GERAÇÃO
ALPHA

Matemática

9

Ensino Fundamental
Anos finais | 9º ano

Componente curricular: Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

Carlos N. C. de Oliveira
Felipe Fugita

Editora responsável:
Isabella Semaan

Organizadora: SM Educação
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação.

sm

GERAÇÃO ALPHA

Matemática 9

Ensino Fundamental | Anos finais | 9º ano
Componente curricular: Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

Carlos N. C. de Oliveira
Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP).
Especialista em Educação Matemática pelo Centro Universitário Fundação Santo André (FSA).
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).
Professor e coordenador de ensino de Matemática.

Felipe Fugita
Licenciado em Matemática pelo IME-USP.
Professor de Matemática.

Editora responsável: Isabella Semaan
Bacharela em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal do ABC (UFABC).
Editora e elaboradora de conteúdo para materiais didáticos.

Organizadora: SM Educação
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação.

São Paulo, 4ª edição, 2022

Geração Alpha **Matemática 9**

Direção editorial Cláudia Carvalho Neves
Gerência editorial Lia Monguilhott Bezerra
Gerência de *design* e produção André Monteiro
Edição executiva Isabella Semaan
Edição: Cármen Matricardi, Carolina Maria Toledo, Cristiano Oliveira da Conceição, Diana Maia, Eduardo Chavante, Luana Fernandes de Souza
Suporte editorial: Fernanda de Araújo Fortunato
Coordenação de preparação e revisão Cláudia Rodrigues do Espírito Santo
Preparação: Ana Paula Perestrelo, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares
Revisão: Ana Paula Perestrelo, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares, Renata Tavares
Apoio de equipe: Camila Lamin Lessa, Maria Clara Loureiro
Coordenação de *design* Gilciane Munhoz
***Design*:** Carla Almeida Freire, Tiago Stéfano, Victor Malta (Interação)
Coordenação de arte Andressa Fiorio
Edição de arte: Vitor Trevelin
Assistência de arte: Viviane Ayumi Yonamine
Assistência de produção: Júlia Stacciarini Teixeira
Coordenação de iconografia Josiane Laurentino
Pesquisa iconográfica: Camila D'Angelo, Fabio Matsuura
Tratamento de imagem: Marcelo Casaro
Capa João Brito/Gilciane Munhoz
Ilustração da capa: Denis Freitas
Projeto gráfico Rafael Vianna Leal
Pré-impressão Américo Jesus
Fabricação Alexander Maeda
Impressão

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Oliveira, Carlos N. C. de
Geração alpha matemática : 9º ano : ensino fundamental : anos finais / Carlos N. C. de Oliveira, Felipe Fugita ; editora responsável Isabella Semaan ; organizadora SM Educação ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação. — 4. ed. — São Paulo : Edições SM, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-65-5744-753-6 (aluno)
ISBN 978-65-5744-749-9 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Fugita, Felipe. II. Semaan, Isabella. III. Título.

22-111783 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

4ª edição, 2022

SM Educação
Avenida Paulista, 1842 – 18º andar, cj. 185, 186 e 187 – Condomínio Cetenco Plaza
Bela Vista 01310-945 São Paulo SP Brasil
Tel. 11 2111-7400
atendimento@grupo-sm.com
www.grupo-sm.com/br

MANUAL DO PROFESSOR

Prezado professor,

O mundo contemporâneo apresenta muitos desafios para quem discute e pratica educação. Estamos cercados de informações e de situações que requerem estratégias e ferramentas diferentes das que eram usadas há algumas décadas. Como podemos olhar criticamente para a sociedade em que vivemos e ensinar nossos estudantes a enfrentar as demandas cotidianas, a solucionar problemas e a tomar decisões?

A reflexão sobre essas questões nos faz perceber que educar, nos dias de hoje, exige um empenho voltado para a formação de estudantes que não fique restrita ao consumo de informações do mundo contemporâneo, mas que os leve a serem capazes de interpretar a realidade, articulando os conhecimentos construídos às habilidades de investigação e aos valores de convivência com a diversidade, com o espaço e com a natureza.

Esperamos que esta coleção seja de grande apoio nessa tarefa e que, assim, possamos participar da construção de um mundo mais justo e solidário para todos.

Bom trabalho!

Equipe editorial

Sumário

A ESCOLA NO SÉCULO XXI – EDUCAÇÃO PARA COMPETÊNCIAS

Já há algumas décadas, vêm perdendo espaço os modelos tradicionais de aprendizagem, nos quais o ensino é baseado na figura do professor como detentor do conhecimento e responsável por transmiti-lo aos estudantes, que, por sua vez, devem memorizá-lo. No decorrer do século XX, pesquisadores do campo da educação, fundamentando-se nos estudos da psicologia do desenvolvimento e da aprendizagem, passaram a defender outros modos de ensinar e de aprender, com base nas atitudes do estudante e no contexto em que está inserido. Essas novas ideias ganharam força não apenas porque propõem um ensino mais motivador, mas também porque defendem que, para haver aprendizagem real, é necessário que o estudante esteja envolvido no processo, estabelecendo relações que vão resultar no próprio conhecimento. Em suma, **o estudante deve ser o sujeito da aprendizagem**.

Esses pesquisadores colocaram aos profissionais da educação o desafio de mudar a maneira de ensinar, e de fato alguns avanços vêm ocorrendo desde então. No entanto, as transformações deste século impõem ações mais assertivas na busca por uma educação mais eficiente. O início do século XXI tem sido marcado por inovações em diferentes âmbitos, e as mudanças ocasionadas na tecnologia da informação e da comunicação têm alterado os modos de usufruir e de compartilhar conteúdos, já que uma parte expressiva do conhecimento produzido pelos seres humanos está atualmente disponível na internet. Essa facilidade de acesso a qualquer tipo de informação traz novos desafios à educação formal. O ensino do início do século passado, fundamentado na transmissão e na acumulação de conteúdos, não atende às demandas contemporâneas. A escola hoje deve auxiliar o estudante a desenvolver aprendizagens para usar de modo crítico e reflexivo seu conhecimento tecnológico e as informações a que tem acesso, para que se torne um cidadão pleno e atuante na sociedade do século XXI.

SÉCULO XX

Ensino fundamentado na transmissão e na acumulação de conteúdos

SÉCULO XXI

Desenvolvimento de aprendizagens para uso do conhecimento de modo crítico e reflexivo

→ Cidadão pleno e atuante na sociedade

Nesse contexto, as noções de habilidade e de competência vêm sendo amplamente debatidas na educação. De acordo com Perrenoud (1999), podemos considerar que habilidade é a capacidade de se expressar verbalmente ou de realizar determinadas operações matemáticas, por exemplo. Competência, porém, é a faculdade de mobilizar um conjunto de saberes, de capacidades, de informações, etc. – ou seja, de habilidades – para solucionar com pertinência e eficácia uma série de situações. Assim, a habilidade de realizar operações matemáticas e a habilidade de se expressar verbalmente podem ser usadas em conjunto, por exemplo, para negociar com os colegas e solucionar um problema de orçamento.

COMPETÊNCIA

Faculdade de mobilizar habilidades para solucionar situações com pertinência e eficácia.

Capacidade de se expressar ou de realizar determinadas operações.

A construção de uma competência é própria de cada indivíduo e se realiza nos momentos em que ele é capaz de mobilizar conhecimentos prévios e ajustá-los a determinada situação. Em síntese, "a competência é agir com eficiência, utilizando com propriedade conhecimentos e valores na ação que desenvolve e agindo com a mesma propriedade em situações diversas" (Cruz, 2001, p. 31). A educação do século XXI deve se voltar ao desafio de proporcionar ao estudante o desenvolvimento de certas habilidades e competências, ou seja, deve formar pessoas que:

- dominem a escrita e a leitura;
- consigam se comunicar com clareza;
- saibam buscar informações e consigam utilizá-las com propriedade para elaborar argumentos e tomar decisões;
- sejam capazes de trabalhar em equipe, de construir um olhar crítico sobre a sociedade, de criar soluções para os problemas e, principalmente, de avaliar a própria aprendizagem.

Ao professor, cabe uma mudança de metodologia para auxiliar os estudantes a desenvolver habilidades e competências. Na sociedade da informação, mais do que ensinar conceitos, a escola e o professor devem proporcionar situações que permitam ao estudante explorar diferentes universos e aplicar os saberes construídos para atuar com eficiência em sua vida pessoal, comunitária e, futuramente, profissional.

O professor converte-se, então, em facilitador ou mediador da aprendizagem, e não na fonte única e exclusiva de conhecimentos que devem ser memorizados. Nesse cenário, torna-se muito mais importante valorizar: a investigação como processo de aprendizagem, em vez da transmissão de conceitos; o estudante como protagonista de seu processo de aprendizagem, em vez do professor como figura central desse processo; e o desenvolvimento de diversas habilidades cognitivas, em vez da rápida memorização dos conteúdos.

É preciso, portanto, que o professor tenha consciência do papel que ocupa no processo de ensino-aprendizagem e assuma sua responsabilidade quanto a isso. Machado (2004) defende que, nesse ponto, não há simetria entre estudante e professor, e o profissional é o professor. Como participantes de um processo de mão dupla, ainda que não necessariamente simétrico, professores e estudantes ocupam, cada um a seu modo, o centro de um destes dois espaços privilegiados: o ensino e a aprendizagem, respectivamente.

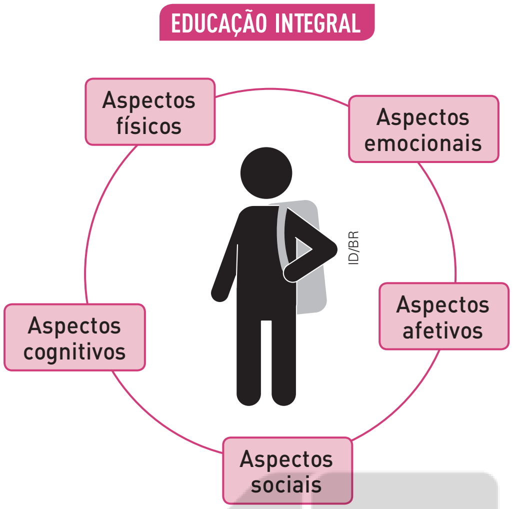
Dessa maneira, até mesmo professores especialistas podem diversificar as ferramentas de ensino de seu componente curricular para trabalhar habilidades e competências. Em atividades específicas, pode-se apresentar diferentes situações-problema ao estudante com o objetivo de trabalhar conjuntamente uma série de habilidades e competências. Assim, ele pode desempenhar um papel mais ativo na construção do próprio conhecimento, tornando-se capaz de realizar aprendizagens significativas. O estudante também pode ter mais oportunidades de refletir sobre o próprio aprendizado ao realizar uma constante autoavaliação de suas resoluções e procedimentos, de modo que esteja sempre os aprimorando. Consequentemente, ele pode situar-se criticamente e de forma autônoma na sociedade.

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) teve sua formulação coordenada pelo Ministério da Educação, com ampla consulta à comunidade educacional e à sociedade. Trata-se de um documento que define as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica, em conformidade com o Plano Nacional de Educação (PNE).

A BNCC está orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, conforme determinam as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN).

Denomina-se **educação integral** a formação voltada ao desenvolvimento humano global, integrando a dimensão intelectual cognitiva e a dimensão afetiva, segundo o processo complexo e não linear do desenvolvimento da criança, do adolescente e do jovem, em um ambiente de aprendizagem e de democracia inclusiva, afirmada nas práticas de não discriminação, de não preconceito e de respeito às diversidades.



TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS

Em consonância com o propósito de promover uma aprendizagem mais significativa aos estudantes e o engajamento deles com as situações de aprendizagem, vem se consolidando nas últimas décadas a necessidade da inclusão de questões sociais e de situações próprias da realidade dos discentes como objeto de reflexão e aprendizagem. Nessa perspectiva, cabe aos sistemas e às redes de ensino incluir em seus currículos "temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora" (Brasil, 2018a, p. 19), ou seja, os chamados Temas Contemporâneos Transversais (TCTs).

Os TCTs não fazem parte de uma área de conhecimento específica, mas perpassam todas elas, e estabelecem ligações entre diferentes componentes curriculares. A BNCC organiza esses temas em seis macroáreas: Meio Ambiente, Economia, Saúde, Cidadania e Civismo, Multiculturalismo, e Ciência e Tecnologia. Cada uma dessas áreas pode ser dividida nos temas indicados no esquema a seguir.

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS NA BNCC

CIÊNCIA E TECNOLOGIA
- Ciência e Tecnologia

MEIO AMBIENTE
- Educação Ambiental
- Educação para o Consumo

ECONOMIA
- Trabalho
- Educação Financeira
- Educação Fiscal

MULTICULTURALISMO
- Diversidade Cultural
- Educação para Valorização do Multiculturalismo nas Matrizes Históricas e Culturais Brasileiras

CIDADANIA E CIVISMO
- Vida Familiar e Social
- Educação para o Trânsito
- Educação em Direitos Humanos
- Direitos da Criança e do Adolescente
- Processo de Envelhecimento, Respeito e Valorização do Idoso

SAÚDE
- Saúde
- Educação Alimentar e Nutricional

Nesta coleção, a abordagem de um Tema Contemporâneo Transversal baseia-se na problematização da realidade e das situações de aprendizagem, na integração das habilidades e competências curriculares em sua articulação com a resolução de problemas, e na visão do conhecimento como uma construção coletiva.

AS COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

A BNCC propõe que, ao longo da Educação Básica, o aprendizado deve concorrer para que o estudante desenvolva as dez competências gerais, a saber:

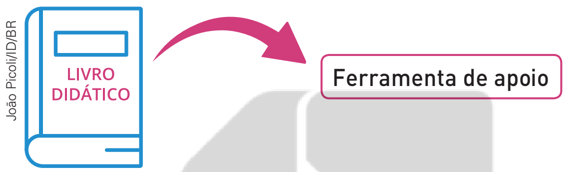
1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(Brasil, 2018a, p. 9-10)

A determinação dessas competências pela BNCC, em consonância com o que foi apresentado anteriormente, evidencia a proposta de um ensino com foco na capacidade de aprender a aprender, de saber lidar com a disponibilidade cada vez maior de informações, de atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, de aplicar conhecimentos para resolver problemas, de ter autonomia para tomar decisões, de ser proativo para identificar os dados em uma situação e buscar soluções e de conviver em harmonia com as diversidades.

A BNCC explicita as aprendizagens essenciais a serem desenvolvidas em cada componente curricular sem fixar currículos, mas incentivando especialmente a contextualização do que se aprende e o protagonismo do estudante. Essa abordagem possibilita maior equidade educacional, pois busca assegurar que todos – sem distinção de raça, gênero ou condição socioeconômica – tenham acesso à educação.

O desafio atual é compreender o conjunto de propostas da BNCC e colocá-lo em prática na realidade de cada escola. Nesse sentido, o livro didático pode ser uma ferramenta de apoio às redes de ensino e aos professores, que devem ter em mente que esse material não impõe um currículo nem deve ser encarado como única fonte de informação e conhecimento.



COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS E HABILIDADES DE MATEMÁTICA

A Matemática é fundamental em nossa sociedade, sobretudo como recurso para lidar com diversas situações do cotidiano. Trata-se de uma ferramenta básica para o desenvolvimento de várias habilidades e competências e para a compreensão e o aprendizado de outras áreas do conhecimento. É também parte integrante da cultura científica e da tecnológica, apresentando-se como uma ciência com características próprias de investigação e linguagem.

Desse modo, é necessário que, como componente curricular, a **Matemática seja percebida como um instrumento de análise e compreensão da realidade que favorece a tomada de decisão diante de situações-problema do dia a dia**. Se a realidade requer habilidades matemáticas, também é fato que a escola é um local privilegiado para que elas se desenvolvam, pois no ambiente escolar os indivíduos podem exercitar diferentes situações de análise, discussão e prática dos conhecimentos formais. Além de desenvolver as habilidades e o senso crítico, na atividade escolar os estudantes podem participar de diversas ações de cooperação, solidariedade e respeito às normas e às diferenças culturais e sociais, que são oportunidades para o exercício da ética e da cidadania consciente. O aprimoramento dessas habilidades pode ocorrer ainda pelo contato crítico dos estudantes com a realidade interpretada: por notícias de jornal, televisão e outras mídias; por filmes e séries de televisão; por textos de publicidade e propaganda; pelo uso da internet e pela participação em redes sociais; e pela leitura variada de textos, como receitas, histórias em quadrinhos, livros de literatura, etc.

Desde o início do contato formal dos estudantes com a Matemática, é importante levá-los a perceber que esse componente curricular, ensinado e aprendido em sala de aula, está presente nas mais diversas situações da vida social (por exemplo, nas relações comerciais cotidianas e no orçamento doméstico) e da cultura (como na arquitetura, nas artes plásticas, na literatura e nos esportes). Em geral, a simples aproximação do conhecimento a situações cotidianas não é suficiente para estabelecer conexões entre o conhecimento empírico – adquirido na prática – e o conhecimento científico. No entanto, apesar de tal contextualização não ser capaz de transformar propriamente o conhecimento empírico em científico, ela permite explorar certas contradições e limitações de ambos os saberes, de modo a incentivar os estudantes a refletir sobre seus conhecimentos prévios.

Não há exagero em afirmar que, durante o processo de ensino e aprendizagem, o professor e o estudante estabelecem uma relação de cumplicidade. O papel do educador é de fundamental importância, já que suas atitudes são sempre observadas e avaliadas pela turma.

Ao estabelecer conexões entre o conhecimento prévio dos estudantes e o novo conhecimento, é possível desenvolver uma aprendizagem significativa e duradoura, capaz de permitir aos estudantes que apliquem seus conhecimentos nas mais diversas situações da vida escolar e cotidiana.

> [...]
>
> A vinda da criança para a instituição tem um objetivo claro e determinado: aprender determinados conhecimentos e, para tanto, dominar instrumentos específicos que lhe possibilitem esta aprendizagem.
>
> A relação da criança com o adulto, na escola, é mediada, então, pelo conhecimento formal. O professor detém o conhecimento formal que o educando deverá adquirir e a interação entre ambos deve ser tal que permita e promova a aprendizagem deste conhecimento. Desta forma, podemos dizer que a ação do professor é uma ação específica e apresenta, portanto, características que a distinguem da ação dos outros adultos com quem a criança convive.
>
> A ação pedagógica implica, portanto, numa relação especial em que o conhecimento é construído. Para tanto, exige do adulto uma ação adequada às possibilidades de desenvolvimento e aprendizagem de seus educandos. Esta relação não pode ser reduzida a uma atitude autoritária de quem detém o conhecimento e o transmite. Deve ser, antes, a atitude criativa de quem detém o conhecimento formal e possibilita a formulação deste conhecimento pelo aluno.
>
> (Lima, 2003, p. 21)

Corroborando essas ideias, a BNCC dá ênfase ao letramento e aos processos matemáticos, como podemos ver a seguir.

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**[1], definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição).
>
> [...] Os **processos matemáticos** de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional.
>
> (Brasil, 2018a, p. 266)

[1] Segundo a Matriz do Pisa 2012, o "letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.". Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 9 jun. 2022.

Com isso, deve-se garantir que os estudantes desenvolvam as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

(Brasil, 2018a, p. 267)

Em síntese, realizar descobertas, elaborar conhecimentos e aprimorar e ampliar estratégias são atividades que incentivam no estudante o desenvolvimento de competências cognitivas e a autonomia, bem como o aprimoramento de suas maneiras de expressão e comunicação, o que, em geral, contribui para um melhor relacionamento interpessoal.

ESTRATÉGIAS E ABORDAGENS

AS INTERAÇÕES DISCIPLINARES NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Uma das características marcantes de nosso sistema de ensino é a fragmentação do conhecimento. Transferimos para as salas de aula uma divisão do saber em componentes curriculares, característica do modo de trabalho acadêmico. Para Lopes (2008, p. 54):

> O entendimento do que vem a ser uma disciplina é particularmente calcado na compreensão epistemológica de uma disciplina científica: uma forma específica de organizar e delimitar um território de pesquisa, que redunda em um conjunto específico de conhecimentos com características comuns – tanto do ponto de vista de sua produção teórico-metodológica quanto do ponto de vista de sua transmissão no ensino e na divulgação.

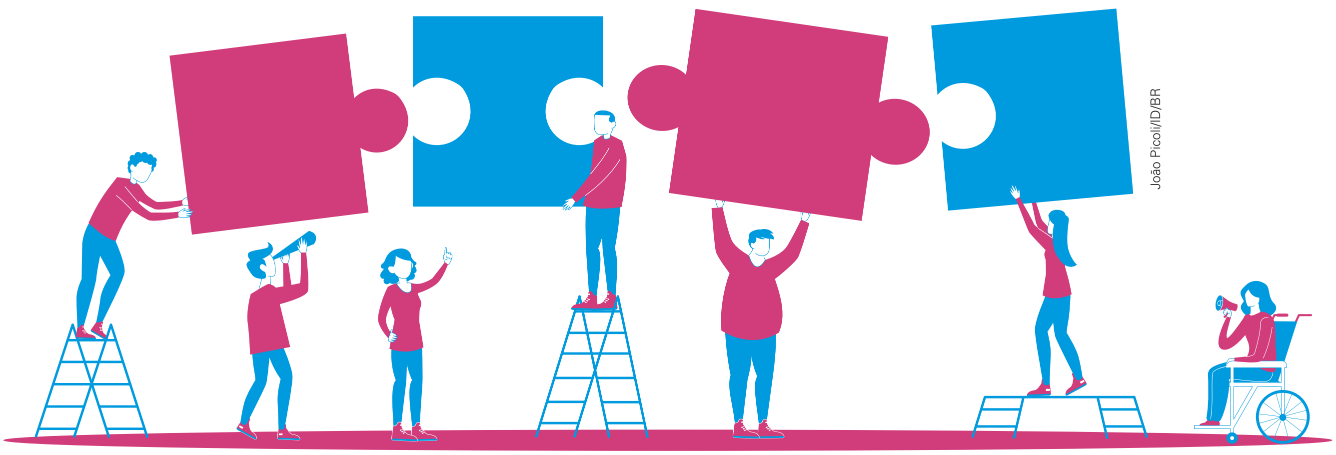
Os críticos à compartimentalização do conhecimento argumentam que o espelhamento entre os componentes curriculares acadêmicos e os componentes curriculares escolares não são compatíveis com os objetivos da educação atual, para a qual uma das grandes metas é que o estudante adquira uma visão global e torne-se um cidadão capaz de avaliar e resolver problemas, atuando criticamente na sociedade.

Vemo-nos, então, em um dilema. Se acreditamos que a Matemática tem uma maneira própria de abordar questões e de construir conhecimento sobre o mundo, reconhecemos o caráter único desse componente curricular e focamos em colaborar para que os estudantes compreendam seus eixos estruturantes.

Ainda assim, devemos perceber que apresentar aos estudantes essa visão fragmentada do conhecimento não contribui para uma visão de mundo global, para o reconhecimento de problemas e sua análise crítica. Desse modo, a aprendizagem de Matemática se reduziria a fragmentos ou detalhes, cada vez mais específicos, descontextualizados, que tenderiam, portanto, a não apresentar um significado para os estudantes.

Sem ter a visão do todo ou sem estar ao menos ciente de que há um todo, fica praticamente impossível a um aprendiz unir as peças e remontar, pelo menos em parte, o quebra-cabeça que as diversas ciências vêm compondo sobre o mundo. É óbvio, portanto, que a visão fragmentada do mundo e, em especial, a fragmentação no processo de ensino e aprendizagem precisam ser superadas. No entanto, como fazê-lo?

É certo que não temos respostas simples e que revolucionem a tradição do ensino compartimentado. Porém, o trabalho interdisciplinar e transdisciplinar, a inclusão de Temas Contemporâneos Transversais e a realização de projetos interáreas e intra-áreas do conhecimento nos fazem avançar nesse sentido.



João Picoli/ID/BR

Tais estratégias são válidas e permitem ganhos expressivos em eficácia na aprendizagem. Há em Matemática, por exemplo, noções e conceitos-chave que permeiam os muitos componentes curriculares. A seleção e a eleição dessas noções ou conceitos centrais como foco de trabalho interdisciplinar podem ser muito instigantes.

As ideias de operações numéricas e de transformação entre as unidades de medida, por exemplo, estão presentes e são relevantes em diversas áreas científicas, da Física à História, da Geologia à Geografia, passando pela Química e pela Biologia. Essas noções de natureza interdisciplinar podem, portanto, ser uma motivação especial para a abordagem da Matemática.

Os Temas Contemporâneos Transversais, por sua vez, representam o viés social que também se deseja no ensino. O trabalho com os temas propostos na BNCC, por exemplo, contribui de maneira significativa para a compreensão de questões consideradas de urgência social e de interesse da sociedade, de modo geral, ou que representem interesses locais vinculados diretamente à realidade ou a aspectos da vida social.

Vale lembrar que, quando se trata de relações entre componentes, o objetivo principal é combinar análise e síntese. A análise é necessária como procedimento e como habilidade cognitiva a ser desenvolvida pelos estudantes. A síntese reunifica os fatos e permite uma visão mais abrangente da situação que está sendo estudada. Assim, o trabalho conjunto e a aproximação com outros componentes curriculares, como História, Ciências e Arte, também devem ser vistos como estratégias que potencializam a aprendizagem da Matemática.

RELAÇÕES ENTRE COMPONENTES CURRICULARES

ANÁLISE
Procedimento e habilidade cognitiva a ser desenvolvida pelos estudantes.

+

SÍNTESE
Reunifica os fatos e possibilita uma visão mais abrangente da situação estudada.

=

ESTRATÉGIAS QUE POTENCIALIZAM A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA.

METODOLOGIAS ATIVAS

As demandas da sociedade atual exigem que a escola altere o modo como orienta a construção de conhecimentos, já que os estudantes hoje são rodeados de tecnologias e ferramentas digitais que lhes permitem acessar informações de forma rápida – não cabendo, portanto, que sejam meros receptores de conteúdo.

Nesse sentido, a expressão “metodologias ativas” vem sendo bastante usada no meio educacional, tanto para tratar de abordagens que tornem as aulas experiências significativas de aprendizagem quanto para se referir a estratégias de ensino que privilegiam o estudante como autor do próprio aprendizado, em oposição ao uso exclusivo de abordagens tradicionais, que se valem somente da exposição de conteúdo.

O contexto contemporâneo propicia o uso dessas metodologias, pois vivemos um momento em que se combinam a disponibilidade das tecnologias de informação e de comunicação com as demandas de transformação da sociedade.

> A metodologia ativa se caracteriza pela inter-relação entre educação, cultura, sociedade, política e escola, sendo desenvolvida por meio de métodos ativos e criativos, centrados na atividade do aluno com a intenção de propiciar a aprendizagem.
>
> (Almeida *in* Bacich; Moran, 2018, p. XI)

As metodologias ativas são estratégias de ensino que indicam novos caminhos para as práticas pedagógicas. Visam deixar as aulas mais interessantes e dinâmicas e possibilitar maior autonomia aos estudantes, valorizando suas opiniões, reflexões, conhecimentos prévios e experiências, de modo a torná-los mais preparados para atuar na vida em sociedade.

Ao se engajarem nas propostas de aprendizagem, os estudantes passam a ocupar o centro desse processo e, assim, podem ter iniciativa, debater, tomar decisões, resolver problemas, realizar experimentos, questionar e testar, colaborar em equipe, gerenciar projetos e coordenar tempos pessoais e coletivos, adquirindo habilidades e competências que transbordam os limites da vida escolar, o que lhes propicia experiências significativas e geradoras de novas práticas em direção ao conhecimento.

METODOLOGIAS ATIVAS →

- Participação efetiva dos estudantes na construção da aprendizagem
- Aulas mais interessantes e dinâmicas
- Maior autonomia dos estudantes
- Valorização de opiniões, reflexões, conhecimentos prévios e experiências
- Preparação para atuar na vida em sociedade

Como sugere Moran (2018), a aprendizagem por meio de questionamento e experimentação é mais desafiadora e, por sua vez, motivadora para os estudantes, pois torna o conhecimento mais prático, flexível, interligado e híbrido.

> […] envolve pesquisar, avaliar situações e pontos de vista diferentes, fazer escolhas, assumir riscos, aprender pela descoberta e caminhar do simples para o complexo. Os desafios bem planejados contribuem para mobilizar as competências desejadas, sejam intelectuais, emocionais, pessoais e comunicacionais.
>
> (Moran, 2018, p. 15)

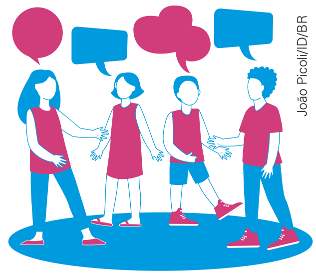
Logo, é fundamental incentivar as potencialidades individuais, como a criatividade, o foco e a sensibilidade, contribuindo para que os estudantes desenvolvam seu potencial. Diante disso, esta coleção propicia a utilização de metodologias ativas, com as seguintes propostas:

- atividades desafiadoras;
- produções que combinam percursos pessoais com participação significativa dos grupos;
- trabalhos colaborativos, com foco em pesquisa e investigação a partir de uma situação-problema;
- criação de eventos;
- utilização de tecnologias adequadas para a realização dessas práticas.

Para viabilizar a condução dessas propostas, a obra oferece uma variedade de estratégias didáticas, como discussão em grupo, trabalho em equipe com distribuição de tarefas, debate sobre temas atuais e execução de projetos.

Na seção *Investigar* há exemplos mais evidentes de como as metodologias ativas são aplicadas na obra, pois os estudantes partem de uma situação a ser investigada por eles com base em procedimentos de coleta, organização e análise de dados. Os resultados obtidos são, então, divulgados à comunidade escolar, de acordo com o propósito da pesquisa. Neste volume, após a unidade 4, a proposta dessa seção é investigar personalidades da Matemática, e, após a unidade 8, a seção propõe uma pesquisa para descobrir a taxa de natalidade no Brasil nos 50 anos anteriores a 2020. Outro exemplo evidente de trabalho com metodologias ativas ocorre na seção *Interação*, em que os estudantes são convidados a desenvolver um projeto de pesquisa sobre imigrantes e refugiados.

ARGUMENTAÇÃO


João Picoli/ID/BR

Uma educação voltada à formação de sujeitos críticos, conscientes, questionadores e que agem orientados por princípios éticos e democráticos propicia o desenvolvimento da **competência argumentativa** dos estudantes. Essa competência lhes possibilita reconhecer sensos comuns, separar fatos de opiniões, analisar premissas e pressupostos e avaliar argumentos de autoridades para formar opiniões próprias com base em critérios objetivos. Além disso, favorece a participação atuante na sociedade ao oferecer subsídios para que os estudantes exponham suas ideias e seus conhecimentos com clareza, organização e respeito aos direitos humanos. Como explica Fiorin (2016), a vida em sociedade

> [...] trouxe para os seres humanos um aprendizado extremamente importante: não se poderiam resolver todas as questões pela força, era preciso usar a palavra para persuadir os outros a fazer alguma coisa. Por isso, o aparecimento da argumentação está ligado à vida em sociedade e, principalmente, ao surgimento das primeiras democracias. No contexto em que os cidadãos eram chamados a resolver as questões da cidade é que surgem também os primeiros tratados de argumentação. Eles ensinam a arte da persuasão.
>
> Todo discurso tem uma dimensão argumentativa. Alguns se apresentam como explicitamente argumentativos (por exemplo, o discurso político, o discurso publicitário), enquanto outros não se apresentam como tal (por exemplo, o discurso didático, o discurso romanesco, o discurso lírico). No entanto, todos são argumentativos: de um lado, porque o modo de funcionamento real do discurso é o dialogismo; de outro, porque sempre o enunciador pretende que suas posições sejam acolhidas, que ele mesmo seja aceito, que o enunciatário faça dele uma boa imagem. Se, como ensinava Bakhtin, o dialogismo preside à construção de todo discurso, então um discurso será uma voz nesse diálogo discursivo incessante que é a história. Um discurso pode concordar com outro ou discordar de outro. Se a sociedade é dividida em grupos sociais, com interesses divergentes, então os discursos são sempre o espaço privilegiado de luta entre vozes sociais, o que significa que são precipuamente o lugar da contradição, ou seja, da argumentação, pois a base de toda a dialética é a exposição de uma tese e sua refutação.
>
> (Fiorin, 2016, p. 9)

É fundamental, portanto, que os estudantes desenvolvam o raciocínio lógico e construam argumentos bem embasados, de modo que estejam aptos a defender seus posicionamentos e a negociar com seus interlocutores para, junto a eles, tomar as melhores decisões. Por essa razão, nesta obra, além do trabalho com foco no reconhecimento, na apreensão e no uso de estratégias argumentativas por meio da análise e da produção de textos dessa natureza, há diversas oportunidades em que se incentivam discussões sobre temas relevantes. Por exemplo, antes e depois da realização de atividades propostas, os estudantes são convidados a expor suas opiniões, seus conhecimentos prévios e suas impressões gerais sobre as estratégias utilizadas na resolução de um problema. A argumentação se apresenta por meio de atividades discursivas orais ou escritas. Em algumas atividades há momentos reservados à discussão e ao posicionamento sobre um tema. Já nas atividades propostas nas seções especiais há o incentivo à pesquisa e à análise de dados, o que, por conseguinte, requer discussão em grupo para avaliação das fontes e dos dados obtidos.

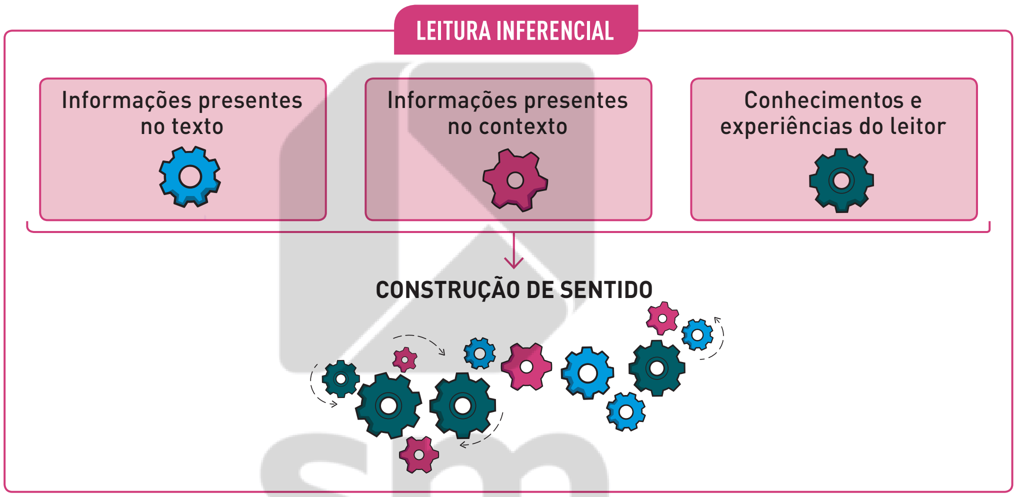
Assim, esta coleção contribui para que os estudantes desenvolvam a competência argumentativa de forma sistemática e orgânica, garantindo respeito à pluralidade de ideias e ao lugar de fala dos jovens e favorecendo, sobretudo, o desenvolvimento da competência geral 7 da BNCC.

LEITURA INFERENCIAL

O processo inferencial permite a organização dos sentidos elaborados pelo leitor em sua interação com o texto. A capacidade de realizar uma leitura em níveis inferenciais é uma característica essencial para a compreensão da linguagem, pois, da mesma maneira que o leitor memoriza as informações óbvias no texto, ele absorve as informações inferidas. Desse modo, compreender a linguagem é entender as relações entre o que está explícito no texto e aquilo que o leitor pensa, conclui e infere por conta própria, com base em seu conhecimento de mundo e em suas experiências de vida. Fazer inferências possibilita ao leitor, com base em informações presentes no texto, refletir e gerar novos conhecimentos, os quais passam então a fazer parte do conjunto de saberes desse leitor.

A inferência é um processo cognitivo que vai além da leitura e passa pelo entendimento ou pela suposição de algo desconhecido, fundamentado na observação e no repertório cultural do leitor. Trata-se, então, da conclusão de um raciocínio ou do levantamento de um indício com base no estabelecimento de relações.

A compreensão de um texto depende da qualidade e da quantidade de inferências geradas durante a leitura, visto que os textos contêm informações explícitas e implícitas, deixando lacunas a serem preenchidas pelo leitor. Ao associar informações explícitas a seus conhecimentos prévios, o estudante dá sentido ao conteúdo do texto e apreende detalhes e sequências, bem como as relações de causa e efeito. Portanto, a inferência ocorre com a interação do leitor com o texto, ou seja, por meio da leitura. As capacidades de concluir, deduzir, levantar hipóteses, ressignificar informações e formular novos sentidos são essenciais para a atuação consciente e responsável do estudante na sociedade, pois assim ele estará preparado para entender contextos históricos, compreender disputas políticas ou mesmo projetar soluções para problemas reais e cotidianos. Ao gerar uma nova informação partindo de uma anterior, já dada, o estudante desenvolve sua capacidade de reconhecer os diversos pontos de uma situação e de propor resoluções factíveis que beneficiem a maioria dos envolvidos.



João Picoli/ID/BR

Nesta coleção, o exercício da leitura inferencial é realizado de diversas formas, tanto na abordagem dos conteúdos como na execução das atividades. Por exemplo, em muitos momentos há perguntas que motivam o estudante a antecipar informações e a verificar se suas hipóteses são plausíveis, instigando-o a acessar seus conhecimentos prévios nesse processo. Com isso, pode-se levar o estudante a explicar o que está implícito em um texto, a preencher lacunas de informação com base em dados já fornecidos e a excluir ou confirmar hipóteses levantadas durante a leitura.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Costuma-se imaginar que o pensamento computacional diz respeito a saber navegar na internet, utilizar as redes sociais, enviar *e-mails* ou usar ferramentas digitais para elaborar um texto ou resolver uma equação, porém o conceito de pensamento computacional está relacionado, na verdade, a estratégias voltadas a solucionar problemas de maneira eficaz.

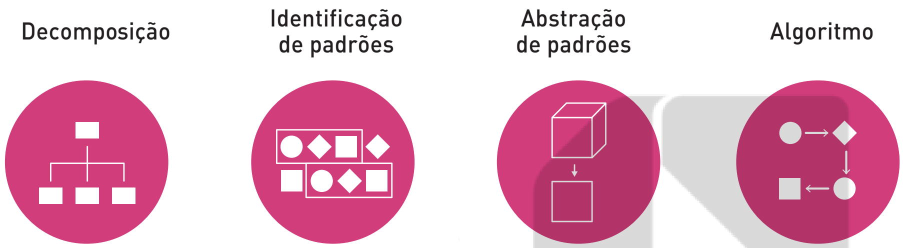
> O Pensamento Computacional é uma distinta capacidade criativa, crítica e estratégica humana de saber utilizar os fundamentos da Computação, nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de identificar e resolver problemas, de maneira individual ou colaborativa, através de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente.

(Kurshan, 2016 *apud* Brackmann, 2017, p. 29)

Essa estratégia de ensino e aprendizagem está próxima do pensamento analítico, que – assim como a Matemática, a Engenharia e a Ciência – busca, entre outras questões, aprimorar a proposição de soluções para problemas. De acordo com a BNCC, o pensamento computacional:

> [...] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos.
>
> (Brasil, 2018a, p. 474)

Em síntese, o pensamento computacional pode ser entendido como uma habilidade para identificar e resolver problemas em que a solução proposta pode ser executada por meio de um computador. Para que isso aconteça, podem-se utilizar conceitos e práticas comuns à computação, mas não restritos a ela, como a simplificação de situações-problema com base na identificação de seus elementos essenciais e na similaridade com contextos anteriores (também definida como abstração), a decomposição de problemas em partes menores e a definição de sequências de ações para a realização e a automação de tarefas (Grover; Pea, 2013).



João Picoli/ID/BR

De maneira geral, o pensamento computacional pode ser organizado em quatro etapas: decomposição, identificação de padrões, abstração de padrões e algoritmo.

Atividades direcionadas podem desenvolver algumas formas de pensar próprias, marcadas pelo pensamento algorítmico, como a linguagem específica da tecnologia computacional para descrever processos regrados por etapas bem definidas. Entre esses recursos de linguagem estão os fluxogramas e os algoritmos destacados nas habilidades da BNCC para descrever o processo de resolução de problemas.

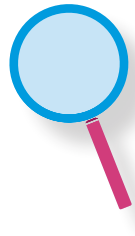
Nesse sentido, a problematização favorece diferentes maneiras de pensar, compreender e analisar um mesmo problema, colaborando para o desenvolvimento das seguintes habilidades que compõem o pensamento computacional:

- formulação de problemas;
- análise de dados de forma lógica e organizada;
- representação da realidade por meio de abstrações;
- proposição de soluções por meio de identificação e análise crítica dos problemas;
- transferência da solução encontrada para resolver problemas análogos.

Compreendendo a lógica que aproxima a resolução de problemas ao pensamento computacional, as atividades propostas aos estudantes nesta coleção podem contribuir para o desenvolvimento de competências fundamentais no século XXI, como produzir algo por meio da abstração, raciocinar sobre a resolução de um problema e correlacionar estratégias utilizadas na computação com a Matemática e com outras áreas de conhecimento, permitindo que os estudantes trabalhem a criatividade e elaborem novas ideias.

Esta coleção propõe experiências didáticas para que o pensamento computacional possa integrar a formação dos estudantes, tornando-os aptos a intervir de forma cidadã no meio em que vivem. Como exemplo dessas práticas, temos as situações-problema em que os estudantes devem reconhecer padrões, identificando as características de problemas apresentados na seção *Resolvendo problemas* e definindo estratégias de resolução por meio das seguintes etapas: *Compreensão do problema*, *Resolução do problema* e *Reflexão sobre o problema*. Além disso, há o encadeamento de processos, como o de construção de gráficos estatísticos.

INVESTIGAÇÃO E PRÁTICAS DE PESQUISA


ID/BR

A proposição de questões ou problemas deve servir ao processo típico do pensar e do fazer científicos, que envolve a admiração e o questionamento dos estudantes diante de algo, a ponto de formularem hipóteses ou suposições e sentirem-se motivados a empreender uma investigação.

Portanto, a proposição de uma questão ou de um problema inicial é fundamental. Ela é o estopim do processo de pensar e agir cientificamente. Mas, tão importante quanto a problematização ou a geração de um conflito inicial é possibilitar meios para que os estudantes percorram o caminho investigativo que os levará à solução do problema e à aprendizagem de fato.

O que chamamos aqui de investigação ou de estratégias investigativas envolve grande variedade de atividades, como a realização de experimentos, as entrevistas e as pesquisas em livros e em multimeios. Assim, nas aulas de Matemática, investigação envolve todo o tipo de atividade acompanhada de situações problematizadoras que levem à busca ativa de dados ou informações – que, uma vez analisados e discutidos, conduzam à solução de um problema ou à geração de informações que evidenciem ou contradigam uma ou mais hipóteses ou suposições formuladas.

Na realidade, o que faz com que uma atividade seja considerada de investigação é a forma como ela é apresentada e conduzida pelo professor e o caráter que ela assume nesse processo de ensino e aprendizagem.

> A atividade investigativa é aquela que possibilita, sobretudo, a reflexão crítica e o engajamento ativo. Esse tipo de atividade exige que os estudantes mobilizem várias habilidades (reflexão, discussão, pesquisa, relatório, explicação, construção, etc.), demanda a tomada de atitudes e a expressão de valores (colaboração, respeito, organização, criatividade, etc.) e requer da parte deles o conhecimento de variados conteúdos de natureza conceitual (informações, fatos, dados, conceitos, vocabulário específico, teorias já estabelecidas, etc.).

Para resolver um problema, os estudantes deverão mobilizar diferentes habilidades cognitivas e processuais. Entre essas habilidades estão aquelas relacionadas ao pensamento científico: a observação, a formulação de hipóteses, o planejamento e a construção de modelos, a realização de testes e experimentos, a coleta, a sistematização e a análise de dados e informações, o estabelecimento de sínteses e relações e a comunicação de conclusões, entre outras.

Além disso, as atividades investigativas oferecem aos estudantes oportunidades de desenvolver habilidades relacionadas à linguagem na modalidade oral – como a construção de um discurso oral coerente para apresentar uma explicação, argumentar ou relatar um experimento – e na modalidade escrita – como nas situações de comunicação de resultados, seja em um relatório ou em um cartaz, por exemplo. Inclusive, deve ser incentivado o uso de outras linguagens, como a linguagem típica da Geografia na produção e leitura de mapas.

Percebe-se, desse modo, que a escolha e o planejamento de atividades investigativas são fundamentais em uma proposta de ensino de Matemática que vise ao desenvolvimento do pensar e do agir de maneira científica, sem no entanto negligenciar a aquisição de conteúdos conceituais.

Ademais, se conduzidas de maneira colaborativa e solidária, atividades investigativas favorecem a consolidação de valores e atitudes e exemplificam a construção do conhecimento científico. Ou seja, elas possibilitam também vivenciar e debater o caráter coletivo, social e cultural do conhecimento científico.

Os estudantes devem aprender a pesquisar durante a Educação Básica, e para isso se faz necessário ensinar o **comportamento do pesquisador**. Esse comportamento, por sua vez, está intimamente relacionado ao desenvolvimento da intelectualidade, que envolve as capacidades de analisar, comparar, refletir, levantar hipóteses, estabelecer relações e sintetizar, entre outras.

Assim, é preciso um planejamento para que a aprendizagem do **ato de pesquisar** seja desenvolvida, trazendo aos estudantes habilidades inerentes a esse processo. São elas:

- localizar, selecionar e compartilhar informações;
- ler, compreender e interpretar textos;
- consultar, de forma crítica, fontes de informações diferentes e confiáveis;
- formar e defender opiniões;
- argumentar de forma respeitosa;
- sintetizar;
- expor oralmente o aprendizado, apoiando-se em diferentes recursos;
- generalizar conhecimentos;
- produzir gêneros acadêmicos.

A própria história da Matemática é um recurso para tal aprendizado. De acordo com a BNCC:

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, é importante incluir a **história da Matemática** como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar **integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos**.
>
> (Brasil, 2018a, p. 298, grifos nossos)

De acordo com Oliveira V., Oliveira C. e Vaz (2014), a história da Matemática é considerada um instrumento de investigação das origens e descobertas, das notações matemáticas e dos métodos desenvolvidos ao longo do tempo. Além disso, esses autores destacam que a base

> [...] do que hoje conhecemos como Matemática foi desenvolvida ao longo de muitos anos, desde os primórdios da sociedade organizada até a contemporaneidade. Reconhecer esse processo histórico é fundamental para compreender as origens das ideias que deram forma à cultura, e também observar os aspectos humanos de seu desenvolvimento, enxergar os homens que contribuíram nesse processo evolutivo da ciência, bem como as circunstâncias que as desenvolveram.
>
> (Oliveira; Oliveira; Vaz, 2014, p. 459)

Ao propor aos estudantes a realização de uma pesquisa, é fundamental compartilhar com eles por que a pesquisa está sendo realizada e a relação dessa proposta com os conteúdos desenvolvidos, além de outras informações que contextualizem e problematizem a atividade.

O trabalho com atividades investigativas e práticas de pesquisa também tem papel fundamental no combate às *fake news*. Nos últimos anos, a expressão "*fake news*" ganhou notoriedade e se tornou pauta em rodas de conversa na rua, nas redes sociais, em casa e, principalmente, na escola. Aqui, estamos considerando *fake news* as informações falsas e caluniosas cujo objetivo é prejudicar ou descredibilizar instituições ou pessoas que não estão de acordo com o pensamento ideológico, político ou social de seus divulgadores. A dificuldade em identificar notícias falsas afeta até mesmo a população de países com altos índices de escolaridade.

Nesse sentido, ao propor de maneira sistemática atividades de investigação e pesquisa, estamos contribuindo para a criação de uma cultura de questionamento. Sempre que possível, essas atividades estão acompanhadas de orientações que incentivam os estudantes a construir seu repertório crítico.

CULTURA DE QUESTIONAMENTO

- As informações do título se confirmam na leitura do material?
- Quem é o autor/a autora?
- Em que veículo de comunicação o material está publicado?
- Qual é a data de publicação?
- As informações estão contextualizadas?
- Existem outras fontes que abordam esse tema? As informações convergem?

CULTURA JUVENIL

Até o início do século XX, as noções de adolescência e de juventude sequer existiam. Foi o psicólogo e educador G. Stanley Hall (1844-1924) que, em 1904, explorou esses conceitos. Antes, a infância findava quando a vida adulta começava – o que, em geral, se dava aos 18 anos de idade. O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA, 1990), principal documento brasileiro que descreve os direitos e os deveres de crianças e jovens, em seu art. 2º, considera criança "a pessoa até doze anos de idade incompletos, e adolescente aquela entre doze e dezoito anos de idade" (ECA, p. 15).

Ainda existem divergências quando o assunto é definir quando começa ou finda a infância, a adolescência e a juventude, mas acreditamos ser consenso que os anos finais do Ensino Fundamental são a fase latente de transição da infância para a adolescência.

Com foco no desenvolvimento do protagonismo intelectual dos jovens e da capacidade deles em situar-se como cidadãos do/no mundo em suas dimensões emocional, intelectual, social e cultural, a BNCC apresenta a seguinte concepção de juventude, com base no Parecer CNE/CEB n. 5/2011:

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.
>
> (Brasil, 2018a, p. 463)

A realidade de um jovem atualmente é muito diferente daquela de um jovem de vinte ou dez anos atrás. Uma diferença importante é que as crianças e os jovens do século XXI estão utilizando diversos modos de interação multimidiáticas e multimodais, em aplicativos educativos ou de entretenimento, por exemplo, e especialmente em sua atuação nas redes sociais.

O manejo consciente das tecnologias digitais é fundamental para a participação plena dos jovens no mundo contemporâneo. Embora no Brasil o acesso à internet não seja realidade para grande parcela da população, fomentar o debate sobre as responsabilidades e as potencialidades da rede dentro da escola amplia as possibilidades de uso dessas ferramentas, que transformam a cada dia o modo como são realizadas as atividades cotidianas.

Em contrapartida, é importante ressaltar que cultura digital não é sinônimo de cultura juvenil:

> O conceito de **cultura juvenil** está associado à forma como os jovens "tornam sua" ou reinterpretam essa cultura mais ampla na qual vivem, para ir definindo certos estilos de vida e traços de identidade – muitos deles relacionados com o seu tempo livre e lazer –, uma certa linguagem e estéticas com os seus códigos próprios, bem como outras formas de expressão, inclusive de criatividade artística ou científica próprios.
>
> Com **cultura digital**, estamos nos referindo a todas as formas de comunicação, expressão (individual e coletiva), consumo e participação cívica e institucional que são realizadas mediante a utilização de tecnologias digitais. Desde as vanguardas artísticas e científicas até a gestão burocrática (impostos, sanções administrativas etc.); desde a comunicação com amigos e familiares através de tecnologias digitais [...] até o acesso e uso de todo o tipo de informação e conteúdos audiovisuais existentes na internet [...].
>
> (Ruiz, 2017)

Assim, a cultura digital não é definidora da juventude, mas as ferramentas digitais potencializam as formas de expressão dos jovens. Essa perspectiva retoma as posturas de empoderamento e protagonismo que devem ser fomentadas.

Se já não podíamos antes dizer que existe uma juventude, no singular, e padronizar nossa abordagem com os estudantes, depois da publicação da BNCC e de tantos estudos nas áreas de educação, psicologia e sociologia, é inadmissível que olhemos hoje para as individualidades e não enxerguemos que um jovem de periferia de uma grande metrópole não tem as mesmas necessidades que um jovem residente em um pequeno município rural, por exemplo. Há grande diversidade de jovens e de juventudes no Brasil e no mundo; a fim de exemplificar, basta mencionar alguns fatores que evidentemente impactam a forma de vivenciar o mundo e ser jovem, como gênero, local de residência, etnia e cultura da comunidade em que se está inserido.

Equidade, como a própria BNCC explicita, significa, na prática, reconhecer que as necessidades dos estudantes são diferentes. Ao fazer as escolhas curriculares, é papel de cada rede considerar a comunidade que a integra, de maneira ampla, assim como ficam a cargo das escolas e dos professores as escolhas necessárias para que esse currículo dialogue com a realidade de seus estudantes e engaje-os no desejo de aprendizagem. Logo, a equidade se explicita a cada escolha feita pelos atores que compõem cada rede estadual e municipal de ensino, por cada escolha feita pelos atores que compõem cada comunidade escolar, e essas decisões devem, necessariamente, dialogar com os diferentes perfis culturais e socioeconômicos que cada sala de aula acolhe.

Sabemos que não é uma tarefa fácil. Por isso, sob essa perspectiva, é preciso engajamento, colaboração e respeito mútuo, para que possamos garantir um melhor índice nas aprendizagens e uma cultura de paz em todo nosso amplo território brasileiro. Nesse sentido, apresentamos, em momentos estratégicos, como na seção *Ampliando horizontes* das páginas 44 e 45, orientações que servem de apoio a uma prática pedagógica que faça com que os estudantes se sintam acolhidos, ouvidos e que se percebam pertencentes ao grupo como agentes do desenvolvimento de suas habilidades e de suas competências.

Outra maneira de engajar os jovens é propor a eles a elaboração de soluções criativas para questões comunitárias. Tal postura favorece a percepção sobre a responsabilidade cidadã quanto aos anseios de melhorias sociais, fortalece a autoestima dos jovens e os empodera em relação a seus papéis como cidadãos atuantes.

Por isso, nesta coleção, as culturas juvenis estão presentes nas propostas de discussão sobre problemas que atingem a sociedade global e a comunidade local, mostrando que os interesses e os anseios dos jovens são valorizados e que suas ações são importantes elementos de transformação social e, consequentemente, do espaço.

EDUCAÇÃO COM BASE EM VALORES

A formação consciente do indivíduo como membro atuante da sociedade, que analisa as situações do cotidiano e atua nelas de maneira crítica, é condição para a **construção de um mundo mais justo**. Portanto, assim como o desenvolvimento de habilidades e competências, a formação de valores deve permear todo o trabalho escolar, dentro e fora da sala de aula. O intuito é contribuir para a formação de um indivíduo capaz de interagir com a natureza e com outros indivíduos, fazendo a mediação entre os próprios interesses e as necessidades da sociedade.

O trabalho com valores na escola não apenas trata de como viver em sociedade, mas também propõe a reflexão acerca das melhores maneiras de fazê-lo, ou seja, estimula a escolha consciente dos valores que devem orientar nossos comportamentos nos diferentes contextos sociais. Dessa forma, o trabalho com a educação em valores oferece bases para que o estudante possa tomar decisões visando à ponderação entre o que deseja e o que é social e ambientalmente mais justo.

Um modo de a escola trabalhar valores é incentivando diálogos, discussões e reflexões. O ideal é que essas práticas estejam presentes não só nas aulas, mas em toda a dinâmica escolar, com políticas claras de mediação de conflitos e valorização do respeito, da empatia, da responsabilidade e da honestidade nas situações cotidianas. Ao tratar dos valores como algo a ser desenvolvido também na escola, criam-se situações de assimilação desse conhecimento.

Pressupõe-se que a produção do conhecimento é um processo ativo, que envolve não só a assimilação e a apropriação, mas também a significação e a ressignificação, como lembra Jerome Bruner (1973) e, posteriormente, César Coll (2000). Ou seja, não basta listar os valores para que os estudantes os decorem: **os valores devem fazer parte de seu cotidiano**.

Nesse sentido, a educação em valores determina, ainda, atitudes e funções do educador. Durante o processo de aprendizagem, cabe ao professor incentivar o desenvolvimento da responsabilidade e da liberdade de pensamento dos estudantes. Não se trata, portanto, de doutrinação, e sim da construção de um discurso e de uma prática que leve o estudante a conquistar cada vez mais autonomia e, sobretudo, a se imbuir de noções de responsabilidade social, tornando gradualmente mais coletiva a visão que, no início, estava voltada para si. É por meio do trabalho intencional durante a vida escolar que os valores passarão a ter significado para o estudante, consolidando-se de fato como aprendizados que poderão ser levados para a vida adulta.

Nesta coleção, os valores estão divididos em seis grandes pilares, apresentados a seguir.

JUSTIÇA →

- Direito à igualdade.
- Direito à alimentação.
- Direito à saúde.
- Direito à educação.
- Direito à paz.

RESPEITO →

- A nós mesmos: autoestima, dignidade, autopreservação, autoentendimento.
- Aos outros: empatia, escuta ativa, diálogo, resolução de conflitos.
- Às culturas: ideologias, línguas, costumes, patrimônios, crenças, etnias.
- À natureza: conservação, estima pela diversidade biológica e por todas as formas de vida.

SOLIDARIEDADE →

- Com as pessoas próximas que se sentem frágeis e indefesas em seu dia a dia.
- Com as pessoas que têm doenças graves ou algum tipo de limitação.
- Com imigrantes, refugiados e deslocados.
- Com as vítimas de desastres naturais.

RESPONSABILIDADE →

- Diante das tarefas pessoais e de grupo: esforço, compromisso e cooperação.
- Diante das regras sociais: civismo e cidadania.
- Diante dos conflitos e dos dilemas morais: informações confiáveis, senso crítico e posicionamento.
- Diante do consumo: consumo responsável e racional dos produtos.
- Diante das próximas gerações: desenvolvimento sustentável e ética global a longo prazo.

HONESTIDADE →

- Apreço pela verdade e sinceridade, para si e para os outros.
- Repúdio ao uso de atalhos para obtenção de vantagens.
- Recusa à fraude, à omissão, à corrupção e ao engano intencional.

CRIATIVIDADE →

- Impulso de buscar e de criar soluções para diferentes problemas materiais e sociais.
- Iniciativa, proatividade, confiança, visão de futuro, inovação, reaproveitamento de recursos, imaginação, curiosidade e desejo de saber.

Por meio do trabalho com cada um desses pilares, abordam-se empatia, reconhecimento de direitos, responsabilidade de consumo, recusa a vantagens ilícitas ou a atalhos para conseguir o que se deseja, respeito às diferentes culturas e individualidades e busca ativa de solução de problemas, entre outras questões.

SAÚDE MENTAL E *BULLYING*

Promover uma cultura de paz sistemática na educação vai além de criar leis ou de estudar as que já existem, buscando garantir os direitos constitucionais de cada cidadão. Essa importante missão requer ainda o engajamento e a colaboração de cada agente das comunidades escolares, para que, com sua humanidade, acolha as individualidades, promovendo um ambiente de real valorização da diversidade naquele contexto específico, e prepare os estudantes para viver outros contextos, mais amplos.

O fator convivência pode ter um impacto engajador na comunidade escolar, na mesma medida em que pode dificultar a aprendizagem e conduzir ao desinteresse e à alienação. E, quando falamos de convivência e engajamento, estamos incluindo as relações entre os diferentes membros da equipe escolar, em todas as instâncias, assim como entre estudantes, ou entre professores e estudantes, e entre escola e família. Sabemos que é pelo exemplo que as crianças e os jovens aprendem; assim, ao observar empatia, cooperação e respeito e experienciar um ambiente pacífico, eles poderão efetivamente desenvolver a competência geral 9:

> **9.** Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
>
> (Brasil, 2018a, p. 10)

Nesse sentido, a escola, ao exercer seu compromisso de formar cidadãos atentos aos direitos humanos e aos princípios democráticos, deve envolver as famílias de maneira direta e intencional. Ou seja, é necessária a presença das famílias em encontros formativos nos quais sejam discutidos temas para que toda a comunidade escolar pactue valores e práticas que visem à cooperação e à resolução de conflitos de forma não violenta. Dessa maneira, a cultura de paz pode ser construída, potencializando a capacidade de aprendizagem das crianças e dos jovens, para citar apenas um dos inúmeros benefícios sociais que esse diálogo pode gerar.

