot 3}{(m - n) \cdot 2}\right]$

$y = \frac{3(m + n)}{2(m - n)}$

b) $\log_a y = \log_a(m + 1) - \log_a(m + 8) +$
$+ 4 \cdot \log_a m - 2 \cdot \log_a n$

$\log_a y = \log_a(m + 1) - \log_a(m + 8) +$
$+ \log_a m^4 - \log_a n^2$

$\log_a y = \log_a\left[\frac{(m + 1) \cdot m^4}{(m + 8) \cdot n^2}\right]$

$y = \frac{m^4(m + 1)}{n^2(m + 8)}$

c) $\log_a y = \frac{1}{3} \cdot \log_a m + \frac{1}{2} \cdot \log_a n - 2 \cdot$
$\cdot \log_a(m^2 + 1) - \frac{2}{3} \cdot \log_a(n + 1)$

$\log_a y = \log_a \sqrt[3]{m} +$
$+ \log_a \sqrt{n} - \log_a(m^2 + 1)^2 - \log_a \sqrt[3]{(n + 1)^2}$

$\log_a y = \log_a\left[\frac{\sqrt[3]{m} \cdot \sqrt{n}}{(m^2 + 1)^2 \cdot \sqrt[3]{(n + 1)^2}}\right]$

$y = \frac{\sqrt{n}}{(m^2 + 1)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{(n + 1)^2}}$

d) $\log_a y = \frac{1}{2} \cdot \log_a(m^2 + 1) - 3 - \frac{1}{3} \cdot$
$\cdot \log_a(n^2 + 1) - \frac{1}{4} \cdot \log_a(m + 1) =$
$= \log_a \sqrt{(m^2 + 1)} - \log_a a^3 - \log_a$
$\sqrt[3]{(n^2 + 1)} - \log_a \sqrt[4]{(m + 1)}$

$\log_a y = \log_a\left[\frac{\sqrt{m^2 + 1}}{a^3 \cdot \sqrt[3]{(n^2 + 1)} \cdot \sqrt[4]{(m + 1)}}\right]$

$y = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{a^3 \cdot \sqrt[3]{(n^2 + 1)} \cdot \sqrt[4]{(m + 1)}}$

TECNOLOGIA (P. 42)

1. a) $\log 5 \simeq 0{,}698970004$

b) $\log 8 \simeq 0{,}903089987$

c) $\log(-1)$: Aparecerá na tela “não existe”, “entrada inválida”, “erro de domínio” ou alguma mensagem similar.

Isso acontece porque $(-1) < 0$, o que não atende uma das condições de existência do logaritmo: o logaritmando deve ser maior que zero.

d) $\log 0{,}5 \simeq -0{,}301029996$

2. Para o cálculo da energia liberada em um terremoto, utilizamos a fórmula:

$I = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}$

Logo, a energia liberada no terremoto ocorrido na Turquia e na Síria, de magnitude 7,8 na escala Richter, é:

$7{,}8 = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}$

$7{,}8 \cdot \frac{3}{2} = \log E - \log 7 \cdot 10^{-3}$

$11{,}7 = \log E - (-2{,}155)$

$9{,}545 = \log E$

$E = 10^{9{,}545}$

Já a energia liberada no terremoto do Afeganistão, de magnitude 6,3, é:

$6{,}3 = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E'}{7 \cdot 10^{-3}}$

$6{,}3 \cdot \frac{3}{2} = \log E' - \log 7 \cdot 10^{-3}$

$9{,}45 = \log E' - (-2{,}155)$

$7{,}295 = \log E'$

$E' = 10^{7{,}295}$

A razão entre essas energias é:

$\frac{E}{E'} = \frac{10^{9{,}545}}{10^{7{,}295}} = 10^{2{,}25} = 177{,}83$

Portanto, a energia liberada no terremoto ocorrido na Turquia e na Síria é, aproximadamente, 177,83 vezes maior que a energia liberada no terremoto do Afeganistão.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 44)

24. **a)** Podemos escrever $\log_3 2$ na base 8. Assim:

$\log_3 2 \cdot \log_8 3 = \frac{\log_8 2}{\log_8 3} \cdot \log_8 3 = \log_8 2$

Resolvendo $\log_8 2$:

$\log_8 2 = t$

$8^t = 2$

$t = \frac{1}{3}$

Portanto, $\log_3 2 \cdot \log_8 3 = \frac{1}{3}$.

b) Podemos escrever $\log_7 3$ e $\log_9 10$ na base 10. Assim:

$\log_7 3 \cdot \log_{10} 7 \cdot \log_9 10 =$

$= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 7} \cdot \log_{10} 7 \cdot \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 9} =$

$= \log_{10} 3 \cdot \frac{1}{\log_{10} 3^2} =$

$= \log_{10} 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot \log_{10} 3} = \frac{1}{2}$

c) Podemos escrever todos os logaritmos na base 10, assim:

$\log_8 6 \cdot \log_{10} 8 \cdot \log_{12} 10 \cdot \ldots \cdot \log_{216} 214 =$

$= \frac{\log 6}{\log 8} \cdot \frac{\log 8}{\log 10} \cdot \frac{\log 10}{\log 12} \cdot \ldots \cdot \frac{\log 214}{\log 216} =$

$= \frac{\log 6}{\log 216} = \log_{216} 6$

Resolvendo $\log_{216} 6$:

$\log_{216} 6 = t$

$216^t = 6$

$t = \frac{1}{3}$

Portanto:

$\log_8 6 \cdot \log_{10} 8 \cdot \ldots \cdot \log_{216} 214 = \frac{1}{3}$

d) $\frac{\log_7 8}{\log_7 2} = \log_2 8 = t$

$2^t = 8$

$t = 3$

Portanto, $\frac{\log_7 8}{\log_7 2} = 3$.

25. Podemos escrever:

$\log 146 = \log (73 \cdot 2) = \log 73 + \log 2$

Como 73 é primo, não é possível fatorar; por isso, vamos estudar valores que, ao serem fatorados, permitam-nos trabalhar com as informações fornecidas pelo enunciado, isto é, log 2 e log 3.

Para log 144, temos:

$\log 144 = \log (72 \cdot 2) = \log 72 + \log 2 =$

$= \log (2^3 \cdot 3^2) + \log 2 = \log 2^3 +$

$+ \log 3^2 + \log 2 =$

$= 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 + \log 2 \simeq$

$\simeq 3 \cdot (0{,}30) + 2 \cdot (0{,}47) + 0{,}30 = 2{,}14$

Para log 150, temos:

$\log 150 = \log \left(\frac{300}{2}\right) =$

$= \log 300 - \log 2 =$

$= \log (3 \cdot 10^2) - \log 2 =$

$= \log 3 + \log 10^2 - \log 2 =$

$= \log 3 + 2 - \log 2 \simeq$

$\simeq 0{,}47 + 2 - 0{,}30 \simeq 2{,}17$

Então:

$\log 144 < \log 146 < \log 150$

$2{,}14 < \log 146 < 2{,}17$

Portanto, o valor que mais se aproxima de log 146 é 2,19.

Alternativa **c**.

26. **a)** Condição de existência:

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2.$

$\log_3 (x-2) - \log_9 (x-2) = 2$

$\log_3 (x-2) - \frac{\log_3 (x-2)}{\log_3 9} = 2$

$\log_3 (x-2) - \frac{\log_3 (x-2)}{2} = 2$

$\log_3 (x-2) = 4$

$3^4 = x - 2$

$x = 83$

Portanto, $S = \{83\}$.

b) Condição de existência: $x > 0$.

$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = \frac{7}{4}$

$\frac{\log_2 x}{\log_2 16} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 x = \frac{7}{4}$

$\frac{\log_2 x}{4} + \frac{\log_2 x}{2} + \log_2 x = \frac{7}{4}$

$\log_2 x + 2 \cdot \log_2 x + 4 \cdot \log_2 x = 7$

$7 \cdot \log_2 x = 7$

$\log_2 x = 1$

$x = 2$

Portanto, $S = \{2\}$.

c) Condição de existência:

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1.$

$\log_2 (x-1) - \log_4 (x-1) = 1$

$\log_2 (x-1) - \frac{\log_2 (x-1)}{\log_2 4} = 1$

$\log_2 (x-1) - \frac{\log_2 (x-1)}{2} = 1$

$2 \cdot \log_2 (x-1) - \log_2 (x-1) = 2$

$\log_2 (x-1) = 2$

$x - 1 = 2^2 \Rightarrow x = 5$

Portanto, $S = \{5\}$

d) Condição de existência:

$x > 0$ e $x \neq 1$.

$\log_3 x + \frac{1}{\log_x 3} = 1$

$\frac{\log_x x}{\log_x 3} + \frac{1}{\log_x 3} = 1$

$\frac{1}{\log_x 3} + \frac{1}{\log_x 3} = 1$

$\log_x 3 = 2$

$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$x = -\sqrt{3}$ não atende a condição de existência.

Portanto, $S = \{\sqrt{3}\}$.

e) Condição de existência: $x > 0$.

$\log_8 x \cdot \log_4 x \cdot \log_2 x = -\frac{4}{3}$

$\frac{\log_2 x}{\log_2 8} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} \cdot \log_2 x = -\frac{4}{3}$

$\frac{\log_2 x}{3} \cdot \frac{\log_2 x}{2} \cdot \log_2 x = -\frac{4}{3}$

$\frac{1}{6} \cdot (\log_2 x)^3 = -\frac{4}{3}$

$(\log_2 x)^3 = -\frac{4}{3} \cdot 6$

$\log_2 x = -2$

$x = 2^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Portanto, $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

f) Condição de existência: $x > 0$ e $x \neq 1$.

$\log_x 4 + \log_2 x = 3$

$\frac{\log_2 4}{\log_2 x} + \log_2 x = 3$

$\frac{2}{\log_2 x} + \log_2 x = 3$

$(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$

Fazendo $\log_2 x = y$, temos:

$y_2 - 3y + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$

$y = \frac{3 \pm 1}{2}$

$y_1 = 1$ e $y_2 = 2$

Para $\log_2 x_1 = y_1$:

$\log_2 x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$

Para $\log_2 x_2 = y_2$:

$\log_2 x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 4$

Portanto, $S = \{2, 4\}$.

g) Condição de existência: $x > 0$.

$\frac{\log_2 x}{\log_2 4} \cdot \log_2 x = 8$

$\frac{\log_2 x}{2} \cdot \log_2 x = 8$

$(\log_2 x)^2 = 16$

$(\log_2 x) = \pm 4$

Para $\log_2 x = 4$:

$2^4 = x \Rightarrow x = 16$

Para $\log_2 x = -4$:

$2^{-4} = x \Rightarrow x = \frac{1}{16}$

Portanto, $S = \left\{\frac{1}{16}, 16\right\}$.

h) Condição de existência: $x > 0$, $x \neq 1$.

$2x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_{2x} 4} = 3$

$\frac{1}{\frac{\log_2 2}{\log_2 x}} + \frac{1}{\frac{\log_2 4}{\log_2 2x}} = 3$

$\frac{\log_2 x}{1} + \frac{\log_2 (2 \cdot x)}{2} = 3$

$2 \cdot \log_2 x + 1 + \log_2 x = 6$

$\log_2 x^3 = 5$

$x^3 = 2^5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{4}$

Portanto, $S = \{2 \cdot \sqrt[3]{4}\}$.

27. Utilizando o quadro e as propriedades de logaritmo, temos:

- $\log 15 = \log \left(\frac{30}{2}\right) = \log 30 - \log 2 =$
  $= \log (3 \cdot 10) - \log 2 = \log 3 +$
  $+ \log 10 - \log 2 \simeq 0{,}477 + 1 - 0{,}301 =$
  $= 1{,}176$
- $\log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 +$
  $+ \log 10 \simeq 0{,}301 + 1 = 1{,}301$
- $\log 25 = \log \left(\frac{50}{2}\right) =$
  $= \log 50 - \log 2 =$
  $= \log (5 \cdot 10) - \log 2 =$
  $= \log 5 + \log 10 - \log 2 \simeq$
  $\simeq 0{,}699 + 1 - 0{,}301 = 1{,}398$
- $\log 14 = \log (2 \cdot 7) = \log 2 + \log 7 \simeq$
  $\simeq 0{,}301 + 0{,}845 = 1{,}146$

- $\log 56 = \log (2^3 \cdot 7) = \log 2^3 + \log 7 =$
$= 3 \cdot \log 2 + \log 7 \simeq$
$\simeq 3 \cdot 0{,}301 + 0{,}845 = 1{,}748$

28. a) $\log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} \simeq \dfrac{0{,}4771}{0{,}3010} \simeq 1{,}5850$

b) $\log_2 60 = \dfrac{\log 60}{\log 2} = \dfrac{\log (2 \cdot 3 \cdot 10)}{\log 2} =$

$= \dfrac{\log 2 + \log 3 + \log 10}{\log 2} \simeq$

$\simeq \dfrac{0{,}3010 + 0{,}4771 + 1}{0{,}3010} \simeq 5{,}9073$

c) $\log_9 20 = \dfrac{\log 20}{\log 9} = \dfrac{\log (2 \cdot 10)}{\log 3^2} =$

$= \dfrac{\log 2 + \log 10}{2 \cdot \log 3} \simeq \dfrac{0{,}3010 + 1}{2 \cdot 0{,}4771} \simeq 1{,}3634$

d) $\log_{30} 100 = \dfrac{\log 100}{\log 30} =$

$= \dfrac{\log 10^2}{\log (3 \cdot 10)} = \dfrac{2}{\log 3 + \log 10} \simeq$

$\simeq \dfrac{2}{0{,}4771 + 1} \simeq 1{,}354$

29. a) $\log_2 3 = \dfrac{\log_7 3}{\log_7 2} = \dfrac{b}{a}$

b) $\log_3 2 = \dfrac{\log_7 2}{\log_7 3} = \dfrac{a}{b}$

c) $\log_4 14 = \dfrac{\log_7 14}{\log_7 4} = \dfrac{\log_7 (7 \cdot 2)}{\log_7 2^2} =$

$= \dfrac{\log_7 7 + \log_7 2}{2 \cdot \log_7 2} = \dfrac{1 + a}{2a}$

d) $\log_6 42 = \dfrac{\log_7 42}{\log_7 6} = \dfrac{\log_7 (7 \cdot 2 \cdot 3)}{\log_7 (2 \cdot 3)} =$

$= \dfrac{\log_7 7 + \log_7 2 + \log_7 3}{\log_7 2 + \log_7 3} = \dfrac{1 + a + b}{a + b}$

30. a) $\log_3 2 \cdot \log_8 3 = 0{,}33333...$

b) $\log_7 3 \cdot \log_{10} 7 \cdot \log_9 10 = 0{,}5$

c) $\log_8 6 \cdot \log_{10} 8 \cdot \log_{12} 10 \cdot ... \cdot \log_{216} 214 =$
$= 0{,}33333...$

d) $\dfrac{\log_7 8}{\log_7 2} = 3$

31. $\log_a x = 4 \cdot \log_{10} x \Rightarrow \dfrac{\log x}{\log a} = \log_{10} x \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\log x}{\log a} = \dfrac{\log x^4}{\log 10} \Rightarrow \dfrac{\log x}{\log a} = \dfrac{\log x^4}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\log x}{\log x^4} = \log a \Rightarrow \dfrac{1}{4} = \log a \Rightarrow a = 10^{\frac{1}{4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{10^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow \sqrt{a} = 10^{\frac{1}{8}}$

Alternativa **c**.

32. Utilizando a fórmula de juros compostos, temos:
$M = C(1 + i)^t$, sendo M o montante (valor obtido ao final do investimento), C o capital inicial, i a taxa de juros e t o tempo de aplicação.
$M = 1000 \cdot (1 + 0{,}06)^t$
Para determinar o tempo necessário para que a quantia dobre, precisamos calcular após quanto tempo $M = 2000$. Assim:
$M = 2000$
$1000 \cdot (1 + 0{,}06)^t = 2000$
$1{,}06^t = 2$
$\log_2 1{,}06^t = \log_2 2$
$t \cdot \log_2 1{,}06 = \log_2 2$
$t = \dfrac{1}{0{,}084} \simeq 11{,}9$

33. a) $f(t) = \dfrac{f(0)}{2}$

$750 \cdot 2^{-0{,}05t} = \dfrac{750 \cdot 2^{-(0{,}05) \cdot 0}}{2}$

$750 \cdot 2^{-0{,}05t} = 750 \cdot 2^{-1}$

$2^{-0{,}05t} = 2^{-1}$

$t = \dfrac{-1}{-0{,}05} = 20$

b) $f(t) = 40$
$750 \cdot 2^{-(0{,}05) \cdot t} = 40$

$2^{-(0{,}05) \cdot t} = \dfrac{4}{75}$

$2^{-(0{,}05) \cdot t} = \dfrac{2^2}{3 \cdot 5^2}$

$2^{-(0{,}05)t - 2} = 3^{-1} \cdot 5^{-2}$

$\log_2 2^{-(0{,}05)t - 2} = \log_2 (3^{-1} \cdot 5^{-2})$

$-0{,}05t - 2 = -1 \cdot \log_2 3 - 2 \cdot \log_2 5$

$-0{,}05t - 2 = -1{,}6 - (2 \cdot 2{,}3)$

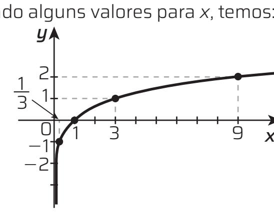
$t = \dfrac{-4{,}2}{-0{,}05} = 84$

Portanto, haverá 40 exemplares dessa espécie em 84 anos.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 49)

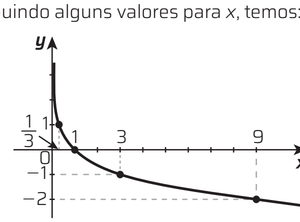
34. a) $y = \log_3 x$
Atribuindo alguns valores para x, temos:

x	y
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2



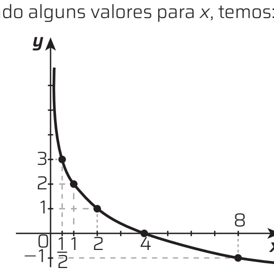
b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$
Atribuindo alguns valores para x, temos:

x	y
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	-1
9	-2



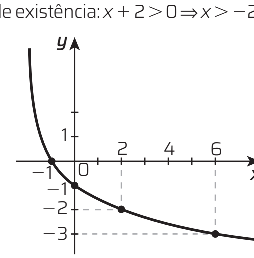
c) $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$
Atribuindo alguns valores para x, temos:

x	y
$\frac{1}{2}$	3
1	2
2	1
4	0
8	-1



d) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x + 2)$
Atribuindo alguns valores para x, temos:
Condição de existência: $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$.

x	y
-1	0
0	-1
2	-2
6	-3



35. a) $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$
Analisando a base, temos:
$\sqrt{2} \simeq 1{,}41 > 1$
Portanto, a função é crescente.

b) $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$
Analisando a base, temos:
$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}86$ e $0 < 0{,}86 < 1$
Portanto, a função é decrescente.

36. $f(a) = b \Rightarrow \log_a a = b \Rightarrow 1 = b$
$f(a + 2) = b + 1$
$\log_a (a + 2) = b + 1$
$\log_a (a + 2) = 1 + 1$
$\log_a (a + 2) = 2$
$a^2 - a - 2 = 0$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$
$a = \dfrac{1 \pm 3}{2}$
$a_1 = 2$ e $a_2 = -1$
Portanto, $a = 2$ e $b = 1$.

37. Substituindo os respectivos valores de x e y dos pontos (3, 0) e (−6, 1) na equação $y = \log_{10} (ax + b)$:

$\begin{cases} 0 = \log_{10} (a \cdot 3 + b) \\ 1 = \log_{10} (a \cdot (-6) + b) \end{cases}$

Usando a definição de logaritmo, temos:

$\begin{cases} 10^0 = 3a + b \Rightarrow 3a + b = 1 \\ 10^1 = -6a + b \Rightarrow -6a + b = 10 \end{cases}$

Subtraindo uma equação da outra, obtemos:
$a = -1$
Substituindo a por -1 na primeira equação, obtemos: $b = 4$
Portanto, $a = -1$ e $b = 4$, e a função é $y = \log_{10} (-x + 4)$, com domínio $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$.

38. Podemos representar a intensidade por $I = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$, em que n é a quantidade de filtros utilizados. Precisamos determinar quando $I = \dfrac{10}{100}$.

Podemos escrever que $\dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{10}$. Assim:

$I = \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

$\dfrac{10}{100} = \left(\dfrac{8}{10}\right)^n$

$\log \left(\dfrac{1}{10}\right) = \log \left(\dfrac{8}{10}\right)^n$

$\log 1 - \log 10 = n \cdot (\log 2^3 - \log 10)$

$0 - 1 \simeq n \cdot (3 \cdot 0{,}301 - 1)$

$n = \dfrac{-1}{-0{,}097} \simeq 10{,}30$

Como o número de filtros é inteiro, concluímos que foram necessários 11 filtros.
Alternativa **c**.

39. Após o 1º mês:

$p + \dfrac{0{,}7}{100} \cdot p = p + 0{,}007p = 1{,}007p$

Após o 2º mês:

$1{,}007p + \dfrac{0{,}7}{100} \cdot (1{,}007p) = (1{,}007p)^2$

⋮

Após o 12º mês: $(1{,}007)^{12} p \simeq 1{,}0873p$.
Temos que, antes do 1º mês, o valor da inflação é p e, após 12 meses, $1{,}0873p$. Assim:
$1{,}0873p - 1p = 0{,}0873p$
Portanto, em 12 meses, a inflação acumulada será de 8,73%.

40. Com base no enunciado, cada placa de vidro reduz a intensidade da luz em 10%; então, após esse processo, a luz estará em 90% de sua intensidade I.

1 placa: $\dfrac{90}{100} = 0{,}9 \cdot I$

2 placas: $0{,}9 \cdot (0{,}9 \cdot I) = 0{,}9^2 \cdot I$

⋮

n placas: $(0{,}9)^n \cdot I$
Queremos determinar quantas placas precisam ser acopladas para que a intensidade da luz seja de 50% ou $0{,}5 \cdot I$. Assim:
$(0{,}9)^n \cdot I = 0{,}5 \cdot I$
$0{,}9^n = 0{,}5$

$\log \left(\dfrac{9}{10}\right)^n = \log \left(\dfrac{5}{10}\right)$

$n \cdot (2 \cdot \log 3 - \log 10) = \log 5 - \log 10$

Considerando $\log 3 \simeq 0{,}477$ e $\log 5 \simeq 0{,}699$:

$n \cdot (2 \cdot 0{,}477 - 1) \simeq 0{,}699 - 1$

$n = \dfrac{-0{,}301}{-0{,}046} \simeq 6{,}54$

O número de placas é inteiro, portanto, serão necessárias 7 placas de vidro.

41. Para encontrar a abscissa do ponto P, temos:

$f(x) = y \Rightarrow 2^x = \dfrac{700}{27}$

$\log_2 2x = \log_2 \dfrac{700}{27}$

$x = \log_2 700 - \log_2 27$

$x = \log_2 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 - \log_2 3 \cdot 3 \cdot 3$

$x = \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 5 + \log_2 5 +$

$+ \log_2 7 - \log_2 3 - \log_2 3 - \log_2 3$

$x = 1 + 1 + 2{,}32 + 2{,}32 +$

$+ 2{,}8 - 1{,}58 - 1{,}58 - 1{,}58$

$x = 4{,}7$

Alternativa **d**.

42. Para o par ordenado (3, 2):

$y = \log_2 2(ax + b)$

$2 = \log_2 2(a \cdot 3 + b)$

$2^2 = 3a + b$

$3a + b = 4$

Para o par ordenado (5, 4):

$y = \log_2 2(ax + b)$

$4 = \log_2 2(a \cdot 5 + b)$

$2^4 = 5a + b$

$5a + b = 16$

Assim:

$5a + b = 16$

$2a + 3a + b = 16$

$2a + 4 = 16$

$a = 6$

Substituindo o valor de a na primeira equação, temos: $b = -14$

Logo: $a + b = 6 - 14 = -8$

Alternativa **a**.

43. Para determinar o tempo em que a bola percorre 25 m, precisamos calcular $d(t) = 25$, assim:

$25 = 50 \cdot (1 - e^{-0{,}1 \cdot t})$

$1 - e^{-0{,}1 \cdot t} = \dfrac{1}{2}$

$e^{-0{,}1 \cdot t} = -\dfrac{1}{2}$

$\ell n\, e^{-0{,}1 \cdot t} = \ell n\, 2^{-1}$

$-0{,}1 \cdot t \cdot \ell n\, e = -1 \cdot \ell n\, 2$

$-0{,}1 \cdot t = -0{,}7$

$t = \dfrac{-0{,}7}{-0{,}1} = 7$

Alternativa **c**.

44. $M_w = -10{,}7 + \dfrac{2}{3}\log_{10}(M_0)$

Para determinar o momento sísmico M_0 precisamos calcular $M_w = 7{,}3$. Assim:

$\dfrac{2}{3}\log_{10}(M_0) = 18$

$\log_{10}(M_0) = 27$

$M_0 = 10^{27}$

Alternativa **e**.

45. Como $(\log_2 x, \log_4 4x, \log_2 8x)$ é uma P.A., $\log_2 x$ e $\log_2 8x$ é a média aritmética de $\log_4 4x$. Então:

$\log_4 4x = \dfrac{\log_2 x + \log_8 8x}{2}$

$2 \cdot \log_4 4x = \log_2 x + \log_8 8x$

$2 \cdot \dfrac{\log_2 4x}{\log_2 4} = \log_2 x + \dfrac{\log_2 8x}{\log_2 8}$

$2 \cdot \dfrac{\log_2 4x}{2} = \log_2 x + \dfrac{\log_2 8x}{3}$

$3 \cdot \log_2 4x = 3 \cdot \log_2 x + \log_2 8x$

$\log_2 (4x)^3 = \log_2 (x^3 \cdot 8x)$

$\log_2 64x^3 = \log_2 8x^4$

$64x^3 = 8x^4$

$x^3 \cdot (x - 8) = 0$

$x = 0$ não satisfaz a condição de existência.

Para $x = 8$:

$a_1 + a_2 + a_3 = \log_2 x + \log_4 4x + + \log_2 8x$

$a_1 + a_2 + a_3 = \log_2 8 + \log_4 32 + \log_2 64$

$a_1 + a_2 + a_3 = 3 + \dfrac{5}{2} + 2 = \dfrac{6 + 5 + 4}{2} = \dfrac{15}{2}$

Alternativa **b**.

46. Resposta pessoal.

O pH é utilizado para indicar o potencial hidrogeniônico presente em determinada solução ou mistura. Esse potencial refere-se à quantidade (concentração molar) de cátion hidrônio (H^+ ou H_3O^+) presente no meio e indica se esse meio, ou mistura, é ácido, básico ou neutro. Essa indicação é definida da seguinte maneira:

- Para pH = 7, o meio é neutro (significa que $[H^+] = [OH^-]$);
- Para pH > 7, o meio é básico (significa que $[H^+] < [OH^-]$);
- Para pH < 7, o meio é ácido (significa que $[H^+] > [OH^-]$).

Conhecendo a concentração molar de cátion hidrônio de determinada mistura, podemos determinar o pH da seguinte forma:

$\text{pH} = -\log[H^+]$

Para a elaboração das questões, os estudantes podem pesquisar a concentração de hidrônio em alimentos ou misturas que eles conhecem e que estejam presentes em seu cotidiano. Algumas sugestões de problemas:

Problema 1

Sabendo que uma solução tem concentração de cátion hidrônio de $2 \cdot 10^{-4}$ mol/L, qual é o pH dessa solução?

Resolução

Temos que a concentração é $2 \cdot 10^{-4}$ mol/L, então:

$\text{pH} = -\log[H^+]$

$\text{pH} = -\log(2 \cdot 10^{-4})$

$\text{pH} = -\log 2 - \log 10^{-4}$

$\text{pH} = -\log 2 - (-4) \cdot \log 10$

$\text{pH} \simeq -0{,}301 + 4 = 3{,}7$

Portanto, o pH é 3,7, e a solução é um ácido.

Problema 2

O leite de magnésia tem concentração de hidrônio igual a $1 \cdot 10^{-10}$ mol/L. Determine o pH presente nessa solução.

Resolução

Temos que a concentração é $1 \cdot 10^{-10}$ mol/L, então:

$\text{pH} = -\log[H^+]$

$\text{pH} = -\log(1 \cdot 10^{-10})$

$\text{pH} = 10 \cdot \log 10 = 10$

Portanto, o pH é 10, e a solução é uma base.

Problema 3

A água pura e destilada tem concentração de hidrônio igual a $1 \cdot 10^{-7}$ mol/L. Qual é o pH dessa solução?

Resolução

$\text{pH} = -\log[H^+]$

$\text{pH} = -\log(1 \cdot 10^{-7})$

$\text{pH} = 7 \cdot \log 10 = 7$

Portanto, o pH é 7, e a solução é neutra.

TECNOLOGIA (P. 50)

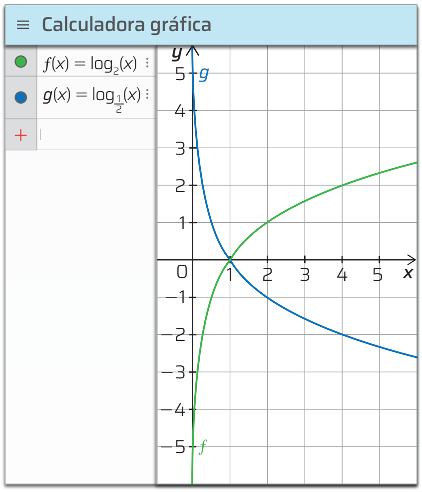
1. **a)** A palavra “indefinido” aparece na tabela porque a função logarítmica tem domínio $D(f) =]0, +\infty[$, então, para $x \leqslant 0$, a função não é definida.

b) Note que, para $x > 0$, a função $f(x) = \log x$ passa a ser definida.

2. Os novos dados representam os valores da função no intervalo $[1, 10]$, em que ela é definida. Temos a primeira coluna com os valores de x e a segunda coluna com os valores da imagem da função (os valores de y).

3. Clique na guia “Equação”, em seguida selecione “Explicita” e, conforme instruções já vistas, digite “log(2,x)”; dessa forma, teremos o gráfico de $f(x) = \log_2 x$. Escolha uma cor e clique em “Ok”. Depois, no mesmo eixo, construa o gráfico de $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

O gráfico ficará similar à imagem a seguir.



ID/BR

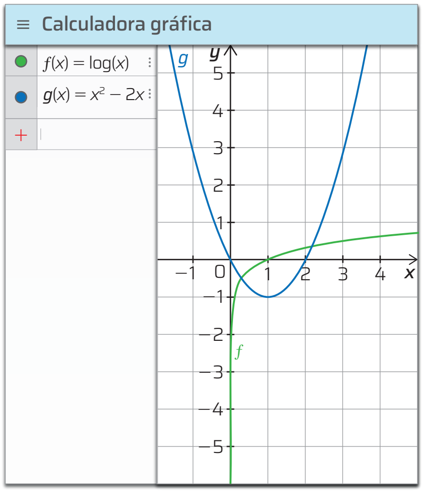
Analisando os dois gráficos e as tabelas, podemos identificar:

Semelhanças: as duas funções têm domínio $]0, +\infty[$ e apresentam valores definidos para $x > 0$, e os gráficos das funções são simétricos em relação ao eixo Ox.

Diferenças: a base de $f(x) = \log_2 x$ é 2 e, como $2 > 1$, ela é uma função crescente. Já a base de $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é $\dfrac{1}{2}$ e, como $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, ela é uma função decrescente.

Analisando os valores de x e y percebemos que as duas funções apresentam imagem opostas.

4. Os gráficos ficarão similares à tela a seguir.



ID/BR

Observando os dois gráficos, percebemos que as duas funções se interceptam em dois pontos; logo, a equação $x^2 - 2x = \log x$ tem duas raízes, ou duas soluções.
No 1º e no 4º quadrante, os valores de x são positivos; portanto, podemos afirmar que a equação tem duas soluções positivas.
Alternativa **c**.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 51)

1. a) $3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$
b) $2^{-6} = x \Rightarrow x = \dfrac{1}{2^6} \Rightarrow x = \dfrac{1}{64}$
c) $10^3 = x \Rightarrow x = 1\,000$
d) $x^4 = \dfrac{1}{2^4} \Rightarrow x^4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$
e) $4^x = 16 \Rightarrow 4^x = 4^2 \Rightarrow x = 2$
f) $x = 2^{16}$

2. a) $x^{27} = 1^{27} \Rightarrow x = 1$
b) $2^x = \dfrac{1}{2^5} \Rightarrow 2^x = 2^{-5} \Rightarrow x = -5$
c) $3^x = \dfrac{1}{3^2} \Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$
d) $x = 0$
e) $2^{\frac{x}{2}} = 2^1 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2$
f) $7^{\frac{x}{3}} = 7^2 \Rightarrow \dfrac{x}{3} = 2 \Rightarrow x = 6$

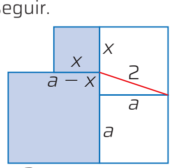
3. a) $3^{-2} = x \Rightarrow x = \dfrac{1}{3^2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{9}$
b) $\log_2 x^2 = 1 \Rightarrow 2^1 = x^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$
c) $3^{x-1} = 3^3 \Rightarrow x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$
d) $(5^2)^x = 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$
e) $5^{1+x-1} = 5^1 \Rightarrow x = 1$
f) $\log(x \cdot 2) = 2 \Rightarrow 10^2 = 2x \Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 50$

PARA RECORDAR (P. 52)

1. Considere:
$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2} \simeq 2{,}83$
$\sqrt{80} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 5} = 4\sqrt{5} \simeq 8{,}94$
No intervalo $[\sqrt{8}, \sqrt{80}]$, o menor número inteiro é 3, e o maior número inteiro é 8. Portanto, existem 6 números inteiros entre $\sqrt{8}$ e $\sqrt{80}$; são eles 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

2. a) Todo número par pode ser escrito na forma $2n$, $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, $f(2n) = 1$.
Todo número ímpar pode ser escrito na forma $2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.
Portanto, $f(2n + 1) = 2$.
b) Como cada número par possui imagem 1 e cada número ímpar possui imagem 2: $\text{Im}(f) = \{1, 2\}$
c) $f(x) = 1 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é par}\}$
d) $f(x) = 2 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é ímpar}\}$

3. Para resolver essa questão, vamos considerar a o lado do quadrado não hachurado e x o lado do quadrado azul menor, conforme a figura a seguir.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, temos:
$(a - x)^2 + a^2 = 2^2$
$2a^2 - 2ax + x^2 = 4$
A soma das áreas dos quadrados azuis, S, por sua vez, é igual a:
$S = (2a - x)^2 + x^2$
$S = 2(2a^2 - 2ax + x^2)$
$S = 2 \cdot 4 = 8$
Alternativa **d**.

4. Analisando o gráfico, temos que a diferença de profundidade entre 15 e 16 são 2 metros, então podemos escrever a seguinte equação:
$\dfrac{10}{100} \cdot p = 2 \Rightarrow p = \dfrac{2}{0{,}1} = 20$
Assim, às 15 horas, a profundidade do rio era 20 metros.
Às 16 horas, a profundidade diminuiu 2 metros, então: $20 - 2 = 18$
Alternativa **a**.

5. a) Os ângulos são congruentes: todos medem 90°.
Analisando as medidas dos lados: $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{4}{3}$
Os lados não são proporcionais.
Portanto, os retângulos não são semelhantes.
b) Temos que os lados são proporcionais:
$\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
Mas os ângulos possuem medidas diferentes, então não são congruentes.
Portanto, os polígonos não são semelhantes.
c) Temos que os lados são proporcionais:
$\dfrac{3}{6} = \dfrac{3}{6}$
E os ângulos são congruentes, ambos medem 60°.
Portanto, os triângulos são semelhantes.

6. a) 45% de 60:
$\dfrac{45}{100} \cdot 60 = \dfrac{9 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10}{10 \cdot 10} = 27$
b) 80% de 28:
$\dfrac{80}{100} \cdot 28 = \dfrac{8 \cdot 10 \cdot 28}{10 \cdot 10} = \dfrac{224}{10} = 22{,}4$
c) 3,5% de 650:
$\dfrac{3{,}5}{100} \cdot 650 = \dfrac{3{,}5 \cdot 10 \cdot 65}{10 \cdot 10} = 22{,}75$

7. $\dfrac{x}{100} \cdot 230 = 62$
$x = \dfrac{62 \cdot 100}{230} = \dfrac{62 \cdot 10 \cdot 10}{23 \cdot 10} = \dfrac{620}{23} = 26{,}96\%$
Ou seja, aproximadamente 27%.

8. Como 40% = 0,40 e 60% = 0,60, temos:
$\dfrac{x - 0{,}4x}{y - 0{,}6y} = \dfrac{0{,}6x}{0{,}4y} = \dfrac{6x}{4y} = \dfrac{3x}{2y} =$
$= 1{,}5 \cdot \dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{y} + 0{,}5\dfrac{x}{y}$
Sendo: 0,5 = 0,50 = 50%
Alternativa **d**.

9. Ao contornar os 2 lados de um parque, a pessoa caminha 2 km, então o tempo para esse percurso será de 24 minutos $(2 \cdot 12 = 24)$.
Para determinar o tempo gasto ao caminhar pela diagonal do parque, podemos utilizar o teorema de Pitágoras:
$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2} \Rightarrow d \simeq 1{,}41$
Assim, a diagonal mede aproximadamente 1,41 km; portanto, o tempo para esse percurso será de aproximadamente 17 minutos $(\sqrt{2} \cdot 12 \simeq 16{,}97)$.
Logo, ao caminhar pela diagonal, a pessoa economizará 7 minutos.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 53)

1. Lendo a questão por completo, podemos apresentar as opções da seguinte maneira:

1	2	3
Verde, Amarelo, Vermelho

1	2	3
Verde, Amarelo, Vermelho

1	2	3
Verde, Amarelo, Vermelho

ID/BR

Se a caixa à esquerda da caixa 1 é verde, então a caixa mais à direita não pode ser verde e a caixa mais à esquerda não pode ser 1.

~~1~~	2	3
Verde, Amarelo, Vermelho

1	2	3
Verde, Amarelo, Vermelho

1	2	3
~~Verde~~, Amarelo, Vermelho

ID/BR

Se a caixa vermelha tem de ficar à esquerda da caixa amarela, então a caixa vermelha não pode ser a caixa mais à direita; logo, a caixa mais à direita é a amarela e caixa do centro é a vermelha. Por consequência, a caixa mais à esquerda é verde. Isso também implica que a caixa do centro é a caixa 1, conforme exposto no item anterior.

~~1~~	2	3
Verde, ~~Amarelo~~, ~~Vermelho~~

1	~~2~~	~~3~~
~~Verde~~, ~~Amarelo~~, Vermelho

~~1~~	2	3
~~Verde~~, Amarelo, ~~Vermelho~~

ID/BR

Se à direita da caixa 2 deve estar a caixa a 1, então, sabendo que a caixa 1 é a caixa do centro, logo, a caixa 2 é a caixa mais à esquerda e, por conseguinte, a caixa 3 é a mais à direita.

~~1~~	2	~~3~~
Verde, ~~Amarelo~~, ~~Vermelho~~

1	~~2~~	~~3~~
~~Verde~~, ~~Amarelo~~, Vermelho

~~1~~	~~2~~	3
~~Verde~~, Amarelo, ~~Vermelho~~

ID/BR

Portanto, temos:

2	1	3

ID/BR

2. Existem três possibilidades de que dois dos três celulares tenham tocado ao mesmo tempo, que é o mesmo que a possibilidade de o celular de um dos alunos não ter tocado. No quadro a seguir, está marcado com **X** o celular que tocou em cada possibilidade.

	Guto	Carlos	Bernardo
1ª possibilidade	X Mentiu	X Disse a verdade	Mentiu
2ª possibilidade	X Mentiu	Mentiu	X Mentiu
3ª possibilidade	Disse a verdade	X Disse a verdade	X Disse a verdade

Alternativa **b**.

MATEMÁTICA E SISMOGRAFIA (P. 54)

Conectando ideias

1. A magnitude de um terremoto relaciona-se com a quantidade de energia liberada, enquanto a intensidade de um terremoto qualifica os efeitos do sismo na região afetada. As escalas de intensidade mais famosas são a de Mercalli e a Macrossísmica Europeia, que avaliam com numerais romanos de I a XII os impactos do terremoto em relação às estruturas físicas e às mudanças nos relevos, com classificações como: imperceptível, bastante forte, cataclismo, na primeira; e não sentido, danificador, completamente devastador, na segunda.

2. Essa atividade pode ser realizada em parceria com os professores de História ou Geografia.

- Com base na magnitude dos terremotos, é possível classificá-los de acordo com o poder de destruição em:

  microssismos ($M < 2$);

  pequeno ($3 < M < 3{,}9$);

  moderado ($5 < M < 5{,}9$);

  forte ($6 < M < 6{,}9$);

  importante ($8 < M < 8{,}9$); entre outros.

- Os principais impactos são a destruição de habitações e estabelecimentos, com o desalojamento de grande parte da população da região, a interrupção do abastecimento de água e de energia elétrica, grandes impactos econômicos, tanto por causa da interrupção do comércio, dos serviços e da indústria, quanto na reconstrução das cidades afetadas, além da morte de milhares de pessoas.

  Esses impactos podem ser reduzidos de acordo com a capacidade e o desenvolvimento do país. Por exemplo, o Japão tem tecnologias avançadas para a diminuição dos danos. Já países como o Haiti sofrem consequências mais duras quando enfrentam algum fenômeno desse tipo.

  De acordo com esse exemplo, cada grupo pode ficar responsável por um terremoto que atingiu determinado país/região, para que o assunto seja abordado de maneira ampla e para que seja possível fazer comparações pertinentes aos impactos do sismo.

- Os estudantes podem pesquisar: estruturas residenciais e prediais de reforço, que previnam o desabamento de construções; cápsulas de proteção, em que pessoas se confinam por segurança; ou, ainda, ações e hábitos de segurança indicados a populações que vivem em regiões suscetíveis a terremotos, como armazenamento de alimentos e líquidos e participação em treinamentos preventivos (esconder-se embaixo de mesas, evitando ficar próximo de móveis que possam desabar, programar-se para sismos secundários, entre outros).

  Com base nessas informações, os estudantes podem desenvolver projetos como: a reprodução de estruturas prediais, com molas e outros materiais, ou de cápsulas de proteção, em escala reduzida; a produção de folhetos informativos sobre os terremotos; a divulgação do trabalho de entidades e órgãos que auxiliam regiões vítimas de fenômenos naturais, explicitando suas ações e assegurando sua confiabilidade; o trabalho e as ações de bombeiros, policiais e agentes de saúde, além das tomadas de decisões do governo; a produção de textos, cartazes, *banners*, infográficos, sínteses, poemas, crônicas, músicas e outros processos criativos que possam servir de informação e conscientização – lembrando que o Brasil, apesar de não sofrer com frequência os efeitos de terremotos, já registrou alguns deles – e possam também despertar a importância de criar e cultivar o sentimento de empatia e cuidado ao próximo.

  É possível também organizar uma feira cultural com projetos que possam ajudar a representar as tecnologias para a redução de danos de catástrofes, tanto na engenharia das cidades quanto em ações imediatas e hábitos que ajudam na segurança dos habitantes, e outras produções artísticas e informativas que os estudantes achem pertinentes.

CAPÍTULO 3 MATEMÁTICA FINANCEIRA

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 61)

1. $L = C \cdot (100\% + i) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} C_T = 200 \text{ m} \to \text{R\$ } 1\,000{,}00 \\ 80 \text{ m} \to 30\% \text{ de } L \\ 90 \text{ m} \to 10\% \text{ de } L \\ 30 \text{ m} \to P_C \end{cases}$

$C = \dfrac{\text{R\$ } 1\,000{,}00}{200 \text{ m}} \Rightarrow C = 5$

$C_{80} = 80 \cdot 5 \Rightarrow C_{80} = 400 \Rightarrow$

$\Rightarrow L_{80} = 400 \cdot (100\% + 30\%) \Rightarrow$

$\Rightarrow L_{80} = \text{R\$ } 520{,}00$

$C_{90} = 90 \cdot 5 \Rightarrow C_{90} = 450 \Rightarrow$

$\Rightarrow L_{90} = 450 \cdot (100\% + 10\%) \Rightarrow$

$\Rightarrow L_{90} = \text{R\$ } 495{,}00$

$L_{30} = 30 \cdot 5 \Rightarrow L_{30} = \text{R\$ } 150{,}00$

$L_{total} = \text{R\$ } 520{,}00 + \text{R\$ } 495{,}00 +$

$+ \text{R\$ } 150{,}00 \Rightarrow L_{total} = \text{R\$ } 1\,165{,}00$

Logo, $p = \dfrac{(1\,165 - 1\,000)}{1\,000} \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 0{,}165 \cdot 100\% \Rightarrow p = 16{,}5\%$.

Alternativa **b**.

2. 3 ——— 100%

x ——— 95%

$x = 2{,}85$

3. Preço do litro da gasolina após aumento em maio: $1{,}52\left(1 + \dfrac{3{,}5}{100}\right) = 1{,}52 + 0{,}05 = 1{,}57$

Preço do litro da gasolina após o aumento em julho: $1{,}57\left(1 + \dfrac{3{,}5}{100}\right) = 1{,}57 + 0{,}06 = 1{,}63$

Portanto, o preço do litro da gasolina em agosto será 1,63 na moeda local.

4. $C(x) = 20\,000 + 60x$, em que x é a quantidade vendida.

$C(x) = 20\,000 + 60x \Rightarrow C(1\,600) = 20\,000 +$

$+ 60 \cdot 1\,600 \Rightarrow C(1\,600) = 116\,000$

$R(x) = 80x \Rightarrow R(1\,600) = 80 \cdot 1\,600 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(1\,600) = 128\,000$

$L(A) = R(x) - C(x) \Rightarrow L(1\,600) =$

$= R(1\,600) - C(1\,600) \Rightarrow L(1\,600) =$

$= 128\,000 - 116\,000 \Rightarrow L(1\,600) = 12\,000$

Reduzindo em 5% o preço de venda, temos:

$R(x) = 75x$

A quantidade mensal vendida do produto aumentará 25%.

Alternativa **c**.

5. Arrecadação A $= 3 \cdot 8\,000 \Rightarrow A = 24\,000$

$\dfrac{L}{C} = 60\% \Rightarrow L = 0{,}60C$

Substituindo $L = V - C$ nessa equação, temos:

$L = V - C \Rightarrow 0{,}60C = V - C \Rightarrow V = 1{,}60C \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}60C = 24\,000 \Rightarrow C = \text{R\$ } 15\,000{,}00$

Alternativa **b**.

6. Gabriel: $1\,000 \cdot (1 + 80\%)^1 \cdot (1 + 0{,}25\%)^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1\,000 \cdot (1 + 80)^1 \cdot (1 + 0{,}25)^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1\,000 \cdot (1 + 80) \cdot (1 + 0{,}25)$

Júlia: $1\,000 \cdot (1 + i)^2$

Assim, para Gabriel e Júlia terem o mesmo montante, temos que:

$1\,000\,(1 + 0{,}80)\,(1 + 0{,}25) = 1\,000\,(1 + i)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}8 \cdot 1{,}25 = (1 + i)^2 \Rightarrow 2{,}25 = (1 + i)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + i = \sqrt{2{,}25} \Rightarrow 1 + i = 1{,}5 \Rightarrow i = 0{,}5$

Alternativa **c**.

7. O investimento de 45 milhões é aplicado em cinco regiões. Então, no total, são:

$45\,000\,000 \cdot 5 = 225\,000\,000$

O lucro do primeiro semestre foi de R\$ 30 000 000,00, e a empresa planeja lucrar 10% a mais no semestre seguinte, ou seja, R\$ 33 000 000,00.

Logo, para cobrir os gastos, devem ser arrecadados, no total:

$225\,000\,000 + 33\,000\,000 = 258\,000\,000$.

Como são 30 000 aparelhos por região, no total, temos: $30\,000 \cdot 5 = 150\,000$.

A arrecadação por unidade é:

$\dfrac{258\,000\,000}{150\,000} = \text{R\$ } 1\,720{,}00$

Alternativa **b**.