Um cuidado importante ao falarmos de cultura de paz é trazer a atenção das crianças e dos jovens para o modo como se expressam tanto em situações presenciais quanto nas interações virtuais, proporcionando situações de aprendizagem que mobilizem algumas competências, como empatia, respeito, responsabilidade, comunicação, colaboração, entre outras. Nesse sentido, temos de desnaturalizar qualquer forma de violência.

É importante frisar aqui a obrigatoriedade de combatermos o *bullying* no ambiente escolar. Sobre esse tema, citamos um artigo que vale a pena ser lido na íntegra, pois colabora com a prática docente, trazendo sugestões valiosas.

> *Bullying* é uma situação que se caracteriza por agressões intencionais, verbais ou físicas, feitas de maneira repetitiva, por um ou mais alunos contra um ou mais colegas. O termo *bullying* tem origem na palavra inglesa *bully*, que significa valentão, brigão. Mesmo sem uma denominação em português, é entendido como ameaça, tirania, opressão, intimidação, humilhação e maltrato. [...]
>
> **10.** O que fazer em sala de aula quando se identifica um caso de *bullying*?
>
> Ao surgir uma situação em sala, a intervenção deve ser imediata. "Se algo ocorre e o professor se omite ou até mesmo dá uma risadinha por causa de uma piada ou de um comentário, vai pelo caminho errado. Ele deve ser o primeiro a mostrar respeito e dar o exemplo", diz Aramis Lopes Neto, presidente do Departamento Científico de Segurança da Criança e do Adolescente da

Sociedade Brasileira de Pediatria. O professor pode identificar os atores do *bullying*: autores, espectadores e alvos. Claro que existem as brincadeiras entre colegas no ambiente escolar. Mas é necessário distinguir o limiar entre uma piada aceitável e uma agressão. "Isso não é tão difícil como parece. Basta que o professor se coloque no lugar da vítima. O apelido é engraçado? Mas como eu me sentiria se fosse chamado assim?", orienta o pediatra Lauro Monteiro Filho.

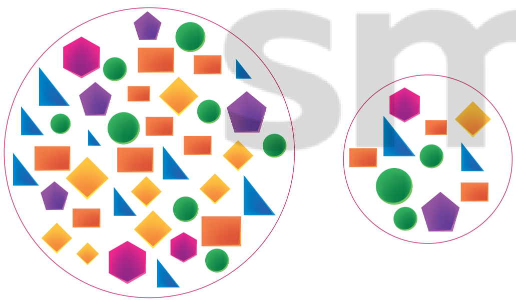
21 PERGUNTAS e respostas sobre *bullying*. *Nova Escola*, 1º ago. 2009. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/336/bullying-escola. Acesso em: 16 maio 2022.

Além dessas sugestões, nesta coleção contribuímos com o combate a qualquer tipo de violência, principalmente o *bullying*, ressaltando momentos em que esse tema pode ser abordado e sugerindo uma maneira de conduzir conversas e trocas de experiência que objetivam uma educação equitativa e a cultura de paz.

Por fim, não poderíamos deixar de mencionar uma estratégia que pode colaborar muito na promoção da paz, que é a Comunicação Não Violenta (CNV), sistematizada por Marshall Rosenberg. A CNV propõe caminhos para se estabelecer uma conexão consciente por meio da empatia e da compaixão entre interlocutores e é usada até mesmo pela Organização das Nações Unidas (ONU) na mediação de situações de conflito em todo o mundo. Para saber mais sobre a CNV, sugerimos assistir ao vídeo disponível em: https://ecoativos.org.br/biblioteca/comunicacao-nao-violenta-parte-1-marshall-rosenberg/ (acesso em: 7 jul. 2022).

TRABALHO COM GRUPOS GRANDES E DIVERSOS DE ESTUDANTES

Embora uma turma numerosa implique desafios ao professor no que se refere ao cotidiano de sala de aula e ao acompanhamento das aprendizagens individuais, há pontos positivos nessa realidade: em um grupo grande, amplifica-se a heterogeneidade de histórias de vida, pensamentos, potencialidades e valores. Tal diversidade, se recebida e tratada com atenção e respeito por todos os envolvidos, pode enriquecer as propostas e as dinâmicas – sobretudo se forem sugeridas atividades colaborativas entre os estudantes.



João Picoli/ID/BR

Há diversos prós e contras em trabalhar com grupos grandes e com grupos pequenos em sala de aula. Elencar os itens que compõem essas listas é fundamental para uma boa condução das aulas.

Trabalhar, portanto, com grupos grandes e diversos exige estratégias didáticas específicas. No início do ano letivo, recomenda-se investir tempo no estabelecimento de vínculos saudáveis com os estudantes. Isso permitirá, posteriormente, reconhecer e mapear as necessidades, dificuldades e potencialidades de cada um. Com esse levantamento, será possível privilegiar trabalhos em grupo, propondo atividades mais significativas com base nas especificidades de cada estudante e beneficiando-se da troca entre os pares.

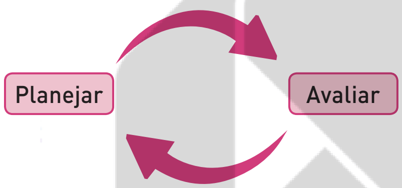
Nesta coleção há diversos momentos em que se ressalta o trabalho colaborativo. Pode-se, por exemplo, organizar duplas ou trios com estudantes de diferentes níveis de aprendizagem para a resolução de problemas, considerando que a dificuldade de um pode ser superada com o auxílio de outro. Em outro viés, pode-se sugerir que se formem parcerias para compartilhar as estratégias utilizadas e a correção de resoluções, de modo que os estudantes proponham ajustes e melhorias nas soluções propostas pelos colegas. Essas dinâmicas promovem a troca de conhecimentos e contribuem para o amadurecimento e o fortalecimento da turma como grupo.

Outra questão relevante diz respeito à condução de atividades mais elaboradas, que envolvem pesquisa, desenvolvimento de projetos ou produção de sínteses e conclusões. Pensando no trabalho com grupos grandes, para solucionar o problema da má distribuição de tarefas nos grupos – quando há sobrecarga de um ou dois estudantes e os demais ficam sem espaço e oportunidade para participar ou colaborar com alguma etapa do trabalho –, convém ajudá-los a estabelecer um papel para cada integrante com base no perfil, nas habilidades e nos interesses de cada um. Essa divisão auxilia os estudantes a reconhecer sua importância e suas contribuições para o grupo, permitindo que atuem com mais responsabilidade e iniciativa.

Vale lembrar que lidar com diferentes perfis vai impeli-los a buscar novas perspectivas, o que eventualmente pode resultar em conflitos. Nesse sentido, as atividades poderão, também, servir de espaço para o exercício da escuta atenta, da empatia, de habilidades deliberativas e da comunicação não violenta voltada à resolução de conflitos, favorecendo o diálogo e as práticas da cultura de paz na escola.

AVALIAÇÃO

Planejar e avaliar são processos indissociáveis. A avaliação é, sem dúvida, um dos aspectos mais sensíveis e complexos de qualquer planejamento.



João Picoli/ID/BR

Na perspectiva da formação integral, a avaliação passa a ser um instrumento de comunicação com o estudante, com os demais professores, com as equipes da escola responsáveis pela formação do estudante e até mesmo com as famílias.

Quando a avaliação é entendida como parte da formação integral dos estudantes, ela não pode mais estar relacionada apenas à nota atribuída ao final de um período de ensino, como um bimestre ou um trimestre, quando os estudantes recebem um número ou um conceito que certifica ou não sua aprendizagem. A nota em si exclui muitos dos fatores determinantes do processo de aprender. A história do estudante, o momento das avaliações, os recursos e o tempo para o estudo individual e até mesmo o instrumento de avaliação utilizado podem ser elementos decisivos para uma nota, que não corresponde necessariamente ao que o estudante aprendeu de fato.

Além disso, um currículo alinhado com a BNCC, pautado pelo desenvolvimento de competências e habilidades, visando ao aprofundamento e à consolidação das aprendizagens, não pode se sustentar em processos de avaliação pontuais e meramente numéricos. A avaliação, ainda que venha a gerar uma nota, deve corresponder ao projeto da escola no sentido da formação do estudante. Quando há um projeto de educação e a escola assume seu papel de formadora, a avaliação deve sinalizar se o estudante está ou não na direção do projeto traçado para ele. Nesse sentido, é preciso que a avaliação corresponda ao papel da escola na formação do estudante.

A avaliação em uma perspectiva formativa é composta de três grandes etapas: o diagnóstico, a análise e a intervenção. Um efetivo processo avaliativo da aprendizagem se inicia com a coleta de dados, ou seja, com um diagnóstico, proveniente da observação e do registro do professor com base nas mais diversas produções dos estudantes. De posse desses dados, antes da nota ou de qualquer parecer sobre o que o estudante aprendeu ou não, a avaliação formativa pressupõe a análise das informações coletadas, pautada pela reflexão sobre as aprendizagens esperadas, a atividade proposta e seu desenvolvimento. Essa análise precede a terceira etapa da avaliação, que corresponde à tomada de decisão sobre o que retomar e como agir em face das aprendizagens dos estudantes. É a fase da intervenção. Completa-se, assim, o ciclo avaliativo.

Nos casos em que se identifica algo que os estudantes deveriam saber e cuja deficiência pode impedir a continuidade de seu percurso de aprendizagem, a intervenção pode ser imediata. Outras vezes, a análise e o planejamento idealizado permitem antever que o conhecimento ausente nesse momento pode ser retomado mais adiante em outro tema, outro momento ou outra situação. Desse modo, a intervenção é pensada e planejada, sem ser imediata.

Como forma de organizar esse processo contínuo, há três etapas importantes de avaliação.

ETAPAS DA AVALIAÇÃO	
Avaliação inicial ou diagnóstica	Permite ao professor realizar uma investigação no sentido de levantar os conhecimentos prévios dos estudantes. Ela servirá de subsídio para que o professor organize sua proposta hipotética de intervenção.
Avaliação formativa ou processual	Pode ser vista com o objetivo de replanejamento por parte do professor, ocorrendo em momentos variados ao longo do processo de ensino e aprendizagem, tornando possível aos estudantes tomar consciência de suas dúvidas e dificuldades e de seus avanços.
Avaliação final ou somativa	Espera-se, sobretudo, identificar se os objetivos propostos inicialmente foram atingidos, se houve de fato aprendizagem, se é possível dar prosseguimento ao processo ou se há necessidade de revisão e complementação do que foi trabalhado.

Outro aspecto importante para a formação dos estudantes é o incentivo à autoavaliação, que colabora para que eles se tornem responsáveis pelo próprio processo de aprendizagem, já que subsidia estratégias de autoconhecimento.

Portanto, a autoavaliação pode levar a ótimos resultados no trabalho em sala de aula, na medida em que os estudantes se tornam conscientes do próprio processo de aprendizagem, além de desenvolverem a capacidade de monitorar a realização das tarefas propostas, obtendo assim maior controle sobre suas ações. Ao requerer a participação ativa dos estudantes, essa estratégia geralmente permite a evolução deles no desempenho das tarefas realizadas.

Os estudantes devem estar cientes de que a autoavaliação não recebe nota, mas revela a qualidade da autocrítica. Por essa razão, não se deve superestimar a autoavaliação se ela não estiver de acordo com os resultados observados no dia a dia.

INSTRUMENTOS AVALIATIVOS

Não existe processo de avaliação sem a reunião de dados a serem analisados; daí a importância dos instrumentos de avaliação, sua escolha e seus critérios de uso.

A seleção e a elaboração de um instrumento de avaliação têm início ainda durante o planejamento, quando o professor questiona: “O que ensino?”; “Por que ensino?”; “Os estudantes podem aprender isso?”. Tais questionamentos já apontam para a necessidade de refletir sobre as ações didáticas a fim de garantir o aprendizado dos estudantes.

O foco da avaliação deve ser fornecer dados que possibilitem ao professor compreender o que foi aprendido ou não e fazer intervenções que levem o estudante a avançar no aprendizado. Os instrumentos de avaliação podem guiar o olhar do professor nesse sentido.

A variedade de instrumentos avaliativos favorece a individualização do processo de ensino e aprendizagem, tornando-o uma experiência que, embora se realize no coletivo, seja única para cada estudante.

Há instrumentos que estão mais diretamente relacionados à obtenção de dados pelo professor. Neles, embora o estudante seja chamado a colaborar, é o professor que centraliza as ações de reunião e análise de dados. É o caso da observação e do registro, da análise da produção dos estudantes e das avaliações e da análise de erros, que podem ser usados em vários momentos.

Na correção de uma tarefa ou de um trabalho em grupo, por exemplo, é possível observar e registrar o que os estudantes aprenderam e permitir que eles apresentem à turma suas resoluções, dúvidas ou imprecisões de linguagem. Essa dinâmica pode ser um bom contexto para fazer uma intervenção ou acompanhar esses estudantes nas próximas atividades.

Há situações propostas nesta coleção que podem ser utilizadas com finalidade de avaliação formativa ou processual, não necessariamente para dar uma nota, mas para obter dados e planejar intervenções. Por exemplo: quando é solicitado ao estudante que organize o que aprendeu, que elabore problemas, que produza textos após as atividades e analise problemas com erros na resolução e também nas atividades propostas na seção *Atividades integradas*. Nessa análise, a oralidade, os desenhos, os gráficos, os esquemas e as escritas pessoais são importantes para acompanhar as percepções e os avanços de cada um. Relembramos que o letramento matemático é uma meta na Educação Básica: avaliar a leitura, a escrita e a utilização da linguagem em diferentes contextos é tão importante quanto assegurar os objetos de conhecimento específicos.

Por fim, vale ressaltar que a avaliação não é mera "tarefa burocrática" ou instrumento de julgamento dos estudantes. Na realidade, o que está em jogo, quando se planeja e executa a avaliação, é a possibilidade de aferir, por meio de uma coleta sistemática de dados, os ganhos e as perdas do processo educativo. Com base nessa aferição, a prática de ensino e aprendizagem é pensada para contemplar diferentes dimensões ou tipos de conteúdo.

PREPARAÇÃO PARA EXAMES DE LARGA ESCALA

Apresentamos a seguir algumas atividades com o formato das que compõem avaliações externas, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa). As matrizes de referência para cada uma dessas avaliações podem ser encontradas nos *links* indicados (acessos em: 7 jul. 2022).

- Enem: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf
- Saeb: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/matrizes-e-escalas
- Pisa: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa/matrizes-de-referencia

As atividades propostas foram elaboradas com o intuito de preparar os estudantes para exames de larga escala. Além delas, você pode utilizar as próprias atividades de exames dessa natureza realizados em anos anteriores, pois há muitos que se encontram disponíveis na internet, ou ainda criar novas atividades com base nas matrizes de referência desses exames.

Ao trabalhar esse material com os estudantes, os registros deles podem ser utilizados como instrumento de avaliação de caráter preparatório para as avaliações externas. A abordagem pode ser complementada com avaliações organizadas por você, para que os estudantes estejam preparados não apenas em termos de conceito, mas possam vivenciar o ambiente em que essas avaliações acontecem.

Questão 1

Em uma cidade, de acordo com uma lei, os estabelecimentos são obrigados a construir rampas que possibilitem o acesso de pessoas com deficiência física ou com mobilidade reduzida.

IC studio/Shutterstock.com/ID/BR

A prefeitura dessa cidade determinou que as rampas devem ter inclinação fixa e, considerando a vista lateral, o formato de um triângulo retângulo, em que a calçada deve estar perpendicular ao plano da rampa. Como exemplo da inclinação da rampa, a prefeitura disponibilizou um modelo cujo triângulo retângulo tem 50 cm de medida de altura e 120 cm de medida de base.

Um estabelecimento dessa cidade precisa instalar uma rampa em uma calçada. A medida da altura da calçada até a entrada do estabelecimentos é 25 cm. Com base nessa informação, qual deve ser a medida do comprimento dessa rampa?

a) 30 cm
b) 60 cm
c) 65 cm
d) 130 cm
e) 260 cm

Questão 2

Dois jardins têm formato de triângulo retângulo e são semelhantes. Para impedir a entrada de animais e que pessoas pisem na grama, uma cerca de arame será colocada em torno de cada jardim. O responsável pelo cercamento, informou que são necessários 12 m de arame para cercar um dos jardins e que a medida do lado maior do jardim maior é o dobro da medida do lado maior do jardim menor.

Para cercar o jardim maior, há 5 opções:

Opção 1: um rolo de 6 m;

Opção 2: um rolo de 12 m;

Opção 3: dois rolos de 10 m cada um;

Opção 4: dois rolos de 13 m cada um;

Opção 5: três rolos de 8 m cada um.

Entre as opções apresentadas, qual é a mais indicada para que não sobre arame?

a) Opção 1.
b) Opção 2.
c) Opção 3.
d) Opção 4.
e) Opção 5.

Questão 3

Em computação, a unidade de informação *byte* é utilizada para indicar a quantidade de informação armazenada em determinado arquivo. O tamanho de um arquivo geralmente é indicado em múltiplos dessa unidade. Por exemplo, um *kilobyte* (kB) equivale a 2^{10} *bytes*.

Sabe-se que uma pasta de documentos de um computador contém 10 arquivos de 140 kB, 5 arquivos de 320 kB e 6 arquivos de 200 kB.

Qual é o tamanho, em *bytes*, desse conjunto de arquivos?

a) $4\,200 \cdot 2^{1\,000}$ *bytes*.
b) $4\,200 \cdot 2^{30}$ *bytes*.
c) $4\,200 \cdot 6^{10}$ *bytes*.
d) $4\,200 \cdot 3 \cdot 2^{10}$ *bytes*.
e) $4\,200 \cdot 2^{10}$ *bytes*.

Questão 4

O proprietário de uma loja investiu 40 mil reais na reforma de seu estabelecimento. Após alguns meses, ele constatou que recuperou o dinheiro investido, com lucro de 20% sobre o investimento. Decidiu, então, aplicar 50% do lucro para renovar o estoque, lançando uma nova coleção.

Qual foi a quantia aplicada na renovação do estoque?

a) R$ 4 000,00.

b) R$ 8 000,00.

c) R$ 20 000,00.

d) R$ 24 000,00.

e) R$ 28 000,00.

Questão 5

Um estudo apontou que o cérebro de elefantes africanos tem 257 bilhões de neurônios – três vezes mais que o cérebro humano. Qual é a representação, em notação científica, da quantidade de neurônios no cérebro de um elefante africano, de acordo com os dados do estudo?

a) $2,57 \cdot 10^2$ neurônios.

b) $2,57 \cdot 10^9$ neurônios.

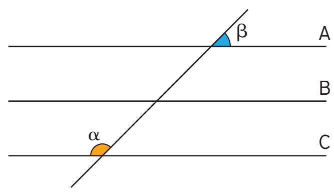
c) $2,57 \cdot 10^{11}$ neurônios.

d) $25,7 \cdot 10^{10}$ neurônios.

e) $257 \cdot 10^9$ neurônios.

Questão 6

Em uma cidade, as três avenidas principais, nomeadas A, B e C, são paralelas. Para a instalação dos cabos de transmissão de energia elétrica em galerias subterrâneas (como é feito com as redes de água e de esgoto), é necessário que a galeria forme uma passagem retilínea e transversal às avenidas, como mostra a figura a seguir.



Ilustrações: ID/BR

Sabendo que $\alpha = 145°$, qual é a medida do ângulo β, formado entre a avenida A e a galeria subterrânea de cabos de transmissão?

a) 35°

b) 45°

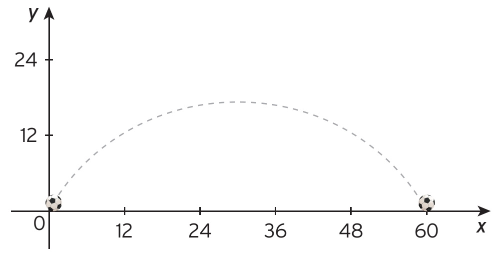
c) 55°

d) 125°

e) 155°

Questão 7

Durante um jogo de futebol, o goleiro cobrou um tiro de meta chutando a bola de modo que ela descreveu a trajetória parabólica mostrada no gráfico a seguir.



Qual é a equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ que expressa a parábola descrita pela trajetória da bola, sabendo que $a = 1$?

a) $y = x^2$

b) $y = x^2 + 60$

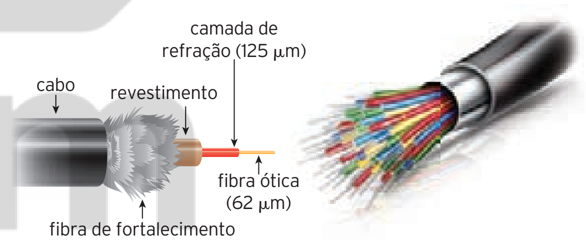
c) $y = x^2 + 30x$

d) $y = x^2 - 60x$

e) $y = x^2 + 30x - 10$

Questão 8

A representação a seguir mostra a estrutura de um cabo de fibra óptica utilizado na transmissão de informação digital.



Sendo 1 μm = 0,001 mm, qual é a medida da espessura da fibra óptica, em milímetro?

a) 0,0062 mm

b) 0,062 mm

c) 0,62 mm

d) 6,2 mm

e) 62 mm

Questão 9

Para reduzir a quantidade de lixo produzido em uma cidade, a prefeitura lançou uma campanha de conscientização. Sabendo que os moradores dessa cidade produzem 6 000 kg de lixo por semana, a prefeitura se prontificou a reduzir essa quantidade para 300 kg semanais. A campanha inclui um comercial, criado por uma empresa de *marketing*, que é veiculado 4 vezes ao dia, todos os dias, na TV local.

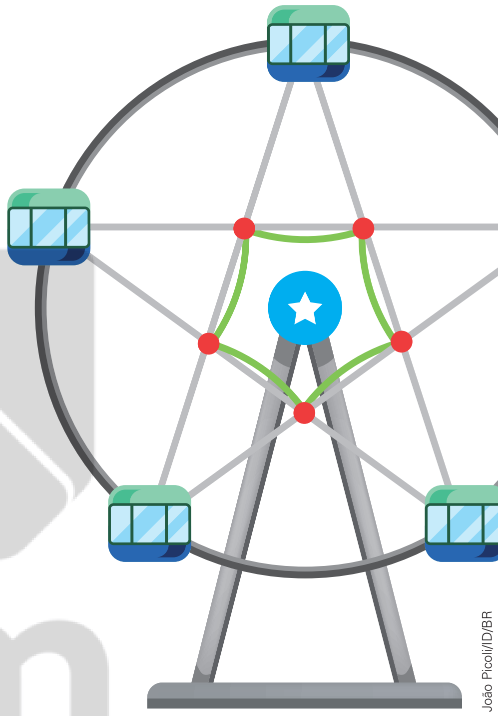
Depois de alguns dias de campanha, a prefeitura constatou que a quantidade de lixo, em quilograma, recolhido nas ruas semanalmente era descrita pela função $f(x) = -15x + 6000$, em que x representa a quantidade de vezes em que o comercial foi transmitido na TV.

Suponha que a quantidade de lixo continue sendo descrita pela função f. Em quantos dias, após o início da transmissão do comercial, a prefeitura dessa cidade conseguirá atingir seu objetivo?

a) Em 80 dias.
b) Em 95 dias.
c) Em 110 dias.
d) Em 235 dias.
e) Em 380 dias.

Questão 10

Uma roda-gigante é composta de 5 cabines, igualmente distantes, penduradas em uma estrutura circular. Os pontos em que as cabines estão localizadas são interligados por outras estruturas, também metálicas. A parte central da figura foi decorada com luzes (pontos destacados em vermelho) interligadas de maneira que fossem usados 10 cm de uma barra de metal (arcos destacados em verde) para cada grau da medida do ângulo correspondente a esse arco.



Sabendo que cada arco verde é parte de uma circunferência cujo centro está no ponto em que cada cabine está localizada, qual é a medida de comprimento total, em metro, da barra de metal usada para construir os arcos da parte central decorada?

a) 15 m
b) 18 m
c) 36 m
d) 45 m
e) 72 m

Respostas e comentários das atividades de preparação para exames de larga escala

A seguir, para cada uma das questões, apresentamos o conteúdo trabalhado, a habilidade da BNCC que pode ser associada à questão proposta, os indicadores das matrizes de referência de alguns exames de larga escala que podem ser trabalhados e, por fim, a resolução. As matrizes de referência indicadas são do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa).

Questão 1

- **Conteúdo**

  Semelhança de triângulos.

- **Habilidades da BNCC**

  EF09MA12 e EF09MA14.

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

  Habilidade 8: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Geometria.

  Eixo cognitivo: Compreender e aplicar conceitos e procedimentos.

  Habilidade 9G1.9: Identificar retas ou segmentos de retas concorrentes, paralelos ou perpendiculares.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Representação.

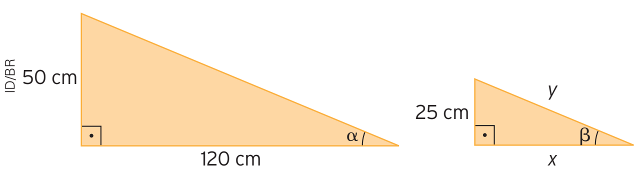
  Processo matemático: Empregar conceitos, fatos, procedimentos e raciocínio matemáticos.

  Contexto e situações: Social.

- **Resolução**

  Alternativa **c**.

  Para fazer uma rampa que atenda às especificações exigidas pela lei, utilizamos a semelhança de triângulos. Observe as figuras a seguir.



Como a inclinação da rampa deve ser fixa, os dois triângulos devem ter a mesma medida de ângulo em relação à base. Assim, $\alpha = \beta$.

Como os dois triângulos também têm um ângulo reto, eles são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA). Assim, podemos estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{50}{25} = \frac{120}{x}$$

$$50 \cdot x = 120 \cdot 25$$

$$50x = 3\,000$$

$$x = \frac{3\,000}{50}$$

$$x = 60$$

Pelo teorema de Pitágoras, podemos obter a medida do comprimento da rampa, indicada por y.

$$y^2 = 60^2 + 25^2$$

$$y^2 = 3\,600 + 625$$

$$y^2 = 4\,225$$

$$y = 65$$

Portanto, o comprimento dessa rampa deve medir 65 cm.

Questão 2

- **Conteúdo**

  Semelhança de triângulos.

- **Habilidade da BNCC**

  EF09MA12

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

  Habilidade 8: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Geometria.

  Eixo cognitivo: Compreender e aplicar conceitos e procedimentos.

  Habilidade 9G1.9: Identificar retas ou segmentos de retas concorrentes, paralelos ou perpendiculares.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Representação.

Processo matemático: Empregar conceitos, fatos, procedimentos e raciocínio matemáticos.

Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

Alternativa **e**.

Como a medida do lado maior do jardim maior é o dobro da medida do lado maior do jardim menor, a razão de semelhança entre os dois jardins é 2. Logo, se a medida do perímetro do jardim menor for 12 m, então a medida do perímetro do jardim maior será 24 m ($12 \cdot 2 = 24$). A opção 5 apresenta essa metragem, pois 3 rolos de 8 m cada correspondem a 24 m ($3 \cdot 8 = 24$).

Questão 3

- **Conteúdo**

Potenciação.

- **Habilidades da BNCC**

EF09MA03 e EF09MA18.

- **Matriz do Enem**

Competência de área 1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade 3: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

- **Matriz do Saeb**

Eixo do conhecimento: Números.

Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

Habilidade 9N2.1: Resolver problemas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou radiciação envolvendo números reais, inclusive notação científica.

- **Matriz do Pisa**

Capacidade fundamental da Matemática: Comunicação.

Processo matemático: Formular situações matematicamente.

Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

Alternativa **e**.

Como 1 kB = 2^{10} *bytes*, temos:

$10 \cdot 140 \cdot 2^{10} + 5 \cdot 320 \cdot 2^{10} + 6 \cdot 200 \cdot 2^{10} =$
$= 1\,400 \cdot 2^{10} + 1\,600 \cdot 2^{10} + 1\,200 \cdot 2^{10} =$
$= 4\,200 \cdot 2^{10}$

Portanto, o conjunto de arquivos dessa pasta de documentos tem $4\,200 \cdot 2^{10}$ *bytes*.

Questão 4

- **Conteúdo**

Porcentagem.

- **Habilidade da BNCC**

EF09MA05

- **Matriz do Enem**

Competência de área 1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade 3: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

- **Matriz do Saeb**

Eixo do conhecimento: Números.

Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

Habilidade 9N2.3: Resolver problemas que envolvam porcentagens, incluindo os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, aplicação de percentuais sucessivos e determinação das taxas percentuais.

- **Matriz do Pisa**

Capacidade fundamental da Matemática: Comunicação.

Processo matemático: Interpretar, aplicar e avaliar resultados matemáticos.

Contexto e situações: Ocupacional.

- **Resolução**

Alternativa **a**.

O lucro de 20% sobre o valor investido, corresponde a:

$$20\% \text{ de } 40\,000 = \frac{20}{100} \cdot 40\,000 = 20 \cdot 400 = 8\,000$$

O valor aplicado foi 50% do lucro, ou seja:

$$50\% \text{ de } 8\,000 = \frac{50}{100} \cdot 8\,000 = 50 \cdot 80 = 4\,000$$

Portanto, foram aplicados R$ 4 000,00 na renovação do estoque.

Questão 5

- **Conteúdo**

Potenciação.

- **Habilidades da BNCC**
  EF09MA03 e EF09MA18.

- **Matriz do Enem**
  Competência de área 1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.
  Habilidade 3: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

- **Matriz do Saeb**
  Eixo do conhecimento: Números.
  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.
  Habilidade 9N2.1: Resolver problemas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou radiciação envolvendo números reais, inclusive notação científica.

- **Matriz do Pisa**
  Capacidade fundamental da Matemática: Comunicação.
  Processo matemático: Formular situações matematicamente.
  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**
  Alternativa **c**.
  257 bilhões equivalem a 257 000 000 000 que, em notação científica, é escrito $2{,}57 \cdot 10^{11}$. Portanto, o cérebro de um elefante africano tem $2{,}57 \cdot 10^{11}$ neurônios.

Questão 6

- **Conteúdo**
  Retas cortadas por uma transversal.

- **Habilidade da BNCC**
  EF09MA10

- **Matriz do Enem**
  Competência de área 2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
  Habilidade 8: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

- **Matriz do Saeb**
  Eixo do conhecimento: Geometria.
  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.
  Habilidade 9G2.3: Resolver problemas que envolvam relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, ângulos internos ou externos de polígonos ou cevianas (altura, bissetriz, mediana, mediatriz) de polígonos.

- **Matriz do Pisa**
  Capacidade fundamental da Matemática: Uso de linguagem simbólica, formal e técnica, e operações.
  Processo matemático: Empregar conceitos, fatos, procedimentos e raciocínio matemáticos.
  Contexto e situações: Científico.

- **Resolução**
  Alternativa **a**.
  Como A, B e C formam um feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal, temos:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 180° \\ 145° + \beta &= 180° \\ \beta &= 180° - 145° \\ \beta &= 35° \end{aligned}$$

Questão 7

- **Conteúdo**
  Equação do 2º grau.

- **Habilidade da BNCC**
  EF09MA09

- **Matriz do Enem**
  Competência de área 5: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.
  Habilidade 19: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

- **Matriz do Saeb**
  Eixo do conhecimento: Álgebra.
  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.
  Habilidade 9A2.4: Resolver problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau.

- **Matriz do Pisa**
  Capacidade fundamental da Matemática: “Matematizar”.
  Processo matemático: Formular situações matematicamente.
  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

  Alternativa **d**.

  A parábola toca o eixo horizontal (a bola toca o chão) em $x = 0$ e $x = 60$. Logo, a soma das raízes é dada por $S = 60$ $(0 + 60 = 60)$, e o produto é dado por $P = 0$ $(0 \cdot 60 = 0)$. Como $a = 1$, a equação da parábola é dada por:

$$y = x^2 - Sx + P$$
$$y = x^2 - 60x + 0$$
$$y = x^2 - 60x$$

Questão 8

- **Conteúdo**

  Unidades de medida de comprimento.

- **Habilidade da BNCC**

  EF09MA18

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 3: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

  Habilidade 10: Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Grandezas e medidas.

  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

  Habilidade 9M2.1: Resolver problemas que envolvam medidas de grandezas (comprimento, massa, tempo, temperatura, capacidade ou volume) em que haja conversões entre unidades mais usuais.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Representação.

  Processo matemático: Empregar conceitos, fatos, procedimentos e raciocínio matemáticos.

  Contexto e situações: Científico.

- **Resolução**

  Alternativa **b**.

  Como 1 μm = 0,001 mm e a medida da espessura da fibra óptica é 62 μm, então essa medida equivale a 0,062 mm $(62 \cdot 0{,}001 = 0{,}062)$.

Questão 9

- **Conteúdo**

  Função afim.

- **Habilidade da BNCC**

  EF09MA06

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 5: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

  Habilidade 23: Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Álgebra.

  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

  Habilidade 9A2.5: Resolver problemas que envolvam função afim.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: "Matematizar".

  Processo matemático: Formular situações matematicamente.

  Contexto e situações: Social.

- **Resolução**

  Alternativa **b**.

  Para que a quantidade de lixo produzido por semana seja de 300 kg, devemos ter: $f(x) = 300$

$$-15x + 6\,000 = 300$$
$$-15x = 300 - 6\,000$$
$$-15x = -5\,700$$
$$x = \frac{-5\,700}{-15}$$
$$x = 380$$

  Como o comercial é transmitido 4 vezes ao dia, então em 95 dias ele será transmitido 380 vezes, pois:

$$380 : 4 = 95$$

  Portanto, a prefeitura conseguirá atingir seu objetivo em 95 dias.

Questão 10

- **Conteúdo**

  Circunferências e polígonos regulares.

- **Habilidade da BNCC**

  EF09MA11

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

  Habilidade 8: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Geometria.

  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

  Habilidade 9G2.7: Resolver problemas que envolvam relações entre os elementos de uma circunferência/círculo (raio, diâmetro, corda, arco, ângulo central, ângulo inscrito).

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Representação.

  Processo matemático: Empregar conceitos, fatos, procedimentos e raciocínio matemáticos.

  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

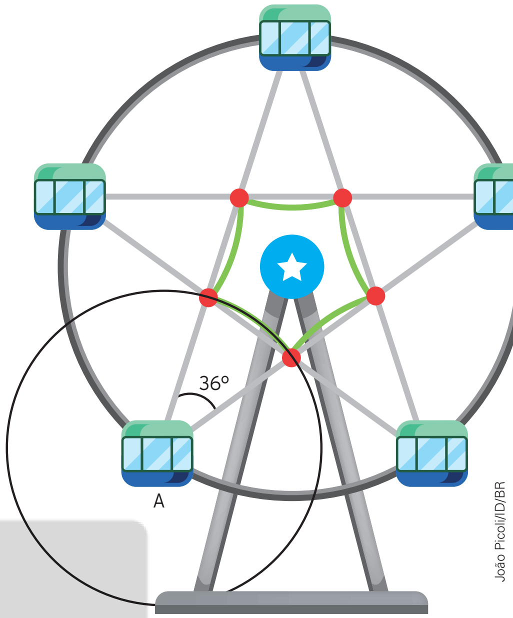
  Alternativa **b**.

  Como as cabines estão igualmente distantes, cada arco da circunferência entre os pontos em que as cabines estão localizadas mede 72°, pois:

  $$360° : 5 = 72°$$

  O ângulo $\hat{A}$, indicado na figura a seguir, é inscrito à circunferência maior e, por isso, mede 36° (72° : 2 = 36°).

Como $\hat{A}$ é um ângulo central da circunferência de centro em A, então o arco correspondente a esse ângulo mede 36°.



Como foram utilizados 10 cm de uma barra de metal para cada grau da medida do ângulo correspondente a esse arco, então cada barra mede 360 cm, pois $10 \cdot 36 = 360$.

Como foram usadas 5 barras, temos:

$360 \text{ cm} \cdot 5 = 1\,800 \text{ cm} = 18 \text{ m}$

Portanto, foram usados, ao todo, 18 m de barras de metal para construir os arcos da parte central decorada da roda-gigante.

ORGANIZAÇÃO DA COLEÇÃO

ESTRUTURA DO LIVRO DO ESTUDANTE

A coleção é composta de quatro volumes, divididos em unidades e capítulos. Cada unidade tem como foco uma unidade temática (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e Estatística) e apresenta textos, atividades, seções e boxes. No conjunto, pretende-se que a coleção seja um material de apoio para o trabalho de professores e estudantes, a fim de alcançar o desenvolvimento das competências gerais e específicas de Matemática.

ABERTURA DE UNIDADE

No início das unidades há uma imagem que ocupa uma dupla de páginas. Essa imagem tem como objetivo despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes sobre o tema que será tratado na unidade. O texto e as questões propostas em *Primeiras ideias* procuram incentivá-los a explorar a imagem, estabelecendo relações possíveis acerca dos assuntos que serão estudados. Além disso, as questões propostas podem ser utilizadas para diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o tema, realizando uma avaliação inicial da turma.

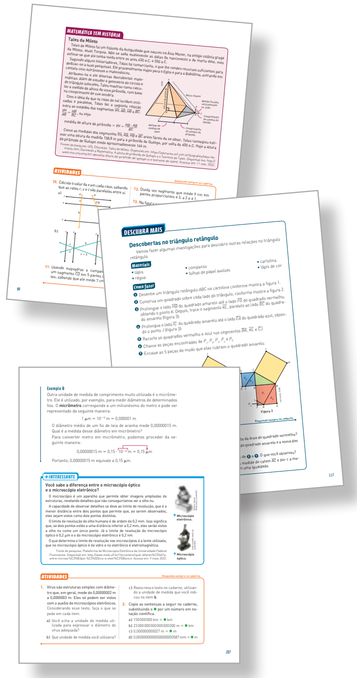
CAPÍTULOS

Cada unidade tem seu conteúdo disposto em dois ou três capítulos. O texto é apresentado de forma organizada e clara por meio de situações contextualizadas. De modo geral, estão associados a ilustrações, fotografias, gráficos, mapas, tabelas, entre outros recursos, a fim de facilitar o entendimento do conteúdo e propiciar o contato com diversos modos de organização das informações. Termos essenciais e ideias-chave são destacados.

O trabalho voltado à formação de valores ocorre ao longo das unidades e pode ser evidenciado no boxe *Valor*. Além dele, há boxes complementares que ampliam o conhecimento e revelam alguns desdobramentos e relações que o conteúdo apresentado estabelece com outros assuntos. Palavras que eventualmente poderiam dificultar a compreensão do texto são explicadas nos glossários, inseridos na mesma página em que o termo aparece, facilitando a consulta.

Além disso, os boxes *Matemática tem história* e *+Interessante* contêm temas que se referem, respectivamente, à história da Matemática e a curiosidades relacionadas à Matemática no dia a dia. Em alguns boxes *Matemática tem história*, também é possível encontrar atividades de pesquisa sobre a história da Matemática.

O boxe *Descubra mais* propõe atividades de caráter investigativo de forma organizada e orientada. Esse boxe está estruturado da seguinte maneira: texto introdutório (contextualização do tema), "Materiais" (opcional com a apresentação de itens – em geral – de fácil acesso), "Como fazer" (descrição das etapas) e "Para concluir" (questões para o auxílio dos estudantes a respeito da avaliação e da reflexão sobre o desenvolvimento e o resultado).



ATIVIDADES E DIVERSIFICANDO

A seção *Atividades*, proposta após a apresentação de alguns conteúdos, e a seção *Diversificando*, no final de cada capítulo, buscam desenvolver diferentes habilidades, abrangendo conceitos trabalhados ao longo do capítulo. Essas seções também podem ser utilizadas como avaliação reguladora.

AO FINAL DA UNIDADE

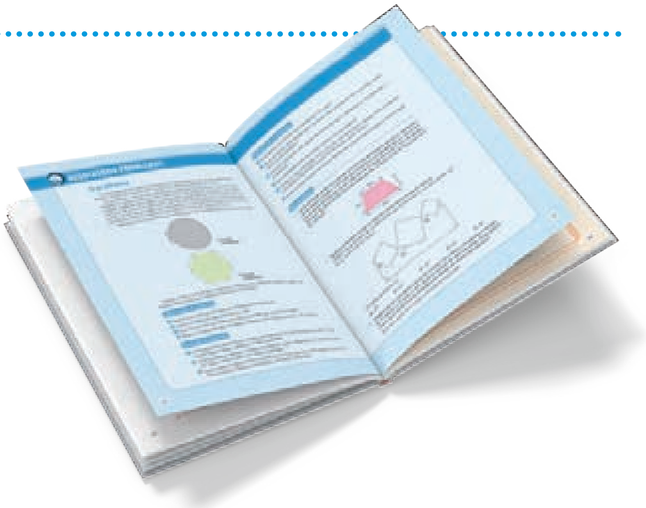
AMPLIANDO HORIZONTES

A seção tem como principal objetivo fornecer informações, dados e conhecimentos específicos que possibilitem aos estudantes fazer boas escolhas financeiras e compreender suas consequências. A intenção é permitir o desenvolvimento da Educação Financeira. Esse aprendizado ocorre por meio da compreensão e da discussão de situações elucidadas em textos e imagens.

Os principais objetivos dessa seção são:

- Formar para a cidadania.
- Desenvolver a cultura de prevenção.
- Formar multiplicadores de conhecimento.
- Ensinar a planejar em curto, médio e longo prazos.
- Ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável.
- Oferecer conceitos e ferramentas para tomadas de decisão autônomas com base em mudanças de atitude.

RESOLVENDO PROBLEMAS



Um dos principais objetivos dessa seção é expor os estudantes a situações-problema diversificadas, buscando desenvolver o interesse por estratégias de resolução. Compreender e resolver problemas, criar estratégias de resolução, identificar informações pertinentes, tomar decisões individuais e em grupo e saber comunicá-las são capacidades importantes na vida em sociedade.

A seção é proposta em dois momentos em cada volume e está estruturada da seguinte maneira: "O problema" (apresentação do problema a ser resolvido), "Compreensão do problema" (questões que ajudam os estudantes a compreender o problema proposto), "Resolução do problema" (perguntas que orientam os estudantes a traçar uma estratégia para a resolução do problema), "Reflexão sobre o problema" (atividades que incentivam a reflexão a respeito do problema) e "Mais problemas" (outras situações-problema que podem ser resolvidas com a estratégia desenvolvida).

A seguir, são apresentadas as estratégias predominantes na abordagem sugerida para a resolução dos problemas dessa seção ao longo da coleção.

	Unidade	ESTRATÉGIA PREDOMINANTE NA ABORDAGEM SUGERIDA
6º ANO	3	Resolução de trás para a frente
	5	Resolução por tentativa e erro
7º ANO	3	Representação esquemática ou mental
	6	Tradução para a linguagem algébrica
8º ANO	3	Observação de padrões
	6	Tradução para a linguagem algébrica
9º ANO	3	Consulta de um problema mais simples
	6	Organização de informações

INVESTIGAR

A seção *Investigar* propõe atividades de caráter investigativo, voltadas à aplicação de métodos de pesquisa de modo organizado e orientado, incluindo estudos bibliográficos, entrevistas, etc.

Essa seção é proposta em dois momentos em cada volume, sempre no final das unidades 4 e 8.

Ela está estruturada do seguinte modo: “Para começar” (contextualização e apresentação da proposta, exposição da questão a ser investigada e apresentação da prática de pesquisa e do instrumento de coleta), “Procedimentos” (texto instrucional sobre como realizar a atividade), “Questões para discussão” (perguntas para debate sobre a realização do trabalho e os resultados obtidos) e “Comunicação dos resultados” (orientação a respeito do compartilhamento do conhecimento produzido).

A seguir, são apresentados os temas, as práticas de pesquisa, os instrumentos de coleta e os produtos, propostos nessa seção ao longo da coleção.

	Unidade	TEMA	PRÁTICA DE PESQUISA	INSTRUMENTO DE COLETA	PRODUTO
6º ANO	4	Medir o tempo: origens e instrumentos	Bibliográfica	Levantamento de referências teóricas	Seminário
	8	Descobrindo a pesquisa estatística	Bibliográfica	Levantamento de referências teóricas	Resumo
7º ANO	4	Arquitetura e Matemática	Bibliográfica	Levantamento de referências teóricas	Exposição de fotografias
	8	De casa para a escola: quanto tempo leva?	De campo	Questionário	Cartaz
8º ANO	4	Escolhendo a melhor amostra	De campo	Questionário e entrevista	Relatório
	8	Vida saudável	De campo	Questionário e entrevista	Vídeo
9º ANO	4	Personalidades da Matemática	Bibliográfica	Levantamento de referências teóricas	Blogue
	8	Mais pessoas ou menos pessoas?	Documental	Levantamento de registros institucionais	Exposição de cartazes e fotos

ATIVIDADES INTEGRADAS

No final de cada unidade há a seção *Atividades integradas*, que retoma e integra os conteúdos estudados nos capítulos. É uma oportunidade de fazer uma avaliação final, observando quais dificuldades os estudantes ainda têm e retomando conceitos conforme julgar necessário.

FINAL DE VOLUME

INTERAÇÃO

A seção oferece aos estudantes a oportunidade de planejar e de realizar um projeto. Com o objetivo de desenvolver as habilidades necessárias à participação em atividades em grupo (por exemplo: cooperação, capacidade de resolver problemas e comunicação), apresenta uma proposta de trabalho colaborativo como forma de relacionar os conteúdos estudados a situações práticas. Além disso, possibilita um trabalho interdisciplinar.

Essa seção está localizada ao final do volume, para que você tenha mais controle sobre o desenvolvimento da atividade. Entretanto, a proposta é de longa duração; portanto, sugerimos que seja desenvolvida ao longo do ano ou de um semestre.

O esquema a seguir evidencia a organização dessa seção na coleção.

	TEMA	INTERDISCIPLINARIDADE PROPOSTA	PRODUTO
6º ANO	Representatividade em números	Língua Portuguesa	Vídeo
7º ANO	Vamos reciclar?	Arte	Exposição de arte
8º ANO	Escola sustentável	Ciências	Maquete
9º ANO	Imigrantes e refugiados	Geografia e História	Exposição

SUGESTÃO DE CRONOGRAMA

Apresentamos a seguir uma proposta de distribuição dos conteúdos presentes neste volume em bimestres, trimestres e semestres. Entretanto, sabemos que o dinamismo do contexto escolar exige uma prática docente que seja flexível diante dos desafios presentes ao longo do ano letivo. Essa proposta, portanto, tem o objetivo de nortear a prática pedagógica de maneira que você possa adaptá-la à realidade escolar e ao projeto pedagógico desenvolvido na escola. Você também pode complementar a proposta em questão, explorando mais detalhadamente os temas, os boxes e as seções que compõem os capítulos e as unidades e, ainda, os momentos previstos para avaliações.

CONTEÚDO	**PERÍODO**	1º bimestre						2º bimestre						3º bimestre						4º bimestre					
		1º trimestre								2º trimestre								3º trimestre							
		1º semestre												2º semestre											
Unidade 1 Conjuntos numéricos, potenciação e radiciação	**Capítulo 1** Conjuntos numéricos	■	■																						
	Capítulo 2 Potenciação e radiciação			■																					
Unidade 2 Razão, proporção e matemática financeira	**Capítulo 1** Razão e proporção				■																				
	Capítulo 2 Matemática financeira					■																			
Unidade 3 Retas e ângulos, semelhança e triângulo retângulo	**Capítulo 1** Retas e ângulos						■																		
	Capítulo 2 Semelhança							■																	
	Capítulo 3 Triângulo retângulo								■																
Unidade 4 Produtos notáveis, fatoração e equações	**Capítulo 1** Produtos notáveis e fatoração									■															
	Capítulo 2 Frações algébricas										■														
	Capítulo 3 Equações do 2º grau											■													
Unidade 5 Geometria	**Capítulo 1** Distâncias													■											
	Capítulo 2 Circunferências e polígonos regulares														■										
	Capítulo 3 Vistas															■									
Unidade 6 Funções	**Capítulo 1** Introdução às funções																■								
	Capítulo 2 Função afim																	■	■						
Unidade 7 Probabilidade e Estatística	**Capítulo 1** Probabilidade																			■					
	Capítulo 2 Estatística																				■	■			
Unidade 8 Grandezas e medidas	**Capítulo 1** Algumas grandezas																						■	■	
	Capítulo 2 Volume																								■
Interação Imigrantes e refugiados														■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

QUADROS DE CONTEÚDOS DA COLEÇÃO

Os quadros a seguir sintetizam os conteúdos, as habilidades, as competências gerais e específicas de Matemática da BNCC e os Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta coleção. Eles estão organizados por volume e por unidade.

6º ANO

UNIDADE 1 – SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E NÚMEROS NATURAIS	
Conteúdos	• Sistema de numeração egípcio • Sistema de numeração romano • Sistema de numeração indo-arábico • Ordens e classes dos números naturais no sistema de numeração decimal • Números naturais (representação na reta numérica, comparação e ordenação) • Operações com números naturais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada) • Propriedades das operações com números naturais • Arredondamentos e estimativas • Expressões numéricas envolvendo números naturais
Habilidades	EF06MA01, EF06MA02, EF06MA03, EF06MA12 e EF06MA14.
Competências gerais	1, 2, 7 e 9.
Competências específicas	1, 2, 3 e 7.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente e Economia.

UNIDADE 2 – GEOMETRIA	
Conteúdos	• Ponto, reta e plano – conceito, representação e nomenclatura • Semirretas • Segmentos de reta • Ponto médio • Ângulos – conceito, representação e classificação • Posições relativas entre retas no plano • Classificação de figuras geométricas planas • Classificação de figuras geométricas não planas • Polígonos e seus elementos • Classificação de triângulos • Classificação de quadriláteros • Poliedros, classificações e seus elementos • Relação de Euler • Não poliedros
Habilidades	EF06MA17, EF06MA18, EF06MA19, EF06MA20, EF06MA25, EF06MA26 e EF06MA27.
Competências gerais	2, 4 e 9.
Competências específicas	1, 2, 7 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Economia, Cidadania e Civismo e Multiculturalismo.

UNIDADE 3 – DIVISIBILIDADE

Conteúdos	• Sequências numéricas • Múltiplos de um número natural • Divisores de um número natural • Relações entre múltiplo e divisor • Critérios de divisibilidade • Números primos e números compostos • Decomposição em fatores primos
Habilidades	EF06MA04, EF06MA05, EF06MA06 e EF06MA34.
Competências gerais	7, 8 e 9.
Competências específicas	3 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Cidadania e Civismo e Multiculturalismo.

UNIDADE 4 – LOCALIZAÇÃO, SEMELHANÇA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Conteúdos	• Localização • Localização de pontos • Plano cartesiano • Pares ordenados no plano cartesiano • Localização de vértices de polígonos no plano cartesiano • Deslocamento no plano cartesiano • Figuras semelhantes • Ampliação, redução e reprodução de figuras na malha quadriculada • Ampliação e redução de figuras no plano cartesiano • Ampliação, redução e deformação de figuras em *software* • Construção de retas paralelas e perpendiculares com régua e esquadro ou par de esquadros • Construção de quadriláteros com régua e esquadro e com *software* de geometria dinâmica
Habilidades	EF06MA16, EF06MA21, EF06MA22 e EF06MA23.
Competências gerais	8, 9 e 10.
Competência específica	8
Tema Contemporâneo Transversal	Cidadania e Civismo

UNIDADE 5 – NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA FRACIONÁRIA

Conteúdos	• Números racionais positivos na forma fracionária (leitura e escrita) • Situações que envolvem frações • Tipos de fração • Números mistos • Fração de um número • Frações equivalentes • Simplificação e comparação de frações • Operações com frações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada • Porcentagem
Habilidades	EF06MA07, EF06MA08, EF06MA09, EF06MA10, EF06MA13, EF06MA14 e EF06MA15.
Competências gerais	2, 7 e 9.
Competências específicas	1, 3, 4 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente e Saúde.

UNIDADE 6 – NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA DECIMAL	
Conteúdos	• Números racionais positivos na forma decimal: leitura e representação • Frações decimais • Transformações que envolvem números na forma decimal e frações • Números na forma decimal equivalentes • Comparação de números na forma decimal • Operações com números na forma decimal: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada • Porcentagem
Habilidades	EF06MA01, EF06MA02, EF06MA08, EF06MA11, EF06MA13 e EF06MA14.
Competências gerais	2, 9 e 10.
Competência específica	3
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia e Ciência e Tecnologia.
UNIDADE 7 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	
Conteúdos	• Conceitos iniciais de probabilidade – experimento aleatório, espaço amostral e evento • Cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento • Etapas e elementos de uma pesquisa estatística • Tabelas e gráficos • Fluxogramas, organogramas e infográficos
Habilidades	EF06MA30, EF06MA31, EF06MA32, EF06MA33 e EF06MA34.
Competências gerais	1, 5 e 9.
Competências específicas	5 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Cidadania e Civismo e Multiculturalismo.
UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS	
Conteúdos	• Grandezas e medidas • Sistema Internacional de Unidades • Medidas de comprimento, de área, de volume, de capacidade, de massa, de temperatura e de tempo • Transformações entre unidades de medida de uma mesma grandeza • Perímetro de uma figura plana • Área de um retângulo • Área de um triângulo • Volume do bloco retangular • Relação entre volume e capacidade • Vistas e plantas baixas • Escalas
Habilidades	EF06MA24, EF06MA28 e EF06MA29.
Competências gerais	6, 7, 8, 9 e 10.
Competências específicas	1, 2, 3, 6, 7 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia, Multiculturalismo e Ciência e Tecnologia.

7º ANO

UNIDADE 1 – NÚMEROS	
Conteúdos	• Múltiplos • Divisores • Divisibilidade • Mínimo múltiplo comum • Máximo divisor comum • Conjunto dos números inteiros • Representação dos números inteiros na reta numérica • Comparação e ordenação de números inteiros • Módulo (ou valor absoluto) de um número inteiro • Oposto (ou simétrico) de um número inteiro • Operações com números inteiros: adição, subtração, multiplicação e divisão • Propriedades da adição e da multiplicação de números inteiros • Operações inversas • Expressões numéricas envolvendo números inteiros
Habilidades	EF07MA01, EF07MA03 e EF07MA04.
Competência geral	9
Competências específicas	1 e 4.
Tema Contemporâneo Transversal	Meio Ambiente

UNIDADE 2 – NÚMEROS RACIONAIS	
Conteúdos	• Números racionais nas representações fracionária e decimal • Conjunto dos números racionais • Representação dos números racionais na reta numérica • Representação decimal de números racionais: finita ou infinita e periódica • Módulo e simétrico de um número racional • Comparação de números racionais • Operações com números racionais • Relação fundamental da subtração • Números inversos • Relação fundamental da divisão • Expressões numéricas envolvendo números racionais
Habilidades	EF07MA05, EF07MA07, EF07MA08, EF07MA09, EF07MA10, EF07MA11 e EF07MA12.
Competências gerais	7, 8, 9 e 10.
Competências específicas	3, 5 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente e Ciência e Tecnologia.

UNIDADE 3 – FIGURAS GEOMÉTRICAS	
Conteúdos	• Ângulos • Grau e submúltiplos do grau • Construção de ângulos com régua e transferidor • Adição, subtração, multiplicação e divisão com medidas de ângulos • Ângulos congruentes, adjacentes, consecutivos, complementares e suplementares • Ângulos opostos pelo vértice • Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal • Elementos dos polígonos • Diagonais dos polígonos • Ângulos externos e internos dos polígonos • Condição de existência de um triângulo • Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo • Soma das medidas dos ângulos internos e externos de polígonos • Classificação dos triângulos quanto aos lados e aos ângulos • Construção de triângulos com régua e compasso • Construção de polígonos regulares com régua e transferidor
Habilidades	EF07MA23, EF07MA24, EF07MA25, EF07MA26, EF07MA27 e EF07MA28.
Competência geral	2
Competências específicas	3, 4 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Multiculturalismo e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 4 – INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA	
Conteúdos	• Introdução às expressões algébricas • Termos de uma expressão algébrica • Simplificação de uma expressão algébrica • Sequências e expressões algébricas • Solução ou raiz de uma equação • Conjunto universo e conjunto solução de uma equação • Equações do 1º grau com uma incógnita • Equações com duas incógnitas
Habilidades	EF07MA13, EF07MA14, EF07MA15, EF07MA16 e EF07MA18.
Competências gerais	4, 6, 8, 9 e 10.
Competência específica	3
Temas Contemporâneos Transversais	Economia e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 5 – PROPORCIONALIDADE E PORCENTAGEM	
Conteúdos	• Razão • Proporção • Sequências diretamente e inversamente proporcionais • Grandezas diretamente e inversamente proporcionais • Regra de três • Porcentagem envolvendo números na forma fracionária, na forma decimal e cálculo mental • Porcentagem e proporcionalidade • Acréscimos e decréscimos
Habilidades	EF07MA02, EF07MA13 e EF07MA17.
Competências gerais	2, 7, 9 e 10.
Competências específicas	3, 5 e 6.
Tema Contemporâneo Transversal	Meio Ambiente

UNIDADE 6 – CIRCUNFERÊNCIA, CÍRCULO E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	
Conteúdos	• Circunferência • Elementos de uma circunferência: raio, corda, diâmetro, arcos e ângulo central • Medida de comprimento e medida angular de um arco • Cálculo aproximado do número π • Posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências • Círculo e setor circular • Eixo de simetria • Figuras assimétricas • Construções de figuras simétricas • Transformações geométricas: reflexão, rotação e translação • Outras transformações geométricas no plano cartesiano
Habilidades	EF07MA06, EF07MA19, EF07MA20, EF07MA21, EF07MA22 e EF07MA33.
Competência geral	7
Competências específicas	1, 2, 5 e 6.
Tema Contemporâneo Transversal	Meio Ambiente

UNIDADE 7 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	
Conteúdos	• Experimento aleatório, espaço amostral e evento • Cálculo de probabilidade de ocorrência de um evento • Simulações que envolvem cálculo de probabilidade • Pesquisa amostral e pesquisa censitária • Planejamento de pesquisa, coleta e organização dos dados, construção de tabelas e gráficos e interpretação das informações • Tabelas simples e de dupla entrada • Gráficos de barras simples, de barras duplas, de linhas, pictórico e de setores • Cálculo da média aritmética com e sem o uso de planilhas eletrônicas
Habilidades	EF07MA34, EF07MA35, EF07MA36 e EF07MA37.
Competências gerais	4, 8, 9 e 10.
Competências específicas	2, 4, 6 e 7.
Temas Contemporâneos Transversais	Saúde, Cidadania e Civismo e Ciência e Tecnologia.

UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS	
Conteúdos	• Grandezas e medidas • Unidades de medida padronizadas e não padronizadas • Equivalência entre figuras planas • Área e suas unidades de medida padronizadas • Área de quadriláteros e triângulos • Volume de um bloco retangular
Habilidades	EF07MA29, EF07MA30, EF07MA31 e EF07MA32.
Competências gerais	1, 4, 7 e 9.
Competências específicas	1, 3, 4 e 5.

8º ANO

UNIDADE 1 – POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO	
Conteúdos	• Potenciação de números racionais • Propriedades da potenciação • Notação científica • Radiciação de números racionais • Potenciação com expoente fracionário • Propriedades da radiciação
Habilidades	EF08MA01 e EF08MA02.
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	2 e 3.
Temas Contemporâneos Transversais	Saúde, Ciência e Tecnologia, Meio Ambiente e Economia.