8. Componente A: $0{,}200 \cdot 700 = 140$

Componente B: $0{,}070 \cdot 500 = 35$

Componente C: $0{,}130 \cdot 300 = 39$

Componente D: $0{,}100 \cdot 120 = 12$

Assim, atualmente, o custo de produção do medicamento, em real, é:

$140{,}00 + 35{,}00 + 39{,}00 + 12{,}00 = 226{,}00$

Componente A:

$140 \cdot (1 + 0{,}07) = 140 \cdot 1{,}07 = 149{,}80$

Componente B:

$35 \cdot (1 - 0{,}05) = 35 \cdot 0{,}95 = 33{,}25$

Componente C:

$39 \cdot (1 + 0) = 39 \cdot 1 = 39$

Componente D:

$12 \cdot (1 + 0{,}10) = 12 \cdot 1{,}10 = 13{,}2$

Logo, o custo de produção do próximo lote será, em real:

$149{,}80 + 33{,}25 + 39{,}00 + 13{,}20 = 235{,}25$

Portanto, o aumento no custo do medicamento, em real, será de: $235{,}25 - 226{,}00 = 9{,}25$

Alternativa **a**.

9. A rentabilidade anual de cada investimento é dada por:

A: $V \cdot (1{,}03)^{12} = 1{,}426V$

B: $V \cdot (1{,}36) = 1{,}36V$

C: $V \cdot (1{,}18)^2 = 1{,}392V$

Alternativa **c**.

10. O ganho na poupança é dado por:

$\dfrac{0{,}560}{100} \cdot 500 = 2{,}80$

O ganho no CDB é dado por:

$\dfrac{0{,}876}{100} \cdot 500 - \dfrac{4}{100} \cdot \dfrac{0{,}876}{100} \cdot 500 = 4{,}21$

Logo, o CDB é mais vantajoso, pois totalizará um montante de R\$ 504,21.

Alternativa **d**.

11. A alternativa **c** da questão anterior está errada porque não foram descontados os 4% do Imposto de Renda sobre o ganho.

12. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

Ao final de um mês, o ganho com o CDB é de R\$ 1,41 a mais que com a poupança.

No primeiro mês, o desconto do Imposto de Renda que incide sobre o ganho no CDB é de R\$ 0,17.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 69)

13. $M = C \cdot (1 + i \cdot t)$

$M = 400 \cdot (1 + 0{,}2 \cdot 0{,}5) = 440$

14. À vista: $0{,}9x$ (ou duas parcelas de $0{,}5x$)

No preço de tabela, há um acréscimo de $0{,}1x$.

A prazo, se não houvesse juros, as parcelas seriam $0{,}5x$ e $0{,}4x$.

Como $0{,}1x$ é 25% de $0{,}4x$, teremos uma taxa mensal de juros de 25%.

Alternativa **e**.

15. Alfa: $J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 2000{,}00 \cdot \dfrac{12}{100} \cdot 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow J = 1\,200{,}00$

$M = C + J \Rightarrow M = 2\,000{,}00 + 1\,200{,}00 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = 3\,200{,}00$

Beta: $(3\,200{,}00 + x) \cdot \left(1 + \dfrac{10}{100}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3\,200{,}00 + x) \cdot (1{,}1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3\,200{,}00 + x) \cdot 1{,}21 \Rightarrow x = 1\,800{,}00$

Portanto, o valor de x que foi acrescentado ao montante y é de R\$ 1 800,00.

16. $M = C \cdot (1 + i)^t$
$M = 14\,000 \cdot (1 + 0{,}015)^{30}$
$M \simeq 21\,883{,}12$
Fábio recebeu R$ 21 883,12.
$100\% - 13\% = 87\%$
$21\,883{,}12$ ——— 100%
x ——— 87%
$x = 19\,038{,}32$

17. $M = C \cdot (1 + i)^t$
$12\,825 = C \cdot (1 + 0{,}07)^{24}$
$C \simeq 2\,528{,}41$

18. $M = C \cdot (1 + i)^t$
$65\,400 = 60\,000 \cdot (1 + 0{,}022)^t$
$1{,}09 = 1{,}022^t$
$\log 1{,}09 = \log 1{,}022^t$
$\log 1{,}09 = t \cdot \log 1{,}022$
$t = 4$

19. $M = C \cdot (1 + i)^t$
$36\,087 = 24\,000\,(1 + i)^8$
$1{,}503625 = (1 + i)^8$
$1{,}05230 = 1 + i$
$i = 0{,}05230 \Rightarrow i = 5{,}23\%$
Com essa taxa, ele vai receber mais do que o planejado. A taxa ideal seria de aproximadamente 5,23%.

20. $9\,600$ ——— 100%
x ——— 93%
$x = \dfrac{9\,600 \cdot 93}{100} \Rightarrow x = 8\,928{,}00$
Pela fórmula dos juros compostos, temos:
$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M = 8\,928 \cdot (1 + 0{,}05)^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 10\,713{,}60$
Para calcular os juros, temos:
$M = C + J \Rightarrow 10\,713{,}60 = 8\,928 + J \Rightarrow$
$\Rightarrow J = 1\,785{,}60$
Alternativa **c**.

21. $400 = 200\,(1 + 0{,}05)^t$
$2 = (1 + 0{,}05)^t$
Usando logaritmos, temos:
$\log 2 = t \cdot \log\,(1 + 0{,}05)$
$0{,}30 = t \cdot 0{,}02$
$t = 15$
Alternativa **b**.

TECNOLOGIA (P. 70)

1. a) O valor futuro do capital após os 10 meses foi de R$ 5 308,23.
b) $M = C + J \Rightarrow 5308{,}23 = 5000{,}00 + J \Rightarrow J = 308{,}23$. Portanto, os juros obtidos nesse período foram de R$ 308,23.
c) $M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 5\,000{,}00 \cdot (1 + + 0{,}006)^{10} \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 5\,000{,}00 \cdot (1{,}006)^{10} \Rightarrow$
$\Rightarrow M =$ R$ 5 308,23. Resposta pessoal.

2. $M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 36\,087 = 24\,000 \cdot (1 + i)^8 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1{,}503625 = (1 + i)^8 \Rightarrow 1 + i = \sqrt[8]{1{,}503625} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + i = 1{,}05230 \Rightarrow i = 1{,}05230 - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow i = 0{,}05230 \Rightarrow i = 5{,}23\%$
Resposta pessoal. Para ele receber o valor que havia estipulado, a taxa seria aproximadamente 5,23%.

3. a) $M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 4650 = 4000 \cdot (1 + 0{,}009)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{4\,650}{4\,000} = (1{,}009)^t \Rightarrow 1{,}1625 = (1{,}009)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow \log 1{,}1625 = t \cdot \log 1{,}009 \Rightarrow 0{,}0654 =$
$= t \cdot 0{,}0039 \Rightarrow t = \dfrac{0{,}0654}{0{,}0039} \Rightarrow t \simeq 17$ meses
b) $M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 18000 = 15000 \cdot (1 + i)^6 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{18\,000}{15\,000} = (1 + i)^6 \Rightarrow 1{,}2 = (1 + i)^6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + i = \sqrt[6]{1{,}2} \Rightarrow 1 + i = 1{,}0308 \Rightarrow$
$\Rightarrow i = 1{,}0308 - 1 \Rightarrow i = 0{,}0308 \Rightarrow i \simeq 3{,}08\%$
c) $M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 10000 = C \cdot (1 + 0{,}019)^{20} \Rightarrow$
$\Rightarrow C \simeq R\$\ 6\,863{,}04$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 76)

22. a) $10{,}34715 \simeq 10{,}3472 \simeq 10{,}347 \simeq 10{,}35$
b) $11{,}26581 \simeq 11{,}2658 \simeq 11{,}266 \simeq 11{,}27$

23. Resposta pessoal.
Exemplo de resposta: A aproximação por truncamento não considera os dígitos a partir de um determinado algarismo. Considerando o número 0,37603, por exemplo: ao escrevê-lo com dois dígitos, utilizando a técnica de truncamento, obteríamos 0,37; utilizando a técnica apresentada no livro, obteríamos 0,38.

24. $M = C(1 - i \cdot t)$
$120\,000 = 800\,000 - 800\,000 \cdot i \cdot t$
$120\,000 = 800\,000 - 80\,000t$
$t = 8{,}5$

25. $M = C(1 - i \cdot t)$
$1\,000 = 6\,000\,(1 - 5i)$
$5i = 1 - \dfrac{1}{6} \Rightarrow i = \dfrac{1}{6}$
Em dois anos, temos $i = \dfrac{2}{6}$, e a depreciação é de R$ 2 000,00. Portanto, o valor do computador, em reais, depreciado em dois anos é: $6\,000 - 2\,000 = 4\,000$

26. Observando o gráfico, temos:

$$\begin{array}{ccc} & x & N(x) \\ +20 & 20 & 360 & -240 \\ & 40 & 120 \end{array}$$

$\dfrac{\Delta N(x)}{\Delta x} = \dfrac{-240}{20} = -12$
$N(x) - N(x_0) = m(x - x_0)$
$N(x) - 360 = -12\,(x - 20)$
$N(x) = -12x + 600$
Se $R(x)$ é o valor arrecadado na venda de $N(x)$ ingressos, então:
$R(x) = N(x) \cdot x = x(-12x + 600) = 0$
$x = 0$ ou $-12x + 600 = 0 \Rightarrow x = 50$
$x_i = \dfrac{0 + 50}{2} = 25$
Logo, o valor do ingresso deve ser R$ 25,00.

27. Dado que $M = 9\,000$, $C = 90\,000$ e $t = 10$ em regime de juros simples, temos:
$M = C(1 - i \cdot t)$
$9\,000 = 90\,000(1 - 10i)$
$10i = 1 - \dfrac{1}{10}$
$i = 0{,}09 = 9\%$
Então, o valor depreciado a cada ano é igual a 9% de R$ 90 000,00, o que corresponde a R$ 8 100,00.

28. Dados $M = 60\,000$, $C = 390\,000$ e $t = 150$ meses em sistema de juros compostos, temos:
$M = C\,(1 + i)^t$
$60\,000 = 390\,000\,(1 + i)^{150}$
$0{,}15 = (1 + i)^{150}$
$1 + i = \sqrt[150]{0{,}15} \simeq 0{,}99$
$i = -0{,}01 = -1\%$
Então, a depreciação é de 1% ao mês, e o valor do caminhão ao final de 8 meses será:
$x = 390\,000\,(1 - 0{,}01)^8$
$x = 359\,870{,}43$

29. A resolução de Pedro está correta.

30. $M = C \cdot (1 - i)^t$
Depreciação em 3 anos: $M = C \cdot (1 - i)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 22\,000 \cdot (1 - 0{,}045)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 19\,161{,}64$
$V = (100\% + 2\%) \cdot M \Rightarrow$
$\Rightarrow V = \dfrac{102}{100} \cdot 19\,161{,}64 \Rightarrow V = 19\,544{,}88$

31. $M = C\,(1 + i)^t$
$4\,000 = 12\,000\,(1 + i)^{15}$
$\dfrac{1}{3} = (1 + i)^{15}$
$1 + i = \sqrt[15]{\dfrac{1}{3}} \simeq 0{,}91$
$i = -0{,}09$
Então, a depreciação é de 9% do valor de cada ano. Completando o quadro, temos:

t	i	Valor depreciado R$	Valor residual R$
1	9%	9% de 12 000,00 = = 1 080,00	12 000,00 − 1 080,00 = = 10 920,00
2	9%	9% de 10 920,00 = = 982,80	10 920,00 − 982,80 = = 9 937,20
3	9%	9% de 9 937,20 = = 894,35	9 937,20 − 894,35 = = 9 042,85
4	9%	9% de 9 042,85 = = 813,86	9 042,85 − 813,86 = = 8 228,99

32. Amortização: $= \dfrac{8\,000}{16} = 500{,}00$
Dívida: $D_8 = D_1 - 7 \cdot Amort \Rightarrow$
$\Rightarrow D_8 = 8\,000{,}00 - 7 \cdot 500{,}00 \Rightarrow$
$\Rightarrow D_8 = 4\,500{,}00$
Juros: $J_8 = D_8 \cdot i \Rightarrow J_8 = 4\,500{,}00 \cdot \left(\dfrac{5}{100}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow J_8 = 225{,}00$
Prestação: $P_8 = Amort + J_8 \Rightarrow P_8 = 500{,}00 + 225{,}00 \Rightarrow P_8 = 725{,}00$. Logo, o valor da oitava prestação é R$ 725,00.
Alternativa **e**.

33. Amortização: $\dfrac{200\,000}{120} = \dfrac{5\,000}{3}$
Juros: $J_1 = \dfrac{1}{100} \cdot 200\,000 \Rightarrow J_1 = 2\,000$
Para calcular a 50ª parcela, usaremos a progressão aritmética. Assim:
$J_{50} = J_1 + (50 - 1) \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow r = -\dfrac{1}{100} \cdot \dfrac{5\,000}{3} \Rightarrow r = -\dfrac{50}{3}$
Substituindo os valores, temos:
$\Rightarrow J_{50} = 2\,000 + 49 \cdot \left(-\dfrac{50}{3}\right) \Rightarrow J_{50} = \dfrac{3\,550}{3}$
Para calcular a prestação da 50ª parcela, temos: $P_{50} = A + J_{50} \Rightarrow$
$\Rightarrow P_{50} = \dfrac{5\,000}{3} + \dfrac{3\,550}{3} \Rightarrow P_{50} = \dfrac{8\,550}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow P_{50} = 2\,850$. Logo, R$ 2 850,00.
Alternativa **b**.

34. Analisando os dados, temos:
Janeiro: $J = 100 \cdot 60 - (2\,000 + 30 \cdot 100) \Rightarrow$
$\Rightarrow J = 1\,000$
Fevereiro: $F = 180 \cdot 50 - (1\,900 + 35 \cdot 180) \Rightarrow$
$\Rightarrow F = 800$
Março: $M = 200 \cdot 60 - (2\,100 + 25 \cdot 200) \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 4\,900$
Abril: $A = 150 \cdot 55 - (2\,000 + 30 \cdot 150) \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 1\,750$
O gráfico que melhor representa o lucro mensal, em real, no período considerado é o da alternativa **d**.

35. • Fibonacci:

$\begin{cases} C = 1 \\ i = ? \\ t = 5 \\ M = 2 \end{cases}$ $\quad 2 = 1(1 + i)^5$; $2 = (1 + i)^5$; $\sqrt[5]{2} - 1 = i$

$\begin{cases} C = 2 \\ i = ? \\ t = 5 \\ M = 4 \end{cases}$ $\quad 4 = 2(1 + i)^5$; $2 = (1 + i)^5$; $i = \sqrt[5]{2} - 1$

$M = ?$
$M = 1\left(1 + \sqrt[5]{2} - 1\right)^{100}$
$T = 100$
$M = \left(\sqrt[5]{2}\right)^{100} \Rightarrow M = 2^{20}$
Portanto, $(2^{20} - 1)$ denários é quanto ele ganharia além do denário inicial.

• Tartaglia:
$c = 2814$
$618 \cdot 9 = 5562$
$j = 618$/ano
$t = 9$; $i = ?$

Juros simples	Juros compostos
$5562 - 2814 =$	$5562 =$
$= 2814 \cdot i \cdot 9$	$= 2814\,(1 + i)^9$
$i \simeq 11\%$ a.a.	$i \simeq 8\%$ a.a.

Portanto, o mercador estava obtendo 11% a.a. de juros simples ou 8% a.a. de juros compostos sobre seu dinheiro.

36. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: João quer aplicar R\$ 110,00 com o objetivo de, após 6 meses, ter guardado R\$ 246,00. Que taxa mensal sua aplicação deverá ter para que ele consiga o valor desejado?

CÁLCULO RÁPIDO (P. 78)

1. a) $\frac{50}{100} \cdot 400 = 200$ e $\frac{25}{100} \cdot 400 = 100$

Então, 75% de 400 é $200 + 100 = 300$.

b) Temos: $\frac{50}{100} \cdot 60 = 30$ e $\frac{25}{100} \cdot 60 = 15$

Então, 75% de 60 é $30 + 15 = 45$.

c) Temos: $\frac{50}{100} \cdot 1\,700 = 850$ e

$\frac{25}{100} \cdot 1\,700 = 425$

Então, 75% de 1 700 é $850 + 425 = 1\,275$.

2. a) Como $45\% = 50\% - 5\%$, calculamos:

$\frac{50}{100} \cdot 200 = 100$ e $\frac{5}{100} \cdot 200 = 10$

Então, temos que 45% de 200 é 90, pois $100 - 10 = 90$.

b) Como $20\% = 10\% + 10\%$, calculamos:

$\frac{10}{100} \cdot 356 = 35{,}6$

Então, temos que 20% de 356 é 71,2, pois $35{,}6 + 35{,}6 = 71{,}2$

c) Como $65\% = 50\% + 10\% + 5\%$, calculamos:

$\frac{50}{100} \cdot 1380 = 690$, $\frac{10}{100} \cdot 1380 = 138$ e

$5\% \cdot 1380 = 69$

Então, temos que 65% de 1 380 é 897, pois $690 + 138 + 69 = 897$.

d) Como $150\% = 100\% + 50\%$, calculamos: $\frac{50}{100} \cdot 50 = 25$

Então, temos que 150% de 50 é 75, pois $50 + 25 = 75$.

e) Como $37{,}5\% = \frac{75\%}{2} = \frac{(100\% - 25\%)}{2} =$

$= \left(\frac{100\%}{2} - \frac{25\%}{2}\right)$, calculamos:

$\frac{100\%}{2} \cdot 80 = 40$ e $\frac{25\%}{2} \cdot 80 = 10$

Então, temos que 37,5% de 80 é 30, pois $40 - 10 = 30$.

f) Como $15\% = 10\% + 5\%$, calculamos:

$\frac{10}{100} \cdot 540 = 54$ e $\frac{5}{100} \cdot 540 = 27$.

Então, temos que 15% de 540 é 81, pois $54 + 27 = 81$.

3. a) $\frac{10}{100} \cdot x = 20$

$x = 200$

b) $\frac{60}{100} \cdot y = 12$

$y = 20$

c) $\frac{25}{100} \cdot z = 4$

$z = 16$

d) $\frac{80}{100} \cdot w = 120$

$w = 150$

4. a) $\frac{4}{10} = 0{,}4 \Rightarrow \frac{4}{100} = 0{,}04 \Rightarrow \frac{4}{1\,000} = 0{,}004$

b) $\frac{0{,}04}{10} = 0{,}004 \Rightarrow \frac{0{,}04}{100} = 0{,}0004 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{0{,}04}{1000} = 0{,}00004$

c) $\frac{64}{10} = 6{,}4 \Rightarrow \frac{64}{100} = 0{,}64 \Rightarrow \frac{64}{1\,000} = 0{,}064$

d) $\frac{1{,}01}{10} = 0{,}101 \Rightarrow \frac{1{,}01}{100} = 0{,}0101 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1{,}01}{1\,000} = 0{,}00101$

e) $\frac{130}{10} = 13 \Rightarrow \frac{130}{100} = 1{,}3 \Rightarrow \frac{130}{1\,000} = 0{,}13$

f) $\frac{10{,}2}{10} = 1{,}02 \Rightarrow \frac{10{,}2}{100} = 0{,}102 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{10{,}2}{1\,000} = 0{,}0102$

g) $\frac{0{,}4}{10} = 0{,}04 \Rightarrow \frac{0{,}4}{100} = 0{,}004 \Rightarrow \frac{0{,}4}{1\,000} = 0{,}0004$

h) $\frac{102}{10} = 10{,}2 \Rightarrow \frac{102}{100} = 1{,}02 \Rightarrow \frac{102}{1\,000} = 0{,}102$

i) $\frac{6{,}4}{10} = 0{,}64 \Rightarrow \frac{6{,}4}{100} = 0{,}064 \Rightarrow \frac{6{,}4}{1\,000} = 0{,}0064$

5. a) $4 \cdot 10 = 40$

$4 \cdot 100 = 400$

$4 \cdot 1\,000 = 4\,000$

b) $0{,}04 \cdot 10 = 0{,}4$

$0{,}04 \cdot 100 = 4$

$0{,}04 \cdot 1\,000 = 40$

c) $64 \cdot 10 = 640$

$64 \cdot 100 = 6\,400$

$64 \cdot 1\,000 = 64\,000$

d) $1{,}01 \cdot 10 = 10{,}1$

$1{,}01 \cdot 100 = 101$

$1{,}01 \cdot 1\,000 = 1\,010$

e) $130 \cdot 10 = 1\,300$

$130 \cdot 100 = 13\,000$

$130 \cdot 1\,000 = 130\,000$

f) $10{,}2 \cdot 10 = 102$

$10{,}2 \cdot 100 = 1\,020$

$10{,}2 \cdot 1\,000 = 10\,200$

g) $0{,}4 \cdot 10 = 4$

$0{,}4 \cdot 100 = 40$

$0{,}4 \cdot 1\,000 = 400$

h) $102 \cdot 10 = 1\,020$

$102 \cdot 100 = 10\,200$

$102 \cdot 1\,000 = 102\,000$

i) $6{,}4 \cdot 10 = 64$

$6{,}4 \cdot 100 = 640$

$6{,}4 \cdot 1\,000 = 6\,400$

6. a) $1{,}22 \cdot 1{,}27 = \frac{12{,}2}{10} \cdot 1{,}27 = 1{,}5494$

b) $122 \cdot 1{,}27 = 12{,}2 \cdot 10 \cdot 1{,}27 = 154{,}94$

c) $0{,}122 \cdot 1{,}27 = \frac{12{,}2}{100} \cdot 1{,}27 = 0{,}15494$

d) $122 \cdot 127 = 12{,}2 \cdot 10 \cdot 1{,}27 \cdot 100 = 15\,494$

e) $0{,}122 \cdot 127 = \frac{12{,}2}{100} \cdot 1{,}27 \cdot 100 = 15{,}494$

f) $12{,}2 \cdot 12{,}7 = 12{,}2 \cdot 1{,}27 \cdot 10 = 154{,}94$

7. a) $0{,}2 \cdot 3 = \frac{2}{10} \cdot 3 = 0{,}6$

b) $0{,}2 \cdot 0{,}3 = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0{,}06$

c) $0{,}2 \cdot 0{,}2 = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = 0{,}04$

d) $0{,}02 \cdot 2 = \frac{2}{100} \cdot 2 = 0{,}04$

PARA RECORDAR (P. 78)

1. $h(x) = \sqrt{-2x + 3}$

Como o radicando não pode ser negativo, temos:

$-2x + 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \frac{3}{2}$

Portanto, $D(h) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$.

2. Conjunto A, em reais: $1\,200 + 0{,}2x$, em que x é a arrecadação.

Conjunto B, reais: 2 000.

a) $1\,200 + 0{,}2x < 2\,000 \Rightarrow x < 4\,000$

Como são 500 convidados, cada um deve pagar 8 reais.

b) Pagando esse valor por convite, sobrarão 2 000 reais, pois:

$4\,000 \cdot 0{,}2 + 1\,200 = 2\,000$

3. a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$

$a = 1$, $b = -8$ e $c = 12$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (12) \Rightarrow \Delta = 16$

$x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_V = \frac{-(-8)}{2 \cdot (1)} \Rightarrow x_V = 4$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-16}{4 \cdot (1)} \Rightarrow y_V = -4$

Portanto, as coordenadas do vértice são: $(4, -4)$.

b) $g(x) = x^2 + 4x + 6$

$a = 1$, $b = 4$ e $c = 6$

$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (6) \Rightarrow \Delta = -8$

$x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_V = \frac{-4}{2 \cdot (1)} \Rightarrow x_V = -2$

$y_V = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-(-8)}{4 \cdot (1)} \Rightarrow y_V = 2$

Portanto, as coordenadas do vértice são: $(-2, 2)$.

4. Primeiro aumento: 15%

Total de 61%

f_1: $15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15 = 1{,}15$

f_{total}: $61\% = \frac{61}{100} = 0{,}61 = 1{,}61$

Vamos calcular o valor do segundo aumento. Temos que: $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_n = f_{total}$

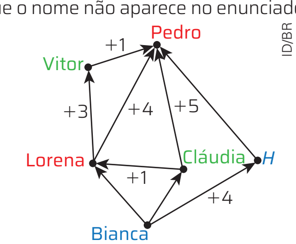
$1{,}15 \cdot f_2 = 1{,}61 \Rightarrow f_2 = \frac{1{,}61}{1{,}15} \Rightarrow f_2 = 1{,}4$

Logo, $1{,}4 - 1 = 0{,}4 = 0{,}4 \cdot 100 = 40\%$.

Alternativa **b**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 79)

1. No diagrama a seguir, estão representados por setas a quantidade de livros a mais comprados entre as pessoas citadas, de acordo com a orientação da seta. A letra *H* indica o homem que o nome não aparece no enunciado.



Como Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia e cada homem comprou 4 livros a mais que sua esposa, conclui-se que Pedro não é o marido de Cláudia. Por outro lado, Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia, que comprou mais livros que Bianca; logo, Pedro não é o marido de Bianca, ou seja, ele é o marido de Lorena.

Como Pedro comprou 5 livros a mais que Cláudia e 4 livros a mais que Lorena, conclui-se que Lorena comprou 1 livro a mais que Cláudia, o que nos dá a flecha que liga Cláudia a Lorena. As flechas que ligam Cláudia a Vítor, passando por Lorena, mostram que Vítor comprou 4 livros a mais que Cláudia; como Cláudia comprou mais livros que Bianca, conclui-se que Vítor comprou pelo menos 5 livros a mais que Bianca. Logo, Vítor não é o marido de Bianca, ou seja, ele é o marido de Cláudia.

Nota-se ainda que Pedro comprou pelo menos 6 livros a mais que Bianca; como *H* comprou 4 livros a mais que Bianca, conclui-se que Pedro comprou mais livros que *H*.

Finalmente, como Pedro comprou 4 livros a mais que Lorena e Vítor comprou 3 livros a mais que Lorena, conclui-se que Pedro comprou 1 livro a mais que Vítor.

Alternativa **c**.

2. Se Betina está correta e ontem foi dia 11, então hoje é dia 12. Isso significa que:

- A afirmação de Betina está correta.
- A afirmação de Ciça também está correta, pois se hoje é dia 12, amanhã será dia 13.
- A afirmação de Ana está incorreta, pois hoje é dia 12, não dia 13.

Portanto, as afirmações foram feitas no dia 12. Ana enganou-se, enquanto Betina e Ciça estavam corretas.

Alternativa **c**.

MATEMÁTICA E FINANÇAS (P. 80)

Conectando ideias

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal. Sugerimos a realização da pesquisa e o tratamento da informação para que os estudantes possam verificar o conhecimento de Matemática Financeira das pessoas da família e como eles podem ser agentes de mudança da realidade ao seu redor. Com essa pesquisa, espera-se que eles compartilhem informações sobre as variáveis financeiras estudadas no capítulo com as pessoas da família e forneçam dados que possam contribuir para a Educação Financeira de seus familiares, uma vez que, ao perceber fatores como os valores pagos de juros no cartão de crédito, as pessoas podem repensar seu planejamento financeiro ou mesmo iniciar um planejamento desse tipo.

Se necessário, sugira outras perguntas para a formulação da pesquisa, adaptando-as à realidade da turma. Para a construção do gráfico, os estudantes podem escolher as variáveis que serão analisadas e mostrar, por exemplo, qual é o comportamento de consumo das mulheres e dos homens pesquisados, das pessoas por faixa etária, ou, ainda, por faixa de renda, entre outros aspectos. Com essa atividade, reforçamos a importância de usar outros instrumentos, como o levantamento estatístico, para a compreensão de assuntos do dia a dia que têm impacto na vida familiar e social.

! Resposta pessoal.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 82)

1. Para saber o valor do caminhão zero, calcula-se $V(t)$, quando t = 0:

$V(0) = 65\,000 \cdot 4^{-0{,}04 \cdot 0} = 65\,000$

Como o valor após a depreciação é um oitavo do valor original: $\frac{1}{8} \cdot 65\,000 = 8\,125$

Para calcular o tempo necessário para que o caminhão passe a valer 8 125, tem-se:

$8125 = 65\,000 \cdot 4^{-0{,}04t} \Rightarrow \frac{8125}{65\,000} = 4^{-0{,}04t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2^3} = 2^{2(-0{,}04t)} \Rightarrow t = \frac{-3}{-0{,}08} = 37{,}5$

Alternativa **a**.

2. Para que a Rede **A** e Rede **B** alcancem o mesmo número de usuários, y, tem-se:

$100\,000 \cdot 10^{\frac{t}{20}} = 10\,000 \cdot 2^{\frac{t}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{\frac{t+20}{20}} = 2^{\frac{t}{3}} \Rightarrow \log_{10}^{10^{\frac{t+20}{20}}} = \log_{10}^{2^{\frac{t}{3}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{t+20}{20} \log_{10}^{10} = \frac{t}{3} \cdot \log_{10}^{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{t+20}{20} = \frac{t}{3} \cdot 0{,}3 \Rightarrow t = 20$

Alternativa **e**.

3. Para $P = 500$ tem-se:

$500 = \frac{800}{200 \cdot e^{-0{,}24t} + 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 200 \cdot e^{-0{,}24t} + 1 = \frac{800}{500} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-0{,}24t} = 3 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln e^{-0{,}24t} = \ln(3 \cdot 10^{-3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow -0{,}24t = \ln 3 + \ln 10^{-3} \Rightarrow t = 24{,}2$

Alternativa **d**.

UNIDADE 2 GEOMETRIA PLANA

CAPÍTULO 4 GEOMETRIA EUCLIDIANA

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 90)

1. a) Utilizando o teorema de Pitágoras:

$17^2 = x^2 + 15^2$

$x^2 = 64$

$x = 8$

Assim, o cateto mede 8 cm.

b) Utilizando o teorema de Pitágoras:

$\left(10\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + 10^2$

$x^2 = 100$

$x = 10$

Assim, o cateto mede 10 cm.

c) Utilizando o teorema de Pitágoras:

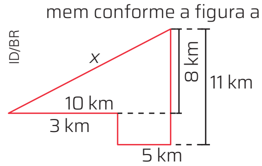
$x^2 = 12^2 + \left(12\sqrt{3}\right)^2$

$x^2 = 576$

$x = 24$

Assim, a hipotenusa mede 24 cm.

2. Podemos representar o percurso desse homem conforme a figura a seguir.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

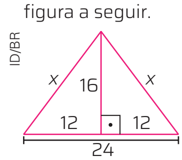
$x^2 = (10 + 5)^2 +$
$+ (11 - 3)^2$

$x^2 = 289$

$x = 17$

Portanto, a distância entre o ponto de partida e o de chegada é 17 km.

3. Podemos representar o triângulo conforme a figura a seguir.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

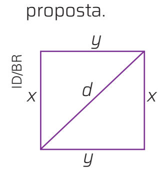
$x^2 = 16^2 + 12^2$

$x = 20$

$x^2 = 400$

Assim, os outros lados medem 20 cm. Então, o perímetro, em cm, é: $p = 20 + 20 + 24 = 64$

4. O retângulo a seguir representa a situação proposta.



Como os lados têm medidas proporcionais a 3 e a 4, então, $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$.

Sabendo-se que o perímetro do retângulo mede 42 cm, temos:

$2x + 2y = 42$

$x = 21 - y$

Substituindo $x = 21 - y$ em $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$, temos: $y = 12$

Substituindo $y = 12$ em $x = 21 - y$, encontramos: $x = 9$

Para determinar a diagonal, temos:

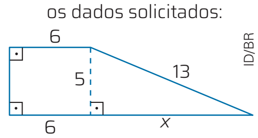
$d^2 = 9^2 + 12^2$

$d^2 = 225$

$d = 15$

Portanto, a diagonal mede 15 cm.

5. Representando em uma figura o trapézio com os dados solicitados:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

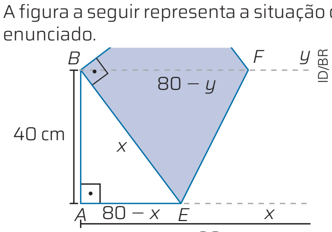
$13^2 = 5^2 + x^2$

$x^2 = 144$

$x = 12$

Portanto, a medida da base maior será 18 cm, pois 6 + 12 = 18.

6. a) A figura a seguir representa a situação do enunciado.



Considerando o triângulo ABE, temos:

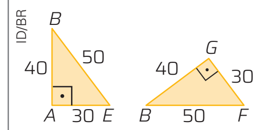
$x^2 = 40^2 + (80 - x)^2 \Rightarrow x = 50$

Portanto, $EB = 50$ cm.

b) Considerando o triângulo GBF, temos:

$(80 - y)^2 = 40^2 + y^2 \Rightarrow y = 30$

Assim, $BG = 40$ cm, $GF = 30$ cm e $BF = 50$ cm.



Os dois triângulos têm os três lados com medidas iguais. Portanto, ABE e GBF são congruentes pelo caso LLL.

7. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que o conhecimento das ternas pitagóricas pode ser bastante útil em problemas que envolvam triângulos retângulos, como no caso das diagonais de um retângulo e, potencialmente, da base maior de um trapézio, dependendo da configuração do problema. No caso do perímetro de um triângulo isósceles, apesar de a utilidade das ternas ser mais limitada, elas podem ser aplicadas em situações específicas.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 94)

8. $\frac{3}{3{,}3} = \frac{x}{4{,}4} = \frac{6}{y}$

$\frac{3}{3{,}3} = \frac{x}{4{,}4} \Rightarrow x = 4$

$\frac{3}{3{,}3} = \frac{6}{y} \Rightarrow y = 6{,}6$

9. $\frac{24 + 2x - 1}{2x - 1} = \frac{24}{2x - 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{23 + 2x}{2x - 1} = \frac{24}{2x - 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow (23 + 2x)(2x - 5) = 24(2x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 12x - 91 = 0$

$\Delta = (-12)^2 - 4(4)(-91) = 1\,600$

$x = \frac{12 \pm 40}{8} \Rightarrow x = 6{,}5$ ou $x = -3{,}5$ (não convém)

Portanto, $x = 6{,}5$.

10. Como AMN e ABC são triângulos semelhantes, então temos as proporções:

$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{x}{2}}{2{,}5 + \frac{x}{2}} = \frac{\frac{y-3}{2}}{2 + \left(\frac{y-3}{2}\right)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{5 + x} = \frac{y - 3}{y + 1} \Rightarrow 4x = 5y - 15$

O perímetro do triângulo maior mede 18 cm; logo, temos que:

$AB + AC + BC = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}5 + \frac{x}{2} + 2 + \frac{y-3}{2} + 4{,}5 = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = 21 \Rightarrow y = 21 - x$

Substituindo y na equação, temos:

$4x = 5y - 15 \Rightarrow 4x = 5(21 - x) - 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x = 90 \Rightarrow x = \frac{90}{9} \Rightarrow x = 10$ cm

Substituindo x na equação, temos:

$y = 21 - x \Rightarrow y = 21 - 10 \Rightarrow y = 11$ cm

Logo, $P = AM + AN + MN \Rightarrow$

$\Rightarrow P = \frac{x}{2} + \frac{y-3}{2} + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow P = \frac{10}{2} + \frac{11-3}{2} + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow P = 5 + 4 + 3 \Rightarrow P = 12$ cm

11. Lote 1 : $\frac{42}{15 + 20} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = 18$ m

Lote 2 : $\frac{42}{15 + 20} = \frac{y}{20} \Rightarrow y = 24$ m

12. a) $\frac{117}{25 + 30 + 55} = \frac{z}{25} \Rightarrow z = 32{,}5$

$\frac{117}{25 + 30 + 55} = \frac{y}{30} \Rightarrow y = 39$

$\frac{117}{25 + 30 + 55} = \frac{x}{35} \Rightarrow x = 45{,}5$

b) Há um erro na soma $7x + 6x + 5x$, que é igual a $18x$, e não a $17x$.

$7x + 7y + 7z = 819 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x + 6x + 5x = 819 \Rightarrow$

$\Rightarrow 18x = 819 \Rightarrow x = 45,5$

13. De acordo com a figura e com teorema de Tales, temos:

$\frac{160}{120} = \frac{300}{x} \Rightarrow x = 225$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$y^2 = 300^2 + 225^2 \Rightarrow y^2 = 90000 + 50625 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = 140625 \Rightarrow y = 375$

Com isso, temos: $300 \cdot 225 = 375\,H \Rightarrow$

$\Rightarrow 67\,500 = 375\,H \Rightarrow H = \frac{67\,500}{375} \Rightarrow$

$\Rightarrow H = 180.$

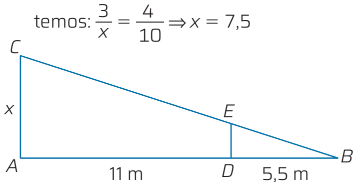
Alternativa **e**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 96)

14. a) Pela proporcionalidade do teorema de Tales, temos: $\frac{5}{10} = \frac{7}{2x - 6} \Rightarrow x = 10$

b) Pela proporcionalidade do teorema de Tales, temos: $\frac{3}{x} = \frac{4}{10} \Rightarrow x = 7,5$

15.



ID/BR

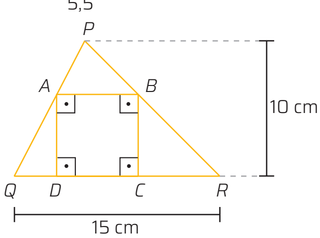
Queremos determinar $AC = x$, que representa a altura da árvore.

Pela proporcionalidade entre os lados dos dois triângulos semelhantes, temos:

$\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{x}{1,8} = \frac{11 + 5,5}{5,5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{29,7}{5,5} = 5,4$

16.



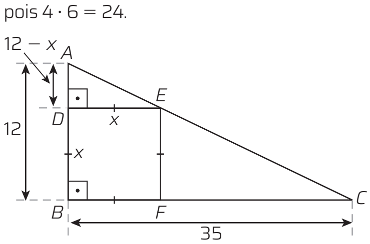
ID/BR

$\frac{AB}{QR} = \frac{10 - BC}{10} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{10 - x}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x = (10 - x) \cdot 15 \Rightarrow x = 6$

Logo, o perímetro do quadrado mede 24 cm, pois $4 \cdot 6 = 24$.

17.



ID/BR

Os triângulos ABC e ADE são semelhantes pelo critério ângulo - ângulo. Logo,

$\frac{35}{x} = \frac{12}{12 - x} \Rightarrow 35(12 - x) = 12x \Rightarrow x \simeq 8,9$

A medida está mais próxima de 9,0 cm.

Alternativa **c**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 98)

18. a) $p = \frac{a + b + c}{2} \Rightarrow p = \frac{4 + 4 + 4}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow p = \frac{12}{2} \Rightarrow p = 6$

$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \sqrt{6(6 - 4)(6 - 4)(6 - 4)} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \sqrt{48} \Rightarrow A = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

b) $p = \frac{a + b + c}{2} \Rightarrow p = \frac{9 + 10 + 17}{2} \Rightarrow$

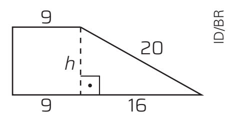
$\Rightarrow p = 18$

$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \sqrt{18(18 - 9)(18 - 10)(18 - 17)} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \sqrt{1\,296} \Rightarrow A = 36\ \text{cm}^2$

c)



ID/BR

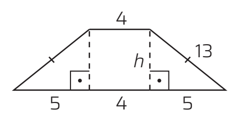
$h^2 + 16^2 = 20^2 \Rightarrow h = 12$

Então, a área do trapézio é:

$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{(25 + 9) \cdot 12}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 204\ \text{m}^2$

d)



ID/BR

$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$

Logo, a área do trapézio é:

$A = \frac{(14 + 4) \cdot 12}{2} \Rightarrow A = 108\ \text{m}^2$

e) Temos que:

$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow d = 12$

Então, a área do losango é:

$A = \frac{12 \cdot 16}{2} \Rightarrow A = 96\ \text{m}^2$

19. A razão entre a área do quadrado menor e a área do quadrado maior é igual ao quadrado da razão entre os lados desses mesmos quadrados. Assim, a razão entre a medida dos lados desses quadrados é dada por: $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

Logo, a razão entre as medidas das áreas do quadrado menor e do quadrado maior é:

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25$

20. $k^2 = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow k^2 = \frac{25}{36} \Rightarrow k = \frac{5}{6} \Rightarrow k \simeq 0,83$

Alternativa **e**.

21. $k^2 = \frac{A}{A_2} \Rightarrow 0,5^2 = \frac{A}{64} \Rightarrow A = 16$

22. Figura A: $(x + 7) \cdot x = 144$

Figura B: $A = \frac{15 \cdot 15}{2} + \frac{21 \cdot 3}{2} \Rightarrow A = 144$

Com isso, temos que: $(x + 7) \cdot x = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 7x = 144 \Rightarrow x^2 + 7x - 144 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = (7)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-144) \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = 49 + 576 \Rightarrow \Delta = 625$

$x = \frac{-7 \pm 25}{2}$

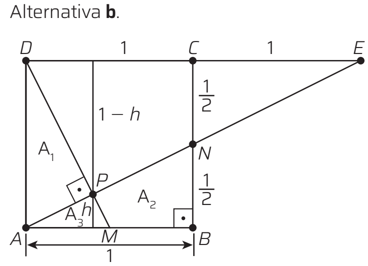
$x' = \frac{18}{2}$ ou $x'' = \frac{-32}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = 9$ ou $x'' = -16$ (não convém)

Logo, $x = 9$ e $x + 7 = 9 + 7 = 16$.

Alternativa **b**.

23.



ID/BR

$\Delta APM \sim \Delta DPE$

$\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{h}{1 - h} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{h}{1 - h} \Rightarrow h = \frac{1}{5}$

$A_3 = S_{APM} \Rightarrow A_3 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}}{2} \Rightarrow A_3 = \frac{1}{20}$

$A_2 = S_{ANB} - A_3 \Rightarrow A_2 = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{20} \Rightarrow A_2 = \frac{1}{5}$

$A_1 = S_{ADM} - A_3 \Rightarrow A_1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{2} - \frac{1}{20} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{5}$

Logo:

$A_{\text{sombreada}} = A_1 + A_2 \Rightarrow A_{\text{sombreada}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\text{sombreada}} = \frac{2}{5}$

Alternativa **d**.

24. Trapézio: $A = \frac{(1 + 5) \cdot h}{2}$

M é ponto médio, então: $BM = 0,5$ e $AM = 0,5$.

$A_{MBN} = \frac{0,5 \cdot x}{2} \Rightarrow \frac{0,5 \cdot x}{2} = 1 \Rightarrow x = 4$

Assim, $h = 8$. Portanto:

$A = \frac{(1 + 5) \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{6 \cdot 8}{2} \Rightarrow A = 24$

Alternativa **d**.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 99)

1. a) $A = \frac{3 \cdot 4}{2} \Rightarrow A = \frac{12}{2} = 6$

b) $A = 3,5 \cdot 4 \Rightarrow A = 14$

c) $A = \frac{4 \cdot 7}{2} \Rightarrow A = 14$

d) $A = 2,5 \cdot 5 \Rightarrow A = 12,5$

e) $A = \frac{2 \cdot 9}{2} \Rightarrow A = \frac{18}{2} = 9$

2. Temos:

- 55 cm = 0,55 m
- 550 cm = 5,5 m
- 5,5 km = 5 500 m
- 0,055 km = 55 m

3. Temos:

- 3,2 km = 320 000 cm
- 0,32 mm = 0,032 cm
- 32 m = 3 200 cm
- 0,032 m = 3,2 cm

4. Temos:

- $4,5\ \text{m}^2 = 45\,000\ \text{cm}^2$
- $42\ \text{m}^2 = 420\,000\ \text{cm}^2$
- $0,42\ \text{km}^2 = 4,2 \cdot 10^9\ \text{cm}^2$
- $42\,000\ \text{mm}^2 = 420\ \text{cm}^2$

5. Temos:

- $6\,700\ \text{cm}^2 = 0,67\ \text{m}^2$
- $0,67\ \text{km}^2 = 670\,000\ \text{m}^2$
- $670\ \text{km}^2 = 670\,000\,000\ \text{m}^2$
- $0,67\ \text{cm}^2 = 0,000067\ \text{m}^2$

PARA RECORDAR (P. 99)

1. Primeiro, temos o custo para a produção de cada unidade, que era R$ 40,00. Além disso, esse produto era vendido por R$ 100,00 e era pago 40% de imposto sobre a renda.

O custo de fabricação teve um aumento de 60%. Então.

Produção	Valor de venda	Imposto	Lucro	Percentual de lucro $\left(\frac{L}{C}\right)$
R$40,00	R$100,00	R$40,00	R$20,00	$\frac{20}{40} =$ $= 50\%$

$40 + \left(40 \cdot \frac{60}{100}\right) = 40 + 24 = 64$

O custo de fabricação atual é R$ 64,00.

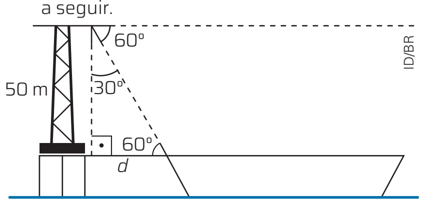
O novo percentual de lucro é 40%. Então:

$\frac{L}{C} = \frac{40}{100} \Rightarrow \frac{L}{64} = 0,4 \Rightarrow L = 25,6$

O novo lucro será R\$ 25,60.
O preço de venda sem o imposto será:
$C + L = 64 + 25,60 = 89,60$
Temos que a nova alíquota do imposto é 30% da venda. Então, R\$ 89,60 refere-se a 70% do valor final de venda. Precisamos determinar 100% do valor. Assim:
89,60 ——— 70%
x ——— 100%
$70x = 100 \cdot 89,60$
$x = \dfrac{8\,960}{70} = 128$
Portanto, o novo preço de venda da mercadoria é R\$ 128,00.

2. Resposta pessoal. Segue sugestão.
Analisando o gráfico, podemos obter as seguintes informações:
- No início do tratamento, a peça estava a uma temperatura igual a 50 °C.
- Durante o tratamento, entre $t = 0$ até, aproximadamente, $t = 10$, o gráfico é crescente. Então, ocorre o aquecimento da peça.
- Entre $t = 10$ e $t = 20$, o gráfico é decrescente. Então, ocorre o resfriamento da peça.
- Quando $t \simeq 15$ e $t \simeq 25$, a temperatura está próxima de 50 °C.
- Quando $t = 20$, a temperatura está próxima de 25 °C.
- De $t > 20$ até $t = 50$, o gráfico é crescente. Então, a peça está aquecendo.

3. Podemos representar a situação com a figura a seguir.



Precisamos determinar a distância da plataforma ao barco (cateto oposto ao ângulo).
$\text{tg } 30° = \dfrac{d}{50} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{d}{50} \Rightarrow$
$\Rightarrow d \simeq \dfrac{50 \cdot 1,73}{3} \simeq 28,8$
Portanto, a distância da plataforma ao barco é, aproximadamente, 29 m.

4. Seja k a medida de PR e x a medida de ST. Então:
$41^2 = k^2 + 9^2 \Rightarrow 1681 = k^2 + 81 \Rightarrow$
$\Rightarrow k^2 = 1600 \Rightarrow k = 40$
$\dfrac{9}{x} = \dfrac{40}{100} \Rightarrow x = 22,5$
Logo, a medida do segmento ST é igual a 22,5 cm.
Alternativa **b**.

5. Analisando a figura, podemos identificar que a medida do diâmetro do círculo é igual à medida da diagonal do quadrado.
O lado do quadrado mede $\sqrt{7}$ cm. Assim, a diagonal d desse quadrado é dada por:
$d = \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{14}$
Então, a diagonal do quadrado mede $\sqrt{14}$ cm e o diâmetro do círculo mede $\sqrt{14}$ cm.
Logo, o raio de cada círculo será:
$r = \dfrac{d}{2} \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$
Assim, o raio do círculo é $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ cm.
Agora, vamos determinar a área de cada figura.
- $A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$
  $A_{\text{círculo}} = \dfrac{22}{7} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)^2$
  $A_{\text{círculo}} = \dfrac{308}{28} = 11$
  Portanto, a área de cada círculo é 11 cm².
- $A_{\text{quadrado}} = a^2 \Rightarrow A_{\text{quadrado}} = \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$
  Portanto, a área de cada quadrado é 7 cm².
  Podemos determinar a área da região destacada da seguinte maneira:
  $A_{\text{destacada}} = 8 \cdot A_{\text{quadrado}} + (A_{\text{círculo}} - A_{\text{quadrado}})$
  $A_{\text{destacada}} = 8 \cdot 7 + (11 - 7)$
  $A_{\text{destacada}} = 60$
  Logo, a área da região é 60 cm².

6. Todas as inovações eficazes são surpreendentemente simples. Como A é o conjunto das "inovações eficazes" e B é o conjunto das inovações "surpreendentemente simples", temos que todo elemento de A também é um elemento de B. Isto é, A é subconjunto de B.
Alternativa **a**.