UNIDADE 2 – CÁLCULO ALGÉBRICO	
Conteúdos	• Situações que envolvem expressões algébricas • Valor numérico de uma expressão algébrica • Monômios • Operações com monômios: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação • Polinômios • Operações com polinômios: adição, subtração, multiplicação e divisão
Habilidade	EF08MA06
Competências gerais	7, 9 e 10.
Competência específica	3
Tema Contemporâneo Transversal	Economia

UNIDADE 3 – EQUAÇÕES E SISTEMAS	
Conteúdos	• Equações do 1º grau com uma incógnita • Fração geratriz de uma dízima periódica • Equações do 1º grau com duas incógnitas • Resolução gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas • Equações do 2º grau na forma $ax^2 = b$ • Resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$ • Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas • Resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas • Análise da solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas por meio de representação gráfica • Classificação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas em: SPD, SI ou SPI
Habilidades	EF08MA05, EF08MA07, EF08MA08 e EF08MA09.
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	1, 3, 5 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Cidadania e Civismo, Ciência e Tecnologia e Saúde.

UNIDADE 4 – TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS	
Conteúdos	• Elementos e classificação dos triângulos • Condição de existência ou desigualdade triangular • Relação entre um ângulo externo e dois ângulos não adjacentes • Cevianas de um triângulo • Mediatriz do lado de um triângulo • Pontos notáveis do triângulo: ortocentro, baricentro, incentro e circuncentro • Casos de congruência de triângulos • Elementos de um quadrilátero • Classificação dos quadriláteros • Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo • Paralelogramos: classificação e propriedades • Trapézios: classificação e propriedades
Habilidade	EF08MA14
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	3 e 7.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 5 – SEQUÊNCIAS E PROPORCIONALIDADE	
Conteúdos	• Sequências recursivas e não recursivas • Termos de uma sequência • Grandezas direta e inversamente proporcionais • Constante de proporcionalidade • Grandezas não proporcionais
Habilidades	EF08MA10, EF08MA11, EF08MA12 e EF08MA13.
Competências gerais	3, 7, 8 e 9.
Competências específicas	2 e 7.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Cidadania e Civismo e Multiculturalismo.

UNIDADE 6 – CONSTRUÇÕES E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	
Conteúdos	• Conceito e construção de bissetriz de um ângulo e de mediatriz de um segmento com régua e compasso • Construção de ângulos de 30º, 45º, 60º e 90º com régua e compasso • Polígonos regulares inscritos em uma circunferência • Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência • Construção de polígonos regulares (triângulo equilátero, quadrado e octógono regular) inscritos em uma circunferência, com o auxílio de régua e compasso • Construção de polígonos regulares (pentágono regular, dodecágono regular e hexágono regular) inscritos em uma circunferência pelo ângulo central • Isometrias • Transformações geométricas por reflexão, translação e rotação
Habilidades	EF08MA15, EF08MA16, EF08MA17 e EF08MA18.
Competência geral	7
Competência específica	6
Temas Contemporâneos Transversais	Ciência e Tecnologia e Multiculturalismo.

UNIDADE 7 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	
Conteúdos	• Árvore de possibilidades • Princípio fundamental da contagem • Conceitos iniciais de probabilidade: experimento aleatório, espaço amostral e evento • Cálculo da probabilidade de um evento • Eventos complementares • Medidas de tendência central: média aritmética, média aritmética ponderada, mediana e moda • Medidas de dispersão: amplitude, desvio, variância e desvio-padrão • Frequência absoluta e frequência relativa • Histograma • Pesquisa amostral e pesquisa censitária • Representação de dados e análise dos diferentes tipos de gráfico • Planejamento e execução de pesquisa amostral
Habilidades	EF08MA03, EF08MA04, EF08MA22, EF08MA23, EF08MA24, EF08MA25, EF08MA26 e EF08MA27.
Competências gerais	6 e 9.
Competências específicas	3, 4 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Ciência e Tecnologia e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS	
Conteúdos	• Área de figuras planas • Ideias associadas a volume e capacidade • Volume de um bloco retangular • Volume de um cilindro
Habilidades	EF08MA19, EF08MA20 e EF08MA21.
Competências gerais	5, 7, 8 e 9.
Competência específica	7
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia, Saúde e Ciência e Tecnologia.

9º ANO

UNIDADE 1 – CONJUNTOS NUMÉRICOS, POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

Conteúdos	• Conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais) • Representação, ordenação e comparação dos números reais na reta numérica • Potenciação com expoentes inteiros e suas propriedades • Notação científica • Radiciação e suas propriedades • Comparação entre radicais • Operação com radicais • Racionalização de denominadores • Potência de radicais • Potência de expoente racional e suas propriedades
Habilidades	EF09MA02, EF09MA03 e EF09MA04.
Competências gerais	7 e 9.
Competência específica	3
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Cidadania e Civismo, Ciência e Tecnologia e Economia.

UNIDADE 2 – RAZÃO, PROPORÇÃO E MATEMÁTICA FINANCEIRA

Conteúdos	• Razão • Proporção • Divisão em partes proporcionais • Regra de três simples e regra de três composta • Porcentagem • Descontos e acréscimos sucessivos • Juros
Habilidades	EF09MA05, EF09MA07 e EF09MA08.
Competências gerais	1, 5, 8 e 9.
Competência específica	3
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 3 – RETAS E ÂNGULOS, SEMELHANÇA E TRIÂNGULO RETÂNGULO

Conteúdos	• Retas cortadas por uma transversal • Relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal • Razão e proporção entre segmentos • Feixe de retas paralelas cortadas por transversais • Teorema de Tales • Aplicações do teorema de Tales • Figuras semelhantes • Ampliação e redução de figuras • Semelhança de polígonos • Casos de semelhança de triângulos • Elementos do triângulo retângulo • Medidas no triângulo retângulo • Relações métricas no triângulo retângulo • Teorema de Pitágoras e suas aplicações
Habilidades	EF09MA01, EF09MA10, EF09MA12, EF09MA13 e EF09MA14.
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	1, 3 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Multiculturalismo e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 4 – PRODUTOS NOTÁVEIS, FATORAÇÃO E EQUAÇÕES

Conteúdos	• Quadrado da soma e da diferença de dois termos • Produto da soma pela diferença de dois termos • Cubo da soma e da diferença de dois termos • Fator comum em evidência • Agrupamento • Diferença de dois quadrados • Trinômio quadrado perfeito • Soma e diferença de dois cubos • Fração algébrica: valor numérico e simplificação • Operações com frações algébricas
Habilidade	EF09MA09
Competências gerais	1, 7 e 9.
Competências específicas	1, 3 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia e Saúde.

UNIDADE 5 – GEOMETRIA	
Conteúdos	• Plano cartesiano • Medida da distância entre dois pontos no plano • Ponto médio de um segmento no plano cartesiano • Perímetro e área de figuras planas representadas no plano cartesiano • Circunferência e arcos de circunferência • Ângulo central e ângulo inscrito em uma circunferência • Relação entre o ângulo inscrito e o arco da circunferência determinado por ele • Relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito • Polígonos regulares • Construção de polígonos regulares com régua e compasso e com *software* de geometria dinâmica • Representação de vistas • Noções de perspectiva
Habilidades	EF09MA11, EF09MA15, EF09MA16 e EF09MA17.
Competências gerais	9 e 10.
Temas Contemporâneos Transversais	Multiculturalismo e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 6 – FUNÇÕES	
Conteúdos	• Noção de função • Lei de formação de uma função • Valor de uma função • Representação gráfica de uma função • Função afim • Casos de função afim • Gráfico de uma função afim • Zero de uma função afim • Variação de uma função afim • Estudo do sinal da função afim • Função linear e proporcionalidade
Habilidades	EF09MA06 e EF09MA08.
Competência geral	8
Competências específicas	3, 6 e 8.

UNIDADE 7 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	
Conteúdos	• Experimento aleatório, espaço amostral e eventos • Probabilidade condicional • Eventos dependentes e independentes • Medidas de tendência central: média, moda e mediana • Medidas de dispersão: amplitude, desvio, variância e desvio-padrão • Análise de tabelas e gráficos estatísticos • Etapas e elementos de uma pesquisa estatística
Habilidades	EF09MA20, EF09MA21, EF09MA22 e EF09MA23.
Competências gerais	1 e 9.
Competências específicas	2, 5 e 6.

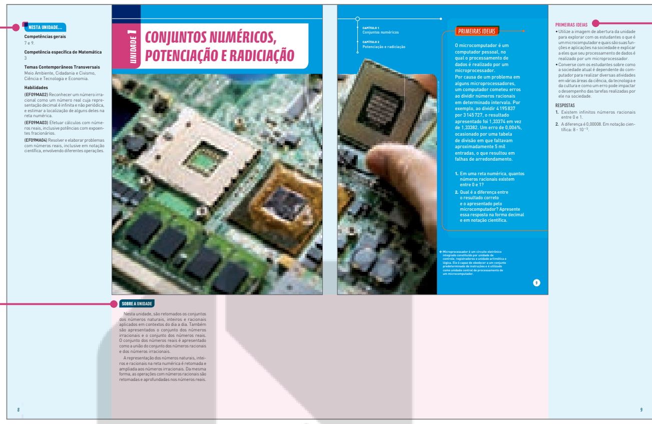
UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS	
Conteúdos	• Medidas muito grandes ou muito pequenas • Prefixos do Sistema Internacional (SI) de unidades • Unidades de medida de comprimento • Unidades de medida de massa • Unidades de medida de informática • Volume de prisma, pirâmide, cilindro e cone
Habilidades	EF09MA18 e EF09MA19.
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	3, 4, 7 e 8.

O MANUAL DO PROFESSOR

O Manual do Professor dispõe seu conteúdo ao redor da imagem reduzida do Livro do Estudante. Esse formato facilita a análise e a integração das orientações, situadas e contextualizadas próximas aos textos, às imagens, às atividades e aos demais recursos presentes no livro didático.

Nesta unidade...

Listas com as competências gerais e específicas de Matemática, os Temas Contemporâneos Transversais e as habilidades da BNCC desenvolvidos na unidade.



Primeiras ideias

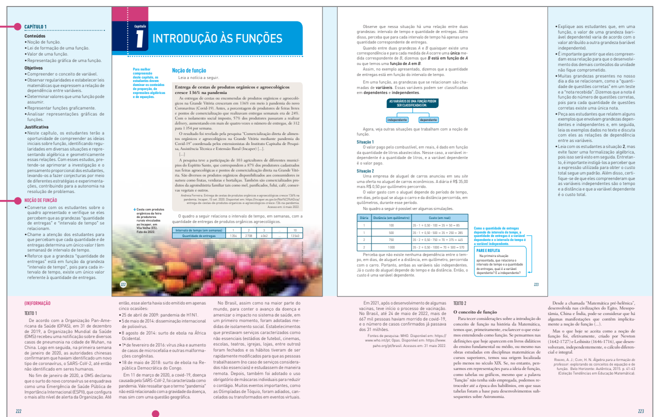
Comentários sobre a abertura da unidade e as respostas das questões propostas.

Sobre a unidade

Texto que apresenta e descreve o tema a ser desenvolvido na unidade, mostrando o que se espera que os estudantes aprendam e como os objetivos e a justificativa da unidade estão articulados.

Capítulo

Apresenta uma lista com os principais conteúdos do capítulo, os objetivos do capítulo e a justificativa da pertinência desses objetivos.



Temas

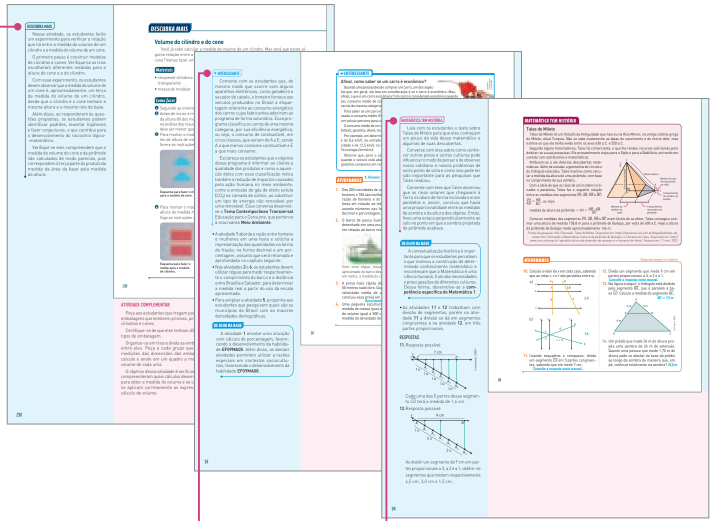
Orientações para a abordagem e o encaminhamento dos conteúdos propostos. Em alguns momentos, constam respostas das atividades propostas.

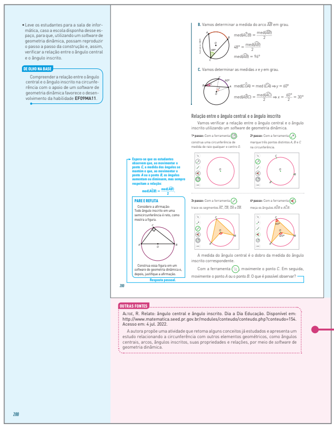
(In)formação

Textos para a formação do professor que podem subsidiar o trabalho com temas específicos.

Descubra mais, +Interessante e Matemática tem história

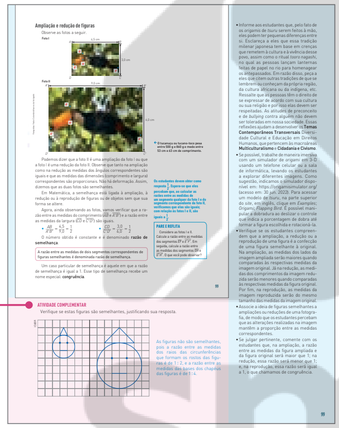
Comentários que subsidiam o trabalho com os boxes presentes no Livro do Estudante.





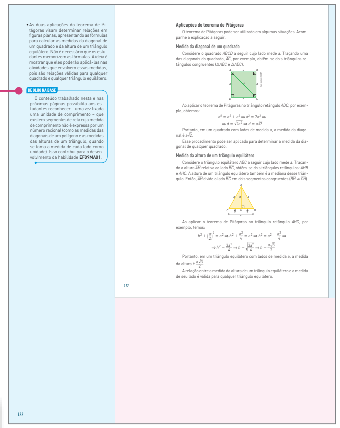
Outras fontes

Sugestões para o professor de textos, livros, *sites* e vídeos que podem subsidiar o trabalho com temas específicos.



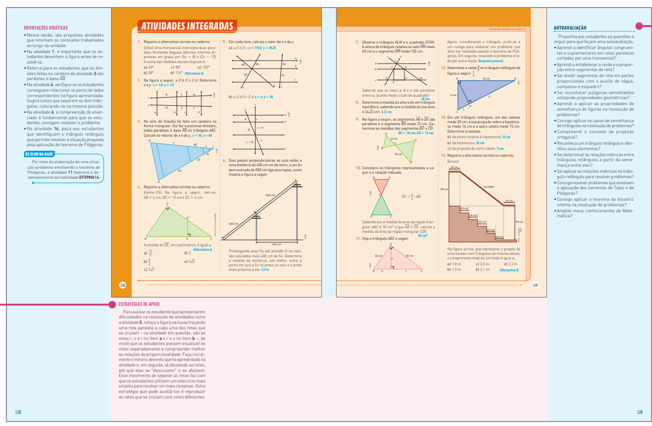
Atividade complementar

Proposta de atividades extras para serem realizadas com os estudantes.



De olho na Base

Indica e comenta a habilidade e/ou a competência da BNCC que está relacionada ao conteúdo trabalhado.



Autoavaliação

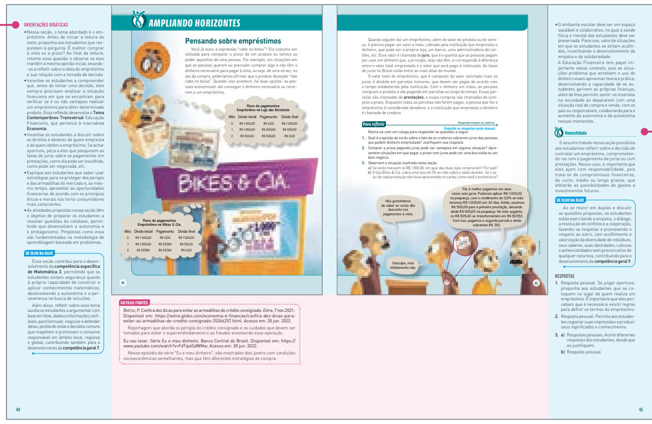
Questões para que os estudantes façam uma autoavaliação do aprendizado.

Estratégias de apoio

Nas seções *Diversificando* e *Atividades integradas*, são apresentadas sugestões de outras abordagens para apoiar estudantes com eventuais dificuldades.

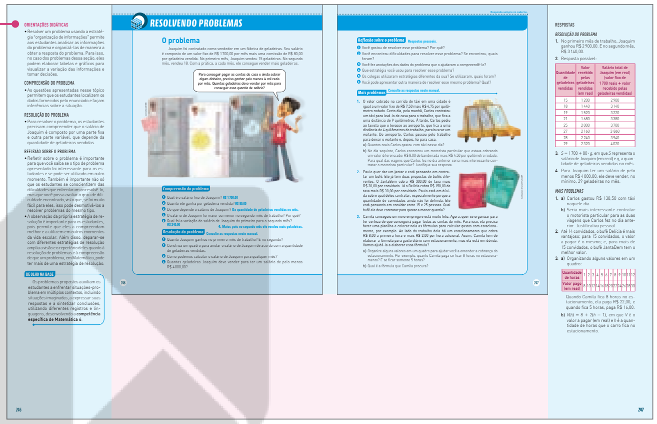
Seções

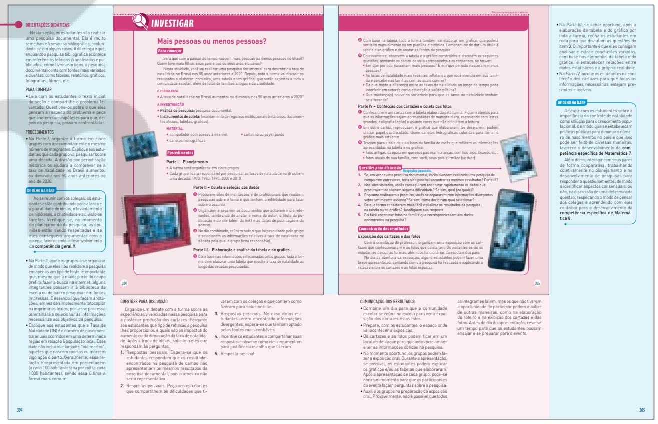
Traz algumas orientações didáticas para o trabalho com essas seções, com comentários e eventuais respostas.



Valor

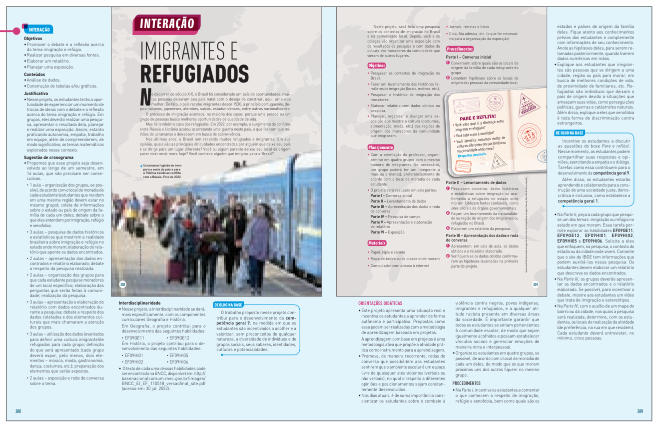
O ícone sinaliza o valor trabalhado naquele momento, sobre o qual os estudantes vão refletir.





Interação

Apresenta orientações didáticas para a condução da seção. Além disso, traz uma proposta de cronograma, com a indicação do número de aulas a serem trabalhadas na seção, e aponta a abordagem interdisciplinar, demonstrando as habilidades trabalhadas de outro(s) componente(s) curricular(es).



BIBLIOGRAFIA COMENTADA

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

Essa obra analisa por que e para que usar metodologias ativas, cujo foco é a participação efetiva dos estudantes na construção do conhecimento e no desenvolvimento de competências. Segundo os autores, a aplicação inovadora de tais metodologias na educação favorece a aprendizagem, levando em consideração o ritmo, o tempo e o estilo de cada estudante, por meio de diferentes atividades e de compartilhamento de informações, dentro e fora da sala de aula, com mediação docente e incorporação de recursos digitais.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Tradução: Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2018. (Série Desafios da Educação).

A autora apresenta razões pelas quais a Matemática se tornou uma fonte de experiências negativas para estudantes na Educação Básica. Com base em sua extensa pesquisa e nas descobertas recentes da neurociência, ela analisa como professores, gestores e pais podem auxiliar os estudantes a transformar sua experiência com a Matemática ao desenvolver neles uma mentalidade de crescimento. Com exemplos práticos, o livro propõe técnicas e atividades que podem ser implementadas na escola para tornar a aprendizagem da Matemática mais significativa e acessível a todos os estudantes.

BRACKMANN, C. P. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica*. 2017. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias da Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208. Acesso em: 17 jun. 2022.

O autor trata do pensamento computacional como uma abordagem de ensino que utiliza técnicas oriundas da Ciência da Computação.

BRASIL. *Constituição* (1988). Constituição da República Federativa do Brasil: texto constitucional promulgado em 5 de outubro de 1988, com as alterações adotadas pelas Emendas Constitucionais n. 1/1992 a 99/2017, pelo Decreto Legislativo n. 186/2008 e pelas Emendas Constitucionais de Revisão n. 1 a 6/1994. 53. ed. Brasília: Edições Câmara, 2018.

Nesse documento encontram-se os itens da Constituição brasileira que deram origem à Lei de Diretrizes e Bases de 1996, que, por sua vez, estabelece os fundamentos da atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC), cuja última versão, até a publicação deste material, foi apresentada em 2018.

BRASIL. Lei n. 9 394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: Diário Oficial da União, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm. Acesso em: 17 jun. 2022.

O documento, que contribuiu para a posterior elaboração da BNCC, estabelece as competências e as habilidades para a formação dos estudantes diante dos desafios do mundo contemporâneo.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de avaliação de Matemática – Pisa 2012*. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) traz informações sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária de 15 anos. Nesse documento, é possível conhecer a matriz de avaliação de Matemática do programa.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de referência Enem*. Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) é uma prova do governo federal que avalia o desempenho individual dos participantes. A matriz de referência do Enem apresenta as competências e as habilidades que são exigidas no exame.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matrizes de referência de Matemática do Saeb*. Brasília: Inep, 2022.

Esse documento apresenta as competências e as habilidades que se espera que os participantes das avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) tenham desenvolvido na etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.

De caráter normativo, esse documento define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e das modalidades da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Competências socioemocionais como fator de proteção à saúde mental e ao* bullying. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/195-competencias-socioemocionais-como-fator-de-protecao-a-saude-mental-e-ao-bullying. Acesso em: 17 jun. 2022.

As competências socioemocionais, presentes no contexto escolar, estão de acordo com as novas diretrizes propostas pela BNCC. No contexto da educação para o século XXI, os estudantes devem se preparar para além das competências cognitivas, mantendo a inter-relação dos conteúdos, por meio do gerenciamento das emoções, para que possam resolver problemas em todas as áreas que a vida prática venha a exigir deles.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica*. Brasília: MEC/SEB/Dicei, 2013.

Esse documento traz as diretrizes que estabelecem a base nacional comum, responsável por orientar a organização, a articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas das redes de ensino brasileiras.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Ensino Fundamental de nove anos*: orientações para a inclusão da criança de seis anos de idade. Brasília: MEC/SEB, 2007.

O documento foi elaborado com base no diálogo com gestores dos sistemas de ensino e tem como propósito desenvolver uma metodologia de trabalho voltada à ampliação do programa de Ensino Fundamental para alunos de 6 anos de idade.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.

Esse documento explicita a relação entre os diferentes componentes curriculares e as situações vivenciadas pelos estudantes. O texto considera ainda os contextos escolar e social na formação para o trabalho, a cidadania e a democracia, respeitando as características regionais e locais da cultura e da economia e seu impacto na vida dos estudantes.

Bruner, J. S. *O processo da educação*. 3. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1973.
Tendo em vista a reforma curricular na área da educação, o autor mostra nesse livro que os conceitos básicos da ciência e das humanidades podem ser ensinados a crianças desde muito pequenas.

Bussab, W. O.; Morettin, P. A. *Estatística básica*. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.
O livro é dividido em três partes: a análise de dados unidimensionais e bidimensionais, os conceitos básicos de probabilidades e de variáveis aleatórias e os tópicos principais da inferência estatística, além de temas especiais, como regressão linear simples. Em todos os capítulos, traz uma seção que ensina a aplicar a teoria por meio de *softwares*.

Coll, C. *Psicologia e currículo*: uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar. São Paulo: Ática, 2000.
Esse livro apresenta um modelo de projeto curricular que orienta a elaboração de propostas curriculares na educação escolar, abordando desde as relações entre aprendizagem, desenvolvimento e educação até as funções do currículo no planejamento de ensino.

Cruz, C. *Competências e habilidades*: da proposta à prática. São Paulo: Loyola, 2001.
Nesse livro, o autor explica a diferença do que se entende por competência e habilidade e a relação entre essas ideias. O texto fornece subsídios de como colocar em prática o ensino por meio de competências e habilidades.

Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA). 1990. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei8069_02.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.
Esse é o principal documento brasileiro que descreve os direitos e os deveres de crianças e jovens, em seu art. 2º, e considera criança "a pessoa até doze anos de idade incompletos, e adolescente aquela entre doze e dezoito anos de idade" (ECA, p. 1).

Eves, H. *Introdução à história da Matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2011.
Nesse livro, uma das obras mais completas da área da história da Matemática, o autor descreve a história da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos, além de apresentar recursos pedagógicos e o panorama cultural de cada época abordada.

Fiorin, J. L. *As astúcias da enunciação*: as categorias de pessoa, espaço e tempo. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.
No livro, por meio de exemplos diversos, o autor descreve e analisa como as categorias de pessoa, espaço e tempo se manifestam no discurso e quais são os efeitos de sentido que nele engendram.

Freire, P. *Pedagogia da autonomia*. São Paulo: Paz e Terra, 2005.
Trata-se de uma obra de referência na área da educação, em que o autor, com base no olhar revolucionário e no rigor crítico, reflete sobre o que o ato de ensinar exige de educadores e de educandos.

Gardner, H. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Porto Alegre: Artmed, 1995.
Precursor dos estudos de neurociência, o autor apresenta as ideias fundamentais que desencadeiam uma revolução na forma de compreender a inteligência humana e as possibilidades de sua aplicação na educação, em especial nas escolas ou nas salas de aula nas quais a aprendizagem é pensada com profundidade, para além do estudo superficial de conteúdos, visando a um ensino voltado para a compreensão.

Grover, S.; Pea, R. Computational thinking in K-12: a review of the state of the field. *Educational Researcher*, v. 42, n. 1, p. 38-43, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/258134754_Computational_Thinking_in_K-12_A_Review_of_the_State_of_the_Field. Acesso em: 17 jun. 2022.
Esse artigo reúne relatos da experiência de um curso de formação continuada em pensamento computacional, do Programa Norte-rio-grandense de Pensamento Computacional (PENSA RN), com professores dos anos finais do Ensino Fundamental. Tal experiência permitiu que professores adotassem novas estratégias em seu ambiente de trabalho, elaborando e aplicando práticas educativas integradas ao pensamento computacional na rede de ensino em escolas públicas.

Hattie, J. *Aprendizagem visível para professores*: como maximizar o impacto da aprendizagem. Porto Alegre: Penso, 2017.
Fundamentado em amplas pesquisas com milhões de estudantes ao redor do mundo, o autor explica como é possível maximizar a aprendizagem na escola por meio do que ele define como aprendizagem visível. Nessa obra, ele apresenta conceitos bastante inovadores relacionados à avaliação e ao acompanhamento contínuo da aprendizagem pelo educador e pelo estudante, ensinando como aplicar os princípios da aprendizagem visível em qualquer sala de aula.

Iezzi, G. *et al*. *Fundamentos de Matemática elementar, v. 1*: Conjuntos e funções. São Paulo: Atual, 2013.
Com um total de 11 volumes, essa coleção é consagrada por oferecer aos leitores o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Neste volume são desenvolvidos os conteúdos referentes a conjuntos e funções.

Lima, E. C. de S. *Algumas questões sobre o desenvolvimento do ser humano e a aquisição de conhecimentos na escola*: currículo básico para a escola pública do estado do Paraná. 3. ed. Curitiba: Secretaria de Estado da Educação, 2003.
Esse trabalho foi desenvolvido com base na análise da prática em sala de aula e na reflexão sobre ela, com vistas a uma sociedade mais justa, em que todos tenham acesso ao conhecimento e dele possam se apropriar.

Lopes, A. C. *Políticas de integração curricular*. Rio de Janeiro: EdUERJ, 2008. Disponível em: https://www.eduerj.uerj.br/engine/wp-content/uploads/woocommerce_uploads/2016/01/Pol%C3%ADticas-de-Integra%C3%A7%C3%A3o-Curricular.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.
Nesse livro, a autora analisa a atual política de organização do currículo a partir do entendimento da história do pensamento curricular nas principais organizações curriculares clássicas, que permitem entender os atuais discursos pedagógicos.

Luckesi, C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2018.
O objetivo dessa obra é apresentar estudos sobre avaliação da aprendizagem escolar, bem como proposições para torná-la mais viável e construtiva para estudantes e professores.

Machado, N. J. *Conhecimento e valor*. São Paulo: Moderna, 2004.
Nesse livro, o autor reuniu alguns ensaios referentes ao conhecimento como valor, apresentando textos cuja finalidade maior é a compreensão do valor do conhecimento e da função da educação. Ele afirma que o único caminho para a "distribuição" de conhecimento é, sem dúvida, a educação, e a omissão dos educadores pode provocar o predomínio das perspectivas de outros profissionais, como os economistas, no terreno educacional.

Marques, M. *Teoria da medida*. Campinas: Ed. da Unicamp, 2009.
Nessa obra, o autor apresenta uma série de notas de aulas sobre estudos avançados em teoria de probabilidade e teoria estatística matemática, entre outros, para estudantes de Pós-graduação em Matemática e Estatística. Além disso, traz demonstrações desenvolvidas detalhadamente, visando permitir o aprendizado autossuficiente do leitor.

Mlodinow, L. *A janela de Euclides*: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. Belo Horizonte: Geração, 2010.
Nessa obra, o autor apresenta uma jornada pela Geometria, desde o conceito grego de linhas paralelas até as mais recentes noções de hiperespaço.

Nova Escola. Criança e Adolescente. *21 perguntas e respostas sobre* bullying. 1º ago. 2009. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/336/bullying-escola. Acesso em: 17 jun. 2022.
Nesse artigo, especialistas respondem a 21 perguntas sobre *bullying*, um problema que preocupa pais, professores e gestores.

Oliveira, V. C.; Oliveira, C. P.; Vaz, F. A. *A história da Matemática e o processo de ensino-aprendizagem*. *In*: XX EREMAT – Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. Fundação Universidade Federal do Pampa (Unipampa), Bagé (RS), Brasil, 13-16 nov. 2014. p. 429. Disponível em: https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/PO_oliveira_00971876070.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.
Nesse trabalho, os autores apresentam a utilização da história da Matemática como instrumento de investigação científica no ensino de Matemática. Eles demonstram que tais investigações propiciam aos estudantes momentos de reflexão para o estabelecimento de conexões entre as descobertas, os conhecimentos matemáticos e sua realidade.

Organização Pan-Americana de Saúde (Opas). *Folha informativa sobre covid-19*. Disponível em: https://www.paho.org/pt/covid19. Acesso em: 17 jun. 2022.
Esse documento apresenta diversas informações e atualizações sobre a covid-19 e a pandemia causada pelo novo coronavírus SARS-CoV-2.

Perrenoud, P. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1999.
As competências são enfatizadas pelo sociólogo suíço Philippe Perrenoud ao tratar dos desafios da educação contemporânea. A organização, a administração e o desenvolvimento da aprendizagem, a utilização de novas tecnologias, o trabalho em equipe, o envolvimento dos estudantes em suas aprendizagens e a participação na administração da escola são alguns dos temas abordados.

Piaget, J. *Psicologia e pedagogia*. 9. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2008.
Essa obra é resultado de 40 anos de pesquisas sobre novos métodos psicológicos aplicados à pedagogia. Nela, o autor apresenta as falhas da pedagogia tradicional, excessivamente empírica, e retraça a história das tentativas mais importantes que vêm sendo feitas nesse campo há mais de meio século.

Polya, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
Essa obra aborda a prática de resolver problemas, que implica uma série de procedimentos cognitivos para despertar a curiosidade, a atenção e o interesse pelo trabalho mental, contribuindo para outras atividades da vida.

Rezende, E. Q. F.; Queiroz, M. L. B. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. 2. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2008.
Os autores da obra apresentam as construções geométricas com argumentações lógicas, auxiliando professores e estudantes na resolução de problemas.

Rosenberg, M. *Comunicação não violenta*. Nova edição: Técnicas para aprimorar relacionamentos pessoais e profissionais. São Paulo: Ágora, 2021.
O autor da obra cresceu em um bairro turbulento de Detroit (EUA) e se interessou por novas formas de comunicação para criar alternativas pacíficas de diálogo que amenizassem o clima de violência com o qual convivera. Militante pelos direitos civis, voluntário em abrigos e terapeuta familiar, o autor criou uma organização internacional sem fins lucrativos com pessoas habilitadas a dar treinamentos em comunicação não violenta. O trabalho foi realizado em mais de sessenta países com educadores, profissionais da área de saúde, mediadores, empresários, prisioneiros, guardas, policiais, militares, membros do clero e funcionários públicos.

Ruiz, J. A. L. A internet na cultura juvenil: condicionamentos, significados e usos sociais. *Observatorio de la Juventud en Iberoamérica*, 1º jun. 2017. Disponível em: https://oji.fundacion-sm.org/a-internet-na-cultura-juvenil-condicionamentos-significados-e-usos-sociais/. Acesso em: 17 jun. 2022.
Nesse artigo, o autor esclarece dois conceitos fundamentais: cultura juvenil e cultura digital. Ele ressalta que a interação dos jovens com todos os meios digitais pode estar impulsionando neles habilidades e potenciais.

Sperandio, D.; Mendes, J. T.; Silva, L. H. M. *Cálculo numérico*: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Pearson, 2006.
Esse livro apresenta os procedimentos mais importantes para a análise de complexos modelos matemáticos, provenientes das mais variadas áreas de conhecimento. Além disso, exercícios ao final de cada capítulo permitem ao leitor testar seus conhecimentos e explorar o conteúdo teórico desenvolvido.

Stein, J. D. A. *A Matemática pode mudar sua vida*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.
Essa obra é um guia prático repleto de orientações sobre como a Matemática pode mudar a vida das pessoas. Utilizando situações suscetíveis à análise da Matemática, o autor traz aplicações matemáticas simples que podem se mostrar muito eficientes na vida financeira, profissional e pessoal de uma pessoa.

Tahan, M. *Matemática divertida e curiosa*. 27. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.
Para mostrar a importância da Matemática, esse livro traz enigmas aritméticos, problemas matemáticos, jogos de engenhosidade, ilusões de ótica, lendas, histórias, piadas, paradoxos geométricos e curiosidades que desafiam a inteligência do leitor.

Van de Walle, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.
Nessa obra, são apresentadas ideias e discussões para orientar os professores de Ensino Fundamental que lecionam esse componente curricular.

Waal, F. de. *A era da empatia*: lições da natureza para uma sociedade mais gentil. São Paulo: Companhia das Letras, 2009.
Tomando como base estudos realizados com macacos-prego e chimpanzés, o autor mostra nessa obra como diversos animais (incluindo os seres humanos), ao longo da evolução, apresentaram uma tendência à empatia, ou seja, à capacidade de se colocar no lugar do próximo.

World Health Organization (WHO). Disponível em: https://www.who.int/pt/. Acesso em: 17 jun. 2022.
Esse *site* apresenta diversas informações e atualizações sobre a pandemia de covid-19, causada pelo novo coronavírus, o SARS-CoV-2.

Zegarelli, M. *Matemática básica e pré-álgebra para leigos*. Rio de Janeiro: Alta Books, 2009.
A obra é um convite ao estudo de muitos temas e conceitos matemáticos, com lições fáceis de acompanhar e uma série de exercícios práticos.

RESOLUÇÕES

UNIDADE 1 – CONJUNTOS NUMÉRICOS, POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

CAPÍTULO 1 – CONJUNTOS NUMÉRICOS

PÁGINA 12 – ATIVIDADES

1. **a)** $78 < 84$

b) $16 < 43$

c) $1\,463 > 1\,324$

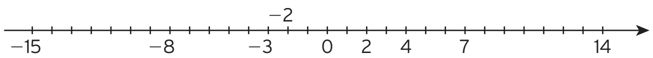
d) $461 > 416$

2. **a)** Não, na sequência dos números naturais, o zero não tem antecessor. Sim.

b) Infinitos.

c) O número zero.

3.



4. **a)** Verdadeira.

b) Verdadeira.

c) Falsa.

Como todo número inteiro tem um antecessor inteiro, dado um número inteiro, sempre existe um número inteiro menor que o número dado. Por exemplo, -58 é o antecessor de -57. Logo, $-58 < -57$.

Correção possível: O conjunto dos números inteiros não tem um menor elemento.

5. **a)** $-8 < 15$
b) $9 > -9$
c) $-18 > -27$
d) $-213 > -312$

6. **a)** De acordo com o enunciado, foi pedido:
- o maior número inteiro de três algarismos: 999
- que os algarismos sejam distintos: 987
- que o número seja divisível por 5 (para um número ser divisível por 5, ele deve terminar em 0 ou 5): 980 ou 985

Portanto, o maior número inteiro de três algarismos distintos e divisível por 5 é 985.

b) De acordo com o enunciado, foi pedido:
- o maior número natural par de quatro algarismos (para um número ser par, ele deve terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8): 9 998
- que os algarismos sejam distintos: 9 876

Portanto, o maior número natural par de quatro algarismos distintos é 9 876.

c) De acordo com o enunciado, foi pedido:
- o menor número inteiro par de quatro algarismos: $-9\,998$
- que os algarismos sejam distintos: $-9\,876$

Portanto, o menor número inteiro par de quatro algarismos distintos é $-9\,876$.

7. **a)** Números inteiros de -2 a -6, incluindo esses dois números: -2, -3, -4, -5 e -6.
Portanto, são 5 números inteiros.

b) Números inteiros de -5 a 6, incluindo o número -5, mas não o número 6: -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 e 5.
Portanto, são 11 números inteiros.

8. Alternativas **d** e **h**.

a) Resulta em um número natural, pois na adição de dois números naturais o resultado sempre é um número natural.

b) Resulta em um número natural, pois na adição de dois números naturais o resultado sempre é um número natural.

c) Resulta em um número natural, pois na subtração de números naturais na qual o minuendo é maior que o subtraendo, o resultado é um número natural.

d) Não resulta em um número natural, pois na subtração de números naturais na qual o minuendo é menor que o subtraendo, o resultado não é um número natural.

e) Resulta em um número natural, pois na multiplicação de dois números naturais o resultado sempre é um número natural.

f) Resulta em um número natural, pois na multiplicação de dois números naturais o resultado sempre é um número natural.

g) Resulta em um número natural, pois o dividendo é múltiplo do divisor.

h) Não resulta em um número natural, pois o dividendo não é múltiplo do divisor.

PÁGINA 15 – ATIVIDADES

9. **a)** Resposta possível: -5.

b) Resposta possível: $-\frac{1}{3}$.

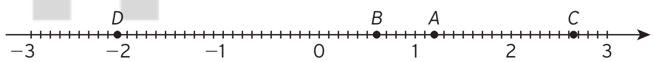
c) Resposta possível: $\frac{2}{5}$.

d) Não existe. Todos os números naturais também são números racionais.

10. Para facilitar a localização dos números na reta numérica, pode-se transformar as frações em números decimais.

- $A = \frac{12}{10} = 1{,}2$
- $B = \frac{3}{5} = 0{,}6$
- $C = \frac{24}{9} = 2{,}666...$

Portanto:



Ilustrações: ID/BR

11. **a)** Verdadeira.

b) Verdadeira.

c) Falsa. Correção possível: Entre dois números racionais, existem infinitos números racionais.

d) Falsa. Correção possível: Existem infinitos números naturais, infinitos números inteiros e infinitos números racionais.

e) Verdadeira.

f) Falsa. Correção possível: O número 13,57 está entre 13,5 e 13,6.

12. Resposta possível:

♦: $\frac{17}{20} + 0{,}3 = \frac{17}{20} + \frac{3}{10} = \frac{17}{20} + \frac{6}{20} = \frac{23}{20}$

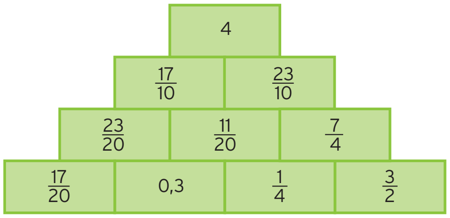
★: $0{,}3 + \frac{1}{4} = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} = \frac{6}{20} + \frac{5}{20} = \frac{11}{20}$

■: $\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{6}{4} = \frac{7}{4}$

✦: $\frac{23}{20} + \frac{11}{20} = \frac{34}{20} = \frac{17}{10}$

✹: $\frac{11}{20} + \frac{7}{4} = \frac{11}{20} + \frac{35}{20} = \frac{46}{20} = \frac{23}{10}$

●: $\frac{17}{10} + \frac{23}{10} = \frac{40}{10} = 4$



Ilustrações: ID/BR

13. Uma resolução possível para essa questão é transformar as frações em números decimais e fazer as comparações.

- $\frac{4}{3} = 4 : 3 = 1{,}333...$
- $\frac{10}{4} = 10 : 4 = 2{,}5$
- $-\frac{3}{2} = -(3 : 2) = -1{,}5$

Assim: $-4 < -3 < -\frac{3}{2} < \frac{4}{3} < \frac{10}{4} < 4$.

PÁGINA 18 – ATIVIDADES

14. a) Número natural: $\sqrt{25}$.

b) Números inteiros: $\sqrt{25}$ e -5.

c) Números racionais: $\sqrt{25}$; -5; $\frac{1}{5}$ e 0,5.

d) Números irracionais: $\sqrt{5}$ e $\frac{\pi}{5}$.

15. a) $\sqrt{13}$ é um número irracional positivo (VI).

b) 1 é um número inteiro positivo (III) e um número natural maior que 0,7 (V).

c) 0,123123 é um número racional positivo e não inteiro (I).

d) π é um número irracional positivo (VI).

e) $-52{,}031\overline{3}$ é uma dízima periódica negativa (II) e um número racional negativo e não inteiro (VII).

f) $-2{,}9111$ é um número racional negativo e não inteiro (VII)

g) $\sqrt{9}$ é um número inteiro positivo (III) e um número natural maior que 0,7 (V).

h) 508 934 é um número inteiro positivo (III) e um número natural maior que 0,7 (V).

16. Resolução possível:

$$\sqrt{2{,}25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = 1{,}5$$

O número 1,5 é um número racional.

17. a)
- Fazendo tentativas e aproximações

1º passo: Deve-se encontrar um número racional que, elevado ao quadrado, seja próximo de 12.

$$3^2 = 9$$
$$4^2 = 16$$

Portanto, $\sqrt{12}$ está entre 3 e 4.

2º passo: Deve-se encontrar um número racional com uma casa decimal que, elevado ao quadrado, seja próximo de 12.

$3{,}1^2 = 9{,}61$ $\quad 3{,}4^2 = 11{,}56$
$3{,}2^2 = 10{,}24$ $\quad 3{,}5^2 = 12{,}25$
$3{,}3^2 = 10{,}89$

Portanto, $\sqrt{12}$ está entre 3,4 e 3,5.

3º passo: Deve-se encontrar um número racional com duas casas decimais que, elevado ao quadrado, seja próximo de 12.

$$3{,}41^2 = 11{,}6281$$
$$3{,}42^2 = 11{,}6964$$
$$3{,}43^2 = 11{,}7649$$
$$3{,}44^2 = 11{,}8336$$
$$3{,}45^2 = 11{,}9025$$
$$3{,}46^2 = 11{,}9716$$
$$3{,}47^2 = 12{,}0409$$

Portanto, $\sqrt{12}$ está entre 3,46 e 3,47, ou seja, $\sqrt{12} \simeq 3{,}46$.

- Utilizando uma calculadora

1 2 √ 3.4641016

Portanto, $\sqrt{12} \simeq 3{,}46$.

b)
- Fazendo tentativas e aproximações

1º passo: Deve-se encontrar um número racional que, elevado ao quadrado, seja próximo de 38.

$$6^2 = 36$$
$$7^2 = 49$$

Portanto, $\sqrt{38}$ está entre 6 e 7.

2º passo: Deve-se encontrar um número racional com uma casa decimal que, elevado ao quadrado, seja próximo de 38.

$$6{,}1^2 = 37{,}21$$
$$6{,}2^2 = 38{,}44$$

Portanto, $\sqrt{38}$ está entre 6,1 e 6,2.

3º passo: Deve-se encontrar um número racional com duas casas decimais que, elevado ao quadrado, seja próximo de 38.

$$6{,}11^2 = 37{,}3321$$
$$6{,}12^2 = 37{,}4544$$
$$6{,}13^2 = 37{,}5769$$
$$6{,}14^2 = 37{,}6996$$
$$6{,}15^2 = 37{,}8225$$
$$6{,}16^2 = 37{,}9456$$
$$6{,}17^2 = 38{,}0689$$

Portanto, $\sqrt{38}$ está entre 6,16 e 6,17, ou seja, $\sqrt{38} \simeq 6{,}16$.

- Utilizando uma calculadora

3 8 √ 6.164414

Portanto, $\sqrt{38} \simeq 6{,}16$.

c)
- Fazendo tentativas e aproximações

1º passo: Deve-se encontrar um número racional que, elevado ao quadrado, seja próximo de 97.

$$9^2 = 81$$
$$10^2 = 100$$

Portanto, $\sqrt{97}$ está entre 9 e 10.

2º passo: Deve-se encontrar um número racional com uma casa decimal que, elevado ao quadrado, seja próximo de 97.

$9{,}1^2 = 82{,}81$ $\quad 9{,}6^2 = 92{,}16$
$9{,}2^2 = 84{,}64$ $\quad 9{,}7^2 = 94{,}09$
$9{,}3^2 = 86{,}49$ $\quad 9{,}8^2 = 96{,}04$
$9{,}4^2 = 88{,}36$ $\quad 9{,}9^2 = 98{,}01$
$9{,}5^2 = 90{,}25$

Portanto, $\sqrt{97}$ está entre 9,8 e 9,9.

3º passo: Deve-se encontrar um número racional com duas casas decimais que, elevado ao quadrado, seja próximo de 97.

$$9{,}81^2 = 96{,}2361$$
$$9{,}82^2 = 96{,}4324$$
$$9{,}83^2 = 96{,}6289$$
$$9{,}84^2 = 96{,}8256$$
$$9{,}85^2 = 97{,}0225$$

Portanto, $\sqrt{97}$ está entre 9,84 e 9,85, ou seja, $\sqrt{97} \simeq 9{,}85$.

- Utilizando uma calculadora

9 7 √ 9.8488578

Portanto, $\sqrt{97} \simeq 9{,}85$.

d)
- Fazendo tentativas e aproximações

1º passo: Deve-se encontrar um número racional que, elevado ao quadrado, seja próximo de 112.

$$10^2 = 100$$
$$11^2 = 121$$

Portanto, $\sqrt{112}$ está entre 10 e 11.

2º passo: Deve-se encontrar um número racional com uma casa decimal que, elevado ao quadrado, seja próximo de 112.

$$10{,}1^2 = 102{,}01$$
$$10{,}2^2 = 104{,}04$$
$$10{,}3^2 = 106{,}09$$
$$10{,}4^2 = 108{,}16$$
$$10{,}5^2 = 110{,}25$$
$$10{,}6^2 = 112{,}36$$

Portanto, $\sqrt{112}$ está entre 10,5 e 10,6.

3º passo: Deve-se encontrar um número racional com duas casas decimais que, elevado ao quadrado, seja próximo de 112.

$$10{,}51^2 = 110{,}4601$$
$$10{,}52^2 = 110{,}6704$$
$$10{,}53^2 = 110{,}8809$$
$$10{,}54^2 = 111{,}0916$$
$$10{,}55^2 = 111{,}3025$$
$$10{,}56^2 = 111{,}5136$$
$$10{,}57^2 = 111{,}7249$$
$$10{,}58^2 = 111{,}9364$$
$$10{,}59^2 = 112{,}1481$$

Portanto, $\sqrt{112}$ está entre 10,58 e 10,59, ou seja, $\sqrt{112} \simeq 10{,}58$.

- Utilizando uma calculadora

Portanto, $\sqrt{112} \simeq 10{,}58$.

18. a) $C = \pi \cdot d = 3{,}14 \cdot 5{,}4 = 16{,}956$

Logo, o comprimento da circunferência mede 16,956 m.

b) $C = \pi \cdot 2r = 3{,}14 \cdot 2 \cdot 18 = 113{,}04$

Logo, o comprimento da circunferência mede 113,04 cm.

c) $C = \pi \cdot 2r$

$62{,}8 = 3{,}14 \cdot 2 \cdot r$

$r = \dfrac{62{,}8}{6{,}28}$

$r = 10$

Logo, o raio da circunferência mede 10 cm.

19. a) $C = \pi \cdot d = 3{,}14 \cdot 66 = 207{,}24$

Logo, a medida de uma volta completa de uma das rodas é 207,24 cm.

b) Sendo D a medida da distância total percorrida e considerando que cada volta completa equivale a percorrer 207,24 cm, tem-se:

$$D = 10 \cdot C = 10 \cdot 207{,}24 = 2\,072{,}4$$

Logo, o ciclista percorre 2 072,4 cm quando as rodas da bicicleta dão 10 voltas completas.

PÁGINA 22 – ATIVIDADES

20. a) Números naturais: 1; 2; $\dfrac{27}{3}$.

Como $\dfrac{27}{3} = 9$, então ele é um número natural.

b) Números racionais: $3{,}25\overline{65}$; 2; $-\dfrac{365}{5\,874}$; $\dfrac{27}{3}$; 1; $1{,}3\overline{45}$.

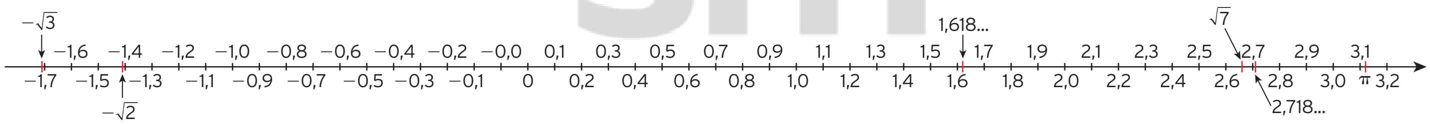
c) Números irracionais: $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Todos os números são números reais.

21. Com o auxílio de uma calculadora, deve-se transformar os números dados em números decimais com aproximação de duas casas decimais.

- $\sqrt{7} \simeq 2{,}65$
- $-\sqrt{3} \simeq -1{,}73$
- $-\sqrt{2} \simeq -1{,}41$
- $\pi \simeq 3{,}14$
- $1{,}618... \simeq 1{,}62$
- $2{,}718... \simeq 2{,}72$

Agora, desenha-se uma reta numérica e localizam-se nela os números dados.



PÁGINA 23 – DIVERSIFICANDO

1. a) Números que pertencem ao conjunto dos números naturais: 1 001 e $\sqrt{169}$.

b) Números que pertencem ao conjunto dos números inteiros: −15, 1 001 e $\sqrt{169}$.

c) Números que pertencem ao conjunto dos números racionais: −15, 1 001 e $\sqrt{169}$.

d) Números que pertencem ao conjunto dos números irracionais: $\sqrt{53}$, $(\sqrt{7})^{\frac{5}{4}}$ e $\sqrt{20}$.

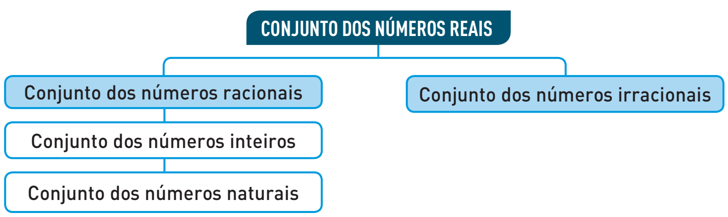
e) Todos os números pertencem ao conjunto dos números reais.

2. Fazendo tentativas e aproximações, deve-se encontrar um número racional que, elevado ao quadrado, seja próximo de 30.

$$5^2 = 25$$
$$6^2 = 36$$

Portanto, $\sqrt{30}$ está entre 5 e 6.

3.



4. **a)** Falso. Existem números reais que não são naturais, como os números negativos, por exemplo. Possíveis correções: "Todo número natural é real." ou "Existem números reais que não são naturais.".

b) Verdadeiro. O conjunto dos números reais é formado pela união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

c) Falso. O conjunto dos números reais é formado pela união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Uma possível correção para essa afirmação: "Todo número irracional é real.".

d) Verdadeiro. Todos os números irracionais são reais e não são racionais.

5. **a)** Considerando x um dos números inteiros, o outro número (consecutivo do primeiro) é $(x + 1)$. Logo:

$$x + x + 1 = 47$$
$$2x + 1 = 47$$
$$2x = 46$$
$$x = 23$$

Portanto, os números são 23 e 24 $(x + 1 = 23 + 1 = 24)$.

b) Considerando x um dos números, o outro número (oposto do primeiro) é $-x$. Logo:

$$x + (-x) = x - x = 0$$

Portanto, a soma de dois números opostos é igual a 0.

c) Considerando x o número inteiro, tem-se:

$$x - (-47) = -18$$
$$x + 47 = -18$$
$$x = -18 - 47$$
$$x = -65$$

Portanto, o número é -65.

6. **a)** $13 - (-\bigstar) + 4 = 23$

$$13 + \bigstar + 4 = 23$$
$$17 + \bigstar = 23$$
$$\bigstar = 23 - 17$$
$$\bigstar = 6$$

b) $10 - 4 + 16 - \bigstar = 15$

$$22 - \bigstar = 15$$
$$\bigstar = 22 - 15$$
$$\bigstar = 7$$

c) $32 - \bigstar + 121 - 25 = 64$

$$-\bigstar + 128 = 64$$
$$-\bigstar = 64 - 128$$
$$-\bigstar = -64$$
$$\bigstar = 64$$

7. Alternativa **c**.

Fazendo tentativas e aproximações, encontra-se um número racional que, elevado ao quadrado, seja próximo de 150.

$$12^2 = 144$$
$$13^2 = 169$$

Portanto, $\sqrt{150}$ está entre 12 e 13.

8. Sabendo que $C = \pi \cdot 2r$ e considerando $\pi = 3{,}14$, tem-se:

$$9\,420 = 3{,}14 \cdot 2 \cdot r$$
$$r = \frac{9\,420}{6{,}28}$$
$$r = 1\,500$$

Portanto, a medida do raio da região circular é 1 500 m.

9. Sabendo que $C = \pi \cdot 2r$ e considerando $\pi = 3{,}14$, tem-se:

$$C = 3{,}14 \cdot 2 \cdot 40 = 251{,}2$$

Como Fernanda vai dar 20 voltas completas em torno da praça, a distância percorrida por ela é 5 024 m $(20 \cdot 251{,}2 = 5\,024)$.

10. **a)** Como $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$, tem-se:

$$\sqrt{3} < 2$$

b) Como $(\sqrt{4})^2 = \sqrt{4^2} = \sqrt{16}$ e $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, tem-se:

$$2\sqrt{2} < (\sqrt{4})^2$$

c) Como $-\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, tem-se:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{10}$$

d) Como $-35 < -25$, tem-se:

$$-\sqrt{35} < -\sqrt{25}$$

e) Como $\sqrt{4 + 5} = \sqrt{9}$ e $9 > 8$, tem-se:

$$\sqrt{4 + 5} > \sqrt{8}$$

f) Como $\sqrt{81} = 9$, tem-se: $\sqrt{81} > \frac{\sqrt{5}}{3}$.

11. **a)** Para facilitar a comparação das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{7}{6}$, pode-se encontrar frações equivalentes a elas que tenham o mesmo denominador.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Como $\frac{4}{6} < \frac{7}{6}$, então $\frac{2}{3} < \frac{7}{6}$.

Portanto, a afirmação é verdadeira.

b) Para facilitar a comparação, pode-se escrever o número $0{,}\overline{4}$ na forma fracionária.

$$x = 0{,}444...$$
$$10x = 10 \cdot 0{,}444...$$
$$10x = 4{,}444...$$

Então:

$$10x - x = 4{,}444.... - 0{,}444...$$
$$9x = 4$$
$$x = \frac{4}{9}$$

Agora, comparam-se as frações $\frac{4}{9}$ e $\frac{3}{9}$.

Portanto, $\frac{4}{9} > \frac{3}{9}$, ou seja, $0{,}\overline{4} > \frac{3}{9}$.

Logo, a afirmação é falsa.

Correção possível: $0{,}\overline{4} > \frac{3}{9}$.

c) Para facilitar a comparação, pode-se escrever o número $0{,}\overline{07}$ na forma fracionária.

$$x = 0{,}070707...$$
$$100x = 7{,}0707...$$

Então:

$$100x - x = 7{,}0707.... - 0{,}0707...$$
$$99x = 7$$
$$x = \frac{7}{99}$$

Agora, comparam-se as frações $\frac{7}{99}$ e $\frac{7}{99}$. Portanto, $\frac{7}{99} = \frac{7}{99}$, ou seja, $\frac{7}{99} = 0{,}\overline{07}$.

Logo, a afirmação é verdadeira.

d) Para facilitar a comparação, pode-se escrever o número $9{,}\overline{2}$ na forma fracionária.

$$x = 9{,}222...$$
$$10x = 10 \cdot 9{,}222...$$
$$10x = 92{,}222...$$

Então:

$$10x - x = 92{,}222.... - 9{,}222...$$
$$9x = 83$$
$$x = \frac{83}{9}$$

Agora, comparam-se as frações $\frac{83}{9}$ e $\frac{92}{9}$. Portanto, $\frac{83}{9} < \frac{92}{9}$, ou seja, $9{,}\overline{2} < \frac{92}{9}$.

Logo, a afirmação é falsa.

Correção possível: $9{,}\overline{2} < \frac{92}{9}$.

e) Para facilitar a comparação das frações $\frac{1}{4}, \frac{7}{9}$ e $\frac{5}{3}$, encontram-se as frações equivalentes a elas que tenham o mesmo denominador.

- $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$
- $\frac{7}{9} = \frac{28}{36}$
- $\frac{5}{3} = \frac{60}{36}$

Como $\frac{9}{36} < \frac{28}{36} < \frac{60}{36}$, então $\frac{1}{4} < \frac{7}{9} < \frac{5}{3}$.

Portanto, a afirmação é verdadeira.

f) Para facilitar a comparação, pode-se escrever o número $1{,}\overline{18}$ na forma fracionária.

$$x = 1{,}181818...$$
$$100x = 100 \cdot 1{,}181818...$$
$$100x = 118{,}181818...$$

Então:

$$100x - x = 118{,}181818.... - 1{,}181818...$$
$$99x = 117$$
$$x = \frac{117}{99}$$
$$x = \frac{13}{11}$$

Como $\frac{13}{11} = 1{,}\overline{18}$, então a afirmação é falsa.