7. O grupo estadual deve ter um aluno a mais que o grupo regional. Considerando n o número de alunos do grupo regional, temos que o total de alunos dos dois grupos é $2n + 1$, que é um número ímpar.
Logo, a mediana será o termo $n + 1$, que pertence ao grupo estadual. Como a mediana é 15 anos, então os alunos com 15 anos ou mais estarão no grupo estadual.
Alternativa **c**.

8. Observando as figuras, temos que: a Figura 1 tem 5 bolinhas, a Figura 2 tem 8 bolinhas e a Figura 3 tem 11 bolinhas. O número de bolinhas de cada figura é o termo de uma progressão aritmética: (5, 8, 11, ...)
Razão: $r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 8 - 5 \Rightarrow r = 3$
Para a 15ª Figura, temos:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{15} = 5 + (15 - 1) \cdot 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{15} = 47$
Alternativa **b**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 101)

1. Podemos organizar as informações da seguinte maneira:

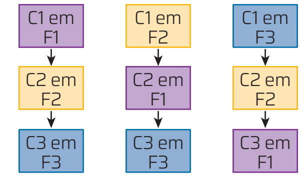
I	com ovos	sem creme
II	com leite	sem laranja
III	sem creme	sem leite

Analisando as alternativas:
- ovos e leite, mas sem creme: não atende a condição III;
- creme, laranja e leite, mas sem ovos: não atende a condição II;
- ovos e creme, mas sem laranja: não atende a condição I;
- ovos e laranja, mas sem leite e sem creme: atende a todas as condições;
- leite e laranja, mas sem creme: não atende a condição II.

Portanto, César pode fazer um bolo com ovos e laranja, mas sem leite e sem creme.
Alternativa **d**.

2. Temos três meninas: Ana, Cláudia e Fabiana; e dois meninos: Joaquim e Pedro.
De acordo com a segunda afirmação, Pedro nasceu em São Paulo e, de acordo com a quinta informação, o menino pernambucano estava na casa da árvore. Portanto, Joaquim estava na casa da árvore.
Como Pedro e Fabiana se esconderam juntos e como Joaquim estava na casa da árvore, Pedro e Fabiana não poderiam estar na casa da árvore, pois, nesse caso, teríamos três crianças na casa da árvore, o que contradiz a primeira afirmação. A outra criança na casa da árvore deve ser Ana ou Cláudia.
Como uma menina se escondeu sozinha (terceira afirmação) e Ana não estava sozinha (quarta afirmação), conclui-se que Ana estava na casa da árvore e Cláudia, sozinha.
Portanto, Ana e Joaquim estavam escondidos na casa da árvore.
Alternativa **c**.

3. Vamos chamar as chaves de C1, C2 e C3 e as fechaduras de F1, F2 e F3. O banqueiro pode realizar as tentativas conforme o seguinte esquema:



Temos, então, as possibilidades:
- C1 em F1, C2 em F2, C3 em F3.
- C1 em F2, C2 em F1, C3 em F3.
- C1 em F3, C2 em F2, C3 em F1.

Portanto, em no mínimo três tentativas, o banqueiro consegue descobrir a chave de cada fechadura.

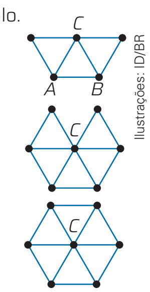
4. O naipe que vem depois de ♦ é ♣. Além disso, podemos observar que há uma diferença de 6 cartas entre uma carta de ♠ e uma carta de ♣, a saber: 7 e K, 6 e Q, 5 e J, 4 e 10, 3 e 9, 2 e 8, A e 7, K e 6. Portanto, a carta é um 6♣.
Alternativa **c**.

MATEMÁTICA E DESENHO GEOMÉTRICO (P. 102)

Conectando ideias

1. Para provar que o triângulo ABC é equilátero, basta notar que o ponto C é equidistante de A e B, uma vez que C pertence aos dois arcos de circunferência de mesmo raio AB e que a distância entre A e C e entre B e C é a mesma que entre A e B, pois B e C estão no mesmo arco de centro A. Do mesmo modo, a distância entre A e B é igual à distância entre A e C, e A e C estão no mesmo arco de centro B; portanto, a distância entre B e A é igual à distância entre B e C.
Para provar que as retas são perpendiculares, é necessário perceber que DEF e DEG são triângulos equiláteros congruentes, uma vez que a construção foi feita de maneira análoga à do triângulo ABC. Assim, a reta FG contém as alturas dos triângulos DEF e DEG referentes aos pontos F e G, respectivamente, que, em um triângulo equilátero, são segmentos perpendiculares às bases dos triângulos. Logo, as retas são perpendiculares.

2. As construções pedidas podem ser feitas com base nos desenhos do exemplo.



a) Basta construir dois triângulos equiláteros nos segmentos AC e BC, como mostrado, depois, dois triângulos nos dois segmentos que contêm C e, finalmente, traçar o segmento que fecha o hexágono.
Como foram construídos seis triângulos equiláteros, o desenho final é um hexágono regular.

b) Basta escolher qualquer ponto H pertencente a $\overleftrightarrow{FG}$, mas que não pertença a $\overleftrightarrow{DE}$, e traçar o triângulo DEH, ou escolher qualquer ponto I pertencente a $\overleftrightarrow{DE}$, mas que não pertença a $\overleftrightarrow{FG}$, e traçar o triângulo FGI. Como as retas são perpendiculares, qualquer ponto em uma reta é equidistante aos pontos D e E ou F e G.
Os estudantes podem considerar o triângulo equilátero ABC como o triângulo isósceles a ser construído, pois todo triângulo equilátero é também isósceles.

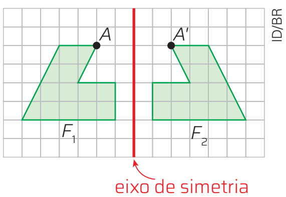
3. Espera-se que os estudantes identifiquem nas obras de artistas contemporâneos as figuras geométricas básicas e conheçam diferentes movimentos artísticos e suas expressões. A escolha da obra para a releitura é pessoal e deve ser acompanhada e valorizada para que o exercício de criação seja uma conquista dos estudantes.
Resposta pessoal.

CAPÍTULO 5 GEOMETRIA DAS TRANSFORMAÇÕES

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 112)

1. Como a reta *s* é o eixo de simetria, cada ponto da figura simétrica de R, em relação a *s*, deve estar à mesma distância de *s* que é o ponto correspondente de R.
Alternativa **c**.

2. O ponto A' deve ser simétrico ao ponto A em relação ao eixo de simetria. Então, o eixo de simetria deve ser perpendicular ao segmento $\overline{AA'}$ e passar pelo ponto médio desse segmento.

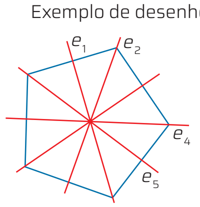


ID/BR

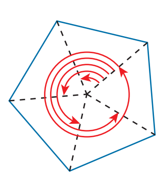
3. Pela figura, observamos que *ABCDEFG* tem quatro lados e duas metades de lados no primeiro ângulo reto entre os eixos. Multiplicando esse número de lados por 4, temos um total de 20 lados.
Alternativa **b**.

4. O pentágono regular tem:
- cinco eixos de simetria axial (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) correspondentes às retas que passam pelos vértices do polígono e pelos pontos médios dos respectivos lados opostos a esses vértices;
- cinco simetrias de rotação em torno de seu centro, de tal modo que a posição do pentágono, após ser rotacionado, permaneça a mesma. Nessas simetrias, os ângulos têm medidas que são múltiplos de 72°: 72°, 144°, 216°, 288°, 360°, realizadas no sentido horário ou anti-horário.

Exemplo de desenho:



eixos de simetria axial do pentágono regular



simetrias de rotação do pentágono regular

Ilustrações: ID/BR

São cinco simetrias axiais e cinco simetrias de rotação, de acordo com o ângulo central de 72°.

5. O ângulo central do pentágono regular mede 72°. Dividindo-se 252° por 72°, temos:
$$\frac{252°}{72°} = 3,5$$
Ou seja, o pentágono deve sofrer três rotações e meia de 72° em torno de seu centro.
Alternativa **b**.

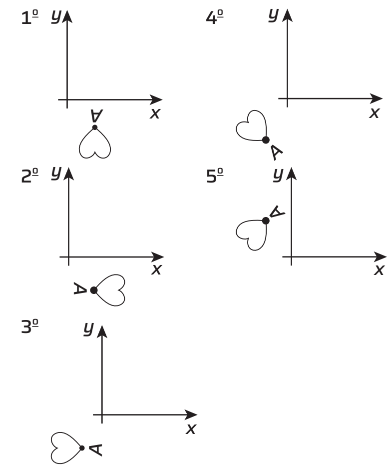
6. **a)** Verdadeira. Em cada vértice, a reta que passa por ele e pelo ponto médio do lado oposto é um eixo de simetria de reflexão do polígono. Uma reta que não passa por um de seus vértices deixa um número diferente de vértices do polígono de cada lado dela; consequentemente, ela não é um eixo de simetria.

b) Verdadeira. As retas descritas na afirmação são eixos de simetria do polígono e se uma reta não passa por vértices opostos ela deixaria um número diferente de vértices de cada lado e não seria um eixo de simetria do polígono. Isso também acontece se a reta não passa pelos pontos médios de lados opostos: teríamos partes de lados do polígono de medidas diferentes de cada lado da reta e ela não seria um eixo de simetria do polígono.

c) Falsa. Basta considerar um pentágono regular e verificar que nenhuma de suas diagonais é eixo de simetria do pentágono.

d) Falsa. O único retângulo que tem quatro eixos de simetria é o quadrado. Os retângulos não quadrados têm apenas dois eixos de simetria.

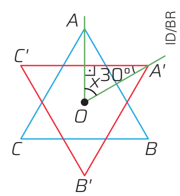
7.



Ilustrações: ID/BR

Alternativa **c**.

8. **a)** Os triângulos na figura são equiláteros; então, seus ângulos internos medem 60°.

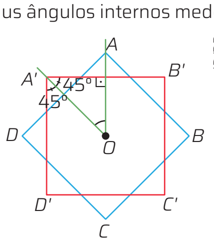


ID/BR

Como o lado $\overline{OA'}$ está sobre a bissetriz de um ângulo de 60°, temos um ângulo agudo de 30° no triângulo retângulo. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, *x* (que corresponde à medida do ângulo de rotação $A\hat{O}A'$) é igual a 60°.

Portanto, o ângulo de rotação $A\hat{O}A'$ mede 60° (sentido horário).

b) Os polígonos na figura são quadrados; então, seus ângulos internos medem 90°.

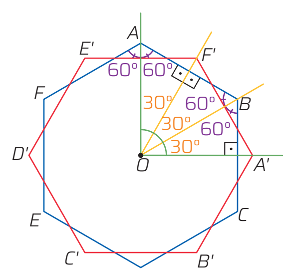


ID/BR

Com raciocínio análogo ao realizado no item anterior, podemos perceber que *x* é igual a 45°.

Portanto, o ângulo de rotação $A\hat{O}A'$ mede 45° (sentido anti-horário).

c) Os polígonos na figura são hexágonos; então, seus ângulos internos medem 120°.



ID/BR

Com raciocínios análogos aos utilizados nos itens anteriores, podemos concluir que o ângulo de rotação $A\hat{O}A'$ mede 90° (sentido horário).

9. A peça precisa ter um triângulo cinza-claro em um dos lados, o que ocorre na peça 2. Como esse triângulo está direcionado para baixo e queremos que ele encaixe à direita com o triângulo da mesma cor, devemos rotacionar a peça 90° no sentido anti-horário.
Alternativa **c**.

TECNOLOGIA (P. 114)

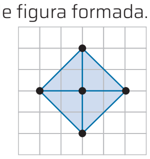
1. **a)** Os vértices do triângulo *A'B'C'* se movem também, de acordo com o vértice do triângulo *ABC* que foi movimentado.

b) Não é possível movimentar o vértice *A'* (não coincide com o vértice *A*), mas é possível movimentar os vértices *B'* e *C'*, pois eles coincidem com os vértices *B* e *C*, respectivamente.

2. **a)** Os vértices *A'*, *B'* e *C'* são movimentados de acordo com a movimentação dos vértices *A, B e C*, respectivamente.

b) O triângulo *ABC* permanece sem se movimentar, e o triângulo *A'B'C'* move-se de acordo com a alteração na posição do ponto *D* do segmento orientado.

3. Exemplo de figura formada.



ID/BR

a) Exemplo de resposta: Foi utilizada a ferramenta "Polígono" para construir o triângulo retângulo e isósceles *ABC*, e também a ferramenta "Rotação em torno de um ponto". Então, foram selecionados o triângulo e o ponto que é vértice do ângulo reto e indicado o ângulo de rotação de 90° e o sentido anti-horário.

b) Resposta pessoal. Há mais de uma maneira para construir o quadrado utilizando a ferramenta "Rotação em torno de ponto" e o triângulo *ABC*. O sentido escolhido para a rotação pode ser o horário, por exemplo.

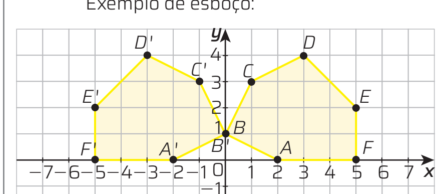
4. **a)** Resposta pessoal. Oriente os estudantes a realizar uma pesquisa sobre o artista. Certamente, eles perceberão que nas imagens das obras desse artista podemos notar o uso de isometrias para retratar cenários populares, como objetos que fazem parte do cotidiano de muitos brasileiros. A releitura que devem fazer da obra pode levar essas características em consideração. Oriente-os a utilizar os comandos apresentados nesta seção *Tecnologia* para fazer a releitura.

b) Resposta pessoal.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 119)

10. **a)** $R(A) = R(2, 0) = (-2, 0) = A'$
$R(B) = R(0, 1) = (0, 1) = B'$
$R(C) = R(1, 3) = (-1, 3) = C'$
$R(D) = R(3, 4) = (-3, 4) = D'$
$R(E) = R(5, 2) = (-5, 2) = E'$
$R(F) = R(5, 0) = (-5, 0) = F'$

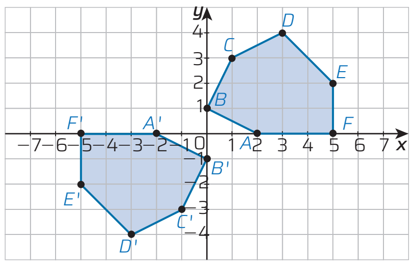
Exemplo de esboço:



ID/BR

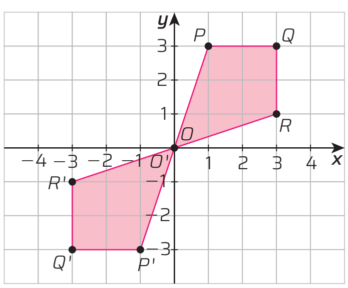
b) O polígono *ABCDEF* e sua imagem *A'B'C'D'E'F'* são simétricos em relação ao eixo *Oy*.

11. $V(A) = V(2, 0) = (-2, 0) = A'$
$V(B) = V(0, 1) = (0, -1) = B'$
$V(C) = V(1, 3) = (-1, -3) = C'$
$V(D) = V(3, 4) = (-3, -4) = D'$
$V(E) = V(5, 2) = (-5, -2) = E'$
$V(F) = V(5, 0) = (-5, 0) = F'$
Exemplo de esboço:



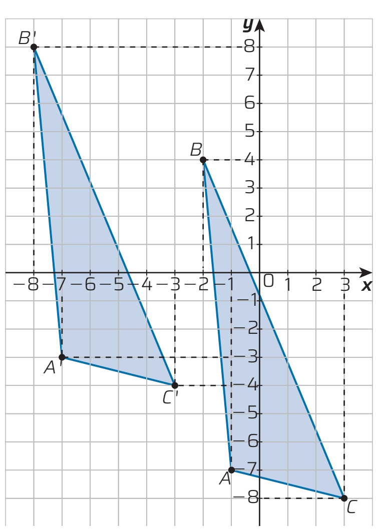
Foram feitas duas reflexões, uma em relação ao eixo *Ox* e a outra em relação ao eixo *Oy* (ou vice-versa), ou uma rotação de 180° em torno do ponto (0, 0). A nova figura é congruente à figura original.

12. Exemplo de esboço:

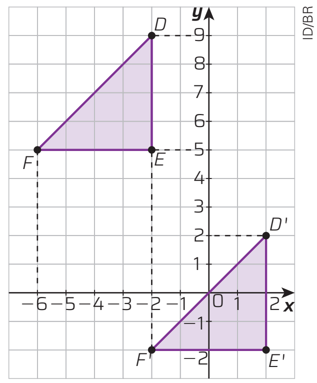


Os ângulos $R\hat{O}R'$, $Q\hat{O}Q'$ e $P\hat{O}P'$ medem 180°.

13. Seja *T* a função que associa a cada ponto (x, y) do plano o ponto $(x - 6, y + 4)$. Então:
$T(A) = T(-1, -7) = (-7, -3)$
$T(B) = T(-2, 4) = (-8, 8)$
$T(C) = T(3, -8) = (-3, -4)$
Portanto, representando os dois triângulos no plano cartesiano, temos:



14. Para resolver essa atividade, devemos pensar de maneira inversa, ou seja, qual é a função *R* que associa a cada ponto (x', y') do plano o ponto $(x - 4, y + 7)$.
$(2, 2) = R(-2, 9) = R(D)$
$(2, -2) = R(-2, 5) = R(E)$
$(-2, -2) = R(-6, 5) = R(F)$
Portanto, representando os dois triângulos no plano cartesiano, temos:

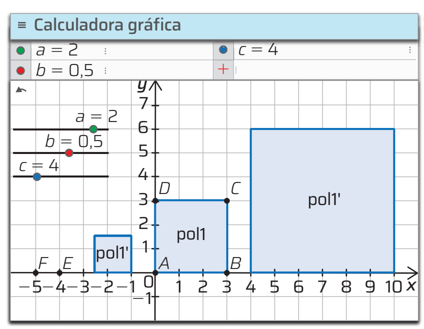


TECNOLOGIA (P. 122)

1. a) Obtém-se uma figura ampliada.
b) Obtém-se uma figura congruente.
c) Obtém-se uma figura reduzida.
d) Obtém-se figuras invertidas.

2. O centro de homotetia é alterado, mudando a posição da figura obtida.

3. Utilizando as ferramentas apresentadas nas etapas da seção, podemos construir polígonos semelhantes aos apresentados na figura a seguir.

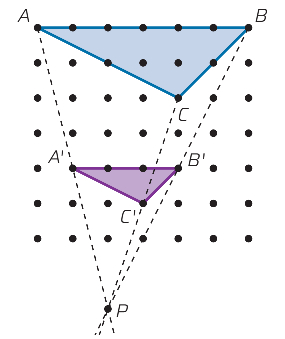


PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 126)

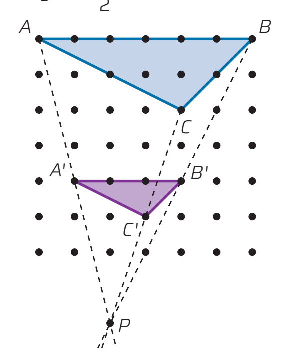
15. Calculando a área *S* do triângulo *OAB*, temos:
$S = \dfrac{4 \cdot 2}{2} = 4$
Pela semelhança gerada pela homotetia, o novo triângulo tem área igual a $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot S$.
Então: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot S = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot 4 = \dfrac{1}{9} \cdot 4 = \dfrac{4}{9}$
Portanto, a área do triângulo obtido é $\dfrac{4}{9}$.

16. a) Pela figura é possível considerar que o segmento $\overline{AB}$ corresponde ao segmento $\overline{EF}$, o que permite calcular a razão da homotetia $k = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.
b) Aplicando a constante de proporcionalidade e a correspondência entre os lados dos dois quadriláteros, temos:
$4{,}5 = k \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{4{,}5}{1{,}5} \Rightarrow x = 3$
$3{,}6 = k \cdot y \Rightarrow y = \dfrac{3{,}6}{1{,}5} \Rightarrow y = 2{,}4$
$9 = k \cdot z \Rightarrow z = \dfrac{9}{1{,}5} \Rightarrow z = 6$
Portanto, $x = 3$, $y = 2{,}4$ e $z = 6$.

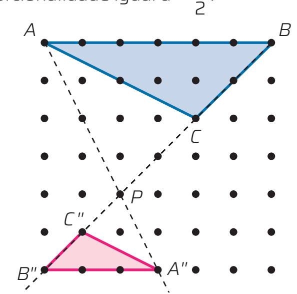
17. a) Quando uma figura sofre uma translação, temos uma figura congruente à original. Considerando esse conceito, podemos dizer que Pedro não está correto, uma vez que os triângulos *ABC* e *A'B'C'* não são congruentes.
De acordo com a malha pontilhada, podemos perceber que os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são semelhantes, com razão de proporcionalidade igual a $\dfrac{1}{2}$. Vamos verificar se há centro de homotetia.



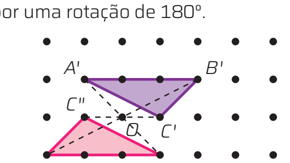
Portanto, Iara está correta.
b) O ponto de encontro dessas retas corresponde ao centro de homotetia.
c) Ela está correta e a constante de proporcionalidade é igual a $\dfrac{1}{2}$.
d) Resposta pessoal. Exemplo de resposta:
- Entre os triângulos *ABC* e *A'B'C'*, há homotetia com razão de proporcionalidade igual a $\dfrac{1}{2}$.



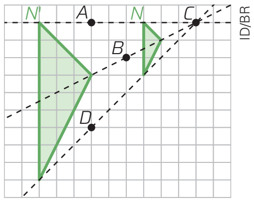
- Entre os triângulos *ABC* e *A"B"C"*, há homotetia inversa com razão de proporcionalidade igual a $-\dfrac{1}{2}$.



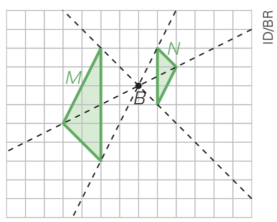
- Há várias respostas possíveis, uma delas é que os triângulos *A'B'C'* e *A"B"C"* são simétricos em relação ao ponto *O* por uma rotação de 180°.



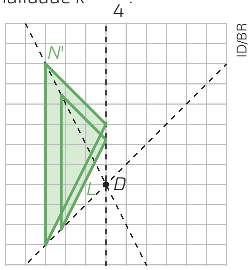
18. a) De acordo com o esboço a seguir, o centro da homotetia é o ponto *C*.



b) Primeiro, traçamos as retas que passam por B e pelos vértices do triângulo N. Então, marcamos o comprimento dos segmentos que unem B a cada um desses vértices e marcamos os vértices do triângulo M de modo que os segmentos que unem B aos vértices de M tenham o dobro da medida do comprimento dos segmentos correspondentes a $N (k = -2)$.

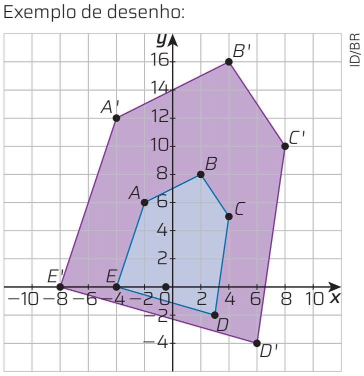


c) Utilizando a ferramenta "Homotetia" do *software* de geometria dinâmica, escolhemos o objeto (que é o triângulo N'), o centro da homotetia (D) e a razão de proporcionalidade $k = \frac{3}{4}$.



19. Se o menor decágono regular tem perímetro de 260 cm, cada lado dele mede 26 cm.
Se a razão de proporcionalidade entre eles é $\frac{1}{4}$, cada lado do decágono regular maior tem medida igual ao quádruplo da medida do lado do decágono regular menor. Assim: $4 \cdot 26 = 104$
Portanto, cada lado do decágono regular maior mede 104 cm.

20. Como a distância de cada vértice do pentágono $A'B'C'D'E'$ ao centro da homotetia (origem do sistema cartesiano) é o dobro da distância de cada vértice do pentágono $ABCDE$ ao centro da homotetia, pois $k = 2$, temos:
$A(-2, 6) \rightarrow A'(-4, 12)$
$B(2, 8) \rightarrow B'(4, 16)$
$C(4, 5) \rightarrow C'(8, 10)$
$D(3, -2) \rightarrow D'(6, -4)$
$E(-4, 0) \rightarrow E'(-8, 0)$
Exemplo de desenho:



CÁLCULO RÁPIDO (P. 128)

1. a) 7 e 8 c) 2 e 3 e) 9 e 10
b) 4 e 5 d) 5 e 6 f) 10 e 11

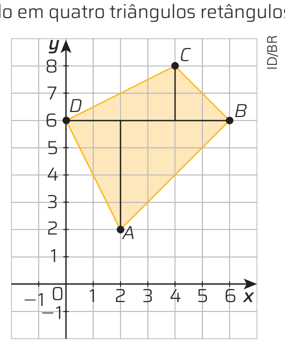
2. a) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 25} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{2} \cdot 5 = 5\sqrt{2}$
b) $\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$
c) $\sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2}$
d) $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
e) $\sqrt{90} = \sqrt{9 \cdot 10} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{10}$
f) $\sqrt{120} = \sqrt{4 \cdot 30} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{30} = 2\sqrt{30}$

3. a) $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$
Portanto, a área é 10 cm².
b) $\frac{10 \cdot 7}{2} = 35$
Portanto, a área é 35 cm².
c) $5 \cdot 3 = 15$
Portanto, a área é 15 cm².
d) $\frac{24}{4} = 6$
Logo, o lado desse quadrado mede 6 cm.
Assim: $6^2 = 36$. Portanto, a área é 36 cm².

PARA RECORDAR (P. 128)

1. a) Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°, temos:
$20 + 30 + x = 180 \Rightarrow 50 + x = 180 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 180 - 50 \Rightarrow x = 130$
Portanto, o terceiro ângulo interno desse triângulo mede 130°.
b) Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180° e esse triângulo tem dois ângulos internos congruentes e um que mede 20°, temos:
$20 + x + x = 180 \Rightarrow 2x = 180 - 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 160 \Rightarrow x = 80$
Portanto, cada um dos ângulos congruentes mede 80°.
c) Não, pois, se tivesse dois ângulos internos retos e outro de medida qualquer, a soma das medidas dos ângulos internos desse triângulo seria maior que 180°, o que não pode acontecer, pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°.

2. Fazendo um esboço do polígono, podemos dividi-lo em quatro triângulos retângulos.



Assim, percebemos que a área do polígono $ABCD$ é equivalente à soma das áreas dos triângulos retângulos destacados.
$A_{ABCD} = \frac{4 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} \Rightarrow 18$
Portanto, a área do polígono $ABCD$ é 18 unidades de área.

3. Vamos calcular o gasto calórico de cada dia da semana multiplicando o gasto calórico por hora pelas horas praticadas.
Segunda-feira:
$1 \cdot 248 + 0{,}5 \cdot 764 + 0 \cdot 356 + 2 \cdot 492 = 1614$
Terça-feira:
$0{,}5 \cdot 248 + 1 \cdot 764 + 0{,}5 \cdot 356 + 1 \cdot 492 = 1558$
Quarta-feira:
$0 \cdot 248 + 1{,}5 \cdot 764 + 1 \cdot 356 + 0{,}5 \cdot 492 = 1748$
Quinta-feira:
$0 \cdot 248 + 2 \cdot 764 + 0 \cdot 356 + 0 \cdot 492 = 1528$
Sexta-feira:
$0 \cdot 248 + 0{,}5 \cdot 764 + 0 \cdot 356 + 2{,}5 \cdot 492 = 1612$
Logo, o dia com o maior gasto calórico é a quarta-feira.
Alternativa **c**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 129)

1. Vamos propor a solução partindo de uma única análise, porém, há outras possibilidades.
Se o primeiro jogador iniciar o jogo escolhendo a casa com a letra C, somente essa casa será eliminada, o que significa que o segundo jogador deverá escolher a casa com as letras A, B, D ou E.
Assim, temos quatro casos.

- Primeiro caso: o primeiro jogador escolhe a casa com a letra C e o segundo escolhe a casa com a letra A.
Nesse caso, são eliminadas as casas com as letras A e B pelo segundo jogador. Em tal condição, o primeiro jogador escolhe a casa com a letra D, eliminando as casas com as letras D e E, vencendo o jogo.
- Segundo caso: o primeiro jogador escolhe a casa com a letra C e o segundo escolhe a casa com a letra B.
Nesse caso, é eliminada a casa com a letra B pelo segundo jogador, o que faz o primeiro jogador a escolher a casa com a letra E, para garantir a vitória, eliminando-a e forçando o segundo jogador a escolher as casas com as letras A ou D. Em qualquer uma dessas escolhas somente uma casa é eliminada, ou seja, a outra fica disponível para a jogada seguinte. Esta será a casa escolhida pelo primeiro jogador, que será o vencedor.
- Terceiro caso: o primeiro jogador escolhe a casa com a letra C e o segundo escolhe a casa com a letra D.
Nesse caso, são eliminadas as casas com as letras D e E pelo segundo jogador. Em seguida, o primeiro jogador escolhe a casa com a letra A, eliminando as casas com as letras A e B, vencendo o jogo.
- Quarto caso: o primeiro jogador escolhe a casa com a letra C e o segundo escolhe a casa com a letra E.
Nesse caso, somente a casa com a letra E é eliminada pelo segundo jogador, o que leva o primeiro jogador a escolher a casa com a letra B. Somente a casa com a letra B é eliminada e o segundo jogador escolhe entre as casas com as letras A e D, eliminando somente a casa de sua escolha. Assim, sobra apenas uma casa que é escolhida pelo primeiro jogador, tornando-o vencedor.

Então, escolhendo a casa com a letra C e procedendo como indicado nos casos acima, o primeiro jogador será sempre o vencedor.
Alternativa **c**.

2. Vamos registrar as dicas em um quadro para nos auxiliar a chegar à resposta.

Nome/ Profissão	Alfaiate	Jardineiro	Cozinheiro	Motorista
Marcos		Não	Não	
Carlos	Não		Não	Não
Luís	Não	Não	Sim	Não
Nélson	Não		Não	

Pelas dicas, podemos concluir que Marcos tem de ser o alfaiate, Carlos tem de ser o jardineiro e Luís é o cozinheiro.
Sabendo que Carlos é o jardineiro, Nélson terá de ser o motorista.

Nome	Profissão
Marcos	Alfaiate
Carlos	Jardineiro
Luís	Cozinheiro
Nélson	Motorista

3. Há mais de uma maneira de resolver esse problema. Vamos apresentar uma delas. Na primeira parte do trajeto, José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Então: $6 + 5 + 4 = 15$

Portanto, temos 15 partes de laranjas distribuídas. Desse modo, José carregou $\frac{6}{15}$ do total de laranjas, Carlos carregou $\frac{5}{15}$ do total de laranjas e Paulo $\frac{4}{15}$ do total de laranjas.

Na segunda parte do trajeto, as laranjas foram divididas na proporção de 4 : 4 : 2, entre José, Carlos e Paulo, respectivamente. Então: $4 + 4 + 2 = 10$

Portanto, nessa parte do trajeto, temos as laranjas divididas em 10 partes. Agora, José carregou $\frac{4}{10}$, Carlos carregou, $\frac{4}{10}$ e Paulo carregou $\frac{2}{10}$ do total de laranjas.

Sabemos que, de acordo com o enunciado, um deles levou 50 laranjas a mais na segunda parte do trajeto que na primeira. Vamos analisar as quantidades atribuídas a cada um:

- José estava com $\frac{6}{15}$ do total de laranjas no início e agora está com $\frac{4}{10}$, ou seja, continuou com o mesmo tanto, visto que $\frac{6}{15} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.
- Paulo carregou $\frac{4}{15}$ do total e reduziu para $\frac{2}{10}$ na segunda parte do trajeto.
- O único que teve a quantidade que carregava aumentada foi Carlos, que carregou $\frac{5}{15}$ na primeira parte e passou a carregar $\frac{4}{10}$ na segunda parte do trajeto.

Assim, podemos afirmar que foi Carlos quem levou 50 laranjas a mais na segunda parte do trajeto, em comparação com a primeira. Logo, chamando de x o total de laranjas, temos:

$\frac{5}{15}x + 50 = \frac{4}{10}x$

$x = 750$

Na segunda parte do trajeto as 750 laranjas foram divididas na proporção de 4 : 4 : 2 (10 partes), entre José, Carlos e Paulo, respectivamente. Assim, José e Carlos carregaram $\frac{4}{10}$ das 750 laranjas, ou seja, 300 laranjas; e Paulo carregou $\frac{2}{10}$ das 750 laranjas, ou seja, 150 laranjas.

Alternativa **b**.

MATEMÁTICA E CULTURA (P. 130)

Conectando ideias

1. Inicialmente, espera-se que os estudantes percebam que a instalação dos azulejos nas imagens não é perfeita, mas que isso não impede a observação das transformações geométricas aplicadas.

Na imagem da pintura em Vila Franca de Xira, não é possível identificar transformações geométricas, exceto em partes da moldura.

Na imagem da fachada em Aveiro, no Palácio de Pena e no banco em Algarve, é possível observar rotações, reflexões e translações entre os azulejos.

2. Para a pesquisa, os estudantes podem utilizar o *site* do Museu Nacional do Azulejo, outras páginas da internet especializadas em Arte, livros sobre o assunto ou mesmo o texto-base da seção na íntegra. Espera-se que pesquisem em fontes seguras e confiáveis, estruturem um trabalho completo e ampliem as informações sobre a história e a importância dos azulejos para a cultura portuguesa, além de perceber a importância da Matemática para essa forma de arte.

a) Para começar, é possível estudar a produção de azulejos em Sevilha, antes da chegada do produto em Portugal, entendendo sua função e sua importância na cidade e na Espanha de modo geral. Depois, é possível explicitar as influências que vieram da região e das proximidades do Oriente Médio e da China.

Os estudantes também podem discutir a diversidade de desenhos e motivos e suas elaborações com base nos movimentos artísticos em que estavam inseridos, além de observar a distinção social entre a população que utilizava os azulejos e as outras pessoas, apresentando os locais que têm azulejos mais famosos e para onde essa cultura foi levada, como os países que foram colônias de Portugal.

Solicite aos estudantes que destaquem as transformações geométricas utilizadas nas produções analisadas por eles.

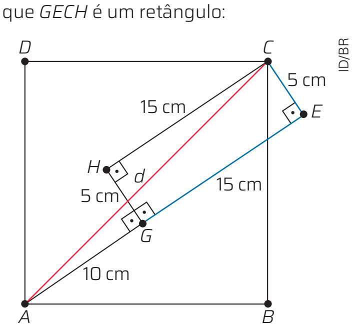
b) Com as pesquisas realizadas, os estudantes podem se inspirar para criar os painéis de azulejos que tenham transformações geométricas. Elas podem aparecer tanto em cada azulejo quanto entre azulejos. Na confecção das peças, eles podem recorrer a formas geométricas ou simétricas, elementos do dia a dia ou elementos característicos da região em que moram, evidenciando a importância de conhecer, enaltecer e preservar a cultura local.

Sugerimos que cada grupo crie uma decoração com nove azulejos de 15 cm × 15 cm dispostos em um quadrado de três por três azulejos (45 cm × 45 cm). Outras formações são possíveis, de acordo com a necessidade da turma, do espaço disponível e do que mais julgar pertinente à sua realidade. O trabalho pode ser feito com colagens, desenhos, impressões, fotografias e escritas. Na montagem do painel, eles podem utilizar cartolina ou papéis com gramaturas e colorações diferentes, madeira, papelão, entre outros materiais. Nesse momento, pode ser interessante conversar com o professor de Arte para que a atividade se torne mais rica e diversificada em termos de criação artística, explorando diferentes técnicas de produção.

Apoie e auxilie os estudantes na definição do local para a montagem e apresentação dos painéis, conversando com os gestores da escola sobre o local mais apropriado para a exposição.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 132)

1. Sejam d a diagonal do quadrado e ℓ o lado do quadrado. Considere o seguinte esboço, em que $GECH$ é um retângulo:



Temos que $d = \ell\sqrt{2}$ e Avelina percorreu 30 cm. Logo: $(\ell\sqrt{2})^2 = 5^2 + (10 + 15)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\ell\sqrt{2})^2 = 5^2 + 25^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{325} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell = 5\sqrt{13} \Rightarrow \ell = 5 \cdot 3{,}6 \Rightarrow \ell = 18$

Logo, Belinho percorreu 36 cm. Então, Belinho percorreu 6 cm a mais que Avelina.

Alternativa **c**.

2. A altura do triângulo equilátero é igual a:

$x = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$

Precisamos descobrir a altura do triângulo menor, formado pelo teto do caminhão e o restante dos lados do triângulo que representa a entrada do túnel; chamaremos essa altura de a. Por semelhança, temos:

$\frac{a}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Com isso, conseguimos calcular a altura que o caminhão deve ter $3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Alternativa **e**.

UNIDADE 3 TRIGONOMETRIA

CAPÍTULO 6 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 142)

1. a) $\text{sen}\,\hat{B} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\cos\hat{B} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\cos\hat{C} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\text{tg}\,\hat{C} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

b) $\text{sen}\,\hat{P} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$

$\cos\hat{P} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$

$\text{tg}\,\hat{P} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

$\text{sen}\,\hat{Q} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$

$\cos\hat{Q} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$

$\text{tg}\,\hat{Q} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$

2. a) $\text{sen}\,30° = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 12$

b) $\text{tg}\,60° = \frac{x}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{4\sqrt{3}} \Rightarrow x = 12$

c) No triângulo com o ângulo de 45°, vamos chamar o cateto adjacente ao ângulo de a. Assim:

$\text{tg}\,45° = \frac{10}{a} \Rightarrow 1 = \frac{10}{a} \Rightarrow a = 10$

No triângulo com o ângulo de 60°, vamos chamar o cateto adjacente ao ângulo de b. Assim, podemos escrever a seguinte relação:

$\text{tg}\,60° = \frac{10}{b} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{10}{b} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot b = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

Temos que $x = a + b$, então:

$x = 10 + 10\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 10 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

3. Considerando h a medida, em cm, da hipotenusa, temos:

$\cos\hat{X} = \frac{10}{h} \Rightarrow 0{,}6 = \frac{10}{h} \Rightarrow h = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$

Considerando b a medida, em cm, do outro lado e utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left(\frac{50}{3}\right)^2 = 10^2 + b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 = \frac{1\,600}{9} \Rightarrow b = \frac{40}{3}$

4. $\text{tg}\,\hat{A} = \frac{9}{9\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg}\,\hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \hat{A} = 30°$

$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{9\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \text{tg}\,\hat{B} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{B} = 60°$

5. $\text{sen}\,30° = \frac{x}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 6$

$\cos 30° = \frac{y}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{12} \Rightarrow y = 6\sqrt{3}$

Cálculo do perímetro do retângulo:

$P = x + y + x + y \Rightarrow P = 12(1 + \sqrt{3})$ m

6. $\text{sen}\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{12}{\overline{AC}} \Rightarrow 0{,}8 = \frac{12}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AC} = 15$

Para calcular o lado $\overline{BC}$, aplica-se o teorema de Pitágoras no triângulo ABC:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow \overline{BC} = 9$

No triângulo BDC, considerando que $\overline{BC}$ é 9 e que sen α é dado, pode-se calcular $\overline{BD}$:

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BD}}{9} \Rightarrow 0{,}8 = \dfrac{\overline{BD}}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{BD} = 9 \cdot 0{,}8 = 7{,}2$

Por fim, para calcular o lado $\overline{DC}$, aplica-se o teorema de Pitágoras no triângulo BDC:

$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 \Rightarrow \overline{DC} = 5{,}4$

Alternativa **a**.

7. a) O perímetro é a soma de todos os lados. Como o polígono regular tem lados de mesma medida, podemos escrever $P = n \cdot x$. Assim, a partir da área do polígono temos:

$A = \dfrac{n \cdot x \cdot a}{2}$

O apótema de um polígono regular é dado por $a = \dfrac{x}{2 \cdot \text{tg}\,\dfrac{180°}{n}}$. Substituindo a na fórmula da área, temos:

$A = \dfrac{n \cdot x \cdot a}{2}$

$A = \dfrac{n \cdot x \cdot \left(\dfrac{x}{2 \cdot \text{tg}\left(\dfrac{180°}{n}\right)}\right)}{2}$

$A = \dfrac{n}{4 \cdot \text{tg}\left(\dfrac{180°}{n}\right)} \cdot x^2$

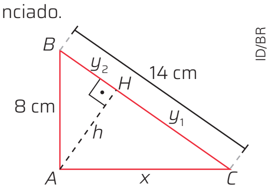
b) $A = \dfrac{n}{4 \cdot \text{tg}\left(\dfrac{180°}{n}\right)} \cdot x^2$

$A = \dfrac{225}{\text{tg}\ 20°} = \dfrac{225}{0{,}36397} \simeq 618$

Portanto, aproximadamente 618 cm².

c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que é possível fazer essa afirmação, a expressão de A em função de x é da forma $A = kx^2$, sendo k uma constante que depende do número de lados do polígono regular.

8. A imagem a seguir representa o triângulo ABC do enunciado.



No triângulo ABC, temos:

$14^2 = x^2 + 8^2 = 132$

No triângulo ABH, temos:

$8^2 = y_2^2 + h^2$

$64 = y_2^2 + h^2$

No triângulo ACH, temos:

$x^2 = y_1^2 + h^2$

$132 = y_1^2 + h^2$

Assim, temos as equações:

$\begin{cases} y_1{}^2 + h^2 = 132 \\ y_2{}^2 + h^2 = 64 \end{cases}$

Subtraindo uma equação da outra:

$y_1{}^2 - y_2{}^2 = 68$

Temos que $y_1 + y_2 = 14$ e $y_1{}^2 - y_2{}^2 = 68$.

Assim:

$y_1{}^2 - y_2{}^2 = (y_1 + y_2) \cdot (y_1 - y_2)$

$68 = 14 \cdot (y_1 - y_2)$

$y_1 - y_2 = \dfrac{34}{7}$

Assim, temos as equações:

$\begin{cases} y_1 + y_2 = 14 \\ y_1 - y_2 = \dfrac{34}{7} \end{cases}$

Somando as duas equações:

$2y_1 = 14 + \dfrac{34}{7}$

$y_1 = \dfrac{132}{14} = \dfrac{66}{7}$

Retornando no triângulo ACH, temos:

$132 = y_1{}^2 + h^2$. Então:

$132 = y_1{}^2 + h^2$

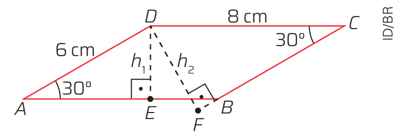
$132 = \left(\dfrac{66}{7}\right)^2 + h^2$

$h = \dfrac{\sqrt{2112}}{\sqrt{49}} = \dfrac{\sqrt{2^6 \cdot 33}}{7} = \dfrac{8\sqrt{33}}{7}$

Temos que $AH = h$ e $CH = y_1$.

Portanto, $AH = \dfrac{8\sqrt{33}}{7}$ cm e $CH = \dfrac{66}{7}$ cm.

9.



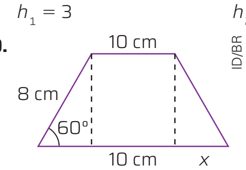
Queremos determinar h_1 e h_2, em cm. Então:

$\text{sen}\ 30° = \dfrac{h_1}{6}$ $\qquad$ $\text{sen}\ 30° = \dfrac{h_2}{8}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{h_1}{6}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2} = \dfrac{h_2}{8}$

$h_1 = 3$ $\qquad$ $h_2 = 4$

10.



Para determinar a altura h, temos:

$\text{sen}\ 60° = \dfrac{h}{8} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{8} \Rightarrow h = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Para determinar x, temos:

$\cos 60° = \dfrac{x}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{8} \Rightarrow x = 4$

Logo, a base maior mede 18 cm $(4 + 10 + 4 = 18)$.

O perímetro P, em cm, é dado por:

$P = 8 + 10 + 8 + 18 = 44$.

11. Consideramos x e y como catetos e h a medida, em cm, a ser encontrada.

Usando os conceitos trigonométricos e a tabela de valores para ângulos notáveis, calcula-se x e y:

$\text{sen}\ 30° = \dfrac{x}{4} \Rightarrow \dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2$

$\text{sen}\ 60° = \dfrac{y}{4} \Rightarrow \dfrac{y}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Calculando a medida, em cm, da altura relativa ao maior lado do triângulo, temos:

$\dfrac{x \cdot y}{2} = \dfrac{4 \cdot h}{2} \Rightarrow 4h = 2 \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow h = \sqrt{3}$

Alternativa **c**.

12. Temos, do enunciado, que $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{1}{3}$. Então:

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{3}$

Temos que $AC = 1$. Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = 1^2 + \left(\dfrac{AB}{3}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \dfrac{6\sqrt{2}}{8} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

Alternativa **d**.

13.
- Opção I:

  $\text{sen}\ 30° = \dfrac{11}{m}$

  $m = \dfrac{11}{\dfrac{1}{2}} = 22 = \sqrt{484}$

- Opção II:

  $\text{sen}\ 45° = \dfrac{12}{m}$

  $m = \dfrac{12}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 12 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} = \sqrt{288}$

- Opção III:

  $\text{sen}\ 60° = \dfrac{18}{m}$

  $m = \dfrac{18}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 18 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3} = \sqrt{432}$

Alternativa **c**.

14. Temos que o cateto adjacente ao ângulo de 45° é 1 000 e queremos determinar a hipotenusa, d, em metro. Então:

$\cos 45° = \dfrac{1\,000}{d} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1\,000}{d} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 1\,000\sqrt{2} \simeq 1\,414$

Alternativa **c**.

15. $\text{tg}\ 30° = \dfrac{h}{125} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 125 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 125 \cdot \dfrac{1{,}73}{3} \simeq 72$

TECNOLOGIA (P. 144)

1. Para obtermos o valor de um seno na calculadora, digitamos o ângulo correspondente a ele e apertamos a tecla sin. O processo é análogo para o cosseno e a tangente.

	SEN	COS	TG
60° na calculadora	Aproximadamente 0,866025406	0,5	Aproximadamente 1,732050808
60° na tabela trigonométrica	Aproximadamente 0,86603	0,5	Aproximadamente 1,73205
120° na calculadora	Aproximadamente 0,866025406	20,5	Aproximadamente 21,732050808
120° na tabela trigométrica	Aproximadamente 0,86603	20,5	Aproximadamente 21,73205
89° na calculadora	Aproximadamente 0,999847695	Aproximadamente 0,017452406	Aproximadamente 57,28996163
89° na tabela trigométrica	Aproximadamente 0,99985	Aproximadamente 0,1745	Aproximadamente 57,29000

A diferença dos resultados obtidos na calculadora e na tabela trigonométrica está na precisão dos valores, pois a calculadora fornece os resultados com mais casas decimais.

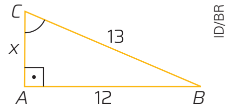
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 148)

16. Sim, os lados dos dois triângulos apresentam medidas proporcionais, então, os ângulos não são alterados e têm medidas iguais.

17. $\text{tg}\ \beta = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida do cateto adjacente a } \beta} \Rightarrow \text{tg}\ \beta = \dfrac{2x}{x} \Rightarrow \text{tg}\ \beta = 2$

Para determinar o valor de β, podemos utilizar uma calculadora.

Portanto, $\beta \simeq 63{,}4°$.

18. 

O cateto oposto ao ângulo $\widehat{C}$ mede 12 e a hipotenusa mede 13.

Considerando x a medida do cateto adjacente ao ângulo $\widehat{C}$ e utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$13^2 = 12^2 + x^2$

$x = 5$

Precisamos determinar tg $\widehat{B}$. Então:

$\text{tg } \widehat{B} = \dfrac{x}{12} \Rightarrow \text{tg } \widehat{B} = \dfrac{5}{12}$

19. a) Na tabela, sen 25° ≃ 0,42262. Então:
$10 \cdot \text{sen } 25° \simeq 10 \cdot 0{,}42262 \simeq 4{,}2262$

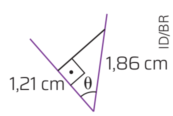
b) Na tabela, sen 20° ≃ 0,34202 e sen 30° ≃ 0,50000. Então:
$\text{sen } 20° + \text{sen } 30° \simeq 0{,}34202 + 0{,}50000 \simeq 0{,}8420$

20. Temos que $\cos \alpha = \text{sen } (90° - \alpha)$.
$\cos 68° = \text{sen } (90° - 68°) = \text{sen } 22°$
Portanto, $\alpha = 22°$.