Correção possível: $\frac{13}{11} < 1{,}\overline{18} \cdot \frac{8}{7}$.

12. Utilizando uma calculadora, tem-se $\sqrt{3} \simeq 1{,}732$ e $1{,}732 > 1{,}73$. Logo, 1,73 é menor que $\sqrt{3}$.

13. Escrevendo os números na forma decimal, tem-se:

- $\sqrt{6} \simeq 2{,}4495$
- $3{,}\overline{62} = 3{,}6262...$
- 1,15
- $\pi = 3{,}1415...$
- $\frac{3}{2} = 1{,}5$
- 1,1

Colocando esses números em ordem decrescente, tem-se:

$$3{,}\overline{62} > \pi > \sqrt{6} > \frac{3}{2} > 1{,}15 > 1{,}1$$

CAPÍTULO 2 – POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

PÁGINA 27 – ATIVIDADES

1. **a)** Potência de um quociente.

b) Potência de uma potência.

c) Quociente de potências de mesma base.

d) Produto de potências de mesma base.

e) Potência de um produto.

2. **a)** $4^6 \cdot 4^{-3} = 4^{6+(-3)} = 4^{6-3} = 4^3$

b) $(0{,}2)^{-2} : (0{,}2)^2 = (0{,}2)^{-2-2} = (0{,}2)^{-4}$

c) $\left(\frac{1}{8}\right)^6 : \left(\frac{1}{8}\right)^7 = \left(\frac{1}{8}\right)^{6-7} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = \left(\frac{8}{1}\right)^1 = 8$

d) $(a^8)^2 = a^{8 \cdot 2} = a^{16}$

e) $2^7 \cdot 2^4 \cdot 2^2 = 2^{7+4+2} = 2^{13}$

f) $b^m \cdot b^{m+2} \cdot b^{m+4} = b^{m+m+2+m+4} = b^{3m+6}$

3. **a)** $\frac{1}{243} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^5} = 3^{-5}$

b) $9^5 = (3 \cdot 3)^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$

c) $\left(\frac{1}{81}\right)^3 = \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}\right)^3 = \left(\frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{3^2}\right)^3 = (3^{-2} \cdot 3^{-2})^3 = (3^{-4})^3 = 3^{-12}$

d) $27^{-4} = (3 \cdot 3 \cdot 3)^{-4} = (3^3)^{-4} = 3^{-12}$

4. **a)** $3^{2^4} = 3^{16} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot .... \cdot 3}_{16 \text{ vezes}} = 43\,046\,721$

b) $(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot .... \cdot 3}_{8 \text{ vezes}} = 6\,561$

5. **a)** $(3^{-2})^3 = 3^{-2 \cdot 3} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6} = \left(\frac{1}{3}\right)^6$

b) $(4^2)^{-2} = 4^{2 \cdot (-2)} = 4^{-4} = \frac{1}{4^4} = \left(\frac{1}{4}\right)^4$

c) $(5^1)^{-1} = 5^{1 \cdot (-1)} = 5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$

d) $(6^1)^{-4} = 6^{1 \cdot (-4)} = 6^{-4} = \frac{1}{6^4} = \left(\frac{1}{6}\right)^4$

e) $(14^6)^3 = 14^{6 \cdot 3} = 14^{18} = \left(\frac{1}{14}\right)^{-18}$

f) $(23^{-5})^2 = 23^{(-5) \cdot 2} = 23^{-10} = \frac{1}{23^{10}} = \left(\frac{1}{23}\right)^{10}$

6. Comparando as potências de base 10 da medida de comprimento de cada organismo, tem-se $-6 > -9$. Portanto:

$$5 \cdot 10^{-6} > 5 \cdot 10^{-9}$$

Logo, a bactéria tem a maior medida de comprimento.

PÁGINA 29 – ATIVIDADES

7. **a)** $\sqrt{16} = 4$

$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

Como $\sqrt{16} \neq \sqrt[5]{32}$, então a afirmação é falsa.

b) $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$

$\sqrt[7]{1} = \sqrt[7]{1^7} = 1$

Como $\sqrt[5]{-1} \neq \sqrt[7]{1}$, então a afirmação é falsa.

c) $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$

$\sqrt[9]{-1} = \sqrt[9]{(-1)^9} = -1$

Como $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[9]{-1}$, então a afirmação é verdadeira.

d) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

Como $\sqrt[3]{-27} \neq \sqrt[4]{81}$, então a afirmação é falsa.

8. **a)** $\sqrt[6]{-15}$ não é um número real, pois não existe número real que, elevado a 6, seja igual a -15.

b) $\sqrt[5]{8}$ é um número real.

c) $\sqrt[4]{444}$ é um número real.

Portanto, apenas a raiz indicada no item **a** não está definida no conjunto dos números reais.

9. Alternativa **b**.

Resposta possível: z tem valor positivo se x for par e $y > 0$.

10. **a)** $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

b) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

c) $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

PÁGINA 34 – ATIVIDADES

11. **a)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{3^3}} = \sqrt[5]{\sqrt[3:3]{3^{3:3}}} = \sqrt[5]{3}$

b) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{64 \cdot 4} = \sqrt{256} = \sqrt{16^2} = 16$

c) $\left(\sqrt[5]{\sqrt{1\,024}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3\,125}}{\sqrt[3]{25}}\right)^3 = \left(\sqrt[10]{2^{10}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3\,125}{25}}\right)^3 =$

$= \left(\sqrt[10:10]{2^{10:10}} \cdot \sqrt[3]{125}\right)^3 = \left(2 \cdot \sqrt[3]{5^3}\right)^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1\,000$

12. **a)** Como $3 < 6 < 7 < 19$, então $\sqrt{3} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{19}$.

b) Como $1 < 2 < 5 < 9 < 10$, então $\sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{10}$.

c) Inicialmente, simplifica-se $\sqrt[6]{0{,}81}$:

$$\sqrt[6]{0{,}81} = \sqrt[6]{\frac{81}{100}} = \sqrt[6]{\frac{9^2}{10^2}} = \sqrt[6]{\left(\frac{9}{10}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{10}} = \sqrt[3]{0{,}9}$$

Para fazer a comparação entre os radicais, transformam-se os radicandos em números decimais.

- $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{0{,}125}$
- $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{0{,}6}$
- $\sqrt[3]{\frac{5}{9}} \simeq \sqrt[3]{0{,}56}$
- $\sqrt[6]{0{,}81} = \sqrt[3]{0{,}9}$

Portanto, $\sqrt[3]{0{,}125} < \sqrt[3]{0{,}56} < \sqrt[3]{0{,}6} < \sqrt[3]{0{,}9}$, ou seja:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} < \sqrt[3]{\frac{5}{9}} < \sqrt[3]{\frac{3}{5}} < \sqrt[6]{0{,}81}$$

d) mmc(3, 2, 6) = 6

Então:

- $\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[6]{(2^2)^2} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6]{16}$
- $\sqrt[2]{3^3} = \sqrt[6]{(3^3)^3} = \sqrt[6]{3^9} = \sqrt[6]{19\,683}$

Como $\sqrt[6]{15} < \sqrt[6]{16} < \sqrt[6]{19\,683}$, então $\sqrt[6]{15} < \sqrt[3]{2^2} < \sqrt[2]{3^3}$.

e) mmc(3, 2) = 6

Então:

- $\sqrt{9} = \sqrt[6]{9^3}$
- $\sqrt{40} = \sqrt[6]{40^3}$
- $\sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{9^2}$

Como $\sqrt[6]{9^2} < \sqrt[6]{9^3} < \sqrt[6]{40^3}$, então $\sqrt[3]{9} < \sqrt{9} < \sqrt{40}$.

13. a) $\sqrt[8]{7^4} = \sqrt[8:4]{7^{4:4}} = \sqrt{7}$

b) $\sqrt[4]{\frac{625}{10\,000}} = \sqrt[4]{\frac{5^4}{10^4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{5}{10}\right)^4} = \sqrt[4:4]{\left(\frac{5}{10}\right)^{4:4}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

c) $\sqrt[15]{(5{,}2)^5} = \sqrt[15:5]{(5{,}2)^{5:5}} = \sqrt[3]{5{,}2}$

d) $\sqrt[24]{8^4} = \sqrt[24]{(2^3)^4} = \sqrt[24]{2^{3\cdot 4}} = \sqrt[24]{2^{12}} = \sqrt[24:12]{2^{12:12}} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[12]{27^5} = \sqrt[12]{(3^3)^5} = \sqrt[12]{3^{3\cdot 5}} = \sqrt[12]{3^{15}} = \sqrt[12:3]{3^{15:3}} = \sqrt[4]{3^5}$

f) $\sqrt[6]{\left(\frac{16}{25}\right)^2} = \sqrt[6:2]{\left(\frac{16}{25}\right)^{2:2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{25}} = \sqrt[3]{\frac{4^2}{5^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{5}\right)^2}$

14. a) $\sqrt{300} = \sqrt{3\cdot 100} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{100} = 10\sqrt{3}$

$\sqrt{500} = \sqrt{5\cdot 100} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{100} = 10\sqrt{5}$

$\sqrt{700} = \sqrt{7\cdot 100} = \sqrt{7}\cdot\sqrt{100} = 10\sqrt{7}$

Portanto, os radicais não são semelhantes, pois eles têm os radicandos diferentes.

b) $\sqrt[3]{1\,000} = \sqrt[3]{10^3} = 10$

$\sqrt[3]{2\,000} = \sqrt[3]{2\cdot 1\,000} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{1\,000} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{10^3} = 10\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{5\,000} = \sqrt[3]{5\cdot 1\,000} = \sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{1\,000} = \sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{10^3} = 10\sqrt[3]{5}$

$\sqrt[3]{11\,000} = \sqrt[3]{11\cdot 1\,000} = \sqrt[3]{11}\cdot\sqrt[3]{1\,000} = \sqrt[3]{11}\cdot\sqrt[3]{10^3} = 10\sqrt[3]{11}$

Portanto, os radicais não são semelhantes, pois eles têm os radicandos diferentes.

c) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

$\sqrt{300} = \sqrt{3\cdot 100} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{10^2} = 10\sqrt{3}$

$\sqrt{324} = \sqrt{2^2\cdot 3^4} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3^4} = 2\cdot 3^2 = 2\cdot 9 = 18$

Portanto, os radicais não são semelhantes, pois eles têm os radicandos diferentes.

d) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = \sqrt{3^2\cdot 3} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{108} = \sqrt{2^2\cdot 3^3} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3^3} = 2\cdot\sqrt{3^2\cdot 3} = 2\cdot\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{3} =$

$= 2\cdot 3\cdot\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$\sqrt{243} = \sqrt{3^5} = \sqrt{3^4\cdot 3} = \sqrt{3^4}\cdot\sqrt{3} = 3^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

Portanto, os radicais são semelhantes.

PÁGINA 36 – ATIVIDADES

15. a) $\sqrt[3]{18} + 5\sqrt[3]{18} - 13\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{18}\cdot(1 + 5 - 13) = -7\sqrt[3]{18}$

b) $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{32} = \sqrt{2\cdot 3^2} - \sqrt{2\cdot 5^2} + \sqrt{2^5} =$

$= 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{2^4\cdot 2} = -2\sqrt{2} + \sqrt{2^4}\cdot\sqrt{2} = -2\sqrt{2} + 2^2\sqrt{2} =$

$= -2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

c) $\sqrt{54} + \sqrt{24} - \sqrt{96} = \sqrt{2\cdot 3^3} + \sqrt{2^3\cdot 3} - \sqrt{2^5\cdot 3} =$

$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{3^3} + \sqrt{2^3}\cdot\sqrt{3} - \sqrt{2^5}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}(3 + 2 - 2^2) =$

$= \sqrt{6}(3 + 2 - 4) = \sqrt{6}$

d) $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{180} = \sqrt{4\cdot 5} + \sqrt{9\cdot 5} - \sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5} =$

$= \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} + \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} - \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5} =$

$= 2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{5} - 2\cdot 3\cdot\sqrt{5} = \sqrt{5}(2 + 3 - 6) = -\sqrt{5}$

e) $\sqrt{300} - \sqrt{27} - \sqrt{45} = \sqrt{3\cdot 100} - \sqrt{3^3} - \sqrt{9\cdot 5} =$

$= \sqrt{3}\cdot\sqrt{100} - \sqrt{3^2\cdot 3} - \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 10\sqrt{3} - \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{3} - 3\sqrt{5} =$

$= 10\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3\sqrt{5} = \sqrt{3}(10 - 3) - 3\sqrt{5} = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$

16. a) 1 1 √ 3.3166247

Portanto, $\sqrt{11} \simeq 3{,}32$.

1 3 √ 3.6055512

Portanto, $\sqrt{13} \simeq 3{,}61$.

Logo:

$$\sqrt{11} + \sqrt{13} = 3{,}32 + 3{,}61 = 6{,}93$$

b) 1 2 √ 3.4641016

Portanto, $\sqrt{12} \simeq 3{,}46$.

6 √ 2.4494897

Portanto, $\sqrt{6} \simeq 2{,}45$.

Logo:

$$\sqrt{12} + \sqrt{6} = 3{,}46 + 2{,}45 = 5{,}91$$

c) 5 √ 2.2360679

Portanto, $\sqrt{5} \simeq 2{,}24$.

7 √ 2.6457513

Portanto, $\sqrt{7} \simeq 2{,}65$.

Logo:

$$\sqrt{5} + \sqrt{7} = 2{,}24 + 2{,}65 = 4{,}89$$

d) 1 5 √ 3.8729833

Portanto, $\sqrt{15} \simeq 3{,}87$.

1 9 √ 4.3588989

Portanto, $\sqrt{19} \simeq 4{,}36$.

Logo:

$$\sqrt{15} - \sqrt{19} = 3{,}87 - 4{,}36 = -0{,}4$$

17. a) $3\sqrt{7} + \blacksquare - 4\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$

$\blacksquare = 5\sqrt{7} + 4\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

$\blacksquare = (5 + 4 - 3)\sqrt{7}$

$\blacksquare = 6\sqrt{7}$

b) $\blacksquare - 4\sqrt{2} = \sqrt{18}$

$\blacksquare = \sqrt{18} + 4\sqrt{2}$

$\blacksquare = \sqrt{2 \cdot 9} + 4\sqrt{2}$

$\blacksquare = \sqrt{2} \cdot \sqrt{9} + 4\sqrt{2}$

$\blacksquare = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$

$\blacksquare = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{135} = \blacksquare$

$\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} = \blacksquare$

$\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{5} = \blacksquare$

$\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} = \blacksquare$

$\blacksquare = (1 + 3)\sqrt[3]{5}$

$\blacksquare = 4\sqrt[3]{5}$

18. a) Para calcular a medida do perímetro do paralelogramo, adicionam-se as medidas dos lados, lembrando que os lados opostos têm medidas iguais. Logo, a medida do perímetro é dada por:

$$3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (3 + 2 + 3 + 2)\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

Portanto, a medida do perímetro do paralelogramo é $10\sqrt{3}$ cm.

b) Como o hexágono regular tem seis lados de mesma medida, é possível calcular a medida do perímetro desse polígono do seguinte modo:

$\sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} = (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$

Logo, a medida do perímetro do hexágono regular é $6\sqrt{7}$ cm.

PÁGINA 38 – ATIVIDADES

19. a) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{99}} \cdot \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{6}{99}} \cdot \sqrt{\frac{22}{12}} = \sqrt{\frac{2}{33}} \cdot \sqrt{\frac{11}{6}} = \sqrt{\frac{2}{33} \cdot \frac{11}{6}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{\frac{24}{27}} = \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{\frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot \frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

c) $2 \cdot \sqrt{\frac{12}{5}} \cdot \frac{\sqrt{30}}{6 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{12}{5}} \cdot \frac{\sqrt{30}}{3 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{12}{5}} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{\frac{30}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{12}{5}} \cdot \sqrt{15} =$

$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{12}{5} \cdot 15} = \frac{1}{3}\sqrt{12 \cdot 3} = \frac{1}{3}\sqrt{36} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$

d) $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[6]{7}} = \frac{\sqrt[3 \cdot 2]{7^{1 \cdot 2}}}{\sqrt[6]{7}} = \frac{\sqrt[6]{7^2}}{\sqrt[6]{7}} = \sqrt[6]{\frac{7^2}{7}} = \sqrt[6]{7}$

e) $6 \cdot \frac{1}{\sqrt{54}} \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{27}{18}} = 18 \cdot \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{54}} \cdot \sqrt{\frac{27}{18}} = 18\sqrt{\frac{1}{54}} \cdot \sqrt{\frac{27}{18}} =$

$= 18 \cdot \sqrt{\frac{1}{54} \cdot \frac{27}{18}} = 18 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{18}} = 18\sqrt{\frac{1}{36}} = 18 \cdot \frac{1}{6} = 3$

f) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^{1 \cdot 4}} \cdot \sqrt[4 \cdot 3]{3^{2 \cdot 3}} = \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{3^6} =$

$= \sqrt[12:2]{2^{4:2}} \cdot \sqrt[12:2]{3^{6:2}} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{108}$

g) mmc (2, 3, 5) = 30

- $\sqrt[5]{4} = \sqrt[30]{4^6}$
- $\sqrt[3]{3} = \sqrt[30]{3^{10}}$
- $\sqrt{2} = \sqrt[30]{2^{15}}$

$\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[30]{4^6} \cdot \sqrt[30]{3^{10}} \cdot \sqrt[30]{2^{15}} = \sqrt[30]{4^6 \cdot 3^{10} \cdot 2^{15}} =$

$= \sqrt[30]{(2^2)^6 \cdot 3^{10} \cdot 2^{15}} = \sqrt[30]{2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 2^{15}} = \sqrt[30]{2^{27} \cdot 3^{10}}$

h) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{8} : \sqrt{4} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2^3} : \sqrt{2^2} = \sqrt{3} \cdot 2 : 2 = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

20. Calculando a medida de área de cada região retangular, tem-se:

- região retangular verde
  $\sqrt{98} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{98 \cdot 2} = \sqrt{(2 \cdot 49) \cdot 2} = \sqrt{(2 \cdot 7^2) \cdot 2} = \sqrt{2^2 \cdot 7^2} =$
  $= 2 \cdot 7 = 14$
- região retangular vermelha
  $\sqrt{24} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{24 \cdot 6} = \sqrt{(8 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)} = \sqrt{(2^3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)} =$
  $= \sqrt{2^4 \cdot 3^2} = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$

Como $14 > 12$, a região retangular verde tem medida de área maior que a região retangular vermelha.

PÁGINA 42 – ATIVIDADES

21. Inicialmente, racionaliza-se o denominador de $\frac{7}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Para determinar a medida da área da figura representada no enunciado, pode-se calcular as medidas das áreas dos retângulos que a compõem, escrevendo a seguinte expressão:

$\sqrt{18} \cdot \sqrt{8} + \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{8} + \sqrt{2}) + \sqrt{8} \cdot \sqrt{32} =$

$= \sqrt{2 \cdot 9} \cdot \sqrt{2^3} + \frac{7\sqrt{16}}{2} + \frac{7\sqrt{4}}{2} + \sqrt{2^3} \cdot \sqrt{2^5} =$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{9} \cdot 2\sqrt{2} + \frac{7 \cdot 4}{2} + \frac{7 \cdot 2}{2} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^4 \cdot 2} =$

$= 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + 7 \cdot 2 + 7 + 2\sqrt{2} \cdot 2^2\sqrt{2} =$

$= 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 14 + 7 + 2^3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} =$

$= 12 + 14 + 7 + 16 = 49$

Logo, a medida da área da figura é 49 cm².

Para determinar a medida do perímetro da figura, adicionam-se as medidas dos lados.

$\sqrt{8} + \sqrt{18} + \frac{7\sqrt{2}}{2} + \sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{8} + (\sqrt{32} - \sqrt{8} - \sqrt{2}) +$

$+ \frac{7\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{18} = 2\sqrt{8} + 2\sqrt{18} + 7\sqrt{2} + 2\sqrt{32} =$

$= 2 \cdot 2\sqrt{2} + 2 \cdot 3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} + 2 \cdot 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 7\sqrt{2} +$

$+ 8\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$

Logo, medida do perímetro da figura é $25\sqrt{2}$ cm.

22. a) $\left(\sqrt[6]{7}\right)^4 = \sqrt[6]{7^4} = \sqrt[6]{2401}$

b) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

c) $\left(\sqrt{6}\right)^3 = \sqrt{6^3} = 6\sqrt{6}$

d) $\left(\sqrt[4]{12}\right)^3 = \sqrt[4]{12^3} = \sqrt[4]{(2^2 \cdot 3)^3} = \sqrt[4]{(2^2)^3 \cdot 3^3} = \sqrt[4]{2^6 \cdot 3^3} =$

$= \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2 \cdot 3^3} = 2\sqrt[4]{108}$

e) $\left(\sqrt[5]{16}\right)^3 = \sqrt[5]{16^3} = \sqrt[5]{(2^4)^3} = \sqrt[5]{2^{4 \cdot 3}} = \sqrt[5]{2^{12}} = \sqrt[5]{2^{10} \cdot 2^2} =$

$= 2^2\sqrt[5]{2^2} = 4\sqrt[5]{4}$

f) $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^4 = \sqrt[3]{(5^2)^4} = \sqrt[3]{5^8} = \sqrt[3]{5^6 \cdot 5^2} = 5^2\sqrt[3]{25} = 25\sqrt[3]{25}$

g) $\left(\sqrt[5]{3^4}\right)^2 = \sqrt[5]{(3^4)^2} = \sqrt[5]{3^{4 \cdot 2}} = \sqrt[5]{3^8} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 3^3} = 3\sqrt[5]{3^3} = 3\sqrt[5]{27}$

h) $\left(\sqrt[4]{6^3}\right)^3 = \sqrt[4]{(6^3)^3} = \sqrt[4]{6^{3 \cdot 3}} = \sqrt[4]{6^9} = \sqrt[4]{6^8 \cdot 6} = 6^2\sqrt[4]{6} = 36\sqrt[4]{6}$

23. a) $\frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$

b) $\frac{9}{\sqrt{6}} = \frac{9}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{9\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

c) $\dfrac{13}{21\sqrt{15}} = \dfrac{13}{21\sqrt{15}} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \dfrac{13\sqrt{15}}{21 \cdot 15} = \dfrac{13\sqrt{15}}{315}$

d) $\dfrac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt{5 \cdot 2}}{3 \cdot 2} = \dfrac{5\sqrt{10}}{6}$

e) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{8}{\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{8\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2 \cdot 2^2}} = \dfrac{8\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{8\sqrt[3]{4}}{2} = 4\sqrt[3]{4}$

f) $\dfrac{14}{\sqrt[4]{7}} = \dfrac{14}{\sqrt[4]{7}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7^3}} = \dfrac{14\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7 \cdot 7^3}} = \dfrac{14\sqrt[4]{7^3}}{7} = 2\sqrt[4]{343}$

g) $\dfrac{10}{\sqrt[5]{81}} = \dfrac{10}{\sqrt[5]{3^4}} = \dfrac{10}{\sqrt[5]{3^4}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3}} = \dfrac{10\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^4 \cdot 3}} = \dfrac{10\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \dfrac{10\sqrt[5]{3}}{3}$

h) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{36}} = \dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{6^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{6^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{6^2}}{\sqrt[4]{6^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{3 \cdot 36}}{\sqrt[4]{6^2 \cdot 6^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{108}}{6}$

24. a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{10}{\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

c) $\dfrac{1}{10\sqrt{5}} = \dfrac{1}{10\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{10 \cdot 5} = \dfrac{\sqrt{5}}{50}$

Portanto, a associação correta é: a-II; b-I; c-III.

25. a) $\dfrac{16}{5+\sqrt{5}} = \dfrac{16}{5+\sqrt{5}} \cdot \dfrac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \dfrac{16 \cdot (5-\sqrt{5})}{25-5} = \dfrac{16 \cdot (5-\sqrt{5})}{20} =$

$= \dfrac{4(5-\sqrt{5})}{5}$

b) $\dfrac{7}{3-\sqrt{2}} = \dfrac{7}{3-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \dfrac{7 \cdot (3+\sqrt{2})}{9-2} = \dfrac{7 \cdot (3+\sqrt{2})}{7} =$

$= 3 + \sqrt{2}$

c) $\dfrac{9}{\sqrt{7}-4} = \dfrac{9}{\sqrt{7}-4} \cdot \dfrac{\sqrt{7}+4}{\sqrt{7}+4} = \dfrac{9 \cdot (\sqrt{7}+4)}{7-16} = \dfrac{9 \cdot (\sqrt{7}+4)}{-9} =$

$= -\sqrt{7} - 4$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{8}+1} = \dfrac{\sqrt{16}+\sqrt{2}}{(\sqrt{8})^2 - 1^2} = \dfrac{4+\sqrt{2}}{8-1} = \dfrac{4+\sqrt{2}}{7}$

e) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{27}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{27}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{27}}{\sqrt{3}-\sqrt{27}} = \dfrac{3\sqrt{3^2} - 3\sqrt{3 \cdot 3^3}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{27})^2} =$

$= \dfrac{3 \cdot 3 - 3\sqrt{3^4}}{3-27} = \dfrac{9 - 3 \cdot 3^2}{-24} = \dfrac{9-27}{-24} = \dfrac{-18}{-24} = \dfrac{3}{4}$

f) $\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2 \cdot 5} + 5\sqrt{2 \cdot 2}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} =$

$= \dfrac{5\sqrt{10} + 5\sqrt{4}}{5-2} = \dfrac{5\sqrt{10} + 5 \cdot 2}{3} = \dfrac{10 + 5\sqrt{10}}{3}$

g) $\dfrac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{7 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} =$

$= \dfrac{7 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 7\sqrt{3} + 7\sqrt{2}$

h) $\dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} = \dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\sqrt{6}-\sqrt{7}} = \dfrac{8\sqrt{18} - 8\sqrt{21}}{6-7} =$

$= \dfrac{8\sqrt{2 \cdot 9} - 8\sqrt{21}}{-1} = -(8 \cdot 3\sqrt{2} - 8\sqrt{21}) = -24\sqrt{2} + 8\sqrt{21}$

26. a) Inicialmente, devem-se descobrir as medidas de distâncias percorridas em cada caminho.

- Caminho I

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1\right) : \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} - 1}{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}-1} =$$

$$= \frac{2 \cdot (2-\sqrt{2})}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}-1)} = \frac{2 \cdot (2-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}} = 2$$

A medida do comprimento do caminho I é 2 km.

- Caminho II

$$\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} + \frac{20\sqrt{3}+48}{5} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} \cdot \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2} +$$

$$+ \frac{20\sqrt{3}+48}{5} = \frac{3+4\sqrt{3}+4}{3-4} + \frac{20\sqrt{3}+48}{5} =$$

$$= \frac{7+4\sqrt{3}}{-1} + \frac{20\sqrt{3}+48}{5} = \frac{-35-20\sqrt{3}+20\sqrt{3}+48}{5} =$$

$$= \frac{48-35}{5} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

A medida do comprimento do caminho II é 2,6 km.

- Caminho III

$$\sqrt[5]{(243)^2} - \sqrt{9} = \sqrt[5]{(3^5)^2} - \sqrt{3^2} = \sqrt[5]{3^{10}} - \sqrt{3^2} = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$$

A medida do comprimento do caminho III é 6 km.

Portanto, o atleta deveria escolher o caminho I, pois ele tem a menor medida de comprimento.

b) Utilizando a proporção $\dfrac{10 \text{ km}}{2 \text{ km}} = \dfrac{60 \text{ min}}{x \text{ min}}$, tem-se:

$$10x = 2 \cdot 60$$
$$10x = 120$$
$$x = \frac{120}{10}$$
$$x = 12$$

Portanto, escolhendo o caminho mais curto e correndo o tempo todo com velocidade de 10 km/h, o atleta deve chegar ao ponto B em 12 minutos.

27. a) Inicialmente, racionaliza-se o denominador de duas dimensões da piscina.

- $\dfrac{12}{\sqrt[3]{6^2}} = \dfrac{12}{\sqrt[3]{6^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{6}} = \dfrac{12\sqrt[3]{6}}{6} = 2\sqrt[3]{6}$
- $\dfrac{9}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{9}{\sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{9}{\sqrt[3]{3^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{9\sqrt[3]{3}}{3} = 3\sqrt[3]{3}$

Para calcular a quantidade de água que cabe na piscina, deve-se encontrar a medida V do volume da piscina, cujo formato é de um paralelepípedo.

$$V = 2\sqrt[3]{6} \cdot 3\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{1{,}5} = 6\sqrt[3]{6 \cdot 3 \cdot 1{,}5} = 6\sqrt[3]{27} = 6 \cdot 3 = 18$$

Portanto, cabem nessa piscina 18 m^3 de água.

Como 1 m^3 equivale a 1 000 L, então 18 m^3 equivalem a 18 000 L.

Se em um balde cabem 5 L de água, então serão necessários 3 600 baldes $\left(\dfrac{18\,000}{5} = 3\,600\right)$ para encher a piscina.

b) Como são necessários 3 600 baldes e 5 minutos para encher um balde e despejar seu conteúdo na piscina, então a piscina vai estar cheia em 300 horas $\left(3\,600 \cdot 5 = 18\,000 \text{ e } \dfrac{18\,000}{60} = 300\right)$.

c) Resposta pessoal.

PÁGINA 43 – DIVERSIFICANDO

1. O terreno tem formato de um quadrado cuja área mede 361 m^2, então:

$$A = \ell^2$$
$$361 = \ell^2$$
$$\ell = \sqrt{361}$$
$$\ell = 19$$

Como o terreno tem 4 lados com a mesma medida de comprimento, então a medida do perímetro desse terreno é 76 m $(4 \cdot 19 = 76)$. Como a cerca terá três voltas, então serão necessários 228 m $(3 \cdot 76 = 228)$ de arame.

2. $A_{\text{região quadrada}} = \ell^2 = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2 = a^{\frac{3}{2} \cdot 2} = a^3$

Então:

$$A_{\text{região retangular}} = A_{\text{região quadrada}}$$
$$b \cdot h = a^3$$
$$\sqrt{a} \cdot h = a^3$$
$$h = \frac{a^3}{\sqrt{a}}$$
$$h = \frac{a^3}{a^{\frac{1}{2}}}$$
$$h = a^{3 - \frac{1}{2}}$$
$$h = a^{\frac{5}{2}}$$
$$h = a^2\sqrt{a}$$

Portanto, a medida da altura da região retangular é $a^2\sqrt{a}$.

3. Alternativa **c**.

$\sqrt{20^{20}} = \sqrt{(4 \cdot 5)^{20}} = \sqrt{(2^2 \cdot 5)^{20}} = \sqrt{2^{40} \cdot 5^{20}} = 2^{20} \cdot 5^{10} = 5^{10} \cdot 2^{20}$

4. **a)** $12\sqrt{20} - 8\sqrt{20} + 3\sqrt{20} = (12 - 8 + 3) \cdot \sqrt{20} = 7\sqrt{20} =$
$= 7\sqrt{2^2 \cdot 5} = 7\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = 7 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 14\sqrt{5}$

b) $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{90} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{250} + \frac{2}{5} \cdot \sqrt{50} =$

$= \frac{3}{2} \cdot \sqrt{9 \cdot 10} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{25 \cdot 10} + \frac{2}{5} \cdot \sqrt{2 \cdot 25} =$

$= \frac{3}{2} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{10} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{10} + \frac{2}{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{25} =$

$= \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{10} - \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot \sqrt{10} + \frac{2}{5} \cdot \sqrt{2} \cdot 5 =$

$= \frac{9\sqrt{10}}{2} - \frac{5\sqrt{10}}{4} + 2\sqrt{2} = \frac{18\sqrt{10}}{4} - \frac{5\sqrt{10}}{4} + 2\sqrt{2} = \frac{13\sqrt{10}}{4} + 2\sqrt{2}$

c) mmc$(6, 4) = 12$

$\sqrt[6]{10^5} : \sqrt[4]{10^3} = \frac{\sqrt[6 \cdot 2]{10^{5 \cdot 2}}}{\sqrt[4 \cdot 3]{10^{3 \cdot 3}}} = \frac{\sqrt[12]{10^{10}}}{\sqrt[12]{10^9}} = \sqrt[12]{\frac{10^{10}}{10^9}} = \sqrt[12]{10^{10-9}} = \sqrt[12]{10}$

d) $\left(\sqrt[5]{2} - 2\right) \cdot \left(\sqrt{2} - 5\right) = \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{2} - 5\sqrt[5]{2} - 2\sqrt{2} + 10 =$
$= \sqrt[10]{2^2} \cdot \sqrt[10]{2^5} - 5\sqrt[5]{2} - 2\sqrt{2} + 10 = \sqrt[10]{2^2 \cdot 2^5} - 5\sqrt[5]{2} - 2\sqrt{2} + 10 =$
$= \sqrt[10]{2^7} - 5\sqrt[5]{2} - 2\sqrt{2} + 10$

e) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{4 \cdot 27} = \sqrt[6]{108}$

5. **a)** $\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10} = \sqrt[5]{7^{10}} = 7^{\frac{10}{5}} = 7^2 = 49$

b) $\sqrt{\frac{32}{2}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{36}} = \sqrt{16} + \frac{9}{6} = 4 + \frac{3}{2} = \frac{8 + 3}{2} = \frac{11}{2}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{32}}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{16}} \cdot \sqrt[24]{2^6} = \sqrt[2 \cdot 2 \cdot 3]{32} \cdot \sqrt[3 \cdot 4]{16} \cdot \sqrt[24:2]{2^{6:2}} =$
$= \sqrt[12]{2^5} \cdot \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{2^5 \cdot 2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^{5+4+3}} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$

d) $\sqrt{14 - \sqrt{180}} \cdot \sqrt{14 + \sqrt{180}} = \sqrt{(14 - \sqrt{180}) \cdot (14 + \sqrt{180})} =$
$= \sqrt{\left(14^2 - \left(\sqrt{180}\right)^2\right)} = \sqrt{(196 - 180)} = \sqrt{16} = 4$

6. **a)** A medida da área da região quadrada é calculada pelo quadrado da medida do lado $(A = \ell^2)$. Como o lado da região quadrada mede $\frac{3}{5}$, a potência que representa a medida da área dessa região quadrada é $\left(\frac{3}{5}\right)^2$.

b) A medida do comprimento do lado da região quadrada pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{3^2}{5^2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$$

7. $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{12}}{\sqrt{3} + \sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{12}}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{12}\right)^2} =$
$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{4 \cdot 3}}{3 - 12} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}{-9} = -\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{9} = -\frac{3\sqrt{3}}{9} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{5 - 3} = \frac{1}{2}$

9. **a)** Verdadeira.

b) $6^{0,25} = 6^{\frac{25}{100}} = 6^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$
$\sqrt[4]{6} \neq \sqrt{6}$
Portanto, a igualdade $6^{0,25} = \sqrt{6}$ é falsa.

c) $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[2 \cdot 2]{2} = \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$
$2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}$
Portanto, a igualdade é verdadeira.

d) $\frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 \cdot 5}} = \frac{2}{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{-\frac{1}{2}} =$
$= 5^{-0,5}$
$5^{-0,5} = 5^{-0,5}$
Portanto, a igualdade é verdadeira.

10. $\sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}}}}} =$
$= \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + 3}}}}}} =$
$= \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}}}}} =$
$= \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + 4}}}}} =$
$= \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}}} =$
$= \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + 3}}}} =$
$= \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{16}}}} =$
$= \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + 4}}} =$
$= \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{25}}} =$
$= \sqrt{43 + \sqrt{31 + 5}} =$
$= \sqrt{43 + \sqrt{36}} =$
$= \sqrt{43 + 6} =$
$= \sqrt{49} = 7$

11. Respostas pessoais.

PÁGINA 44 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Resposta pessoal.

2. Respostas pessoais.

3. a) Respostas pessoais.

b) Resposta pessoal. Para descobrir qual é o valor de cada prestação, pode-se montar o quadro a seguir.

Mês	Dívida inicial (em real)	Pagamento (em real)	Dívida final (em real)
0	1 000	0	1 000
1	1 050, pois: $1\,000 + 1\,000 \cdot 0{,}05 = 1\,000 + 50 = 1\,050$	x	$1\,050 - x$
2	$1\,102{,}50 - 1{,}05 \cdot x$, pois: $(1\,050 - x) \cdot 1{,}05 = 1\,102{,}50 - 1{,}05 \cdot x$	x	0

Assim, tem-se:

$$1\,102{,}50 - 1{,}05 \cdot x - x = 0$$
$$-2{,}05 \cdot x = -1\,102{,}50$$
$$x = \frac{-1\,102{,}50}{-2{,}05}$$
$$x \simeq 537{,}80$$

Portanto, o valor de cada prestação é R$ 537,80.

PÁGINA 46 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. I. $-\frac{70}{33} = -2{,}\overline{12}$

Portanto, a representação decimal do número $-\frac{70}{33}$ é infinita e periódica.

II. $\pi = 3{,}141592...$

Portanto, a representação decimal do número π é infinita e não periódica.

III. $\frac{8}{25} = 0{,}32$

Portanto, a representação decimal do número $\frac{8}{25}$ é finita.

IV. A representação decimal do número $7{,}2\overline{85}$ é infinita e periódica.

V. $\sqrt{3} = 1{,}732050...$

Se a raiz quadrada de um número real não for exata e não for infinita e periódica, então a representação decimal dessa raiz é infinita e não periódica. Portanto, a representação decimal do número $\sqrt{3}$ é infinita e não periódica.

VI. $-\sqrt{16} = -4$

Portanto, a representação decimal do número $-\sqrt{16}$ é finita.

a) I, III, IV e VI.

b) II e V.

c) Todos.

2. Inicialmente, transforma-se os números $x = 0{,}\overline{30}$ e $y = 1{,}\overline{2}$ em fração:

- $x = 0{,}\overline{30} = 0{,}303030...$

  $100x = 30{,}303030...$

  Então:

$$\begin{array}{rl} & 100x = 30{,}303030... \\ - & \quad\;\; x = \;\;0{,}303030... \\ \hline & 99x = 30 \end{array}$$

$$x = \frac{30}{99}$$

- $y = 1{,}\overline{2} = 1{,}222...$

  $10y = 12{,}222...$

  Então:

$$\begin{array}{rl} & 10y = 12{,}222... \\ - & \quad y = \;\;1{,}222... \\ \hline & 9y = 11 \end{array}$$

$$y = \frac{11}{9}$$

a) $x + y = \frac{30}{99} + \frac{11}{9} = \frac{30 + 121}{99} = \frac{151}{99}$

b) $y - x = \frac{11}{9} - \frac{30}{99} = \frac{121 - 30}{99} = \frac{91}{99}$

c) $\frac{x}{y} = \frac{\frac{30}{99}}{\frac{11}{9}} = \frac{30}{99} \cdot \frac{9}{11} = \frac{30}{121}$

3. a) Falsa. Correção possível: $\sqrt{17}$ é um número irracional.

b) Verdadeira.

$$\sqrt{121} = \sqrt{11 \cdot 11} = 11$$

c) Falsa. Correção possível: Todos os números irracionais são reais.

d) Falsa. Correção possível: π é menor que $\sqrt{10}$.

4. a) $(\sqrt{2})^0 = 1$

b) $0^1 = 0$

c) $(-0{,}3)^2 = (-0{,}3) \cdot (-0{,}3) = 0{,}09$

d) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^1 = \frac{\pi}{2}$

e) $(-5)^{-3} = \left(-\frac{1}{5}\right)^3 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{125}$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{625}$

g) $1\,024^{0{,}5} = 1\,024^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1\,024} = \sqrt{2^{10}} = 2^5 = 32$

h) $\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4^4}} = \frac{1}{4}$

5. a) $\sqrt{12} = 12^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt{2{,}7} = 2{,}7^{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt[3]{0{,}5} = 0{,}5^{\frac{1}{3}}$

d) $\sqrt[5]{7^3} = 7^{\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$

f) $\sqrt[3]{8^{-1}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

g) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} = \sqrt[4]{(2^{-1})^{-2}} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$

h) $\sqrt[3]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-4}} = \sqrt[3]{\left(\frac{9}{4}\right)^4} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$

6. a) $8^2 \cdot 8^3 = 8^{2+3} = 8^5$

b) $12^3 \cdot 12^5 = 12^{3+5} = 12^8$

c) $14^{-6} \cdot 14^4 = 14^{-6+4} = 14^{-2}$

d) $9^8 \cdot 3^2 = (3^2)^8 \cdot 3^2 = 3^{2 \cdot 8} \cdot 3^2 = 3^{16} \cdot 3^2 = 3^{16+2} = 3^{18}$

e) $6^7 : 6^9 = 6^{7-9} = 6^{-2}$

f) $16^4 : 4^3 = (4^2)^4 : 4^3 = 4^{2 \cdot 4} : 4^3 = 4^8 : 4^3 = 4^{8-3} = 4^5$

g) $(7^2)^6 = 7^{2 \cdot 6} = 7^{12}$

h) $(2^4)^3 = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12}$

7. a) $3{,}25 \cdot 10^3 + 7{,}2 \cdot 10^3 = (3{,}25 + 7{,}2) \cdot 10^3 = 10{,}45 \cdot 10^3 =$
$= 1{,}045 \cdot 10^4$

b) $7{,}821 \cdot 10^{-3} + 9{,}254 \cdot 10^{-2} = 0{,}7821 \cdot 10^{-2} + 9{,}254 \cdot 10^{-2} =$
$= 10{,}0361 \cdot 10^{-2} = 1{,}00361 \cdot 10^{-1}$

c) $4{,}25 \cdot 10^5 - 1{,}2 \cdot 10^5 = (4{,}25 - 1{,}2) \cdot 10^5 = 3{,}05 \cdot 10^5$

d) $7{,}4 \cdot 10^{-1} - 3{,}2 \cdot 10^{-5} = 7{,}4 \cdot 10^{-1} - 0{,}00032 \cdot 10^{-1} =$
$= (7{,}4 - 0{,}00032) \cdot 10^{-1} = 7{,}39968 \cdot 10^{-1}$

e) $1{,}45 \cdot 10^6 \cdot 8{,}2 \cdot 10^{-9} = (1{,}45 \cdot 8{,}2) \cdot (10^6 \cdot 10^{-9}) =$
$= 11{,}89 \cdot 10^{6-9} = 11{,}89 \cdot 10^{-3} = 1{,}189 \cdot 10^{-2}$

f) $5{,}24 \cdot 10^3 \cdot 3{,}21 \cdot 10^{-3} = (5{,}24 \cdot 3{,}21) \cdot (10^3 \cdot 10^{-3}) =$
$= 16{,}8204 \cdot 10^{3-3} = 16{,}8204 \cdot 10^0 = 1{,}68204 \cdot 10$

g) $5{,}6 \cdot 10^{13} : 4 \cdot 10^7 = (5{,}6 : 4) \cdot (10^{13} : 10^7) = 1{,}4 \cdot 10^{13-7} =$
$= 1{,}4 \cdot 10^6$

h) $1{,}03 \cdot 10^{-4} : 8{,}04 \cdot 10^7 = (1{,}03 : 8{,}04) \cdot (10^{-4} : 10^7) \simeq$
$\simeq 0{,}128109 \cdot 10^{-4-7} = 0{,}128109 \cdot 10^{-11} = 1{,}28109 \cdot 10^{-12}$

8. Ela é menor somente se o número for maior que 1.
Situações possíveis:

- Se o número for maior que 0 e menor que 1, a raiz quadrada desse número será maior que ele. Por exemplo, $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.
- Se o número for maior que 1, a raiz quadrada desse número será menor que ele. Por exemplo, $\sqrt{4} = 2$ e $4 > 2$.

9.
$$V = a^3$$
$$1\,728 = a^3$$
$$a = \sqrt[3]{1\,728}$$
$$a = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3}$$
$$a = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{3^3}$$
$$a = 2^2 \cdot 3$$
$$a = 12$$

Logo, a medida do comprimento do reservatório é 12 m.

10. $4{,}2 \cdot 10^3 = 4{,}2 \cdot 1\,000 = 4\,200$

$$\frac{4\,200}{50} = 84$$

Portanto, Eliana já teve 84 aulas de Matemática neste ano.

11. Se a medida do perímetro de uma região quadrada for igual a $(16 + 8\sqrt{5})$ cm, então:

$$\text{medida do perímetro} = 4\ell$$
$$16 + 8\sqrt{5} = 4\ell$$
$$\ell = \frac{16 + 8\sqrt{5}}{4}$$
$$\ell = 4 + 2\sqrt{5}$$

Portanto, a medida do lado do quadrado é $(4 + 2\sqrt{5})$ cm.

Agora, calcula-se a medida A da área dessa região quadrada.

$$A = \ell^2$$
$$A = (4 + 2\sqrt{5})^2$$
$$A = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2$$
$$A = 16 + 16\sqrt{5} + 4 \cdot 5$$
$$A = 16 + 16\sqrt{5} + 20$$
$$A = 36 + 16\sqrt{5}$$

Logo, a medida da área da região quadrada é $(36 + 16\sqrt{5})$ cm^2.

12. Considerando V a medida do volume de uma divisão da forma, tem-se:

$$V = a \cdot b \cdot c = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2^6} = 6 \cdot 2^2 = 6 \cdot 4 = 24$$

Como a forma tem 16 divisões iguais, são necessários 384 cm^3 $(16 \cdot 24 = 384)$ de água para preencher todas as suas divisões.

13. Considerando x a quantidade de pessoas que havia na festa, a quantidade de coxinhas que cada pessoa comeu também pode ser representada por x, pois cada convidado comeu uma quantidade desse salgado igual à quantidade de pessoas que estavam na festa. Logo:

$$x \cdot x + 7 = 128$$
$$x \cdot x = 121$$
$$x^2 = 121$$
$$x = \sqrt{121}$$
$$x = 11$$

Portanto, havia 11 pessoas na festa.

14. a) Como os índices das raízes é o mesmo (2), podem-se comparar os radicandos. Como $48 > 21$, então $\sqrt{48} > \sqrt{21}$. Logo, o maior radical é $\sqrt{48}$.

b) Para comparar os radicais, inicialmente é necessário deixar os índices das raízes iguais. Como o mmc(2, 3) = 6, tem-se:

- $\sqrt{12} = \sqrt[2 \cdot 3]{12^{1 \cdot 3}} = \sqrt[6]{12^3} = \sqrt[6]{1\,728}$
- $\sqrt[3]{31} = \sqrt[3 \cdot 2]{31^{1 \cdot 2}} = \sqrt[6]{31^2} = \sqrt[6]{961}$

Como $1\,728 > 961$, então $\sqrt[6]{1\,728} > \sqrt[6]{961}$, ou seja, $\sqrt{12} > \sqrt[3]{31}$. Logo, o maior radical é $\sqrt{12}$.

c) Para comparar os radicais, inicialmente é necessário deixar os índices das raízes iguais. Como o mmc(3, 4) = 12, tem-se:

- $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3 \cdot 4]{24^{1 \cdot 4}} = \sqrt[12]{24^4} = \sqrt[12]{331\,776}$
- $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4 \cdot 3]{80^{1 \cdot 3}} = \sqrt[12]{80^3} = \sqrt[12]{512\,000}$

Como $331\,776 < 512\,000$, então $\sqrt[12]{331\,776} < \sqrt[12]{512\,000}$, ou seja, $\sqrt[3]{24} < \sqrt[4]{80}$. Logo, o maior radical é $\sqrt[4]{80}$.

d) $\sqrt{36} = 6$

$\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4:4]{2^{8:4}} = 2^2 = 4$

Como $6 > 4$, então $\sqrt{36} > \sqrt[4]{256}$. Logo, o maior radical é $\sqrt{36}$.

e) $\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$ está entre 3 e 4, pois $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ e $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$.

$$\sqrt{9^5} = \sqrt{(3^2)^5} = \sqrt{3^{10}} = \sqrt[2:2]{3^{10:2}} = 3^5$$

Então, $\sqrt[3]{7^2} < \sqrt{9^5}$. Logo, o maior radical é $\sqrt{9^5}$.

f) Para comparar os radicais, inicialmente é necessário deixar os índices das raízes iguais. Como o mmc(4, 5) = 20, tem-se:

- $\sqrt[4]{4^3} = \sqrt[4 \cdot 5]{4^{3 \cdot 5}} = \sqrt[20]{4^{15}}$
- $\sqrt[5]{7^4} = \sqrt[5 \cdot 4]{7^{4 \cdot 4}} = \sqrt[20]{7^{16}}$

Como $4^{15} < 7^{16}$, então $\sqrt[20]{4^{15}} < \sqrt[20]{7^{16}}$, ou seja, $\sqrt[4]{4^3} < \sqrt[5]{7^4}$. Logo, o maior radical é $\sqrt[5]{7^4}$.

g) $\sqrt[6]{2^8}$ e $\sqrt[4]{4^5} = \sqrt[4]{(2^2)^5} = \sqrt[4]{2^{10}} = \sqrt[4:2]{2^{10:2}} = \sqrt{2^5}$

Para comparar os radicais, inicialmente é necessário deixar os índices das raízes iguais. Como o mmc(6, 2) = 6, tem-se:

- $\sqrt[6]{2^8}$
- $\sqrt{2^5} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^{5 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2^{15}}$

Como $2^8 < 2^{15}$, então $\sqrt[6]{2^8} < \sqrt[6]{2^{15}}$, ou seja, $\sqrt[6]{2^8} < \sqrt[4]{4^5}$. Logo, o maior radical é $\sqrt[4]{4^5}$.

h) $\sqrt[3]{16}$ está entre 2 e 3, pois $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ e $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$.

$$\sqrt[4]{4^6} = \sqrt[4]{(2^2)^6} = \sqrt[4]{2^{12}} = \sqrt[4:4]{2^{12:4}} = 2^3 = 8$$

Então, $\sqrt[3]{16} < \sqrt[4]{4^6}$. Logo, o maior radical é $\sqrt[4]{4^6}$.

15. Medida do perímetro $= 80 + 40\sqrt{2} + 40\sqrt{2} = 80 + 80\sqrt{2} =$
$= 80 \cdot (1 + \sqrt{2}) \simeq 80 \cdot (1 + 1{,}4) \simeq 80 \cdot 2{,}4 = 192$

Portanto, o perímetro do triângulo mede, aproximadamente, 192 cm.

16. a) $5\sqrt{8} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2^3} + 2\sqrt{2} = 5 \cdot 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{2} =$
$= 12\sqrt{2}$

b) $\sqrt{12} - 9\sqrt{3} - 7 = \sqrt{2^2 \cdot 3} - 9\sqrt{3} - 7 = 2\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - 7 = -7\sqrt{3} - 7$

c) $4\sqrt{45} + 3\sqrt{500} - \sqrt{245} = 4\sqrt{9 \cdot 5} + 3\sqrt{5 \cdot 100} - \sqrt{5 \cdot 7^2} =$
$= 4 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} + 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{100} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{7^2} =$
$= 4 \cdot 3\sqrt{5} + 3 \cdot 10\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = 12\sqrt{5} + 30\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

d) $2\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6} - 7\sqrt[3]{2} \cdot 4\sqrt[3]{12} + 14\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{24} - 28\sqrt[3]{24} + 14\sqrt[3]{3} =$
$= -26\sqrt[3]{24} + 14\sqrt[3]{3} = -26\sqrt[3]{8 \cdot 3} + 14\sqrt[3]{3} =$
$= -26\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} + 14\sqrt[3]{3} = -26 \cdot 2\sqrt[3]{3} + 14\sqrt[3]{3} =$
$= -52\sqrt[3]{3} + 14\sqrt[3]{3} = -38\sqrt[3]{3}$

e) $\sqrt{80} - 2\sqrt{100} - 3\sqrt{360} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 5} - 2\sqrt{2^2 \cdot 5^2} - 3\sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} =$
$= 2 \cdot 2\sqrt{5} - 2 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 5} = 4\sqrt{5} - 20 - 18\sqrt{10}$

f) $\sqrt{63} + \sqrt{28} + 2\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 7} + \sqrt{2^2 \cdot 7} + 2\sqrt{3^2 \cdot 5} =$
$= 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + 2 \cdot 3\sqrt{5} = 5\sqrt{7} + 6\sqrt{5}$

17. Alternativa **c**.

$$9^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{10}{\sqrt[5]{3^2}} = \sqrt[5]{9} \cdot \frac{10}{\sqrt[5]{9}} = 10 = 5 \cdot 2$$

Logo, o número $9^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{10}{\sqrt[5]{3^2}}$ é múltiplo de 5.

18. $\dfrac{-2 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - 3\sqrt{100} + 19^0 \cdot 19^{21} =$

$= \dfrac{-2 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - 3 \cdot 10 + 1 \cdot 19^{21} =$

$= \dfrac{-2 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - 30 + 19^{21} =$

$= \dfrac{-2 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} - 30 + 19^{21} =$

$= \dfrac{-2 \cdot (\sqrt{49} + \sqrt{21} + \sqrt{21} + \sqrt{9})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} - 30 + 19^{21} =$

$= \dfrac{-2 \cdot (7 + 2\sqrt{21} + 3)}{7 - 3} - 30 + 19^{21} =$

$= \dfrac{-14 - 4\sqrt{21} - 6}{4} - 30 + 19^{21} =$

$= \dfrac{-20 - 4\sqrt{21}}{4} - 30 + 19^{21} =$

$= -5 - \sqrt{21} - 30 + 19^{21} =$

$= 19^{21} - \sqrt{21} - 35$

19. $\sqrt{5\,988} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 499} = 2\sqrt{1\,497} \simeq 77{,}38$

Portanto, Isabela acertou.

20. Alternativa **a**.

$$A = \sqrt{3} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{39}$$

$\sqrt{39}$ está entre $\sqrt{36}$ e $\sqrt{49}$, ou seja, está entre 6 e 7.

21. a) $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 20} = \sqrt{400} = 20$

Portanto, um corpo que cai de uma altura de 20 m chega ao solo com velocidade de 20 m/s.

b)
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \\ 60 &= \sqrt{2 \cdot 10 \cdot h} \\ 60 &= \sqrt{20h} \\ 60^2 &= (\sqrt{20h})^2 \\ 3\,600 &= 20h \\ h &= \frac{3\,600}{20} \\ h &= 180 \end{aligned}$$

Logo, o corpo foi abandonado de uma altura de 180 m.

22. Esse procedimento corresponde à segunda propriedade dos radicais: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$.

23. Alternativa **c**.

$\dfrac{5}{\sqrt[6]{16} + \sqrt[6]{196} + \sqrt[3]{49}} = \dfrac{5}{\sqrt[6]{2^4} + \sqrt[6]{2^2 \cdot 7^2} + \sqrt[3]{7^2}} =$

$= \dfrac{5}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 7} + \sqrt[3]{7^2}} = \dfrac{5}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 7} + \sqrt[3]{7^2}} \cdot \dfrac{(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2})} =$

$= \dfrac{5 \cdot (\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2})}{\sqrt[3]{4 \cdot 7} + \sqrt[3]{2 \cdot 7^2} + 7 - 2 - \sqrt[3]{4 \cdot 7} - \sqrt[3]{2 \cdot 7^2}} = \dfrac{5 \cdot (\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2})}{5} =$

$= \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}$

24. Alternativa **d**.

a) $(3^{-4})^5 = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$

Portanto, a igualdade é verdadeira.

b) $2^{-3} : 2^{-8} = 2^{-3-(-8)} = 2^{-3+8} = 2^5$

Portanto, a igualdade é verdadeira.

c) $\dfrac{16^2 \cdot 8^3}{2^9} = \dfrac{(2^4)^2 \cdot (2^3)^3}{2^9} = \dfrac{2^8 \cdot \cancel{2^9}}{\cancel{2^9}} = 2^8$

Portanto, a igualdade é verdadeira.

d) $\sqrt[3]{8} : \sqrt{2} = 2 : \sqrt{2} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Como $\sqrt{2} \neq 1$, então a igualdade é falsa.

e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{2}{2}} = \sqrt{1} = 1$

Portanto, a igualdade é verdadeira.

UNIDADE 2 – RAZÃO, PROPORÇÃO E MATEMÁTICA FINANCEIRA

CAPÍTULO 1 – RAZÃO E PROPORÇÃO

PÁGINA 54 – ATIVIDADES

1. Homens: $\frac{120}{300} = \frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 0{,}4 = 40\%$

Mulheres: $\frac{180}{300} = \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 0{,}6 = 60\%$

2. O comprimento aproximado do barco desenhado mede 5,2 cm. Como a escala do desenho é de 1 para 200, então a medida do comprimento real do barco é 10,40 m, pois $200 \cdot 5{,}2$ cm $= 1\,040$ cm e 1 040 cm equivalem a 10,40 m.

3. Como a medida da velocidade média corresponde à razão entre a medida da distância percorrida e o tempo gasto, tem-se:

$$\text{velocidade média} = \frac{50}{30} = \frac{5}{3} \simeq 1{,}7$$

Logo, a medida da velocidade média desse nadador foi, aproximadamente, 1,7 m/s.

4. Como a medida da densidade de um corpo corresponde à razão entre as medidas da massa e do volume desse corpo, tem-se:

$$\text{densidade} = \frac{4\,370}{500} = 8{,}74$$

Logo, a densidade da escultura é 8,74 g/cm^3.

5. Como a medida da densidade demográfica corresponde à razão entre a quantidade de habitantes de uma região e a medida da área dessa região, tem-se:

$$500 = \frac{150\,000}{\text{medida da área}}$$

$$\text{medida da área} = \frac{150\,000}{500}$$

$$\text{medida da área} = 300$$

Portanto, a área desse município mede 300 km^2.

6. Observando a escala do mapa, tem-se que cada centímetro da representação equivale a 745 quilômetros na distância real.

A medida entre as cidades de Brasília e Salvador, em linha reta, no mapa dado é 1,5 cm. Assim:

$$\frac{1}{745} = \frac{1{,}5}{\text{distância real}}$$

· 1,5

$$\frac{1}{745} = \frac{1{,}5}{1\,117{,}5}$$

· 1,5

Portanto, a distância real, em linha reta, entre as cidades de Brasília e Salvador mede, aproximadamente, 1 117,5 km.

PÁGINA 62 – ATIVIDADES

7. Considerando x, y e z as partes obtidas ao dividir o número 140 proporcionalmente, tem-se:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

Usando a 2ª propriedade das proporções, tem-se:

$$\frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

Como $x + y + z = 140$, tem-se:

$$k = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{140}{10} = 14$$

Agora, determina-se cada incógnita:

- $\frac{x}{2} = 14$
  $x = 14 \cdot 2$
  $x = 28$
- $\frac{y}{3} = 14$
  $y = 3 \cdot 14$
  $y = 42$
- $\frac{z}{5} = 14$
  $z = 5 \cdot 14$
  $z = 70$

Portanto, o resultado dessa divisão são os números 28, 42 e 70, respectivamente.

8. Considerando x e y as partes obtidas ao dividir o número 2 990 proporcionalmente, tem-se:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{15}$$

Usando a 2ª propriedade das proporções, tem-se:

$$\frac{x+y}{8+15} = \frac{x}{8} = \frac{y}{15}$$

Como $x + y = 2\,990$, tem-se:

$$k = \frac{x+y}{8+15} = \frac{2\,990}{23} = 130$$

Agora, determina-se cada incógnita:

- $\frac{x}{8} = 130$
  $x = 8 \cdot 130$
  $x = 1\,040$
- $\frac{y}{15} = 130$
  $y = 15 \cdot 130$
  $y = 1\,950$

Portanto, o resultado dessa divisão são os números 1 040 e 1 950, respectivamente.