21. Temos que $\text{sen } \alpha = \cos (90° - \alpha)$.
$\text{sen } 25° = \cos (90° - 25°) = \cos 65°$
Portanto, $\alpha = 65°$.

22. Esse processo é similar ao apresentado na seção de exercícios resolvidos **R5**.

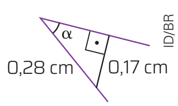
a) Realizando o processo descrito, temos:



$\cos \theta = \dfrac{1{,}21}{1{,}86} \simeq 0{,}65$

Procurando na tabela, temos que o cosseno mais próximo de 0,65 é o do ângulo de 49°. Portanto, $\theta \simeq 49°$.

b) $\text{sen } \alpha = \dfrac{0{,}17}{0{,}28} \simeq 0{,}60$



Procurando na tabela, temos que o seno mais próximo de 0,60 é o do ângulo de 37°. Portanto, $\alpha \simeq 37°$.

23. Alguns valores de respostas podem variar de acordo com a precisão da construção dos estudantes.

a) sen 32° ≃ 0,53
cos 32° ≃ 0,85
tg 32° ≃ 0,62

b) Sim. Com esse mesmo triângulo retângulo com um ângulo de 32°, podemos determinar as razões do ângulo de 58° por $\text{sen } \alpha = \cos (90° - \alpha)$ ou $\cos \alpha = \text{sen } (90° - \alpha)$.

c) Os ângulos podem ser determinados por:
$\text{sen } 58° = \cos (90° - 58°) = \cos 32° \simeq 0{,}85$
$\cos 58° = \text{sen } (90° - 58°) = \text{sen } 32° \simeq 0{,}53$

24. a) $\text{sen } 20° = \dfrac{h}{1000} \Rightarrow h = 1000 \cdot \text{sen } 20°$
Na tabela, temos:
$\text{sen } 20° \simeq 0{,}3420$
$h \simeq 1000 \cdot 0{,}3420$
$h \simeq 342$

b) $\text{sen } 20° = \dfrac{h}{1500} \Rightarrow h \simeq 513$

c) $\text{sen } 20° = \dfrac{h}{2000} \Rightarrow h \simeq 684$
O avião atinge a altura de aproximadamente 684 m ao percorrer 2 000 m.
Portanto, para que o avião atinja a altura de 700 m, é necessário que ele levante voo com um ângulo superior a 20°.

d) Resposta pessoal.
Sugestões:
- Levantando voo com um ângulo de 30°, que altitude o avião deve alcançar depois de percorrer 5 000 m?

Temos que:
$\text{sen } 30° = \dfrac{h}{5000} \Rightarrow h = 2500$
Portanto, após percorrer 5 000 m, o avião alcança 2 500 m de altitude.
- O piloto deseja atingir uma altura superior a 3 000 m ao final de 5 000 m de percurso. A que ângulo o avião precisa estar com relação ao solo quando decolar?

Temos que:
$\text{sen } \alpha = \dfrac{3000}{5000} \Rightarrow \alpha \simeq 36{,}87°$

Portanto, é necessário que o avião decole com um ângulo de aproximadamente 36,87°.

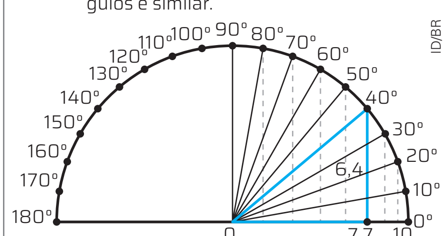
25. a) $\cos 20° = \dfrac{x}{10} \Rightarrow x \simeq 9{,}4$
Portanto, a base mede aproximadamente 9,4 cm.

b) Podemos determinar a altura das seguintes maneiras:
1ª) $\text{sen } 20° = \dfrac{h}{10} \Rightarrow h \simeq 3{,}4$
2ª) Temos que a base do retângulo mede 9,4 cm e a diagonal mede 10 cm. Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:
$10^2 = (9{,}4)^2 + h^2 \Rightarrow h = 3{,}4$
Portanto, a altura mede 3,4 cm.

c) $\cos \beta = \dfrac{3{,}4}{10} \Rightarrow \cos \beta = 0{,}34 \Rightarrow \beta \simeq 70°$

26. a) Com o auxílio de compasso e transferidor, os estudantes podem desenhar a semicircunferência com 90° e marcar os ângulos de 10 em 10 graus.

b) Na semicircunferência, podemos traçar as retas perpendiculares às medidas dos ângulos. Analisando os triângulos retângulos formados em cada ângulo, podemos medir com uma régua a medida dos seus lados e, por meio das relações trigonométricas, determinar os valores de seno, cosseno e tangente. Como exemplo, vamos calcular os valores para 40°. O processo para os demais ângulos é similar.



Analisando o triângulo formado com o ângulo de 40°, temos:

$\text{sen } 40° = \dfrac{6{,}4}{10} = 0{,}64$

$\cos 40° = \dfrac{7{,}7}{10} = 0{,}77$

$\text{tg } 40° = \dfrac{\text{sen } 40°}{\cos 40°} = \dfrac{0{,}64}{0{,}77} = 0{,}83$

Os valores obtidos vão depender da precisão das medidas. Com aproximação, temos:

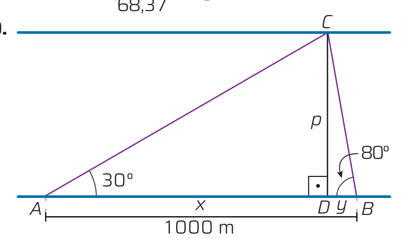
ÂNGULO	SENO	COSSENO	TANGENTE
0°	0	1	0
10°	0,17	0,98	0,17
20°	0,34	0,94	0,36
30°	0,5	0,87	0,57
40°	0,64	0,77	0,83
50°	0,77	0,64	1,20
60°	0,87	0,5	1,74
70°	0,94	0,34	2,76
80°	0,98	0,17	5,76
90°	1	0	—

c) Os valores obtidos no item anterior devem ser aproximados aos resultados encontrados na tabela trigonométrica. Entretanto, os dados da tabela são mais precisos e com mais casas decimais.

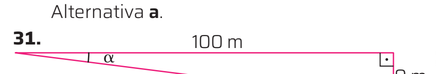
27. $\text{sen } 1° = \dfrac{6372}{d} \Rightarrow d \simeq \dfrac{6372}{0{,}01745} \simeq 365157$

28. Sim.
No triângulo ABC, vamos denominar AC de h. Assim:
$\text{sen } 25° = \dfrac{30}{h} \Rightarrow h \simeq \dfrac{30}{0{,}4226} \simeq 71$
Então, $AC = 71$ m e $BC = 30$ m.
Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AB \simeq 64{,}35$
No triângulo ABD, $AB \simeq 64{,}35$ é cateto adjacente ao ângulo $\widehat{A}$ e $BD = 30 + x$ é cateto oposto ao ângulo $\widehat{A}$. Então:
$\text{tg } 35° \simeq \dfrac{(30 + x)}{64{,}35} \Rightarrow x \simeq 15$

29. No triângulo ABD, vamos denominar AD de h. Assim:
$\cos 43° = \dfrac{50}{h} \Rightarrow h \simeq \dfrac{50}{0{,}73135} \simeq 68{,}37$
Então, $AD \simeq 68{,}37$ m.
Temos que $BD = 20 + y$ é o cateto oposto ao ângulo $\widehat{A}$ e $AD \simeq 68{,}37$ é a hipotenusa do ângulo $\widehat{A}$. Então:
$\text{sen } 43° \simeq \dfrac{(y + 20)}{68{,}37} \Rightarrow y \simeq 27$

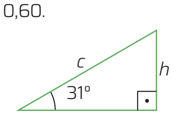
30. 

Considerando $AD = x$ e $BD = y$, temos:
$x + y = 1000$
Precisamos determinar o comprimento da ponte, em metro. Considerando $CD = p$, e analisando o triângulo ACD, temos:
$\text{tg } 30° = \dfrac{p}{x} \Rightarrow x \simeq \dfrac{p}{0{,}57735}$
No triângulo BCD, temos:
$\text{tg } 80° = \dfrac{p}{y} \Rightarrow y \simeq \dfrac{p}{5{,}67128}$
Substituindo os valores de x e y em $x + y = 1000$, temos:
$\dfrac{p}{0{,}57735} + \dfrac{p}{5{,}67128} = 1000 \Rightarrow p \simeq 523{,}68$
Alternativa **a**.

31. 

Considerando α o ângulo de inclinação da estrada, temos que o cateto adjacente a α mede 100 e o cateto oposto a α mede 9. Então:
$\text{tg } \alpha = \dfrac{9}{100} \Rightarrow \alpha \simeq 5°$

32. Resposta pessoal.
Como sugestão:
- Uma loja pretende instalar uma escada rolante para dar acesso ao primeiro andar. Sabe-se que o comprimento disponível no chão é 12 m e a escada terá uma inclinação de 31°, conforme ilustra a imagem. Determine a altura e o comprimento da escada. Dados: sen 31° ≃ 0,52, cos 31° ≃ 0,86 e tg 31° ≃ 0,60.



$\cos 30° = \dfrac{12}{c} \Rightarrow c \simeq \dfrac{12}{0{,}86} \simeq 14$

$\text{tg } 30° = \dfrac{h}{12} \Rightarrow h \simeq 7$

Portanto, o comprimento da escada será aproximadamente 14 m e a altura será aproximadamente 7 m.

- Uma loja pretende instalar uma escada rolante para dar acesso ao primeiro andar. Sabe-se que a altura da escada terá de ser 7 m e a inclinação será de 31°. Qual será o comprimento da escada?

  sen 31° $= \dfrac{7}{c} \Rightarrow c = \dfrac{7}{0{,}52} \simeq 14$

33. Resposta pessoal.

Para criar esse problema, os estudantes podem pensar em algumas situações cotidianas em que se deparam com ângulos, alturas, distâncias e comprimentos.

Como sugestão:

- Uma criança empina uma pipa presa a um fio esticado de 50 m. O vento mantém o fio a um ângulo de 40° com a horizontal. A altura das mãos da criança com relação ao chão é 1,30 m. Determine, aproximadamente, a altura da pipa em relação ao solo.

  Primeiro, vamos determinar a altura da pipa até as mãos da criança.

  sen 40° $= \dfrac{h}{50} \Rightarrow h \simeq 32$

  Então, a pipa está a aproximadamente 32 m de altura em relação às mãos da criança. Como a mão está a 1,30 m do solo, temos:

  $32 + 1{,}30 = 33{,}30.$

  Portanto, a pipa está, aproximadamente, a uma altura de 33,3 m.

- Uma escada está encostada no telhado de uma casa e tem seus pés afastados a 5 m de distância da casa, formando, com o plano horizontal, um ângulo de 32°. Determine a altura aproximada dessa casa.

  Temos que o ângulo de inclinação da escada é 32° e a distância da escada à casa é 5 m (cateto adjacente ao ângulo). Precisamos determinar a altura h da casa (cateto oposto ao ângulo). Assim: tg 32° $= \dfrac{h}{5} \Rightarrow h \simeq 3{,}12$

CÁLCULO RÁPIDO (P. 150)

1. a) sen 30° $= \dfrac{x}{6} \Rightarrow x = 3$

e

cos 30° $= \dfrac{y}{6} \Rightarrow y = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) sen 30° $= \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 1$

e

cos 30° $= \dfrac{y}{2} \Rightarrow y = \sqrt{3}$

c) O triângulo tem todos os lados com medidas iguais, então ele é equilátero e $\alpha = 30°$. Assim:

cos 30° $= \dfrac{x}{3} \Rightarrow x = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

d) cos 30° $= \dfrac{x}{1} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) sen 30° $= \dfrac{x}{10} \Rightarrow x = 5$

e

cos 30° $= \dfrac{y}{10} \Rightarrow y = 5\sqrt{3}$

2. sen 60° $= \dfrac{x}{8} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$

cos 60° $= \dfrac{y}{8} \Rightarrow y = 4$

$AB = y + 10 + y = 4 + 10 + 4 = 18$

PARA RECORDAR (P. 150)

1. A quantidade de azulejos amarelos em cada figura é dada pela sequência (7, 14, 21, ...).

Observe que essa sequência é formada por múltiplos de 7. Assim, podemos escrever:

1º termo: $1 \cdot 7 = 7$

2º termo: $2 \cdot 7 = 14$

3º termo: $3 \cdot 7 = 21$

E assim por diante. Para o 50º termo, teríamos:

50º termo: $50 \cdot 7 = 350$

Logo, a figura 50 terá 350 azulejos amarelos.

A quantidade de azulejos brancos em cada figura é dada pela sequência (13, 26, 39, ...).

Observe que essa sequência é formada por múltiplos de 13. Assim, podemos escrever:

1º termo: $1 \cdot 13 = 13$

2º termo: $2 \cdot 13 = 26$

3º termo: $3 \cdot 13 = 39$

E assim por diante. Para o 50º termo, teríamos:

50º termo: $50 \cdot 13 = 650$

Logo, a figura 50 terá 650 azulejos brancos.

Portanto, a faixa completa que corresponde à figura 50, terá 350 azulejos amarelos e 650 azulejos brancos.

2. Podemos expressar a quantidade total de alunos, T_A, da seguinte maneira:

$T_A = 80 + 45 + x + y \Rightarrow T_A = x + y + 125$

E podemos expressar a quantidade de bilhetes, T_B, vendidos como:

$T_B = x \cdot 1 + 45 \cdot 2 + y \cdot 3 \Rightarrow T_B = x + 3y + 90$

Do enunciado, temos que o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio. Então:

$T_A + 33 = T_B \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y + 125 + 33 = x + 3y + 90 \Rightarrow y = 34$

E temos que o total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos. Então:

$x = (T_B) \cdot 20\% \Rightarrow x = (x + 3y + 90) \cdot 0{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}8x - 0{,}6y = 18$

Substituindo $y = 34$, temos:

$0{,}8x - 0{,}6 \cdot (34) = 18 \Rightarrow x = \dfrac{38{,}4}{0{,}8} = 48$

Alternativa **d**.

3. Se o balde está metade cheio e sua capacidade é de 18 litros, então restam 9 litros para encher o balde.

A cada segundo, caem 5 gotas, cada uma com $5 \cdot 10^{-2}$ mL de água. Então, por segundo, tem-se um volume (em mL) de água enchendo o balde de $5 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 25 \cdot 10^{-2}$.

Em um segundo, é inserido no balde 0,25 mL de água. Com uma regra de três simples, concluímos que, em 36 000 segundos (10 horas) o balde será enchido completamente.

Alternativa **b**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 151)

1. Uma forma de resolução desta questão é apresentar os dados em um quadro, organizando o passo a passo da divisão do leite, até obter dois jarros com 4 litros.

Os estudantes podem também apresentar esquemas, desenhos, ou outra forma de representação em que consigam apresentar como foi feita a divisão do leite.

PASSO A PASSO	JARRO COM 8 LITROS	JARRO COM 5 LITROS	JARRO COM 3 LITROS
Início	Cheio	Vazio	Vazio
Do 1º para o 2º jarro	3	5	Vazio
Do 2º para o 3º jarro	3	2	3
Do 3º para o 1º jarro	6	2	Vazio
Do 2º para o 3º jarro	6	Vazio	2
Do 1º para o 2º jarro	1	5	2
Do 2º para o 3º jarro	1	4	3
Juntando o 1º e o 3º jarros (fim)	4	4	Vazio

2. Esta é apenas uma forma de resolução. Os estudantes poderão chegar às respostas por raciocínios diferentes.

Vamos considerar f o salário da farmacêutica, a o salário da arquiteta, e o salário da empreiteira e p o salário da professora. Com as três primeiras informações, temos:

$p = p$; $f = p + 2p = 3p$; $a = 3f = 9p$;

$e = 3a = 9f = 27p$

Na quarta afirmação, temos que Mariana ganha menos que Daniele, senão Mariana seria mais velha do que ela mesma. Mas Daniele não ganha duas vezes mais do que Mariana.

Assim, temos as seguintes possibilidades para as profissões das duas:

MARIANA	DANIELE
professora	arquiteta
professora	empreiteira
farmacêutica	empreiteira

Pela quinta afirmação, Júlia ganha mais do que o Rita, e ficamos com as seguintes possibilidades:

	MARIANA	DANIELE	JÚLIA	RITA
1ª	professora	arquiteta	empreiteira	farmacêutica
2ª	professora	empreiteira	arquiteta	farmacêutica
3ª	farmacêutica	empreiteira	arquiteta	professora

Da quinta afirmação, também temos que Júlia ganha R$ 3 776,00 a mais que Rita.

Considerando cada uma das possibilidades da tabela e os salários de Júlia e Rita, temos:

Primeira possibilidade: $\begin{cases} e = 9f \\ e = f + 3\,776 \end{cases}$

Igualando as duas equações: $f = \dfrac{3\,776}{8} = 472$

Substituindo f nos valores de cada profissão:

$p = 157{,}33...$; $f = 472$; $a = 1\,416$; $e = 4\,248$

Segunda possibilidade: $\begin{cases} a = 3f \\ a = f + 3\,776 \end{cases}$

Igualando as duas equações:

$f = \dfrac{3\,776}{2} = 1\,888$

Substituindo f nos valores de cada profissão:

$p = 629{,}33...$; $f = 1\,888$; $a = 5\,664$; $e = 16\,992$

Terceira possibilidade: $\begin{cases} a = 9p \\ a = p + 3\,776 \end{cases}$

Igualando as duas equações: $p = \dfrac{3\,776}{8} = 472$

Substituindo f nos valores de cada profissão:

$p = 472$; $f = 1\,416$; $a = 4\,248$; $e = 12\,744$

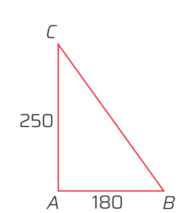
Nas três primeiras afirmações, temos que cada uma ganha, exatamente, duas vezes mais do que a outra. Assim, as possibilidades 1 e 2 podem ser desconsideradas e a terceira possibilidade atende a todos os itens.

Portanto, Mariana é farmacêutica, Daniele é empreiteira, Júlia é arquiteta e Rita é professora.

MATEMÁTICA E PAPIRO DE RHIND (P. 152)

Conectando ideias

1. a) O *seqt* é uma razão entre a altura em cúbitos e o deslocamento horizontal, medido em mãos. No entanto, as medidas originais são dadas em cúbitos tanto para a altura quanto para o deslocamento horizontal. A pirâmide do problema tinha altura de 250 cúbitos e largura da base de 360 cúbitos, então, com deslocamento horizontal de 180 cúbitos. Isso pode ser descrito como nesta figura do triângulo retângulo.



ID/BR

O *seqt* da face de uma pirâmide era o quociente do afastamento horizontal pela medida do eixo vertical. Então, o *seqt* dessa pirâmide é igual a:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{180}{250} = \frac{18}{25}$$

Esse valor deve ser multiplicado por 7 para que a unidade desse quociente passe de cúbitos por cúbitos para mãos por cúbitos. Calculando:

$$7 \cdot \frac{18}{25} = \frac{126}{25} = 5\frac{1}{25}$$

b) Há várias maneiras de obter $\frac{18}{25}$ como soma de frações unitárias. Uma delas é perceber que esse número é maior que $\frac{1}{2}$ e calcular $\frac{18}{25} - \frac{1}{2} = \frac{36}{50} - \frac{25}{50} = \frac{11}{50}$, que, por sua vez, é igual a $\frac{11}{50} = \frac{10}{50} + \frac{1}{50} = $ $= \frac{1}{5} + \frac{1}{50}$.

c) Sabemos que, no triângulo retângulo, a tangente do ângulo B é igual a $\frac{AC}{AB}$. Então:

$\text{tg}\,\hat{B} = \frac{1}{seqt}$.

2. Espera-se que os estudantes façam pesquisas sobre as civilizações que desenvolveram a Matemática ao redor do mundo, de acordo com as necessidades do momento, além de buscarem conhecer mais a história do papiro de Ahmes e suas contribuições, tanto matemáticas quanto históricas.

Os estudantes podem encontrar informações sobre civilizações de todos os continentes nos mais variados períodos, garantindo que a pesquisa contemple uma diversidade de saberes em vários períodos históricos. É possível que encontrem e pesquisem, além dos egípcios, os babilônios, os sumérios, os chineses, os gregos, os romanos, os maias, os incas, os astecas, os hindus, os árabes, entre outros povos que deixaram muitos legados, principalmente matemáticos, à humanidade. Em relação aos artefatos encontrados, podem falar sobre o osso de Ishango, a Pedra de Roseta, o calendário maia, a Plimpton 322, entre outros.

CAPÍTULO 7 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 158)

1.

ÂNGULO	SENO	COSSENO	TANGENTE
$\hat{A}$	0,43	0,9	0,48
$\hat{B}$	0,71	0,7	1,01
$\hat{C}$	0,8	0,6	1,33
$\hat{D}$	0,71	−0,7	−1,01
$\hat{E}$	0,43	−0,9	−0,48

2. **a)** $\text{sen}\,143° = \text{sen}\,37° \simeq 0{,}60182$

b) $\text{tg}\,143° = -\text{tg}\,37° \simeq -0{,}75356$

3. **a)** $\text{sen}\,141° = \text{sen}\,39°$. Logo, $\text{sen}\,141° \simeq 0{,}63$.

b) $\text{sen}\,127° = \text{sen}\,53°$. Logo, $\text{sen}\,127° \simeq 0{,}80$.

c) $\text{sen}\,105° = \text{sen}\,75°$. Logo, $\text{sen}\,105° \simeq 0{,}97$.

d) $\cos 164° = -\cos 16°$.
Logo, $\cos 164° \simeq -0{,}96$.

e) $\cos 113° = -\cos 67°$. Logo, $\cos 113° \simeq$ $\simeq -0{,}39$.

f) $\cos 92° = -\cos 88°$. Logo, $\cos 92° \simeq$ $\simeq -0{,}03$.

4. $360° - (120° + 60° + 45°) = 135°$

Como 120° e 60° correspondem a ângulos suplementares e o mesmo vale para 45° e 135°, temos:

$$\text{sen}\,120° = \text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}\,45° = \text{sen}\,135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = \frac{-1}{2} \text{ e } \cos 60° = \frac{1}{2}$$

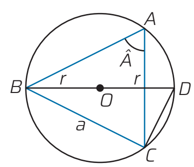
$$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 162)

5. Para o caso em que o triângulo ABC é acutângulo.

Vamos traçar uma circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Em seguida, traçar o diâmetro $\overline{BD}$. Note que o triângulo BCD é retângulo em C.



Como $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são ângulos inscritos na circunferência e têm o mesmo arco, $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{D})$.

Observando o triângulo BCD, obtemos:

$\text{sen}\,\hat{D} = \frac{a}{2r}$

Da igualdade $\text{sen}\,\hat{A} = \text{sen}\,\hat{D}$, podemos concluir que:

$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{2r}$

$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2r$

De maneira análoga, podemos escrever para os demais lados:

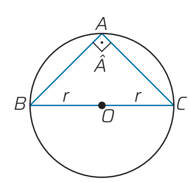
$\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = 2r$

$\frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2r$

Para o caso em que o triângulo ABC é retângulo em A.

Vamos traçar uma circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Note que o diâmetro é a hipotenusa $\overline{BC}$.



$2r = a$

Como $\text{sen}\,\hat{A} = 1$ e $a = 2r$, temos:

$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2r$

Para os demais lados, temos:

$\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = 2r$

$\frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2r$

6. **a)** $\text{med}(\hat{P}) = 180° - (60° + 45°) = 75°$

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{MN}{\text{sen}\,75°} = \frac{4}{\text{sen}\,45°}$$

$$MN = \frac{4 \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$MN = \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$MN = 2\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

$$MN \simeq 5{,}5$$

Portanto, $\hat{P}$ mede 75° e $\overline{MN}$ mede 5,5 m.

b) $\text{med}(\hat{L}) = 180° - (63° + 50°) = 67°$

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{KL}{\text{sen}\,63°} = \frac{JL}{\text{sen}\,50°} = \frac{JK}{\text{sen}\,67°}$$

$$\frac{KL}{\text{sen}\,63°} = \frac{100}{\text{sen}\,50°}$$

$$KL \simeq 116$$

$$\frac{KJ}{\text{sen}\,67°} = \frac{100}{\text{sen}\,50°}$$

$$KJ \simeq 120$$

Portanto, em valores aproximados, $\overline{KL}$ mede 116 m e $\overline{KJ}$ mede 120 m.

7. $$\frac{x}{\text{sen}\,36°} = \frac{20}{\text{sen}\,72°}$$

$$x = \frac{20}{\text{sen}\,72°} \cdot \text{sen}\,36°$$

$$x \simeq \frac{20}{0{,}95} \cdot 0{,}58$$

$$x \simeq 12$$

Portanto, 12 m.

8. **a)** $\frac{a}{\text{sen}\,30°} = 2 \cdot 6 \Rightarrow \frac{a}{0{,}5} = 12 \Rightarrow a = 6\sqrt{6}$

b) $\frac{12}{\text{sen}\,60°} = 2 \cdot r \Rightarrow \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \cdot r \Rightarrow r = 4\sqrt{3}$

9. **a)** $$\frac{a}{\text{sen}\,60°} = \frac{8}{\text{sen}\,45°}$$

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$a = 4\sqrt{6}$$

b) $$\frac{a}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{10}{\text{sen}\,45°}$$

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow a = 5\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

$$\frac{b}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$b = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$b = 5\sqrt{2}$$

c) $$\frac{\sqrt{2}}{\text{sen}\,30°} = \frac{2}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\text{med}(\hat{C}) = 45°$ ou $\text{med}(\hat{C}) = 135°$.

d) $$\frac{20}{\text{sen}\,30°} = \frac{20\sqrt{3}}{\text{sen}\,\hat{A}}$$

$$\frac{20}{\frac{1}{2}} = \frac{20\sqrt{3}}{\text{sen}\,\hat{A}}$$

$$\text{sen}\,\hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $\text{med}(\hat{A}) = 60°$ e $\text{med}(\hat{C}) = 90°$, ou $\text{med}(\hat{A}) = 120°$ e $\text{med}(\hat{C}) = 30°$.

10. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Logo, med($\hat{C}$) = 21°.

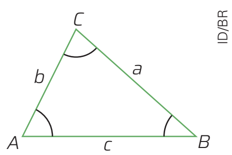
$\frac{x}{\text{sen } 84°} = \frac{80}{\text{sen } 21°}$

$x \simeq \frac{80}{0,35} \cdot 0,98$

$x \simeq 224$

Portanto, a distância x é igual a 224 m.

11. Em um triângulo ABC, temos:



$\begin{cases} \frac{a+b}{2c} = \text{sen}\,\hat{A} + \text{sen}\,\hat{B} \\ \frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c = \frac{a\,\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{A}} \\ b = \frac{a\,\text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{A}} \end{matrix}$

Substituindo b e c na primeira equação, temos:

$\frac{a + \frac{a\,\text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{A}}}{2a\,\frac{\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{A}}} = \text{sen}\,\hat{A} + \text{sen}\,\hat{B}$

Simplificando:

$\frac{\text{sen}\,\hat{A} + \text{sen}\,\hat{B}}{2\,\text{sen}\,\hat{C}} = \text{sen}\,\hat{A} + \text{sen}\,\hat{B}$

$\frac{1}{2} = \text{sen}\,\hat{C}$

med($\hat{C}$) = 30° ou med($\hat{C}$) = 150°

12. Pela lei dos senos, temos:

$\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$

$b = \frac{c \cdot \text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{C}}$

Substituindo o valor obtido de b na expressão $b \cdot \text{sen}\,\hat{B} = c \cdot \text{sen}\,\hat{C}$, temos:

$\frac{c \cdot \text{sen}\,\hat{B} \cdot \text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{C}} = c \cdot \text{sen}\,\hat{C}$

$\text{sen}^2\hat{B} = \text{sen}^2\hat{C}$

$\text{sen}\,\hat{B} = \text{sen}\,\hat{C}$ ou $\text{sen}\,\hat{B} = -\text{sen}\,\hat{C}$

Como $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos de um triângulo, só resta $\text{sen}\,\hat{B} = \text{sen}\,\hat{C}$. Assim, med($\hat{B}$) = med($\hat{C}$) e o triângulo é isósceles.

13. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

a) Um poste tem a sombra projetada até os pontos P_1 e P_2 em dois horários diferentes. Sabendo que P_1 está a 50 m de P_2 e que o ângulo do raio com o chão em P_1 e P_2 mede 32° e 47°, respectivamente, calcule a altura do poste.

b) Calcule o valor de x, em centímetro.

14. $\frac{60}{\text{sen } 30°} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen } 45°}$

$\overline{BC} = \frac{60 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{30 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} =$

$= 30 \cdot 1,4 = 42$

Alternativa **a**.

15. No triângulo ABP, temos a seguinte relação trigonométrica:

$\text{tg } 40° = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}}$

Já no triângulo ABQ, temos a relação:

$\text{tg } 50° = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB} - 100}$

Isolando $\overline{PB}$ em ambas as equações:

$\overline{PB} = \frac{\overline{AB}}{\text{tg } 40°}$

$\overline{PB} = \frac{\overline{AB}}{\text{tg } 50°} + 100$

Igualando as equações, temos:

$\frac{\overline{AB}}{\text{tg } 40°} = \frac{\overline{AB}}{\text{tg } 50°} + 100$

$\frac{\overline{AB}}{\text{tg } 40°} = \frac{\overline{AB} + 100 \cdot tg\ 50°}{\text{tg } 50°}$

$\overline{AB} \cdot \text{tg } 50° = \overline{AB} \cdot \text{tg } 40° + 100 \cdot \text{tg } 50° \cdot \text{tg } 40°$

$\overline{AB} \cdot \text{tg } 50° - \overline{AB} \cdot \text{tg } 40° = 100 \cdot \text{tg } 50° \cdot \text{tg } 40°$

$\overline{AB} \cdot (\text{tg } 50° - \text{tg } 40°) = 100 \cdot \text{tg } 50° \cdot \text{tg } 40°$

$\overline{AB} = \frac{100 \cdot \text{tg } 50° \cdot \text{tg } 40°}{(\text{tg } 50° - \text{tg } 40°)}$

$\overline{AB} = \frac{100 \cdot 1,19 \cdot 0,84}{(1,19 - 0,84)} = \frac{99,96}{0,35} = 285,6$

Alternativa **d**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 165)

16. Há dois casos:

- Para o caso em que $\hat{A}$ é ângulo reto.

  Se med($\hat{A}$) = 90°, temos que $\text{sen}\,\hat{A} = 1$ e $b = h$.

  De $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$, $\text{sen}\,\hat{A} = 1$ e $b = h$, temos:

  $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen}\,\hat{A}$

- Para o caso em que $\hat{A}$ é ângulo agudo.

  No triângulo ABC, temos:

  $\text{sen}\,\hat{A} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen}\,\hat{A}$.

  Substituindo h por $b \cdot \text{sen}\,\hat{A}$ em $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$, obtemos:

  $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen}\,\hat{A}$

17. **a)** $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \text{sen } 60° = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

Portanto, $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm².

b) $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \text{sen } 135° = 7\sqrt{2}$

Portanto, $7\sqrt{2}$ cm².

18. **a)** $S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \text{sen } 60° \cdot 6 = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6$

$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2$ u.a.

b) $S = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \text{sen } 45° \cdot 8 = \frac{r^2\sqrt{2}}{4} \cdot 8$

$S = 2\sqrt{2}\, r^2$ u.a.

19. $S_{BCDE} = S_{ABC} - S_{ADE}$

$S_{BCDE} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \text{sen } 60° - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \text{sen } 60°$

$S_{BCDE} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{BCDE} = \left(\frac{9}{2} - 1\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{BCDE} = \frac{7\sqrt{3}}{4}$ cm²

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 167)

20. Há dois casos:

- Para o caso em que $\hat{A}$ é ângulo reto.

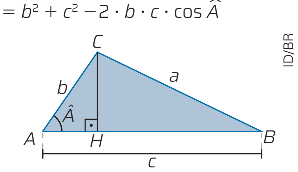
Se med($\hat{A}$) = 90°, temos $\cos\hat{A} = 0$. Então:

$-2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A} = 0$.

Do teorema de Pitágoras, vimos: $a^2 = b^2 + c^2$.

Daí, adicionando as duas equações, temos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$



- Para o caso em que $\hat{A}$ é ângulo agudo.

  Dado o triângulo ABC, traçamos a altura $\overline{CH}$, de medida h, relativa ao lado $\overline{AB}$, e consideramos $AH = x$. Daí, temos que $BH = c - x$.

  No $\triangle AHC$, temos:

  $\cos\hat{A} = \frac{x}{b}$

  $x = b \cdot \cos\hat{A}$ ①

  Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle AHC$, obtemos:

  $x^2 + h^2 = b^2$ ②

  Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle BHC$, temos:

  $(c - x)^2 + h^2 = a^2$

  $c^2 - 2cx + x^2 + h^2 = a^2$ ③

  Substituindo ① e ② em ③, temos:

  $c^2 - 2c(b \cdot \cos\hat{A}) + b^2 = a^2$

  $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$

21. **a)** Sendo x, em centímetro, a medida do lado oposto ao ângulo de 60º, temos:

$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos 60°$

$x^2 = 36 + 64 - 96 \cos 60°$

$x^2 = 100 - 48 \Rightarrow x^2 = 52$

$x = 2\sqrt{13}$

Portanto, x mede $2\sqrt{13}$ cm.

b) Sendo o lado médio de medida 10 m e o ângulo oposto a esse lado de medida α, temos:

$10^2 = (2\sqrt{10})^2 + (6\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{5} \cdot \cos\alpha$

$100 = 40 + 180 - 120\sqrt{2}\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$

c) $(2\sqrt{13})^2 = c^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2 \cdot c \cdot 6\sqrt{2} \cdot \cos 45°$

$52 = c^2 + 72 - 2 \cdot c \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$c^2 - 12c + 20 = 0$

$c = 10$ ou $c = 2$

d) $(2\sqrt{7})^2 = 8^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 8 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos\hat{B}$

$28 = 64 + 12 - 32\sqrt{3} \cdot \cos\hat{B}$

$\cos\hat{B} = \frac{48}{32\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Portanto, med($\hat{B}$) = 30°.

22. $d_1^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 60°$

$d_1^2 = 36 + 100 - 120 \cdot \frac{1}{2}$

$d_1^2 = 76 \Rightarrow d_1 = 2\sqrt{19}$

$d_2^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos 120°$

$d_2^2 = 36 + 100 + 60 \Rightarrow d_2^2 = 196 \Rightarrow d_2 = 14$

23. Resposta pessoal.

Uma possibilidade: $b + c = 2a$

med($B\hat{A}C$) = 60° $\Rightarrow \triangle ABC$ é equilátero.

Pela lei dos cossenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60°$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{1}{2}$

$a^2 = b^2 + c^2 - bc$

Mas: $b + c = 2a \Rightarrow b = 2a - c$. Então:

$a^2 = (2a - c)^2 + c^2 - (2a - c)c$

$a^2 = 4a^2 - 4ac + c^2 + c^2 - 2ac + c^2$

$3a^2 + 3c^2 - 6ac = 0$

$3(a^2 - 2ac + c^2) = 0$

$3(a - c)^2 = 0$

$(a - c)^2 = 0$

$a - c = 0$

$a = c \Rightarrow b = 2a - c = 2a - a = a$

Portanto, $a = b = c$ e o $\triangle ABC$ é equilátero.

24. Pela lei dos senos, temos:

$\dfrac{4}{\text{sen } 30°} = \dfrac{8}{\text{sen } \hat{C}}$

$\text{sen } \hat{C} = 1$

Logo, med($\hat{C}$) = 90° e o triângulo é retângulo.

O terceiro ângulo desse triângulo mede 180° − 90° − 30° = 60°. E, novamente pela lei dos senos, temos:

$\dfrac{a}{\text{sen } 60°} = \dfrac{4}{\text{sen } 30°}$

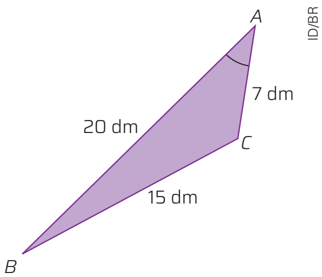
$a = 8 \cdot \text{sen } 60°$

$a = 4\sqrt{3}$

Por fim, pelo teorema da área, temos:

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \text{sen } 30° \Rightarrow S = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$

25.



a) Pela lei dos cossenos, temos:

$15^2 = 7^2 + 20^2 + 2 \cdot 7 \cdot 20 \cos B\hat{A}C$

$-224 = -280 \cos \hat{A}$

$\dfrac{224}{280} = \cos \hat{A}$

$0{,}8 = \cos \hat{A}$

Como $\text{sen}^2 \hat{A} + \cos^2 B\hat{A}C = 1$, temos:

$\text{sen}^2 B\hat{A}C + (0{,}8)^2 = 1$

$\text{sen } B\hat{A}C = 0{,}6$

Por fim, pelo teorema das áreas, temos:

$S = -\dfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot 7 \cdot 0{,}6 \Rightarrow S = 42$

Portanto, a área é igual a 42 dm².

b) Como visto no item anterior, $\text{sen } B\hat{A}C = 0{,}6$. Logo, consultando a tabela trigonométrica ou usando uma calculadora científica, temos med($B\hat{A}C$) ≃ 37°.

c) Pela lei dos senos:

$\dfrac{15}{0{,}6} = 2r \Rightarrow r = \dfrac{15}{1{,}2} \Rightarrow r = 12{,}5$

Portanto, r mede 12,5 dm.

26. Pela lei dos senos, temos:

$\dfrac{x}{\text{sen } 45°} = \dfrac{8}{\text{sen } 75°}$

$\dfrac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{8}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$

$x = \dfrac{(16\sqrt{2})}{(\sqrt{2} + \sqrt{6})} \cdot \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{(\sqrt{2} - \sqrt{6})}$

$x = \dfrac{32 - 32\sqrt{3}}{-4}$

$x = 8(\sqrt{3} - 1) \text{ cm}$

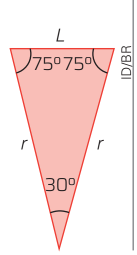
Pelo teorema das áreas, temos:

$S = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8(\sqrt{3} - 1) \text{ sen } 60°$

$S = 32(\sqrt{3} - 1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$S = 16(3 - \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

27. A figura ao lado representa uma das 12 partes do polígono inscrito em um círculo de raio de medida r.

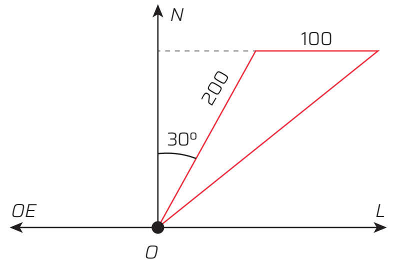


$\dfrac{L}{\text{sen } 30°} = \dfrac{r}{\text{sen } 75°}$

$\dfrac{L}{\frac{1}{2}} = \dfrac{r}{0{,}96}$

$0{,}96L = 0{,}5r \Rightarrow L \simeq 0{,}52r$

28. O trajeto do barco pode ser representado pela figura a seguir.



Pela lei dos cossenos, temos:

$d^2 = 200^2 + 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 200 \cdot \cos 120°$

$d^2 = 40\,000 + 10\,000 + 40\,000 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$d^2 = 70\,000 \Rightarrow d \simeq 265$

Portanto, o barco tem de se deslocar aproximadamente 265 km para retornar ao ponto O.

29. a) Pela lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 2^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \cdot \cos 60°$

$x^2 = 4 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4(\sqrt{3} + 1)\cos 60°$

$x = \sqrt{6}$

Pela lei dos senos, temos:

$\dfrac{\sqrt{6}}{\text{sen } 60°} = \dfrac{2}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45°$

b) Pela lei dos cossenos, temos:

$(\sqrt{6})^2 = x^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 - 2 \cdot x \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \cos 120°$

$6 = x^2 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}x - x$

$x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - (2 + 2\sqrt{3}) = 0$

$x_1 = 2$ ou $x_2 = 2\sqrt{3} - 1$ (não convém)

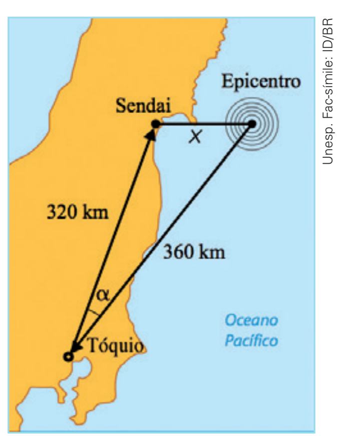
Pela lei dos senos, temos:

$\dfrac{2}{\text{sen } \hat{x}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\text{sen } 120°} \Rightarrow \dfrac{2}{\text{sen } \hat{x}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{6} \text{ sen } \hat{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{sen } \hat{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, med($\hat{x}$) = 45°.

30.



$x^2 = 360^2 + 320^2 - 2 \cdot 360 \cdot 320 \cdot 0{,}934$

$x^2 = 232\,000 - 215\,100$

$x = \sqrt{16\,900} = 130$

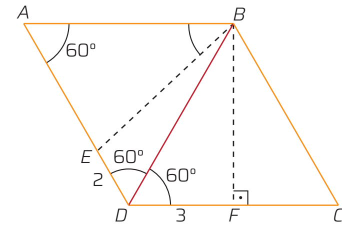
Assim, a velocidade média será:

$V_m = \dfrac{130}{\frac{13}{60}}$

$V_m = 600$

Alternativa **e**.

31. Para resolver essa questão, podemos construir o segmento $\overline{BD}$.



$A\hat{D}B + D\hat{B}A + 60° = 180°$

$A\hat{D}B + D\hat{B}A = 120°$

$A\hat{D}B = D\hat{B}A = \dfrac{120°}{2} = 60°$

De fato, o triângulo ABD é equilátero.

Como os lados do triângulo DBC são iguais, então este também é equilátero e, portanto, o ângulo $D\hat{B}F$ mede 60°. Assim, no triângulo retângulo BFD, podemos calcular $\overline{BD}$:

$\cos 60° = \dfrac{3}{\overline{BD}}$

$\overline{BD} = \dfrac{3}{0{,}5} = 6$

Para encontrar $\overline{BE}$, aplicamos a lei dos cossenos no triângulo BED.

$\overline{BE}^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 60°$

$\overline{BE}^2 = 4 + 36 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \dfrac{1}{2}$

$\overline{BE}^2 = 4 + 36 - 12$

$\overline{BE}^2 = 28$

$\overline{BE} = \sqrt{28}$

Alternativa **c**.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 168)

1. a) 162° b) 85° c) 123° d) 68° e) 151° f) 150° g) 114° h) 109° i) 93° j) 172°

2. a) med($\hat{C}$) = 102°

b) med($\hat{B}$) = 100°

c) med($\hat{A}$) = 75°; med($\hat{C}$) = 70°

d) med($\hat{B}$) = 36°; med($\hat{C}$) = 36°

e) med($\hat{A}$) + 2med($\hat{A}$) = 105° ⇒

⇒ med($\hat{A}$) = 35°

Logo, med($\hat{B}$) = 70° e med($\hat{C}$) = 75°.

3. a) 75° b) 147° c) 139° d) 69° e) 48° f) 134°

4. med($\hat{B}$) = med($\hat{C}$) = 69° (os ângulos da base são iguais)

5. med($\hat{C}$) = 58°

PARA RECORDAR (P. 169)

1. A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

Logo, o quarto ângulo mede 110°.

2. Se α, β e γ são medidas de ângulos maiores que 90° e x é a medida do quarto ângulo do quadrilátero, devemos ter:

$\alpha + \beta + \gamma + x = 360°$

$x = 360° - (\alpha + \beta + \gamma) > 0$ apenas se:

$\alpha + \beta + \gamma < 360°$

Assim, os três ângulos podem ser maiores que o reto, mas a soma de suas medidas tem de ser menor que 360° para existir o quadrilátero. Se os quatro ângulos medem mais que 90°, o quadrilátero não pode existir, pois a soma de suas medidas deve ser 360°.

3. **Loja 1**

O preço inicial do produto é:

$\dfrac{720}{0{,}2} = 3\,600$

Após o desconto e o frete, o valor do produto fica:

$3\,600 - 720 + 70 = 2\,950$

Portanto, o preço final do produto é R$ 2 950,00.

Loja 2

O preço inicial do produto é:

$\frac{740}{0{,}2} = 3\,700$

Após o desconto e o frete, o valor do produto fica:

$3\,700 - 740 + 50 = 3\,010$

Portanto, o preço final do produto é R$ 3 010,00.

Loja 3

O preço inicial do produto é:

$\frac{760}{0{,}2} = 3\,800$

Após o desconto e o frete, o valor do produto fica:

$3\,800 - 760 + 80 = 3\,120$

Portanto, o preço final do produto é R$ 3 120,00.

Loja 4

O preço inicial do produto é:

$\frac{710}{0{,}15} \simeq 4\,733{,}33$

Após o desconto e o frete, o valor do produto fica:

$4\,733{,}33 - 710 + 10 = 4\,033{,}33$

Portanto, o preço final do produto é R$ 4 033,33.

Loja 5

O preço inicial do produto é:

$\frac{690}{0{,}15} = 4\,600$

Após o desconto e o frete, o valor do produto fica:

$4\,600 - 690 = 3\,910$

Portanto, o preço final do produto é R$ 3 910,00.

Logo, o valor do produto é mais vantajoso na loja 1.

Alternativa **a**.

4. Um lucro de 20% sobre o valor pago pela caixa é:

$20\% \cdot 5 = 1$

Com 1 real de lucro somado aos 5 reais da caixa, o valor recebido pela venda dos bombons foi de 6 reais.

Foram vendidos 20 bombons; logo cada bombom custou:

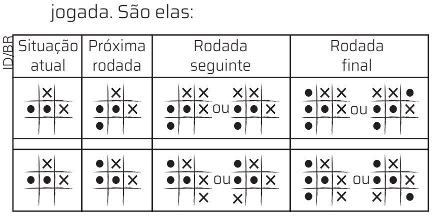
$\frac{6}{20} = 0{,}3$

Alternativa **c**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 169)

1. Existem duas maneiras distintas de o jogador que utiliza os círculos garantir a vitória na jogada. São elas:

ID/BR



Alternativa **b**.

2. Como há pessoas de 15 nacionalidades distintas, é possível que as primeiras 15 pessoas sorteadas sejam de nacionalidades diferentes. Entretanto, a 16ª pessoa sorteada terá obrigatoriamente a mesma nacionalidade que uma das 15 pessoas sorteadas antes dela. Logo, o menor número de pessoas sorteadas deverá ser 16.

MATEMÁTICA E TOPOGRAFIA (P. 170)

Conectando ideias

1. Retome com os estudantes como usar a calculadora científica no cálculo do valor do seno do ângulo $\widehat{O}$ e reforce a necessidade de ajustá-la para graus. A resposta esperada pode ser obtida conhecendo-se as medidas de $\overline{NB}$, $\overline{NM}$ e o fato de o ângulo $\widehat{N}$ ter medida igual a $180° - 35° - 57° = 88°$. É possível calcular a área do triângulo da seguinte maneira:

$S = \frac{1}{2} \cdot BN \cdot NM \cdot \text{sen}\, \widehat{N}$

$S \simeq \frac{1}{2} \cdot 78{,}6 \cdot 36{,}8 \cdot 0{,}99$

$S \simeq 1431{,}8$

Portanto, a área é aproximadamente $1\,431{,}8\ m^2$.

2. As características topográficas da cidade de Porto Alegre não são a única causa desse acontecimento. Contudo, observar o fenômeno sob essa perspectiva nos ajuda a entender como a água das chuvas se comporta em relação às peculiaridades do relevo no entorno da cidade. Esse estudo permite a discussão sobre outros problemas que implicaram na enchente.

Certamente, o professor de Geografia poderá auxiliar nessa pesquisa e fornecer outros pontos de vista para a discussão dos estudantes. Incentive-os a se expressar sobre como se sentem acerca desse tema. É importante também que reflitam sobre as diferentes possibilidades de planejamento para a prevenção de desastres naturais, tendo em vista a valorização da ciência e do fazer científico.

Por fim, sugerimos a leitura da matéria jornalística "Temporais no RS: entenda como o relevo de Porto Alegre e as 'marés de tempestade' travam escoamento", que apresenta o infográfico "Relevo de Porto Alegre", com recortes topográficos da região do entorno da cidade. Disponível em: https://g1.globo.com/meio-ambiente/noticia/2024/05/13/temporais-no-rs-entenda-como-o-relevo-de-porto-alegre-e-as-mares-de-tempestade-travam-escoamento.ghtml. Acesso em: 22 out. 2024.

CAPÍTULO 8 ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA E CICLO TRIGONOMÉTRICO

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 178)

1. a) $\ell = \alpha \cdot r \Rightarrow 10 = \alpha \cdot 4 \Rightarrow \alpha = \frac{10}{4} = 2{,}5$

Portanto, $\text{med}(A\widehat{O}B) = 2{,}5$ rad.

b) $\ell = \alpha \cdot r \Rightarrow \ell = 0{,}8 \cdot 4 \Rightarrow \ell = 3{,}2$

Portanto, $\overset{\frown}{CD}$ mede 3,2 cm.

2. a) $\frac{40}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{9}$

Portanto, $40° = \frac{2\pi}{9}$ rad.

b) $\frac{36}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{5}$

Portanto, $36° = \frac{\pi}{5}$ rad.

c) $\frac{25}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{36}$

Portanto, $25° = \frac{5\pi}{36}$ rad.

d) $\frac{15}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}$

Portanto, $15° = \frac{\pi}{12}$ rad.

e) $\frac{24}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{15}$

Portanto, $24° = \frac{2\pi}{15}$ rad.

f) $\frac{80}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{9}$

Portanto, $80° = \frac{4\pi}{9}$ rad.

3. a) $\frac{\alpha}{180} = \frac{\frac{\pi}{12}}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{180}{12} = 15$

Portanto, $\frac{\pi}{12}$ rad $= 15°$.

b) $\frac{\alpha}{180} = \frac{\frac{\pi}{8}}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{180}{8} = 22{,}5$

Sabemos que $0{,}5° = 30'$, pois $1° = 60'$.

Portanto, $\frac{\pi}{8}$ rad $= 22°\,30'$.

c) $\frac{\alpha}{180} = \frac{\frac{5\pi}{9}}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{900}{9} = 100$

Portanto, $\frac{5\pi}{9}$ rad $= 100°$.

d) $\frac{\alpha}{180} = \frac{\frac{7\pi}{16}}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{315}{4} = 78{,}75$

Como $1° = 60'$, em $75'$ temos $0{,}75°$. Assim:

$0{,}75° = 45'$

$78{,}75° = 78°\,45'$

Portanto, $\frac{7\pi}{16}$ rad $= 78°\,45'$.

e) $\frac{\alpha}{180} = \frac{\frac{7\pi}{15}}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{1\,260}{15} = 84$

Portanto, $\frac{7\pi}{15}$ rad $= 84°$.

f) $\frac{\alpha}{180} = \frac{\frac{11\pi}{45}}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{1\,980}{45} = 44$

Portanto, $\frac{11\pi}{45}$ rad $= 44°$.

4. a) $\ell = \alpha \cdot r \Rightarrow 2 = \alpha \cdot 2 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{2} = 1$

Então, $\text{med}(A\widehat{O}B) = 1$ rad.

Analisando o arco $\overset{\frown}{MN}$, temos $\text{med}(\overset{\frown}{MN}) = 12$ e $r = 8$. Assim:

$\ell = \alpha \cdot r \Rightarrow 12 = \alpha \cdot 8 \Rightarrow \alpha = \frac{12}{8} = 1{,}5$

Então, $\text{med}(M\widehat{O}N) = \text{med}(B\widehat{O}C) = 1{,}5$ rad.

$\text{med}(A\widehat{O}C) = 1 + 1{,}5 = 2{,}5$

Portanto, $\text{med}(A\widehat{O}C) = 2{,}5$ rad.

b) $\ell = \alpha \cdot r \Rightarrow \ell = 2{,}5 \cdot 2 \Rightarrow \ell = 5$

Portanto, $\overset{\frown}{AC}$ mede 5 cm.

5. O ângulo entre duas marcações consecutivas no relógio mede 30° (360° : 12). Quando um relógio analógico indica que são 6 h 20 min, o ponteiro que representa as horas passou do 6 e ainda não chegou ao 7, e o ponteiro que representa os minutos está no número 4. O ângulo entre o 4 e o 6 do relógio mede 60°. Com uma regra de três simples, em que 60 minutos correspondem a 30°, concluímos que 20 minutos correspondem a 10°. A medida do menor ângulo entre o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos é 70° (60° + 10°).

Alternativa **d**.

6. $\frac{14\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{14\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{43\pi}{6} =$

$= -\frac{12\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{43\pi}{6} = -6\pi - \frac{7\pi}{6}$

De acordo com a circunferência, temos:

$-\frac{7\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

A distância D, em rad, entre eles é

$D = \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow D = \frac{\pi}{6}$

Alternativa **a**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 184)

7. $\alpha = 192° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$
Assim, alguns arcos são:
Para $k = 1$: $\alpha = 192° + 360° = 552°$
Para $k = 2$: $\alpha = 192° + 2 \cdot 360° = 912°$

8. $360° - 140° = 220°$
Os arcos côngruos ao arco de 220° têm a forma: $\alpha = 220° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$
Assim, alguns arcos são:
Para $k = 1$: $\alpha = 220° + 360° = 580°$
Para $k = 4$: $\alpha = 220° + 4 \cdot 360° = 1\,660°$

9. **a)** 724°, temos: $724° = 2 \cdot 360° + 4°$
Portanto, a determinação principal tem medida 4°.

b) 2 380°, temos: $2\,380° = 6 \cdot 360° + 220°$
Portanto, a determinação principal tem medida 220°.

c) 1 529°, temos: $1\,529° = 4 \cdot 360° + 89°$
Portanto, a determinação principal tem medida 89°.

d) −790°, temos: $790° = 2 \cdot 360° + 70°$
$-790° = -2 \cdot 360° - 70°$
A determinação principal do arco de −70° é 290°, pois: $360° - 70° = 290°$
Portanto, a determinação principal tem medida 290°.

e) −2 200°, temos: $2\,200° = 6 \cdot 360° + 40°$
$-2\,200° = -6 \cdot 360° - 40°$
A determinação principal do arco de −40° é 320°, pois: $360° - 40° = 320°$
Portanto, a determinação principal tem medida 320°.

f) $\frac{29\pi}{7}$, temos: $\frac{29\pi}{7} = \frac{28\pi}{7} + \frac{\pi}{7} = 4\pi + \frac{\pi}{7}$
Desconsiderando as quatro voltas completas, temos que $\frac{29\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$.
Portanto, a determinação principal tem medida $\frac{\pi}{7}$ rad.

g) $\frac{20\pi}{3}$, temos: $\frac{20\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} =$
$= 6\pi + \frac{2\pi}{3}$
Desconsiderando as seis voltas completas, temos que $\frac{20\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
Portanto, a determinação principal tem medida $\frac{2\pi}{3}$ rad.

h) $\frac{26\pi}{5}$, temos: $\frac{26\pi}{5} = \frac{20\pi}{5} + \frac{6\pi}{5} =$
$= 4\pi + \frac{6\pi}{5}$
Desconsiderando as quatro voltas completas, temos que $\frac{26\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$.
Portanto, a determinação principal tem medida $\frac{6\pi}{5}$ rad.

i) $\frac{13\pi}{3}$, temos: $\frac{13\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{3}$
Desconsiderando as quatro voltas completas, temos que $\frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.
Portanto, a determinação principal tem medida $\frac{\pi}{3}$ rad.

j) $-\frac{5\pi}{3}$, temos que a determinação principal do arco de $-\frac{5\pi}{3}$ é: $2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$
Portanto, a determinação principal tem medida $\frac{\pi}{3}$ rad.

k) $-\frac{29\pi}{5}$, temos:
$-\frac{29\pi}{5} = -\frac{20\pi}{5} - \frac{9\pi}{5} = -4\pi - \frac{9\pi}{5}$
Desconsiderando as voltas completas, temos que $-\frac{29\pi}{5} = -\frac{9\pi}{5}$.
A determinação principal do arco de $-\frac{9\pi}{5}$ é $\frac{\pi}{5}$, pois:
$2\pi - \frac{9\pi}{5} = \frac{10\pi}{5} - \frac{9\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$
Portanto, a determinação principal tem medida $\frac{\pi}{5}$ rad.

l) $-\frac{37\pi}{7}$, temos:
$-\frac{37\pi}{7} = -\frac{28\pi}{7} - \frac{9\pi}{7} = -4\pi - \frac{9\pi}{7}$
Desconsiderando as voltas completas, temos que: $-\frac{37\pi}{7} = -\frac{9\pi}{7}$
A determinação principal do arco de $-\frac{9\pi}{7}$ é $\frac{5\pi}{7}$, pois:
$2\pi - \frac{9\pi}{7} = \frac{14\pi}{7} - \frac{9\pi}{7} = \frac{5\pi}{7}$
Portanto, a determinação principal tem medida $\frac{5\pi}{7}$ rad.

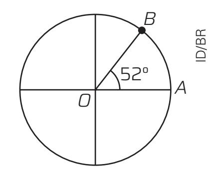
10. O pentágono regular tem cinco lados de medidas iguais. Então, o ângulo central de cada vértice mede: $\frac{360°}{5} = 72°$ ou $\frac{2\pi}{5}$ rad
Assim, a expressão de cada vértice será:
A: Origem
B: $\frac{2\pi}{5}$ rad; $\alpha = \frac{2\pi}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
C: $\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ rad; $\alpha = \frac{4\pi}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
D: $\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$ rad;
$\alpha = \frac{6\pi}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
E: $\frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{8\pi}{5}$ rad;
$\alpha = \frac{8\pi}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

11. O octógono regular tem oito lados de medidas iguais. Então, o ângulo central de cada vértice pode ser dado por $\frac{360°}{8} = 45°$ ou $\frac{\pi}{4}$ rad.
Assim, a expressão de cada arco será:
A: Origem
A_1: $\frac{\pi}{4}$; $\alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
A_2: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
A_3: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$; $\alpha = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
A_4: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi$;
$\alpha = \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
A_5: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$;
$\alpha = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
A_6: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$;
$\alpha = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
A_7: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$;
$\alpha = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

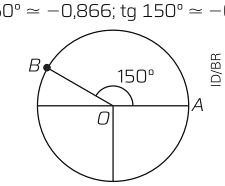
12. Resposta pessoal.
Sugestão de atividade: Considere A, B, C, D, E e F vértices de um hexágono regular inscrito em um ciclo trigonométrico, em sentido anti-horário e nessa ordem, com A sendo a origem dos arcos. Determine a expressão geral dos arcos de origem A e extremidade em cada um dos pontos restantes.
Para esta atividade, a resolução é: O hexágono regular tem seis lados de medidas iguais. Então, o ângulo central de cada vértice mede $\frac{360°}{6} = 60°$ ou $\frac{\pi}{3}$ rad
Assim, a expressão de cada arco será:
A: Origem
B: $\frac{\pi}{3}$ rad; $\alpha = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
C: $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ rad; $\alpha = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
D: $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} = \pi$ rad; $\alpha = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
E: $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ rad;
$\alpha = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
F: $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ rad;
$\alpha = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

TECNOLOGIA (P. 185)

1. Resposta pessoal.
Como sugestão, temos um ângulo do primeiro quadrante e um ângulo do segundo quadrante. Os demais ângulos podem ser expressos de forma similar.
1º quadrante: sen 52° ≃ 0,788;
cos 52° ≃ 0,615; tg 52° ≃ 1,279



2º quadrante: sen 150° = 0,5;
cos 150° ≃ −0,866; tg 150° ≃ −0,577



2. $\cos 25° = \frac{9}{x} \Rightarrow 0{,}906 \simeq \frac{9}{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \simeq \frac{9}{0{,}906} \simeq 9{,}93$
Portanto, a hipotenusa mede, aproximadamente, 10 cm.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 186)

1. **a)** $\frac{a}{180} = \frac{\pi}{\pi} \Rightarrow \frac{a}{180} = 1 \Rightarrow a = 180$
Portanto, $\pi = 180°$.

b) $\frac{a}{180} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} \Rightarrow \frac{a}{180} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{180}{2} = 90$
Portanto, $\frac{\pi}{2} = 90°$.

c) $\frac{a}{180} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} \Rightarrow \frac{a}{180} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{180}{4} = 45$
Portanto, $\frac{\pi}{4} = 45°$.

d) $\frac{a}{180} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow \frac{a}{180} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{180}{3} = 60$
Portanto, $\frac{\pi}{3} = 60°$.

e) $\frac{a}{180} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} \Rightarrow a = \frac{180}{6} = 30$
Portanto, $\frac{\pi}{6} = 30°$.

f) $\frac{a}{180} = \frac{\frac{\pi}{12}}{\pi} \Rightarrow a = \frac{180}{12} = 15$
Portanto, $\frac{\pi}{12} = 15°$.

g) $\frac{a}{180} = \frac{\frac{\pi}{10}}{\pi} \Rightarrow a = \frac{180}{10} = 18$
Portanto, $\frac{\pi}{10} = 18°$.

h) $\frac{a}{180} = \frac{\frac{\pi}{20}}{\pi} \Rightarrow a = \frac{180}{20} = 9$
Portanto, $\frac{\pi}{20} = 9°$.

i) $\frac{a}{180} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow a = \frac{360}{3} = 120$

Portanto, $\frac{2\pi}{3} = 120°$.

j) $\frac{a}{180} = \frac{\frac{4\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow a = \frac{720}{3} = 240$

Portanto, $\frac{4\pi}{3} = 240°$.

k) $\frac{a}{180} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{\pi} \Rightarrow a = \frac{540}{4} = 135$

Portanto, $\frac{3\pi}{4} = 135°$.

l) $\frac{a}{180} = \frac{\frac{5\pi}{4}}{\pi} \Rightarrow a = \frac{900}{4} = 225$

Portanto, $\frac{5\pi}{4} = 225°$.

2. a) $2 \cdot \sqrt{2} \simeq 2 \cdot 1{,}42 \simeq 2{,}8$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \simeq 1{,}4$

c) $\frac{\sqrt{2}}{4} \simeq \frac{1{,}42}{4} \simeq 0{,}4$

d) $2 \cdot \sqrt{3} \simeq 2 \cdot 1{,}73 \simeq 3{,}5$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq \frac{1{,}73}{2} \simeq 0{,}9$

f) $\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq \frac{1{,}73}{3} \simeq 0{,}6$

g) $2\pi \simeq 2 \cdot 3{,}14 \simeq 6{,}3$

h) $\frac{\pi}{4} \simeq \frac{3{,}14}{4} \simeq 0{,}8$

3. a) $\frac{a}{4} = \frac{64}{4} = 16$

b) $\sqrt{a} = \sqrt{64} = 8$

c) $3\sqrt{a} = 3\sqrt{64} = 3 \cdot 8 = 24$

d) $a - 100 = 64 - 100 = -36$

e) $\frac{a - 80}{2} = \frac{64 - 80}{2} = \frac{-16}{2} = -8$

f) $\sqrt{a} + 36 = \sqrt{64} + 36 = 8 + 36 = 44$

g) $\sqrt{a} \cdot 36 = \sqrt{64} \cdot 36 = 8 \cdot 36 = 288$

h) $\frac{128}{a} = \frac{128}{64} = 2$

i) $a + 49 = 64 + 49 = 113$

4. a) $p + q = (x + y) + (2x + 1) = 3x + y + 1$

b) $p - q = (x + y) - (2x + 1) = -x + y - 1$

c) $p + q - r = (x + y) + (2x + 1) - (2x) =$
$= x + y + 1$

d) $2r^2 = 2 \cdot (2x)^2 = 8x^2$

e) $p \cdot r = (x + y) \cdot 2x = 2x^2 + 2xy$

f) $2 \cdot p - q = 2 \cdot (x + y) - (2x + 1) = 2y - 1$

g) $-2 \cdot p = -2 \cdot (x + y) = -2x - 2y$

h) $p \cdot q = (x + y) \cdot (2x + 1) =$
$= 2x^2 + x + 2xy + y$

l) $p - r = (x + y) - 2x = -x + y$

5. a) O perímetro p é a soma das medidas de todos os lados do polígono. Um octógono regular tem oito lados congruentes, sendo a medida de cada lado igual a 2 cm. O perímetro, em cm, é dado por $p = 8 \cdot 2 = 16$.

b) Um ano tem 12 meses. Logo, cinco anos correspondem a 60 meses, pois:
$5 \cdot 12 = 60$

c) A área do quadrado pode ser dada por $A = \ell^2$, sendo ℓ a medida do lado. Como $A = 100$ m², temos: $100 = \ell^2 \Rightarrow \ell = 10$
Portanto, ℓ mede 10 cm.

d) A área do círculo pode ser expressa por $A = \pi \cdot r^2$, sendo r a medida do raio. Como $r = 2$, temos:
$A = \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A \simeq 4 \cdot 3{,}14 \simeq 12{,}6$
Portanto, a área mede, aproximadamente, 12,6 m².

e) Sabemos que em 1 minuto a pessoa tem 80 batimentos. Sendo t o tempo em minuto e x a quantidade de batimentos, para determinar a quantidade de batimentos nos demais tempos, podemos estabelecer a seguinte relação:
1 ——— 80
t ——— x
Para $t = 30$ s $= 0{,}5$ min, temos:
$x = 0{,}5 \cdot 80 \Rightarrow x = 40$
Portanto, 40 batimentos em 30 s.
Para $t = 15$ s, isto é, $t = 0{,}25$ min, temos:
$x = 0{,}25 \cdot 80 \Rightarrow x = 20$
Portanto, 20 batimentos em 15 s.
Para $t = 1$ h, isto é, $t = 60$ min, temos:
$x = 60 \cdot 80 \Rightarrow x = 4\,800$
Portanto, 4 800 batimentos em uma hora.

PARA RECORDAR (P. 186)

1. Área A do quadrado: $A = b \cdot h \Rightarrow A = 7 \cdot 17 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 119$. Logo, as peças ocupam 119 cm².
Para determinar quantos tabuleiros foram preenchidos, dividimos a quantidade de peças pela medida, em cm², da área ocupada pelas peças: $\frac{2\,023}{119} = 17$.
Alternativa **e**.

2. Considerando E o lado do triângulo de medida 160 m e M a medida do lado do retângulo a ser construído sobre o lado do triângulo que mede 120 m, a medida, em m², da área do pavimento térreo de base retangular é determinada por:
$A = (160 - E) \cdot M \Rightarrow \frac{160}{E} = \frac{120}{M} \Rightarrow M = \frac{3E}{4}$
Substituindo M na equação da área:
$A = (160 - E) \cdot M \Rightarrow A = (160 - E) \cdot \frac{3E}{4}$
Nessa equação do 2º grau na forma fatorada, temos $x_v = 80$. Então, $E = 80$.
Substituindo E na equação, temos:
$M = \frac{3E}{4} \Rightarrow M = \frac{3}{4} \cdot 80 \Rightarrow M = 60$
Vamos calcular a maior área possível: $A = (160 - E) \cdot M \Rightarrow A = (160 - 80) \cdot 60 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 4\,800$.
Alternativa **a**.

3. 10% de $400 = 400 \cdot 0{,}10 = 40$
Então, nesse ano há 440 crianças na lista de espera, e para o ano que vem vão ser criadas mais salas para que a lista seja 25% menor do que esse ano. Como 25% de 440 é 110, é necessário criar mais salas para comportar 110 crianças. Cada sala tem espaço para 10 crianças, então devem ser criadas 11 salas $\left(\frac{110}{10} = 11\right)$.
Alternativa **b**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 187)

1. $50 \cdot x + 20 \cdot y = 1\,000$, com x e $y \in \mathbb{N}$.
Podemos atribuir valores para x ou y e determinar as possibilidades para a quantidade de cédulas para obtermos a quantia de R$ 1 000,00.
Vamos atribuir alguns valores para x:

x	Quantidade de cédulas de R$ 50,00	Quantidade de cédulas de R$ 20,00
0	0	50
1	–	Não é possível, pois R$ 950,00 não é divisível por 20.
2	2	45
3	–	Não é possível, pois R$ 850,00 não é divisível por 20.
4	4	40
5	–	Não é possível, pois R$ 750,00 não é divisível por 20.
6	6	35
7	–	Não é possível, pois R$ 650,00 não é divisível por 20.
8	8	30
9	–	Não é possível, pois R$ 550,00 não é divisível por 20.
10	10	25
11	–	Não é possível, pois R$ 450,00 não é divisível por 20.
12	12	20
13	–	Não é possível, pois R$ 350,00 não é divisível por 20.
14	14	15
15	–	Não é possível, pois R$ 250,00 não é divisível por 20.
16	16	10
17	–	Não é possível, pois R$ 150,00 não é divisível por 20.
18	18	5
19	–	Não é possível, pois R$ 50,00 não é divisível por 20.
20	20	0

Analisando as alternativas, o único item possível é o **d**. Portanto, poderíamos ter 8 cédulas de R$ 50,00 e 30 cédulas de R$ 20,00.
Alternativa **d**.

2. Sendo G a quantidade de gatos, P a quantidade de pintinhos e C a quantidade de cachorros, temos:
$G + P = C + 4 \Rightarrow G - C + P = 4$ e
$G + C = 6 + P \Rightarrow G + C - P = 6$
Ao adicionar as duas equações, concluímos que $G = 5$.
Alternativa **b**.

MATEMÁTICA E CARTOGRAFIA (P. 188)

Conectando ideias

1. a) Observa-se que o ponto P está ao norte da linha do Equador e a leste do meridiano de Greenwich. Dessa maneira, suas coordenadas geográficas são 60° N 40° E. Caso seja necessário, converse com o professor de Geografia e solicite a ele que auxilie os estudantes na leitura e na compreensão da escrita das coordenadas.

b) Para calcular as distâncias entre os pontos, é necessário calcular o comprimento dos arcos de circunferência $\overset{\frown}{PE}$ e $\overset{\frown}{PG}$, que são as menores distâncias entre os pontos.

Então, sabendo que a circunferência máxima aproximada da Terra é 40 075 km, basta fazer relações entre a medida de 360°, referente à circunferência máxima, e os ângulos de 60° e 40°, referentes aos arcos dos quais queremos saber as medidas:

360° ——— 40 075

60° ——— x

40° ——— y

$360x = 40075 \cdot 60 \Rightarrow x \simeq 6679{,}16$

$360y = 40075 \cdot 40 \Rightarrow y \simeq 4452{,}77$

Logo, as distâncias do ponto P aos pontos E e G são, respectiva e aproximadamente, 6 679,16 km e 4 452,77 km.

2. Na elaboração de mapas ou outros tipos de cartas, os cartógrafos precisam saber qual é a relação entre a dimensão real de determinado lugar ou objeto e qual será a dimensão do mapa para montar a escala. Com isso, são necessários conhecimentos de razão e proporção, uma vez que é preciso saber se houve redução, ampliação ou se será feita a representação exata do tamanho. Esses e muitos outros conhecimentos matemáticos, como regra de três, fração, números decimais e transformações entre as unidades de medida, são utilizados na determinação de uma escala.

Resposta pessoal.

CAPÍTULO 9 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 196)

1. a) $\text{sen } 390° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

b) $\text{sen } 4080° = \text{sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{sen } (-765°) = \text{sen } (-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. a) Como $\text{sen } \alpha = -\frac{1}{2}$, no 4º quadrante, temos que $\alpha = 330°$.

b) Como $\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, no 4º quadrante, não existe α, pois nesse quadrante a função seno é negativa.

3. a) $0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-1) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{4}$

c) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right)}{-\frac{1}{2} - 0} = -6$

d) $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{0 + \left(-\frac{1}{2}\right)} = -1$

e) $\text{sen } 390° \cdot \text{sen } 90° +$
$+ \text{sen } 450° \cdot \text{sen } 750° =$
$= \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

4. a) $1 \cdot 1 + 0 - (-1) = 2$

b) $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

5. a) $(+) + (+)$ Então, $y > 0$.

b) $(-) \cdot (-)$ Então, $y > 0$.

c) $\dfrac{(+) + (+)}{(-) + (-)} = \dfrac{(+)}{(-)}$

Então, $y < 0$.

6.

α	sen α
$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$	-1
$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$-\pi$	0

α	sen α
$-\frac{7\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{3\pi}{2}$	1
$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-\frac{11\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
-2π	0

7. a) $y = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $y = 4^{-\frac{1}{2}} + 9^{-1} + 5^{0} = \frac{29}{18}$

8. a) $\text{sen } 399\pi = \text{sen } \pi = 0$

b) $\text{sen } \frac{247\pi}{6} = \text{sen } \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

c) $\text{sen } \left(-\frac{53\pi}{4}\right) = \text{sen } \left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

9. a) $y = \text{sen } \alpha + \text{sen } \alpha + \text{sen } \alpha + \text{sen } \alpha =$
$= 4 \cdot \text{sen } \alpha$

b) $y = \text{sen } (-\alpha) - \text{sen } (-\alpha) + \text{sen } (-\alpha) +$
$+ \text{sen } (-\alpha) = -2 \cdot \text{sen } \alpha$

10. a) mínimo: $5 \cdot (-1) = -5$; máximo: $5 \cdot (1) = 5$

b) mínimo: $-1 + 3 = 2$; máximo: $1 + 3 = 4$

c) mínimo: $\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$; máximo: $\frac{1}{2-1} = 1$

11. a) $-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$
$-3 \leqslant 3 \text{ sen } \alpha \leqslant 3$
$-5 \leqslant -2 + 3 \text{ sen } \alpha \leqslant 1$
$-5 \leqslant f(\alpha) \leqslant 1$
$\text{Im}(f) = [-5, 1]$

b) $-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$
$2 \geqslant -2 \text{ sen } \alpha \geqslant -2$
$3 \geqslant 1 - 2 \text{ sen } \alpha \geqslant -1$
$-1 \leqslant f(\alpha) \leqslant 3$
$\text{Im}(f) = [-1, 3]$

12. a) $-1 \leqslant 2m - 1 \leqslant 1$
$0 \leqslant 2m \leqslant 2$
$0 \leqslant m \leqslant 1$

b) $-1 \leqslant -3m + 5 \leqslant 1$
$-6 \leqslant -3m \leqslant -4$
$\frac{4}{3} \leqslant m \leqslant 2$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 201)

13. a) $\cos 3990° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos \frac{35\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$

c) $\cos (-3465°) = \cos (-225°) =$
$= \cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos \left(-\frac{40\pi}{3}\right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

14. a) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{\frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$

15. a) $\dfrac{a^2(-1) + b^2 \cdot 1}{-a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + b \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{2}\,(a - b)$

b) $\dfrac{(a + b) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b \cdot (0)}{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

16. a) $y = \cos(-60°) + \cos 3(-60°) +$
$+ \cos 4(-60°)$
$y = \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}$
$y = -1$

b) $y = \left[\cos(-\pi) + 5\cos(-2\pi)\right]^{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$
$y = (-1 + 5)^{-\frac{1}{2}}$
$y = 4^{-\frac{1}{2}}$
$y = \frac{1}{\sqrt{4}}$
$y = \frac{1}{2}$

17. $t = 5 \Rightarrow x = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 5\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 5\cos\left(\frac{6\pi}{2}\right) \Rightarrow x = 5\cos(3\pi) \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 5 \cdot (-1) \Rightarrow x = -5$

Alternativa **d**.

18. a) $y = \cos 140° \cdot \cos 220° + \cos 290° \cdot \cos 10°$
$\cos 140° < 0$, $\cos 220° < 0$, $\cos 290° > 0$ e $\cos 10° > 0$
Então, $y > 0$.

b) $y = \dfrac{\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{4\pi}{5} \cdot \cos \frac{9\pi}{8}}$
$\cos \frac{\pi}{8} > 0$, $\cos \frac{\pi}{5} > 0$, $\cos \frac{4\pi}{5} < 0$ e $\cos \frac{9\pi}{8} < 0$
Então, $y > 0$.

19. a) $y = \cos \alpha + \cos \alpha + \cos \alpha - \cos \alpha = 2\cos \alpha$

b) $y = \cos(-\alpha) + \cos(-\alpha) + \cos(-\alpha) +$
$+ \cos(-\alpha) = \cos \alpha + \cos \alpha + \cos \alpha +$
$+ \cos \alpha = 4 \cos \alpha$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 203)

20. a) $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$
$\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ ($\alpha \in$ 2º Q)

b) $\text{sen}^2\, \alpha + \left(-\frac{8}{17}\right)^2 = 1$
$\text{sen } \alpha = -\frac{15}{17}$ ($\alpha \in$ 3º Q)

c) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$
$\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ($\alpha \in$ 4º Q)

d) $\text{sen}^2\, \alpha + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1$
$\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$ ($\alpha \in$ 1º Q)

21. a) $\left(-\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$
$\cos \alpha = \pm \frac{5}{7}$

b) $\text{sen}^2\, \alpha + \left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^2 = 1$
$\text{sen } \alpha = \pm \frac{7}{9}$

22. a) $\dfrac{\text{sen}^2\,\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha - 4 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha - 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha} =$

$= \dfrac{1 - 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{1 - 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha} = 1$

b) $\dfrac{a\,(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha) - b\,(\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha)}{2\,(a - b)} = \dfrac{1}{2}$

23. $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -1$ ou $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\dfrac{3}{5}$

24. a) $\cos^4\alpha - \text{sen}^4\,\alpha = (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha)(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha) =$

$= \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha = (\cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha) =$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

b) $\dfrac{2 + \cos\alpha - 2\,\text{sen}^2\,\alpha}{1 - \text{sen}^2\,\alpha} - \dfrac{1}{\cos\alpha} =$

$= \dfrac{2 + \cos\alpha - 2\,\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{2\,(1 - \text{sen}^2\,\alpha)}{(\cos^2\alpha)} = 2$

25. a) $x^2 - 2x + \text{sen}^2\,\alpha = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \text{sen}^2\,\alpha \Rightarrow \Delta = 4\cos^2\alpha$

$x = \dfrac{2 \pm 2\cos\alpha}{2} = 1 \pm \cos\alpha$

$S = \{1 - \cos\alpha, 1 + \cos\alpha\}$

b) Observando a equação, temos que a soma das raízes é $\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha$ e seu produto é $\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$. Logo, $S = \{\text{sen}\,\alpha, \cos\alpha\}$.

c) $\text{sen}\,\alpha \cdot x^2 - 2\,(\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha)\,x - 4\cos\alpha = 0$

$\Delta = (-2\,\text{sen}\,\alpha + 2\cos\alpha)^2 - 4 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot (-4\cos\alpha)$

$\Delta = 4 \cdot (\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha)^2$

$x = \dfrac{(2\,\text{sen}\,\alpha - 2\cos\alpha) \pm (2\,\text{sen}\,\alpha + 2\cos\alpha)}{2\,\text{sen}\,\alpha}$

$x = 2$ ou $x = \dfrac{-2\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$

$S = \left\{2, \dfrac{-2\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\right\}$

d) $x^2 - 2\,(\cos\alpha) \cdot x - 1 - \text{sen}^2\,\alpha = 0$

$\Delta = 4 \cdot \cos^2\alpha + 4 + 4 \cdot \text{sen}^2\,\alpha \Rightarrow \Delta = 8$

$x = \dfrac{2\cos\alpha \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \cos\alpha \pm \sqrt{2}$

$S = \{\cos\alpha - \sqrt{2}, \cos\alpha + \sqrt{2}\}$

26. $\text{sen}\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{-2k + 2}}{k}$

Condição de existência:

$-2k + 2 \geqslant 0$ e $k \neq 0 \Rightarrow 2k \leqslant 2 \Rightarrow k \leqslant 1$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{k}$

$\dfrac{-2k + 2}{k^2} + \dfrac{1}{k^2} = 1 \Rightarrow -2k + 3 = k^2 \Rightarrow k^2 + 2k - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$k = \dfrac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow k = -3$ ou $k = 1$

27. a) $-1 \leqslant \dfrac{2 - k}{3} \leqslant 1$

$-3 \leqslant 2 - k \leqslant 3$

$-1 \leqslant k \leqslant 5$

b) $-1 \leqslant \dfrac{3k - 4}{2} \leqslant 1$

$-2 \leqslant 3k - 4 \leqslant 2$

$2 \leqslant 3k \leqslant 6$

$\dfrac{2}{3} \leqslant k \leqslant 2$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 208)

28. a) $\text{tg}\,110° < 0$ e $\text{tg}\,340° < 0$. Então, $y < 0$.

b) $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{5} > 0$ e $\text{tg}\,\dfrac{6\pi}{5} > 0$. Então, $y > 0$.

29. a) $0 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $0 + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3}$

30. a) $\dfrac{-a^2(-1) - b^2(-1) - 2ab \cdot 1}{a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} + b^2 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \dfrac{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}{\dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot (a^2 - b^2)} = \sqrt{3} \cdot \left(\dfrac{a - b}{a + b}\right)$

b) $\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}{-\sqrt{3} + 1 \cdot (-1) + \sqrt{3}} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$

31. a) $\text{tg}\,45° + \text{tg}\,135° + \text{tg}\,225° + \text{tg}\,315° = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

b) $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{6} + \text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} + \text{tg}\,\dfrac{2\pi}{3} + \text{tg}\,\pi = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

32. a) $\text{tg}\,(-30°) + \text{tg}\,(-60°) + \text{tg}\,(-120°) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{tg}\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right) + \text{tg}\,(-2\pi) = -\sqrt{3} + 0 = -\sqrt{3}$

33. $y = \dfrac{\text{tg}\,280° + \text{tg}\,140°}{\text{tg}\,80° \cdot \text{tg}\,190°}$

$\text{tg}\,280° < 0$, $\text{tg}\,140° < 0$, $\text{tg}\,80° > 0$ e $\text{tg}\,190° > 0$.

Então, $y < 0$.

34. a) $\text{tg}\,5\,100° = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

b) $\text{tg}\,\dfrac{51\pi}{4} = \text{tg}\,\dfrac{3\pi}{4} = -1$

c) $\text{tg}\,(-7\,350°) = \text{tg}\,(-150°) = \text{tg}\,210° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

35. a) Nessa prova, uma inclinação de 45° corresponde a 100%. Então, uma subida de 10% corresponde a um ângulo de inclinação superior a 4,5°.

b)

No triângulo retângulo, temos:

$\text{sen}\,4{,}5° = \dfrac{h}{15}$

$h = 15 \cdot \text{sen}\,4{,}5°$

$h \simeq 1{,}05\text{ km} = 1\,050\text{ m}$

Portanto, o ciclista sobe, aproximadamente, 1 050 m.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 210)

36. a) Falsa, pois $\text{sen}\,\alpha$ tem valores crescentes.

b) Verdadeira.

c) Verdadeira.

d) Verdadeira.

e) Falsa, pois $\text{tg}\,\alpha < 0$.

f) Falsa, pois $\text{sen}\,\alpha < 0$ e $\cos\alpha > 0$.

g) Falsa, pois $\text{tg}\,\alpha < 0$ e $\cos\alpha > 0$.

37. Respostas possíveis:

a) 210°
b) 210°
c) 240°
d) 225°
e) 225°
f) 240°

38. Para facilitar a identificação dos quadrantes, use como ferramenta auxiliar o ciclo trigonométrico e a relação entre seno, cosseno e tangente.

a) 4º quadrante.
b) 3º ou 4º quadrantes.
c) 4º quadrante.
d) 2º ou 4º quadrantes.
e) 2º quadrante.
f) 1º quadrante.
g) 3º quadrante.
h) 2º ou 3º quadrantes.
i) 2º quadrante.
j) 4º quadrante.

39. a) $-1 - 0 + 0 = -1$

b) $0 - 1 - 0 = -1$

c) $3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

40. Como $\alpha \in 4º$ quadrante, temos:

$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

41.

	$180° < \alpha < 270°$	$270° < \alpha < 360°$	$360° < \alpha < 450°$
sen α	negativa e decrescente	negativa e crescente	positiva e crescente
cos α	negativa e crescente	positiva e crescente	positiva e decrescente
tg α	positiva e crescente	negativa e crescente	positiva e crescente

42. a) Como o período da função seno é 2π, basta obter a amplitude do intervalo ao qual α pertence quando $3\alpha + \dfrac{\pi}{5}$ percorre um intervalo de tamanho 2π. Para isso, determinamos α_1 e α_2 tais que:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + \dfrac{\pi}{5} = 0 \\ 3\alpha_2 + \dfrac{\pi}{5} = 2\pi \end{cases}$$

Logo, $\alpha_1 = -\dfrac{\pi}{15}$ e $\alpha_2 = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{15}$, e a amplitude do intervalo de variação de α é:

$|\alpha_1 - \alpha_2| = \left|-\dfrac{\pi}{15} - \left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{15}\right)\right| = \dfrac{2\pi}{3}$

Portanto, o período é $\dfrac{2\pi}{3}$.

b) Como o período da função cosseno é 2π, basta obter a amplitude do intervalo ao qual α pertence quando $-2\alpha + \frac{\pi}{4}$ percorre um intervalo de tamanho 2π. Para isso, determinamos α_1 e α_2 tais que:

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + \frac{\pi}{4} = 0 \\ -2\alpha_2 + \frac{\pi}{4} = 2\pi \end{cases}$$

Logo, $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}$ e $\alpha_2 = -\pi + \frac{\pi}{8}$, e a amplitude do intervalo de variação de α é:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = \left|\frac{\pi}{8} - \left(-\pi + \frac{\pi}{8}\right)\right| = \pi$$

Portanto, o período é π.

c) Como o período da função tangente é π, basta obter a amplitude do intervalo ao qual α pertence quando $4\alpha - \frac{\pi}{8}$ percorre um intervalo de tamanho π. Para isso, determinamos α_1 e α_2 tais que:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 - \frac{\pi}{8} = 0 \\ 4\alpha_2 - \frac{\pi}{8} = \pi \end{cases}$$

Logo, $\alpha_1 = \frac{\pi}{16}$ e $\alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$, e a amplitude do intervalo de variação de α é:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = \left|\frac{\pi}{16} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16}\right)\right| = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, o período é $\frac{\pi}{4}$.

43. a) Como $\alpha \in 3^{\text{o}}$ quadrante, temos:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{5}{13}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{12}$$

b) Como $\alpha \in 4^{\text{o}}$ quadrante, temos:

$$\left(-\frac{2\sqrt{10}}{7}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{7}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

44. a) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$

$\text{tg}\,\alpha = \pm\frac{3}{4}$

b) $\text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{12}{13}$

$\text{tg}\,\alpha = \pm\frac{12}{5}$

45. Uma solução alternativa, além da relação fundamental, é a seguinte:
Se $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$, existe um triângulo retângulo com um ângulo interno que mede α e cujos catetos medem 3 e 4. Logo, a hipotenusa mede 5.
Assim, $\text{sen}\,\alpha = -\frac{3}{5}$ e $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, sendo $\alpha \in 3^{\text{o}}$ Q.

46. $\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 3 - \text{sen}^2\,\alpha = 0$

$\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 3 + \cos^2\alpha - 1 = 0$

$2\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$

$\cos\alpha = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow \cos\alpha = 2$ (não convém) ou $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

Para $\cos\alpha = \frac{1}{2}$:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \text{ ou } \text{tg}\,\alpha = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

47. a)

$$\frac{1}{1 + \text{tg}^2\,\alpha} + \text{sen}^2\,\alpha = \frac{1}{1 + \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}} + \text{sen}^2\,\alpha =$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}} + \text{sen}^2\,\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha} + \text{sen}^2\,\alpha =$$

$$= \cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 1$$

b)

$$\frac{\text{sen}^2\alpha + 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \left(\frac{\text{sen}^2\alpha - 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1 + 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha - 1 + 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha} = 4\,\text{tg}\,\alpha$$

c)

$$\frac{1 - \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}}{1 + \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha} =$$

$$= \cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha - \text{sen}^2\,\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\alpha$$

48. Se $4 \cdot \text{tg}^2\,\alpha + \text{tg}\,\alpha - 3 = 0$, com $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, então substituindo $\text{tg}\,\alpha$ por y, temos que:

$4 \cdot \text{tg}^2\,\alpha + \text{tg}\,\alpha - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y^2 + y - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(4)(-3) \Rightarrow \Delta = 49$

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8} \Rightarrow y = \frac{-1 \pm 7}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{-1 + 7}{8} \Rightarrow y = \frac{3}{4}$ ou $y = \frac{-1 - 7}{8} \Rightarrow y = -1$

Então, $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$ ou $\text{tg}\,\alpha = -1$.

Como $\alpha \in 2^{\text{o}}$ quadrante, então $\text{sen}\,\alpha \geqslant 0$ e $\text{tg}\,\alpha = -1$. Logo, o erro na resolução do exercício foi ter considerando também a solução $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$.

Assim:

$\text{tg}\,\alpha = -1 \Rightarrow \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = -1 \Rightarrow \frac{\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha}}\right)^2 = (-1)^2 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2\alpha}{1 - \text{sen}^2\alpha} = 1 \Rightarrow 1 - \text{sen}^2\alpha = \text{sen}^2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

O valor que satisfaz a condição $\text{sen}\,\alpha \geqslant 0$ é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

TECNOLOGIA (P. 215)

1. Resposta pessoal. Os estudantes podem escolher qualquer um dos pontos de intersecção entre as funções indicadas. Exemplos de resposta:

a) $A = (0{,}79; 0{,}71)$

b) $B = (\pi, 0)$

c) $C = (0{,}67; 0{,}79)$

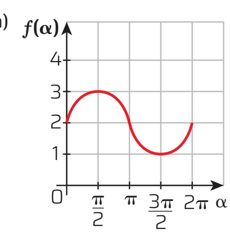
d) $D = (2\pi, 0)$

e) $E = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

f) $F = (0, 0)$

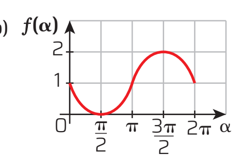
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 219)

49. a)

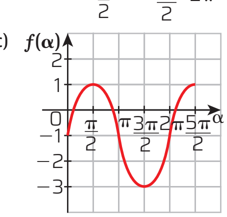


Ilustrações: ID/BR

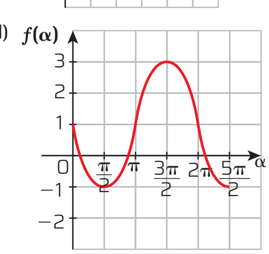
b)

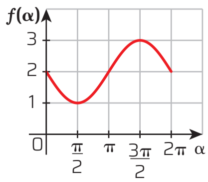


c)

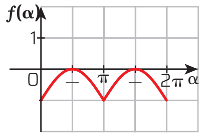


d)



e) 

Ilustrações: ID/BR

f) 

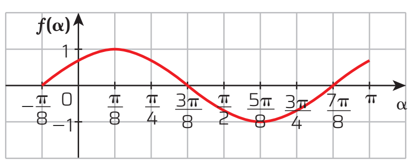
50. O gráfico do item **a** é obtido na translação de $y = \text{sen}\ \alpha$ em 2 unidades pelo eixo y no sentido positivo.

O gráfico do item **b** é obtido na translação de $y = \text{sen}\ \alpha$ em 1 unidade pelo eixo y e pela reflexão do gráfico obtido em relação a y.

51. a) Nenhum, pois $-1 \leqslant \text{sen}\ \alpha \leqslant 1$ e, nesse caso, $2 + \text{sen}\ \alpha \geqslant 1$.

b) Um, porque a reta de equação $y = -\alpha$ só intersecta em um ponto o gráfico de $f(\alpha) = -1 + 2\ \text{sen}\ \alpha$.

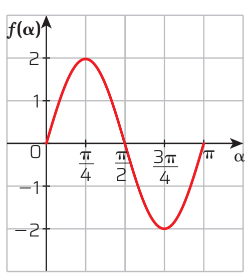
52. a)



ID/BR

$p = \pi$

$\text{Im}(f) = [-1, 1]$

b) 

ID/BR

$p = \pi$

$\text{Im}(f) = [-2, 2]$

53. Seja $f(\alpha) = a \cdot \text{sen}\ (c\alpha)$. Pelo gráfico, notamos que o período de f é π. Portanto, $c = 2$. Ainda pelo gráfico:

$\left(\frac{\pi}{4}, -3\right)$ é ponto do gráfico de f

$-3 = a \cdot \text{sen}\ 2 \cdot \frac{\pi}{4}$

$a = -3$

Portanto, $f(\alpha) = -3 \cdot \text{sen}\ 2\alpha$.

54. a) $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$

$\text{Im}(f) = [-5, -1]$

b) $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$

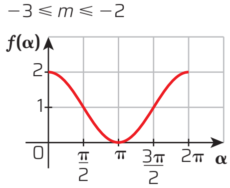
$\text{Im}(f) = [-6, -2]$

55. a) $-1 \leqslant -4m + 3 \leqslant 1$

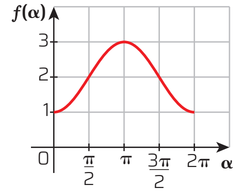
$\frac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$

b) $-1 \leqslant -2m - 5 \leqslant 1$

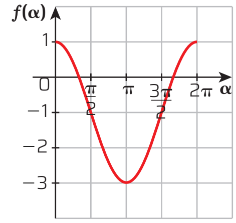
$-3 \leqslant m \leqslant -2$

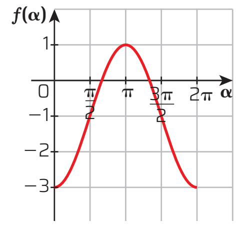
56. a) 

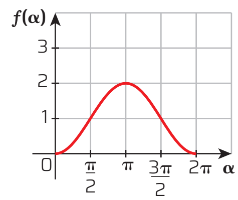
ID/BR

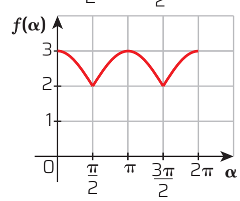
b) 

Ilustrações: ID/BR

c) 

d) 

e) 

f) 

57. $f(\alpha) = 1 + \cos \alpha$ é gerado pela translação de $f(\alpha) = \cos \alpha$ em 1 unidade no eixo vertical no sentido positivo.

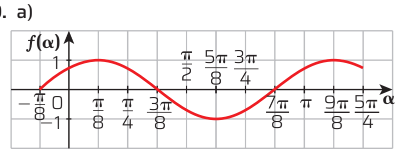
$f(\alpha) = 2 - \cos \alpha$ é gerado pela reflexão de $f(\alpha) = \cos \alpha$ e pela translação em 2 unidades no eixo vertical no sentido positivo.

58. Seja $f(\alpha) = a \cdot \cos\ (c\alpha)$. Pelo gráfico, notamos que o período de $f(\alpha)$ é 2π. Portanto, $c = 1$. Ainda pelo gráfico: $(\pi, 2) \in f(\alpha)$.

Então: $2 = a \cdot \cos \pi \Rightarrow a = -2$

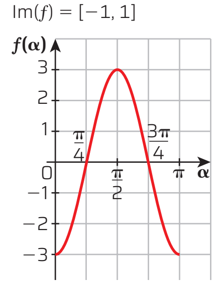
Portanto, $f(\alpha) = -2 \cdot \cos \alpha$.

59. a)



$p = \pi$

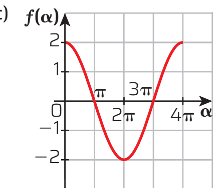
$\text{Im}(f) = [-1, 1]$

b) 

Ilustrações: ID/BR

$p = \pi$

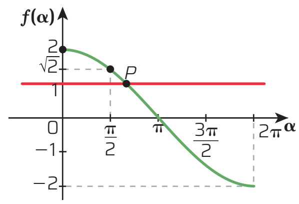
$\text{Im}(f) = [-3, 3]$

c) 

ID/BR

$p = 2\pi$

$\text{Im}(f) = [-2, 2]$

60. a) 

ID/BR

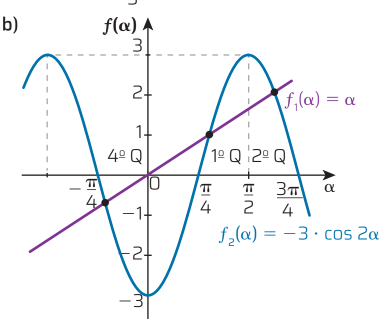
$2 \cos \frac{\alpha}{2} = 1$

$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\alpha}{2} = \frac{5\pi}{3}$

Assim: $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ou $\alpha = \frac{10\pi}{3} > 2\pi$

Logo, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

b) 

ID/BR

Há três valores de α que satisfazem a equação nos 1º, 2º e 4º quadrantes.

TECNOLOGIA (P. 222)

1. A lei de formação da função f cujo gráfico foi gerado na 2ª etapa.

Em que $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$ e $d = 1$, temos:

$f(x) = a + b \cdot \text{sen}\ (cx + d) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 0 + 2 \cdot \text{sen}\ (1 \cdot x + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 2\text{sen}(x + 1)$.