9. Considerando x, y e z os valores que os amigos poderão receber caso o bilhete deles seja sorteado, tem-se:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{z}{14}$$

Usando a 2ª propriedade das proporções, tem-se:

$$\frac{x+y+z}{8+10+14} = \frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{z}{14}$$

Como $x + y + z = 96\,000$, tem-se:

$$\frac{x+y+z}{8+10+14} = \frac{96\,000}{32} = 3\,000$$

Agora, determina-se cada incógnita:

- $\frac{x}{8} = 3\,000$
  $x = 8 \cdot 3\,000$
  $x = 24\,000$
- $\frac{y}{10} = 3\,000$
  $y = 10 \cdot 3\,000$
  $y = 30\,000$
- $\frac{z}{14} = 3\,000$
  $z = 14 \cdot 3\,000$
  $z = 42\,000$

Portanto, caso o bilhete deles seja sorteado, a parcela que cada amigo deve receber proporcionalmente ao valor com que contribuiu é R$ 24 000,00, R$ 30 000,00 e R$ 42 000,00, respectivamente.

10. Considerando a, b, c, d e e os valores que os netos devem receber, tem-se:

$$\frac{a}{\frac{1}{4}} = \frac{b}{\frac{1}{6}} = \frac{c}{\frac{1}{10}} = \frac{d}{\frac{1}{12}} = \frac{e}{\frac{1}{16}}$$

Usando a 2ª propriedade das proporções, tem-se:

$$\frac{a+b+c+d+e}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}} =$$

$$= \frac{a}{\frac{1}{4}} = \frac{b}{\frac{1}{6}} = \frac{c}{\frac{1}{10}} = \frac{d}{\frac{1}{12}} = \frac{e}{\frac{1}{16}}$$

Como $a + b + c + d + e = 636\,000$, tem-se:

$$k = \frac{a+b+c+d+e}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}} =$$

$$= \frac{636\,000}{\frac{60+40+24+20+15}{240}} =$$

$$= \frac{636\,000}{\frac{159}{240}} = \frac{636\,000}{1} \cdot \frac{240}{159} = 960\,000$$

Agora, determina-se cada incógnita:

- $\frac{a}{\frac{1}{4}} = 960\,000$
  $a = 960\,000 \cdot \frac{1}{4}$
  $a = 240\,000$
- $\frac{b}{\frac{1}{6}} = 960\,000$
  $b = 960\,000 \cdot \frac{1}{6}$
  $b = 160\,000$

- $\dfrac{c}{\frac{1}{10}} = 960\,000$

$c = 960\,000 \cdot \dfrac{1}{10}$

$c = 96\,000$

- $\dfrac{d}{\frac{1}{12}} = 960\,000$

$d = 960\,000 \cdot \dfrac{1}{12}$

$d = 80\,000$

- $\dfrac{e}{\frac{1}{16}} = 960\,000$

$e = 960\,000 \cdot \dfrac{1}{16}$

$e = 60\,000$

Logo, os netos receberam: R$ 240 000,00; R$ 160 000,00; R$ 96 000,00; R$ 80 000,00; e R$ 60 000,00, respectivamente.

11. Como $48 = 3 \cdot 16$, Cátia deve usar 3 vezes a quantidade de cada ingrediente, ou seja, 3 latas ($3 \cdot 1 = 3$) de creme de leite e 1 500 gramas ($500 \cdot 3 = 1\,500$) de chocolate em barra.

12. a) Como a medida da velocidade média corresponde à razão entre a medida da distância percorrida (d) e o tempo gasto, tem-se:

$$5 = \frac{d}{2}$$

$$d = 5 \cdot 2$$

$$d = 10$$

Logo, Ana Marcela Cunha nadou 10 km.

b) De maneira análoga, sendo t o tempo gasto, tem-se:

$$5 = \frac{12}{t}$$

$$t = \frac{12}{5}$$

$$t = 2{,}4$$

Calculando o quanto 0,4 hora equivale em minutos, temos:

$$0{,}4 \cdot 60 = 24$$

Assim: 0,4 hora = 24 minutos.

Portanto, Ana Marcela Cunha levaria 2 horas e 24 minutos para concluir o percurso.

13. Sendo x o tempo que uma torneira com vazão de 20 litros por minuto levaria para encher esse tanque, pode-se montar o seguinte quadro:

Vazão (litro por minuto)	Tempo (em hora)
15	12
20	x

As grandezas são inversamente proporcionais, pois aumentando a vazão de água da torneira, o tempo necessário para encher esse tanque diminui na mesma razão.

Assim:

$$\frac{15}{20} = \frac{x}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{12}$$

$$4x = 36$$

$$x = 9$$

Portanto, uma torneira com vazão de 20 litros por minuto levaria 9 horas para encher o mesmo tanque.

14. Sendo x o tempo que o estoque de ração seria suficiente para alimentar 450 vacas, tem-se:

Tempo (em dia)	Quantidade de vacas
45	220
x	450

As grandezas são inversamente proporcionais, pois aumentando a quantidade de vacas, o tempo de duração da ração diminui na mesma razão. Logo:

$$\frac{45}{x} = \frac{450}{220}$$

$$\frac{45}{x} = \frac{45}{22}$$

$$x = 22$$

Portanto, caso o número de vacas fosse 450, a ração seria suficiente para 22 dias.

15. Sendo x o valor cobrado pelo hotel para hospedar 6 pessoas por 10 dias, tem-se:

Tempo (em dia)	Quantidade de pessoas	Valor cobrado (em real)
5	4	1 200
10	6	x

Comparando a grandeza "valor cobrado" com as grandezas "tempo" e "quantidade de pessoas", tem-se:

- o tempo é diretamente proporcional ao valor cobrado, pois aumentando o tempo de hospedagem, o valor cobrado pelo hotel aumenta na mesma razão;
- a quantidade de pessoas é diretamente proporcional ao valor, pois aumentando o número de pessoas hospedadas, o valor cobrado pelo hotel aumenta na mesma razão.

Logo:

$$\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1\,200}{x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1\,200}{x}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1\,200}{x}$$

$$x = 3 \cdot 1\,200$$

$$x = 3\,600$$

Portanto, esse hotel cobrará R$ 3 600,00 de 6 pessoas por 10 dias de hospedagem.

16. Sendo x o tempo necessário para percorrer 432 km durante 8 horas diárias, tem-se:

Tempo diário (em hora)	Tempo total (em dia)	Distância percorrida (em km)
10	24	720
8	x	432

Comparando a grandeza "tempo total" com as grandezas "tempo diário" e "distância percorrida", tem-se:

- o tempo diário é inversamente proporcional ao tempo total, pois aumentando a quantidade de horas diárias de caminhada, a quantidade de dias necessários para cumprir o percurso diminui na mesma razão;
- a distância percorrida é diretamente proporcional ao tempo total, pois aumentando a quantidade de quilômetros percorridos, a quantidade de dias necessários para cumprir o percurso aumenta na mesma razão.

Assim:

$$\frac{8}{10} \cdot \frac{720}{432} = \frac{24}{x}$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{24}{x}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{24}{x}$$

$$4x = 72$$

$$x = 18$$

Logo, caminhando na mesma velocidade por 8 horas diárias, serão necessários 18 dias para o viajante percorrer 432 km.

17. Sendo x o consumo, em quilowatt-hora, necessários para 6 lâmpadas iguais a essas, acesas 3 horas por dia, durante 20 dias, tem-se:

Quantidade de lâmpadas	Tempo diário (em hora)	Tempo total (em dia)	Consumo (em kWh)
8	4	30	48
6	3	20	x

Comparando a grandeza "consumo" com as grandezas "quantidade de lâmpadas", "tempo diário" e "tempo total", tem-se:

- a quantidade de lâmpadas é diretamente proporcional ao consumo, pois diminuindo o número de lâmpadas acesas, o consumo diminui na mesma razão;
- o tempo diário é diretamente proporcional ao consumo, pois diminuindo o tempo que as lâmpadas ficam acesas por dia, o consumo diminui na mesma razão;
- o tempo total é diretamente proporcional ao consumo, pois diminuindo o número de dias que as lâmpadas ficam acesas, o consumo diminui na mesma razão.

Assim:

$$\frac{8}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{30}{20} = \frac{48}{x}$$
$$\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{48}{x}$$
$$\frac{8}{3} = \frac{48}{x}$$
$$x = \frac{3 \cdot 48}{8}$$
$$x = 18$$

Portanto, 6 lâmpadas iguais a essas, acesas 3 horas por dia, durante 20 dias, consumirão 18 kWh.

18. Sendo x a quantidade de barras que seriam costuradas por 3 alfaiates em 12 minutos, tem-se:

Quantidade de alfaiates	Quantidade de barras costuradas	Tempo gasto (em minuto)
2	10	20
3	x	12

Comparando a quantidade de barras costuradas com a quantidade de alfaiates e o tempo gasto, tem-se:

- a quantidade de alfaiates é diretamente proporcional à quantidade de barras costuradas, pois aumentando a quantidade de alfaiates, a quantidade de barras costuradas aumenta na mesma razão;
- o tempo gasto para costurar as barras é diretamente proporcional à quantidade de barras costuradas, pois aumentando o tempo de trabalho, a quantidade de barras costuradas aumenta na mesma razão.

Logo:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{20}{12} = \frac{10}{x}$$
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{x}$$
$$\frac{10}{9} = \frac{10}{x}$$
$$x = 9$$

Portanto, seriam costuradas 9 barras por 3 alfaiates em 12 minutos.

19. Sendo x o tempo gasto pelo motorista para percorrer esse trecho a 120 km/h, tem-se:

Velocidade (em km/h)	Tempo (em hora)
100	6
120	x

As grandezas são inversamente proporcionais, pois aumentando a velocidade do veículo, o tempo gasto para completar o percurso diminui na mesma razão. Logo:

$$\frac{120}{100} = \frac{6}{x}$$
$$\frac{6}{5} = \frac{6}{x}$$
$$x = 5$$

Portanto, esse motorista gastará 5 horas para percorrer o mesmo trecho se ele aumentar a velocidade para 120 km/h.

20. Após 5 dias de trabalho, os 4 pintores terminariam a pintura em 25 dias.

Sendo x a quantidade de dias que 5 pintores terminaram de pintar essa casa, pode-se montar o seguinte quadro:

Quantidade de pintores	Tempo restante (em dia)
4	25
5	x

As grandezas são inversamente proporcionais, pois se a quantidade de pintores aumenta, o tempo para pintar a casa diminui na mesma razão. Então:

$$\frac{5}{4} = \frac{25}{x}$$
$$x = \frac{4 \cdot 25}{5}$$
$$x = 20$$

Logo, a pintura foi concluída por 5 pintores em 20 dias.

Portanto, a obra durou 25 dias ($20 + 5 = 25$).

PÁGINA 63 – DIVERSIFICANDO

1. **a)** Primeiro, pode-se verificar se os números das sequências (1, 3) e (20, 60) são diretamente proporcionais:

$$\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$$

Logo, os números dessas sequências são diretamente proporcionais e $k = \frac{1}{20}$.

b) Primeiro, pode-se verificar se os números das sequências (2, 3, 4) e (12, 8, 6) são diretamente proporcionais:

- $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ • $\frac{3}{8}$ • $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Como os números dessas sequências não são diretamente proporcionais, então é necessário verificar se eles são inversamente proporcionais:

- $\dfrac{2}{\frac{1}{12}} = 2 \cdot 12 = 24$
- $\dfrac{3}{\frac{1}{8}} = 3 \cdot 8 = 24$
- $\dfrac{4}{\frac{1}{6}} = 4 \cdot 6 = 24$

Logo, os números dessas sequências são inversamente proporcionais e $k = 24$.

2. Sendo x o tempo diário que a fábrica precisa funcionar para produzir 30 motos em 9 dias, tem-se:

Tempo diário (em hora)	Quantidade de motos	Tempo total (em dia)
6	20	8
x	30	9

Comparando o tempo diário com a quantidade de motos e o tempo total, tem-se:

- a quantidade de motos é diretamente proporcional ao tempo diário, pois aumentando a quantidade de motos produzidas, a quantidade de horas que a fábrica deve funcionar por dia aumenta na mesma razão;
- o tempo total é inversamente proporcional ao tempo diário, pois aumentando a quantidade de dias que a fábrica deve funcionar, a quantidade de horas que a fábrica deve funcionar por dia diminui na mesma razão.

Então:

$$\frac{6}{x} = \frac{20}{30} \cdot \frac{9}{8}$$
$$\frac{6}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}$$
$$\frac{6}{x} = \frac{3}{4}$$
$$x = \frac{6 \cdot 4}{3}$$
$$x = 8$$

Portanto, para que o objetivo seja alcançado, a fábrica precisa funcionar 8 horas por dia.

3. Sendo x o tempo necessário para produzir 1 000 bonecas, tem-se:

Quantidade de bonecas	Tempo (em hora)
400	5
1 000	x

As grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, pois aumentando a quantidade de bonecas, o tempo para produzi-las aumenta na mesma razão. Então:

$$\frac{400}{1\,000} = \frac{5}{x}$$
$$\frac{4}{10} = \frac{5}{x}$$
$$\frac{2}{5} = \frac{5}{x}$$
$$x = \frac{5 \cdot 5}{2}$$
$$x = \frac{25}{2}$$
$$x = 12{,}5$$

Portanto, são necessárias 12,5 horas para produzir 1 000 bonecas.

4. **a)** Sendo x a quantidade de farinha para produzir 3 kg de pão, tem-se:

Quantidade de pão (em kg)	Quantidade de farinha (em kg)
240	200
3	x

As grandezas são diretamente proporcionais, pois aumentando a quantidade de pão produzido, a quantidade de farinha necessária para produzi-la aumenta na mesma razão. Então:

$$\frac{240}{3} = \frac{200}{x}$$

$$80 = \frac{200}{x}$$

$$x = \frac{200}{80}$$

$$x = 2{,}5$$

Portanto, são necessários 2,5 kg de farinha para fazer 3 kg de pão.

b) Sendo x a quantidade de pão que pode ser feita com 500 kg de farinha, tem-se:

Quantidade de pão (em kg)	Quantidade de farinha (em kg)
240	200
x	500

Como essas grandezas são diretamente proporcionais, então:

$$\frac{240}{x} = \frac{200}{500}$$

$$\frac{240}{x} = \frac{2}{5}$$

$$2x = 1\,200$$

$$x = \frac{1\,200}{2}$$

$$x = 600$$

Logo, com 500 kg de farinha são produzidos 600 kg de pães, que equivalem a 600 000 g. Como cada pão deve ter 50 g, então:

$$\frac{600\,000}{50} = 12\,000$$

Portanto, com 500 kg de farinha podem ser feitos 12 000 pães de 50 g.

5. Sendo ℓ_1 a medida do lado do quadrado menor e ℓ_2 a do quadrado maior, tem-se que a razão entre essas medidas é $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{4}{5}$.

a) $\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{4}{5}$

$$\frac{12}{\ell_2} = \frac{4}{5}$$

$$4\ell_2 = 12 \cdot 5$$

$$\ell_2 = \frac{60}{4}$$

$$\ell_2 = 15$$

Portanto, o lado do quadrado maior mede 15 cm.

b) $\frac{4 \cdot 12}{4 \cdot 15} = \frac{48}{60} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Logo, a razão entre a medida do perímetro do quadrado menor e a medida do perímetro do quadrado maior é $\frac{4}{5}$.

c) $\frac{12 \cdot 12}{15 \cdot 15} = \frac{144}{225} = \frac{16}{25}$

Portanto, a razão entre a medida da área da região quadrada menor e a medida da área da região quadrada maior é $\frac{16}{25}$.

d) Para verificar se a razão entre as medidas dos perímetros e a razão entre as medidas das áreas formam uma proporção, basta observar se:

$$\frac{4}{5} = \frac{16}{25}$$

$$4 \cdot 25 = 5 \cdot 16$$

$$100 = 80 \text{ (falso)}$$

Como essa igualdade não é verdadeira, então as razões não formam uma proporção.

6. a) Sendo x a quantidade de copos de polpa de fruta necessária para misturar com 36,5 copos de água, tem-se:

Quantidade de copos de polpa de fruta	Quantidade de copos de água
2	10
x	36,5

As grandezas são diretamente proporcionais, pois aumentando a quantidade de copos de água, a quantidade de copos de polpa de fruta aumenta na mesma razão. Então:

$$\frac{2}{x} = \frac{10}{36{,}5}$$

$$10x = 2 \cdot 36{,}5$$

$$10x = 73$$

$$x = \frac{73}{10}$$

$$x = 7{,}3$$

Portanto, para preparar o suco com 36,5 copos de água, são necessários 7,3 copos com polpa de fruta.

b) Como Mariana preparou o suco com 36,5 copos de água e 7,3 copos de polpa de fruta, ela obteve 43,8 copos de suco (36,5 + 7,3 = 43,8).

Portanto, poderão ser servidos 43 copos completamente cheios de suco.

7. a) Sendo x o tempo diário que a empresa deve funcionar para engarrafar 4 000 garrafas em 4 dias, tem-se:

Quantidade de garrafas	Tempo total (em dia)	Tempo diário (em hora)
3 000	5	6
4 000	4	x

Comparando o tempo diário com a quantidade de garrafas e o tempo total, tem-se:

- a quantidade de garrafas é diretamente proporcional ao tempo diário, pois aumentando a quantidade de garrafas, a quantidade de horas trabalhadas por dia aumenta na mesma razão;
- o tempo total é inversamente proporcional ao tempo diário, pois diminuindo a quantidade de dias trabalhados, a quantidade de horas trabalhadas por dia aumenta na mesma razão.

Assim:

$$\frac{3\,000}{4\,000} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{x}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{x}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{x}$$

$$x = \frac{5 \cdot 6}{3}$$

$$x = 10$$

Portanto, essa empresa engarrafadora de água mineral deve funcionar 10 horas por dia para atingir o objetivo de encher 4 mil garrafas em 4 dias.

b) Sendo y o tempo que a empresa deve funcionar para engarrafar 4 000 garrafas em 1 dia, tem-se:

Quantidade de garrafas	Tempo total (em dia)	Tempo diário (em hora)
3 000	5	6
4 000	1	y

Como o tempo diário é diretamente proporcional à quantidade de garrafas e inversamente proporcional ao tempo total, então:

$$\frac{3\,000}{4\,000} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{y}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{y}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{6}{y}$$

$$y = \frac{20 \cdot 6}{3}$$

$$y = 40$$

Portanto, essa empresa engarrafadora de água mineral deveria funcionar 40 horas por dia para encher 4 000 garrafas em 1 dia.

Como é impossível trabalhar 40 horas por dia, pois um dia tem 24 horas, então essa produção é impossível.

8. Primeiro, deve-se descobrir quantas caixas de biscoito essa máquina embala em 1 hora. Sendo x o número de caixas embaladas em 60 minutos, tem-se:

Quantidade de caixas embaladas	Tempo de funcionamento (em minuto)
20	1
x	60

As grandezas são diretamente proporcionais, pois aumentando o tempo de funcionamento da máquina, a quantidade de caixas aumenta na mesma razão. Assim:

$$\frac{20}{x} = \frac{1}{60}$$

$$x = 20 \cdot 60$$

$$x = 1\,200$$

Portanto, a máquina embala 1 200 caixas em 1 hora.

Sendo y o número de caixas de biscoito que essa máquina embala em 6 horas, tem-se:

Quantidade de caixas embaladas	Tempo de funcionamento (em hora)
1 200	1
y	6

Como as grandezas são diretamente proporcionais, tem-se:

$$\frac{1}{6} = \frac{1\,200}{y}$$
$$y = 6 \cdot 1\,200$$
$$y = 7\,200$$

Logo, uma máquina embala 7 200 caixas em 6 horas.

Portanto, 3 máquinas dessas, funcionando por 6 horas, embalam 21 600 caixas de biscoito, pois $7\,200 \cdot 3 = 21\,600$.

9. Sendo x o consumo mensal de 8 lâmpadas acesas 6 horas por dia, tem-se:

Quantidade de lâmpadas	Tempo diário (em hora)	Consumo mensal (em kWh)
6	5	40
8	6	x

Comparando o consumo mensal com a quantidade de lâmpadas e o tempo diário, tem-se:

- a quantidade de lâmpadas é diretamente proporcional ao consumo, pois aumentando a quantidade de lâmpadas, o consumo mensal aumenta na mesma razão;
- o tempo diário é diretamente proporcional ao consumo, pois diminuindo a quantidade de horas diárias em que as lâmpadas ficam acesas, o consumo mensal diminui na mesma razão.

Assim:

$$\frac{6}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{40}{x}$$
$$\frac{5}{8} = \frac{40}{x}$$
$$x = \frac{8 \cdot 40}{5}$$
$$x = 64$$

Portanto, o consumo mensal de 8 lâmpadas acesas 6 horas por dia será 64 kWh.

10. Considerando a, b e c os valores recebidos por Alberto, Beatriz e Cléber, respectivamente, tem-se:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{2}}$$

Utilizando a 2ª propriedade das proporções, tem-se:

$$\frac{a+b+c}{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{2}}$$

Como $a + b + c = 2\,280$, então:

$$k = \frac{a+b+c}{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{2\,280}{\frac{4}{20}+\frac{5}{20}+\frac{10}{20}} =$$
$$= \frac{2\,280}{\frac{19}{20}} = 2\,280 \cdot \frac{20}{19} =$$
$$= 120 \cdot 20 = 2\,400$$

Agora, determina-se cada incógnita:

- $\frac{a}{\frac{1}{5}} = 2\,400$

  $a = \frac{1}{5} \cdot 2\,400$

  $a = 480$

- $\frac{c}{\frac{1}{2}} = 2\,400$

  $c = \frac{1}{2} \cdot 2\,400$

  $c = 1\,200$

- $\frac{b}{\frac{1}{4}} = 2\,400$

  $b = \frac{1}{4} \cdot 2\,400$

  $b = 600$

Logo, Alberto recebeu R$ 480,00; Beatriz recebeu R$ 600,00 e Cléber recebeu R$ 1 200,00.

11. Sendo x a medida de massa de 70 cadernos com 120 páginas, tem-se:

Quantidade de cadernos	Quantidade de páginas	Medida de massa (em kg)
80	140	72
70	120	x

Comparando a massa com a quantidade de cadernos e a quantidade de páginas, tem-se:

- a quantidade de cadernos é diretamente proporcional à massa, pois aumentando a quantidade de cadernos, a medida de massa aumenta na mesma razão;
- a quantidade de páginas é diretamente proporcional à massa, pois aumentando a quantidade de páginas, a medida de massa aumenta na mesma razão.

Assim:

$$\frac{80}{70} \cdot \frac{140}{120} = \frac{72}{x}$$
$$\frac{8}{7} \cdot \frac{14}{12} = \frac{72}{x}$$
$$\frac{8}{7} \cdot \frac{7}{6} = \frac{72}{x}$$
$$\frac{8}{6} = \frac{72}{x}$$
$$\frac{4}{3} = \frac{72}{x}$$
$$x = \frac{3 \cdot 72}{4}$$
$$x = 54$$

Portanto, a massa de 70 cadernos com 120 páginas cada um mede 54 kg.

12. Sendo x a quantidade de operários que serão necessários para construir 12 lajes em 20 dias, tem-se:

Quantidade de operários	Quantidade de lajes	Tempo (em dia)
15	3	8
x	12	20

Comparando a quantidade de operários com a quantidade de lajes e o tempo, tem-se:

- a quantidade de lajes é diretamente proporcional à quantidade de operários, pois aumentando a quantidade de lajes, a quantidade de operários necessários para construí-las aumenta na mesma razão;
- o tempo é inversamente proporcional à quantidade de operários, pois aumentando a quantidade de dias trabalhados, a quantidade de operários necessários na construção diminui na mesma razão.

Então:

$$\frac{15}{x} = \frac{3}{12} \cdot \frac{20}{8}$$
$$\frac{15}{x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2}$$
$$\frac{15}{x} = \frac{5}{8}$$
$$x = \frac{15 \cdot 8}{5}$$
$$x = 24$$

Logo, serão necessários 24 operários para construir as 12 lajes restantes do edifício em 20 dias.

13. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2 – MATEMÁTICA FINANCEIRA

PÁGINA 69 – ATIVIDADES

1. Calculando 8% de R$ 40 000,00, tem-se:

$$\frac{8}{100} \cdot 40\,000 = 3\,200$$

Subtraindo R$ 3 200,00 de R$ 40 000,00, tem-se:

$$40\,000 - 3\,200 = 36\,800$$

Portanto, 1 ano após sua venda, o valor desse automóvel será R$ 36 800,00.

2. Calculando 4% de R$ 360,00 tem-se:

$$\frac{4}{100} \cdot 360 = 14{,}40$$

Adicionando R$ 14,40 a R$ 360,00, tem-se:

$$360 + 14{,}40 = 374{,}40$$

Portanto, Marcelo pagou R$ 374,40.

3. Calculando 15% de R$ 3 200,00, tem-se:

$$\frac{15}{100} \cdot 3\,200 = 480$$

Como a família tem 5 integrantes, então:

$$5 \cdot 480 = 2\,400$$

Portanto, ao comprar os pacotes de viagem para Salvador com desconto, essa família economizaria R$ 2 400,00.

4. Calculando 5% de R$ 28,00, tem-se:

$$\frac{5}{100} \cdot 28 = 1{,}40$$

Adicionando R$ 1,40 a R$ 28,00, tem-se:

$$28 + 1{,}40 = 29{,}40$$

Calculando 10% de R$ 29,40, tem-se:

$$\frac{10}{100} \cdot 29{,}40 = 2{,}94$$

Adicionando R$ 2,94 a R$ 29,40, tem-se:

$$29{,}40 + 2{,}94 = 32{,}34$$

Portanto, após os dois reajustes, o valor desse produto passou a ser R$ 32,34.

5. Não, pois se o produto custa x, tem-se:
   - Primeiro reajuste: $1{,}07x$
   - Segundo reajuste: $1{,}07 \cdot 1{,}07x = 1{,}1449x$
   - Terceiro reajuste: $(1{,}07)^3 \cdot x = 1{,}225043x$

   Logo, após os três acréscimos, o reajuste foi de, aproximadamente, 22,5%.

6. Escrevendo uma expressão com todos os acréscimos e decréscimos, tem-se:

$$[(200 \cdot 1{,}05) \cdot 1{,}08] \cdot 0{,}95 =$$
$$= 200 \cdot (1{,}05 \cdot 1{,}08 \cdot 0{,}95) =$$
$$= 200 \cdot 1{,}0773 = 215{,}46$$

Portanto, o preço do liquidificador depois do desconto é R$ 215,46.

7. Sendo x o preço inicial da bandeira, após o aumento o preço passou a ser $1{,}15x$.

Como após o desconto o valor do produto voltará a ser x, tem-se:

$$\frac{x}{1{,}15x} \simeq 0{,}87 = 87\%$$

Logo, x corresponde a aproximadamente 87% de $1{,}15x$.

Portanto, o comerciante deve anunciar um desconto de, aproximadamente, 13%.

PÁGINA 72 – ATIVIDADES

8. Como $M = C + j$ e $j = C \cdot i \cdot t$, então:

$$M = C + j$$
$$M = C + C \cdot i \cdot t$$
$$768 = 600 + 600 \cdot i \cdot 4$$
$$768 - 600 = 2\,400 \cdot i$$
$$168 = 2\,400 \cdot i$$
$$i = \frac{168}{2\,400}$$
$$i = 0{,}07 = \frac{7}{100} = 7\%$$

Portanto, a taxa mensal de juros nesse período foi de 7%.

9. De acordo com os dados do enunciado, tem-se:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$
$$M = 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}6559}{100}\right)^3$$
$$M = 2\,000 \cdot (1 + 0{,}006559)^3$$
$$M = 2\,000 \cdot (1{,}006559)^3$$
$$M = 2\,000 \cdot 1{,}019806343614334879$$
$$M = 2\,039{,}612687228669758$$
$$M \simeq 2\,039{,}61$$

Portanto, o montante resgatado pelo investidor foi de R$ 2 039,61.

10. Utilizando os dados do enunciado, tem-se:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$
$$M = 30\,000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^3$$
$$M = 30\,000 \cdot (1 + 0{,}02)^3$$
$$M = 30\,000 \cdot (1{,}02)^3$$
$$M = 30\,000 \cdot 1{,}061208$$
$$M = 31\,836{,}24$$

Portanto, Paula vai resgatar R$ 31 836,24 após 3 meses.

11. a) Como $M = C + j$ e $j = C \cdot i \cdot t$, então:

$$M = C + j$$
$$M = C + C \cdot i \cdot t$$
$$M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$
$$M = 1\,800 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot 2)$$
$$M = 1\,800 \cdot (1 + 0{,}06)$$
$$M = 1\,800 \cdot 1{,}06$$
$$M = 1\,908$$

Logo, o valor pago pelo *notebook* após os 2 meses foi R$ 1 908,00.

b) $M = C \cdot (1 + i)^t$

$$M = 1\,800 \cdot (1 + 0{,}03)^2$$
$$M = 1\,800 \cdot (1{,}03)^2$$
$$M = 1\,800 \cdot 1{,}0609$$
$$M = 1\,909{,}62$$

Se a taxa fosse de juros compostos, o valor a ser pago pelo *notebook* seria R$ 1 909,62.

12. $M = C \cdot (1 + i)^t$

$$M = 1\,200 \cdot (1 + 0{,}02)^{14}$$
$$M = 1\,200 \cdot (1{,}02)^{14}$$
$$M \simeq 1\,200 \cdot 1{,}319479$$
$$M \simeq 1\,583{,}37$$

A taxa de juros compostos dessa aplicação é 2% e o montante é de, aproximadamente, R$ 1 583,37.

13. Como a poupança tem taxa mensal e o investimento tem taxa no período de 6 meses, deve-se descobrir qual é o rendimento da poupança no período de 6 meses.

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$
$$M = C \cdot (1 + 0{,}008)^6$$
$$M = C \cdot (1{,}008)^6$$
$$M \simeq C \cdot 1{,}049$$

Logo, em 6 meses o rendimento da poupança será de 4,9% do capital investido.

Comparando o rendimento da poupança (4,9%) com o rendimento do outro investimento (4,5%), conclui-se que a aplicação mais vantajosa para Adriana é a poupança.

14. Como o montante desse empréstimo foi de R$ 800,00 (200 + 600 = 800), tem-se:

$$800 = 600(1 + i)^2$$
$$\frac{800}{600} = (1 + i)^2$$
$$\frac{8}{6} = (1 + i)^2$$
$$\frac{4}{3} = (1 + i)^2$$
$$\sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{(1 + i)^2}$$
$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = 1 + i$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1 + i$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 + i$$
$$\frac{2\sqrt{3}}{3} = 1 + i$$
$$i = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$
$$i \simeq 1{,}1547 - 1$$
$$i = 0{,}1547 = 15{,}47\%$$

Portanto, a taxa mensal de juros compostos desse empréstimo foi de aproximadamente 15,47%.

PÁGINA 73 – DIVERSIFICANDO

1. Acrescentando 10% a R$ 175,00:

$$175 + 175 \cdot \frac{10}{100} = 175 + 17{,}5 = 192{,}5$$

Logo, caso tenham optado por pagar essa comissão ao garçom, o valor total da conta foi R$ 192,50.

2. Sendo x o preço do tênis, 15% de x corresponde ao desconto de R$ 48,00. Assim:

$$0{,}15x = 48$$
$$x = \frac{48}{0{,}15}$$
$$x = 320$$

Logo, o preço do tênis era R$ 320,00.

Subtraindo o desconto, tem-se:

$$320 - 48 = 272$$

Portanto, Ana pagou R$ 272,00 pelo tênis.

3. a) $M = C \cdot (1 + i)^t$

$$M = 240\,000 \cdot (1 + 0{,}06)^1$$
$$M = 240\,000 \cdot 1{,}06$$
$$M = 254\,400$$

Portanto, após um ano, o valor dessa casa será R$ 254 400,00.

b) $M = C \cdot (1 + i)^t$

$$M = 240\,000 \cdot (1 + 0{,}06)^3$$
$$M = 240\,000 \cdot (1{,}06)^3$$
$$M = 240\,000 \cdot 1{,}191016$$
$$M = 285\,843{,}84$$

Portanto, após três anos, o valor dessa casa será R$ 285 843,84.

4. Preço de duas *pizzas*: $2 \cdot 60 = 120$

Desconto de 10% no valor das *pizzas*:

$$\frac{10}{100} \cdot 120 = 12$$

Valor das *pizzas* com desconto:

$$120 - 12 = 108$$

Desconto de 5% para retirada das *pizzas*:

$$\frac{5}{100} \cdot 108 = 5{,}40$$

Preço pago pelo cliente: $108 - 5{,}40 = 102{,}60$

Portanto, esse cliente pagou R\$ 102,60 na compra de 2 *pizzas* nessa promoção, retirando-as no local.

5. **a)** Não, pois o segundo reajuste do valor do etanol foi em cima do valor já alterado após o primeiro reajuste.

b) Sendo x o valor inicial do etanol, o valor após os dois acréscimos pode ser representado por:

$$x \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}03 = 1{,}0712x$$

Portanto, o aumento total foi de 7,12%.

6. Para obter a taxa de desconto, pode-se calcular o percentual do desconto recebido por Paola em relação ao valor total do celular:

$$\frac{57{,}60}{800} = 0{,}072$$

Portanto, Paola recebeu 7,2% de desconto na compra do celular.

7. Calculando a diferença entre o preço de venda e o preço de custo, tem-se:

$$330{,}00 - 247{,}50 = 82{,}50$$

Assim:

$$\frac{82{,}50}{330} = 0{,}25 = 25\%$$

Portanto, o desconto anunciado pelo lojista para vender o artigo a preço de custo deve ser 25%.

8. Primeiro, deve-se transformar a taxa anual em taxa mensal:

$$20\% \text{ ao ano} = 0{,}20 \text{ ao ano} = \frac{0{,}20}{12} \text{ ao mês}$$

Em seguida, pode-se determinar o capital:

$$j = C \cdot i \cdot t$$

$$480 = C \cdot \frac{0{,}20}{12} \cdot 3$$

$$480 = C \cdot \frac{0{,}20}{4}$$

$$480 = C \cdot 0{,}05$$

$$C = \frac{480}{0{,}05}$$

$$C = 9\,600$$

Portanto, Carlos aplicou R\$ 9 600,00.

9. **a)** $\frac{7\,020 - 5\,400}{5\,400} = 0{,}3 = 30\%$

Logo, o percentual de aumento foi de 30%.

b) $\frac{4\,212 - 7\,020}{7\,020} = -0{,}4 = -40\%$

Portanto, o percentual de queda foi de 40%.

c) $\frac{7\,425 - 4\,500}{4\,500} = 0{,}65 = 65\%$

Logo, o percentual de aumento na produção foi de 65%.

10. Sendo V a quantia inicial aplicada, tem-se:

$$(V - 0{,}3V) + 0{,}2 \cdot 0{,}3V = 3\,800$$

$$0{,}7V + 0{,}06V = 3\,800$$

$$0{,}76V = 3\,800$$

$$V = \frac{3\,800}{0{,}76}$$

$$V = 5\,000$$

A quantia inicial que Eliza aplicou foi de R\$ 5 000,00.

11. Resposta pessoal.

12. **a)** Calculando a diferença entre o salário mínimo em janeiro de 2022 e em janeiro de 2021, tem-se:

$$1\,212 - 1\,100 = 112$$

$$\frac{112}{1\,100} \simeq 0{,}1018 = 10{,}18\%$$

Portanto, o aumento percentual do salário mínimo de 2021 para 2022 foi de, aproximadamente, 10,18%.

b) $1\,212 \cdot (1 + 0{,}04)^4 =$

$= 1\,212 \cdot (1{,}04)^4 =$

$= 1\,212 \cdot 1{,}16985856 \simeq 1\,417{,}87$

Portanto, o valor do salário mínimo em 2026 seria R\$ 1 417,87.

PÁGINA 74 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Respostas pessoais.
2. Respostas pessoais.
3. Resposta pessoal.

PÁGINA 76 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Alternativa **c**.

O fluxo de água por ralo é dado por:

$$\frac{900}{6} = 150$$

Logo, em 6 horas, cada ralo elimina um volume de 150 m^3 de água.

Assim, em 1 hora, cada ralo elimina 25 m^3 ($150 : 6 = 25$) de água. Como o novo reservatório deve ser esvaziado em 4 horas, cada ralo eliminará 100 m^3 ($25 \cdot 4 = 100$) de água nesse período.

Como o novo reservatório terá 500 m^3 de capacidade, serão necessários 5 ralos para escoar a água em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio.

2. Alternativa **c**.

Sendo x a velocidade necessária para completar o percurso em 12 minutos, tem-se:

Tempo (em minuto)	Velocidade (em km/h)
15	80
12	x

Como as grandezas tempo e velocidade são inversamente proporcionais, tem-se:

$$\frac{12}{15} = \frac{80}{x}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{80}{x}$$

$$x = \frac{5 \cdot 80}{4}$$

$$x = 100$$

Portanto, a previsão teria se realizado se a velocidade fosse de 100 km/h.

3. O valor total investido foi de R\$ 400 000,00, pois $190\,000 + 210\,000 = 400\,000$. Como os sócios vão dividir o lucro proporcionalmente ao investimento de cada um deles, tem-se:

- 1º sócio: $\frac{190\,000}{400\,000} = 0{,}475 = 47{,}5\%$
- 2º sócio: $\frac{210\,000}{400\,000} = 0{,}525 = 52{,}5\%$

Portanto, o primeiro sócio deve receber R\$ 9 500,00 ($0{,}475 \cdot 20\,000 = 9\,500$), e o segundo, R\$ 10 500,00 ($20\,000 - 9\,500 = 10\,500$).

4. Alternativa **e**.

Sendo M_1 o montante do primeiro ano, tem-se:

$$M_1 = C \cdot (1 + i)^t$$

$$M_1 = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}2)^1$$

$$M_1 = 10\,000 \cdot (1{,}2)$$

$$M_1 = 12\,000$$

Como o valor pago na primeira parcela foi de R\$ 4 000,00, então o novo capital passa a ser R\$ 8 000,00 ($12\,000 - 4\,000 = 8\,000$).

Sendo M_2 o montante do segundo ano, tem-se:

$$M_2 = C \cdot (1 + i)^t$$

$$M_2 = 8\,000 \cdot (1 + 0{,}2)^1$$

$$M_2 = 8\,000 \cdot (1 + 0{,}2)$$

$$M_2 = 8\,000 \cdot 1{,}2$$

$$M_2 = 9\,600$$

Portanto, o valor da segunda parcela foi de R\$ 9 600,00.

5. Alternativa **d**.

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$M = 6\,000 \cdot (1 + 0{,}02)^4$$

$$M = 6\,000 \cdot (1{,}02)^4$$

$$M = 6\,000 \cdot 1{,}0824$$

$$M = 6\,494{,}4$$

Como $j = M - C$, então:

$$j = 6\,494{,}40 - 6\,000$$

$$j = 494{,}40$$

Portanto, o valor do juro resultante dessa aplicação é R\$ 494,40.

6. **a)** Resposta possível:

A medida da densidade de um material é 7 g/cm^3. Isso significa que um cubo com medida de volume igual a 1 cm^3 feito com esse material terá 7 g de medida de massa.

b) Usando a afirmação do item **a**, tem-se: A medida da densidade de um material é 8 g/cm^3. Isso significa que um cubo com medida de volume igual a 1 cm^3 feito com esse material terá 8 g de medida de massa.

c) Usando a afirmação do item **a**, tem-se: A medida da densidade de um material é 9 g/cm^3. Isso significa que um cubo com medida de volume igual a 1 cm^3 feito com esse material terá 9 g de medida de massa.

d) Sim, pois as grandezas densidade e massa são diretamente proporcionais.

7. a) Medida da velocidade média de Aílton:

$$\frac{1\,800}{10} = 180$$

Portanto, a velocidade média de Aílton mede 180 m/min.

b) Medida da velocidade média de Patrícia:

$$\frac{1\,800}{12} = 150$$

Logo, a velocidade média de Patrícia mede 150 m/min.

c) Medida da velocidade média de Usain Bolt:

$$\frac{100}{9{,}58} \simeq 10{,}44$$

Logo, a velocidade média de Usain Bolt mede, aproximadamente, 10,44 m/s.

Para comparar as medidas das velocidades de Aílton e de Patrícia com a de Usain Bolt, deve-se transformar essas velocidades em metros por segundo.

- Medida da velocidade de Aílton:
  $180 \text{ m/min} = \dfrac{180 \text{ m}}{1 \text{ min}} = \dfrac{180 \text{ m}}{60 \text{ s}} =$
  $= 3 \text{ m/s}$
- Medida da velocidade de Patrícia:
  $150 \text{ m/min} = \dfrac{150 \text{ m}}{1 \text{ min}} = \dfrac{150 \text{ m}}{60 \text{ s}} =$
  $= 2{,}5 \text{ m/s}$

Portanto, enquanto a medida da velocidade de Usain Bolt mede, aproximadamente, 10,44 m/s, a de Aílton mede 3 m/s e a de Patrícia mede 2,5 m/s. Assim, a medida da velocidade de Usain Bolt é maior que a de Aílton, que é maior que a de Patrícia.

8. Alternativa **d**.

Analisando cada uma das opções, tem-se:

- Opção 1:

  Pagamento à vista de R$ 55 000,00. Nesse caso, não há sobra.

- Opção 2:

  Entrada de R$ 30 000,00. O valor de R$ 25 000,00 restante é aplicado por 6 meses, resultando em R$ 27 500,00 ($1{,}10 \cdot 25\,000 = 27\,500$).

  Ao pagar, após 6 meses, a segunda prestação de R$ 26 000,00, restará R$ 1 500,00 ($27\,500 - 26\,000 = 1\,500$).

  Aplicando R$ 1 500,00 por mais 6 meses, Arthur ficará com o valor de R$ 1 650,00 ($1{,}10 \cdot 1\,500 = 1\,650$).

- Opção 3:

  Entrada de R$ 20 000,00. O valor de R$ 35 000,00 restante é aplicado por 6 meses, resultando em R$ 38 500,00 ($1{,}10 \cdot 35\,000 = 38\,500$).

  Ao pagar a segunda prestação de R$ 20 000,00 após 6 meses, restará R$ 18 500,00 ($38\,500 - 20\,000 = 18\,500$).

  Aplicando o valor de R$ 18 500,00 por mais 6 meses, obtém-se um montante de R$ 20 350,00 ($1{,}10 \cdot 18\,500 = 20\,350$).

  Ao pagar a terceira prestação de R$ 18 000,00, 12 meses após a data da compra, Arthur ficará com o valor de R$ 2 350,00 ($20\,350 - 18\,000 = 2\,350$).

- Opção 4:

  Entrada de R$ 15 000,00. O valor de R$ 40 000,00 restante é aplicado por 1 ano, resultando em R$ 48 400,00 $[(1{,}10)^2 \cdot 40\,000 = 48\,400]$.

  Ao pagar a segunda prestação de R$ 39 000,00, 1 ano após a data da compra, Arthur ficará com o valor de R$ 9 400,00 ($48\,400 - 39\,000 = 9\,400$).

- Opção 5:

  O valor total de R$ 55 000,00 é aplicado por 1 ano, resultando em R$ 66 550,00 $[(1{,}10)^2 \cdot 55\,000 = 66\,550]$.

  Ao pagar o valor de R$ 60 000,00, 1 ano após a data da compra, Arthur terá R$ 6 550,00 ($66\,550 - 60\,000 = 6\,550$).

Analisando as cinco opções, ao final de um ano, Arthur ficará com a maior quantia em dinheiro se escolher a opção 4.

9. Alternativa **e**.

O capital investido por cada sócio foi:

- Sócio majoritário: R$ 40 000,00
- Sócio minoritário: R$ 20 000,00 (metade de R$ 40 000,00)
- Terceiro sócio: R$ 30 000,00 $\left(\dfrac{3}{4} \cdot 40\,000 = 3 \cdot 10\,000 = 30\,000\right)$

O investimento total foi de R$ 90 000,00 ($40\,000 + 20\,000 + 30\,000 = 90\,000$)

Logo, o lucro de R$ 270 000,00 corresponde ao triplo do valor investido.

Como o sócio majoritário investiu o capital de R$ 40 000,00, então ele deve receber de lucro R$ 120 000,00 ($3 \cdot 40\,000 = 120\,000$).

10. Alternativa **b**.

Inicialmente, deve-se transformar as medidas que foram dadas em metros, escrevendo todas em centímetros. Assim:

- medida de comprimento: 84 m equivalem a 8 400 cm;
- medida da envergadura: 88 m equivalem a 8 800 cm.

Como a maquete está na escala 2 : 1 000, pode-se determinar as medidas da maquete fazendo uma regra de três.

- Sendo x a medida de comprimento da maquete desse avião, tem-se:

  2 cm ——— 1 000 cm

  x cm ——— 8 400 cm

  Como essas grandezas são diretamente proporcionais, tem-se:

  $$1\,000x = 2 \cdot 8\,400$$
  $$x = \frac{16\,800}{1\,000}$$
  $$x = 16{,}8$$

  Logo, na maquete, a medida de comprimento do avião será 16,8 cm.

- Sendo y a medida da envergadura da maquete desse avião, tem-se:

  2 cm ——— 1 000 cm

  y cm ——— 8 800 cm

  Como essas grandezas são diretamente proporcionais, tem-se:

  $$1\,000y = 2 \cdot 8\,800$$
  $$y = \frac{17\,600}{1\,000}$$
  $$y = 17{,}6$$

  Portanto, a envergadura do avião na maquete medirá 17,6 cm.

11. Alternativa **c**.

Sabe-se que 1 sistema hídrico leva, em média, 1,5 h para abastecer completamente um tanque. Como cada tanque tem 2 sistemas hídricos, eles serão abastecidos na metade desse tempo.

$$1{,}5 : 2 = 0{,}75$$

Logo, o tempo para abastecer completamente os dois tanques é 0,75 hora.

12. a) Sendo x o preço do pacote de viagem, tem-se:

$x \cdot (1 - 0{,}10) \cdot (1 - 0{,}03) =$

$= x \cdot (0{,}90 \cdot 0{,}97) = x \cdot 0{,}873$

Total do desconto:

$$1 - 0{,}873 = 0{,}127 = 12{,}7\%$$

Portanto, essa pessoa receberia 12,7% de desconto ao comprar um pacote de viagem para a chapada Diamantina pagando no boleto.

b) O valor do desconto, por pessoa, é:

$$\frac{12{,}7}{100} \cdot 2\,500 = 317{,}50$$

O valor do desconto para a família é:

$$4 \cdot 317{,}50 = 1\,270$$

Portanto, essa família faria uma economia de R$ 1 270,00.

UNIDADE 3 – RETAS E ÂNGULOS, SEMELHANÇA E TRIÂNGULO RETÂNGULO

CAPÍTULO 1 – RETAS E ÂNGULOS

PÁGINA 85 – ATIVIDADES

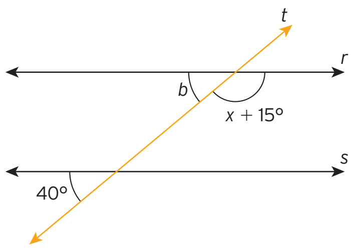
1\. a) $\hat{a}$ e $\hat{d}$, pois eles estão em lados opostos da transversal (alternos) e não estão entre as paralelas (externos).

b) $\hat{b}$ e $\hat{c}$, pois eles estão do mesmo lado da transversal (colaterais) e estão entre as paralelas (internos).

2\. a) O ângulo $\hat{x}$ é correspondente ao ângulo de 70°, então $x = 70°$.

b) O ângulo $\hat{z}$ é correspondente ao ângulo de 105°, então $z = 105°$.

3\. a)



Ilustrações: ID/BR

O ângulo $\hat{b}$ e o ângulo de 40° são correspondentes e determinados por duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal e, portanto, são congruentes. Assim, o ângulo $\hat{b}$ mede 40°.

Já o ângulo $\hat{b}$ e o ângulo $(x + 15°)$ são suplementares, ou seja:

$$b + x + 15° = 180°$$
$$40° + x + 15° = 180°$$
$$55° + x = 180°$$
$$x = 180° - 55°$$
$$x = 125°$$

b) Os ângulos $\left(\frac{7x}{4} + 70°\right)$ e $(3x + 20°)$ são alternos externos e $r // s$. Portanto, esses ângulos são congruentes. Então:

$$\frac{7x}{4} + 70° = 3x + 20°$$
$$\frac{7x}{4} - 3x = 20° - 70°$$
$$\frac{7x}{4} - \frac{12x}{4} = -50°$$
$$-\frac{5x}{4} = -50°$$
$$\frac{5x}{4} = 50°$$
$$5x = 50° \cdot 4$$
$$5x = 200°$$
$$x = \frac{200°}{5}$$
$$x = 40°$$

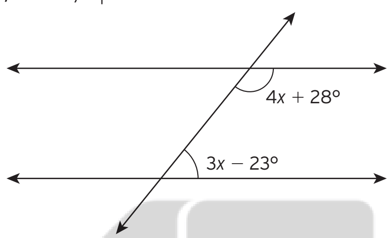
c) Os ângulos de medidas $(2x + 30°)$ e $(3x - 20°)$ são alternos internos e $r // s$. Portanto, esses ângulos são congruentes. Então:

$$2x + 30° = 3x - 20°$$
$$2x - 3x = -20° - 30°$$
$$-x = -50°$$
$$x = 50°$$

d) Os ângulos de medidas $(2y + 15°)$ e $(4y - 45°)$ são correspondentes e $r // s$. Portanto, esses ângulos são congruentes. Logo:

$$2y + 15° = 4y - 45°$$
$$2y - 4y = -45° - 15°$$
$$-2y = -60°$$
$$2y = 60°$$
$$y = \frac{60°}{2}$$
$$y = 30°$$

4\. a) Esboço possível:



b) Esses ângulos são suplementares.

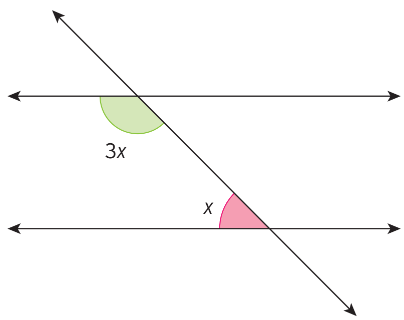
c) Primeiro, obtém-se o valor de x.

$$(4x + 28°) + (3x - 23°) = 180°$$
$$4x + 28° + 3x - 23° = 180°$$
$$7x + 5° = 180°$$
$$7x = 180° - 5°$$
$$7x = 175°$$
$$x = \frac{175°}{7}$$
$$x = 25°$$

Agora, determinam-se as medidas dos ângulos.

- $4x + 28° = 4 \cdot 25° + 28° = 100° + 28° = 128°$
- $3x - 23° = 3 \cdot 25° - 23° = 75° - 23° = 52°$

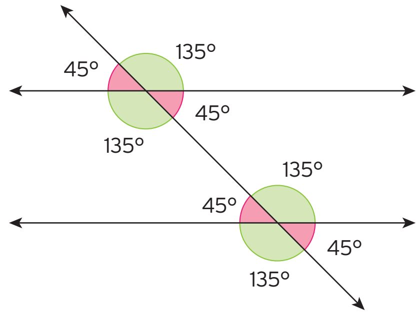
5\. Como os dois ângulos são colaterais internos e a medida de um deles é o triplo da medida do outro, um esboço possível é:



Para determinar as medidas dos oito ângulos formados entre as retas paralelas e a reta transversal, pode-se considerar que, em cada intersecção da reta transversal com uma reta paralela, teremos quatro ângulos: dois de medidas $3x$ e dois de medidas x, em grau.
Assim, tem-se:

$$3x + x + 3x + x = 360°$$
$$8x = 360°$$
$$x = \frac{360°}{8}$$
$$x = 45°$$

Assim, as medidas dos oito ângulos são:



PÁGINA 86 – ATIVIDADES

6\. a) $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{BC}{DE} = \frac{4}{2} = 2$

c) $\frac{BC}{CE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{AC}{DE} = \frac{7}{2}$

e) $\frac{AE}{AE} = \frac{15}{15} = 1$

f) $\frac{AD}{AC} = \frac{13}{7}$

7\. Uma proporção é uma igualdade entre razões. Observando a atividade anterior, verifica-se que as razões obtidas nos itens **a** e **c** são iguais. Assim, pode-se dizer que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CE}$, nessa ordem, são segmentos proporcionais, pois, ao tomar suas medidas, tem-se $\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{CE}$.

8\. Como os segmentos $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ e $\overline{IJ}$, nessa ordem, formam uma proporção, então:

$$\frac{CD}{EF} = \frac{GH}{IJ}$$
$$\frac{24}{32} = \frac{36}{IJ}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{36}{IJ}$$
$$3 \cdot IJ = 36 \cdot 4$$
$$IJ = \frac{36 \cdot 4}{3}$$
$$IJ = 12 \cdot 4$$
$$IJ = 48$$

Logo, a medida do segmento $\overline{IJ}$ é 48 cm.

9\. Como os segmentos x, y, z e w, nessa ordem, formam uma proporção, tem-se:

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$$

Como $x = 12$ e $y = 15$, então:

$$\frac{12}{15} = \frac{z}{w}$$
$$\frac{4}{5} = \frac{z}{w}$$
$$4w = 5z$$
$$w = \frac{5z}{4}$$

De acordo com o enunciado, sabe-se que $z + w = 72$. Usando essas duas informações, pode-se escrever um sistema de equações:

$$\begin{cases} w = \dfrac{5z}{4} & \text{(I)} \\ z + w = 72 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isola-se w na equação (II), então:

$$z + w = 72$$
$$w = 72 - z$$

Substitui-se o valor de w na equação (I):

$$w = \frac{5z}{4}$$
$$72 - z = \frac{5z}{4}$$
$$(72 - z) \cdot 4 = 5z$$
$$288 - 4z = 5z$$
$$288 = 5z + 4z$$
$$288 = 9z$$
$$\frac{288}{9} = z$$
$$z = 32$$

Agora, substitui-se o valor de z em uma das equações do sistema para obter o valor de w. Considerando a equação (II), tem-se:

$$z + w = 72$$
$$32 + w = 72$$
$$w = 72 - 32$$
$$w = 40$$

Portanto, z mede 32 cm, e w mede 40 cm.

PÁGINA 88 – DESCUBRA MAIS

PARA CONCLUIR

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.

PÁGINA 94 – ATIVIDADES

10. a) Usando o teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{x}{6} = \frac{2{,}8}{7}$$
$$x \cdot 7 = 2{,}8 \cdot 6$$
$$x = \frac{2{,}8 \cdot 6}{7}$$
$$x = 0{,}4 \cdot 6$$
$$x = 2{,}4$$

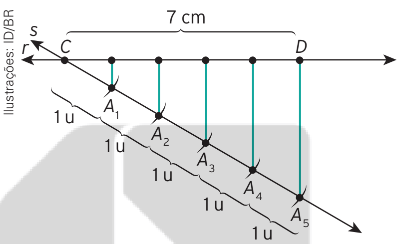
b) Usando o teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{x}{x+3} = \frac{2}{6}$$
$$\frac{x}{x+3} = \frac{1}{3}$$
$$3 \cdot x = 1 \cdot (x + 3)$$
$$3x = x + 3$$
$$3x - x = 3$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$
$$x = 1{,}5$$

11. Para dividir um segmento $\overline{CD}$ em 5 partes congruentes, deve-se seguir estes passos:

- **1º passo:** Com a régua, traça-se um segmento $\overline{CD}$ com 7 cm.
- **2º passo:** Traça-se uma reta s, que passe por um de seus extremos (por exemplo C), formando um ângulo agudo com $\overline{CD}$. Em seguida, com o compasso e mantendo a mesma distância entre a ponta-seca e a grafite, marcam-se 5 pontos na reta s a partir do ponto C: A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5.
- **3º passo:** Traça-se o segmento $\overline{A_5D}$ e, com o esquadro e a régua, traçam-se os segmentos paralelos a $\overline{A_5D}$ que passam pelos pontos A_4, A_3, A_2 e A_1.

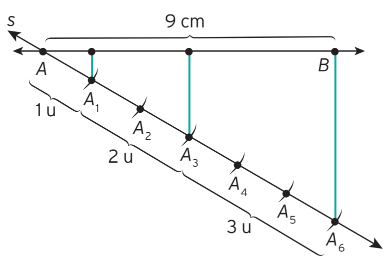
Ilustrações: ID/BR



Assim, o segmento $\overline{CD}$ ficou dividido em 5 partes iguais, cada uma medindo 1,4 cm.

12. Para dividir o segmento $\overline{AB}$ em três partes proporcionais a 3, 2 e 1, respectivamente, deve-se seguir estes passos:

- **1º passo:** Com a régua, traça-se o segmento de reta $\overline{AB}$ medindo 9 cm.
- **2º passo:** Traça-se uma reta s, que passe por um de seus extremos (por exemplo A), formando um ângulo agudo com o segmento $\overline{AB}$. Em seguida, com o compasso e mantendo a mesma distância entre a ponta-seca e a grafite, marcam-se na reta s, a partir do extremo A, 6 pontos ($1 + 2 + 3 = 6$): A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6.
- **3º passo:** Traça-se o segmento $\overline{A_6B}$ e, com o esquadro e com a régua, traçam-se os segmentos paralelos a $\overline{A_6B}$ que passam por A_3 e A_1.



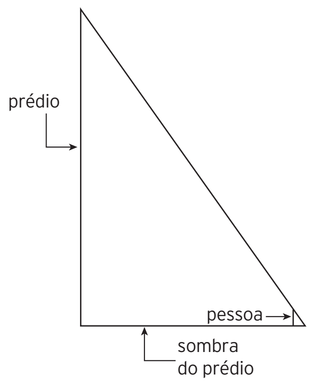
Assim, o segmento $\overline{AB}$ ficou dividido em partes proporcionais a 3, 2 e 1, medindo, respectivamente 4,5 cm, 3,0 cm e 1,5 cm.

13. Usando o teorema de Tales tem-se:

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{BC}$$
$$\frac{4}{6} = \frac{5}{BC}$$
$$4 \cdot BC = 5 \cdot 6$$
$$4 \cdot BC = 30$$
$$BC = \frac{30}{4}$$
$$BC = \frac{15}{2}$$
$$BC = 7{,}5$$

Portanto, o segmento $\overline{BC}$ mede 7,5 m.

14. Esboço da situação:



Sendo x a medida da distância que a pessoa pode se afastar da base do prédio, pode-se aplicar o teorema de Tales da seguinte maneira:

$$\frac{24}{34} = \frac{24 - x}{1{,}70}$$
$$24 \cdot 1{,}70 = 34 \cdot (24 - x)$$
$$40{,}8 = 816 - 34x$$
$$34x = 816 - 40{,}8$$
$$34x = 775{,}2$$
$$x = \frac{775{,}2}{34}$$
$$x = 22{,}8$$

Portanto, uma pessoa que mede 1,70 m de altura pode se afastar 22,8 m da base do prédio e ainda continuar totalmente na sombra.

PÁGINA 96 – ATIVIDADES

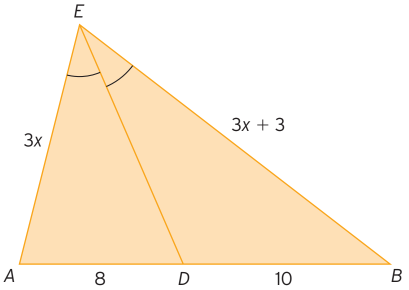
15. Considerando que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes, pode-se escrever:

$$\frac{AB}{BG} = \frac{AC}{CG}$$
$$\frac{64}{16} = \frac{AC}{24}$$
$$4 = \frac{AC}{24}$$
$$AC = 4 \cdot 24$$
$$AC = 96$$

Portanto, o lado $\overline{AC}$ mede 96 cm.