2. a: o gráfico transladou para cima ou para baixo; b: a amplitude do gráfico aumentou ou diminuiu; c: o período aumentou ou diminuiu; e d: o gráfico transladou para a direita ou para a esquerda.

3. Resposta pessoal.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 224)

61. Podemos notar que os quatros gráficos "tocam" o eixo y em alturas diferentes. Sendo assim, vamos adotar como estratégia calcular o valor de $f(0)$, $g(0)$, $h(0)$ e $p(0)$. Uma vez encontrados esses valores, vamos poder identificar os gráficos corretos. Assim, temos:

Calculando $f(0)$:

$f(x) = \text{sen}\ (x) + \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(0) = \text{sen}\ (0) + \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0) = 0 + \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(0) = \frac{\pi}{4}$

Sabemos que $\frac{\pi}{4}$ é um valor compreendido entre 0 e 1, pois $\frac{\pi}{4} \simeq \frac{3{,}14}{4}$, ou seja, é um valor entre 0 e 1 e mais próximo de 1. Somente o gráfico (II) corta o eixo y nesse ponto, sendo assim, guardamos a informação de que o gráfico de $f(x)$ é (III), o que até aqui já nos indica de que a alternativa correta pode ser a **b**.

Calculando $g(0)$:

$g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(0) = \cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(0) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow g(0) = 0$

O gráfico que toca o eixo y na altura 0 é o gráfico (II), portanto, guardamos a informação de que o gráfico (II) é o da função $g(x)$. Confirmando, assim, que a alternativa correta tem que ser a letra **b**. Então, para calcular $h(0)$ e $p(0)$, temos:

$h(x) = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow h(0) = \text{sen}\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow h(0) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow h(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$p(x) = \cos x + \text{sen}\, x \Rightarrow p(0) = \cos 0 + \text{sen}\, 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p(0) = 1 + 0 \Rightarrow p(0) = 1$

Sendo assim, temos que a seguinte correspondência: Gráfico (I): função $h(x)$; gráfico (II): função $g(x)$; gráfico (III): função $f(x)$; gráfico (IV): função $p(x)$.

Alternativa **b**.

62. I) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

II) $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6} \cdot \text{sen}\,\frac{7\pi}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{7\pi}{12}$

Logo, $P = \frac{\pi}{2}$ e $Q = -\frac{7\pi}{12}$.

$P + Q = \frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12} \Rightarrow P + Q = \frac{6\pi - 7\pi}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow P + Q = -\frac{\pi}{12}$

Alternativa **a**.

63. Analisando e interpretando o problema, temos: em 2018, janeiro = 1, até dezembro = 12, e em 2019, janeiro = 13, e dezembro = 24.

Calculando fevereiro de 2019, temos:

$F(t) = 3\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{3}\left(t - 1\right)\right] + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(14) = 3\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{3}(14 - 1)\right] + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(14) = 3\,\text{sen}\left(\frac{13\pi}{3}\right) + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(14) = 3\,\text{sen}\left(\frac{12\pi + \pi}{3}\right) + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(14) = 3\,\text{sen}\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(14) = 3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(14) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(14) \simeq 3 + 30 \Rightarrow F(14) \simeq 33\ °C$

Calculando novembro de 2019, temos:

$F(t) = 3\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{3}\left(t - 1\right)\right] + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(23) = 3\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{3}(23 - 1)\right] + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(23) = 3\,\text{sen}\left(\frac{22\pi}{3}\right) + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(23) = 3\,\text{sen}\left(\frac{18\pi + 4\pi}{3}\right) + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(23) = 3\,\text{sen}\left(6\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(23) = 3\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(23) = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(23) \simeq -3 + 30 \Rightarrow F(23) \simeq 27\ °C$

Logo, foi superior a 31 °C em fevereiro de 2019 e inferior a 29 °C em novembro de 2019.

Alternativa **a**.

64. Analisando e interpretando o gráfico, temos: $f(x) = \text{sen}\, x$ e $g(x) = \cos x$. Assim, podemos concluir que o conjunto solução da inequação $g(x) < f(x)$ é: $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$.

Alternativa **e**.

65. Pela relação fundamental da trigonometria, temos:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

Logo, $f(x) = 3\,\text{sen}^2 x + 7\cos^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 3\,\text{sen}^2 x + 7(1 - \text{sen}^2 x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 3\,\text{sen}^2 x + 7 - 7\,\text{sen}^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = -4\,\text{sen}^2 x + 7$

Então, $-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \text{sen}^2 x \leqslant 1$

Logo, $f(x) = -4\,\text{sen}^2 x + 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = -4 \cdot 0^2 + 7 \Rightarrow M = 0 + 7 \Rightarrow M = 7$

$f(x) = -4\,\text{sen}^2 x + 7 \Rightarrow m = -4 \cdot 1^2 + 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow m = -4 + 7 \Rightarrow m = 3$

Logo, o produto $M \cdot m = 7 \cdot 3 = 21$.

Alternativa **c**.

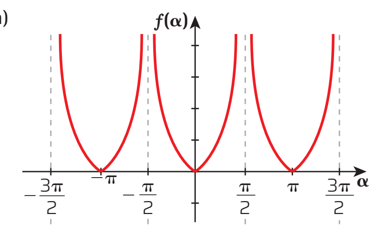
66. A altura da cadeira varia conforme um fenômeno periódico, já que o movimento circular se repete indefinidamente.

Alternativa **a**.

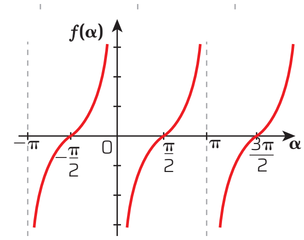
PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 227)

67. Se possível, proponha aos estudantes que utilizem um *software* de calculadora gráfica para resolver esse problema.

a)

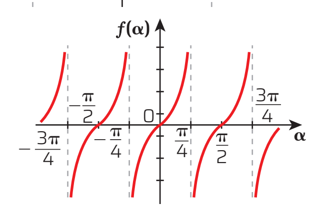


b)



Ilustrações: ID/BR

c)



68. Seja $f(x) = a + b \cdot \text{tg}\, x$. Notamos que (0, 2) pertence ao gráfico de f, então:

$2 = a + b \cdot \text{tg}\,(0) \Rightarrow a = 2$

Como $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \in f(x)$, então:

$0 = 2 + b \cdot \text{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

CÁLCULO RÁPIDO (P. 228)

1. a) Os números são 6 e 4.

b) Joana tem 17 anos, Pedro, 14 anos e Clara, 12 anos.

c) Em uma hora, ele percorre 72 000 m; para percorrer 1 km, ele leva 50 segundos.

d) O mais rápido é o que percorre 50 km em 1 h, pois 100 metros em 10 s equivalem a 36 km/h.

2. a) 34 b) 6 c) 7 d) 5

3. a) $9x - 8$ c) $4abc - 4ab$

b) $x^2 - 12x + 35$ d) $2x^2 - 6xy + 5y$

4. A questão pode ser resolvida de várias maneiras. Uma resposta possível é a que segue. Verifique se os estudantes abordam a questão dos quadrantes, que não é mencionada.

	Arco (em grau)	Arco (em radiano)	Seno do arco	Cosseno do arco
Ponto *A*	0°	0	0	1
Ponto *B*	90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
Ponto *C*	150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ponto *D*	210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ponto *E*	270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
Ponto *F*	300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Ponto *G*	330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ponto *H*	30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ponto *I*	120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Ponto *J*	180°	π	0	-1
Ponto *K*	60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Ponto *L*	240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

PARA RECORDAR (P. 229)

1. A conta atual corresponde ao valor da assinatura de R\$ 40,00 mais o pagamento pelas ligações para celulares, uma vez que as ligações para telefones fixos são gratuitas.

A conta atual de R\$ 200,00 (40 + 160) precisa ser reduzida para R\$ 80,00. Como 80 = 40 + + 40, temos que a redução deve ser de R\$ 160,00 para R\$ 40,00, correspondente às ligações para celulares.

Ou seja, é preciso reduzir R\$ 120,00 dos R\$ 160,00 gastos atualmente, o que corresponde a $\frac{120}{160} = 75\%$.

Alternativa **e**.

2. **I.** Oy é o eixo de simetria.

II. $x_2 - x_1 = 4$, sendo $f(x_1) = f(x_2) = 0$, $x_2 > x_1$

III. $y_v = -5$

Por (I), temos: $x_v = 0$

Como $x_v = 0$, por (II), temos: $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$.

Assim:

$f(x) = a(x - 2)(x + 2) \Rightarrow f(x) = a(x^2 - 4)$

Por (III), temos que $(0, -5)$ pertence ao gráfico de f. Logo:

$-5 = -4a \Rightarrow a = \frac{5}{4}$

Portanto, $f(x) = \frac{5x^2}{4} - 5$.

3. a) Se 50% de 46 milhões de reais fossem repassados à saúde, esse setor teria um aumento de 50% de 46, que é o mesmo que $0{,}50 \cdot 46$, isto é, um aumento de 23 milhões de reais.

b) O setor de saúde dispõe de 19 bilhões de reais. Assim, com o repasse, o aumento desse setor seria de:

$\frac{23}{19} \simeq 121\%$

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 229)

1. Essa é apenas uma forma de resolução. Os estudantes podem chegar às respostas por meio de diferentes raciocínios.
   Em 20 estudantes, 14 têm olhos castanhos, 15 têm cabelos negros, 17 pesam mais de 40 kg e 18 medem 1,50 metro.
   Assim, 6 não têm olhos castanhos, 5 não têm cabelos negros, 3 não pesam mais de 40 kg e 2 não medem 1,50 metro.
   Supondo que esses estudantes não tenham uma dessas características, isto é, que o conjunto de estudantes que não têm olhos castanhos e o de estudantes que não têm cabelos negros, por exemplo, sejam disjuntos, temos:
   $6 + 5 + 3 + 2 = 16$
   Isto é, 16 estudantes não têm uma dessas características.
   Assim, temos, pelo menos, 4 estudantes $(20 - 16)$ que têm todas as características.
2. Sete meias, assim haverá, com certeza, um par completo e cinco meias avulsas.

MATEMÁTICA E SINESTESIA (P. 230)

Conectando ideias

1. O timbre é uma das características fisiológicas do som. É ele que permite ao nosso sistema auditivo distinguir se uma nota musical ou um acorde foi tocado por um ou outro instrumento, por exemplo, independentemente de outras características distintivas, como a altura e a intensidade. É essa característica que nos permite distinguir o som produzido por um oboé de um som produzido por uma bateria, já que os instrumentos têm frequências e harmônicos diferentes que, quando combinados, produzem o som característico de cada um. O timbre também pode ser caracterizado como a combinação de diferentes formas de onda, isto é, como a soma dos gráficos das funções que representam as ondas sonoras.
2. Resposta pessoal. Os estudantes podem elaborar diversos tipos de pintura ou desenho, inclusive com o auxílio de recursos digitais. Se julgar interessante, converse com o professor de Arte para que sejam sugeridos diferentes suportes para a realização do projeto e possíveis temas para a expressão artística. Por exemplo: combinação de cores, texturas e formas, bem como aplicativos, *softwares* e outros recursos para desenho digital ou ainda referências de artistas com habilidades sinestésicas (alguns exemplos foram dados no texto-base da seção) para que os estudantes analisem as obras produzidas e busquem identificar a sinestesia nas formas de arte escolhidas.
   Antes de começarem a produção, reforce a importância de eles utilizarem a criatividade e não se prenderem à ideia de "certo" ou "errado", pois, nesse caso, é importante apenas estimular os sentidos e buscar soluções inovadoras para a produção das pinturas ou dos desenhos.
   Inicialmente, os estudantes podem apresentar dificuldades para realizar o projeto por considerarem que não têm habilidades sinestésicas. Portanto, você pode fazer algumas perguntas, como: Pense em um número. O que você vê? Se você fosse representar um elemento da natureza, como faria? Pense em sua música favorita. Como você a representaria na pintura? Quais elementos utilizaria?
   No momento da roda de conversa, solicite aos estudantes que compartilhem as impressões sobre a execução da tarefa, discutindo como se sentiram enquanto pensavam em como elaborar a pintura ou o desenho. Dessa forma, eles poderão perceber a importância da resiliência, uma vez que certamente precisaram persistir em uma ideia enquanto lidavam com situações adversas.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 232)

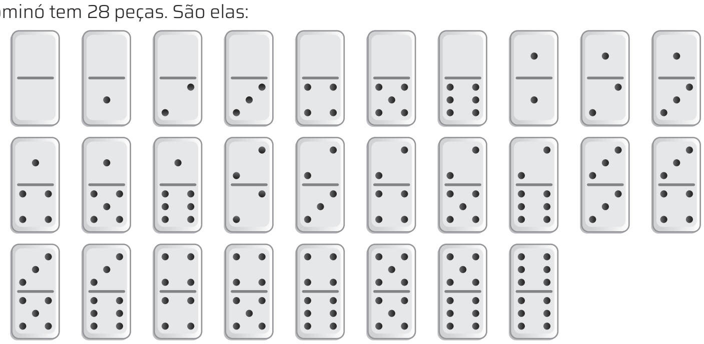
1. Vamos admitir que as distâncias dadas sejam entre os pontos *A*, *B*, *C* e *D* e que extensão máxima é a distância entre os pontos *A* e *D* com o braço mecânico na horizontal.
   Considerando $CD = x$, pelo enunciado, temos que: $AB = x + 11$, $AC = 8\sqrt{3}$ e $BC = 8$.
   Logo, para $\alpha = 60°$, aplicando teorema dos cossenos no triângulo *ABC*, temos:
   $(8\sqrt{3})^2 = (x+11)^2 + 8^2 - 2 \cdot (x+11) \cdot 8 \cdot \cos 60° \Rightarrow$
   $\Rightarrow 64 \cdot 3 = x^2 + 22x + 121 +$
   $+ 64 - 2 \cdot (x+11) \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$
   $\Rightarrow x^2 + 22x + 185 - 192 - 8x - 88 = 0 \Rightarrow$
   $\Rightarrow x^2 + 14x - 95 = 0 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \Delta = (14)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-95) \Rightarrow \Delta = 576 \Rightarrow$
   $\Rightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{576}}{2} \Rightarrow x = \frac{-14 \pm 24}{2} \Rightarrow$
   $\Rightarrow x' = 5$ ou $x'' = -19$ (não convém)
   Com $x = 5$, a extensão máxima horizontal do braço é 29, pois:
   $(x + 11) + 8 + x = (5 + 11) + 8 + 5 = 29$
   Alternativa **e**.
2. O período da função é: $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$
   Logo, a metade de 2π é π.
   Isso implica em dizer que:
   $\frac{2\pi}{T} = \pi \Rightarrow \frac{2}{T} = 1 \Rightarrow T = 2$
   O ponto $(0, -3)$ pertence à função. Isso implica em dizer que, sendo a função do tipo cossenóide, temos que:
   $A \cos (2 \cdot 0) = -3 \Rightarrow A \cdot 1 = -3 \Rightarrow A = -3$
   Assim, a função é:
   $P(t) = \pm A \cdot \cos (wt) \Rightarrow P(t) = -3 \cos (2t)$
   Alternativa **a**.

UNIDADE 4 ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

CAPÍTULO 10 ANÁLISE COMBINATÓRIA

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 239)

1. O dominó tem 28 peças. São elas:



ID/BR

2. São 32 resultados possíveis. Representando coroa por *C* e cara por *K*, temos as possibilidades:
   CCCCC, CKCCC, CKKCC, CCKCK, KKCKC, CKCKK, CKKCK, KKKCK
   CCCCK, KCCCC, KKCCC, KCCCK, CCKKK, KKCCK, CKKKK, KKKKC
   CCCKC, CCCKK, KCKCC, KCKCK, CKKKC, CKCKC, KCKKK, KCCKC
   CCKCC, CCKKC, KCKKC, KKKCC, CKCCK, KCCKK, KKCKK, KKKKK
3. Montando um quadro com o lançamento de dois dados, temos as seguintes faces e somas possíveis:

Dado 1 / Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	1 + 1 = 2	2 + 1 = 3	3 + 1 = 4	4 + 1 = 5	5 + 1 = 6	6 + 1 = 7
2	1 + 2 = 3	2 + 2 = 4	3 + 2 = 5	4 + 2 = 6	5 + 2 = 7	6 + 2 = 8
3	1 + 3 = 4	2 + 3 = 5	3 + 3 = 6	4 + 3 = 7	5 + 3 = 8	6 + 3 = 9
4	1 + 4 = 5	2 + 4 = 6	3 + 4 = 7	4 + 4 = 8	5 + 4 = 9	6 + 4 = 10
5	1 + 5 = 6	2 + 5 = 7	3 + 5 = 8	4 + 5 = 9	5 + 5 = 10	6 + 5 = 11
6	1 + 6 = 7	2 + 6 = 8	3 + 6 = 9	4 + 6 = 10	5 + 6 = 11	6 + 6 = 12

   Desconsiderando os resultados iguais, temos 11 somas possíveis, sendo elas: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12.
4. a) Resposta pessoal.
   Resposta possível: 3 algarismos: 121, 232, 545; 4 algarismos: 3 663, 4 334, 7 887.
   b) Vamos montar um esquema de possibilidades.
   - Para o primeiro algarismo, temos 9 possibilidades (o 0 não pode ser incluído).
   - Para o segundo algarismo, temos 10 possibilidades (algarismos de 0 a 9).
   - Para o terceiro algarismo, temos apenas 1 possibilidade (o número deve ser igual ao primeiro algarismo).

   Para cada 9 possibilidades do primeiro algarismo, temos 10 possibilidades para o segundo. Logo, há 90 números palíndromos de três algarismos.
   c) Considerando os números: 1, 3, 5, 7 e 9:
   - Para o primeiro algarismo, temos 5 possibilidades.
   - Para o segundo algarismo, temos 5 possibilidades.

- Para o terceiro algarismo, temos apenas 1 possibilidade (o número deve ser igual ao segundo algarismo).
- Para o quarto algarismo, temos apenas 1 possibilidade (o número deve ser igual ao primeiro algarismo).

Para cada 5 possibilidades do primeiro algarismo, temos 5 possibilidades para o segundo. Logo, podemos formar 25 números palíndromos nessas condições.

d) Não, porque, para que um número seja palíndromo, deve haver ao menos um par de algarismos iguais.

5. **a)** Queremos ocupar 6 pessoas em um automóvel com 6 assentos (2 lugares na parte da frente e 4 na parte de trás). Podemos considerar que 6 pessoas podem ocupar um dos 6 lugares, depois; 5 pessoas podem ocupar um dos 5 lugares restantes; em seguida, 4 podem ocupar um dos 4 lugares, e assim por diante. Então, teremos:

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Portanto, existem 720 maneiras de acomodar os passageiros.

b) Como umas das pessoas vai dirigir, teremos a seguinte possibilidade para acomodar os outros 5 passageiros:

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Portanto, existem 120 maneiras de acomodar os passageiros.

6. **a)** Exemplos de resposta: CALO, LOCA, OLCA e ALOC.

b) Para a primeira letra, temos 4 possibilidades; para a segunda, temos 3 possibilidades; e assim por diante. Então:

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Portanto, podemos obter 24 anagramas com a palavra COLA.

c) Fixando a letra C, temos 1 possibilidade para a primeira letra, 3 possibilidades para a segunda letra, 2 para a terceira e 1 para a quarta. Assim: $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Portanto, 6 anagramas começam com a letra C.

d) Como o anagrama não pode começar em L, para a primeira letra temos 3 possibilidades (C, O, A), para a segunda letra temos 3 possibilidades, para a terceira letra, 2 possibilidades e para a quarta, 1 possibilidade. Assim:

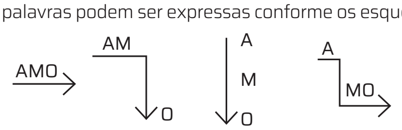
$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$

Portanto, 18 anagramas não começam com a letra L.

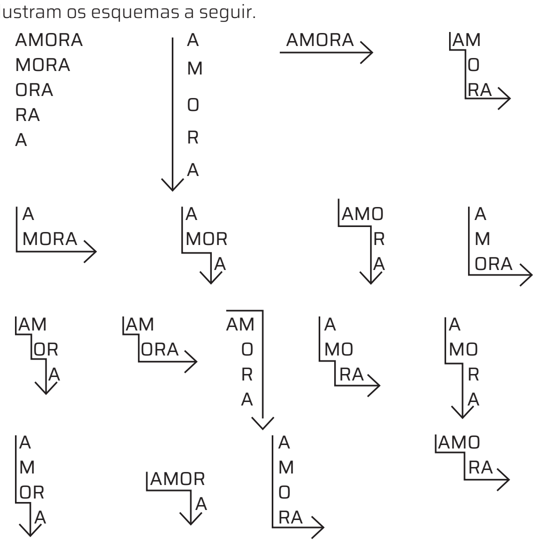
7. Podemos obter a palavra AMO de 4 maneiras.

Se adotarmos D para a direita e B para baixo, temos as sequências: DDD; DDB; BBB; DBD.

Assim, as palavras podem ser expressas conforme os esquemas a seguir.



8. Podemos obter a palavra AMORA de 16 maneiras diferentes, conforme ilustram os esquemas a seguir.



9. Na primeira maneira, há 5 possibilidades para um quadrante e 4 para o quadrante oposto, restando 3 possibilidades para cada um dos demais quadrantes.

Na segunda maneira, há 5 possibilidades para um quadrante e somente uma possibilidade para o quadrante oposto, visto que possuem a mesma cor. Assim, nos quadrantes restantes há 4 possibilidades para cada um deles.

Dessa forma, o total de maneiras distintas de pintar esse círculo é:

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 = 180 + 80 = 260$

Alternativa **a**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 241)

10. Vamos resolver as questões utilizando o princípio multiplicativo.

Atividade 4

b) $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$

Portanto, existem 90 números.

c) $5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 25$

Portanto, podemos formar 25 números.

Atividade 5

a) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Logo, as pessoas podem se acomodar de 720 maneiras diferentes.

b) $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Portanto, os lugares podem ser ocupados de 120 maneiras diferentes.

Atividade 6

b) $\overline{4} \cdot \overline{3} \cdot \overline{2} \cdot \overline{1} = 24$

Portanto, podemos obter 24 anagramas.

c) $\frac{C}{1} \cdot \overline{3} \cdot \overline{2} \cdot \overline{1} = 6$

Portanto, 6 anagramas começam com a letra C.

d) $\overline{3} \cdot \overline{3} \cdot \overline{2} \cdot \overline{1} = 18$

Portanto, 18 anagramas não começam com a letra L.

11. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Portanto, 120 produtos entrarão em fase de teste.

12. $\overline{8} \cdot \overline{8} = 64$

Portanto, uma pessoa pode entrar e sair de 64 maneiras diferentes.

13. Primeiro, vamos determinar quantas placas podem ser fabricadas com todas as letras e algarismos, incluindo as placas com final 0000. Assim:

$\overline{26} \cdot \overline{26} \cdot \overline{26} \cdot \overline{10} \cdot \overline{10} \cdot \overline{10} \cdot \overline{10} = 26^3 \cdot 10^4$

Vamos determinar agora quantas placas podem ser formadas com o final 0000. Assim:

$\overline{26} \cdot \overline{26} \cdot \overline{26} \cdot \frac{0}{1} \cdot \frac{0}{1} \cdot \frac{0}{1} \cdot \frac{0}{1} = 26^3 \cdot 1^4 = 26^3$

O total de placas solicitadas pode ser obtido pela diferença entre a quantidade total de placas e a quantidade de placas que terminam com 0000. Então:

$26^3 \cdot 10^4 - 26^3 = 26^3 \cdot (10^4 - 1) = 17\,576 \cdot (10\,000 - 1) = 175\,742\,424$

Portanto, o total de placas é $26^3 \cdot (10^4 - 1) = 175\,742\,424$.

14. **a)** Primeiro, vamos analisar a quantidade de placas possíveis com 2 letras e 4 algarismos:

$\overline{26} \cdot \overline{26} \cdot \overline{10} \cdot \overline{10} \cdot \overline{10} \cdot \overline{10} = 26^2 \cdot 10^4$

Vamos analisar a quantidade de placas com final 0000:

$\overline{26} \cdot \overline{26} \cdot \frac{0}{1} \cdot \frac{0}{1} \cdot \frac{0}{1} \cdot \frac{0}{1} = 26^2 \cdot 1^4 = 26^2$

A quantidade de placas formadas por 2 letras e 4 algarismos, sendo ao menos um deles diferente de zero, pode ser dada pela diferença entre a quantidade de placas totais e a quantidade de placas com final 0000. Assim:

$26^2 \cdot 10^4 - 26^2 = 26^2 \cdot (10^4 - 1) = 676 \cdot 9999 = 6\,759\,324$

Portanto, antes havia $26^2 \cdot (10^4 - 1) = 6\,759\,324$ combinações possíveis de placas.

Sabemos que a quantidade de placas formadas por 3 letras e 4 algarismos, não sendo os 4 algarismos zero, é igual a $26^3 \cdot (10^4 - 1)$.

O aumento na frota será a diferença entre as placas com 3 letras e as placas com 2 letras. Assim:

$26^3 \cdot (10^4 - 1) - 26^2 \cdot (10^4 - 1) = 175\,742\,424 - 6\,759\,324 =$

$= 168\,983\,100$

Portanto, com a mudança, foi possível aumentar a frota de automóveis em 168 983 100 placas diferentes.

b) 1990: $7\,576 \cdot 9999 = 175\,742\,424$

2018: $456\,976 \cdot 999 = 456\,519\,024$

Logo, a diferença entre as quantidades de 2018 e 1990 é:

$456\,519\,024 - 175\,742\,424 = 280\,776\,600$

15. **a)** A - B - C - D

- Para ir da cidade A até B, temos 3 meios de transporte.
- Para ir da cidade B até C, temos 2 meios de transporte.
- Para ir da cidade C até D, temos 4 meios de transporte.

$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$

Portanto, existem 24 modos de realizar esse percurso.

b) A - B - A

- Para ir da cidade A até B, temos 3 meios de transporte.
- Para ir da cidade B até A, temos 3 meios de transporte.

$3 \cdot 3 = 9$

Portanto, existem 9 modos de realizar esse percurso.

c) A – B – C – D – C
- Para ir da cidade A até B, temos 3 meios de transporte.
- Para ir da cidade B até C, temos 2 meios de transporte.
- Para ir da cidade C até D, temos 4 meios de transporte.
- Para ir da cidade D até C, temos 4 meios de transporte.

$3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 96$

Portanto, existem 96 modos de realizar esse percurso.

d) B – C – D – C
- Para ir da cidade B até C, temos 2 meios de transporte.
- Para ir da cidade C até D, temos 4 meios de transporte.
- Para ir da cidade D até C, temos 4 meios de transporte.

$2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$

Portanto, existem 32 modos de realizar esse percurso.

16. a) Do térreo para o 2º andar, temos as opções:
- Do térreo ao 1º andar, 2 rampas
- Do 1º ao 2º andar, 4 rampas

$2 \cdot 4 = 8$

Portanto, existem 8 trajetos possíveis.

b) Do 2º andar para o 3º e, a seguir, para o térreo, temos as opções:
- Do 2º ao 3º andar, 3 escadas
- Do 3º ao 2º andar, 3 escadas
- Do 2º ao 1º andar, 4 escadas
- Do 1º andar ao térreo, 2 rampas

$3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 72$

Portanto, existem 72 trajetos possíveis.

17. a) Como os algarismos podem ser iguais, temos: $3 \cdot 3 = 9$

Portanto, podemos formar 9 números.

b) Os algarismos precisam ser diferentes, então, temos: $3 \cdot 2 = 6$

Portanto, podemos formar 6 números distintos.

18. Temos 6 opções de algarismos (1, 2, 3, 4, 5 e 6) e os números precisam ser distintos. Como os números estão entre 2 000 e 3 000, o algarismo do milhar é 2, então:

$\underset{1}{\underline{2}} \cdot \underset{5}{\underline{\ \ }} \cdot \underset{4}{\underline{\ \ }} \cdot \underset{3}{\underline{\ \ }} = 60$

Portanto, existem 60 números distintos formados pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 entre 2 000 e 3 000.

19. Para que o número seja ímpar, precisamos que o algarismo da unidade seja ímpar (1 ou 3). Assim:

$5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$

Portanto, podemos formar 50 números ímpares.

20. Como o número tem 3 algarismos, ele não pode começar com 0, então, temos 4 chances para a centena; e para que o número seja par, precisamos que o algarismo da unidade seja par (0 ou 4).

Considerando os números que terminam com 0, temos:

$\underset{4}{\underline{\ \ }} \cdot \underset{3}{\underline{\ \ }} \cdot \underset{1}{\underline{0}} = 12$

Considerando os números que terminam com 4 e não começam com 0, temos:

$\underset{3}{\underline{\ \ }} \cdot \underset{3}{\underline{\ \ }} \cdot \underset{1}{\underline{4}} = 9$

Então, a quantidade de números pares será 21 (12 + 9 = 21).

21. Uma maneira de resolver essa questão é supor que Ana será a primeira a escolher um lugar. Nesse caso, ela tem 6 possibilidades. Beatriz, a segunda a escolher, não pode sentar onde Ana escolheu nem no lado oposto ao escolhido por ela. Logo, tem 4 possibilidades de escolha. Carlos, por fim, não pode escolher as possibilidades já escolhidas nem seus respectivos lados opostos. Logo, restam 2 possibilidades para ele. Assim: $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$.

Alternativa **a**.

22. Podemos determinar os diferentes tipos de salada da seguinte maneira:

$\underset{4}{\underline{T}}\ \underset{1}{\underline{A}}\ \underset{2}{\underline{A}}\ \underset{2}{\underline{A}}\ \underset{2}{\underline{A}}\ \underset{2}{\underline{A}}\ \underset{2}{\underline{A}}\ \underset{2}{\underline{A}} = 4 \cdot 1 \cdot 2^6 = 256$

Portanto, podem ser preparados 256 diferentes tipos de salada.

23. Resposta pessoal.

Sugestão:

Marta tem 2 casacos, 4 camisetas e 3 calças. De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?

Resolução

$2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

Portanto, Marta tem 24 maneiras de se vestir.

24. a) A palavra PÁTIO tem 5 letras; destas, 3 são vogais.

Podemos determinar quantos anagramas dessa palavra começam por vogal da seguinte forma:

$\underset{3}{\underline{V}}\ \underset{4}{\underline{\ \ }}\ \underset{3}{\underline{\ \ }}\ \underset{2}{\underline{\ \ }}\ \underset{1}{\underline{\ \ }} = 3^2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 72$

Portanto, 72 anagramas começam por vogal.

b) Podemos determinar quantos anagramas dessa palavra terminam com IO da seguinte forma:

$\underset{3}{\underline{\ \ }}\ \underset{2}{\underline{\ \ }}\ \underset{1}{\underline{\ \ }}\ \underset{1}{\underline{I}}\ \underset{1}{\underline{O}} = 3 \cdot 2 \cdot 1^3 = 6$

Portanto, 6 anagramas terminam com as letras IO.

25. a) Temos 10 elementos no conjunto *A*. Sabemos que os números devem ser distintos entre si e, para que o número tenha 5 algarismos, ele não pode começar com 0.

A quantidade de números será:

$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$

Portanto, com os elementos de *A*, é possível escrever 27 216 números distintos com 5 algarismos.

A alternativa **a** é incorreta.

b) Sabemos que os números devem ser distintos entre si e, para que o número tenha 4 algarismos, ele não pode começar com 0. Assim:
- Números pares terminados em 0: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 504$
- Números pares não terminados em 0: $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 1\,792$

O número total de pares distintos é:

$1\,792 + 504 = 2\,296$.

Portanto, com os elementos de *A*, é possível escrever 2 296 números pares distintos com 4 algarismos.

A alternativa **b** é incorreta.

c) Números distintos menores que 300:
- na casa da centena temos duas opções (1 e 2);
- na casa da dezena temos 9 opções;
- na casa da unidade temos 8 opções. Então: $2 \cdot 9 \cdot 8 = 144$

Números distintos entre 300 e 349:
- na casa da centena temos uma opção (3);
- na casa da dezena temos 4 opções (0, 1, 2 e 4);
- na casa da unidade temos 8 opções. Então: $1 \cdot 4 \cdot 8 = 32$

Logo, o total de números distintos menores que 350 será: $144 + 32 = 176$.

Portanto, com os elementos de *A*, é possível escrever 176 números distintos menores de 350.

A alternativa **c** é correta.

d) Temos 5 elementos ímpares no conjunto *A*: 1, 3, 5, 7 e 9.

A quantidade de números distintos será:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Portanto, com os elementos ímpares de *A*, é possível escrever 60 números distintos.

A alternativa **d** é correta.

e) Para que um número seja divisível por 5, é necessário que ele termine com 0 ou 5.
- Números distintos terminados em 0: $9 \cdot 8 \cdot 1 = 72$
- Números distintos terminados em 5: $8 \cdot 8 \cdot 1 = 64$

O total de números distintos de 3 algarismos que são divisíveis por 5 é: $72 + 64 = 136$.

Portanto, com os elementos de *A*, é possível escrever 136 números divisíveis por 5.

A alternativa **e** é incorreta.

26. Resposta pessoal.

Exemplo de problema:

Márcia, Saulo e Antônia compraram três ingressos para o teatro. As cadeiras relativas aos ingressos ficam uma ao lado da outra. De quantos modos diferentes eles podem se sentar?

Resolução

C1	C2	C3
Saulo	Márcia	Antônia
	Antônia	Márcia
Márcia	Saulo	Antônia
	Antônia	Saulo
Antônia	Saulo	Márcia
	Márcia	Saulo

Portanto, existem 6 modos diferentes de os três se sentarem.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 248)

27. a) $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

b) $4! + 5! = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) + (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 144$

c) $(3!)^2 - 5 \cdot 5! = [(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)] - 5 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 36 - (5 \cdot 120) = 36 - 600 = -564$

28. a) $\frac{10!}{9!} = \frac{10 \cdot 9!}{9!} = 10$

b) $\frac{6 \cdot 7!}{6!5} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 6!}{6!5} = \frac{6 \cdot 7}{5} = \frac{42}{5}$

c) $\frac{30!}{27!\,3!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27!}{27!\,3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{24\,360}{6} = 4\,060$

29. a) $\frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} = \frac{6-1}{6!} = \frac{5}{6 \cdot 5 \cdot 4!} = \frac{1}{6 \cdot 4!} = \frac{1}{6 \cdot 24} = \frac{1}{144}$

b) $\frac{10! + 9!}{9! - 8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8! + 9 \cdot 8!}{9 \cdot 8! - 8!} = \frac{(8! \cdot (10 \cdot 9 + 9)}{8! \cdot (9-1)} = \frac{(10 \cdot 9 + 9)}{(9-1)} = \frac{90+9}{8} = \frac{99}{8}$

30. a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n \cdot (n+1)$

b) $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n!}{n!} = (n+2) \cdot (n+1)$

31. a) Temos que $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. Assim:

$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1) \cdot n!} = \frac{(n+1) - 1}{(n+1) \cdot n!} = \frac{n}{(n+1) \cdot n!} = \frac{n}{(n+1)!}$

b) $\dfrac{(n+1)! - n!}{n! - (n-1)!} =$

$= \dfrac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)! - n \cdot (n-1)!}{n \cdot (n-1)! - (n-1)!} =$

$= \dfrac{(n-1)! \cdot \left[(n+1) \cdot n - n\right]}{(n-1)! \cdot \left[n - 1\right]} =$

$= \dfrac{(n^2+n) - n}{n-1} = \dfrac{n^2}{n-1}$

32. Resposta pessoal.

Exemplo de resolução errada:

Uma possibilidade de erro é não desenvolver o denominador como $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. Assim:

$\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1) - n}{n \cdot (n+1)!} = \dfrac{1}{n \cdot (n+1)!}$

Peça aos estudantes que troquem suas sugestões de erros. Alguns erros que forem intencionalmente mais frequentes podem ser discutidos e socializados.

33. São arranjos as atividades: 5, 17b, 18 e 20.

34. a) Com vogal, temos os anagramas que começam com as letras A, I ou O. Em cada um deles, podemos permutar as 4 letras restantes. Assim:

$3 \cdot P_4 = 3 \cdot 4! = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$

Portanto, existem 72 anagramas que começam com vogal.

b) As últimas letras serão IO; então, podemos permutar as 3 letras restantes (P, A, T). Assim:

$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Portanto, 6 anagramas terminam com as letras IO.

35. Temos que $A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, $p \leqslant n$. Assim:

a) $A_{10,\,2} + A_{5,\,2} = \dfrac{10!}{(10-2)!} + \dfrac{5!}{(5-2)!} =$

$= \dfrac{10!}{8!} + \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} +$

$+ \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 10 \cdot 9 + 5 \cdot 4 = 110$

b) $A_{4,\,3} \cdot A_{7,\,2} = \dfrac{4!}{(4-3)!} \cdot \dfrac{7!}{(7-2)!} =$

$= \dfrac{4!}{1!} \cdot \dfrac{7!}{5!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} \cdot \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} =$

$= 24 \cdot 42 = 1\,008$

36. Temos que $A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, $p \leqslant n$. Assim:

a) $\dfrac{A_{n,\,3}}{A_{n-1,\,2}} = \dfrac{\dfrac{n!}{(n-3)!}}{\dfrac{(n-1)!}{\left[(n-1)-2\right]!}} =$

$= \dfrac{\dfrac{n!}{(n-3)!}}{\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$

b) $\dfrac{A_{2n,\,2}}{A_{2n+1,\,2}} = \dfrac{\dfrac{(2n)!}{(2n-2)!}}{\dfrac{(2n+1)!}{\left[(2n+1)-2\right]!}} = \dfrac{\dfrac{(2n)!}{(2n-2)!}}{\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}} =$

$= \dfrac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)!}{(2n-2)!} \cdot$

$\cdot \dfrac{(2n-1)!}{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)!} =$

$= \dfrac{2n \cdot (2n-1)}{2n \cdot (2n+1)} = \dfrac{2n-1}{2n+1}$

37. Temos que $A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, $p \leqslant n$.

a) $A_{n,\,2} = 56$

Condição de existência: $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$

$A_{n,\,2} = 56 \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!} = 56 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{n \cdot (n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 56 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot (n-1) = 56 \Rightarrow n^2 - n - 56 = 0$

$\Delta = 225$

$n = \dfrac{1 \pm 15}{2}$ ⟶ $n_1 = \dfrac{16}{2} = 8$; $n_2 = \dfrac{-14}{2} = -7$ (não satisfaz a condição de existência)

Portanto, $n = 8$.

b) $A_{n,\,3} = 8 \cdot A_{n,\,2}$

Condição de existência: $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$.

$A_{n,\,3} = 8 \cdot A_{n,\,2} \Rightarrow \dfrac{n!}{(n-3)!} = 8 \cdot \dfrac{n!}{(n-2)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{(n-3)!} =$

$= 8 \cdot \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot (n-1) \cdot (n-2) = 8 \cdot n \cdot (n-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{n \cdot (n-1)} = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 2 = 8 \Rightarrow n = 10$

38. Para formar esses números com algarismos distintos, temos 10 elementos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

O número deve ter 5 algarismos distintos; então, os agrupamentos são formados por 5 algarismos.

Primeiro, vamos determinar quantos números são formados por 5 algarismos distintos. Assim:

$A_{10,\,5} = \dfrac{10!}{(10-5)!} = \dfrac{10!}{5!} =$

$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 30\,240$

Vamos determinar quantos números de 5 algarismos distintos começam com 0 e têm a forma $\boxed{0}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$. Nesse caso, como 0 está no primeiro algarismo, teremos 9 outros elementos distintos para formar agrupamentos de 4 elementos. Assim:

$A_{9,\,4} = \dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 3\,024$

A quantidade de números de 5 algarismos distintos será a diferença entre a quantidade de números formados por 5 algarismos distintos e a quantidade de números com 5 algarismos distintos que começam com 0. Assim:

$A_{10,\,5} - A_{9,\,4} = 30\,240 - 3\,024 = 27\,216$

Portanto, com 5 algarismos, podemos formar 27 216 números com algarismos distintos.

39. Os números maiores que 100 e menores que 1 000 têm 3 algarismos.

Para determinar quantos números com algarismos distintos existem entre 100 e 1 000, podemos calcular a quantidade de números formados por 3 algarismos distintos $(A_{10,\,3})$ e subtrair a quantidade de números com 3 algarismos distintos que começam com 0 $(A_{9,\,2})$, ou seja, que têm a forma $\boxed{0}\,\boxed{}\,\boxed{}$. Assim:

$A_{10,\,3} - A_{9,\,2} = \dfrac{10!}{(10-3)!} - \dfrac{9!}{(9-2)!} =$

$= \dfrac{10!}{7!} - \dfrac{9!}{7!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} - \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} =$

$= 720 - 72 = 648$

Portanto, existem 648 números com algarismos distintos entre 100 e 1 000.

40.
- Números com dois algarismos
  - ✓ Quantidade total de números:
    - casa da dezena: 9 opções (não podem começar com 0)
    - casa da unidade: 10 opções

    $9 \cdot 10 = 90$
  - ✓ Quantidade de números distintos:

    Para saber quantos números distintos de dois algarismos existem, podemos calcular $A_{10,\,2}$ e subtrair os números de dois algarismos que começam com 0 $(A_{9,\,1})$. Assim:

    $A_{10,\,2} - A_{9,\,1} = \dfrac{10!}{(10-2)!} - \dfrac{9!}{(9-1)!} =$

    $= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} - \dfrac{9 \cdot 8!}{8!} = 90 - 9 = 81$

Então, a quantidade de números repetidos de dois algarismos é: $90 - 81 = 9$.

- Números com três algarismos:
  - ✓ Quantidade total de números:
    - casa da centena: 9 opções (não podem começar com 0)
    - casa da dezena: 10 opções
    - casa da unidade: 10 opções

    $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$
  - ✓ Quantidade de números distintos:

    Para saber quantos números distintos de três algarismos existem, podemos calcular $A_{10,\,3}$ e subtrair os números de três algarismos que começam com 0 $(A_{9,\,2})$. Assim:

    $A_{10,\,3} - A_{9,\,2} = \dfrac{10!}{(10-3)!} - \dfrac{9!}{(9-2)!} =$

    $= \dfrac{10!}{7!} - \dfrac{9!}{7!} =$

    $= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} - \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} =$

    $= 720 - 72 = 648$

Então, a quantidade de números repetidos de três algarismos é: $900 - 648 = 252$.

Logo, a quantidade de números repetidos de dois e três algarismos será: $9 + 252 = 261$.

Portanto, existem 261 números com algarismos repetidos entre 10 e 1 000.

41. a) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

b) $\underset{1}{\underline{\text{T}}} \cdot \underset{4}{\underline{}} \cdot \underset{3}{\underline{}} \cdot \underset{2}{\underline{}} \cdot \underset{1}{\underline{}} = 1 \cdot 4! = 24$

c) A palavra VISTA pode terminar com as vogais (v) A ou I. Assim:

$\underset{4}{\underline{}} \cdot \underset{3}{\underline{}} \cdot \underset{2}{\underline{}} \cdot \underset{1}{\underline{}} \cdot \underset{2}{\underline{v}} = 4! \cdot 2 = 24 \cdot 2 = 48$

d) Como as letras IA devem permanecer juntas, elas funcionam como se fossem um único elemento. Podemos, então, permutar os elementos $\boxed{\text{IA}}$, V, S, T. Assim:

$P_4 = 4! = 24$

e) Cada bloco formado pelas vogais, $\boxed{\text{IA}}$ ou $\boxed{\text{AI}}$, é um elemento. E para cada bloco temos P_4 anagramas. Permutando ainda as vogais, teremos:

$P_2 \cdot P_4 = 2! \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$

42. Para a formação de senhas, temos 26 letras e 10 algarismos, ou seja, 36 caracteres disponíveis.

$36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = (36)^6$

As senhas devem ter ao menos 2 letras e 1 algarismo; então, devem ser excluídas as sequências que apresentam:

- 6 algarismos:

  $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = (10)^6$
- 6 letras: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = (26)^6$
- 1 letra somente. Observe que essa letra pode ocupar um dos 6 lugares; então, a quantidade de sequências que têm 1 letra é:

  $6 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 156 \cdot (10)^5$

Logo, o número de senhas válidas será:

$(36)^6 - (10)^6 - (26)^6 - 156 \cdot (10)^5 =$

$= 1\,851\,266\,560$

Portanto, podem ser criadas 1 851 266 560 senhas.

43. A quantidade máxima de senhas de 4 algarismos distintos entre as 10 escolhas possíveis é: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$.

A quantidade máxima de senhas de 5 algarismos quaisquer é: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$
$= 100\,000$.

Logo, a razão entre a nova quantidade e a anterior é, aproximadamente: $\dfrac{100\,000}{5\,040} \simeq 20$.

Alternativa **b**.

44. a) $A_{5,2} \cdot P_6 = \frac{5!}{(5-2)!} \cdot 6! = \frac{5!}{3!} \cdot 6! =$

$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} \cdot 6! = 20 \cdot 6! = 20 \cdot 720 = 14\,400$

Portanto, 14 400 anagramas começam e terminam com consoante.

b) $A_{3,1} \cdot P_6 \cdot A_{5,1} = \frac{3!}{2!} \cdot 6! \cdot \frac{5!}{4!} = 3 \cdot 6! \cdot 5 =$

$= 15 \cdot 6! = 15 \cdot 720 = 10\,800$

Portanto, 10 800 anagramas começam com vogal e terminam com consoante.

c) $P_3 \cdot P_6 = 3! \cdot 6! = 6 \cdot 720 = 4\,320$

Portanto, 4 320 anagramas mantêm as vogais juntas.

d) $P_4 = 4! = 24$

Portanto, 24 anagramas têm as letras CNRSV juntas e em ordem alfabética.

45. A quantidade de maneiras distintas de escolher um grupo de 4 letras entre 26, sendo que a ordem importa (as ordens distintas das mesmas letras configuram agrupamentos distintos) e um arranjo, tal que: $A_{26,4}$

Já para o caso dos algarismos, de maneira análoga, tem-se o arranjo: $A_{10,4}$

Logo, as possibilidades de etiquetas distintas são: $A_{26,4} \cdot A_{10,4}$

Alternativa **c**.

46. Temos 4 pessoas habilitadas para 3 motocicletas; então, para piloto, temos $A_{4,3}$ possibilidades. Assim:

$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$

Os demais lugares serão ocupados pelos 3 amigos restantes; portanto, temos 3 pessoas para 3 lugares, P_3 possibilidades. Assim:

$P_3 = 3! = 6$

Então, a quantidade de maneiras diferentes de dispor as pessoas será: $24 \cdot 6 = 144$.

Portanto, existem 144 maneiras distintas de dispor os amigos na motocicleta.

Alternativa **d**.

47. Resposta pessoal.

Os estudantes podem escolher diversas palavras com letras distintas e fazer uma atividade similar à questão **48**. Como sugestão:

Calcule o número de anagramas da palavra CADERNO que:

a) começam e terminam com vogal;

b) começam com vogal e terminam com consoante;

c) mantêm as consoantes juntas;

d) mantêm as vogais juntas e em ordem alfabética.

Resolução

a) $A_{3,2} \cdot P_5 = \frac{3!}{(3-2)!} \cdot 5! = \frac{3!}{1!} \cdot 5! =$

$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} \cdot 5! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$

Portanto, 720 anagramas começam e terminam com vogal.

b) $A_{3,1} \cdot P_5 \cdot A_{4,1} = \frac{3!}{2!} \cdot 5! \cdot \frac{4!}{3!} = 3 \cdot 5! \cdot 4 =$

$= 12 \cdot 5! = 12 \cdot 120 = 1\,440$

Portanto, 1 440 anagramas começam com vogal e terminam com consoante.

c) $P_4 \cdot P_4 = 4! \cdot 4! = 24 \cdot 24 = 576$

Portanto, 576 anagramas mantêm as consoantes juntas.

d) $P_5 = 5! = 120$

Portanto, 120 anagramas têm as letras AEO juntas e em ordem alfabética.

48. Podemos reformular o enunciado da seguinte forma: "No sistema decimal, quantos números de cinco algarismos distintos começam com o número 1?"

Resolução

Os números de cinco algarismos distintos que começam com o número 1 têm a forma: $\boxed{1}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$.

Como o primeiro algarismo é 1, temos 9 outros elementos para dispor nos 4 algarismos restantes; então, temos $A_{9,4}$ possibilidades. Assim:

$A_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 3\,024$

Portanto, há 3 024 números de cinco algarismos distintos que iniciam com o algarismo 1.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 253)

49. Temos que $C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$, $p \leqslant n$. Assim:

a) $C_{7,5} = \frac{7!}{5! \cdot (7-5)!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} =$

$= 21$

b) $2!C_{8,3} + 3!C_{7,4} = 2 \cdot \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} +$

$+ 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = 322$

c) $\frac{C_{10,3}}{C_{8,3} - C_{5,3}} =$

$= \frac{\frac{10!}{3! \cdot (10-3)!}}{\frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} - \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!}} = \frac{60}{23}$

50. a) $\frac{C_{n,3}}{C_{n-1,2}} = \frac{\frac{n!}{3!\,(n-3)!}}{\frac{(n-1)!}{2!\left[(n-1)-2\right]!}} = \frac{n}{3}$

b) $\frac{C_{2n+2,2}}{C_{2n,2}} = \frac{\frac{(2n+2)!}{2!\left[(2n+2)-2\right]!}}{\frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!}} =$

$= \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)}$

51. a) Ana errou na segunda linha, ao realizar a multiplicação entre os fatoriais $2! \cdot 4! \neq 8!$ e $3! \cdot 2! \neq 6!$.

A resolução correta é:

$\frac{6!}{2! \cdot 4!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 25$

b) Ana errou em três lugares.

1º lugar: na segunda linha, segunda igualdade, no desenvolvimento de 7! fazendo $7! = 7! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!$. O correto seria $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!$.

2º lugar: na terceira linha, primeira fração, ao simplificar 8 com 4!, $\frac{8}{4!} = \frac{8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$, que é diferente de $\frac{8}{4} = 2$.

3º lugar: na terceira linha, segunda fração, ao simplificar 6 com 3!, $\frac{6}{3!} = \frac{6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$, que é diferente de $\frac{6}{3} = 2$.

A resolução correta é:

$\frac{7!}{3! \cdot 4!} + \frac{8!}{4! \cdot 4!} - \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} +$

$+ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 35 +$

$+ 70 - 20 = 85$

52. $C_{10,3} = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} =$

$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$

Portanto, podem ser formados 120 grupos.

53. $C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 56$

Portanto, podemos formar 56 triângulos com vértices nesses pontos.

54. O total de combinações possíveis de retiradas das fichas é: $C_{10,3} = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} =$

$= \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$

Para calcular a quantidade de combinações cuja soma das fichas deve ser maior ou igual a 9, podemos calcular a quantidade de combinações cuja soma das fichas tem soma menor. Assim:

$1 + 2 + 3 = 6$ $1 + 2 + 5 = 8$

$1 + 2 + 4 = 7$ $1 + 3 + 4 = 8$

Então, precisamos excluir 4 combinações do total.

O número de modos de retirar as fichas será: $120 - 4 = 116$.

Portanto, existem 116 modos de retirar 3 fichas em que a soma seja maior que ou igual a 9.

55. A primeira opção é a constituição de uma comissão com 3 vereadores, dentre as 5 opções possíveis e 2 deputados, dentre os 4 possíveis. O total de comissões distintas formadas nesse caso é:

$C_{5,3} \cdot C_{4,2} = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2} =$

$= 10 \cdot 6 = 60$

A segunda opção é a constituição de uma comissão com 4 vereadores, dentre as 5 opções possíveis e 1 deputado, dentre os 4 possíveis. O total de comissões distintas formadas nesse caso é:

$C_{5,4} \cdot C_{4,1} = \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{4!}{1!3!} = \frac{5 \cdot 4!}{4!1} \cdot \frac{4 \cdot 3!}{3!1} =$

$= 5 \cdot 4 = 20$

A terceira opção é a constituição de uma comissão com 5 vereadores, dentre os 5 possíveis e nenhum deputado. Nesse caso, é evidente que só há uma maneira de fazer isso.

Logo, o total de comissões distintas formadas com pelo menos 3 vereadores é: $60 + 20 + 1 = 81$.

Alternativa **b**.

56. a) $8 \cdot 10 = 80$

b) $8 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 4800$

c) Categoria A, para conduzir motocicletas; e categoria B, para conduzir veículos automotores de quatro rodas, como carros. Para ter outras categorias como C, D, ou E, que permitem dirigir veículos maiores ou com cargas específicas, é necessário atender a requisitos adicionais, como experiência mínima e exames específicos.

57. a) $C_{11,3} - C_{7,3} - C_{4,3} =$

$= \frac{11!}{3!\,(11-3)!} - \frac{7!}{3!\,(7-3)!} - \frac{4!}{3!\,(4-3)!} =$

$= \frac{11!}{3!\,8!} - \frac{7!}{3!\,4!} - \frac{4!}{3!\,1!} =$

$= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8!} - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} - \frac{4 \cdot 3!}{1 \cdot 3!} =$

$= 165 - 35 - 4 = 126$

Portanto, podemos desenhar 126 triângulos com vértice nesses pontos.

b) $C_{7,2} \cdot C_{4,2} = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} \cdot \frac{4!}{2!\,(4-2)!} =$

$= \frac{7!}{2!\,5!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} =$

$= 21 \cdot 6 = 126$

Portanto, podemos desenhar 126 quadriláteros convexos com vértices nesses pontos.

58. $C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} + \frac{5!}{4!\,(5-4)!} +$

$+ \frac{5!}{5!\,(5-5)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} + \frac{5 \cdot 4!}{4! \cdot 1} + \frac{5!}{5!} =$

$= 10 + 5 + 1 = 16$

Tiago pensou no princípio multiplicativo, sua resolução está incorreta.

Rodrigo pensou em combinações, porém realizou o produto entre elas, o que está incorreto.

Sofia pensou na soma das combinações, sua resolução está correta.

59. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que não, porque Pedro contou duas vezes cada dupla.

Temos 5 homens e 5 mulheres. Para formar um par, teremos: $5 \cdot 5 = 25$.

Portanto, há apenas 25 modos de formar uma dupla para uma dança.

60. Temos 6 opções de filas com os rapazes nos extremos. Os demais lugares da fila serão ocupados pelas 6 pessoas restantes; então, temos P_6 possibilidades. Assim, a quantidade de modos que a fila poderá ser organizada será:

$6 \cdot P_6 = 6 \cdot 720 = 4\,320$.

Portanto, a fila poderá ser organizada de 4 320 modos para que os rapazes fiquem nos extremos.

61. Angélica está com a razão.

Temos 8 opções de números, e como vamos

dividi-los em 2 grupos, vamos combiná-los 4 a 4. Então, teremos:

$C_{8,4} \cdot C_{4,4} = \dfrac{8!}{4!\,(8-4)!} = 70$

Se colocarmos o número 1 no primeiro grupo, o número 8 estará no outro grupo, e o contrário também ocorrerá.

62. a) De acordo com o enunciado, se duas meninas saem da classe, o número de meninos é igual ao dobro do número de meninas; então: $y = 2(x - 2)$.

Sabemos que não há mais de 14 meninas na sala; então, $x \leqslant 14$.

Substituindo $x = 14$ em $y = 2(x - 2)$, obtemos:

$y = 2 \cdot (14 - 2) \Rightarrow y = 2 \cdot 12 = 24$

Então, $4 \leqslant x \leqslant 14$ e $4 \leqslant y \leqslant 24$.

Portanto, a expressão do número de meninos é $y = 2x - 4$ e o número máximo de meninos que pode haver na classe é 24.

b) De acordo com o enunciado, o número de comissões formadas por 3 meninas é igual ao número de comissões formadas por 2 meninos; então, $C_{x,3} = C_{y,2}$.

Substituindo $y = 2x - 4$, obtemos:

$C_{x,3} = C_{2x-4,2} \Rightarrow \dfrac{x!}{3!\,(x-3)!} =$

$= \dfrac{(2x-4)!}{2!\left[(2x-4)-2\right]!} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(2x-4)\cdot(2x-5)}{2 \cdot 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x = 12x - 30 \Rightarrow x^2 - 13x + 30 = 0$

$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta = 169 - 120 \Rightarrow \Delta = 49$

$x = \dfrac{13 \pm 7}{2}$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{13+7}{2} = \dfrac{20}{2} = 10 \\ x_2 = \dfrac{13-7}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$

(não satisfaz a condição $x \geqslant 4$)

Então, $x = 10$.

O número de alunos dessa classe será:

$x + y = x + (2x - 4) = 10 + (2 \cdot 10 - 4) =$
$= 10 + 16 = 26.$

Portanto, nessa classe há 26 alunos.

63. A razão entre o número de jogadores de basquete e de vôlei é: $\dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

Assim, a comissão com a menor quantidade de integrantes terá 3 jogadores de basquete e 2 de vôlei. Como para a formação da comissão a ordem de escolha não importa, utiliza-se a combinação simples:

$C_{12,3} \cdot C_{8,2} = \dfrac{12!}{9!3!} \cdot \dfrac{8!}{6!2!} = 6160$

Alternativa **d**.

64. Para formar triângulos em que cada vértice pertença a um lado distinto do quadrado, devem-se escolher três dos quatro lados disponíveis. Nesse caso, dos 4 lados, agrupados 3 a 3, tem-se um total de possibilidades igual a:

$C_{4,3} = \dfrac{4!}{3!1!} = \dfrac{4 \cdot 3!}{3!} = 4$

Para cada escolha dessas, em cada lado, há três opções de pontos. Escolhe-se um dentre três pontos de cada um dos três lados. Então, o total de triângulos é: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Logo, para cada conjunto de três lados há um total de 27 triângulos distintos. Como há 4 desses conjuntos, tem-se:

$4 \cdot 27 = 108$.

Alternativa **c**.

65. Sabemos que no tanque há o total de 15 peixes, e desses 40% são carpas. Então, a quantidade de carpas será:

$15 \cdot \dfrac{40}{100} = 15 \cdot 0{,}4 = 6.$

Então, no tanque há 6 carpas e 9 outros tipos de peixe.

Sabemos que o usuário pescou 10 peixes e precisamos determinar o número de maneiras distintas para ele pescar 4 carpas e 6 outros peixes distintos. Assim:

$C_{6,4} \cdot C_{9,6} = \dfrac{6!}{4!\,(6-4)!} \cdot \dfrac{9!}{6!\,(9-6)!} = 1\,260$

Portanto, o usuário pode pescar exatamente 4 carpas de 1 260 maneiras distintas.

Alternativa **e**.

66. Resposta pessoal.

Exemplo de problema:

Com 10 moças e 6 rapazes, quantos times de vôlei podemos formar, cada um deles contendo 3 moças e 3 rapazes?

Resolução

Possibilidades de escolher 3 das 10 moças: $C_{10,3}$

Possibilidades de escolher 3 dos 6 rapazes: $C_{6,3}$

$C_{10,3} \cdot C_{6,3} = \dfrac{10!}{3!\,(10-3)!} \cdot \dfrac{6!}{3!\,(6-3)!} = 2\,400$

Portanto, podemos formar 2 400 times.

TECNOLOGIA (P. 255)

1. a) $5! = 120$
b) $6! = 720$
c) $10! = 3\,628\,800$
d) $12! = 479\,001\,600$
e) $15! = 1\,307\,674\,368\,000$

2. a) $A_{8,3} \cdot P_4 = 8\,064$
b) $A_{10,2} - A_{9,1} = 81$
c) $5 \cdot C_{10,4} = 1\,050$

3. Podemos expressar as possibilidades como 10!, assim:

$10! = 3\,628\,800$

As músicas podem tocar em ordem diferentes por 3 628 800 dias.

Considerando que 1 ano tem 365 dias. Então, 3 628 800 dias correspondem a: $\dfrac{3\,628\,800}{365} \simeq$
$\simeq 9\,941{,}9$

A música pode tocar por 9 942 anos, que é aproximadamente 100 séculos.

Alternativa **e**.

4. $C_{60,6} = \dfrac{60!}{6!\,(60-6)!} = \dfrac{60!}{6! \cdot 54!} = 50\,063\,860$

Sabemos que o apostador faz dois jogos por semana. Então, seriam necessárias 25 031 930 semanas $\left(\dfrac{50\,063\,860}{2}\right)$ para que seu jogo fosse sorteado.

Sabendo que 1 ano tem 52 semanas, o apostador vai ganhar após $\dfrac{25\,031\,930}{52} \simeq$
$\simeq 481\,383$ anos.

Portanto, o apostador teria de esperar, aproximadamente, 481 mil anos.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 256)

1. a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
b) $2! \cdot 5! = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 240$
c) $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6! = 40\,320$
d) $2! \cdot 6! = 2 \cdot 6 \cdot 5! = 1\,440$
e) $2! \cdot 7! = 2 \cdot 7 \cdot 6! = 10\,080$
f) $\dfrac{5!}{2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60$
g) $\dfrac{6!}{2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 360$
h) $\dfrac{7!}{3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 840$
i) $\dfrac{13!}{12!} = \dfrac{13 \cdot 12!}{12!} = 13$

2. a) $\dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$
b) $\dfrac{6!}{4!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 30$
c) $\dfrac{7!}{5!\,2!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2} = 21$
d) $\dfrac{9!}{7!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 72$
e) $\dfrac{6!}{4!\,2!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} = 15$
f) $\dfrac{8!}{4!\,4!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$
g) $\dfrac{9!}{6!\,3!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3 \cdot 2} = 84$
h) $\dfrac{3!\,7!}{9!} = \dfrac{3!\,7!}{9 \cdot 8 \cdot 7!} = \dfrac{1}{12}$
i) $\dfrac{5!\,4!\,3!}{7!} = \dfrac{5!\,4!\,3!}{7 \cdot 6 \cdot 5!} = \dfrac{24}{7}$

PARA RECORDAR (P. 256)

1. a) $\dfrac{7}{10} = 0{,}7$
b) $\dfrac{5}{3} = 1{,}6666...$
c) $\dfrac{41}{25} = 1{,}64$
d) $\dfrac{7}{6} = 1{,}1666...$

2.
- para $n = 1$: $\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$
- para $n = 2$: $\dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$
- para $n = 3$: $\dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$
- para $n = 4$: $\dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}$
- para $n = 5$: $\dfrac{5}{5+1} = \dfrac{5}{6}$

A soma das frações será:

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{5}{6} = 3{,}55$

Portanto, a soma é 3,55.

Alternativa **b**.

3. $\dfrac{1}{3} + 5x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{30}$

A distância entre os pontos é $\dfrac{1}{30}$.

Precisamos determinar qual dos pontos representa a fração $\dfrac{2}{5}$. Temos que:

$A = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{30} = \dfrac{10+1}{30} = \dfrac{11}{30}$

$B = \dfrac{1}{3} + 2 \cdot \dfrac{1}{30} = \dfrac{10+2}{30} = \dfrac{12}{30} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

Portanto, o ponto B representa a fração $\dfrac{2}{5}$.

4. Vamos considerar:

x, a quantidade de infrações leves;

y, a quantidade de infrações graves;

p, a quantidade de infrações gravíssimas.

De acordo com o enunciado, a quantidade de infrações leves de um motorista é igual à quantidade de infrações graves ($x = y$), e a soma de todas as infrações totaliza 57 pontos. Podemos escrever a quantidade de pontos da seguinte forma: $4x + 5y + 7p = 57$. Substituindo $x = y$, obtemos:

$4x + 5x + 7p = 57 \Rightarrow 9x + 7p = 57 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = \dfrac{57 - 9x}{7}$

Queremos determinar o valor de p. Como ele se refere à quantidade de infrações, precisa ser um número natural.

Vamos atribuir alguns valores a x para determinar o valor de p:

- para $x = 1$, $p = \dfrac{57 - 9 \cdot 1}{7} = \dfrac{48}{7} \simeq 6{,}9$, não é natural.
- para $x = 2$, $p = \dfrac{57 - 9 \cdot 2}{7} = \dfrac{39}{7} \simeq 5{,}6$, não é natural.
- para $x = 3$, $p = \dfrac{57 - 9 \cdot 3}{7} = \dfrac{30}{7} \simeq 4{,}3$, não é natural.
- para $x = 4$, $p = \dfrac{57 - 9 \cdot 4}{7} = \dfrac{21}{7} = 3$, é natural.

Portanto, p é igual a 3.

Alternativa **c**.

5. Vamos considerar X o total de questões da prova e A o total de acertos do candidato. Do total de questões, o candidato acertou 18 de 20 e três quintos das restantes (X - 20).

$A = 18 + \left(X - 20\right) \cdot \dfrac{3}{5}$

Além disso, acertou dois terços da prova como um todo.

$A = \dfrac{2}{3} \cdot X$

Igualando as duas equações, tem-se:

$18 + (X - 20) \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{3} \cdot X \Rightarrow$

$\Rightarrow 18 + X \cdot \dfrac{3}{5} - 12 = \dfrac{2}{3} \cdot X \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 + X \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{3} \cdot X \Rightarrow 6 = \dfrac{2}{3} \cdot X - \dfrac{3}{5} \cdot X \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 = \dfrac{10 - 9}{15} \cdot X \Rightarrow 6 \cdot 15 = X \Rightarrow X = 90$

Para calcular o total de acertos, tem-se:
$A = \frac{2}{3}X = \frac{2}{3} \cdot 90 = 60$.
Alternativa **d**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 257)

1.
- Caso Emília tenha desenhado.
  Analisando as declarações, temos:
  Emília mentiu: "Não fui eu.".
  Luísa mentiu: "Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.".
  Como apenas uma neta mentiu, esse caso não pode ter ocorrido.
- Caso Luísa tenha desenhado.
  Analisando as declarações, temos:
  Luísa mentiu: "Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.".
  Rafaela mentiu: "Não foi a Luísa.".
  Como as duas mentiram, esse caso não pode ter ocorrido.
- Caso Marília tenha desenhado.
  Analisando as declarações:
  Vitória mentiu: "Luísa não está dizendo a verdade.".
  Como apenas Vitória mentiu, esse caso satisfaz a condição do enunciado e pode ter ocorrido.
- Caso Rafaela tenha desenhado.
  Analisando as declarações:
  Marília mentiu: "Não foi a Rafaela nem a Vitória.".
  Vitória mentiu: "Luísa não está dizendo a verdade.".
  Como as duas mentiram, esse caso não pode ter ocorrido.
- Caso Vitória tenha desenhado.
  Analisando as declarações:
  Luísa mentiu: "Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.".
  Marília mentiu: "Não foi a Rafaela nem a Vitória.".
  Como as duas mentiram, esse caso não pode ter ocorrido.
  Portanto, quem desenhou na parede da sala da Vovó Vera foi Marília.

Alternativa **c**.

2. Como o número de habitantes que não têm celulares é igual ao número de habitantes que têm dois celulares, é como se cada habitante tivesse um celular. Pensando dessa forma, todos passariam a ter um celular. Portanto, como o número de pessoas que moram na cidade é 4000, os habitantes de Juratambi têm 4000 celulares no total.

MATEMÁTICA E LEITURA DE MUNDO (P. 258)

Conectando ideias

1. Vamos identificar o marujo que rema como MR; o oficial que rema como OR; o outro marujo será representado por M; e o outro oficial, pela letra O.
Uma possibilidade de solução é:
1. No barco irem MR e OR (total de 120 kg). MR fica em terra firme e OR volta.
2. No barco seguem OR, O e T (total de 170 kg). Ficam em terra OR, O e T e MR, e volta OR.
3. No barco seguem OR e M (total de 160 kg). Todos chegam à terra firme e, em nenhum momento, dois marujos ou dois oficiais ficaram sozinhos com o tesouro.
Para resolver o desafio da balsa, vamos considerar L o lobo, C a cabra e R a cesta de repolho.
Uma estratégia seria:
1. Cruzar o rio com C e deixá-la do outro lado. L e R permanecem.
2. Cruzar novamente o rio (com a balsa vazia) para buscar R e levá-la para o outro lado (onde está C).
3. Ao deixar R do outro lado do rio, colocar na balsa C e deixá-la no lado em que está L.
4. Levar L para o outro lado do rio. L fica com R.
5. Retornar ao outro lado e levar C junto a L e R.
Discuta com a turma sobre o fato de essa resolução apresentar as possibilidades com a menor quantidade de movimentos. Se não fosse assim, seria possível afirmar que o problema apresenta infinitas maneiras de resolução.
Uma forma de ampliar o trabalho nessa atividade é acrescentar ou eliminar personagens e observar as possibilidades de resolução.

2. Os estudantes podem dar início à pesquisa buscando mais informações sobre o monge Alcuíno de York; depois, traçar uma linha do tempo com o desenvolvimento das áreas pesquisadas (análise combinatória, computação e tecnologia da informação), apresentando os principais momentos, as personagens, os motivos, entre outros fatores. Outra possibilidade é orientá-los a realizar uma pesquisa prévia sobre o assunto e compartilhar o que descobriram com a classe, a fim de ampliar seus conhecimentos. Cada grupo pode ficar responsável por um aspecto ou período destacado por eles.
Caso os estudantes pesquisem e tenham interesse em discutir elementos mais complexos da computação, como programação ou linguagem de programação, você pode explorar a ideia de construção de pseudocódigos, uma forma genérica de escrever um algoritmo; a resolução de problemas com fluxogramas; ou, ainda, a escrita de funções computacionais.

CAPÍTULO 11 PROBABILIDADE

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 262)

1. Considerando *C*: coroa e *K*: cara, todas as possibilidades de resultados das moedas são dadas por:
a) $S = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$
b) $A = \{(C, C), (K, K)\}$
c) $B = \{(C, K), (K, C)\}$

2. **a)** $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
b) $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
c) $B = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$
d) $C = \{(6, 6)\}$
e) $D = \varnothing$

3. **Aleatório:** que depende das circunstâncias, do acaso; casual; fortuito; contingente.
Aleatório: dependente de situações desconhecidas, incertas; ao acaso.

4. Respostas pessoais.
Sugestões:
a) Evento impossível
No lançamento de um dado, sair o número 0 ou um número maior que 6.
No sorteio da Mega-Sena, sair um número maior que 60.
b) Evento possível
Ao lançar um dado, obter um número menor do que 3.
No sorteio da Mega-Sena, sair um número maior que 15.
c) Evento pouco provável
Em uma urna com 9 bolas azuis e 1 bola vermelha, sair uma bola vermelha.
No lançamento de um dado, sair um número maior que 5.
d) Evento muito provável
No sorteio da Mega-Sena, sair um número maior que 1.
Em uma urna com 9 bolas azuis e 1 bola vermelha, sair uma bola azul.
e) Evento certo
No lançamento de um dado, sair um número menor que 7.
No sorteio da Mega-Sena, sair um número entre 0 e 60.

5. Respostas pessoais.
a) Supondo que a estação do ano seja verão: "É muito provável que amanhã faça sol".
Supondo que seja sexta-feira: "É muito provável que amanhã eu durma até mais tarde".
b) Supondo que seja segunda-feira: "É certo que amanhã eu terei aula, pois estamos no mês de agosto" ou "É certo que amanhã é terça-feira".
c) Considerando que farei uma apresentação na escola: "É pouco provável que amanhã eu falte" ou "É pouco provável que amanhã eu não fique ansioso".

6. Respostas pessoais. Sugestões:
"Encontrar um amigo no início de uma sessão de cinema, sem ter sido combinado, isso sempre ocorre por acaso."
"Chegar atrasado na rodoviária e perder o ônibus, isso sempre ocorre por acaso."

7. Respostas pessoais. Sugestão:
a) Para que seja muito provável sair uma bola azul, colocar: 198 bolas azuis, 1 bola vermelha e 1 bola verde.
b) Para que seja pouco provável sair uma bola azul, colocar: 1 bola azul, 99 bolas vermelhas e 100 bolas verdes.
c) Para que seja impossível sair uma bola azul, colocar: 100 bolas vermelhas e 100 bolas verdes.

8. **a)** Um acontecimento muito provável: Retirar uma moeda de R$ 0,50.
b) Um acontecimento pouco provável: Retirar uma moeda de R$ 0,10.

9. Resposta pessoal.
Sugestões de eventos:
A: estudantes que trouxeram o material escolar (evento muito provável).
B: estudantes que usam uniforme (evento certo).
C: estudantes que obtiveram nota superior a 10 em uma avaliação (evento impossível).
D: estudantes que ficam o tempo todo concentrados na aula de Matemática (evento pouco provável).

10. **a)** Número de elementos: 52.
b) Evento não simples: Retirar 3 cartas do mesmo naipe e em sequência.
c) Evento simples: Retirar o rei de espadas.

11. Considerando um baralho com 52 cartas, temos:
a) Falsa. Nesse caso, o espaço amostral compreende cada uma das 52 cartas do baralho.
b) Falsa. Não é um evento simples, pois existem 12 figuras (valetes, damas, reis) no espaço amostral.
c) Verdadeira.
d) Falsa. O evento certo é sair uma das 52 cartas de um baralho normal.
e) Falsa. Retirar uma carta de copas é um evento com 13 elementos no conjunto.

12. Resposta pessoal. Sugestão:
Em um baralho com dez cartas numeradas de 1 a 10, retira-se uma carta aleatoriamente.
a) Qual é o espaço amostral e o número de elementos?
b) Indique um evento não simples.
c) Indique um evento simples.
Resolução
a) Nesse baralho, temos o espaço amostral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
Número de elementos: 10.
b) Evento não simples: Sair 4 cartas com números em sequência.
c) Evento simples: Sair o número 2.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 266)

13. **a)** Na atividade **2**, vimos que o espaço amostral *S* tem 36 elementos.
No lançamento de dois dados, sendo o evento *A* "soma das faces maior ou igual a 5", temos o espaço amostral: $A = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4),$

(4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}.
O espaço amostral de A tem 30 elementos. Assim:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \simeq 0{,}83 = 83\%$

Portanto, a probabilidade de sair soma maior que ou igual a 5 é aproximadamente 83%.

b) Para o evento B, soma igual a 3, temos o espaço amostral: $B = \{(1, 2), (2, 1)\}$ e $n(B) = 2$. A probabilidade será:

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \simeq 0{,}056 = 5{,}6\%$

Portanto, a probabilidade de sair soma igual a 3 é aproximadamente 5,6%.

c) Como os dois dados devem ser lançados e o menor valor que pode sair é 1, a menor soma é 2, então, não existe a possibilidade de sair soma igual a 1.
Portanto, a probabilidade de sair soma 12 é maior.

d) Como o maior valor em cada dado é 6, a maior soma possível é 12.
Portanto, o evento de soma igual a 13 é impossível, e a probabilidade é zero.

14. Há 52 cartas no baralho, sendo que delas 4 são reis (1 de copas, 1 de espadas, 1 de paus e 1 de ouros).

$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \simeq 0{,}077$

Portanto, a probabilidade de sair um rei é aproximadamente 7,7%.

15. Algumas respostas possíveis.

a) Sair um número par; sair um número ímpar.

b) Sair número maior que 4; sair número menor que 3.

c) Para que ocorra a probabilidade de 25% é necessário que um evento possua $\frac{3}{2}$ elementos, o que é impossível de ocorrer.

$\frac{\frac{3}{2}}{6} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$

No lançamento de um dado, isso é impossível, pois não existe evento com $\frac{3}{2}$ elementos.

d) Sair número menor que 7; sair número maior do que 0.

e) Sair número menor que 6; sair número maior que 1.

16. Selecionando dois números diferentes, temos o espaço amostral $S = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$ e $n(S) = 15$.
Seja o evento A "soma de dois números maior que ou igual ao produto", $A = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$ e $n(A) = 9$.
Então, a probabilidade de que a soma seja maior que ou igual ao produto será:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$

Portanto, a probabilidade é 60%.

17. $1 + 3 + 2 + 5 + 6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 29$
Então, $n(S) = 29$.
Seja o evento A "obter nota superior a 6", a quantidade total de estudantes que obteve nota superior a 6 é:
$3 + 2 + 2 + 1 = 8$
Então, $n(A) = 8$.
A probabilidade será:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{29} = 0{,}276 = 27{,}6\%$

18. Considerando C: cara e K: coroa.
Lançando as duas moedas, temos o espaço amostral: $S = \{(C, C), (K, K), (C, K), (K, C)\}$ e $n(S) = 4$.
Sendo o evento A "João ser sorteado", $A = \{(C, K), (K, C)\}$ e $n(A) = 2$.
Assim, a probabilidade de João ser sorteado será:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$

Alternativa **e**.

19. Luís errou a resolução porque desconsiderou um dos elementos do espaço amostral, (C, K).
Desse modo, o espaço amostral e a probabilidade de João lavar a louça será: $S = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$.
Daí:

$P = \frac{2}{4} = 0{,}5 = 50\%$

Isso corresponde à alternativa **e** da atividade anterior.

20. Número nas faces gravadas:

- face 1: 1, 5, 9
- face 2: 2, 6, 10
- face 3: 3, 7, 11
- face 4: 4, 8, 12
- face 5: em branco
- face 6: em branco

A soma máxima acontece apenas em uma face (face 4).
Lançando aleatoriamente o dado, a probabilidade de que a face sorteada seja a 4 é $P(A) = \frac{1}{6}$.
Alternativa **a**.

21. $1 \cdot 200 + 2 \cdot 150 + 3 \cdot 100 = 800$
Desses 800 cartões, 300 têm nomes de alunos do terceiro ano. Dessa maneira, a probabilidade de ser vencedor um aluno do terceiro ano é: $\frac{300}{800} = \frac{3}{8}$.
Alternativa **e**.

22.

Antes	Depois	Diferença
Ana: $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $P(A) = \frac{5}{6}$	$A = \{2, 6\}$; $P(A) = \frac{2}{6}$	$\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$
Bruna: $B = \{2, 3, 5, 6\}$; $P(B) = \frac{4}{6}$	$B = \{5\}$; $P(B) = \frac{1}{6}$	$\frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$
Carlos: $C = \{1, 4\}$; $P(C) = \frac{2}{6}$	$C = \{1\}$; $P(C) = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
Diego: $D = \{1, 3, 4, 5, 6\}$; $P(D) = \frac{5}{6}$	$D = \{4\}$; $P(D) = \frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$
Érica: $E = \{1, 2, 3, 5, 6\}$; $P(E) = \frac{5}{6}$	$E = \{2, 3\}$; $P(E) = \frac{2}{6}$	$\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$

Em decorrência da troca, o jogador que terá maior redução nas suas chances de acertar o resultado será Diego.
Alternativa **d**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 268)

23. $6 + 5 + 4 = 15$
Então, $n(S) = 15$.
Seja o evento A "sair bola verde", $n(A) = 6$.
Logo, a probabilidade de sair uma bola verde é:

$P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$

O evento "sair uma bola diferente de verde", que inclui as bolas azuis e pretas, será:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$

24. Seja o evento A "aparecerem faces iguais", temos:
$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ e $n(A) = 6$
Logo, a probabilidade de saírem faces iguais é:

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \simeq 0{,}17 = 17\%$

A probabilidade do evento "saírem faces diferentes" será:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \simeq 0{,}83 = 83\%$

25. $P_4 = 4! = 24$
Então, o espaço amostral tem 24 elementos.
Seja o evento A "sair a palavra SOPA", a probabilidade será:

$P(A) = \frac{1}{24} \simeq 0{,}04 = 4\%$

A probabilidade de sair um anagrama diferente da palavra SOPA será:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24} \simeq 0{,}96 = 96\%$

26. $C_{52,\,3} = \frac{52!}{3!\,(52 - 3)!} = \frac{52!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 49!} =$

$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 49!} = \frac{132\,600}{6} = 22\,100$

No baralho existem 4 ases, então 48 cartas $(52 - 4 = 48)$ não são ases. Seja o evento A "sair nenhum ás", o número de elementos do espaço amostral será:

$C_{48,\,3} = \frac{48!}{3!\,(48 - 3)!} = \frac{48!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 45!} =$

$= \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 45!} = \frac{103\,776}{6} = 17\,296$

Então, a probabilidade de sair nenhum ás será:

$P(A) = \frac{C_{48,3}}{C_{52,3}} = \frac{17\,296}{22\,100} \simeq 0{,}78 = 78\%$

Logo, a probabilidade de sair pelo menos um ás será:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{17\,296}{22\,100} = \frac{4\,804}{22\,100} \simeq$

$\simeq 0{,}22 = 22\%$

27. Em um universo de dois participantes, tem-se a seguinte quantidade possível de combinações: $3 \cdot 3 = 9$.
Ou seja, cada possibilidade das três de um jogador está associada a possíveis três possibilidades de outro jogador.
Dessas 9 possibilidades, as que configuram empate são: pedra e pedra, tesoura e tesoura e papel e papel. Logo, 3 possibilidades.
Assim, tem-se que a probabilidade de haver vencedor é de 6 em 9: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
Em três partidas seguidas, uma vez que se trata de eventos independentes, a probabilidade de haver vencedores nas três é: $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.
Usando a ideia de eventos complementares, pode-se dizer que a probabilidade de haver pelo menos 1 empate nas três partidas é um evento complementar à probabilidade de não haver empates nas três partidas, isto é, a soma das probabilidades desses eventos é igual 1.
Logo, a probabilidade de haver pelo menos 1 empate nas três partidas será:

$1 - \frac{8}{27} = \frac{27}{27} - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$.

Alternativa **d**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 271)

28. No lançamento de um dado, temos $n(S) = 6$.
Seja o evento A "obter número par", $n(A) = 3$. A probabilidade de o evento A ocorrer será:

$P(A) = \frac{3}{6}$.

Seja o evento B "obter número menor que 3", $n(B) = 2$. A probabilidade de o evento B ocorrer será:

$P(B) = \frac{2}{6}$.

A intersecção entre o evento A e o evento B será: $A \cap B = \{2\}$ e $n(A \cap B) = 1$. A probabilidade de o evento $A \cap B$ ocorrer será:

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Logo, a probabilidade de se obter face par ou face de número menor que 3 será:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \simeq 0{,}67 = 67\%$

29. Na coleção, o número de elementos do espaço amostral é 20 $(8 + 5 + 7 = 20)$.
Seja o evento F "sortear um livro de Física";

então $n(F) = 5$. A probabilidade de ocorrer o evento F será: $P(F) = \frac{5}{20}$.

Seja o evento Q "sortear um livro de Química"; então $n(Q) = 7$. A probabilidade de ocorrer o evento Q será: $P(Q) = \frac{7}{20}$.

Logo, a probabilidade de sortear um livro de Química ou de Física será:

$P(F \cup Q) = \frac{5}{20} + \frac{7}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$

30. **a)** No lançamento de dois dados, o espaço amostral tem 36 elementos.

Seja o evento A "obter soma 8". Então $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ e $n(A) = 5$. Portanto, a probabilidade de o evento A ocorrer será:

$P(A) = \frac{5}{36}$.

Seja o evento B "obter soma 11". Então $B = \{(5, 6), (6, 5)\}$ e $n(B) = 2$. Portanto, a probabilidade do o evento B ocorrer será:

$P(B) = \frac{2}{36}$.

Analisando, temos que $A \cap B = \varnothing$, então A e B são eventos mutuamente exclusivos.

Logo, a probabilidade de se obter soma 8 ou 11 será:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{36} + \frac{2}{36} =$

$= \frac{7}{36} \simeq 0{,}19 = 19\%$

b) A soma dos valores de dois dados é sempre par ou ímpar. Logo, o evento coincide com o espaço amostral e a probabilidade é igual a 1 ou 100%. No entanto, podemos aplicar as fórmulas apenas para conferir. Observe.

Seja o evento A "obter soma par"; $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$ e $n(A) = 18$.

A probabilidade de ocorrer o evento A será:

$P(A) = \frac{18}{36}$.

Seja o evento B "obter soma ímpar"; $B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$ e $n(B) = 18$.

A probabilidade de ocorrer o evento B será:

$P(B) = \frac{18}{36}$.

Analisando, temos que $A \cap B = \varnothing$, então A e B são eventos mutuamente exclusivos.

Portanto, a probabilidade de se obter soma par ou ímpar será:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) =$

$= \frac{18}{36} + \frac{18}{36} = \frac{36}{36} = 1 = 100\%$

Logo, a probabilidade de a soma dos dados ser par ou ímpar é 100%. Ou seja, todas as somas serão pares ou ímpares.

31. O espaço amostral tem 52 elementos.

Um baralho tem 13 cartas de ouros. Assim, seja o evento A "sair uma carta de ouros", $n(A) = 13$. A probabilidade será:

$P(A) = \frac{13}{52}$.

Um baralho tem 4 valetes (1 de copas, 1 de espada, 1 de paus e 1 de ouros). Assim, seja o evento B "sair um valete", $n(B) = 4$. A probabilidade de ocorrer o evento B será:

$P(B) = \frac{4}{52}$.

A intersecção entre o evento A e o evento B tem 1 valete de ouros, então $n(A \cap B) = 1$. A probabilidade de ocorrer um valete será:

$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$.

Então, a probabilidade de sair uma carta de ouros ou um valete será:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{13}{52} +$

$+ \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{13 + 4 - 1}{52} = \frac{16}{52} =$

$= \frac{4}{13} \simeq 0{,}31 = 31\%$.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 273)

32. Seja o evento B: "face diferente de 6". Temos que $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $n(B) = 5$.

Seja o evento A: "face com número divisível por 2". Então $A = \{2, 4, 6\}$. Assim:

$A \cap B = \{2, 4\}$ e $n(A \cap B) = 2$

Então, a probabilidade será:

$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$

33. Organizando os dados em um quadro, temos:

	História	Letras	Pedagogia	Total
Homens	10	10	30	50
Mulheres	20	20	10	50
Total	30	30	40	100

a) Seja o evento B: "estudante do sexo masculino", então $n(B) = 50$.

Seja o evento A: "estudante de Letras", então $n(A) = 30$.

No curso de Letras temos 10 homens, então $n(A \cap B) = 10$.

A probabilidade será:

$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{10}{50} = 0{,}2 = 20\%$

Portanto, sorteando ao acaso um estudante do sexo masculino, a probabilidade de ele cursar Letras é 20%.

b) Seja o evento B: "estudante do sexo feminino", então $n(B) = 50$.

Seja o evento A: "estudante de História", então $n(A) = 30$.

No curso de História temos 20 mulheres, então $n(A \cap B) = 20$.

A probabilidade será:

$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$

Portanto, sorteando ao acaso uma estudante do sexo feminino, a probabilidade de ela cursar História é 40%.

c) Seja o evento B: "estudante de História", então $n(B) = 30$.

Seja o evento A: "estudante do sexo feminino", então $n(A) = 50$.

Dos estudantes que cursam História, 20 são mulheres, então $n(A \cap B) = 20$.

A probabilidade será:

$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \simeq 0{,}67 = 67\%$.

Portanto, sorteando ao acaso um estudante do curso de História, a probabilidade de que seja do sexo feminino é aproximadamente 67%.

34. Sejam p a quantidade de meninas que compõem o público-alvo deste município e x a porcentagem deste público-alvo a ser vacinada.

A quantidade de meninas que podem desenvolver a doença deve ser, no máximo, 5,9% da população, ou seja, $5{,}9\% \cdot p$. Sabemos que o HPV afeta 50% das pessoas não vacinadas. Além disso, precisamos considerar os 2% de ineficácia da vacina e a quantidade de pessoas que não tomarão a vacina $(1 - x)$.

Portanto, a quantidade de meninas que podem desenvolver a doença é:

$50\% \cdot 2\% \cdot x \cdot p + 50\% \cdot (1 - x) \cdot p = 5{,}9\% \cdot p \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}50 \cdot (0{,}02x + 1 - x) = 0{,}059 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 098x = \frac{0{,}059}{0{,}50} \Rightarrow x = \frac{0{,}882}{0{,}98} \Rightarrow x = 90\%$

Alternativa **a**.

35. Vamos analisar as afirmações.

1. Observando o quadro, temos que 0,20 das pessoas têm pressão alta. Portanto, a afirmação 1 é verdadeira.

2. Seja o evento B: "pessoas com excesso de peso", então $n(B) = 0{,}25$.

Seja o evento A: "pessoas com pressão alta", então $n(A) = 0{,}20$.

De acordo com o quadro, das pessoas que têm pressão alta, 0,10 têm excesso de peso, então $n(A \cap B) = 0{,}10$.

A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter excesso de peso e pressão alta será: $P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{0{,}10}{0{,}25} = 0{,}4$.

Portanto, a afirmação 2 é verdadeira.

3. Seja o evento B: "pessoas com pressão alta", então $n(B) = 0{,}20$.

Seja o evento A: "pessoas com peso normal", então $n(A) = 0{,}53$.

De acordo com o quadro, temos que, das pessoas que têm peso normal, 0,08 têm pressão alta, então $n(A \cap B) = 0{,}08$.

A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter pressão alta e peso normal será:

$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{0{,}08}{0{,}20} = 0{,}4$

Portanto, a afirmação 3 é falsa.

4. A probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso nesse grupo ter pressão normal e peso deficiente é 0,20.

Analisando a linha Normal do quadro, na coluna Deficiente, temos que a probabilidade de uma pessoa ter pressão normal e peso deficiente é 0,20. Logo, a afirmação 4 é verdadeira.

Portanto, estão corretas as afirmações apresentadas em: 1, 2 e 4.

Alternativa **b**.

36. O erro está na identificação do número de elementos do espaço amostral dos estudantes que jogam futebol e daqueles que jogam basquete. Seja X o evento correspondente a "o estudante jogar futebol" e Y o evento correspondente a "o estudante jogar basquete", então $n(X) = 20$ e $n(Y) = 23$ e $n(X \cap Y) = 8$.

a) A probabilidade de um estudante que pratica futebol ser praticante de basquete é dada por:

$P(X \mid Y) = \frac{n(X \cap Y)}{n(Y)} = \frac{8}{23} \simeq 0{,}35 = 35\%$

b) A probabilidade de um estudante que pratica basquete ser praticante de futebol é dada por:

$P(Y \mid X) = \frac{n(X \cap Y)}{n(X)} = \frac{8}{20} = 0{,}4 = 40\%$

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 275)

37. Seja o evento A "o Serviço Meteorológico acertar", temos do enunciado que eles acertam em média 4 vezes em cada 5, então a probabilidade será: $P(A) = \frac{4}{5}$.

Seja o evento B "o serviço privado de análise meteorológica acertar", temos do enunciado que eles acertam 3 vezes em cada 4, então a probabilidade será: $P(B) = \frac{3}{4}$.

Não haverá chuva no domingo se A ou B acontecerem, então a probabilidade de não chover no domingo é:

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= P(A) + P(B) - \left[P(A) \cdot P(B)\right] =$

$= \frac{4}{5} + \frac{3}{4} - \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{19}{20} = 0{,}95 = 95\%$

Portanto, considerando o ponto de vista meteorológico, a probabilidade de que não chova no domingo é 95%.

38. Urna A: tem 3 bolas brancas e 2 azuis. Portanto, a probabilidade de sair uma bola branca será:

$P(A) = \frac{3}{5}$.

Urna B: tem 4 bolas vermelhas e 5 pretas. Então, a probabilidade de sair uma bola preta será: $P(B) = \frac{5}{9}$.

Logo, a probabilidade de sair uma bola branca e uma bola preta será:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) =$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} \simeq 0{,}33 = 33\%$

39. Temos, no primeiro dado, o evento A "sair face 5", $A = \{5\}$ e $n(A) = 1$. A probabilidade será: $P(A) = \frac{1}{6}$.

Temos, no segundo dado, o evento B "sair face par", $B = \{2, 4, 6\}$ e $n(B) = 3$. A probabilidade será: $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Os eventos são independentes, e a probabilidade de se obter uma face 5 e uma face par será:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) =$

$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \simeq 0{,}08 = 8\%$

40. Seja o evento A "homens que vivem mais de 80 anos". De acordo com o enunciado, temos: $P(A) = \frac{36}{100}$.

Seja o evento B: "mulheres que vivem mais de 80 anos". De acordo com o enunciado, temos: $P(B) = \frac{40}{100}$.

a) $P = P(A) \cdot P(A) \cdot P(B) \cdot P(B) =$

$= \frac{36}{100} \cdot \frac{36}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} =$

$= \frac{2\,073\,600}{100\,000\,000} \simeq 0{,}021 = 2{,}1\%$

b) A probabilidade de que um dos avôs ou avós não vivam é igual à probabilidade do conjunto complementar de A ou de B.

Precisamos calcular a probabilidade de uma das avós não viver até os 80 anos e os outros três viverem e a probabilidade de um dos avôs não viver até 80 anos e os outros três viverem. E isso para os dois casais de avós. Então, a probabilidade será dada por:

$P = P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(B) \cdot$

$\cdot P(\overline{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(A) \cdot P(B) +$

$+ P(A) \cdot P(B) \cdot P(A) \cdot P(\overline{B}) =$

$= 2 \cdot \left(\frac{64}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{36}{100} \cdot \frac{40}{100}\right) +$

$+ 2 \cdot \left(\frac{36}{100} \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{36}{100} \cdot \frac{40}{100}\right) =$

$= 2 \cdot \left(\frac{3\,686\,400}{100\,000\,000} + \frac{3\,110\,400}{100\,000\,000}\right) =$

$= 2 \cdot \frac{6\,796\,800}{100\,000\,000} \simeq 2 \cdot 0{,}068 = 0{,}136 =$

$= 13{,}6\%$

c) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{36}{100} \cdot \frac{40}{100} =$

$= \frac{1\,440}{10\,000} = 0{,}144 = 14{,}4\%$

d) A probabilidade de que os avós não cheguem aos 80 anos é igual à probabilidade do conjunto complementar de A e B, então:

$P = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{B}) =$

$= \left[1 - P(A)\right] \cdot \left[1 - P(A)\right] \cdot \left[1 - P(B)\right] \cdot$

$\cdot \left[1 - P(B)\right] = \left(1 - \frac{36}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{36}{100}\right) \cdot$

$\cdot \left(1 - \frac{40}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{40}{100}\right) =$

$= \frac{14\,745\,600}{100\,000\,000} \simeq 0{,}147 = 14{,}7\%$

e) A probabilidade de pelo menos um dos avós viver até os 80 anos será igual a 1 menos a probabilidade de os avós não viverem. Assim: $1 - 0{,}147 = 0{,}853 = 85{,}3\%$.

f) As respostas dos itens anteriores não totalizam 1,00 porque os eventos descritos em **a**, **b** e **c** não são independentes.

41. Como todos os eventos são independentes, para o time 1 chegar à final, a probabilidade é: $0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$.

Já no caso dos times 5 ou 7 chegarem à final, há três possibilidades:

1ª possibilidade: o time 5 vence e o time 8 vence e no grupo F, o time 5 vence:

$0{,}5 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}5 = 0{,}1375$.

2ª possibilidade: o time 5 vence e o time 7 vence e no grupo F, tanto faz quem ganhe, pois tanto 5 ou 7 são esperados na final: $0{,}5 \cdot 0{,}45 \cdot 1 = 0{,}2250$.

3ª possibilidade: o time 6 vence e o time 7 vence e no grupo F, o time 7 vence:

$0{,}5 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}5 = 0{,}1125$.

Como a 1ª ou a 2ª ou a 3ª possibilidades podem ocorrer, a probabilidade de a final ocorrer com os times 5 ou 7 é:

$0{,}1375 + 0{,}2250 + 0{,}1125 = 0{,}475$.

Logo, a probabilidade de o time 1 e os times 5 ou o 7 disputarem a final é:

$0{,}3 \cdot 0{,}475 = 0{,}1425 = 14{,}25\%$.

Alternativa **b**.

PROBLEMAS E EXERCÍCIOS PROPOSTOS (P. 278)

42. a) Não. Porque a amostra representa apenas uma pequena parcela da população (1 000 pessoas de uma população de 100 000 habitantes). Ela dá uma ideia aproximada do número de pessoas com cada tipo sanguíneo, mas em 100 mil habitantes a relação pode ser diferente.

b) Vamos analisar cada afirmação.

- A probabilidade de ter sangue do tipo A é aproximadamente 30%. Sabemos que a análise foi feita com 1 000 pessoas; então, $n(S) = 1\,000$. Seja o evento A sangue do tipo A, temos que 350 pessoas têm esse tipo sanguíneo; então, $n(A) = 350$. A probabilidade de o sangue ser do tipo A será:

$P(A) = \frac{350}{1\,000} = 0{,}35 = 35\%$.

Logo, a afirmação é falsa.

- A probabilidade de ter sangue do tipo A é 35%.

  A afirmação é verdadeira, pois, de acordo com o item anterior, a probabilidade de uma pessoa ter sangue do tipo A é 35%.

- A probabilidade de ter sangue AB é cerca de 2%.

  Sabemos que a análise foi feita com 1 000 pessoas; então, $n(S) = 1\,000$.

  Seja o evento B sangue do tipo AB, temos que 22 pessoas têm esse tipo sanguíneo; então, $n(B) = 22$. A probabilidade de o sangue ser do tipo AB será:

  $P(B) = \frac{22}{1\,000} = 0{,}022 = 2{,}2\%$.