16. Esboço possível:

Ilustrações: ID/BR



a) Considerando que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes, pode-se escrever:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{EB}{DB}$$

$$\frac{3x}{8} = \frac{3x+3}{10}$$

$$3x \cdot 10 = 8 \cdot (3x + 3)$$

$$30x = 24x + 24$$

$$30x - 24x = 24$$

$$6x = 24$$

$$x = \frac{24}{6}$$

$$x = 4$$

b) As medidas dos lados do triângulo *ABE* são dadas por:

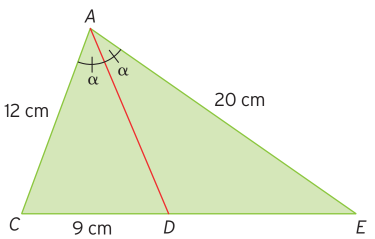
AB: $8 + 10 = 18$

AE: $3x = 3 \cdot 4 = 12$

BE: $3x + 3 = 3 \cdot 4 + 3 = 12 + 3 = 15$

Logo, os lados $\overline{AB}$, $\overline{AE}$ e $\overline{BE}$ medem, respectivamente, 18 cm, 12 cm e 15 cm.

17. Esboço possível:



Considerando que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes, pode-se escrever:

$$\frac{AC}{DC} = \frac{AE}{ED}$$

$$\frac{12}{9} = \frac{20}{ED}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{20}{ED}$$

$$4 \cdot ED = 3 \cdot 20$$

$$4 \cdot ED = 60$$

$$ED = \frac{60}{4}$$

$$ED = 15$$

Portanto, o segmento $\overline{ED}$ mede 15 cm.

18. Considerando que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes, pode-se escrever:

$$\frac{EF}{EG} = \frac{FH}{GH}$$

$$\frac{9}{6} = \frac{6x}{2x+10}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{6x}{2x+10}$$

$$3 \cdot (2x + 10) = 6x \cdot 2$$

$$6x + 30 = 12x$$

$$30 = 12x - 6x$$

$$30 = 6x$$

$$x = \frac{30}{6}$$

$$x = 5$$

19. Considerando que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes, pode-se escrever:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

$$\frac{9}{5{,}5 - CD} = \frac{7{,}5}{CD}$$

$$9 \cdot CD = 7{,}5 \cdot (5{,}5 - CD)$$

$$9 \cdot CD = 41{,}25 - 7{,}5 \cdot CD$$

$$9 \cdot CD + 7{,}5 \cdot CD = 41{,}25$$

$$16{,}5 \cdot CD = 41{,}25$$

$$CD = \frac{41{,}25}{16{,}5}$$

$$CD = 2{,}5$$

Portanto, a medida de $\overline{CD}$ é 2,5 cm.

20. a) Para calcular a medida do perímetro do triângulo *ABC*, primeiro encontra-se a medida do lado $\overline{BC}$.

Considerando que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes, pode-se escrever:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD}$$

$$\frac{BC}{15} = \frac{24}{12}$$

$$\frac{BC}{15} = 2$$

$$BC = 2 \cdot 15$$

$$BC = 30$$

Agora, calcula-se a medida do perímetro do triângulo *ABC*:

$$30 + 15 + 12 + 24 = 81$$

Portanto, a medida do perímetro do triângulo *ABC* é 81 cm.

b) Para calcular a medida do perímetro do triângulo *ABC*, primeiro encontra-se o valor de *x* e as medidas dos lados $\overline{BA}$ e $\overline{AC}$.

Considerando que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes, pode-se escrever:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

$$\frac{2x+16}{20} = \frac{4x}{24}$$

$$\frac{2(x+8)}{20} = \frac{4x}{24}$$

$$\frac{x+8}{10} = \frac{x}{6}$$

$$(x + 8) \cdot 6 = 10 \cdot x$$

$$6x + 48 = 10x$$

$$48 = 10x - 6x$$

$$48 = 4x$$

$$x = \frac{48}{4}$$

$$x = 12$$

Agora, obtêm-se as medidas dos lados $\overline{BA}$ e $\overline{AC}$:

$\overline{BA}$: $2x + 16 = 2 \cdot 12 + 16 = 24 + 16 = 40$

$\overline{AC}$: $4x = 4 \cdot 12 = 48$

Logo, a medida do perímetro do triângulo *ABC* é dada por:

$$20 + 24 + 48 + 40 = 132$$

Portanto, a medida do perímetro do triângulo *ABC* é 132 cm.

21. Para resolver os itens a seguir, utiliza-se a seguinte informação: a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

a) $\frac{5}{x} = \frac{10}{y}$

$5y = 10x$

Agora, pode-se montar um sistema de equações.

$$\begin{cases} 5y = 10x & \text{(I)} \\ x + y = 12 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando *x* em (II), tem-se:

$$x + y = 12$$

$$x = 12 - y$$

Substituindo *x* em (I), tem-se:

$$5y = 10x$$

$$5y = 10 \cdot (12 - y)$$

$$5y = 120 - 10y$$

$$5y + 10y = 120$$

$$15y = 120$$

$$y = \frac{120}{15}$$

$$y = 8$$

Substituindo *y* em (II), tem-se:

$$x + y = 12$$

$$x + 8 = 12$$

$$x = 12 - 8$$

$$x = 4$$

Portanto, $x = 4$ e $y = 8$.

b) $\frac{6}{5} = \frac{12}{y}$

$6y = 12 \cdot 5$

$6y = 60$

$y = \frac{60}{6}$

$y = 10$

Agora, obtém-se o valor de x.

$$x = 5 + y$$
$$x = 5 + 10$$
$$x = 15$$

Portanto, $x = 15$ e $y = 10$.

c) $\frac{x}{6} = \frac{y}{7}$

$7x = 6y$

Agora, pode-se montar um sistema de equações.

$$\begin{cases} 7x = 6y & \text{(I)} \\ 2x + 2y = 28 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando x em (II), tem-se:

$$2x + 2y = 28$$
$$x + y = 14$$
$$x = 14 - y$$

Substituindo x em (I), tem-se:

$$7x = 6y$$
$$7 \cdot (14 - y) = 6y$$
$$98 - 7y = 6y$$
$$98 = 6y + 7y$$
$$98 = 13y$$
$$y = \frac{98}{13}$$

Agora, obtém-se o valor de x.

$$x = 14 - y$$
$$x = 14 - \frac{98}{13}$$
$$x = \frac{182}{13} - \frac{98}{13}$$
$$x = \frac{84}{13}$$

Logo, $x = \frac{84}{13}$ e $y = \frac{98}{13}$.

PÁGINA 97 – DIVERSIFICANDO

1. a) Como P é ponto médio de $\overline{CE}$, tem-se:

$$CP = PE = \frac{100}{2} = 50$$

Como N é ponto médio de $\overline{PE}$, tem-se:

$$PN = NE = \frac{50}{2} = 25$$

Portanto, o segmento $\overline{PN}$ mede 25 cm.

b) $\frac{PN}{CN} = \frac{PN}{CP + PN} = \frac{25}{50 + 25} = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{PN}{CE} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

d) $\frac{PN}{CP} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$

2. a) A razão entre as medidas dos lados do retângulo amarelo é $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

A razão entre as medidas dos lados do retângulo azul é $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

b) A medida do perímetro do retângulo amarelo é 16 m $(2 + 6 + 2 + 6 = 16)$.

A medida do perímetro do retângulo azul é 96 m $(12 + 36 + 12 + 36 = 96)$.

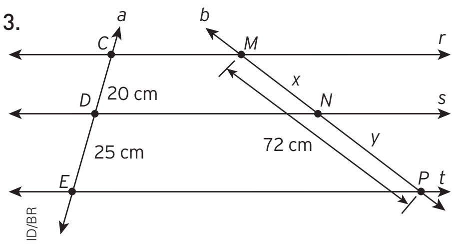
c) A razão entre a medida do perímetro do retângulo amarelo e a medida do perímetro do retângulo azul é $\frac{16}{96} = \frac{1}{6}$.

d) A medida da área do retângulo amarelo é 12 m^2 $(2 \cdot 6 = 12)$.

A medida da área do retângulo azul é 432 m^2 $(12 \cdot 36 = 432)$.

e) A razão entre a medida da área do retângulo amarelo e a medida da área do retângulo azul é $\frac{12}{432} = \frac{1}{36}$.

3.



Considerando $x = MN$ e $y = NP$, pelo teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{20}{x} = \frac{25}{y} = \frac{20 + 25}{x + y}$$

$$\frac{20}{x} = \frac{25}{y} = \frac{45}{72}$$

Primeiro, determina-se o valor de x:

$$\frac{20}{x} = \frac{45}{72}$$
$$45x = 20 \cdot 72$$
$$x = \frac{20 \cdot 72}{45}$$
$$x = 32$$

Agora, determina-se o valor de y:

$$\frac{25}{y} = \frac{45}{72}$$
$$45y = 25 \cdot 72$$
$$y = \frac{25 \cdot 72}{45}$$
$$y = 40$$

Portanto, $MN = 32$ cm e $NP = 40$ cm.

4. Pelo teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{5}{15} = \frac{x}{20}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{x}{20}$$
$$3 \cdot x = 1 \cdot 20$$
$$3x = 20$$
$$x = \frac{20}{3}$$

5. Considerando que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes, tem-se:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$$
$$\frac{40}{20} = \frac{48}{y}$$
$$2 = \frac{48}{y}$$
$$2y = 48$$
$$y = \frac{48}{2}$$
$$y = 24$$

6. a) Considerando que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes, tem-se:

$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{DF}$$
$$\frac{18}{9} = \frac{CF}{6}$$
$$2 = \frac{CF}{6}$$
$$CF = 2 \cdot 6$$
$$CF = 12$$

Portanto, o lado $\overline{CF}$ mede 12 cm.

b) A medida do perímetro do triângulo CEF é 45 cm $(18 + 9 + 6 + 12 = 45)$.

7. Usando o teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{6x}{4x - 3} = \frac{8}{4}$$
$$\frac{6x}{4x - 3} = 2$$
$$6x = 2 \cdot (4x - 3)$$
$$6x = 8x - 6$$
$$6 = 8x - 6x$$
$$6 = 2x$$
$$x = \frac{6}{2}$$
$$x = 3$$

8. a) Considerando que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes, tem-se:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$$
$$\frac{7}{4} = \frac{10}{x}$$
$$7x = 10 \cdot 4$$
$$7x = 40$$
$$x = \frac{40}{7}$$

b) Considerando que a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes, tem-se:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$$
$$\frac{x}{5} = \frac{14}{5}$$
$$x = 14$$

CAPÍTULO 2 – SEMELHANÇA

PÁGINA 101 – ATIVIDADES

1. a) Como as fotografias são semelhantes, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais. Assim, sendo x a medida da altura da fotografia 2, tem-se:

$$\frac{6}{4} = \frac{3{,}6}{x}$$
$$6 \cdot x = 4 \cdot 3{,}6$$
$$6x = 14{,}4$$
$$x = \frac{14{,}4}{6}$$
$$x = 2{,}4$$

Portanto, a medida da altura da fotografia 2 é 2,4 cm.

b) Como as fotografias são semelhantes, a distância entre quaisquer pontos correspondentes nas duas imagens será proporcional. Ou seja, sendo p a medida do pescoço da ema na fotografia 1, tem-se:

$$\frac{p}{1} = \frac{6}{4}$$
$$p = \frac{6}{4}$$
$$p = 1{,}5$$

Portanto, o pescoço da ema na fotografia 1 mede 1,5 cm.

2. A proporção da imagem não será preservada, pois $\frac{24}{15} = \frac{8}{5} \neq \frac{9}{6}$.

3. a) Sim, duas esferas são sempre semelhantes, pois a razão entre as medidas dos raios correspondentes é sempre constante.

b) Sim, dois quadrados são sempre semelhantes, pois a razão entre as medidas dos lados correspondentes é proporcional e os ângulos correspondentes são sempre congruentes, isto é, medem 90°.

c) Não. Apesar de os ângulos correspondentes serem sempre congruentes, a razão entre as medidas dos lados correspondentes pode não ser proporcional. Por exemplo, no caso de dois retângulos, um retângulo pode ter os quatro lados congruentes enquanto o outro não. Ou, um dos retângulos pode ter dois lados que sejam o dobro dos outros dois lados e o outro retângulo pode ter dois lados que sejam o triplo dos outros dois lados.

4. Resposta possível: um quadrado e um losango.

Figura 1

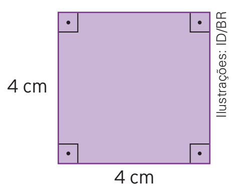
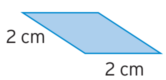


Figura 2



5. Resposta possível: um quadrado e um retângulo.

Figura 1

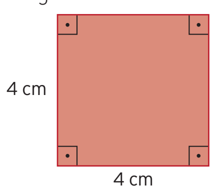
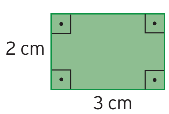


Figura 2



6. a) Não, porque, embora os lados de um losango sejam congruentes, nem sempre os ângulos de dois losangos são congruentes.

b) Não, pois mesmo que os ângulos correspondentes desses polígonos sejam congruentes, os lados correspondentes desses polígonos podem não ser proporcionais. Um exemplo seria comparar um retângulo com um quadrado.

c) Sim, pois se os polígonos são regulares com a mesma quantidade de lados, seus ângulos internos são congruentes, independentemente da medida de seus lados, e, como são regulares, os lados têm a mesma medida. Portanto, dois polígonos regulares com o mesmo número de lados são proporcionais.

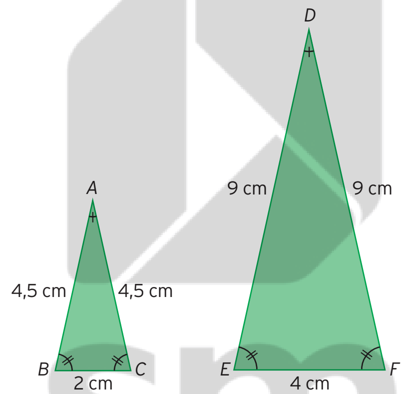
d) Não é possível afirmar, pois, embora os lados correspondentes possam ser considerados proporcionais, não podemos afirmar que os ângulos correspondentes são congruentes.

7. Não. Polígonos regulares são semelhantes se tiverem a mesma quantidade de lados.

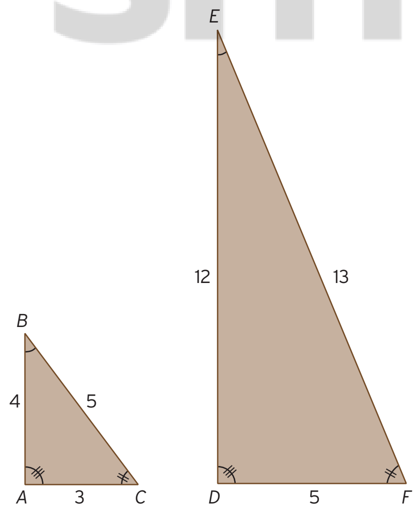
PÁGINA 104 – ATIVIDADES

8. Respostas possíveis:

- Par de triângulos semelhantes:



- Par de triângulos **não** semelhantes:



9. Para determinar a medida do perímetro dos triângulos *ABC* e *AMN*, é preciso determinar as medidas *x* e *y*. Sabe-se que toda reta paralela a um lado de um triângulo que cruza os outros dois lados (ou seus prolongamentos) em dois pontos distintos determina um triângulo semelhante a ele. Assim, os triângulos *AMN* e *ABC* são semelhantes. Portanto para descobrir a medida x, pode-se fazer:

$$\frac{4}{4 + x} = \frac{6}{6 + x + 3}$$
$$4 \cdot (6 + x + 3) = 6 \cdot (4 + x)$$
$$24 + 4x + 12 = 24 + 6x$$
$$36 + 4x = 24 + 6x$$
$$4x - 6x = 24 - 36$$
$$-2x = -12$$
$$2x = 12$$
$$x = \frac{12}{2}$$
$$x = 6$$

Agora, determina-se a medida *y*:

$$\frac{4}{4 + x} = \frac{y}{7{,}5}$$
$$\frac{4}{4 + 6} = \frac{y}{7{,}5}$$
$$\frac{4}{10} = \frac{y}{7{,}5}$$
$$10y = 4 \cdot 7{,}5$$
$$10y = 30$$
$$y = \frac{30}{10}$$
$$y = 3$$

Por fim, determina-se a medida dos perímetros solicitados.

- Medida do perímetro do triângulo *ABC*: $7{,}5 + x + 3 + 6 + 4 + x =$
  $= 7{,}5 + 6 + 3 + 6 + 4 + 6 = 32{,}5$
- Medida do perímetro do triângulo *AMN*:
  $4 + y + 6 = 4 + 3 + 6 = 13$

Portanto, a medida do perímetro do triângulo *ABC* é 32,5 e a medida do perímetro do triângulo *AMN* é 13.

10. a) $\frac{6}{3} = 2$

Portanto, a razão de semelhança entre os triângulos *ABE* e *CDE* é 2.

b) Como os triângulos *ABE* e *CDE* são semelhantes, sendo *x* a medida do lado $\overline{DE}$, tem-se:

$$\frac{3}{6} = \frac{x}{10}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{10}$$
$$2 \cdot x = 1 \cdot 10$$
$$2x = 10$$
$$x = \frac{10}{2}$$
$$x = 5$$

Portanto, as medidas dos lados do triângulo *EDC* são: 3 cm, 4 cm e 5 cm.

c) Para determinar a medida do perímetro do triângulo *ABE*, é preciso encontrar a medida do lado $\overline{AE}$. Assim:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{AE}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{4}{AE}$$
$$AE = 2 \cdot 4$$
$$AE = 8$$

Agora, calcula-se a medida do perímetro do triângulo ABE:

$$6 + 10 + 8 = 24$$

Portanto, a medida do perímetro do triângulo ABE é 24 cm.

11. a) Os triângulos FDC e FBA são semelhantes pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos, cujo enunciado é: toda reta ($\overleftrightarrow{AB}$) paralela a um lado de um triângulo ($\overline{CD}$), que cruza os outros dois lados ($\overline{FC}$ e $\overline{FD}$) em dois pontos distintos (A e B), determina um triângulo semelhante a ele (FBA).

b) Para determinar a medida do perímetro do trapézio $ABDC$, é preciso encontrar as medidas x e y. Uma possível maneira de obter essas medidas é por meio das seguintes relações:

$$\frac{24 + 18}{24} = \frac{70}{x} \quad \text{(I)}$$

$$\frac{24}{18} = \frac{32}{y} \quad \text{(II)}$$

Resolvendo (I), tem-se:

$$\frac{24 + 18}{24} = \frac{70}{x}$$

$$\frac{42}{24} = \frac{70}{x}$$

$$\frac{21}{12} = \frac{70}{x}$$

$$21 \cdot x = 70 \cdot 12$$

$$x = \frac{70 \cdot 12}{21}$$

$$x = \frac{\cancel{70}^{10} \cdot 12}{\cancel{21}^{3}}$$

$$x = \frac{10 \cdot 12}{3}$$

$$x = \frac{10 \cdot \cancel{12}^{4}}{\cancel{3}^{1}}$$

$$x = 10 \cdot 4$$

$$x = 40$$

Resolvendo (II), tem-se:

$$\frac{24}{18} = \frac{32}{y}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{32}{y}$$

$$4 \cdot y = 32 \cdot 3$$

$$y = \frac{32 \cdot 3}{4}$$

$$y = \frac{\cancel{32}^{8} \cdot 3}{\cancel{4}^{1}}$$

$$y = 8 \cdot 3$$

$$y = 24$$

Logo, a medida do perímetro do trapézio $ABDC$ é dada por:

$$x + 18 + 70 + y = 40 + 18 + 70 + 24 =$$
$$= 152$$

Portanto, a medida do perímetro do trapézio $ABDC$ é 152 cm.

12. a) Sendo k a razão de semelhança entre os triângulos OAB e OCD, tem-se:

$$k = \frac{OC}{OA} = \frac{1{,}3}{5{,}2} = \frac{1}{4}$$

b) Sendo x a medida do segmento $\overline{OB}$, tem-se:

$$\frac{1}{4} = \frac{0{,}6}{x}$$

$$x = 4 \cdot 0{,}6$$

$$x = 2{,}4$$

Portanto, a medida do segmento $\overline{OB}$ é 2,4 cm.

c) A razão entre as medidas das áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim, tem-se:

$$k^2 = \frac{\text{medida da área de } OCD}{\text{medida da área de } OAB} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Sendo A a medida da área do triângulo OAB, tem-se:

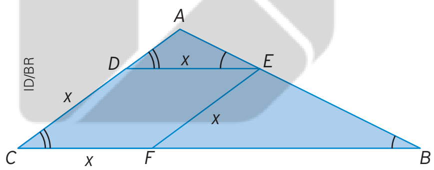
$$\frac{0{,}25}{A} = \frac{1}{16}$$

$$A = 16 \cdot 0{,}25$$

$$A = 4$$

Portanto, a medida da área do triângulo OAB é 4 cm^2.

13. De acordo com o enunciado, sabe-se que há um losango encaixado no triângulo ABC. Como os lados opostos de um losango são paralelos, pode-se utilizar o teorema fundamental da semelhança para verificar três triângulos semelhantes.



Assim, sendo x a medida do lado do losango, tem-se:

$$\frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AD}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{6}{6 - x}$$

$$6x = 12 \cdot (6 - x)$$

$$6x = 72 - 12x$$

$$6x + 12x = 72$$

$$18x = 72$$

$$x = \frac{72}{18}$$

$$x = 4$$

Logo, o lado desse losango mede 4 cm.

14. Sendo x, y e z as medidas dos lados do triângulo maior, tem-se:

$$\frac{10}{x} = \frac{12}{y} = \frac{15}{z} = \frac{1}{2}$$

Para determinar a medida x, pode-se fazer:

$$\frac{10}{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = 2 \cdot 10$$

$$x = 20$$

Para determinar a medida y, pode-se fazer:

$$\frac{12}{y} = \frac{1}{2}$$

$$y = 2 \cdot 12$$

$$y = 24$$

Para determinar a medida z, pode-se fazer:

$$\frac{15}{z} = \frac{1}{2}$$

$$z = 2 \cdot 15$$

$$z = 30$$

Portanto, as medidas dos lados do triângulo maior são 20 cm, 24 cm e 30 cm.

15. De acordo com a figura, sabe-se que $AM = MC$ e que $AN = NB$. Além disso, pode-se escrever:

$$AC = AM + MC = AM + AM = 2AM$$

Do mesmo modo, tem-se que:

$$AB = AN + NB = AN + AN = 2AN$$

Se $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$, então os triângulos ANM e ABC são semelhantes, pelo teorema fundamental da semelhança. Assim, sendo k a razão de semelhança entre esses triângulos, tem-se:

$$k = \frac{AM}{AC} = \frac{AM}{2AM} = \frac{1}{2}$$

A razão entre a medida das áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim:

$$\frac{A_{ANM}}{A_{ABC}} = k^2$$

$$\frac{A_{ANM}}{A_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{A_{ANM}}{A_{ABC}} = \frac{1}{4}$$

Sabe-se que A_{ABC} é igual a 100 cm^2. Então:

$$\frac{A_{AMN}}{100} = \frac{1}{4}$$

$$A_{AMN} \cdot 4 = 100$$

$$A_{AMN} = \frac{100}{4}$$

$$A_{AMN} = 25$$

A área da região $MNBC$ corresponde à diferença entre a área do triângulo ABC e a área do triângulo ANM. Assim:

$$A_{MNBC} = A_{ABC} - A_{ANM} = 100 - 25 = 75$$

Portanto, a medida da área da região $MNBC$ é 75 cm^2.

PÁGINA 109 – ATIVIDADES

16. a) Há uma correspondência entre as medidas dos lados que garante a proporção:

$$\frac{4{,}5}{3} = \frac{6}{4} = \frac{7{,}5}{5} = 1{,}5$$

Logo, os triângulos são semelhantes pelo caso lado-lado-lado (LLL).

b) Dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos do outro triângulo. Então, esses triângulos são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA).

17. Os triângulos ABD e CBA são semelhantes, pois os ângulos $A\hat{D}B$ e $C\hat{A}B$ são congruentes e o ângulo $A\hat{B}C$ é comum aos dois triângulos. Logo, os triângulos ABD e CBA são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA).

18. Os triângulos *ABC* e *EDC* são semelhantes pelo caso AA (os ângulos do vértice *C*, em ambos triângulos, são congruentes, pois são o.p.v. e os ângulos $A\hat{B}C$ e $C\hat{D}E$ são congruentes). Assim, por serem semelhantes, as medidas dos lados correspondentes desses dois triângulos são proporcionais; portanto, pode-se escrever:

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC}$$

$$\frac{21}{x} = \frac{24}{16} = \frac{27}{y}$$

Para descobrir a medida *x*, pode-se fazer:

$$\frac{21}{x} = \frac{24}{16}$$

$$\frac{21}{x} = \frac{3}{2}$$

$$3 \cdot x = 21 \cdot 2$$

$$3x = 42$$

$$x = \frac{42}{3}$$

$$x = 14$$

Para descobrir a medida *y*, pode-se fazer:

$$\frac{24}{16} = \frac{27}{y}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{27}{y}$$

$$3 \cdot y = 27 \cdot 2$$

$$3y = 54$$

$$y = \frac{54}{3}$$

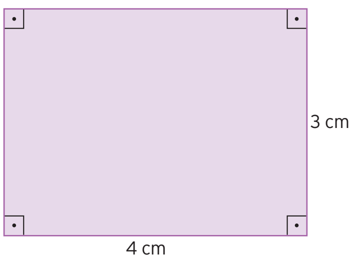
$$y = 18$$

Portanto, $x = 14$ e $y = 18$.

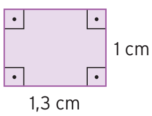
PÁGINA 110 – DIVERSIFICANDO

1. a) Resposta possível:

Ilustrações: ID/BR



b) Pode-se desenhar um retângulo de dimensões $\frac{4}{3}$ cm (ou $1{,}\overline{3}$ cm) por 1 cm.



c) $$\frac{\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 1 + 1}{4 + 4 + 3 + 3} = \frac{\frac{8}{3} + 2}{14} = \frac{\frac{8}{3} + \frac{6}{3}}{14} =$$

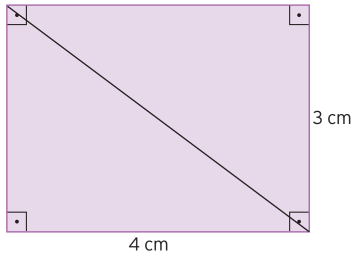
$$= \frac{\frac{8+6}{3}}{14} = \frac{\frac{14}{3}}{14} = \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{3}$$

Logo, a razão entre as medidas dos perímetros dos retângulos dos itens **b** e **a** é $\frac{1}{3}$.

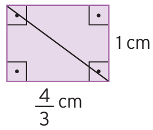
d) Comparando as razões entre as medidas dos lados e a razão entre as medidas dos perímetros dos dois retângulos, observa-se que são iguais.

e) Resposta pessoal.

2. Retângulo do item **a** da atividade **1**:



Retângulo do item **b** da atividade **1**:



Ao traçar a diagonal de um retângulo, obtêm-se dois triângulos.

Os triângulos obtidos ao traçar a diagonal do retângulo do item **a** são semelhantes aos triângulos obtidos ao traçar a diagonal do retângulo do item **b** pelo caso LAL.

Como sabemos que a razão de semelhança entre as medidas dos lados dos retângulos, que também são as medidas dos lados dos triângulos, é $\frac{1}{3}$, então a razão de semelhança entre as medidas das diagonais dos retângulos, que também são as medidas dos lados dos triângulos, é $\frac{1}{3}$.

3. a) A afirmação é falsa. Apesar de os ângulos correspondentes de dois retângulos serem sempre congruentes, as medidas de seus lados correspondentes podem não ser proporcionais.

Correção possível: Dois retângulos são semelhantes se e somente se a medida de seus lados correspondentes forem proporcionais.

b) A afirmação é verdadeira. Os pentágonos são regulares e a razão entre as medidas de seus lados é 2.

c) A afirmação é falsa. Para que dois polígonos sejam semelhantes também é preciso que seus ângulos correspondentes sejam congruentes.

Correção possível: Dois polígonos são semelhantes se as medidas de seus lados correspondentes são proporcionais e se os ângulos correspondentes forem congruentes.

d) A afirmação é verdadeira. Se os polígonos são semelhantes, então as medidas de seus lados correspondentes precisam ser proporcionais.

4. Não.

Explicação possível: Sendo *x* a medida do lado do quadrado inicial; então, o quadrado aumentado terá lado com medida 2*x*. Calculando a medida de área desses quadrados, tem-se:

$$x \cdot x = x^2$$

$$2x \cdot 2x = 4x^2$$

Portanto, se a medida do lado de um quadrado é o dobro da medida do lado do outro quadrado, sua área medirá quatro vezes mais que a medida de área deste quadrado.

5. a) Como os polígonos são semelhantes, então:

$$k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

$$k = \frac{DE}{D'E'} = \frac{1{,}8}{2{,}5} = 0{,}72$$

Portanto, a razão de semelhança *k* entre o polígono *ABCDE* e o *A'B'C'D'E'* é 0,72.

b) $$0{,}72 = \frac{BC}{B'C'}$$

$$0{,}72 = \frac{x}{7}$$

$$x = 0{,}72 \cdot 7$$

$$x = 5{,}04$$

Portanto, *x* é igual a 5,04 cm.

6. a) De acordo com o enunciado, tem-se:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$$

Sendo *m* a medida do segmento $\overline{AB}$, e $AC = 18$ cm, tem-se:

$$\frac{m}{18 - m} = \frac{3}{9}$$

$$\frac{m}{18 - m} = \frac{1}{3}$$

$$3 \cdot m = 18 - m$$

$$3m + m = 18$$

$$4m = 18$$

$$m = \frac{18}{4}$$

$$m = 4{,}5$$

Portanto, o segmento $\overline{AB}$ mede 4,5 cm.

b) Os ângulos $A\hat{D}B$ e $A\hat{E}C$ medem 40° e, portanto, são congruentes. Sendo ângulos correspondentes, é possível afirmar que os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ são paralelos.

7. a) Como os trapézios são semelhantes, os segmentos correspondentes são proporcionais. Assim:

$$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CD}{ZW} = \frac{DA}{WX}$$

$$\frac{CD}{ZW} = \frac{33}{13{,}2} = \frac{330}{132} = \frac{55}{22} = \frac{5}{2}$$

Portanto, a razão de semelhança entre os trapézios *ABCD* e *XYZW* é $\frac{5}{2}$.

b) Como os trapézios são isósceles, o ângulo interno formado com a base maior é suplementar do ângulo interno formado com a base menor. Logo:

$$\hat{D} + \hat{B} = 180°$$

$$50° + \hat{B} = 180°$$

$$\hat{B} = 180° - 50°$$

$$\hat{B} = 130°$$

Portanto, a medida do ângulo $\hat{B}$ é 130°.

c) Para encontrar o valor de a, pode-se fazer:

$$\frac{AB}{XY} = \frac{5}{2}$$
$$\frac{a}{4{,}8} = \frac{5}{2}$$
$$2a = 5 \cdot 4{,}8$$
$$2a = 24$$
$$a = \frac{24}{2}$$
$$a = 12$$

Nos trapézios isósceles, os lados não paralelos são congruentes. Assim, para encontrar o valor de b, pode-se fazer:

$$AD = BC = 16$$
$$\frac{BC}{YZ} = \frac{16}{b}$$

Como a razão de semelhança é $\frac{5}{2}$, pode-se fazer:

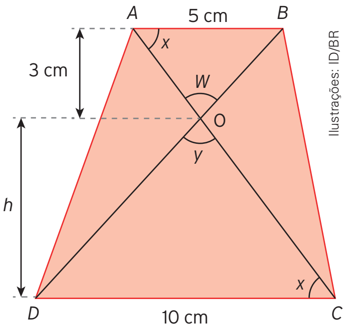
$$\frac{16}{b} = \frac{5}{2}$$
$$5b = 2 \cdot 16$$
$$5b = 32$$
$$b = \frac{32}{5}$$
$$b = 6{,}4$$

Portanto $a = 12$ cm e $b = 6{,}4$ cm.

d) A medida do perímetro do trapézio $ABCD$ é 77 cm ($16 + 12 + 16 + 33 = 77$) e a medida do perímetro do trapézio $XYZW$ é 30,8 cm ($4{,}8 + 6{,}4 + 13{,}2 + 6{,}4 = 30{,}8$); logo, a razão entre as medidas dos perímetros é:

$$\frac{77}{30{,}8} = \frac{770}{308} = \frac{385}{154} = \frac{55}{22} = \frac{5}{2}$$

8. Seja O o ponto de intersecção dos segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ e seja h a altura do triângulo CDO. Os triângulos ABO e CDO são semelhantes pelo caso AA.



Ilustrações: ID/BR

Então:

$$\frac{5}{10} = \frac{3}{h}$$
$$5 \cdot h = 10 \cdot 3$$
$$5h = 30$$
$$h = \frac{30}{5}$$
$$h = 6$$

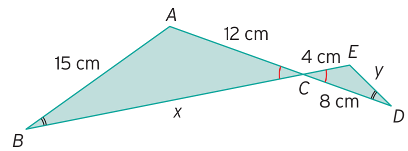
A medida da área do trapézio é dada por:

$$\frac{(10 + 5) \cdot (6 + 3)}{2} = \frac{15 \cdot 9}{2} = 67{,}5$$

Portanto, a medida da área do trapézio é 67,5 cm^2.

9. Sim, os triângulos AEC e DBC são semelhantes pelo caso AA, pois têm o ângulo $\hat{C}$ em comum e um ângulo de 90°. Os lados correspondentes são $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$, $\overline{EC}$ e $\overline{BC}$.

10.



Os triângulos ABC e EDC são semelhantes pelo caso AA, pois $E\hat{C}D \cong A\hat{C}B$ e $E\hat{D}C \cong A\hat{B}C$. Os lados correspondentes são $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{EC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{ED}$. Assim:

- $\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC} = \frac{AB}{ED}$

  $\frac{x}{8} = \frac{12}{4} = \frac{15}{y}$

  $\frac{x}{8} = \frac{12}{4}$

  $\frac{x}{8} = 3$

  $x = 24$

- $\frac{15}{y} = \frac{12}{4}$

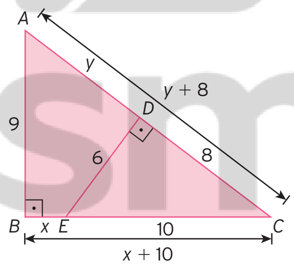
  $\frac{15}{y} = 3$

  $y = \frac{15}{3}$

  $y = 5$

Portanto, $x = 24$ cm e $y = 5$ cm.

11.



Os triângulos ABC e EDC são semelhantes pelo caso AA, pois $E\hat{C}D \cong A\hat{C}B$ e $E\hat{D}C \cong A\hat{B}C$. Os lados correspondentes são $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{ED}$, $\overline{AC}$ e $\overline{EC}$. Assim,

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AB}{ED} = \frac{AC}{EC}$$
$$\frac{x + 10}{8} = \frac{9}{6} = \frac{y + 8}{10}$$

- $\frac{x + 10}{8} = \frac{9}{6}$

  $6x + 60 = 72$

  $6x = 12$

  $x = 2$

- $\frac{y + 8}{10} = \frac{9}{6}$

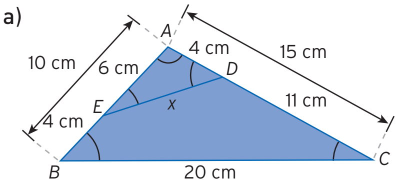
  $6y + 48 = 90$

  $6y = 42$

  $y = 7$

Portanto, $x = 2$ cm e $y = 7$ cm.

12. a)



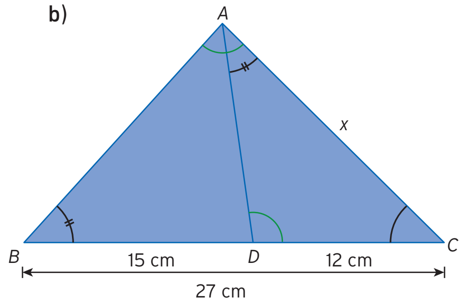
Os triângulos ABC e ADE são semelhantes pelo caso LAL, pois $B\hat{A}C \cong D\hat{A}E$ e $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.

Então:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$
$$\frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \frac{20}{x}$$
$$\frac{10}{4} = \frac{20}{x}$$
$$10x = 80$$
$$x = 8$$

Logo, o valor de x é 8 cm.

b)



Os triângulos ABC e DAC são semelhantes pelo caso AA pois $C\hat{B}A \cong C\hat{A}D$ e $A\hat{C}B \cong D\hat{C}A$.

Então:

$$\frac{AB}{DA} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$$
$$\frac{AB}{DA} = \frac{27}{x} = \frac{x}{12}$$
$$\frac{27}{x} = \frac{x}{12}$$
$$x^2 = 12 \cdot 27$$
$$x^2 = 324$$
$$x = 18$$

Logo, o valor de x é 18 cm.

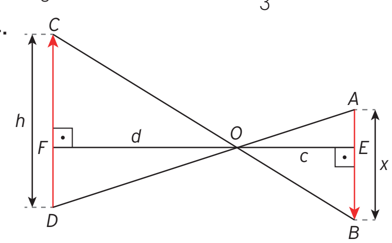
13. Os triângulos AED e CEB são semelhantes pelo caso AA pois $D\hat{E}A \cong B\hat{E}C$ e $D\hat{A}E \cong B\hat{C}E$.

Então:

$$\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE} = \frac{AD}{CB}$$
$$\frac{AE}{8} = \frac{2}{4{,}8}$$
$$4{,}8 \cdot AE = 2 \cdot 8$$
$$AE = \frac{16}{4{,}8} = \frac{160}{48} = \frac{80}{24} = \frac{10}{3}$$

Logo, a medida de $\overline{AE}$ é $\frac{10}{3}$ cm.

14.



Os triângulos OAB e ODC são semelhantes pelo caso AA, pois $A\hat{O}B \cong D\hat{O}C$ e, como $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos (ambos são perpendiculares a $\overline{EF}$), $O\hat{C}D \cong O\hat{B}A$ e $O\hat{D}C \cong O\hat{A}B$ (alternos internos). Então:

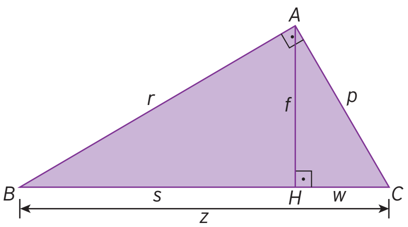
$$\frac{AO}{DO} = \frac{BO}{CO} = \frac{AB}{DC} = \frac{EO}{FO}$$
$$\frac{AB}{DC} = \frac{EO}{FO}$$
$$\frac{x}{h} = \frac{c}{d}$$
$$x = \frac{c \cdot h}{d}$$

Logo, conhecendo as medidas c, d e h, determina-se a medida x.

CAPÍTULO 3 – TRIÂNGULO RETÂNGULO

PÁGINA 116 – ATIVIDADES

1. Decompondo a figura em três triângulos:



Ilustrações: ID/BR

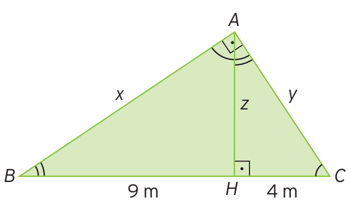
Os triângulos ABC, HBA e HAC são semelhantes pelo caso AA. Então, podem-se escrever as seguintes relações:

- entre a hipotenusa e o cateto maior:
$$\frac{r}{s} = \frac{p}{f} = \frac{z}{r}$$
- entre a hipotenusa e o cateto menor:
$$\frac{r}{f} = \frac{p}{w} = \frac{z}{p}$$
- entre o cateto menor e o cateto maior:
$$\frac{f}{s} = \frac{w}{f} = \frac{p}{r}$$

Assim, tomando duas a duas as razões equivalentes, tem-se:

- $\frac{f}{s} = \frac{w}{f}$, ou seja, $f^2 = s \cdot w$
- $\frac{p}{w} = \frac{z}{p}$, ou seja, $p^2 = z \cdot w$
- $\frac{r}{s} = \frac{z}{r}$, ou seja, $r^2 = z \cdot s$
- $\frac{r}{f} = \frac{z}{p}$, ou seja, $r \cdot p = z \cdot f$

2.



Os triângulos ABC, HBA e HAC são semelhantes pelo caso AA. Então, podem-se escrever as seguintes relações:

- entre a hipotenusa e o cateto maior:
$$\frac{13}{x} = \frac{x}{9} = \frac{y}{z}$$
- entre a hipotenusa e o cateto menor:
$$\frac{13}{y} = \frac{x}{z} = \frac{y}{4}$$
- entre o cateto menor e o cateto maior:
$$\frac{y}{x} = \frac{z}{9} = \frac{4}{z}$$

Assim, tomando duas a duas as razões equivalentes, tem-se:

- $\frac{13}{x} = \frac{x}{9}$
$$x^2 = 13 \cdot 9$$
$$x = \sqrt{13 \cdot 9}$$
$$x = 3\sqrt{13}$$
- $\frac{z}{9} = \frac{4}{z}$
$$z^2 = 9 \cdot 4$$
$$z = \sqrt{9 \cdot 4}$$
$$z = 3 \cdot 2$$
$$z = 6$$
- $\frac{13}{y} = \frac{y}{4}$
$$y^2 = 13 \cdot 4$$
$$y = \sqrt{13 \cdot 4}$$
$$y = 2\sqrt{13}$$

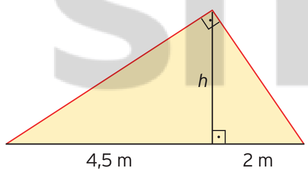
Portanto, x mede $3\sqrt{13}$ m, y mede $2\sqrt{13}$ m e z mede 6 m.

3. Para ter o menor tamanho possível, o suporte deve formar um ângulo de 90° com a rampa. Por meio de razões envolvendo a hipotenusa e o cateto maior, tem-se:

$$\frac{25}{15} = \frac{20}{x}$$
$$25 \cdot x = 20 \cdot 15$$
$$x = \frac{20 \cdot 15}{25}$$
$$x = 4 \cdot 3$$
$$x = 12$$

Logo, o suporte deve medir 12 dm.

4.

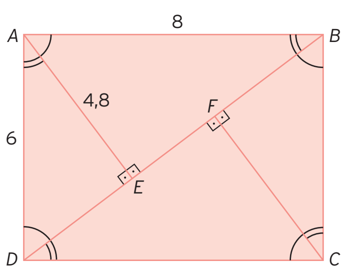


Por meio de razões envolvendo o cateto maior e o cateto maior, tem-se:

$$\frac{h}{2} = \frac{4,5}{h}$$
$$h^2 = 4,5 \cdot 2$$
$$h^2 = 9$$
$$h = \sqrt{9}$$
$$h = 3$$

O ponto máximo da rampa está a uma altura de 3 m do solo.

5.



a) No triângulo ABD, tem-se:
$$6 \cdot 8 = BD \cdot 4,8$$
$$48 = BD \cdot 4,8$$
$$BD = \frac{48}{4,8}$$
$$BD = 10$$
Logo, a medida da diagonal $\overline{BD}$ é 10 cm.

b) Os triângulos ABD e CBD são congruentes por LAL. Assim, $\overline{CF}$ mede 4,8 cm.
No triângulo ABD, tem-se, em centímetro:
$$(AD)^2 = BD \cdot DE$$
$$6^2 = 10 \cdot DE$$
$$36 = 10 \cdot DE$$
$$DE = \frac{36}{10}$$
$$DE = 3,6$$
Os triângulos CBF e ADE são congruentes por LAL. Assim, $BF = DE$.
Portanto, $\overline{BF}$ mede 3,6 cm.
Mas:
$$BE = BD - DE = 10 - 3,6 = 6,4$$
Assim:
$$EF = BE - BF = 6,4 - 3,6 = 2,8$$
Portanto, $\overline{EF}$ mede 2,8 cm.

PÁGINA 117 – DESCUBRA MAIS

PARA CONCLUIR

1. A medida do lado do quadrado amarelo é 15 cm. Então:
$$A = \ell^2$$
$$A_{amarelo} = 15^2 = 225$$
Portanto, a medida de área do quadrado amarelo é 225 cm^2.

2. A medida do lado do quadrado azul é 9 cm e a medida do lado do quadrado vermelho é 12 cm.
$$A = \ell^2$$
$$A_{azul} = 9^2 = 81$$
$$A_{vermelho} = 12^2 = 144$$
Portanto, a medida da área do quadrado azul é 81 cm^2 e a medida da área do quadrado vermelho é 144 cm^2.

3. A medida da área do quadrado amarelo é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados vermelho e azul ($225 = 81 + 144$).

4. Resposta pessoal.

5. $a^2 = b^2 + c^2$

PÁGINA 121 – ATIVIDADES

6. a) Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:
$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$x^2 = 9 + 16$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \sqrt{25}$$
$$x = 5$$
Portanto, o valor de x é 5 cm.

b) Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$x^2 = 5^2 + 12^2$$
$$x^2 = 25 + 144$$
$$x^2 = 169$$
$$x = \sqrt{169}$$
$$x = 13$$

Portanto, o valor de x é 13 cm.

c) Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$x^2 + 24^2 = 25^2$$
$$x^2 = 25^2 - 24^2$$
$$x^2 = (25 + 24) \cdot (25 - 24)$$
$$x^2 = 49 \cdot 1$$
$$x^2 = 49$$
$$x = \sqrt{49}$$
$$x = 7$$

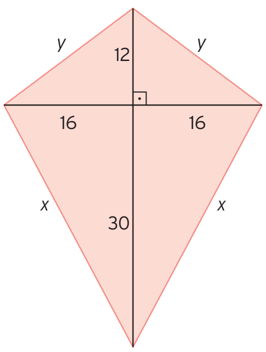
Portanto, o valor de x é 7 cm.

d) Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$15^2 + x^2 = 17^2$$
$$x^2 = 17^2 - 15^2$$
$$x^2 = (17 + 15) \cdot (17 - 15)$$
$$x^2 = 32 \cdot 2$$
$$x^2 = 64$$
$$x = \sqrt{64}$$
$$x = 8$$

Portanto, o valor de x é 8 cm.

7.



Ilustrações: ID/BR

A medida do perímetro da pipa de Beto é dada pela soma $x + x + y + y$.

Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

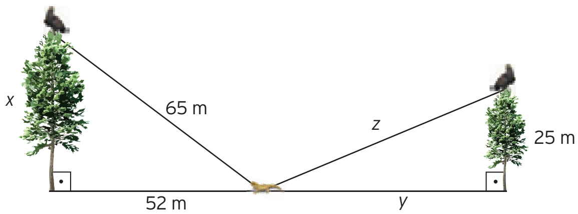
- $x^2 = 16^2 + 30^2$
  $x^2 = 256 + 900$
  $x^2 = 1\,156$
  $x = \sqrt{1\,156}$
  $x = 34$
- $y^2 = 12^2 + 16^2$
  $y^2 = 144 + 256$
  $y^2 = 400$
  $y = \sqrt{400}$
  $y = 20$

Substituindo $x = 34$ e $y = 20$ na expressão que determina a medida do perímetro, em centímetro, obtém-se:

$$34 + 34 + 20 + 20 = 108$$

Então, a medida do perímetro da pipa de Beto é 108 cm.

8.



a) Considerando x a medida da altura da árvore maior, em metro, pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$65^2 = x^2 + 52^2$$
$$x^2 = 65^2 - 52^2$$
$$x^2 = (65 + 52) \cdot (65 - 52)$$
$$x^2 = 117 \cdot 13$$
$$x^2 = 13 \cdot 9 \cdot 13$$
$$x = \sqrt{13^2 \cdot 9}$$
$$x = 13 \cdot 3$$
$$x = 39$$

Portanto, a medida da altura da árvore maior é 39 m.

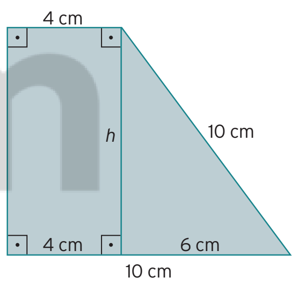
b) Considerando que a distância percorrida pelos dois gaviões é a mesma, então z mede 65 m.

Sendo y a medida da distância entre o lagarto e a árvore menor, em metro, pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$y^2 = 65^2 - 25^2$$
$$y^2 = (65 + 25) \cdot (65 - 25)$$
$$y^2 = 90 \cdot 40$$
$$y^2 = 3\,600$$
$$y = \sqrt{3\,600}$$
$$y = 60$$

Então, a medida da distância entre o lagarto e a árvore menor é 60 m.

9.



No triângulo, pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$10^2 = h^2 + 6^2$$
$$100 = h^2 + 36$$
$$h^2 = 100 - 36$$
$$h^2 = 64$$
$$h = \sqrt{64}$$
$$h = 8$$

No trapézio, as bases medem 10 cm e 4 cm, e a altura mede 8 cm.

Calculando a medida de área do trapézio, em centímetro quadrado, tem-se:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(10 + 4) \cdot 8}{2}$$
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{14 \cdot 8}{2}$$
$$A_{\text{trapézio}} = 7 \cdot 8$$
$$A_{\text{trapézio}} = 56$$

Portanto, a medida de área do trapézio é 56 cm^2.

10. Para calcular a medida x, aplica-se o teorema de Pitágoras em cada triângulo.

- No triângulo amarelo, sendo y a medida da hipotenusa, então:

$$y^2 = 1^2 + 1^2$$
$$y^2 = 1 + 1$$
$$y^2 = 2$$

- No triângulo rosa, sendo b a medida da hipotenusa, então:

$$b^2 = 1^2 + y^2$$
$$b^2 = 1 + 2$$
$$b^2 = 3$$

- No triângulo roxo, sendo c a medida da hipotenusa, então:

$$c^2 = 1^2 + b^2$$
$$c^2 = 1 + 3$$
$$c^2 = 4$$

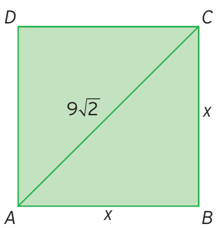
- No triângulo laranja, x é a medida da hipotenusa, então:

$$x^2 = 1^2 + c^2$$
$$x^2 = 1 + 4$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \sqrt{5}$$

Portanto, o valor de x é $\sqrt{5}$ cm.

PÁGINA 124 – ATIVIDADES

11.



Ilustrações: ID/BR

a) No triângulo ABC, pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(9\sqrt{2})^2 = x^2 + x^2$$
$$81 \cdot 2 = 2x^2$$
$$x^2 = 81$$
$$x = 9$$

A medida do lado desse quadrado é 9 cm.

b)

$$A = x^2$$
$$A = 81$$

A medida da área desse quadrado é 81 cm^2.

12. Ao traçar a diagonal em um retângulo, ele fica dividido em dois triângulos retângulos congruentes. Logo, x é a medida da hipotenusa desses triângulos, então:

$$x^2 = 9^2 + 13^2$$
$$x^2 = 81 + 169$$
$$x^2 = 250$$
$$x = \sqrt{250}$$
$$x = 5\sqrt{10}$$

Logo, o valor de x é $5\sqrt{10}$ cm.

13. a) Sendo ℓ a medida do lado desse triângulo, tem-se:

$$3\ell = 24$$
$$\ell = \frac{24}{3}$$
$$\ell = 8$$

Logo, a medida do lado desse triângulo é 8 cm.

b) Sendo h a medida da altura do triângulo, tem-se:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$
$$h = \frac{8\sqrt{3}}{2}$$
$$h = 4\sqrt{3}$$

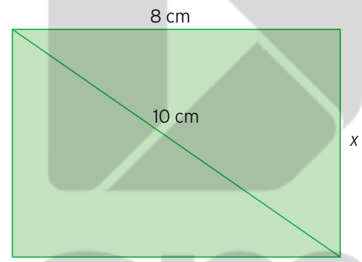
Logo, a medida da altura desse triângulo é $4\sqrt{3}$ cm.

c) Sendo A a área do triângulo, tem-se:

$$A = \frac{\ell \cdot h}{2}$$
$$A = \frac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2}$$
$$A = \frac{32\sqrt{3}}{2}$$
$$A = 16\sqrt{3}$$

Logo, a medida da área desse triângulo é $16\sqrt{3}$ cm^2.

14. a)



Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$10^2 = x^2 + 8^2$$
$$100 = x^2 + 64$$
$$x^2 = 100 - 64$$
$$x^2 = 36$$
$$x = \sqrt{36}$$
$$x = 6$$

A medida do outro lado desse retângulo é 6 cm.

b) $P = 6 + 8 + 6 + 8 = 28$

A medida do perímetro desse retângulo é 28 cm.

c) $A = 6 \cdot 8 = 48$

A medida da área desse retângulo é 48 cm^2.

15. Sendo a, b e c as medidas das arestas e d a medida da diagonal do paralelepípedo, tem-se:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$d = \sqrt{6^2 + 8^2 + (5\sqrt{5})^2}$$
$$d = \sqrt{36 + 64 + 25 \cdot 5}$$
$$d = \sqrt{36 + 64 + 125}$$
$$d = \sqrt{225}$$
$$d = 15$$

Logo, a medida da diagonal desse paralelepípedo é 15 cm.

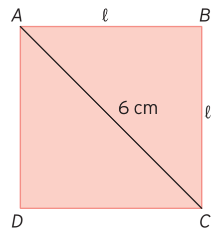
16. Sendo d a medida da diagonal e a a medida da aresta do cubo, tem-se:

$$d = a \cdot \sqrt{3}$$
$$d = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$
$$d = 4 \cdot 3$$
$$d = 12$$

Logo, a medida da diagonal desse cubo é 12 cm.

17. Sim, é possível utilizar o teorema de Pitágoras para calcular a medida da área de um quadrado (A) conhecendo a medida da sua diagonal (d).

Considere o seguinte quadrado:



Tem-se:

$A = \ell^2$ (área do quadrado)

$d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2 \cdot \ell^2$ (teorema de Pitágoras no triângulo ABC)

Substituindo ℓ^2 por A, tem-se:

$$d^2 = 2 \cdot A$$
$$A = \frac{d^2}{2}$$

Como a diagonal do quadrado desenhado por Betina mede 6 cm, então:

$$A = \frac{6^2}{2}$$
$$A = \frac{36}{2}$$
$$A = 18$$

A medida da área do quadrado desenhado por Betina é 18 cm^2. Esse resultado foi obtido sem determinar a medida do lado do quadrado.

18. Considerando h e ℓ as medidas da altura e do lado do triângulo menor, respectivamente e H e L as medidas da altura e do lado do triângulo maior, respectivamente. Então:

$$H - h = 5\sqrt{3}$$
$$\frac{L\sqrt{3}}{2} - \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$
$$\frac{L\sqrt{3} - \ell\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$
$$\frac{(L - \ell) \cdot \sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$
$$(L - \ell) \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3} \cdot 2$$
$$L - \ell = \frac{5\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}}$$
$$L - \ell = 10$$

Logo, a diferença entre as medidas de seus lados é 10 cm.

19. Cada face de um cubo é um quadrado cujos lados são as arestas do cubo. Sendo a a medida da aresta do cubo e d a medida da diagonal de cada face desse cubo, tem-se:

$$d = a\sqrt{2}$$
$$12 = a\sqrt{2}$$
$$a = \frac{12}{\sqrt{2}}$$
$$a = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$a = \frac{12\sqrt{2}}{2}$$
$$a = 6\sqrt{2}$$

A medida de área de cada face lateral é dada por $A = a^2$. Como um cubo tem 6 faces congruentes, a soma das medidas das áreas de todas as faces do cubo é dada por $A = 6 \cdot a^2$. Para o cubo cuja aresta mede $6\sqrt{2}$, tem-se:

$$A = 6 \cdot a^2$$
$$A = 6 \cdot (6\sqrt{2})^2$$
$$A = 6 \cdot 72$$
$$A = 432$$

Logo, a soma das medidas das áreas de todas as faces desse cubo é igual a 432 cm^2.

20. a) Para determinar o valor de y, pode-se utilizar o teorema de Pitágoras no triângulo DEF:

$$(EF)^2 = (DF)^2 + (ED)^2$$
$$(7\sqrt{2})^2 = y^2 + y^2$$
$$49 \cdot 2 = 2y^2$$
$$y^2 = 49$$
$$y = \sqrt{49}$$
$$y = 7$$

Portanto, o valor de y é 7 cm.

b) Como $y = ED = CD$, tem-se que $CD = 7$ cm. Como $ABCD$ é um retângulo, então $AB = CD$, ou seja, $AB = 7$ cm. Como F é o ponto médio de $\overline{AD}$ e $FD = 7$ cm, tem-se que $AF = 7$ cm. Então, a medida do perímetro é dada por:

$$AB + BC + CD + DE + EF + FA =$$
$$= 7 + 14 + 7 + 7 + 7\sqrt{2} + 7 = (42 + 7\sqrt{2})$$

Logo, a medida do perímetro da figura é $(42 + 7\sqrt{2})$ cm.

c) A medida da área do triângulo é dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{y \cdot y}{2} = \frac{7 \cdot 7}{2} = \frac{49}{2} = 24{,}5$$

Portanto, a medida da área do triângulo é 24,5 cm^2.

d) Como já foi calculada a medida da área do triângulo, agora calcula-se a medida da área do retângulo:

$$A_{\text{retângulo}} = 7 \cdot 14 = 98$$

Portanto:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{triângulo}} + A_{\text{retângulo}} =$$
$$= 24{,}5 + 98 = 122{,}5$$

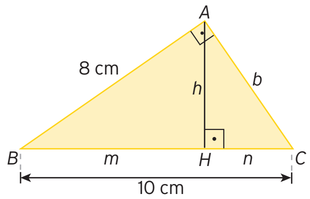
A medida da área total da figura é 122,5 cm^2.

PÁGINA 125 – DIVERSIFICANDO

1. a) Inicialmente, determina-se a medida b do cateto $\overline{AC}$. Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$10^2 = 8^2 + b^2$$
$$100 = 64 + b^2$$
$$b^2 = 100 - 64$$
$$b^2 = 36$$
$$b = \sqrt{36}$$
$$b = 6$$

Sendo H a projeção de A sobre $\overline{BC}$, tem-se:



- $m = \frac{8^2}{10}$

  $m = \frac{64}{10}$

  $m = 6{,}4$

- $n = \frac{6^2}{10}$

  $n = \frac{36}{10}$

  $n = 3{,}6$

As medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa são 3,6 cm e 6,4 cm.

b)
$$10h = 6 \cdot 8$$
$$h = \frac{48}{10}$$
$$h = 4{,}8$$

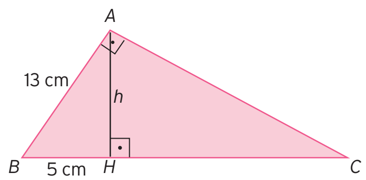
A medida da altura relativa à hipotenusa é 4,8 cm.

c) A medida do perímetro do triângulo ABC é dada por:

$$8 + 10 + 6 = 24$$

Logo, a medida do perímetro do triângulo ABC é 24 cm.

2.