  Logo, a afirmação é verdadeira.

- A probabilidade de não ter sangue do tipo O é 51,2%.

  Sabemos que a análise foi feita com 1 000 pessoas; então, $n(S) = 1\,000$.

  Sendo o evento A sangue do tipo O, temos que 512 pessoas têm esse tipo sanguíneo; então, $n(A) = 512$.

  A probabilidade de o sangue ser do tipo O será:

  $P(A) = \frac{512}{1\,000} = 0{,}512 = 51{,}2\%$.

  E a probabilidade de o sangue não ser do tipo O será:

  $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}512 = 0{,}488 =$

  $= 48{,}8\%$.

  Portanto, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não ter sangue do tipo O é 48,8%.

  Logo, a afirmação é falsa.

43. a) O espaço amostral é formado pela quantidade de códigos possíveis. Para cada uma das rodas da fechadura, temos 17 opções de letras; então, a quantidade de elementos (códigos) no espaço amostral será:

$17 \cdot 17 \cdot 17 = 17^3 = 4913$.

b) De acordo com o enunciado, as letras da primeira e da última roda são vogais diferentes, e a letra da segunda roda é uma consoante. Assim, a senha será do tipo $\boxed{V}\,\boxed{C}\,\boxed{V}$.

Seja o evento A "segredos possíveis", temos que, de 4 vogais, a senha tem 2 vogais distintas e 1 das 13 consoantes. Assim, a quantidade de elementos do evento A será:

$n(A) = 13 \cdot A_{4,2} = 13 \cdot \frac{4!}{(4-2)!} = 13 \cdot \frac{4!}{2!} =$

$= 13 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 13 \cdot 12 = 156$

c) A probabilidade de uma pessoa acertar o segredo na primeira tentativa será:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{156}{4913} \simeq 0{,}032 = 3{,}2\%$.

44. a) Temos 10 meninas e 6 meninos para serem organizados nos grupos.

Seja o evento A as possibilidades do grupo A, temos, com base no enunciado, que esse grupo tem 4 meninas; então, o número de elementos de A será:

$n(A) = C_{10,\,4} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10!}{4!\,6!} =$

$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6!} = \frac{5\,040}{24} = 210$

Então, há 210 maneiras de organizar as meninas no grupo A e $n(A) = 210$.

Seja o evento B as possibilidades do grupo B, temos, com base no enunciado, que esse grupo tem 4 meninos; então, o número de elementos de B será:

$n(B) = C_{6,\,4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6!}{4!\,2!} =$

$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 2!} = \frac{30}{2} = 15$

Então, há 15 maneiras de organizar os meninos no grupo B e $n(B) = 15$.

Seja o evento C as possibilidades do grupo C, temos, com base no enunciado, que esse grupo tem 4 meninas; além disso, outras 4 meninas já foram organizadas no grupo A; então, o número de elementos de C será:

$n(C) = C_{6,\,4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6!}{4!\,2!} =$

$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 2!} = \frac{30}{2} = 15$

Então, há 15 maneiras de organizar as meninas no grupo C e $n(C) = 15$.

No grupo D, ficarão as 2 meninas e os 2 meninos que restarem.

Seja D as possibilidades do grupo D, a quantidade de elementos de D será:

$n(D) = C_{4,\,4} = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} = \frac{4!}{4! \cdot 1} = 1$

Então, temos apenas uma maneira de organizar o grupo D, que, como dito anteriormente, será formado pelas 4 crianças que restarem.

Logo, a quantidade de maneiras distintas de organizar os grupos será:

$n(A) \cdot n(B) \cdot n(C) \cdot n(D) = 210 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 1 =$

$= 47\,250$.

b) Seja o evento A "um menino ganhar o torneio", temos, com base no enunciado, que:

$P(A) = \frac{3}{5}$.

Para o evento "uma menina ganhar o torneio", a probabilidade será:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Porém, uma menina será a vencedora do torneio nos seguintes casos:

1º caso: final entre Marta e Maria. Então, a probabilidade será:

$P = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

2º caso: final entre Maria e José e Maria vencer. Então, a probabilidade será:

$P = P(\overline{A}) \cdot P(A) \cdot P(\overline{A}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{125}$

3º caso: final entre Marta e João e Marta vencer. Então, a probabilidade será:

$P = P(\overline{A}) \cdot P(A) \cdot P(\overline{A}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{125}$

Assim, a probabilidade de uma menina vencer o torneio será:

$\frac{4}{25} + \frac{12}{125} + \frac{12}{125} = \frac{44}{125} = 0{,}352 =$

$= 35{,}2\%$

45. a)
- Quina

  Para um apostador ganhar a quina, será necessário que, das 6 dezenas apostadas, 5 dezenas sejam sorteadas e a outra dezena não sorteada esteja entre as 54 dezenas restantes.

Seja o evento A as possibilidades para a quina, temos:

$n(A) = C_{6,5} \cdot C_{54,1} =$

$= \dfrac{6!}{5!(6-5)!} \cdot \dfrac{54!}{1!(54-1)!} =$

$= \dfrac{6!}{5! \cdot 1!} \cdot \dfrac{54!}{1! \cdot 53!} = \dfrac{6 \cdot 5!}{5!} \cdot \dfrac{54 \cdot 53!}{53!} =$

$= 324$

Portanto, há 324 possibilidades de se ganhar a quina.

Logo, a probabilidade de um apostador ganhar a quina com uma aposta será:

$P = \dfrac{324}{50\,063\,860} \simeq 0{,}0000065 =$

$= 0{,}00065\%$

- Sena

De acordo com o enunciado, o total de possibilidades para ganhar a sena é 50 063 860.

Logo, a probabilidade de um apostador ganhar a sena com uma aposta será:

$P = \dfrac{1}{50\,063\,860} \simeq 0{,}00000002 =$

$= 0{,}000002\%$

b) Resposta pessoal. Espera-se que o estudante associe a expressão "ter muita sorte" com o fato de a probabilidade de acerto com uma aposta única ser baixíssima.

c) Resposta pessoal. Como o espaço amostral diminui, aumenta-se a probabilidade de o jogador ganhar.

46. Resposta pessoal. Sugestão:

Um cofre tem três rodas na fechadura, e cada uma delas tem algarismos de 0 a 9.

a) Escolhendo um algarismo em cada roda, quantos são os códigos possíveis?

b) Uma pessoa esqueceu o segredo do cobre mas sabe que os algarismos da primeira e da segunda roda são distintos e menores que 6. Quantos são os códigos que satisfazem essa condição?

c) Qual é a probabilidade de essa pessoa acertar já na primeira tentativa?

Resolução

a) O espaço amostral é formado pela quantidade de códigos possíveis. Para cada uma das rodas da fechadura, temos 10 opções de algarismos; então, a quantidade de elementos no espaço amostral será: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1\,000$.

b) Temos que os algarismos da primeira e da segunda roda são menores que 6; então, temos 6 possibilidades de números, e o algarismo da terceira roda pode ser qualquer número de 0 a 9.

Seja o evento A os códigos possíveis, a quantidade de elementos do evento A será:

$n(A) = 10 \cdot A_{6,2} = 10 \cdot \dfrac{6!}{(6-2)!} = 10 \cdot \dfrac{6!}{4!} =$

$= 10 \cdot \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = = 10 \cdot 30 = 300$

Portanto, 300 códigos satisfazem a condição e $n(A) = 300$.

c) A probabilidade de uma pessoa acertar o código na primeira tentativa será:

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{300}{1\,000} = 0{,}3 = 30\%$

47.

	Homens (%)	Mulheres (%)	Total (%)
Canhotos (%)	1,2	1,248	2,448
Destros (%)	46,8	50,752	97,552
Total (%)	48	52	100

$52\% \cdot 2{,}4\% = 0{,}52 \cdot 0{,}024 = 0{,}01248$

$48\% \cdot 2{,}5\% = 0{,}48 \cdot 0{,}025 = 0{,}012$

a) $1{,}248\% + 1{,}2\% = 2{,}448\%$

b) $\dfrac{1{,}2}{48} = 0{,}0025 = 2{,}5\%$

CÁLCULO RÁPIDO (P. 279)

1.

Jogador	Percentual de acerto
Roberta	$\dfrac{21}{30} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7 = 70\%$
Jaqueline	$\dfrac{24}{40} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6 = 60\%$
Paula	$\dfrac{10}{50} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2 = 20\%$
Alice	$\dfrac{14}{20} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7 = 70\%$
Luana	$\dfrac{54}{60} = \dfrac{9}{10} = 0{,}9 = 90\%$

2. a) $\dfrac{10}{100} \cdot 1\,200 = 0{,}1 \cdot 1\,200 = 120$

b) $\dfrac{20}{100} \cdot 1\,200 = 0{,}2 \cdot 1\,200 = 240$

c) $\dfrac{25}{100} \cdot 1\,200 = 0{,}25 \cdot 1\,200 = 300$

d) $\dfrac{50}{100} \cdot 1\,200 = 0{,}5 \cdot 1\,200 = 600$

e) $\dfrac{1}{100} \cdot 640 = 0{,}01 \cdot 640 = 6{,}4$

f) $\dfrac{40}{100} \cdot 640 = 0{,}4 \cdot 640 = 256$

3. a) $\dfrac{12}{20} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6 = 60\%$

b) $\dfrac{8}{20} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4 = 40\%$

c) $\dfrac{10}{20} = \dfrac{5}{10} = 0{,}5 = 50\%$

d) $\dfrac{5}{25} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$

4. a) O erro está na divisão de $\dfrac{0{,}18}{100}$. O correto é: $0{,}18\,\% = \dfrac{0{,}18}{100} = 0{,}0018$.

b) O erro está em $0{,}45 = 0{,}45\%$. O correto é: $\dfrac{45}{100} = 0{,}45 = 45\%$.

c) O erro está em $\dfrac{183}{100} = 18{,}3\%$. O correto é: $1{,}83 = \dfrac{183}{100} = 183\%$.

d) O erro está na divisão de $\dfrac{0{,}95}{100} = 000{,}95$. O correto é: $\dfrac{0{,}95}{100} = 0{,}0095 = 0{,}95\%$.

5. a) $68\ m^2 = 680\,000\ cm^2$.

b) $37{,}0\ km^2 = 37\,000\,000\ m^2$.

c) $55\,678\ m^2 = 0{,}055678\ km^2$.

d) $5{,}9\ cm^2 = 590\ mm^2$.

e) $124\,603{,}45\ cm^2 = 12{,}460345\ m^2$.

PARA RECORDAR (P. 279)

1. Temos que $A(0, 5)$ pertence ao gráfico de f e $f(x) = ax + b$. Substituindo os respectivos valores de x e y na lei da função, temos:

$y = ax + b \Rightarrow 5 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 5$

Temos que $B(-3, 0)$ pertence ao gráfico de g e $g(x) = cx + \dfrac{3}{2}$.

Substituindo os respectivos valores de x e y na lei da função, temos:

$y = cx + \dfrac{3}{2} \Rightarrow 0 = -3c + \dfrac{3}{2} \Rightarrow 3c = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \dfrac{1}{2}$

Temos que, em $P(1, y)$, as funções se intersectam; então, podemos escrever:

$a \cdot x + 5 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} \Rightarrow a \cdot 1 + 5 = \dfrac{1}{2} \cdot 1 + \dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a + 5 = \dfrac{4}{2} \Rightarrow a = 2 - 5 \Rightarrow a = -3$

Logo, $a = -3$, $b = 5$ e $c = \dfrac{1}{2}$.

Substituindo, nas funções: $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + \dfrac{3}{2}$, temos:

$f(x) = -3x + 5$ e $g(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

2. A soma das idades é 30 $(8 + 10 + 12 = 30)$. O valor de R$ 3 600,00 deve ser dividido em 30 partes, de modo que o filho mais novo receba 8 dessas partes; o filho do meio, 10 dessas partes; e o filho mais velho, 12 dessas partes.

Cada parte equivale a: $\dfrac{3\,600}{30} = 120$.

Valor recebido pelo filho mais novo:

$8 \cdot 120 = 960$.

Valor recebido pelo filho mais velho:

$12 \cdot 120 = 1\,440$

Logo: $1\,440 - 960 = 480$.

Portanto, o filho mais velho receberá R$ 480,00 a mais do que o filho mais novo.

3. Os triângulos ABC e EDC são semelhantes; então, podemos estabelecer a seguinte relação:

$\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{ED}{AB} \Rightarrow \dfrac{30}{90} = \dfrac{ED}{AF + FB}$

$\overline{ED}$ e $\overline{FB}$ são lados opostos de um retângulo; então, vamos considerar: $ED = FB = x$ e $AF = y$. Assim:

$\dfrac{30}{90} = \dfrac{x}{y + x} \Rightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{x}{y + x} \Rightarrow y + x = 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 2x$

Agora, vamos determinar a área dos terrenos:

$S_1 = \dfrac{30 \cdot ED}{2} = 15ED = 15x$

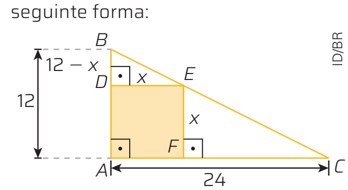
$S_2 = 60 \cdot ED = 60x$

$S_3 = \dfrac{60 \cdot AF}{2} = 30AF = 30y = 30 \cdot 2x = 60x$

Analisando as áreas, temos que a área de S_2 é igual à área de S_3.

Alternativa **a**.

4. Podemos representar o triângulo ABC da seguinte forma:



$ADEF$ é um quadrado; então, vamos representar seus lados como x.

Os triângulos BDE e BAC são semelhantes; então, podemos estabelecer a relação:

$\dfrac{12 - x}{12} = \dfrac{x}{24} \Rightarrow 24 \cdot (12 - x) = 12x \Rightarrow$

$\Rightarrow 288 - 24x = 12x \Rightarrow 36x = 288 \Rightarrow x = 8$

Assim, o lado do quadrado mede 8 cm.

Logo, a área do quadrado será dada por: $A_{quadrado} = 8^2 = 64$

Portanto, a área é igual a 64 cm^2.

Alternativa **d**.

5. Vamos considerar a medida do segmento formado por dois pontos igual a x.

Na figura, temos um retângulo e um trapézio e sabemos que a soma da área dos dois polígonos é igual a 16 cm^2. Então:

$A_{retângulo} + A_{trapézio} = 16 \Rightarrow 4x \cdot x + \dfrac{(4x + x) \cdot 2x}{2} = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 + 4x^2 + x^2 = 16 \Rightarrow 9x^2 = 16 \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$

Então, o segmento formado por dois pontos mede $\dfrac{4}{3}$ cm.

O segmento em verde (v) representa a diagonal de um quadrado de lado $\dfrac{4}{3}$ cm. Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$v^2 = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 \Rightarrow v^2 = \dfrac{16}{9} + \dfrac{16}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow v^2 = \dfrac{32}{9} \Rightarrow v = \dfrac{\sqrt{16 \cdot 2}}{\sqrt{9}} \Rightarrow v = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Portanto, o segmento verde mede $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ cm.

Alternativa **d**.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 281)

1. Uma maneira de abordar esse problema é começar por subdividi-lo em casos mais simples. O que aconteceria se na gaveta só tivessem meias: seis pares azuis e cinco pares verdes? Nesse caso, o pior que poderia acontecer era

José tirar primeiro duas meias de cores diferentes; a terceira, com certeza, faria par com uma das anteriores. Bastaria, portanto, tirar três meias para a questão ficar resolvida.

Note que, nessa situação, é indiferente o número de pares que estão na gaveta: tirando três meias, duas serão obrigatoriamente da mesma cor. Até podemos generalizar: se houver meias de três cores, é necessário tirar quatro meias; se houver n cores, é necessário tirar $(n + 1)$ meias.

E o que aconteceria se na gaveta só tivessem luvas: quatro pares pretos e três pares cinza? A situação agora não é a mesma, porque, diferentemente das meias, as luvas são usadas de acordo com a mão a que se destinam: esquerda ou direita. Se José tivesse azar, poderia começar por tirar, por exemplo, só luvas para a mão esquerda. O caso mais desfavorável seria as primeiras sete luvas serem todas para a mesma mão. Somente na oitava retirada, então, ele conseguiria fazer um par utilizável.

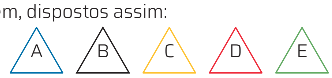
Nesse caso, já não é o número de cores que é determinante, mas, sim, o número de pares que estão na gaveta. Se, por exemplo, lá houvesse seis pares pretos e nove pares brancos, seria preciso retirar 16 luvas $(6 + 9 + 1 = 16)$ para garantir um bom par. De modo geral, se houver n pares, é preciso extrair $(n + 1)$ luvas, qualquer que seja o número de cores.

Vejamos, finalmente, a situação que resulta da junção das duas anteriores, tal como nos foi proposto inicialmente. Novamente, a melhor forma de resolver o problema é analisar os casos mais desfavoráveis:

- 1º caso: saem primeiro todas as luvas (14). Já sabemos que bastam três meias para formar um par da mesma cor. Assim, José precisa retirar 17 peças $(14 + 3 = 17)$.
- 2º caso: saem primeiro todas as meias (22). Depois, seria necessário retirar oito luvas. Assim, José teria de retirar 30 peças $(22 + 8 = 30)$.

Este segundo é o caso mais desfavorável. Por isso, para ter certeza de conseguir um bom par de luvas e outro par de meias, José terá de retirar 30 peças.

2. Sejam os triângulos originais, antes da colagem, dispostos assim:



ID/BR

O primeiro cartão a ser colado é o D (poderia ser o C):


ID/BR

O segundo cartão é o C (poderia ser o B):


ID/BR

O terceiro cartão é o B:


ID/BR

O quarto cartão é o A:


ID/BR

Por fim, o cartão E:


ID/BR

Alternativa **b**.

3. Analisando as figuras, observamos que todas têm a mesma área nas regiões brancas e roxas. Portanto, qualquer um dos alvos pode ser escolhido.

MATEMÁTICA E SOCIEDADE (P. 282)

Conectando ideias

1. O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) reflete de que maneira a população de determinado país está mais perto ou mais longe de alcançar o bem-estar social. No cálculo desse índice, são considerados fatores como renda, esperança de vida ao nascer e expectativa de anos de estudo da população. Quanto maior for a desigualdade em um país, menor será seu IDH. Sendo assim, a análise desse índice pode auxiliar nas tomadas de decisão, inclusive para a redução da desigualdade nos países. Para ampliar as possibilidades de ação em diversos níveis, as nações podem recorrer a programas específicos ou a outros recursos, como os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS). Eles foram criados com base nos oito Objetivos de Desenvolvimento do Milênio (ODM), de 2000, e fazem parte um plano de ação em diversas áreas que visa ao desenvolvimento de pontos de melhoria para as sociedades em todo o mundo. Compõe o plano um total de 17 objetivos; o décimo diz respeito a "Reduzir a desigualdade dentro dos países e entre eles". Questione os estudantes sobre a importância de conhecer e discutir criticamente esses objetivos, para que sejam encontrados pontos positivos e negativos, que se aplicam, ou não, à realidade brasileira. Dessa maneira, ao pesquisar o décimo objetivo, eles podem entender de que maneira a sociedade brasileira busca realizar ou precisa melhorar a "inclusão social, econômica e política de todos, independentemente da idade, gênero, deficiência, raça, etnia, origem, religião, condição econômica ou outra", como deve "garantir a igualdade de oportunidades e reduzir as desigualdades de resultados, inclusive por meio da eliminação de leis, políticas e práticas discriminatórias e da promoção de legislação, políticas e ações adequadas a este respeito" e, por fim, de que modo "adotar políticas, especialmente fiscal, salarial e de proteção social, e alcançar progressivamente uma maior igualdade".

2. **a)** Resposta pessoal.

Sugestão: Explique aos estudantes que os ODS foram estabelecidos pela ONU em 2015 como parte da Agenda 2030, visando promover a paz e a prosperidade globalmente. Peça que investiguem a origem desses objetivos e o contexto da Agenda 2030. Explique que o ODS 10 tem seu foco na redução das desigualdades tanto internas quanto externas aos países. Identifique as causas das desigualdades no Brasil e no mundo. Oriente o grupo a dividir a pesquisa considerando: História e elaboração dos ODS; propósitos e aplicações dos ODS; e exemplos práticos, investigando casos reais de como países, empresas ou comunidades estão implementando os ODS e os desafios enfrentados. Sugira que busquem informações em *sites* oficiais da ONU, relatórios sobre a Agenda 2030 e estudos de caso de implementação dos ODS. Incentive o uso de gráficos e infográficos para a melhor visualização dos dados coletados. Recomende que o grupo prepare uma apresentação clara e concisa dos achados, destacando como a pesquisa pode informar e influenciar decisões para alcançar os ODS.

b) Resposta pessoal. Sugestão: Explore ações específicas que podem ser adotadas em níveis pessoal, comunitário, nacional e global para reduzir essas desigualdades. Discuta como melhorar o acesso à saúde e à educação de qualidade. Use casos reais e dados para ilustrar como essas estratégias têm sido aplicadas com sucesso. Encoraje a troca de ideias sobre soluções práticas e viáveis para o grupo.

3. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes identifiquem que as charges abordam a desigualdade social, mas de maneira distinta.

A segunda charge destaca, por exemplo, a disparidade entre a pobreza extrema e a vida urbana mais próspera. A fala do menino, "Pai, eu quero morar naquele mundo!", enfatiza o desejo de escapar da pobreza e alcançar uma vida melhor.

Na primeira charge, a diferença entre os dois quadrinhos ilustra a desigualdade social ao comparar uma cidade bem desenvolvida e uma favela. A nave espacial, que inicialmente sobrevoa a cidade e depois a favela, destaca a diferença gritante entre os dois ambientes. A fala "Poxa, cochilei só 5 minutos e já estamos em outro planeta?" seguida de "Não, ainda é o mesmo!" sublinha a ideia de que, apesar de estarem no mesmo planeta, as condições de vida são tão diferentes que parecem mundos distintos.

Durante a troca de ideias, os estudantes devem argumentar que ambas as charges utilizam elementos visuais e textuais para representar a desigualdade social. A primeira charge utiliza a comparação entre uma cidade desenvolvida e uma favela, com o uso da nave espacial, para enfatizar a disparidade extrema entre diferentes áreas urbanas. A segunda charge usa a imagem de uma favela e a aspiração de uma criança para ilustrar a desigualdade local e como isso impacta diretamente a vida das pessoas.

Essas charges, portanto, complementam-se ao mostrar diferentes aspectos da desigualdade social, incentivando uma reflexão crítica sobre as causas e as consequências desse problema.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 284)

1. Para calcular quantas possibilidades de senha há para cada tipo, considera-se o Princípio Fundamental da Contagem.

- Tipo I:

  São quatro caracteres distintos entre os permitidos. São 10 algarismos, 52 letras e 6 caracteres especiais, totalizando, 68 caracteres. Na primeira etapa, há 68 opções de escolha; na segunda, 67; na terceira, 66; e na quarta, 65. A probabilidade de acertar essa senha na primeira tentativa, ao acaso, é:

  $$\frac{1}{68 \cdot 67 \cdot 67 \cdot 65} = \frac{1}{19\,545\,240}$$

- Tipo II:

  São cinco caracteres distintos entre os permitidos, sendo 3 letras, 1 algarismo e 1 caractere especial. Na primeira etapa há 52 opções de escolha, na segunda, 51, na terceira, 50, na quarta, 10 e na quinta 6. A probabilidade de acertar essa senha na primeira tentativa, ao acaso, é:

  $$\frac{1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 6} = \frac{1}{7\,956\,000}$$

- Tipo III:

  São seis caracteres distintos entre os permitidos, sendo 2 letras, 2 algarismos e 2 caracteres especiais. Na primeira etapa, há 52 opções de escolha; na segunda, 51; na terceira, 10; na quarta, 9; na quinta 6; e na sexta, 5. A probabilidade de acertar essa senha na primeira tentativa, ao acaso é:

  $$\frac{1}{52 \cdot 51 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{7\,160\,400}$$

Como quanto maior o denominador, menor a fração, para o mesmo denominador, o tipo I de senha é o de menor probabilidadede ser descoberto.

Alternativa **a**.

2. Para escolher esses quatro candidatos, considera-se que há dois grupos, indígenas e não indígenas. Para escolher dois indígenas entre os seis possíveis, considerando que a ordem da escolha importa (titular e vice), tem-se o seguinte arranjo: $A_{6,2}$

Analogamente, para escolher os dois candidatos não indígenas entre os vinte e quatro possíveis têm-se: $A_{24,2}$

Para escolher a primeira dupla e a segunda, obtém-se:

$$A_{6,2} \cdot A_{24,2} = \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{24!}{22!2!} =$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} \cdot \frac{24 \cdot 23 \cdot 22!}{2 \cdot 22!} =$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 23 = 23 \cdot 15 \cdot 12$$

Alternativa **d**.

ALMEIDA, Fernando José de; FONSECA JÚNIOR, Fernando Moraes. *ProInfo*: projetos e ambientes inovadores. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação a Distância, 2000. *E-book*. Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraDownload.do?select_action=&co_obra=28295&co_midia=2. Acesso em: 9 out. 2024.

A obra apresenta referências teóricas e práticas que facilitam a apropriação das novas tecnologias e seu uso como instrumento de transformação do sistema educacional. Os autores adotam uma metodologia de aprendizagem por projetos e discutem como tais projetos articulam disciplinas. Além disso, sugerem como aplicar e utilizar *softwares*, dando indicações de como o trabalho com a tecnologia pode abrir horizontes para além da sala de aula.

AMERICAN PSYCHIATRIC ASSOCIATION (APA). *Manual diagnóstico e estatístico de transtornos mentais:* DSM-5. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2014.

O manual é uma obra de referência para a prática clínica relacionada aos cuidados com saúde mental.

ANDRADE, Julia Pinheiro (org.). *Aprendizagens visíveis*: experiências teórico-práticas em sala de aula. Belo Horizonte: Panda Educação, 2021.

Esse livro compila práticas pedagógicas que visam melhorar o ensino na Educação Básica, dialogando com propostas contemporâneas, como a aprendizagem visível. O livro aborda temas como a cultura *maker*, o uso do *design* na educação e a importância da avaliação formativa, oferecendo ferramentas práticas aos educadores.

ARROYO, Miguel González. *Imagens quebradas*: trajetórias e tempos de alunos e mestres. Petrópolis: Vozes, 2004.

O autor traz um conjunto de reflexões sobre o momento vivido nas escolas, tanto para o educador quanto para o educando, e as consequências para as práticas pedagógicas.

BACICH, Lilian; MORAN, José (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2017.

O ponto central do livro são as práticas pedagógicas para a Educação Básica e Superior que valorizam o protagonismo dos estudantes e contribuem para a formação de professores. A obra, escrita por autores brasileiros, analisa por que e para que usar metodologias ativas, cujo foco é a participação efetiva dos estudantes na construção do conhecimento e no desenvolvimento de competências.

BENDER, William N. *Aprendizagem baseada em projetos*: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

O educador estadunidense apresenta, nesse livro, as diretrizes para a implementação da Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) na Educação Básica com o uso das tecnologias em sala de aula. A obra também propõe modelos de projeto e diferentes tipos de estratégia para desenvolvê-los.

BERGMANN, Jonathan. *Aprendizagem invertida para resolver o problema do dever de casa*. Porto Alegre: Penso, 2018.

Nesse livro, o autor, especialista pioneiro em aula invertida, analisa o motivo pelo qual a tradicional tarefa de casa não desperta tanto interesse nos estudantes. O livro aborda o potencial da sala de aula invertida para provocar o interesse dos estudantes, aumentando a capacidade de aprendizagem por meio dessa estratégia metodológica. O autor sugere ainda atividades especialmente planejadas para tornar os estudantes participantes ativos na experiência de sala de aula.

BOALER, Jo. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018 (Série Desafios da Educação).

Nessa obra, a autora desafia a noção de que a Matemática é difícil, propondo uma abordagem que fomenta uma mentalidade de crescimento entre os estudantes. O livro fornece exemplos práticos e atividades para transformar o ensino da Matemática, tornando a aprendizagem mais envolvente e prazerosa.

BOALER, Jo. *Mente sem barreiras*: as chaves para destravar seu potencial ilimitado de aprendizagem. Porto Alegre: Penso, 2019.

É comum a crença de que o alcance de nossas habilidades intelectuais é limitado pela genética. Essa ideia tem influência significativa na maneira como compreendemos a aprendizagem e em concepções como a de que se somos bons ou ruins em Matemática ou em Arte, por exemplo. No entanto, estudos recentes mostram que atribuir à genética a determinação da capacidade de aprender é um equívoco, e o livro se propõe a ajudar a transformar profundamente as noções de educação e aprendizagem, ampliando a compreensão dos processos de aprendizado e de como aproveitar o vasto potencial cognitivo do nosso cérebro.

BOALER, Jo. *O que a matemática tem a ver com isso?* Como professores e pais podem transformar a aprendizagem da matemática e inspirar sucesso. Porto Alegre: Penso, 2019.

Esse livro explora como métodos tradicionais de ensino e percepções negativas minam a confiança dos estudantes em Matemática. A autora apresenta estratégias para professores e pais transformarem essa visão e inspirarem o sucesso dos estudantes, oferecendo abordagens concretas para tornar a matemática mais acessível e menos intimidante.

BONDIE, Rhonda; ZUSHO, Akane. *Diferenciação pedagógica na prática*: rotinas para engajar todos os estudantes. Porto Alegre: Penso, 2023.

Esse livro oferece uma abordagem prática para a diferenciação pedagógica, apresentando estratégias para adequar o ensino às necessidades individuais dos estudantes. A obra fornece ferramentas concretas para criar aulas mais engajadoras e acessíveis, além de discutir o uso da avaliação formativa para ajustar o ensino.

BORBA, Gustavo Severo de; LESNOVSKI, Melissa Merino. *Transformando a sala de aula*: ferramentas do *design* para engajamento e equidade. Porto Alegre: Penso, 2023.

Esse livro aborda a inovação na educação, utilizando ferramentas de *design* para promover engajamento e equidade. Os autores discutem os impactos da pandemia e as novas gerações de estudantes, propondo práticas inclusivas para renovar currículos e promover a diversidade nas salas de aula.

BORBA, Marcelo de C.; PENTEADO, Miriam G. *Informática e educação matemática*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Nesse livro, os autores descrevem diferentes momentos experenciados com o uso da informática como ferramenta da educação matemática em sala de aula por professores e estudantes brasileiros. Além disso, essas experiências comprovaram a eficácia desse recurso tecnológico no ambiente escolar e fomentaram reflexões sobre políticas educacionais nessa área.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Blucher, 1996.

Essa é uma obra de referência em história da Matemática em língua portuguesa. Em seus capítulos, estruturados em ordem cronológica, encontram-se as origens e as razões de ideias, conceitos e procedimentos da Matemática construídos pelo ser humano desde a Pré-História até o século XX. O livro pode ser uma fonte de consulta sobre o que se ensina e também sobre preparação de aulas para contextualizar a origem do que os estudantes vão aprender.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). *Matriz de Avaliação de Matemática*: Pisa 2012. [Brasília, DF]: Inep, 2012. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) traz informações sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária de 15 anos. Nesse documento, é possível conhecer a matriz de avaliação de Matemática.

BRASIL. *Lei n. 13146, de 6 julho de 2015.* Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Brasília, DF: Presidência da República, 2015. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13146.htm?msclkid=e03ca915a93011eca55b7de3600188ab. Acesso em: 9 out. 2024.

A instituição do Estatuto da Pessoa com Deficiência busca assegurar a inclusão social e o pleno exercício da cidadania a essas pessoas.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Aplicações do pensamento computacional para os Anos Finais do Ensino Fundamental*. [Brasília, DF]: MEC/SEB, [20--]. Disponível em: https://avamec.mec.gov.br/#/instituicao/seb/curso/4701/informacoes. Acesso em: 9 out. 2024.

Nesse curso *on-line*, destinado a professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental, são explorados os quatro pilares do pensamento computacional e algumas aplicações em sala de aula. O curso faz parte do Ambiente Virtual do MEC (Avamec).

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília, DF: MEC/SEB, 2018a. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 13 set. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e das modalidades da Educação Básica.

Brasil. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. *Resolução CNE/CEB n. 3, de 21 de novembro de 2018*. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília, DF: MEC/CNE, 2018b. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/novembro-2018-pdf/102481-rceb003-18/file. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa resolução atualiza as diretrizes que devem ser observadas pelos sistemas de ensino e suas unidades escolares na organização curricular e que se aplicam a todas as formas e modalidades de Ensino Médio, complementadas, quando necessário, por diretrizes próprias.

Camargo, Fausto; Daros, Thuinie. *A sala de aula inovadora*: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. Porto Alegre: Penso, 2018 (Série Desafios da Educação).

Esse livro mostra como inovar em sala de aula, isto é, superar a aula expositiva por meio das metodologias ativas, em que o estudante é o protagonista da aprendizagem. Para isso, os autores descrevem mais de quarenta estratégias, de modo simples e direto, que podem ser aplicadas com base em métodos e recursos práticos para efetivamente promover mudanças da Educação Básica ao Ensino Superior.

Chambers, Paul; Timlin, Robert. *Ensinando matemática para adolescentes*. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

Esse livro é um guia prático para professores de Matemática, abordando desafios de como melhorar o desempenho e motivar estudantes do Ensino Médio. Os autores oferecem estratégias para criar planos de aula eficazes, usar recursos de forma eficiente e avaliar o progresso dos estudantes.

Code. Disponível em: https://code.org. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa organização sem fins lucrativos oferece cursos EAD gratuitos para promover a educação da Ciência da Computação a estudantes dos ensinos Fundamental e Médio.

Cohen, Elizabeth G.; Lotan, Rachel A. *Planejando o trabalho em grupo*: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

As autoras apresentam, no livro, estudos e propostas importantes de como usar efetivamente a aprendizagem cooperativa na construção de salas de aula equitativas. A obra inclui evidências de pesquisas recentes sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, explicita como o trabalho em times favorece o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e de que forma os educadores podem organizar suas salas de aula para que todos participem e aprendam ativamente.

Comitê Gestor da Internet no Brasil (CGI.br). *Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras*: TIC educação 2017. São Paulo: CGI.br, 2018. *E-book*. Disponível em: https://cetic.br/media/docs/publicacoes/2/tic_edu_2017_livro_eletronico.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O livro traz estudos e indicadores sobre a adoção das tecnologias de informação e comunicação (TIC) para ampliar o conhecimento sobre as implicações sociais e econômicas da expansão da internet na sociedade brasileira.

Costa, Sérgio Francisco. *Introdução ilustrada à estatística*. 5. ed. São Paulo: Harbra, 2015.

O autor dessa obra organiza e apresenta os conceitos fundamentais da Estatística de maneira lúdica, utilizando diversas ilustrações que ajudam a compreender melhor temas como mensuração, populações e amostras e a diferença entre estatística descritiva e estatística inferencial, além de estudo detalhado sobre representações gráficas, medidas de tendência central e de variabilidade, probabilidade, distribuição binomial, distribuição normal, entre outros temas. O livro também oferece um formulário para contatar a editora e obter um gabarito da curva normal, que funciona como um simulador para a resolução de alguns exercícios e problemas que dependem da visualização do gráfico, além de trazer respostas dos exercícios propostos. Além disso, a obra apoia os professores com uma seleção de exercícios resolvidos.

Coxford, Arthur F.; Shulte, Albert P. (org.). *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1994.

Esse livro é uma tradução de uma obra do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) com artigos de diferentes pesquisadores e educadores que auxiliam na compreensão do que está envolvido no desenvolvimento do pensamento algébrico. Algumas passagens são especialmente recomendadas, como os capítulos 2 e 5. No capítulo 2, são apresentadas as diferentes concepções de Álgebra, como essas concepções dependem do sentido que a letra assume e quais são as implicações dessas concepções para a aprendizagem. O capítulo 5 aborda as dificuldades com a aprendizagem de funções e permite que, de posse desse conhecimento, seja possível planejar as aulas de modo a apoiar os estudantes na direção de uma aprendizagem significativa desse conteúdo.

D'Ambrosio, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

Internacionalmente reconhecido por suas pesquisas na área, o autor explora a Etnomatemática, destacando seu papel na cultura ocidental e sua relevância para o ensino. A obra discute como a Matemática pode ser vista como uma forma decolonial, centrada nas culturas e nos saberes locais, e apresenta reflexões sobre diversos trabalhos realizados na área, tanto no Brasil quanto no exterior.

Dayrell, Juarez; Carrano, Paulo; Maia, Carla Linhares (org.). *Juventude e Ensino Médio*: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Ed. da UFMG, 2014. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O livro trata de temas que dizem respeito aos jovens e à relação deles com o currículo do Ensino Médio sob a perspectiva do trabalho, da cultura, da ciência e da tecnologia.

Dell'isola, Regina L. Péret. Inferência na leitura. *In*: Glossário Ceale: termos de alfabetização, leitura e escrita para educadores. Belo Horizonte: FaE-UFMG, [20--]. Disponível em: https://www.ceale.fae.ufmg.br/glossarioceale/referencia/dell-isola-r-l-cia-p-ret-leitura-infer-ncia-e-contexto-sociocultural-belo-horizonte-formato-saraiva-2001-. Acesso em: 9 out. 2024.

O verbete do Glossário Ceale, do Centro de Alfabetização, Leitura e Escrita da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, trata da concepção de inferência e de sua importância no processo de leitura.

Delors, Jacques *et al*. *Educação*: um tesouro a descobrir. Relatório para a Unesco da Comissão Internacional sobre Educação para o século XXI. Brasília, DF: MEC, 2010. *E-book*. Disponível em: https://unesdoc.Unesco.Org/ark:/48223/pf0000109590_por. Acesso em: 9 out. 2024.

O relatório da Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (Unesco) indica o conjunto de missões da educação, organizado com base em quatro aprendizagens fundamentais.

Duny, André. As contradições do projeto coletivo: emancipação ou manipulação? *In*: Apap, Georges *et al*. *A construção dos saberes e da cidadania*: da escola à cidade. Porto Alegre: Artmed, 2002.

Esse texto aborda como questão central as demandas por novas práticas no campo da docência. De acordo com o autor, é possível pensar um mundo no qual os saberes e a cidadania sejam tratados de forma mais inteligente e humanizada.

Fundação Scratch. *Scratch*. [*S. l.*], [20--]. Disponível em: https://scratch.mit.edu/about. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa plataforma gratuita foi desenvolvida para os usuários poderem programar histórias, jogos e animações e compartilhá-las.

Gardner, Howard. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Porto Alegre: Artmed, 1995.

Precursor dos estudos de neurociência, o autor desse livro apresenta as ideias fundamentais que desencadearam uma revolução na maneira como compreendemos a inteligência humana e as possibilidades de sua aplicação na educação, em especial nas escolas e salas de aula nas quais a aprendizagem seja pensada com profundidade, para além do estudo superficial de conteúdos, visando a um ensino para a compreensão.

GeoGebra. Disponível em: https://www.geogebra.org. Acesso em: 13 set. 2024.

Essa plataforma gratuita de aplicativos matemáticos foi desenvolvida para os usuários criarem e compartilharem projetos por meio do *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

Grover, Shuchi; Pea, Roy. Computational thinking in K–12: a review of the state of the field. *Educational Researcher*, [*s. l.*], v. 42, n. 1, 2013.

Esse artigo apresenta um panorama do desenvolvimento do pensamento computacional e traz estudos feitos após a publicação do artigo de Jeannette Wing, precursora desse tema.

Hattie, John. *Aprendizagem visível para professores*: como maximizar o impacto da aprendizagem. Porto Alegre: Penso, 2017.

Fundamentado em amplas pesquisas com milhões de estudantes ao redor do mundo, o autor explica como é possível maximizar a aprendizagem na escola por meio do que ele define como aprendizagem visível. Na obra, o autor apresenta conceitos bastante inovadores relacionados à avaliação e ao acompanhamento contínuo da aprendizagem pelo educador e pelo estudante, ensinando como aplicar os princípios da aprendizagem visível em qualquer sala de aula.

Hattie, John; Zierer, Klaus. *10 princípios para a aprendizagem visível*: educar para o sucesso. Porto Alegre: Penso, 2019.

O livro é um guia prático que apresenta dez princípios essenciais para que professores e instituições de ensino implementem a aprendizagem visível, visando maximizar o aprendizado. A obra aborda temas como avaliação, *feedback*, trabalho colaborativo, importância do diálogo e da construção de relações positivas, todos voltados para a aprendizagem visível.

Hernández, Fernando; Ventura, Montserrat. *A organização do currículo por projetos de trabalho*: o conhecimento é um caleidoscópio. 5. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

Os autores descrevem os princípios e as práticas da organização do currículo por projetos, e não pelas disciplinas tradicionais. Também resgatam as ideias do filósofo estadunidense John Dewey (1859-1952), que considerava a atividade prática, a liberdade de pensamento e a democracia essenciais para a educação.

Instituto Ayrton Senna (IAS). *As competências socioemocionais no cotidiano das escolas*. [*S. l.*]: IAS, 2022. *E-book*. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/app/uploads/2022/11/instituto-ayrton-senna-as-competencias-socioemocionais-no-cotidiano-das-escolas.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O texto apresenta o conceito de competências socioemocionais e discute como aplicá-lo no dia a dia, abordando os efeitos das competências na educação, as dimensões socioemocionais que impactam a aprendizagem e os modelos organizacionais.

Instituto Reúna. *BNCC comentada para o Ensino Médio*. São Paulo, 2024. Disponível em: https://www.institutoreuna.org.br/conteudo/bncc-comentada. Acesso em: 9 out. 2024.

A *BNCC comentada para o Ensino Médio* é uma ferramenta que interpreta, comenta e explica as competências específicas e as habilidades de cada área de conhecimento para essa etapa. Escrita por uma equipe de especialistas, tem como objetivo apoiar a elaboração de currículos alinhados à BNCC, sugerindo formas de desenvolver competências e habilidades em consonância com a educação integral e o projeto de vida dos estudantes, contemplando temas e objetos de conhecimento diversos. A obra também apresenta inovações e estratégias metodológicas que favorecem um trabalho integrado e contextualizado entre as áreas do conhecimento, além de exemplos de objetivos de aprendizagem.

Instituto Reúna. *Fortalecimento da aprendizagem*. São Paulo, 2024. Disponível em: https://www.institutoreuna.org.br/fortalecimento-da-aprendizagem. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa organização sem fins lucrativos disponibiliza recursos didáticos de Língua Portuguesa e Matemática que auxiliam na recomposição das aprendizagens dos estudantes do Ensino Médio.

Knijnik, Gelsa *et al*. *Etnomatemática em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

Esse livro oferece um estudo aprofundado sobre a Etnomatemática, explorando seu histórico e mudanças desde os anos 1970. As autoras discutem os avanços na área e seu impacto na educação contemporânea, questionando o conhecimento dominante e valorizando a diversidade cultural.

Lima, Ronaldo. F. de. *Introdução à geometria diferencial*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Disponível em: https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2021/10/Introducao-a-Geometria-Diferencial_Ronaldo-Freire-Lima.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

Dê especial atenção ao capítulo 4, que trata da geometria intrínseca desenvolvida por Carl Friedrich Gauss e descreve as superfícies e suas curvaturas, a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano e no espaço e as geodésicas.

Lindquist, Mary Montgomery; Shulte, Albert P. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

Uma das maiores contribuições desse livro é mostrar a importância da Geometria no ensino e na aprendizagem de Matemática. Destaca-se o capítulo que trata do desenvolvimento do pensamento geométrico na perspectiva das pesquisas do casal Van Hiele, segundo a qual um trabalho planejado e consistente em aulas especialmente voltadas para o estudo de Geometria e fundamentadas na problematização é crucial para que os estudantes desenvolvam o raciocínio geométrico.

Martín, Héctor Ruiz. *Como aprendemos?* Uma abordagem científica da aprendizagem e do ensino. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2023.

O autor explora as descobertas científicas sobre os processos de aprendizagem, abordando como aplicá-las para melhorar a prática pedagógica. Também discute temas como memória, motivação, avaliação e autorregulação, aproximando a ciência da educação para qualificar a aprendizagem nas escolas.

Martins, Amilton R. de Q.; Eloy, Adelmo A. da S. (org.). *Educação Integral por meio do pensamento computacional*: letramento em programação: relatos de experiência e artigos científicos. Curitiba: Appris, 2019 (Coleção Educação, Tecnologias e Transdisciplinaridade). Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/app/uploads/2022/11/instituto-ayrton-senna-educacao-integral-por-meio-do-pensamento-computacional.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

Essa obra reúne artigos científicos que detalham as características do pensamento computacional e de experiências realizadas em salas de aulas brasileiras que envolvem diversas estratégias metodológicas. Esse material contribuiu para a elaboração das atividades relacionadas ao desenvolvimento dessa modalidade de raciocínio e de competências socioemocionais.

Perrenoud, Philippe. *10 novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

As competências são enfatizadas pelo sociólogo suíço ao tratar dos desafios da educação contemporânea. A organização, a administração e o desenvolvimento da aprendizagem, a utilização de novas tecnologias, o trabalho em equipe, o envolvimento dos estudantes em suas aprendizagens e a participação na administração da escola são alguns dos temas abordados no livro.

Piangers, Marcos; Borba, Gustavo. *A escola do futuro*: o que querem (e precisam) alunos, pais e professores. Porto Alegre: Penso, 2019.

Nesse livro, o autor analisa como será a escola do futuro, o que deve ser ensinado e como ensinar a uma geração de estudantes que tem acesso rápido e quase imediato a qualquer informação, além das expectativas desses estudantes em relação à escola. O autor também discute o papel dos pais e professores nesse cenário educacional complexo e convida estudantes, pais e professores a uma reflexão.

Pozo, Juan Ignacio (org.). *A solução de problemas*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Esse livro apresenta a visão de que ensinar a resolver problemas, em cada área do conhecimento, significa enfatizar o ensino de procedimentos. Além disso, destaca o papel fundamental do professor em incentivar os estudantes a desenvolver estratégias para a solução de problemas.

Russell, Michael K.; Airasian, Peter W. *Avaliação em sala de aula*: conceitos e aplicações. Porto Alegre: Penso, 2014.

Esse livro trata a avaliação como um componente-chave para o processo de ensino e aprendizagem e apresenta novas ferramentas e abordagens avaliativas que decorrem da introdução das tecnologias computacionais nas escolas.

Schuhmacher, Élcio *et al*. O desenvolvimento do pensamento computacional no Ensino Médio por meio de ambientes de programação. *In*: International Conference on Engineering and Technology Education, 14., 2016, Salvador. *Anais*... Salvador: Copec, 2016. p. 239-243. Disponível em: https://copec.eu/congresses/intertech2016/proc/works/52.pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

O artigo trata do desenvolvimento de um projeto computacional com estudantes do Ensino Médio. Os resultados demonstraram a progressão de habilidades colaborativas, de conteúdos curriculares e do pensamento computacional com base na inclusão de aplicações computacionais na prática pedagógica.

Smole, Katia Stocco; Diniz, Maria Ignez (org.). *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Apesar de ser escrito originalmente para o Ensino Fundamental, esse livro é tido como uma referência para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática para toda a Educação Básica, em especial na abordagem de resolução de problemas aliada aos processos de comunicação.

Tomaz, Vanessa Sena; David, Maria Manuela M. S. E. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.

Esse livro explora a interdisciplinaridade no ensino da Matemática, destacando sua importância para a formação integral do estudante. As autoras compartilham exemplos práticos de abordagens interdisciplinares, ajudando professores a integrar a matemática ao contexto social e a enriquecer a aprendizagem.

Vila, Antoni; Callejo, María Luz. *Matemática para aprender a pensar*: o papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2007.

A arte de pensar não pertence exclusivamente a nenhuma ciência, mas a Matemática é uma área do conhecimento que contribui para o pleno exercício desse processo cognitivo e para aperfeiçoá-lo. A obra ajuda a responder a alguns questionamentos por meio de reflexões e situações do dia a dia que envolvem a Matemática.

Wing, Jeannette M. Computational thinking benefits society. *Social Issues in Computing*, [*s. l.*], 10 jan. 2014. Disponível em: http://socialissues.cs.toronto.edu/index.html%3Fp=279.html. Acesso em: 9 out. 2024.

Esse artigo descreve os benefícios alcançados com o desenvolvimento dos conceitos sobre pensamento computacional em diversas áreas de atuação humana.

Wing, Jeannette M. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711/pdf. Acesso em: 9 out. 2024.

A pesquisadora discorre sobre a importância e o significado de desenvolver os preceitos relacionados a essa modalidade de raciocínio nos indivíduos e distingue o pensamento computacional da programação e do letramento digital.

2 2 3 3 5 9

ISBN 978-85-418-3231-1

2 900002 233599