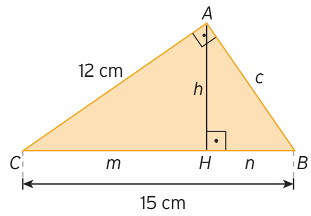
Ilustrações: ID/BR

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo ABH, tem-se:

$$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2$$
$$13^2 = h^2 + 5^2$$
$$169 = h^2 + 25$$
$$h^2 = 169 - 25$$
$$h^2 = 144$$
$$h = \sqrt{144}$$
$$h = 12$$

A medida da altura relativa à hipotenusa do triângulo é 12 cm.

3.



Calculando a medida do outro cateto pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$15^2 = 12^2 + c^2$$
$$225 = 144 + c^2$$
$$c^2 = 225 - 144$$
$$c^2 = 81$$
$$c = \sqrt{81}$$
$$c = 9$$

Seja n a projeção do cateto menor, m a projeção do cateto maior, c o cateto menor, b o cateto maior e a a hipotenusa, então:

- $c^2 = a \cdot n$

  $9^2 = 15 \cdot n$

  $81 = 15n$

  $n = \frac{81}{15}$

  $n = 5{,}4$

- $b^2 = a \cdot m$

  $12^2 = 15 \cdot m$

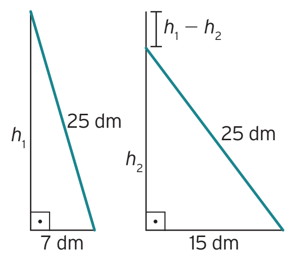
  $144 = 15m$

  $m = \frac{144}{15}$

  $m = 9{,}6$

As projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa medem 5,4 cm e 9,6 cm.

4. Considerando h_1 e h_2 as distâncias da extremidade da escada que estava apoiada na parede até o solo, antes e depois de a escada escorregar, respectivamente, tem-se:



- $25^2 = h_1^2 + 7^2$

  $h_1^2 = 25^2 - 7^2$

  $h_1^2 = (25 + 7) \cdot (25 - 7)$

  $h_1^2 = 32 \cdot 18$

  $h_1 = \sqrt{2^5 \cdot 2 \cdot 3^2}$

  $h_1 = 2^3 \cdot 3$

  $h_1 = 24$

- $25^2 = h_2^2 + 15^2$

$h_2^2 = 25^2 - 15^2$

$h_2^2 = (25 + 15) \cdot (25 - 15)$

$h_2^2 = 40 \cdot 10$

$h_2 = \sqrt{400}$

$h_2 = 20$

A diferença $h_1 - h_2$ equivale à distância, em decímetro, que a extremidade da escada que estava apoiada na parede desceu.

$$h_1 - h_2 = 24 - 20 = 4$$

Logo, a extremidade da escada que estava apoiada na parede desceu 4 dm.

5. No triângulo MNO, tem-se:

$$(MO)^2 = OP \cdot ON$$
$$(30)^2 = 18 \cdot ON$$
$$900 = 18 \cdot ON$$
$$ON = \frac{900}{18}$$
$$ON = 50$$

Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(ON)^2 = (MO)^2 + (MN)^2$$
$$(50)^2 = (30)^2 + (MN)^2$$
$$(MN)^2 = 2\,500 - 900$$
$$(MN)^2 = 1\,600$$
$$MN = \sqrt{1\,600}$$
$$MN = 40$$

Então, a medida do perímetro é dada por:

$MN + ON + MO = 40 + 50 + 30 = 120$

Logo, o perímetro do triângulo MNO mede 120 cm.

6. O triângulo ABC não é um triângulo retângulo e, portanto, as relações métricas abordadas não se aplicam a ele.

7. Como cada aresta de cada cubo da figura mede 4 cm, tem-se:

$AD = 8$ cm $(4 + 4 = 8)$

$BC = 4$ cm

$CD = 8$ cm $(4 + 4 = 8)$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCD, tem-se:

$$(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2$$
$$(BD)^2 = 4^2 + 8^2$$
$$(BD)^2 = 16 + 64$$
$$(BD)^2 = 80$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD, tem-se:

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$$
$$(AB)^2 = 8^2 + 80$$
$$(AB)^2 = 64 + 80$$
$$(AB)^2 = \sqrt{144}$$
$$AB = 12$$

Logo, o segmento $\overline{AB}$ mede 12 cm.

8. Supondo que a medida original do lado do quintal era x, a medida de área do quintal media x^2. Após o aumento de cada lado em 2 cm, o lado do quintal passa a medir $(x + 2)$ e sua área $(x^2 + 16)$. Assim:

$$(x + 2)^2 = x^2 + 16$$
$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 16$$
$$4x = 12$$
$$x = \frac{12}{4}$$
$$x = 3$$

Logo, a medida original do lado do quintal era 3 m.

Calculando a medida original da diagonal do quintal, obtém-se:

$$d = x\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Portanto, a medida original da diagonal do quintal era $3\sqrt{2}$ m.

9. Considerando h_1 a medida da altura original e x a medida do lado original, tem-se:

$$h_1 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Seja h_2 a medida da altura do triângulo após o aumento dos lados em 6 m, então:

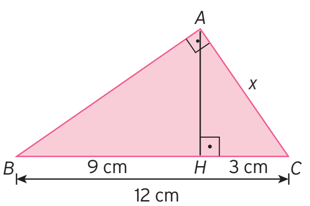
$$h_2 = \frac{(x + 6) \cdot \sqrt{3}}{2}$$
$$h_2 = \frac{x\sqrt{3} + 6\sqrt{3}}{2}$$
$$h_2 = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{6\sqrt{3}}{2}$$
$$h_2 = \frac{x\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3}$$

Portanto:

$$h_2 - h_1 = \frac{x\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3} - \frac{x\sqrt{3}}{2}$$
$$h_2 - h_1 = 3\sqrt{3}$$

Logo, com um aumento de 6 m na medida dos lados, a medida da altura do triângulo aumenta $3\sqrt{3}$ m.

10.



Ilustrações: ID/BR

A medida da hipotenusa equivale à soma das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Logo, a hipotenusa mede 12 cm. Então:

$$x^2 = 3 \cdot 12$$
$$x^2 = 36$$
$$x = 6$$

Portanto, o cateto menor mede 6 cm.

11. Como o hexágono regular é composto de 6 triângulos equiláteros, para determinar a medida da área do hexágono regular, calcula-se a medida da área de um dos triângulos e multiplica-se o resultado por 6. Assim, sendo A_Δ a medida da área, ℓ a medida do lado e h a medida da altura de cada triângulo, tem-se:

$$A_\Delta = \frac{\ell \cdot h}{2}$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Então, calculando a medida da área de um dos triângulos, tem-se:

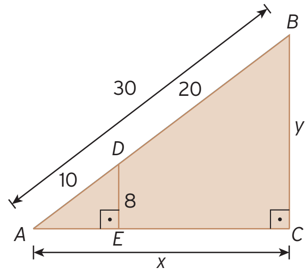
$$A_\Delta = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2}$$
$$A_\Delta = \frac{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}}{2}$$
$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$$
$$A_\Delta = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$
$$A_\Delta = \frac{64\sqrt{3}}{4}$$
$$A_\Delta = 16\sqrt{3}$$

Agora, calcula-se a medida da área do hexágono regular:

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot A_\Delta$$
$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot 16\sqrt{3}$$
$$A_{\text{hexágono}} = 96\sqrt{3}$$

Portanto, a medida da área do hexágono regular, cujo lado mede 8 cm, é $96\sqrt{3}$ cm^2.

12. a)



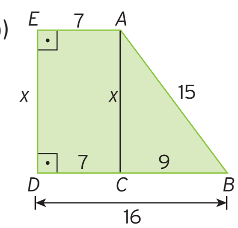
Pelo caso AA, $\Delta ABC \sim \Delta ADE$:

$$\frac{10}{8} = \frac{30}{y}$$
$$10 \cdot y = 8 \cdot 30$$
$$10y = 240$$
$$y = 24$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABC, tem-se:

$$30^2 = x^2 + 24^2$$
$$x^2 = 30^2 - 24^2$$
$$x^2 = (30 + 24) \cdot (30 - 24)$$
$$x^2 = 54 \cdot 6$$
$$x^2 = 324$$
$$x = \sqrt{324}$$
$$x = 18$$

b)



Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABC, tem-se:

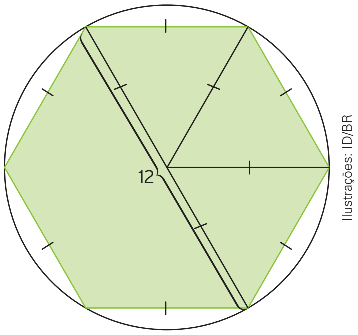
$$15^2 = 9^2 + x^2$$
$$225 = 81 + x^2$$
$$225 - 81 = x^2$$
$$144 = x^2$$
$$x = \sqrt{144}$$
$$x = 12$$

PÁGINA 126 – RESOLVENDO PROBLEMAS

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

1. A sala que será revestida de cerâmica tem formato circular.

2.



O diâmetro da sala mede 12 metros.

3. A região que será revestida com cerâmica verde tem formato de um hexágono regular.

4. Como o diâmetro da sala mede 12 metros, seu raio mede 6 metros. Os lados dos triângulos equiláteros que compõem o hexágono coincidem com alguns raios do círculo e, portanto, medem 6 metros.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

1. Como a sala tem o formato de círculo, pode-se determinar sua área total por meio da fórmula da área do círculo: $A = \pi \cdot r^2$, em que A representa a medida da área e r, a medida do raio do círculo.

   Como o diâmetro da sala mede 12 m, então, a medida do raio é 6 m.

   Aplicando a fórmula da área do círculo, tem-se:

$$A = \pi \cdot r^2$$
$$A = \pi \cdot 6^2$$
$$A = 36\pi$$

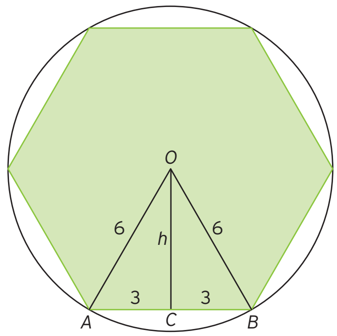
   Considerando $\pi \simeq 3,14$, tem-se:

$$A = 36\pi$$
$$A \simeq 36 \cdot 3,14$$
$$A = 113,04$$

   A área total do piso da sala mede aproximadamente 113,04 m^2.

2. Como a cerâmica verde tem o formato de um hexágono regular, para calcular a medida de sua área é preciso descobrir a medida da área do hexágono regular. Para isso, pode-se verificar a possibilidade de transformar esse problema em um problema mais simples; nesse caso, decompõe-se o hexágono em 6 triângulos equiláteros.

   Os triângulos obtidos têm todos os lados com a mesma medida, e seus lados coincidem com raios do círculo e medem 6 m. Assim, calcula-se a medida da área de um desses triângulos e multiplica-se o resultado por 6, para obter a medida da área do hexágono regular. Para isso, deve-se calcular a medida da altura desse triângulo equilátero.



   No triângulo retângulo AOC, pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$6^2 = h^2 + 3^2$$
$$h^2 = 6^2 - 3^2$$
$$h^2 = 36 - 9$$
$$h^2 = 27$$
$$h = \sqrt{27}$$
$$h = 3\sqrt{3}$$

   Assim, é possível determinar a medida da área do triângulo equilátero:

$$A_{\Delta} = \frac{AB \cdot h}{2}$$
$$A_{\Delta} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$$
$$A_{\Delta} = 9\sqrt{3}$$

   Então, a medida da área do triângulo equilátero é $9\sqrt{3}$ m^2.

   Multiplicando a medida da área do triângulo equilátero por 6, obtém-se a medida da área do hexágono regular:

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot 9\sqrt{3}$$
$$A_{\text{hexágono}} = 54\sqrt{3}$$

   Como $\sqrt{3} \simeq 1,732$, então:

$$A_{\text{hexágono}} \simeq 54 \cdot 1,732$$
$$A_{\text{hexágono}} \simeq 93,53$$

   Portanto, a medida da área com cerâmica verde é aproximadamente 93,53 m^2.

3. A medida da área com cerâmica branca será a diferença entre a medida da área do piso e a medida da área com cerâmica verde. Assim:

$$A_{\text{branca}} = A_{\text{piso}} - A_{\text{verde}}$$
$$A_{\text{branca}} = 113,04 - 93,53$$
$$A_{\text{branca}} = 19,51$$

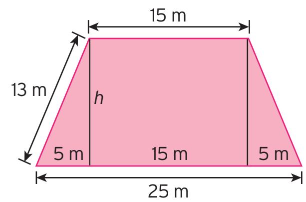
   Logo, a medida da área com cerâmica branca é 19,51 m^2.

REFLEXÃO SOBRE O PROBLEMA

1. Respostas pessoais.
2. Respostas pessoais.
3. Resposta pessoal.
4. Resposta pessoal.
5. Respostas pessoais.
6. Respostas pessoais.

MAIS PROBLEMAS

1.



   Como a parede tem o formato de um trapézio isósceles, pode-se decompor o trapézio em dois triângulos retângulos e um retângulo.

   Os dois triângulos retângulos obtidos são congruentes, com os catetos medindo 5 m e h.

   Pelo teorema de Pitágoras, obtém-se h:

$$13^2 = 5^2 + h^2$$
$$h^2 = 13^2 - 5^2$$
$$h^2 = (13 + 5) \cdot (13 - 5)$$
$$h^2 = 18 \cdot 8$$
$$h^2 = 144$$
$$h = 12$$

   Calculando a medida de área do retângulo:

$$A_{\text{retângulo}} = 15 \cdot 12 = 180$$

   Portanto, a medida de área do retângulo de medidas 15 m e 12 m é igual a 180 m^2.

   Calculando a medida de área de cada triângulo:

$$A_{\Delta} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$$

   Então, a medida de área de um desses triângulos é 30 m^2.

   Portanto:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{retângulo}} + 2 \cdot A_{\Delta}$$
$$A_{\text{total}} = 180 + 2 \cdot 30$$
$$A_{\text{total}} = 180 + 60$$
$$A_{\text{total}} = 240$$

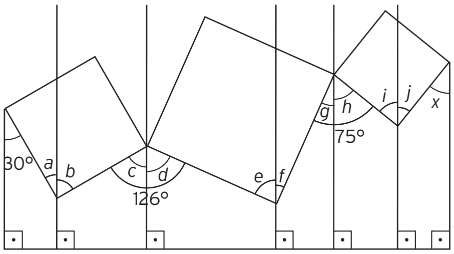
   Logo, a medida de área total é 240 m^2.

   Como Laura vai dar duas demãos de tinta, ela precisará de tinta suficiente para 480 m^2 ($240 \cdot 2 = 480$).

   Como o rendimento da tinta é de 15 m^2/L, ela precisará comprar 32 L (480 : 15 = 32) de tinta.

2. Alternativa **a**.

   Traçando retas perpendiculares à base, determinamos cada um dos ângulos, iniciando pelo ângulo conhecido (de medida 30°) até chegar ao ângulo de medida x.



Ilustrações: ID/BR

Os pares de ângulos 30° e $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$, $\hat{d}$ e $\hat{e}$, $\hat{f}$ e $\hat{g}$, $\hat{h}$ e $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{x}$ são alternos internos, portanto $a = 30°$; $b = c$; $d = e$; $f = g$; $h = i$; $j = x$.

Além disso, $\hat{a} + \hat{b} = 90°$; $\hat{c} + \hat{d} = 126°$; $\hat{e} + \hat{f} = 90°$; $\hat{g} + \hat{h} = 75°$; $\hat{i} + \hat{j} = 90°$.

Então:

$$b = 60°$$
$$c = 60°$$
$$d = 126° - 60° = 66°$$
$$e = 66°$$
$$f = 90° - 66° = 24°$$
$$g = 24°$$
$$h = 75° - 24° = 51°$$
$$i = 51°$$
$$j = 90 - 51° = 39°$$
$$x = 39°$$

Portanto, a medida do ângulo x é 39°.

3. As 7 cabeças representam 7 animais (coelhos ou galinhas). Distribuindo 2 patas/pés para cada cabeça, tem-se 14 patas/pés para 7 cabeças. Como são 22 patas/pés, faltam distribuir 8 patas/pés (22 − 14 = 8). Em seguida, para distribuir essas 8 patas/pés que sobraram, colocam-se mais 2 patas/pés em cada cabeça até terminar as patas/pés. Assim, as 8 patas/pés restantes completarão 4 cabeças (8 : 2 = 4). Logo, serão 4 coelhos (com 4 patas) e 3 galinhas (com 2 pés).

PÁGINA 128 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Alternativa **d**.

Como os ângulos são alternos internos, eles são congruentes. Então:

$$5x + 8 = 7x - 12$$
$$5x - 7x = -8 - 12$$
$$-2x = -20$$
$$x = \frac{-20}{-2}$$
$$x = 10$$

Substituindo $x = 10$ em uma das expressões que determinam a medida desses ângulos, tem-se:

$$5x + 8 = 5 \cdot 10 + 8 = 58$$

Portanto, cada ângulo mede 58°, e a soma das medidas dos ângulos é igual a 116° (58° + 58° = 116°).

2. Pelo teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{8}{10} = \frac{x}{2} = \frac{6}{y}$$

Assim, para descobrir o valor de x, tem-se:

$$\frac{8}{10} = \frac{x}{2}$$
$$\frac{4}{5} = \frac{x}{2}$$
$$4 \cdot 2 = 5 \cdot x$$
$$8 = 5x$$
$$x = \frac{8}{5}$$
$$x = 1{,}6$$

Para descobrir o valor de y, tem-se:

$$\frac{8}{10} = \frac{6}{y}$$
$$\frac{4}{5} = \frac{6}{y}$$
$$4 \cdot y = 6 \cdot 5$$
$$4y = 30$$
$$y = \frac{30}{4}$$
$$y = 7{,}5$$

Portanto, $x = 1{,}6$ e $y = 7{,}5$.

3. Pelo teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{y}{50} = \frac{40}{25} = \frac{x}{10}$$

Primeiro, determina-se o valor de x:

$$\frac{40}{25} = \frac{x}{10}$$
$$25x = 40 \cdot 10$$
$$x = \frac{40 \cdot 10}{25}$$
$$x = 16$$

Agora, determina-se o valor de y:

$$\frac{y}{50} = \frac{40}{25}$$
$$25y = 50 \cdot 40$$
$$y = \frac{50 \cdot 40}{25}$$
$$y = 80$$

Portanto, $x = 16$ e $y = 80$.

4. Alternativa **d**.

Como o triângulo ABC é retângulo, determina-se AC pelo teorema de Pitágoras:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$
$$10^2 = 6^2 + (AC)^2$$
$$100 = 36 + (AC)^2$$
$$(AC)^2 = 100 - 36$$
$$(AC)^2 = 64$$
$$AC = \sqrt{64}$$
$$AC = 8$$

Os triângulos ABC e EDC são semelhantes pelo caso AA, pois têm um ângulo $\hat{C}$ comum e um ângulo reto. Então:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{EC}$$
$$\frac{6}{DE} = \frac{8}{4}$$
$$DE = \frac{6 \cdot 4}{8}$$
$$DE = 3$$

A medida de $\overline{DE}$ é 3 cm.

5. a) Pelo teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{68}{x} = \frac{40}{65} = \frac{36}{2y}$$

Primeiro, calcula-se o valor de x.

$$\frac{68}{x} = \frac{40}{65}$$
$$40x = 68 \cdot 65$$
$$x = \frac{68 \cdot 65}{40}$$
$$x = 110{,}5$$

Agora, calcula-se o valor de y.

$$\frac{40}{65} = \frac{36}{2y}$$
$$40 \cdot 2y = 36 \cdot 65$$
$$y = \frac{36 \cdot 65}{80}$$
$$y = 29{,}25$$

Portanto, $x = 110{,}5$ e $y = 29{,}25$.

b) Pelo teorema de Tales, tem-se:

$$\frac{8}{x} = \frac{16}{x + 4} = \frac{y}{x + 10}$$

Primeiro, calcula-se o valor de x.

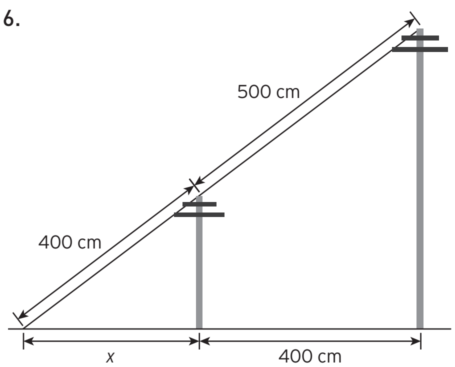
$$\frac{8}{x} = \frac{16}{x + 4}$$
$$16x = 8 \cdot (x + 4)$$
$$16x = 8x + 32$$
$$8x = 32$$
$$x = \frac{32}{8}$$
$$x = 4$$

Agora, calcula-se o valor de y.

$$\frac{8}{x} = \frac{y}{x + 10}$$
$$\frac{8}{4} = \frac{y}{4 + 10}$$
$$\frac{8}{4} = \frac{y}{14}$$
$$4y = 8 \cdot 14$$
$$y = \frac{8 \cdot 14}{4}$$
$$y = 28$$

Portanto, $x = 4$ e $y = 28$.

6.



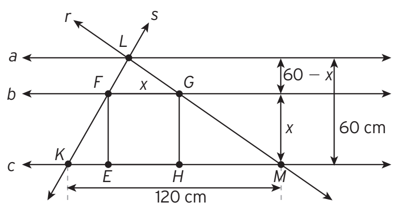
Pelo teorema de Tales, tem-se, em centímetro:

$$\frac{500}{400} = \frac{400}{x}$$
$$500x = 400 \cdot 400$$
$$x = \frac{400 \cdot 400}{500}$$
$$x = 320$$

Transformando em metro a medida obtida, tem-se $x = 3{,}2$ m.

Portanto, a medida da distância entre o ponto em que o fio foi preso ao solo e o poste mais próximo a ele é 3,2 m.

7.



Considerando x a medida do lado do quadrado $EFGH$, tem-se:

$$\frac{60}{60-x} = \frac{120}{x}$$
$$60x = 120 \cdot (60 - x)$$
$$x = \frac{120 \cdot (60 - x)}{60}$$
$$x = 2 \cdot (60 - x)$$
$$x = 120 - 2x$$
$$3x = 120$$
$$x = \frac{120}{3}$$
$$x = 40$$

Portanto, o lado do quadrado mede 40 cm.

8. Seja A a medida da área, x a medida do lado e h a medida da altura do triângulo equilátero, então:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$A = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

Do enunciado, tem-se que $A = 36\sqrt{3}$. Assim:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 36\sqrt{3}$$
$$\frac{x^2}{4} = 36$$
$$x^2 = 36 \cdot 4$$
$$x^2 = 144$$
$$x = 12$$

Agora, determina-se a medida da altura substituindo $x = 12$ em $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 6\sqrt{3}$$

Portanto, a medida da altura do triângulo equilátero é $6\sqrt{3}$ cm.

9. Os triângulos ABC e EDC são semelhantes pelo caso AA, pois como $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são paralelos, os pares $C\hat{A}B$ e $C\hat{E}D$, $C\hat{B}A$ e $C\hat{D}E$ são alternos internos e, portanto, congruentes.

Da figura, tem-se que $BD = BC + CD$, portanto $CD = BD - BC$. Então:

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD}$$
$$\frac{12}{18} = \frac{BC}{BD - BC}$$
$$\frac{12}{18} = \frac{BC}{25 - BC}$$
$$18 \cdot BC = 12 \cdot (25 - BC)$$
$$18 \cdot BC = 300 - 12 \cdot BC$$
$$30 \cdot BC = 300$$
$$BC = 10$$

Logo, $BC = 10$ cm e $CD = 15$ cm $(25 - 10 = 15)$.

10. Se dois triângulos são semelhantes e a razão de semelhança é igual a k, então a razão entre suas áreas é igual a k^2. Então:

$$DE = \frac{4}{3} \cdot AB$$
$$k = \frac{DE}{AB} = \frac{4}{3}$$

Sendo A a medida da área do triângulo DEC, tem-se:

$$\frac{A}{18} = k^2$$
$$\frac{A}{18} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$
$$\frac{A}{18} = \frac{16}{9}$$
$$9 \cdot A = 16 \cdot 18$$
$$A = \frac{16 \cdot 18}{9}$$
$$A = 16 \cdot 2$$
$$A = 32$$

Portanto, a medida da área da região triangular CDE é 32 cm^2.

11. Resposta pessoal.

12. Sendo a a medida da hipotenusa $\overline{BC}$ do triângulo ABC, aplicando o teorema de Pitágoras, tem-se:

$$a^2 = 6^2 + 12^2$$
$$a^2 = 36 + 144$$
$$a^2 = 180$$
$$a = 6\sqrt{5}$$

Portanto, a hipotenusa $\overline{BC}$ mede $6\sqrt{5}$ cm.

No triângulo ABC, tem-se:

- $(AC)^2 = (BC) \cdot x$

$$6^2 = 6 \cdot \sqrt{5} \cdot x$$
$$36 = 6 \cdot \sqrt{5} \cdot x$$
$$x = \frac{6}{\sqrt{5}}$$
$$x = \frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$
$$x = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

- $(AB)^2 = (BC) \cdot y$

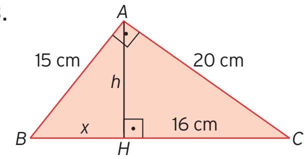
$$12^2 = 6 \cdot \sqrt{5} \cdot y$$
$$144 = 6 \cdot \sqrt{5} \cdot y$$
$$y = \frac{144}{6\sqrt{5}}$$
$$y = \frac{24}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$
$$y = \frac{24\sqrt{5}}{5}$$

Assim:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{6\sqrt{5}}{5}}{\frac{24\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{4}$$

Portanto, a razão $\frac{x}{y}$ no triângulo retângulo ABC é $\frac{1}{4}$.

13.



Ilustrações: ID/BR

a) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AHC, tem-se:

$$20^2 = h^2 + 16^2$$
$$h^2 = 20^2 - 16^2$$
$$h^2 = (20 + 16) \cdot (20 - 16)$$
$$h^2 = 36 \cdot 4$$
$$h^2 = 144$$
$$h = 12$$

Portanto, a medida da altura relativa à hipotenusa é 12 cm.

b) Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, sendo a a medida da hipotenusa $\overline{BC}$, tem-se:

$$a^2 = 15^2 + 20^2$$
$$a^2 = 225 + 400$$
$$a^2 = 625$$
$$a = \sqrt{625}$$
$$a = 25$$

Portanto, a hipotenusa mede 25 cm.

c) Sendo x a projeção do outro cateto sobre a hipotenusa, tem-se:

$$15^2 = x^2 + h^2$$
$$225 = x^2 + 12^2$$
$$x^2 = 225 - 144$$
$$x^2 = 81$$
$$x = 9$$

Portanto, a projeção do outro cateto mede 9 cm.

14. Alternativa **d**.

Considerando c a medida do comprimento do corrimão menos os dois segmentos horizontais de 30 cm cada um, é possível observar que c é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm medidas de comprimento igual a 90 cm e 120 cm $(5 \cdot 24 = 120)$. Aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo, tem-se:

$$c^2 = 90^2 + 120^2$$
$$c^2 = 8\,100 + 14\,400$$
$$c^2 = 22\,500$$
$$c = 150$$

Portanto, a medida do comprimento total do corrimão é:

$$30 + 150 + 30 = 210$$

Logo a medida do comprimento total do corrimão é 210 cm ou 2,1 m.

UNIDADE 4 – PRODUTOS NOTÁVEIS, FATORAÇÃO E EQUAÇÕES

CAPÍTULO 1 – PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO

PÁGINA 136 – ATIVIDADES

1. a) $(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

   b) $(y+1)^2 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 = y^2 + 2y + 1$

   c) $(2+y)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + y^2 = 4 + 4y + y^2$

   d) $(4p+5)^2 = (4p)^2 + 2 \cdot (4p) \cdot 5 + 5^2 = 16p^2 + 40p + 25$

   e) $\left(b + \frac{3}{2}\right)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = b^2 + 3b + \frac{9}{4}$

   f) $\left(\frac{2x}{3} + 6x^4\right)^2 = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2x}{3}\right) \cdot (6x^4) + (6x^4)^2 =$
   $= \frac{4x^2}{9} + 8x^5 + 36x^8$

2. Como a medida do lado do quadrado é igual a $(2a+4)$ cm, a medida da área é representada por:
   $$(2a+4)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot (2a) \cdot 4 + 4^2 = 4a^2 + 16a + 16$$
   Considerando $a = 1{,}5$ cm, tem-se:
   $$4 \cdot 1{,}5^2 + 16 \cdot 1{,}5 + 16 = 9 + 24 + 16 = 49$$
   Logo, a área do quadrado mede 49 cm^2.

3. a) $(x-1)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 - 2x + 1$

   b) $(4x-11)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 11 + 11^2 = 16x^2 - 88x + 121$

   c) $(2-z)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot z + z^2 = 4 - 4z + z^2$

   d) $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{9} - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{4}$

4. a) A região amarela é um quadrado de lado medindo x. Então, sua área mede x^2 m^2.

   b) A região azul é um quadrado de lado medindo $(x+4)$ m. Então, sua área é dada por:
   $$A = (x+4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$$
   Logo, a medida da área da região azul é $(x^2 + 8x + 16)$ m^2.

   c) $(x^2 + 8x + 16) - x^2 = x^2 + 8x + 16 - x^2 = 8x + 16$
   Logo, a diferença entre as medidas é $(8x + 16)$ m^2.

   d) $x + x + 4 + (x+4) + (x+4) + (x+4) + x = 6x + 16$
   Logo, a medida do perímetro da figura é $(6x + 16)$ m.

5. a) $(y+6) \cdot (y-6) = y^2 + 6y - 6y - 36 = y^2 - 36$

   b) $(2c+3) \cdot (2c-3) = (2c) \cdot (2c) + 3 \cdot (2c) - 3 \cdot (2c) - 9 =$
   $= 4c^2 + 6c - 6c - 9 = 4c^2 - 9$

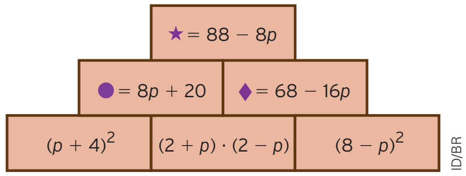
   c) $(4h^2 - 3y^3) \cdot (4h^2 - 3y^3) = (4h^2) \cdot (4h^2) +$
   $+ (4h^2) \cdot (3y^3) - (4h^2) \cdot (3y^3) - (3y^3) \cdot (3y^3) =$
   $= 16h^4 + 12h^2y^3 - 12h^2y^3 - 9y^6 = 16h^4 - 9y^6$

   d) $(xy + z^3) \cdot (xy - z^3) =$
   $= (xy) \cdot (xy) + (xy) \cdot (z^3) - (xy) \cdot (z^3) - (z^3) \cdot (z^3) =$
   $= x^2y^2 + xyz^3 - xyz^3 - z^6 = x^2y^2 - z^6$

6. a) $(b-1) \cdot (b+1) + 1 = b^2 + b \cdot 1 - 1 \cdot b - 1 + 1 = b^2$

   b) $(x+1) \cdot (x-1) - x \cdot (x^2 + x) = x^2 - 1^2 - x \cdot x^2 - x \cdot x =$
   $= x^2 - 1 - x^3 - x^2 = -x^3 - 1$

   c) $(4-3y) \cdot (4+3y) + (3y+2) \cdot (3y-2) =$
   $= 4^2 - (3y)^2 + (3y)^2 - 2^2 = 16 - 9y^2 + 9y^2 - 4 = 12$

7. 

   ● $= (p+4)^2 + (2+p) \cdot (2-p) = p^2 + 8p + 16 + 4 - p^2 = 8p + 20$

   ♦ $= (2+p) \cdot (2-p) + (8-p)^2 = 4 - p^2 + 64 - 16p + p^2 = 68 - 16p$

   ★ $= (8p + 20) + (68 - 16p) = 88 - 8p$

8. Alternativa **c**.
   $$\underbrace{16x^2}_{(4x)^2} + \underbrace{48x}_{2 \cdot (4x) \cdot (\sqrt{y})} + \underbrace{y}_{(\sqrt{y})^2}$$
   Então:
   - $48x = 2 \cdot (4x) \cdot (\sqrt{y}) = 8\sqrt{y}$
   - $6 = \sqrt{y}$
   - $y = 36$

9. Resposta possível:
   $$(5x^2 + 8)^2 = (5x^2)^2 + 2 \cdot (5x^2) \cdot 8 + 8^2 = 25x^4 + 80x^2 + 64$$

10. • $(a+b) \cdot (a+b) = [3 + (-2)] \cdot [3 + (-2)] =$
   $= [3 - 2] \cdot [3 - 2] = 1 \cdot 1 = 1$
   • $(a+b) \cdot (a-b) = [3 + (-2)] \cdot [3 - (-2)] = [3 - 2] \cdot [3 + 2] =$
   $= 1 \cdot 5 = 5$

11. Alternativa **e**.
   $$m^2n^2 - 4x^2 = (mn)^2 - (2x)^2 = (mn + 2x) \cdot (mn - 2x)$$

PÁGINA 138 – ATIVIDADES

12. a) $(y+3)^3 = y^3 + 3 \cdot y^2 \cdot 3 + 3 \cdot y \cdot 3^2 + 3^3 = y^3 + 9y^2 + 27y + 27$

   b) $(2x + z^2)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot z^2 + 3 \cdot (2x) \cdot (z^2)^2 + (z^2)^3 =$
   $= 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot z^2 + 6x \cdot z^4 + z^6 = 8x^3 + 12x^2z^2 + 6xz^4 + z^6$

   c) $(a^2 + 4b)^3 = (a^2)^3 + 3 \cdot (a^2)^2 \cdot 4b + 3 \cdot a^2 \cdot (4b)^2 + + (4b)^3 =$
   $= a^6 + 12a^4b + 48a^2b^2 + 64b^3$

   d) $\left(\frac{a}{3} + b\right)^3 = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 \cdot b + 3 \cdot \left(\frac{a}{3}\right) \cdot b^2 + b^3 =$
   $= \frac{a^3}{27} + 3 \cdot \frac{a^2}{9} \cdot b + 3 \cdot \frac{a}{3} \cdot b^2 + b^3 = \frac{a^3}{27} + \frac{a^2b}{3} + ab^2 + b^3$

13. Sabe-se que:
   $$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
   Então:
   $$p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3 = (p-q)^3$$
   Portanto, a medida da aresta do cubo é $(p-q)$ dm.

14. A figura é composta de 3 blocos retangulares cujas medidas das arestas são: $5x$, $3y$ e $3y$. Sendo V a medida do volume de cada bloco retangular, tem-se:
   $$V = (3y)^2 \cdot 5x = 9 \cdot 5xy^2 = 45xy^2$$
   Como os 3 blocos retangulares são idênticos, determina-se o valor de $3V$.
   $$3V = 3 \cdot 45xy^2 = 135xy^2$$
   Portanto, a medida do volume da figura é $135xy^2$.

PÁGINA 143 – ATIVIDADES

15. a) $px + py + bx + by = p(x + y) + b(x + y) = (x + y) \cdot (p + b)$

b) $k^2a - k^2b + 6a - 6b = k^2 \cdot (a - b) + 6 \cdot (a - b) =$
$= (a - b) \cdot (k^2 + 6)$

c) $5gh + 3g + 40h + 24 = g \cdot (5h + 3) + 8 \cdot (5h + 3) =$
$= (5h + 3) \cdot (g + 8)$

d) $ax - ay - bx + by = a \cdot (x - y) - b \cdot (x - y) = (x - y) \cdot (a - b)$

16. a) Fatorando a expressão, tem-se:
$xy - x + y - 1 = x \cdot (y - 1) + 1 \cdot (y - 1) = (y - 1) \cdot (x + 1)$
Para $x = 99$ e $y = 101$, tem-se:
$$(101 - 1) \cdot (99 + 1) = 100 \cdot 100 = 10\,000$$

b) Fatorando e simplificando a expressão, tem-se:
$$\frac{2mp - mq + 2np - nq}{2m + 2n} \quad (m + n) \neq 0$$
$$\frac{m \cdot (2p - q) + n \cdot (2p - q)}{2 \cdot (m + n)} = \frac{(2p - q) \cdot (m + n)}{2 \cdot (m + n)} = \frac{2p - q}{2}$$
Para $p = 5$ e $q = -10$, tem-se:
$$\frac{2 \cdot 5 - (-10)}{2} = \frac{10 + 10}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

c) Fatorando a expressão, tem-se:
$3x^2 + 3xy + 2xy^2 + 2y^3 = 3x \cdot (x + y) + 2y^2 \cdot (x + y) =$
$= (x + y) \cdot (3x + 2y^2)$
Para $x = 2$ e $y = 5$, tem-se:
$= (2 + 5) \cdot (3 \cdot 2 + 2 \cdot 5^2) = 7 \cdot (6 + 2 \cdot 25) = 7 \cdot (6 + 50) =$
$= 7 \cdot 56 = 392$

d) Fatorando a expressão, tem-se:
$a^3 - 4a^2b + 3ab - 12b^2 = a^2 \cdot (a - 4b) + 3b \cdot (a - 4b) =$
$= (a - 4b) \cdot (a^2 + 3b)$
Para $a = 4$ e $b = 3$, tem-se:
$(4 - 4 \cdot 3) \cdot (4^2 + 3 \cdot 3) = (4 - 12) \cdot (16 + 9) = (-8) \cdot 25 = -200$

17. a) $a^2 - 1 = (a + 1) \cdot (a - 1)$

b) $4x^2 - 9z^2 = (2x)^2 - (3z)^2 = (2x + 3z) \cdot (2x - 3z)$

c) $a^4 - 16 = (a^2)^2 - 4^2 = (a^2 + 4) \cdot (a^2 - 4) = (a^2 + 4) \cdot (a^2 - 2^2)$
$=$
$= (a^2 + 4) \cdot (a + 2) \cdot (a - 2)$

d) $16 - 25x^4y^6 = 4^2 - (5x^2y^3)^2 = (4 + 5x^2y^3) \cdot (4 - 5x^2y^3)$

18. a) Fatorando e simplificando a expressão, tem-se:
$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} \quad (x + y \neq 0)$$
$$\frac{(x + y) \cdot (x - y)}{x + y} = x - y$$
Para $x = 1999$ e $y = 1998$, tem-se:
$$1999 - 1998 = 1$$

b) $\dfrac{x^6 - y^6}{x + y} \quad (x + y \neq 0)$
$$\frac{(x^3 + y^3) \cdot (x^3 - y^3)}{x + y}$$
Para $x = 4$ e $y = 3$, tem-se:
$$\frac{(64 + 27) \cdot (64 - 27)}{7} = \frac{91 \cdot 37}{7} = 481$$

19. a) $14xy - 21xz = 7x \cdot (2y - 3z)$

b) $cy - y + cx - x = y \cdot (c - 1) + x \cdot (c - 1) = (c - 1) \cdot (y + x)$

c) $ax - 4a + 6x - 24 = a \cdot (x - 4) + 6 \cdot (x - 4) = (x - 4) \cdot (a + 6)$

20. Um polinômio na forma fatorada é representado pelo produto de fatores, que são também polinômios. Portanto, os polinômios que estão na forma fatorada são:

b) $(x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 7)$

c) $(a + 2b) \cdot (a + 2b)$

21. a) $a^2x + a^2y - 5a^2$
Fator comum: a^2

b) $2b^2 - 6a + 8c$
Fator comum: 2

c) $x^5y^5z^4 + x^7y^4z^3 - 4x^4y^6z^8$
Fator comum: $x^4y^4z^3$

22. a) $xa^2 - xc^3 - 5x = x \cdot (a^2 - c^3 - 5)$

b) $8t^2 - 12u = 4 \cdot (2t^2 - 3u)$

c) $y^5 + 2y^3 - 7y^2z = y^2 \cdot (y^3 + 2y - 7z)$

d) $4x^3 + 10x^2 - 16x = 2x \cdot (2x^2 + 5x - 8)$

23. a) $(3a + 11) \cdot (3a - 11) = 9a^2 - 121$

b) $(a + 9) \cdot (a - 9) = a^2 - 81$

c)
- Fernanda:
$$(a^2 + 9) \cdot (a^2 - 9) = a^4 - 81$$
- Júnior:
$$(a^2 + 9) \cdot (a + 3) \cdot (a - 3) = (a^2 + 9) \cdot (a^2 - 9) = a^4 - 81$$

Portanto, o polinômio escolhido por Fernanda e Júnior é $a^4 - 81$.

d) Porque Júnior fatorou $(a^2 - 9)$, obtendo o produto $(a + 3) \cdot (a - 3)$, e Fernanda, não.

PÁGINA 146 – ATIVIDADES

24. I-d; II-c; III-a; IV-e; V-f; VI-b.

a) $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$

b) $(2p + q)^2 = 4p^2 + 4pq + q^2$

c) $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

d) $(2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1$

e) $(m^2 + 2n)^2 = m^4 + 4m^2n + 4n^2$

f) $(2k^2 - 3x^2)^2 = 4k^4 - 12k^2x^2 + 9x^4$

25. a) $(m + 3)^2 = m^2 + 6m + 9$
Logo, $\blacksquare = 9$.

b) $(m - 4)^2 = m^2 - 8m + 16$
Logo, $\blacksquare = 8m$.

c) $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
Logo, $\blacksquare = 4x^2$.

d) $(3x - 2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$
Logo, $\blacksquare = -12xy$.

e) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}$

Logo, ■ $=\frac{xy}{3}$.

f) $\left(\frac{3x}{5}-\frac{y^2}{2}\right)^2=\frac{9x^2}{25}-\frac{3xy^2}{5}+\frac{y^4}{4}$

Logo, ■ $=\frac{y^4}{4}$.

26. a) $x^2+4x+16$

Não é quadrado perfeito, pois:

$2\cdot x\cdot 4\neq 4x$

b) y^2-6y+9

É quadrado perfeito, pois:

$2\cdot y\cdot 3=6y$

c) $4x^2-2x+1$

Não é quadrado perfeito, pois:

$2\cdot 2x\cdot 1\neq 2x$

d) $a^2+10a+25$

É quadrado perfeito, pois:

$2\cdot a\cdot 5=10a$

27. a) $x^2+8x+16=x^2+2\cdot x\cdot 4+4^2=(x+4)^2$

b) $4z^2-4z+1=(2z)^2-2\cdot 2z\cdot 1+1^2=(2z-1)^2$

c) $9+6a^2b+a^4b^2=3^2+2\cdot 3\cdot a^2b+(a^2b)^2=(3+a^2b)^2$

d) $4x^4-28x^2y^3+49y^6=(2x^2)^2-2\cdot 2x^2\cdot 7y^3+(7y^3)^2=(2x^2-7y^3)^2$

28. a) $\underbrace{m^3}_{\sqrt[3]{m^3}=m}+\underbrace{27}_{\sqrt[3]{27}=3}=(m+3)\cdot(m^2-3m+9)$

b) $\underbrace{p^3}_{\sqrt[3]{p^3}=p}-\underbrace{1\,000}_{\sqrt[3]{1\,000}=10}=(p-10)\cdot(p^2+10p+100)$

c) $\underbrace{64x^3}_{\sqrt[3]{64x^3}=4x}+\underbrace{1}_{\sqrt[3]{1}=1}=(4x+1)\cdot(16x^2-4x+1)$

d) $\underbrace{125y^3}_{\sqrt[3]{125y^3}=5y}-\underbrace{216z^3}_{\sqrt[3]{216z^3}=6z}=(5y-6z)\cdot(25y^2+30yz+36z^2)$

29. I. quadrado de x ← x^2+8x+ ✹ → quadrado de 4

dobro do produto de x e 4

Logo, o trinômio é $x^2+8x+16$.

II. quadrado de b ← b^2- ✹ $+9c^2$ → quadrado de $3c$

dobro do produto de b e $3c$

Logo, o trinômio é $b^2-6bc+9c^2$.

III. quadrado de z ← z^2+z+ ✹ → quadrado de $\frac{1}{2}$ → $\frac{1}{4}$

dobro do produto de z e $\frac{1}{2}$

Logo, o trinômio é $z^2+z+\frac{1}{4}$.

IV. quadrado de $2a$ → $4a^2$ ← ✹ $-12a+9$ → quadrado de 3

dobro do produto de $2a$ e 3

Logo, o trinômio é $4a^2-12a+9$.

30. a) $14^2+2\cdot 14\cdot 6+6^2=(14+6)^2=20^2=400$

b) $34^2+2\cdot 34\cdot 16+16^2=(34+16)^2=50^2=2\,500$

c) $77^2+2\cdot 77\cdot 23+23^2=(77+23)^2=100^2=10\,000$

d) $18^2-2\cdot 18\cdot 8+8^2=(18-8)^2=10^2=100$

e) $37^2-2\cdot 7\cdot 37+7^2=(37-7)^2=30^2=900$

f) $\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{2}\right)^2=1^2=1$

31. As correspondências corretas são: A-III; B-I; C-IV; D-II.

A. $(x+10)\cdot(x^2-10x+100)=$

$=x^3-10x^2+100x+10x^2-100x+1\,000=x^3+1\,000$

B. $(2x+3y)\cdot(4x^2-6xy+9y^2)=$

$=8x^3-12x^2y+18xy^2+12x^2y-18xy^2+27y^3=8x^3+27y^3$

C. $(x-5)\cdot(x^2+5x+25)=x^3+5x^2+25x-5x^2-25x-125=$

$=x^3-125$

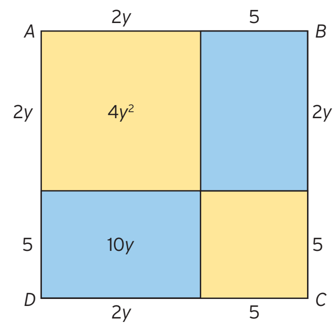
D. $(3a-2b)\cdot(9a^2+6ab+4b^2)=$

$=27a^3+18a^2b+12ab^2-18a^2b-12ab^2-8b^3=27a^3-8b^3$

PÁGINA 147 – DIVERSIFICANDO

1. a) Como a medida da área do quadrado amarelo indicado é $4y^2$, seu lado mede $2y$, pois $\sqrt{4y^2}=2y$.

O retângulo azul de área medindo $10y$ tem um dos lados comum ao quadrado amarelo, portanto sua base mede $2y$. Assim, a altura desse retângulo mede 5, pois sua área mede $10y$ $\left(\frac{10y}{2y}=5\right)$.



ID/BR

Então, a medida do lado do quadrado $ABCD$ é $2y+5$.

b) Sendo S a medida da área do quadrado $ABCD$, tem-se:

$S=(2y+5)^2=(2y)^2+2\cdot(2y)\cdot 5+5^2=4y^2+20y+25$

2. a) $(2-5z)\cdot(2+5z)+(6z+1)\cdot(6z-1)=2^2-(5z)^2+(6z)^2-1^2=$

$=4-25z^2+36z^2-1=11z^2+3$

b) $11z^2+3=179$

$11z^2=179-3$

$z^2=\frac{176}{11}$

$z=\sqrt{16}\ \ (z>0)$

$z=4$

3. a) Como o lado do quadrado mede 4 unidades a menos que a altura, pode-se representar sua medida pelo polinômio $h - 4$.

b) Considerando V a medida do volume da caixa, tem-se:

$V = (h-4)^2 \cdot h = (h^2 - 2 \cdot h \cdot 4 + 4^2) \cdot h =$

$= (h^2 - 8h + 16) \cdot h = h^3 - 8h^2 + 16h$

c) Seja A_{base} a medida da área da base, assim:

$$A_{base} = (h-4)^2 = h^2 - 8h + 16$$

Seja $A_{lateral}$ a medida da área lateral, então:

$$A_{lateral} = (h-4) \cdot h = h^2 - 4h$$

Seja A_{total} a medida da área total, dada por:

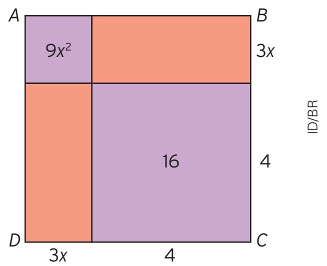
$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + 4 \cdot A_{lateral} = 2 \cdot (h^2 - 8h + 16) + 4 \cdot (h^2 - 4h) =$

$= 2h^2 - 16h + 32 + 4h^2 - 16h = 6h^2 - 32h + 32$

4. a) $\sqrt{9x^2} = 3x$

$\sqrt{16} = 4$

Os lados dos quadrados menores medem $3x$ e 4.

b) 

Sendo $A_{retângulo}$ a medida da área de cada retângulo, tem-se:

$$A_{retângulo} = 3x \cdot 4 = 12x$$

c) Sendo A_{ABCD} a medida da área do quadrado $ABCD$, cujos lados medem $3x + 4$, tem-se:

$$A_{ABCD} = (3x+4)^2 = 9x^2 + 24x + 16$$

5. Sabendo que $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$, a medida do volume desse cubo é representada por $(a-b)^3$ dm^3.

Logo, a medida da aresta do cubo é representada por $(a - b)$ dm.

6. A medida do volume do cubo é dada pelo cubo das medidas de suas arestas. Logo, a expressão que representa o excedente dessa medida do cubo marrom em relação ao cubo azul é:

$$(x+2)^3 - x^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 = 6x^2 + 12x + 8$$

7. Considerando que a pessoa tinha:

- x cédulas de y reais: xy
- y cédulas de x reais: yx

e colocou em seu bolso mais:

- x cédulas de x reais: x^2
- y cédulas de y reais: y^2

então, ela ficou, em reais, com:

$$xy + yx + x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

8. $\underbrace{36x^2}_{\substack{\text{quadrado}\\ \text{de } 6x}} \quad \underbrace{-60x}_{\substack{\text{oposto do dobro}\\ \text{de } 6x \cdot a}} \quad + \quad \underbrace{7+b}_{\substack{\text{quadrado}\\ \text{de } a}} =$

$= (6x - a)^2 = 36x^2 - 12ax + a^2$

Assim, tem-se que:

$$-60x = -12ax$$
$$12a = 60$$
$$a = 5$$

Sabendo que $7 + b$ equivale ao quadrado de a, tem-se:

$$7 + b = 25$$
$$b = 18$$

O número natural que, adicionado a esse polinômio, resulta em um trinômio quadrado perfeito é o número 18.

CAPÍTULO 2 – FRAÇÕES ALGÉBRICAS

PÁGINA 150 – ATIVIDADES

1. a) $\dfrac{5p}{p+3}$, para $p = 2$

$$\frac{5 \cdot 2}{2+3} = \frac{10}{5} = 2$$

b) $\dfrac{a-b}{a+b}$, para $a = -3$ e $b = -1$

$$\frac{-3-(-1)}{-3+(-1)} = \frac{-3+1}{-3-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

c) $y + \dfrac{1}{y}$, para $y = \dfrac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{3}{1} = \frac{1}{3} + 3 = \frac{1+9}{3} = \frac{10}{3}$$

d) $\dfrac{x^2+x+1}{2x+3}$, para $x = -3$

$$\frac{(-3)^2 + (-3) + 1}{2 \cdot (-3) + 3} = \frac{9-3+1}{-6+3} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$$

2. a) $\dfrac{5x^2+1}{x}$

$$x \neq 0$$

b) $\dfrac{5}{x-3}$

$$x - 3 \neq 0$$
$$x \neq 3$$

c) $\dfrac{2x^3 + 7x^2 - 9x - 3}{6x+4}$

$$6x + 4 \neq 0$$
$$6x \neq -4$$
$$x \neq -\frac{4}{6}$$
$$x \neq -\frac{2}{3}$$

d) $\dfrac{9x+3}{x^2-4x}$

$$x^2 - 4x \neq 0$$
$$x \cdot (x-4) \neq 0$$
$$x \neq 0 \text{ e } x - 4 \neq 0$$
$$x \neq 0 \text{ e } x \neq 4$$

3. a) $\dfrac{8a^3b^7c^5}{6a^8bc^5} = \dfrac{4b^6}{3a^5}$

b) $\dfrac{y^3-2y}{y} = \dfrac{y \cdot (y^2-2)}{y} = y^2 - 2$

c) $\dfrac{y+5}{y^2-25} = \dfrac{y+5}{(y+5)\cdot(y-5)} = \dfrac{1}{y-5}$

d) $\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + t} = \dfrac{(t-1)\cdot(t+1)}{t\cdot(t+1)} = \dfrac{t-1}{t}$

e) $\dfrac{a^3b - a^2b^2 + ab^3}{a^4b} = \dfrac{ab\cdot(a^2 - ab + b^2)}{a^4b} = \dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^3}$

f) $\dfrac{x^2 - 4xy + 4y^2}{x^2 - 2xy + 2x - 4y} = \dfrac{(x-2y)^2}{x\cdot(x-2y) + 2\cdot(x-2y)} =$

$= \dfrac{(x-2y)^2}{(x-2y)\cdot(x+2)} = \dfrac{x-2y}{x+2}$

g) $\dfrac{b^2 - 4b + 4}{ab - 2a} = \dfrac{(b-2)^2}{a\cdot(b-2)} = \dfrac{b-2}{a}$

h) $\dfrac{2x^2 - 3xy - 6x + 9y}{4x^2 - 9y^2} = \dfrac{x\cdot(2x-3y) - 3\cdot(2x-3y)}{(2x-3y)\cdot(2x+3y)} =$

$= \dfrac{(2x-3y)\cdot(x-3)}{(2x-3y)\cdot(2x+3y)} = \dfrac{x-3}{2x+3y}$

4. Alternativa **c**.

$$\frac{5x + 5y}{5y} = \frac{5(x+y)}{5y} = \frac{x+y}{y}$$

5. a) Seja A a medida da área do retângulo, então:

$A = (a^2b + ab^2)\cdot\left(\dfrac{a-b}{a^2+ab}\right) = ab\cdot(a+b)\cdot\left[\dfrac{a-b}{a(a+b)}\right] =$

$= \dfrac{ab\cdot(a+b)\cdot(a-b)}{a(a+b)} = b(a-b)$

b) Sendo $a = 5$ e $b = 3$, tem-se:

$$A = b\cdot(a-b) = 3\cdot(5-3) = 3\cdot 2 = 6$$

6. $\dfrac{\dfrac{x^3 - 25x}{3x - 15}\cdot\dfrac{15y}{4x}}{\dfrac{xy + 5y}{4}} = \dfrac{x^3 - 25x}{3x - 15}\cdot\dfrac{15y}{4x} : \dfrac{xy+5y}{4} =$

$= \dfrac{x\cdot(x^2 - 25)}{3\cdot(x-5)}\cdot\dfrac{15y}{4x}\cdot\dfrac{4}{xy+5y} = \dfrac{x\cdot(x-5)\cdot(x+5)}{3\cdot(x-5)}\cdot\dfrac{15y}{4x}\cdot\dfrac{4}{y\cdot(x+5)} =$

$= \dfrac{15\cdot 4\cdot xy\cdot(x-5)\cdot(x+5)}{3\cdot 4\cdot xy\cdot(x-5)\cdot(x+5)} = 5$

Após simplificar a expressão, Patrícia encontrou o número 5.

7. Pedro tem x filhos, Celso tem $(x + 1)$ filhos. Pedro vai dividir igualmente y reais, e Celso vai dividir o dobro dessa quantia entre seus filhos, portanto Celso vai dividir $2y$ reais. Dessa forma:

a) Cada filho de Pedro receberá, em reais: $\dfrac{y}{x}$

Cada filho de Celso receberá, em reais: $\dfrac{2y}{x+1}$

b) Para $x = 4$ e $y = 100$, tem-se que cada filho:

- de Pedro receberá, em reais: $\dfrac{100}{4} = 25$
- de Celso receberá, em reais: $\dfrac{2\cdot 100}{4+1} = \dfrac{200}{5} = 40$

Logo, cada filho de Celso receberá R\$ 15,00 a mais $(40 - 25 = 15)$ que cada filho de Pedro.

c) Para que os filhos de Pedro e de Celso recebam a mesma quantia, as frações algébricas que representam a quantidade de reais por filho devem ser iguais. Então:

$$\frac{y}{x} = \frac{2y}{x+1}$$
$$y\cdot(x+1) = 2xy \qquad (y \neq 0)$$
$$2x = x + 1$$
$$2x - x = 1$$
$$x = 1$$

E, como Celso tem um filho a mais do que Pedro, então:

$$y = x + 1 = 1 + 1 = 2$$

Portanto, para que todos os filhos de Pedro e de Celso recebessem a mesma quantia, Pedro deveria ter 1 filho e Celso, 2 filhos.

8. a) $E\cdot(12 - 3x) = 96 - 6x^2$

$E = \dfrac{96 - 6x^2}{12 - 3x}$

$E = \dfrac{6\cdot(16 - x^2)}{3\cdot(4 - x)}$

$E = \dfrac{-6\cdot(x^2 - 16)}{-3\cdot(x - 4)}$

Considerando $x \neq 4$, tem-se:

$$E = \frac{2\cdot(x-4)\cdot(x+4)}{x-4} = 2(x+4)$$

b) Seja P a medida do perímetro do retângulo $ABCD$, então:

$P = 2\cdot E + 2\cdot(12 - 3x) = 2\cdot[2\cdot(x+4)] + 2\cdot(12 - 3x) =$

$= 2\cdot(2x + 8) + 2\cdot(12 - 3x) = 4x + 16 + 24 - 6x = -2x + 40$

Como a medida do perímetro de $ABCD$ é igual a 36, substituindo P por 36, obtém-se o valor de x:

$$36 = -2x + 40$$
$$2x = 40 - 36$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

Logo, o valor de x é 2 cm.

PÁGINA 154 – ATIVIDADES

9. a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x+2} = \dfrac{(x+2) - 4x}{x\cdot(x+2)} = \dfrac{2 - 3x}{x\cdot(x+2)}$

b) $\dfrac{t+1}{t+2} + \dfrac{t+3}{t^2 - 4} = \dfrac{t+1}{t+2} + \dfrac{t+3}{(t+2)\cdot(t-2)} =$

$= \dfrac{(t+1)\cdot(t-2) + (t+3)}{(t+2)\cdot(t-2)} = \dfrac{t^2 - 2t + t - 2 + t + 3}{(t+2)\cdot(t-2)} =$

$= \dfrac{t^2 + 1}{(t+2)\cdot(t-2)}$

c) $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{x^2 - x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{x\cdot(x-1)} + \dfrac{1}{x} =$

$= \dfrac{2\cdot x\cdot(x-1) + 3\cdot(x+1) + (x-1)\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)} =$

$= \dfrac{2x^2 - 2x + 3x + 3 + x^2 - 1}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)} = \dfrac{3x^2 + x + 2}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$

d) $\dfrac{2}{y-1} + \dfrac{4-y}{y^2-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{2}{y-1} + \dfrac{4-y}{(y+1)\cdot(y-1)} - \dfrac{1}{y+1} =$

$= \dfrac{2\cdot(y+1) + (4-y) - 1\cdot(y-1)}{(y+1)\cdot(y-1)} = \dfrac{2y + 2 + 4 - y - y + 1}{(y+1)\cdot(y-1)}$

$=$

$= \dfrac{7}{(y+1)\cdot(y-1)}$

10. $A = \dfrac{2}{x+2}$ e $B = \dfrac{x}{x^2 + x}$

a) $B - A = \dfrac{x}{x^2+x} - \dfrac{2}{(x+2)} = \dfrac{x\cdot(x+2) - 2\cdot x\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x - 2x^2 - 2x}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)} = \dfrac{-x^2}{x\cdot(x^2 + 3x + 2)} = \dfrac{-x}{x^2 + 3x + 2}$

b) $B + B = 2B = 2\cdot\left(\dfrac{x}{x^2+x}\right) = \dfrac{2\cdot x}{x\cdot(x+1)} = \dfrac{2}{x+1}$

c) $B + A = \dfrac{x}{x^2 + x} + \dfrac{2}{(x+2)} = \dfrac{x \cdot (x+2) + 2 \cdot x \cdot (x+1)}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x + 2x^2 + 2x}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2)} = \dfrac{3x^2 + 4x}{x \cdot (x^2 + 3x + 2)} = \dfrac{x \cdot (3x+4)}{x \cdot (x^2 + 3x + 2)} =$

$= \dfrac{3x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

d) $A - B = \dfrac{2}{(x+2)} - \dfrac{x}{x^2 + x} = \dfrac{2 \cdot x \cdot (x+1) - x \cdot (x+2)}{(x+2) \cdot x \cdot (x+1)} =$

$= \dfrac{2x^2 + 2x - x^2 - 2x}{(x+2) \cdot x \cdot (x+1)} = \dfrac{x^2}{x \cdot (x^2 + 3x + 2)} = \dfrac{x}{x^2 + 3x + 2}$

11. $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{x^2 - 25}{x^2 + 5x} = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{(x+5) \cdot (x-5)}{x \cdot (x+5)} = \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{x-5}{x} =$

$= \dfrac{2x + (x-5) \cdot (x+1)}{x \cdot (x+1)} = \dfrac{2x + x^2 + x - 5x - 5}{x \cdot (x+1)} = \dfrac{x^2 - 2x - 5}{x \cdot (x+1)}$

Para $x = 3$, tem-se:

$$\frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 5}{3 \cdot (3+1)} = \frac{9 - 6 - 5}{3 \cdot 4} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}$$

12. a) $\dfrac{1}{t} + 2t^2 = \dfrac{1 + 2t^2 \cdot t}{t} = \dfrac{1 + 2t^3}{t}$

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{2 + 1}{2x} = \dfrac{3}{2x}$

13. $E = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1-x}{x} + 5 - \dfrac{x+3}{x^2}$

a) Para qualquer valor de x que não torne o denominador das frações algébricas nulo.

$$x^2 \neq 0$$
$$x \neq 0$$

b) • Para $x = 1$:

$$E = \frac{3}{1^2} + \frac{1-1}{1} + 5 - \frac{1+3}{1^2} = 3 + 0 + 5 - 4 = 4$$

• Para $x = 2$:

$$E = \frac{3}{2^2} + \frac{1-2}{2} + 5 - \frac{2+3}{2^2} = \frac{3}{4} + \frac{-1}{2} + 5 - \frac{5}{4} =$$

$$= \frac{3 - 2 + 20 - 5}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

c) $E = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1-x}{x} + 5 - \dfrac{x+3}{x^2} = \dfrac{3 + x \cdot (1-x) + 5x^2 - x - 3}{x^2} =$

$= \dfrac{3 + x - x^2 + 5x^2 - x - 3}{x^2} = \dfrac{4x^2}{x^2}$

Como $x \neq 0$, tem-se $E = 4$.

14. a) $\dfrac{a+3}{\dfrac{a^2 + 6a + 9}{a}} = (a+3) \cdot \dfrac{a}{a^2 + 6a + 9} = (a+3) \cdot \dfrac{a}{(a+3)^2} =$

$= \dfrac{a}{a+3}$

b) $\dfrac{b^2 - 8b + 16}{a^3 + a^2} \cdot \dfrac{a^2}{b-4} = \dfrac{(b-4)^2}{a^2 \cdot (a+1)} \cdot \dfrac{a^2}{b-4} = \dfrac{b-4}{a+1}$

c) $\dfrac{x^2 - 25}{x} \cdot \dfrac{2x^2 - x}{x-5} = \dfrac{(x+5) \cdot (x-5)}{x} \cdot \dfrac{x \cdot (2x-1)}{x-5} =$

$= (x+5) \cdot (2x - 1) = 2x^2 - x + 10x - 5 = 2x^2 + 9x - 5$

d) $(c+1) : \dfrac{c^2 + 2c + 1}{c^2 + 1} = (c+1) \cdot \dfrac{(c^2 + 1)}{(c+1)^2} = \dfrac{c^2 + 1}{c+1}$

15. $F = \dfrac{x-3}{y^2}$

a) $3F = 3 \cdot \left(\dfrac{x-3}{y^2}\right) = \dfrac{3 \cdot (x-3)}{y^2} = \dfrac{3x - 9}{y^2}$

b) $2F = 2 \cdot \left(\dfrac{x-3}{y^2}\right) = \dfrac{2 \cdot (x-3)}{y^2} = \dfrac{2x - 6}{y^2}$

c) $F - 2 = \dfrac{x-3}{y^2} - 2 = \dfrac{x - 3 - 2y^2}{y^2} = \dfrac{-2y^2 + x - 3}{y^2}$

16. $\dfrac{(x+a) \cdot (x-a)}{ay - y} \cdot \dfrac{2a - 3}{x^2 - a^2} = \dfrac{x^2 - a^2}{y(a-1)} \cdot \dfrac{2a-3}{x^2 - a^2} = \dfrac{2a-3}{y(a-1)}$

Para $x = 3$, $y = 2$ e $a = 4$, tem-se:

$$\frac{2 \cdot 4 - 3}{2 \cdot (4-1)} = \frac{8-3}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

17. Sendo P a medida do perímetro do retângulo, então:

$P = 2 \cdot \dfrac{2}{z-2} + 2 \cdot \dfrac{4z}{z^2 - 4} = \dfrac{4}{z-2} + \dfrac{8z}{(z+2) \cdot (z-2)} =$

$= \dfrac{4 \cdot (z+2) + 8z}{(z+2) \cdot (z-2)} = \dfrac{4z + 8 + 8z}{(z+2) \cdot (z-2)} = \dfrac{12z + 8}{(z+2) \cdot (z-2)}$

18. Alternativa **c**.

$\dfrac{(m+n)^3 - 2n(n+m)^2}{m^2 - n^2} = \dfrac{(m+n)^2 \cdot (m + n - 2n)}{(m+n) \cdot (m-n)} =$

$= \dfrac{(m+n)^2 \cdot (m-n)}{(m+n) \cdot (m-n)} = m + n$

19. a) $\dfrac{49s^4}{y^3} \cdot \dfrac{2y^6}{14s^5} = \dfrac{7 \cdot 7 \cdot 2y^{6-3} \cdot s^{4-5}}{2 \cdot 7} = \dfrac{7 \cdot y^{6-3} \cdot s^{4-5}}{1} = \dfrac{7y^3}{s}$

b) $\dfrac{a^2 - b^2}{14xy} \cdot \dfrac{7y}{2a + 2b} = \dfrac{(a+b) \cdot (a-b)}{14xy} \cdot \dfrac{7y}{2(a+b)} = \dfrac{a-b}{4x}$

c) $\dfrac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} \cdot \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x} = \dfrac{(x-4)^2}{(x+4) \cdot (x-4)} \cdot 1 = \dfrac{x-4}{x+4}$

d) $\dfrac{8p^2}{9} \cdot \dfrac{27a}{64p^5} \cdot \dfrac{5a^3}{3a} = \dfrac{5 \cdot p^2 \cdot a^3}{8 \cdot p^5} = \dfrac{5a^3}{8p^3}$

20. a) $\dfrac{2x}{2x-1} + \dfrac{25}{20x - 10} = \dfrac{2x}{2x-1} + \dfrac{25}{10 \cdot (2x-1)} =$

$= \dfrac{2x}{2x-1} + \dfrac{5}{2 \cdot (2x-1)} = \dfrac{2 \cdot 2x + 5}{2 \cdot (2x-1)} = \dfrac{4x + 5}{4x - 2}$

b) $3a - \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{3a \cdot (a-b)}{a-b} - \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{3a \cdot (a-b) - a - b}{a-b} =$

$= \dfrac{3a^2 - 3ab - a - b}{a-b}$

c) $\dfrac{\dfrac{3x + x^2}{2y^4}}{\dfrac{5x}{y^6}} = \dfrac{3x + x^2}{2y^4} : \dfrac{5x}{y^6} = \dfrac{x(3+x)}{2y^4} \cdot \dfrac{y^6}{5x} = \dfrac{(3+x) \cdot y^2}{2 \cdot 5} =$

$= \dfrac{3y^2 + xy^2}{10}$

d) $\dfrac{x^4 + 1}{x - 1} \cdot \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{(x^4 + 1) \cdot x}{(x-1)(x^2 - 1)} = \dfrac{x^5 + x}{x^3 - x^2 - x + 1}$

e) $(x^2 + 6x) \cdot \dfrac{x^2 + 3}{x + 6} = = \dfrac{x(x+6) \cdot (x^2 + 3)}{x + 6} = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$

f) $\dfrac{2a^3b^5}{c^4} \cdot \dfrac{bc^6}{16a^5b^4} = \dfrac{2a^3b^6a^6}{16a^5b^4c^4} = \dfrac{b^2c^2}{8a^2}$

PÁGINA 155 – DIVERSIFICANDO

1. $\dfrac{7p-5}{p^2-1} - \dfrac{p+7}{p+1} = \dfrac{7p-5}{(p+1)\cdot(p-1)} - \dfrac{p+7}{p+1} =$

$= \dfrac{(7p-5)-(p+7)\cdot(p-1)}{(p+1)\cdot(p-1)} = \dfrac{7p-5-p^2+p-7p+7}{(p+1)\cdot(p-1)} =$

$= \dfrac{-p^2+p+2}{(p+1)\cdot(p-1)}$

2. a) Sendo P a medida do perímetro do retângulo, tem-se:

$$P = 2\cdot\left(\frac{18y^2}{60y^5} + \frac{xy+x}{3x}\right) = 2\cdot\left(\frac{9}{30y^3} + \frac{x\cdot(y+1)}{3x}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{9}{30y^3} + \frac{y+1}{3}\right) = \frac{18}{30y^3} + \frac{2\cdot(y+1)}{3} = \frac{3}{5y^3} + \frac{2\cdot(y+1)}{3} =$$

$$= \frac{3\cdot 3 + [2\cdot(y+1)]\cdot 5y^3}{15y^3} = \frac{9+[2y+2]\cdot 5y^3}{15y^3} =$$

$$= \frac{10y^4+10y^3+9}{15y^3}$$

b) Para $y = 1$, tem-se:

$$\frac{10\cdot 1^4 + 10\cdot 1^3 + 9}{15\cdot 1^3} = \frac{10+10+9}{15} = \frac{29}{15}$$

3. Sendo F a fração algébrica a se determinar, tem-se:

$$\frac{2a^5}{7b^2}\cdot F = 3$$

$$F = \frac{3}{\frac{2a^5}{7b^2}}$$

$$F = 3\cdot\frac{7b^2}{2a^5}$$

$$F = \frac{21b^2}{2a^5}$$

4. Sendo A a medida da área do paralelogramo, então:

$$A = (x^2+4x+4)\cdot\left(\frac{1}{x^2-4}\right) = \frac{(x+2)^2}{1}\cdot\frac{1}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$$

5. $\dfrac{4m^2-8mn+4n^2}{4m^2+4n^2} = \dfrac{4(m-n)^2}{4\cdot(m^2+n^2)} = \dfrac{(m-n)^2}{m^2+n^2}$

6. • Sérgio

$$\frac{x^2-9}{x^2-3} = \frac{(x+3)\cdot(x-3)}{x^2-3}$$

Portanto, Sérgio errou na simplificação da fração algébrica.

• Bia

$$\frac{2p+9}{9}$$

Não é possível simplificar essa fração algébrica. Portanto, Bia errou na simplificação.

• Carol

$$\frac{x^2-4x}{x} = \frac{x\cdot(x-4)}{x} = x-4$$

Portanto, Carol acertou a simplificação da fração algébrica.

• Luís

$$\frac{x^4y^3z^2}{xy^3z^3} = x^{4-1}y^{3-3}z^{2-3} = x^3y^0z^{-1} = \frac{x^3}{z}$$

Portanto, Luís acertou a simplificação da fração algébrica.

7. Simplificando as frações algébricas, tem-se:

• $M = \dfrac{\dfrac{a-b}{ab}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}}{\dfrac{3a+3b}{a^2}} = \dfrac{a-b}{ab}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2} : \dfrac{3a+3b}{a^2} =$

$= \dfrac{a-b}{ab}\cdot\dfrac{(a+b)\cdot(a-b)}{(a-b)^2}\cdot\dfrac{a^2}{3\cdot(a+b)} = \dfrac{a}{3b}$

• $N = \dfrac{a+b}{b} - \dfrac{a+b}{a} + \dfrac{a^2+b^2}{ab} =$

$= \dfrac{a^2+ab-ab-b^2+a^2+b^2}{ab} = \dfrac{2a^2}{ab} = \dfrac{2a}{b}$

Então:

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{a}{3b}}{\frac{2a}{b}} = \frac{a}{3b}\cdot\frac{b}{2a} = \frac{1}{6}$$

Portanto, $M = \dfrac{N}{6}$.

8. $\dfrac{A^4+A^3+\frac{A^2}{4}}{A^2+\frac{A}{2}} = \dfrac{\left(A^2+\frac{A}{2}\right)^2}{A^2+\frac{A}{2}} = A^2+\dfrac{A}{2}$

Substituindo A por 1,5, obtém-se:

$$(1{,}5)^2 + \frac{1{,}5}{2} = 2{,}25 + 0{,}75 = 3$$

9. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 3 – EQUAÇÕES DO 2º GRAU

PÁGINA 159 – ATIVIDADES

1. Itens **b**, **g** e **h**.

a) $x + 5 = 9$

Não é uma equação do 2º grau, pois o grau dessa equação é 1.

b) $x^2 - 3x + 1 = 0$

É uma equação do 2º grau, pois ela pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$.

c) $x^6 + 5 = 2$

Não é uma equação do 2º grau, pois o grau dessa equação é 6.

d) $x^8 + 2x^2 = 3$

Não é uma equação do 2º grau, pois o grau dessa equação é 8.

e) $x^3 + x^2 + 2 = 0$

Não é uma equação do 2º grau, pois o grau dessa equação é 3.

f) $6x + 1 = 3$

Não é uma equação do 2º grau, pois o grau dessa equação é 1.

g) $x + x^2 = 0$

$x^2 + x = 0$

É uma equação do 2º grau, pois ela pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$.

h) $x^2 - 3 = 5x^2$

$x^2 - 3 - 5x^2 = 0$

$-4x^2 - 3 = 0$

$4x^2 + 3 = 0$

É uma equação do 2º grau, pois ela pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$.

2. Considerando as equações na forma $ax^2 + bx + c = 0$, tem-se:

Equação	a	b	c
$2x^2 = 5$ $2x^2 - 5 = 0$	2	0	−5
$2x^2 = 5x - 5$ $2x^2 - 5x + 5 = 0$	2	−5	5
$x + 5x^2 = 5$ $5x^2 + x - 5 = 0$	5	1	−5
$4x^2 = 5 - 5x$ $4x^2 + 5x - 5 = 0$	4	5	−5
$3x^2 = 5x$ $3x^2 - 5x = 0$	3	−5	0
$-5x^2 + 3 = 4x$ $-5x^2 - 4x + 3 = 0$	−5	−4	3
$\frac{x^2}{5} - \frac{x}{3} + 4 = 0$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	4

3. a) $(x + 6) \cdot (x - 2) + 4x = (2x - 1)^2$

$x^2 + 4x - 12 + 4x = 4x^2 - 4x + 1$

$-3x^2 + 12x - 13 = 0$

É uma equação do 2º grau.

b) $x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) + 2x^2 = x^3$

$x \cdot (x^2 - 1) + 2x^2 = x^3$

$x^3 - x + 2x^2 = x^3$

$2x^2 - x = 0$

É uma equação do 2º grau.

c) $x \cdot (2x^2 + 3) = (7 - x)^2$

$2x^3 + 3x = 49 - 14x + x^2$

$2x^3 - x^2 + 17x - 49 = 0$

Não é uma equação do 2º grau.

d) $3x \cdot (x - 2) = 1 + 3x^2$

$3x^2 - 6x - 1 - 3x^2 = 0$

$-6x - 1 = 0$

Não é uma equação do 2º grau.

4. Considerando as equações na forma $ax^2 + bx + c = 0$, tem-se:

a) $3x^2 + 6x = 0$

Equação incompleta.

Então, $a = 3$; $b = 6$ e $c = 0$.

b) $x^2 + 2x = 1$

$x^2 + 2x - 1 = 0$

Equação completa.

Então, $a = 1$; $b = 2$ e $c = -1$.

c) $x^2 + 7 = 5$

$x^2 + 7 - 5 = 0$

$x^2 + 2 = 0$

Equação incompleta.

Então, $a = 1$; $b = 0$ e $c = 2$.

d) $x(x - 5) = 1$

$x^2 - 5x - 1 = 0$

Equação completa.

Então, $a = 1$; $b = -5$ e $c = -1$.

e) $2x^2 + 7x + 6 = 0$

Equação completa.

Então, $a = 2$; $b = 7$ e $c = 6$.

f) $(2x + 3)^2 = 4 - 12x$

$4x^2 + 12x + 9 = 4 - 12x$

$4x^2 + 12x + 12x + 9 - 4 = 0$

$4x^2 + 24x + 5 = 0$

Equação completa.

Então, $a = 4$; $b = 24$ e $c = 5$.

5.
- $2x^2 + 7x - 4 = 5$

  Na forma reduzida:

  $2x^2 + 7x - 9 = 0$

  - Para $x = -4$:

    $2 \cdot (-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 9 =$

    $= 2 \cdot 16 - 28 - 9 = 32 - 28 - 9 =$

    $= -5 \neq 0$

  - Para $x = \frac{1}{2}$:

    $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 9 =$

    $= 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{7}{2}\right) - 9 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} - 9 =$

    $= \frac{8}{2} - 9 = 4 - 9 = -5 \neq 0$

  - Para $x = 2$:

    $2 \cdot (2)^2 + 7 \cdot (2) - 9 =$

    $= 2 \cdot 4 + 14 - 9 = 8 + 14 - 9 =$

    $= 13 \neq 0$

  - Para $x = 5$:

    $2 \cdot (5)^2 + 7 \cdot (5) - 9 =$

    $= 2 \cdot 25 + 35 - 9 = 50 + 35 - 9 =$

    $= 76 \neq 0$

  Portanto, nenhum dos números dados é solução da equação.

- $-x^2 + x - 2 = 0$

  Na forma reduzida, com $a > 0$:

  $x^2 - x + 2 = 0$

  - Para $x = 0$:

    $(0)^2 - (0) + 2 = 2 \neq 0$

  - Para $x = 1$:

    $(1)^2 - (1) + 2 = 2 \neq 0$

  - Para $x = \frac{1}{2}$:

    $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 =$

    $= -\frac{1}{4} + 2 = \frac{7}{4} \neq 0$

  - Para $x = 2$:

    $(2)^2 - (2) + 2 = 4 - 2 + 2 = 4 \neq 0$

  - Para $x = 3$:

    $(3)^2 - (3) + 2 = 9 - 3 + 2 = 8 \neq 0$

  Portanto, nenhum dos números dados é solução da equação.

- $x^2 - 8x + 16 = 0$

  - Para $x = -3$:

    $(-3)^2 - 8 \cdot (-3) + 16 =$

    $= 9 + 24 + 16 = 49 \neq 0$

  - Para $x = -\frac{2}{3}$:

    $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 8 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 16 =$

    $= \frac{4}{9} + \frac{16}{3} + 16 = \frac{4 + 48 + 144}{9} =$

    $= \frac{196}{9} \neq 0$

  - Para $x = -1$:

    $(-1)^2 - 8 \cdot (-1) + 16 = 1 + 8 + 16 =$

    $= 25 \neq 0$

  - Para $x = 1$:

    $(1)^2 - 8 \cdot (1) + 16 = 1 - 8 + 16 =$

    $= 9 \neq 0$

  - Para $x = 4$:

    $(4)^2 - 8 \cdot (4) + 16 = 16 - 32 + 16 =$

    $= 32 - 32 = 0$

  Portanto, 4 é solução da equação.

- $\frac{x^2}{6} + 2x + 6 = 0$

  Na forma reduzida, com $a \geqslant 1$:

  $x^2 + 12x + 36 = 0$

  - Para $x = -10$:

    $(-10)^2 + 12 \cdot (-10) + 36 =$

    $= 100 - 120 + 36 = 16 \neq 0$

  - Para $x = -8$:

    $(-8)^2 + 12 \cdot (-8) + 36 =$

    $= 64 - 96 + 36 = 4 \neq 0$

  - Para $x = -6$:

    $(-6)^2 + 12 \cdot (-6) + 36 =$

    $= 36 - 72 + 36 = 0$

  - Para $x = \frac{7}{4}$:

    $\left(\frac{7}{4}\right)^2 + 12 \cdot \left(\frac{7}{4}\right) + 36 =$

    $= \frac{49}{16} + 21 + 36 =$

    $= \frac{49 + 336 + 576}{16} = \frac{961}{16} \neq 0$

  - Para $x = 0$:

    $(0)^2 + 12 \cdot (0) + 36 = 0 + 0 + 36 =$

    $= 36 \neq 0$

  Portanto, −6 é solução da equação.

6. Respostas possíveis:

a) O coeficiente a de uma equação de 2º grau na forma $ax^2 + bx + c = 0$ não pode ser zero.

b) O maior expoente da incógnita em uma equação do 2º grau não pode ser diferente de 2.

c) O número -3 é solução da equação $x^2 + 3x = 0$.

d) A equação $3x^2 + 5x = 0$ é incompleta.

7. Itens **c** e **d**.

a) $x^2 + 16 = 0$

$$4^2 + 16 = 16 + 16 = 32 \neq 0$$

Portanto, 4 não é solução da equação.

b) $x^2 + 4x = 0$

$$4^2 + 4 \cdot 4 = 16 + 16 = 32 \neq 0$$

Portanto, 4 não é solução da equação.

c) $x^2 - 16 = 0$

$$4^2 - 16 = 16 - 16 = 0$$

Portanto, 4 é solução da equação.

d) $x^2 - 4x = 0$

$$4^2 - 4 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

Portanto, 4 é solução da equação.

e) $x^2 + 2 = 0$

$$4^2 + 2 = 16 + 2 = 18 \neq 0$$

Portanto, 4 não é solução da equação.

f) $x^2 - 2 = 0$

$$4^2 - 2 = 16 - 2 = 14 \neq 0$$

Portanto, 4 não é solução da equação.

g) $x^2 + 6x + 8 = 0$

$$4^2 + 6 \cdot 4 + 8 = 16 + 24 + 8 = 48 \neq 0$$

Portanto, 4 não é solução da equação.

h) $x^2 - x - 20 = 0$

$$4^2 - 4 - 20 = 16 - 24 = -8 \neq 0$$

Portanto, 4 não é solução da equação.

8. $4x^2 + \frac{2x}{5} = 0$

a) Considerando a equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$, tem-se:

$$a = 4;\ b = \frac{2}{5};\ c = 0$$

b) Essa equação é incompleta, pois $c = 0$.

c)
- Para $x = 2$:

$$4 \cdot (2)^2 + \frac{2 \cdot (2)}{5} = 16 + \frac{4}{5} = \frac{84}{5} \neq 0$$

Logo, 2 não é solução dessa equação.

- Para $x = -\frac{1}{10}$:

$$4 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)}{5} =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{100}\right) + \frac{\left(-\frac{2}{10}\right)}{5} =$$

$$= \frac{4}{100} + \left(-\frac{2}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) =$$

$$= \frac{4}{100} + \left(-\frac{1}{25}\right) = \frac{1}{25} - \frac{1}{25} = 0$$

Logo, $-\frac{1}{10}$ é solução dessa equação.

- Para $x = 0$:

$$4 \cdot (0)^2 + \frac{2 \cdot (0)}{5} = 0 + 0 = 0$$

Logo, 0 é solução dessa equação.

- Para $x = \frac{1}{10}$:

$$4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)}{5} =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{100}\right) + \frac{\left(\frac{2}{10}\right)}{5} =$$

$$= \frac{4}{100} + \left(\frac{2}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{100} + \left(\frac{1}{25}\right) =$$

$$= \frac{1}{25} + \frac{1}{25} = \frac{2}{25} \neq 0$$

Logo, $\frac{1}{10}$ não é solução dessa equação.

- Para $x = \frac{2}{3}$:

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)}{5} =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right) =$$

$$= \frac{16}{9} + \frac{4}{15} = \frac{80}{45} + \frac{12}{45} = \frac{92}{45} \neq 0$$

Logo, $\frac{2}{3}$ não é solução dessa equação.

9. $x^2 - 7x - 2c = 0$

Como -3 é raiz da equação, tem-se:

$$(-3)^2 - 7 \cdot (-3) - 2c = 0$$
$$9 + 21 - 2c = 0$$
$$30 - 2c = 0$$
$$2c = 30$$
$$c = 15$$

PÁGINA 163 – ATIVIDADES

10. a) $2x^2 + 10x = 0$

$$2x \cdot (x + 5) = 0$$
$$2x = 0 \text{ ou } x + 5 = 0$$

Portanto:

- $2x_1 = 0$

  $x_1 = 0$

- $x_2 + 5 = 0$

  $x_2 = -5$

Logo, as soluções são -5 e 0.

b) $3x^2 + 12 = 0$

$$3x^2 = -12$$
$$x^2 = -\frac{12}{3}$$
$$x^2 = -4$$

Logo, essa equação não tem solução real.

c)

$$2x^2 + x = 5x^2 - 2x$$
$$2x^2 + x - 5x^2 + 2x = 0$$
$$-3x^2 + 3x = 0$$
$$3x \cdot (-x + 1) = 0$$
$$3x = 0 \text{ ou } -x + 1 = 0$$

Portanto:

- $3x_1 = 0$

  $x_1 = 0$

- $-x_2 + 1 = 0$

  $x_2 = 1$

Logo, as soluções são 0 e 1.

d) $x^2 - 25 = 0$

$$x^2 = 25$$
$$x = \pm\sqrt{25}$$

Portanto, $x_1 = 5$ e $x_2 = -5$.

Logo, as soluções são -5 e 5.

e) $36 - x^2 = 0$

$$x^2 = 36$$
$$x = \pm\sqrt{36}$$

Portanto, $x_1 = 6$ $x_2 = -6$.

Logo, as soluções são -6 e 6.

11. Resolvendo a equação $x^2 - 9 = 40$, tem-se:

$$x^2 = 40 + 9$$
$$x^2 = 49$$
$$x = \pm\sqrt{49}$$

Portanto, $x_1 = 7$ e $x_2 = -7$.

Resolvendo a equação, $5x^2 = -35x$, tem-se:

$$5x^2 + 35x = 0$$
$$x \cdot (5x + 35) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } 5x + 35 = 0$$

Portanto:

- $x_1 = 0$
- $5x_2 + 35 = 0$

  $x_2 = \frac{-35}{5}$

  $x_2 = -7$

Logo, a solução comum às duas equações é -7.

12. Seja x um número positivo, então:

$$x^2 + 2x = 5x$$
$$x^2 + 2x - 5x = 0$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x \cdot (x - 3) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x - 3 = 0$$

Portanto:

- $x_1 = 0$
- $x_2 - 3 = 0$

  $x_2 = 3$

Como x é positivo, esse número é 3.

13. Resolvendo as equações, tem-se:

- $x^2 - 4 = 0$

  $x^2 = 4$

  $x = \pm\sqrt{4}$

  Portanto, $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$.

- $x^2 - 9 = 0$

  $x^2 = 9$

  $x = \pm\sqrt{9}$

  Portanto, $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$.

- $x^2 - 10 = 0$
  $x^2 = 10$
  $x = \pm\sqrt{10}$

  Portanto, $x_1 = \sqrt{10}$ e $x_2 = -\sqrt{10}$.
- $x^2 + 4 = 0$
  $x^2 = -4$
  $x = \pm\sqrt{-4}$

  Não existe solução no conjunto dos números reais.
- $x^2 + 9 = 0$
  $x^2 = -9$
  $x = \pm\sqrt{-9}$

  Não existe solução no conjunto dos números reais.
- $x^2 + 10 = 0$
  $x^2 = -10$
  $x = \pm\sqrt{-10}$

  Não existe solução no conjunto dos números reais.

a) As equações do quadro laranja são incompletas, com $b = 0$ e $c < 0$. Portanto, suas soluções são reais e opostas. As equações do quadro azul são incompletas, com $b = 0$ e $c > 0$. Portanto, suas soluções são raízes quadradas de números negativos, logo não são números reais.

b) As equações do 2º grau incompletas com $b = 0$ que não têm soluções reais são as que apresentam $c > 0$. São elas:

$$x^2 + 8 = 0$$
$$x^2 + 3 = 0$$
$$x^2 + 5 = 0$$
$$3x^2 + 25 = 0$$

14. $10a^2 - 1\,000 = 0$

$$10a^2 = 1\,000$$
$$a^2 = \frac{1\,000}{10}$$
$$a^2 = 100$$

Portanto:

$$a_1 = x = 10$$
$$a_2 = y = -10$$

a) $x^2 + y^2 = 10^2 + (-10)^2 = 100 + 100 =$
$= 200$

b) $x^2 - y^2 = 10^2 - (-10)^2 = 100 - 100 =$
$= 0$

c) $\frac{x^2}{y^2} = \frac{10^2}{(-10)^2} = \frac{100}{100} = 1$

15. Como as áreas amarelas são quadradas, sabemos que as medidas dos lados são iguais.

a) Medida da área amarela:

$$x \cdot x + 3x \cdot 3x = x^2 + 9x^2 = 10x^2$$

Medida da área azul:

$$15 \cdot x + 5 \cdot 3x = 15x + 15x = 30x$$

Como as medidas das áreas são iguais, tem-se:

$$10x^2 = 30x$$
$$10x = 30$$
$$x = 3$$

Portanto o valor de x é 3.

b) $AB = x = 3$
$BC = x + 15 = 3 + 15 = 18$
$CD = 3x - x = 2x = 2 \cdot 3 = 6$
$DE = 3x + 5 = 3 \cdot 3 + 5 = 9 + 5 = 14$
$EF = 3x = 3 \cdot 3 = 9$
$FA = 5 + 9 + 15 + 3 = 32$

Assim:

$AB + BC + CD + DE + EF + FA =$
$= 3 + 18 + 6 + 14 + 9 + 32 = 82$

Logo, a medida do perímetro desse polígono é 82.

16. Sendo x o número citado, tem-se:

$$x^2 = 3x$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x \cdot (x - 3) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x - 3 = 0$$

Portanto:

- $x_1 = 0$
- $x_2 - 3 = 0$
  $x_2 = 3$

Logo, os números cujos quadrados são iguais a seus triplos são 0 e 3.

17. Sejam x e $x + 1$ dois números inteiros consecutivos, então:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 2x + 33$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2x + 33$$
$$2x^2 + 2x + 1 = 2x + 33$$
$$2x^2 = 2x - 2x + 33 - 1$$
$$2x^2 = 32$$
$$x^2 = \frac{32}{2}$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm\sqrt{16}$$

Então, $x_1 = 4$ e $x_2 = -4$.

Portanto:

- $x_1 = 4$
  $x_1 + 1 = 5$
- $x_2 = -4$
  $x_2 + 1 = -3$

Logo, esses números são -4 e -3 ou 4 e 5.

18. Como $p > 0$, tem-se:

$$R = p \cdot q = 0 \Leftrightarrow q = 0$$

Assim:

$$q = 800 - 10p$$
$$0 = 800 - 10p$$
$$10p = 800$$
$$p = 80$$

A receita bruta será nula para $p = 80$.

PÁGINA 167 – ATIVIDADES

19. a-VI; b-I; c-IV; d-V; e-II; f-III.

- $(3x - 1)^2 = 0$
  $9x^2 - 6x + 1 = 0$
- $(x - 0{,}5)^2 = 0$
  $x^2 - x + 0{,}25 = 0$
- $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0$
  $x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0$
- $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = 0$
  $x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9} = 0$
- $(2x - 3)^2 = 0$
  $4x^2 - 12x + 9 = 0$
- $(x + 2)^2 = 0$
  $x^2 + 4x + 4 = 0$

20. a) $\underbrace{4x^4}_{(2x^2)^2} - \underbrace{4x^2}_{2 \cdot 2x^2 \cdot 1} + \underbrace{1}_{1^2} = (2x^2 - 1)^2$

b) $\underbrace{x^2}_{(x)^2} + \underbrace{5x}_{2 \cdot x \cdot \frac{5}{2}} + \underbrace{\frac{25}{4}}_{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$

21. a)

$$x^2 = 10x - 25$$
$$x^2 - 10x + 25 = 0$$
$$(x - 5)^2 = 0$$
$$x - 5 = 0$$
$$x = 5$$

b)

$$x^2 + 9 = 6x$$
$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$(x - 3)^2 = 0$$
$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

c) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$
$$x + \frac{3}{2} = 0$$
$$x = -\frac{3}{2}$$

d)

$$4x^2 = 32x - 64$$
$$4x^2 - 32x + 64 = 0$$
$$x^2 - 8x + 16 = 0$$
$$(x - 4)^2 = 0$$
$$x - 4 = 0$$
$$x = 4$$

e) $\frac{x^2}{9} + \frac{4x}{3} = -4$

$\frac{x^2}{9} + \frac{4x}{3} + 4 = 0$

$\left(\frac{x}{3} + 2\right)^2 = 0$

$\frac{x}{3} + 2 = 0$

$\frac{x}{3} = -2$

$x = -6$

f) $-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$

$-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)^2 = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

22. a) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + \blacksquare$

$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4x + \blacksquare$

$\blacksquare = 4$

b) $(b - 5)^2 = b^2 - \blacksquare + 25$

$b^2 - 10b + 25 = b^2 - \blacksquare + 25$

$\blacksquare = 10b$

c) $(z - \blacksquare)^2 = z^2 - 20z + 100$

$(z - \blacksquare)^2 = (z - 10)^2$

$\blacksquare = 10$

d) $(y - 6)^2 = y^2 - \blacksquare + 36$

$y^2 - 12y + 36 = y^2 - \blacksquare + 36$

$\blacksquare = 12y$

23. a) $(x - 4)^2 = 25$

$x - 4 = \pm\sqrt{25}$

$x - 4 = \pm 5$

Portanto:

- $x_1 - 4 = 5$
  $x_1 = 5 + 4$
  $x_1 = 9$
- $x_2 - 4 = -5$
  $x_2 = -5 + 4$
  $x_2 = -1$

b) $(x + 7)^2 = 9$

$x + 7 = \pm\sqrt{9}$

$x + 7 = \pm 3$

Portanto:

- $x_1 + 7 = 3$
  $x_1 = 3 - 7$
  $x_1 = -4$
- $x_2 + 7 = -3$
  $x_2 = -3 - 7$
  $x_2 = -10$

c) $(x - 2)^2 = 36$

$x - 2 = \pm\sqrt{36}$

$x - 2 = \pm 6$

Portanto:

- $x_1 - 2 = 6$
  $x_1 = 6 + 2$
  $x_1 = 8$
- $x_2 - 2 = -6$
  $x_2 = -6 + 2$
  $x_2 = -4$

d) $(x + 3)^2 = 16$

$x + 3 = \pm\sqrt{16}$

$x + 3 = \pm 4$

Portanto:

- $x_1 + 3 = 4$
  $x_1 = 4 - 3$
  $x_1 = 1$
- $x_2 + 3 = -4$
  $x_2 = -4 - 3$
  $x_2 = -7$

24. a) $x^2 - 14x = -45$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 = -45$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 = -45 + 7^2$

$(x - 7)^2 = -45 + 49$

$(x - 7)^2 = 4$

$x - 7 = \pm\sqrt{4}$

Portanto:

- $x_1 - 7 = 2$
  $x_1 = 9$
- $x_2 - 7 = -2$
  $x_2 = 5$

Logo, 5 e 9 são as soluções da equação.

b) $x^2 + 10x = 24$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 = 24$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = 24 + 5^2$

$(x + 5)^2 = 24 + 25$

$(x + 5)^2 = 49$

$x + 5 = \pm\sqrt{49}$

Portanto:

- $x_1 + 5 = 7$
  $x_1 = 2$
- $x_2 + 5 = -7$
  $x_2 = -12$

Logo, -12 e 2 são as soluções da equação.

c) $t^2 + 2t = 8$

$t^2 + 2 \cdot t \cdot 1 = 8$

$t^2 + 2 \cdot t \cdot 1 + 1^2 = 8 + 1^2$

$(t + 1)^2 = 8 + 1$

$(t + 1)^2 = 9$

$t + 1 = \pm\sqrt{9}$

Portanto:

- $t_1 + 1 = 3$
  $t_1 = 2$
- $t_2 + 1 = -3$
  $t_2 = -4$

Logo, -4 e 2 são as soluções da equação.

d) $y^2 - 8y = 9$

$y^2 - 2 \cdot y \cdot 4 = 9$

$y^2 - 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 = 9 + 4^2$

$(y - 4)^2 = 9 + 16$

$(y - 4)^2 = 25$

$y - 4 = \pm\sqrt{25}$

Portanto:

- $y_1 - 4 = 5$
  $y_1 = 9$
- $y_2 - 4 = -5$
  $y_2 = -1$

Logo, -1 e 9 são as soluções da equação.

e) $y^2 + 2y = 48$

$y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 = 48$

$y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 = 48 + 1^2$

$(y + 1)^2 = 48 + 1$

$(y + 1)^2 = 49$

$y + 1 = \pm\sqrt{49}$

Portanto:

- $y_1 + 1 = 7$
  $y_1 = 6$
- $y_2 + 1 = -7$
  $y_2 = -8$

Logo, -8 e 6 são as soluções da equação.

f) $x^2 - 8x = -7$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 = -7$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = -7 + 4^2$

$(x - 4)^2 = -7 + 16$

$(x - 4)^2 = 9$

$x - 4 = \pm\sqrt{9}$

Portanto:

- $x_1 - 4 = 3$
  $x_1 = 7$
- $x_2 - 4 = -3$
  $x_2 = 1$

Logo, 1 e 7 são as soluções da equação.

g) $x^2 + 6x = -11$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 = -11$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = -11 + 3^2$

$(x + 3)^2 = -11 + 9$

$(x + 3)^2 = -2$

$x + 3 = \pm\sqrt{-2}$

Logo, a equação não tem soluções reais.

h)
$$x^2 - 4x = 1$$
$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 = 1$$
$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = 1 + 2^2$$
$$(x-2)^2 = 1 + 4$$
$$(x-2)^2 = 5$$
$$x - 2 = \pm\sqrt{5}$$

Portanto:

- $x_1 - 2 = \sqrt{5}$
  $x_1 = 2 + \sqrt{5}$
- $x_2 - 2 = -\sqrt{5}$
  $x_2 = 2 - \sqrt{5}$

Logo, $2 + \sqrt{5}$ e $2 - \sqrt{5}$ são soluções da equação.

25. Como a figura é formada por um quadrado cuja área mede x^2 e 4 retângulos cujos lados medem 7,5 e x, e considerando que a medida da área é 1 800, pode-se escrever:
$$x^2 + 4 \cdot 7{,}5x = 1\,800$$
$$x^2 + 30x = 1\,800$$
$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 15 = 1\,800$$
$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 15 + 15^2 = 1\,800 + 15^2$$
$$(x+15)^2 = 2\,025$$
$$x + 15 = \pm\sqrt{2\,025}$$

Então:

- $x_1 + 15 = 45$
  $x_1 = 30$
- $x_2 + 15 = -45$
  $x_2 = -60$

Como $x > 0$, então $x = 30$.

Portanto, a equação do 2º grau é $x^2 + 30x - 1\,800 = 0$ e sua raiz é 30.

26. Seja x a idade de Pedro hoje; daqui a 11 anos Pedro terá $(x + 11)$ anos e, há 13 anos, a idade de Pedro era $(x - 13)$ anos. Assim:
$$x + 11 = \frac{(x-13)^2}{2}$$
$$2 \cdot (x + 11) = x^2 - 26x + 169$$
$$2x + 22 = x^2 - 26x + 169$$
$$x^2 - 28x = -147$$
$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 14 = -147$$
$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 14 + 14^2 = -147 + 14^2$$
$$(x-14)^2 = 49$$
$$x - 14 = \pm\sqrt{49}$$
$$x - 14 = \pm 7$$

Portanto:

- $x_1 - 14 = 7$
  $x_1 = 21$
- $x_2 - 14 = -7$
  $x_2 = 7$

Como $x > 13$, então $x = 21$.

Logo, a idade atual de Pedro é 21 anos.

27. Sendo x um número inteiro, tem-se:
$$(x+1)^2 = 100$$
$$x + 1 = \pm\sqrt{100}$$
$$x + 1 = \pm 10$$

Portanto:

- $x_1 + 1 = 10$
  $x_1 = 9$
- $x_2 + 1 = -10$
  $x_2 = -11$

Esse número é -11 ou 9.

PÁGINA 174 – ATIVIDADES

28. I. $x^2 + 3x + 1 = 0$

Então, $a = 1$; $b = 3$ e $c = 1$.

Daí:
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$$

Como $\Delta > 0$, então a equação tem duas soluções reais e distintas.

II. $5x^2 + x + 7 = 0$

Então, $a = 5$; $b = 1$ e $c = 7$.

Daí:
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 5 \cdot 7 = 1 - 140 = -139$$

Como $\Delta < 0$, então a equação não tem raiz real.

III. $9x^2 - 6x + 1 = 0$

Então, $a = 9$; $b = -6$ e $c = 1$.

Daí:
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$$

Como $\Delta = 0$, então a equação tem duas soluções reais e iguais.

a) I

b) III

c) II

29. $x^2 - 4x + p = 0$

Então, $a = 1$; $b = -4$ e $c = p$.

Daí:
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 16 - 4p$$

Como a equação não tem soluções reais, seu discriminante é negativo. Assim:
$$\Delta < 0$$
$$16 - 4p < 0$$
$$-4p < -16$$
$$4p > 16$$
$$p > 4$$

Então, o menor valor que p pode assumir é 5.

30. $2x^2 - (2m - 4)x + \frac{m}{2} = 0$

Então:
$$a = 2$$
$$b = -(2m - 4) = 4 - 2m$$
$$c = \frac{m}{2}$$

Daí:
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (4 - 2m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{m}{2} =$$
$$= 16 - 16m + 4m^2 - 4m =$$
$$= 4m^2 - 20m + 16$$

Para que a equação tenha duas raízes reais e iguais, seu discriminante deve ser nulo. Assim:
$$\Delta = 0$$
$$4m^2 - 20m + 16 = 0$$
$$m^2 - 5m + 4 = 0$$

Então, $a = 1$; $b = -5$ e $c = 4$.

Assim:
$$S = \frac{-(-5)}{1} = 5$$
$$P = \frac{4}{1} = 4$$

Portanto, as raízes são $m_1 = 1$ e $m_2 = 4$.

Logo, os valores de m para que a equação $2x^2 - (2m - 4)x + \frac{m}{2} = 0$ tenha duas raízes reais iguais são 1 e 4.

31. $mx^2 + 2x - 1 = 0$

Então, $a = m$; $b = 2$ e $c = -1$.

Daí:
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot m \cdot (-1) = 4 + 4m$$

Para que a equação não tenha raízes reais, seu discriminante deve ser negativo. Assim:
$$\Delta < 0$$
$$4 + 4m < 0$$
$$4m < -4$$
$$m < -1$$

Portanto, os valores de m para que a equação $mx^2 + 2x - 1 = 0$ não tenha raízes reais são os menores que -1.

32. a) $3x^2 - 6x + k = 0$

Então, $a = 3$; $b = -6$ e $c = k$.

Daí:
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k = 36 - 12k$$

Para que a equação $3x^2 - 6x + k = 0$ tenha duas soluções reais iguais, deve-se ter $\Delta = 0$. Assim:
$$\Delta = 0$$
$$36 - 12k = 0$$
$$12k = 36$$
$$k = 3$$

b) $2x^2 + kx + 16 = 0$

Então, $a = 2$; $b = k$ e $c = 16$.

Daí:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16 = k^2 - 128$$

Para que a equação $2x^2 + kx + 16 = 0$ tenha duas soluções reais distintas, deve-se ter $\Delta > 0$. Assim:

$$\Delta > 0$$
$$k^2 - 128 > 0$$
$$k^2 > 128$$
$$k_1 < -8\sqrt{2}$$
$$k_2 > 8\sqrt{2}$$

c) $4x^2 - kx + 4 = 0$

Então, $a = 4$; $b = -k$ e $c = 4$.

Daí:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-k)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = k^2 - 64$$

Para que a equação $4x^2 - kx + 4 = 0$ tenha uma solução real, ou seja, duas soluções reais iguais, deve-se ter $\Delta = 0$. Assim:

$$\Delta = 0$$
$$k^2 - 64 = 0$$
$$k^2 = 64$$
$$k_1 = 8$$
$$k_2 = -8$$

d) $kx^2 + 6x + 1 = 0$

Então, $a = k$; $b = 6$ e $c = 1$.

Daí:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot k \cdot 1 = 36 - 4k$$

Para que a equação $kx^2 + 6x + 1 = 0$ não tenha solução real, deve-se ter $\Delta < 0$. Assim:

$$\Delta < 0$$
$$36 - 4k < 0$$
$$-4k < -36$$
$$k > 9$$

33. $2x^2 + 4x + 5c = 0$

Então, $a = 2$; $b = 4$ e $c = 5c$.

Daí:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5c = 16 - 40c$$

Para que a equação $2x^2 + 4x + 5c = 0$ tenha duas raízes reais distintas, deve-se ter $\Delta > 0$. Assim:

$$\Delta > 0$$
$$16 - 40c > 0$$
$$-40c > -16$$
$$40c < 16$$
$$c < \frac{16}{40}$$
$$c < \frac{2}{5}$$

34. a) $3x^2 - 9x + 4 = 0$

Então, $a = 3$; $b = -9$ e $c = 4$.

Logo:

$$S = \frac{-(-9)}{3} = \frac{9}{3} = 3$$
$$P = \frac{4}{3}$$

b)
$$(x + 3)^2 = 2x$$
$$x^2 + 6x + 9 - 2x = 0$$
$$x^2 + 4x + 9 = 0$$

Então, $a = 1$, $b = 4$ e $c = 9$.

Logo:

$$S = \frac{-4}{1} = -4$$
$$P = \frac{9}{1} = 9$$

c) $-2x^2 - 3x + 2 = 0$

Então, $a = -2$; $b = -3$ e $c = 2$.

Logo:

$$S = \frac{-(-3)}{-2} = -\frac{3}{2}$$
$$P = \frac{2}{-2} = -1$$

d)
$$2x \cdot (x - 7) = (4 - x)^2$$
$$2x^2 - 14x = 16 - 8x + x^2$$
$$2x^2 - x^2 - 14x + 8x - 16 = 0$$
$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

Então, $a = 1$; $b = -6$ e $c = -16$.

Logo:

$$S = \frac{-(-6)}{1} = 6$$
$$P = \frac{-16}{1} = -16$$

e) $x^2 + 4x + 4 = 0$

Então, $a = 1$; $b = 4$ e $c = 4$.

Logo:

$$S = \frac{-4}{1} = -4$$
$$P = \frac{4}{1} = 4$$

f) $x^2 - 7x + 5 = 0$

Então, $a = 1$; $b = -7$ e $c = 5$.

Logo:

$$S = \frac{-(-7)}{1} = 7$$
$$P = \frac{5}{1} = 5$$

35. $3x^2 - 11x + 4 = 0$

Então, $a = 3$; $b = -11$ e $c = 4$.

a) $r + s = \frac{-b}{a} = \frac{-(-11)}{3} = \frac{11}{3}$

b) $r \cdot s = \frac{c}{a} = \frac{4}{3}$

c) $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{s + r}{r \cdot s} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{11}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

d) $r^2s + rs^2 = rs \cdot (r + s) = \frac{4}{3} \cdot \frac{11}{3} = \frac{44}{9}$

36. a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

Então, $a = 1$; $b = 2$ e $c = 1$.

Portanto:

$$S = \frac{-2}{1} = -2$$

$$P = \frac{1}{1} = 1$$

Logo, $x_1 = -1$ e $x_2 = -1$.

b) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Então, $a = 1$; $b = -7$ e $c = 12$.

Portanto:

$$S = \frac{-(-7)}{1} = 7$$

$$P = \frac{12}{1} = 12$$

Logo, $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$.

c) $x^2 + 3x - 28 = 0$

Então, $a = 1$; $b = 3$ e $c = -28$.

Portanto:

$$S = \frac{-3}{1} = -3$$

$$P = \frac{-28}{1} = -28$$

Logo, $x_1 = -7$ e $x_2 = 4$.

37. a) Soluções: 5 e 8

$$S = 5 + 8 = 13$$

$$P = 5 \cdot 8 = 40$$

Equação possível: $x^2 - 13x + 40 = 0$.

b) Soluções: 3 e 10

$$S = 3 + 10 = 13$$

$$P = 3 \cdot 10 = 30$$

Equação possível: $x^2 - 13x + 30 = 0$.

c) Soluções: 5 e -9

$$S = 5 + (-9) = 5 - 9 = -4$$

$$P = 5 \cdot (-9) = -45$$

Equação possível: $x^2 + 4x - 45 = 0$.

d) Soluções: $5 + \sqrt{11}$ e $5 + \sqrt{11}$

$$S = 5 + \sqrt{11} + 5 - \sqrt{11} = 10$$

$$P = (5 + \sqrt{11}) \cdot (5 - \sqrt{11}) = 25 - 11 = 14$$

Equação possível: $x^2 - 10x + 14 = 0$.

38. $x^2 - 12x + k = 0$

Então, $a = 1$; $b = -12$ e $c = k$.

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação, como uma das raízes é o dobro da outra, tem-se:

$$x_1 = 2x_2$$

Sendo S a soma das raízes e P o produto entre elas, então:

- $$\begin{aligned} S &= x_1 + x_2 \\ \frac{-b}{a} &= 3x_2 \\ \frac{-(-12)}{1} &= 3x_2 \\ 3x_2 &= 12 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} P &= x_1 \cdot x_2 \\ \frac{c}{a} &= 2x_2 \cdot x_2 \\ \frac{k}{1} &= 2x_2 \cdot x_2 \\ k &= 2x_2 \cdot x_2 \end{aligned}$$

  Como $x_2 = 4$, então:

  $$k = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$$

39. a)

$$\begin{aligned} \frac{x \cdot (x - 3)}{2} &= \frac{-5}{8} \\ \frac{x^2 - 3x}{2} &= \frac{-5}{8} \\ 4 \cdot (x^2 - 3x) &= -5 \\ 4x^2 - 12x &= -5 \\ 4x^2 - 12x + 5 &= 0 \end{aligned}$$

b) Substituindo os valores -3 e $\frac{1}{2}$ na equação $4x^2 - 12x + 5 = 0$, tem-se:

- $4 \cdot (-3)^2 - 12 \cdot (-3) + 5 =$
  $= 4 \cdot 9 + 36 + 5 = 77 \neq 0$
- $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12 \cdot \frac{1}{2} + 5 =$
  $= 4 \cdot \frac{1}{4} - 6 + 5 = 1 - 6 + 5 = 0$

Portanto, somente $\frac{1}{2}$ é solução da equação.

c) Como $a = 4$; $b = -12$ e $c = 5$, tem-se:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64$

Portanto, o valor do discriminante é igual a 64.

d) $S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-12)}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$P = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

Portanto, a soma e o produto das raízes são, respectivamente, 3 e $\frac{5}{4}$.

40. $x^2 - (3r - 3s)x + 2s - 6r = 0$

Então:

$$a = 1$$

$$b = -(3r - 3s) = 3s - 3r$$

$$c = 2s - 6r$$

Sendo S a soma das raízes e P o produto entre elas, então:

- $$\begin{aligned} S &= \frac{-b}{a} = 6 \\ \frac{-(3s - 3r)}{1} &= 6 \\ 3(r - s) &= 6 \\ r - s &= \frac{6}{3} \\ r - s &= 2 \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} P &= \frac{c}{a} = -20 \\ \frac{2s - 6r}{1} &= -20 \\ 2(s - 3r) &= -20 \\ s - 3r &= -\frac{20}{2} \\ s - 3r &= -10 \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

De (I) e (II), tem-se:

$$\begin{cases} r - s = 2 \\ s - 3r = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r - s = 2 \\ \underline{-3r + s = -10} \end{cases} +$$

$$\begin{aligned} -2r &= -8 \\ r &= \frac{-8}{-2} \\ r &= 4 \end{aligned}$$

Substituindo $r = 4$ em (I), tem-se:

$$\begin{aligned} r - s &= 2 \\ 4 - s &= 2 \\ s &= 2 \end{aligned}$$

Portanto, os valores de r e s são, respectivamente, 4 e 2.

41. a) $x^2 + 5x + 4$

Inicialmente, encontram-se as raízes da equação $x^2 + 5x + 4 = 0$.

Então, $a = 1$; $b = 5$ e $c = 4$.

Assim:

$$S = \frac{-5}{1} = -5$$

$$P = \frac{4}{1} = 4$$

Portanto, as raízes são $x_1 = -4$ e $x_2 = -1$.

Logo:

$x^2 + 5x + 4 = 1 \cdot [x - (-4)] \cdot [x - (-1)] =$

$= [x + 4] \cdot [x + 1] = (x + 4) \cdot (x + 1)$

b) $x^2 - 3x - 54$

Inicialmente, encontram-se as raízes da equação $x^2 - 3x - 54 = 0$.

Então, $a = 1$; $b = -3$ e $c = -54$.

Assim:

$$S = \frac{-(-3)}{1} = 3$$

$$P = \frac{-54}{1} = -54$$

Portanto, as raízes são $x_1 = 9$ e $x_2 = -6$.

Logo:

$x^2 - 3x - 54 = 1 \cdot [x - 9] \cdot [x - (-6)] =$

$= [x - 9] \cdot [x + 6] = (x - 9) \cdot (x + 6)$

c) $4x^2 - 9x + 2$

Inicialmente, encontram-se as raízes da equação $4x^2 - 9x + 2 = 0$.

Então, $a = 4$; $b = -9$ e $c = 2$.

Assim:

$$S = \frac{-(-9)}{4} = \frac{9}{4}$$

$$P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Portanto, as raízes são $x_1 = \frac{1}{4}$ e $x_2 = 2$.

Logo:

$4x^2 - 9x + 2 = 4 \cdot \left[\left(x - \frac{1}{4}\right) \cdot (x - 2)\right] =$

$= 4 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) \cdot (x - 2)$

d) $2x^2 + 3x - 2$

Inicialmente, encontram-se as raízes da equação $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

Então, $a = 2$; $b = 3$ e $c = -2$.

Assim:

$$S = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$P = \frac{-2}{2} = -1$$

Portanto, as raízes são $x_1 = -2$ e $x_2 = \frac{1}{2}$.

Logo:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2 \cdot [x - (-2)] \cdot \left[x - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= 2 \cdot [x + 2] \cdot \left[x - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= 2 \cdot (x + 2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

e) $x^3 - x^2 - 12x$

Considerando $P(x) = x^3 - x^2 - 12x$, tem-se:

$$P(x) = x \cdot \underbrace{(x^2 - x - 12)}_{A(x)}$$

Sendo $A(x) = x^2 - x - 12$, tem-se:

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Inicialmente, encontram-se as raízes dessa equação.

Então, $a = 1$; $b = -1$ e $c = -12$.

Assim:

$$S = \frac{-(-1)}{1} = 1$$

$$P = \frac{-12}{1} = -12$$

Portanto, as raízes são $x_1 = -3$ e $x_2 = 4$.

Logo:

$$A(x) = 1 \cdot [x - (-3)] \cdot [x - 4] =$$

$$= [x + 3] \cdot [x - 4] = (x + 3) \cdot (x - 4)$$

Mas, $P(x) = x \cdot A(x)$, então:

$$P(x) = x \cdot (x + 3) \cdot (x - 4)$$

f) $18x^3 - 48x^2 - 18x$

Considerando $P(x) = 18x^3 - 48x^2 - 18x$, tem-se:

$$P(x) = 6x \cdot \underbrace{(3x^2 - 8x - 3)}_{A(x)}$$

Sendo $A(x) = 3x^2 - 8x - 3$, tem-se:

$$3x^2 - 8x - 3 = 0$$

Inicialmente, encontram-se as raízes dessa equação.

Então, $a = 3$; $b = -8$ e $c = -3$.

Assim:

$$S = \frac{-(-8)}{3} = \frac{8}{3}$$

$$P = \frac{-3}{3} = -1$$

Portanto, as raízes são $x_1 = -\frac{1}{3}$ e $x_2 = 3$.

Logo:

$$A(x) = 3 \cdot \left[x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] \cdot [x - 3] =$$

$$= 3 \cdot \left[x + \frac{1}{3}\right] \cdot [x - 3] =$$

$$= 3 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot (x - 3)$$

Mas, $P(x) = 6x \cdot A(x)$, então:

$$P(x) = 6x \cdot 3 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot (x - 3) =$$

$$= 18x \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot (x - 3)$$

PÁGINA 178 – ATIVIDADES

42. a) Substituindo x por -2 e y por 3 nas duas equações, tem-se:

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 3 & \text{(I)} \\ -x \cdot y = 6 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), tem-se:

$$3 \cdot (-2)^2 - 3^2 = 3$$
$$3 \cdot 4 - 9 = 3$$
$$12 - 9 = 3$$
$$3 = 3 \text{ (verdadeira)}$$

De (II), tem-se:

$$-(-2) \cdot 3 = 6$$
$$2 \cdot 3 = 6$$
$$6 = 6 \text{ (verdadeira)}$$

Portanto, o par ordenado $(-2, 3)$ é solução desse sistema de equações. Logo, a afirmação é verdadeira.

b) Substituindo x por 1 e y por $\frac{1}{2}$ nas duas equações, tem-se:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 & \text{(I)} \\ x^2 - 4y = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), tem-se:

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$
$$1 + 1 = 2$$
$$2 = 2 \text{ (verdadeira)}$$

De (II), vem:

$$1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 1$$
$$1 - 2 = 1$$
$$-1 = 1 \text{ (falsa)}$$

Portanto, o par ordenado $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ não é solução desse sistema de equações. Logo, a afirmação é falsa.

Para corrigir essa afirmação, deve-se resolver o sistema e encontrar sua solução.

De (I), vem:

$$x = 2 - 2y$$

Substituindo o valor de x na equação (II), tem-se:

$$x^2 - 4y = 1$$
$$(2 - 2y)^2 - 4y = 1$$
$$4 - 8y + 4y^2 - 4y - 1 = 0$$
$$4y^2 - 12y + 3 = 0$$

Então:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 144 - 48 = 96$$

Daí:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-12) \pm \sqrt{96}}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm 4\sqrt{6}}{8} =$$

$$= \frac{4 \cdot (3 \pm \sqrt{6})}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{2}$$

Portanto, $y_1 = \frac{3 + \sqrt{6}}{2}$ e $y_2 = \frac{3 - \sqrt{6}}{2}$.

Como $x = 2 - 2y$, tem-se:

- para $y_1 = \frac{3 + \sqrt{6}}{2}$:

  $$x_1 = 2 - 2 \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{6}}{2}\right) = 2 - 3 - \sqrt{6} =$$

  $$= -1 - \sqrt{6}$$

- para $y_2 = \frac{3 - \sqrt{6}}{2}$:

  $$x_2 = 2 - 2 \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{2}\right) =$$

  $$= 2 - 3 + \sqrt{6} = -1 + \sqrt{6}$$

Logo, os pares ordenados

$$\left(-1 - \sqrt{6}, \frac{3 + \sqrt{6}}{2}\right) \text{ e } \left(-1 + \sqrt{6}, \frac{3 - \sqrt{6}}{2}\right)$$

são soluções do sistema dado.

c) Substituindo x por 3 e y por 6 nas duas equações, tem-se:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 45 & \text{(I)} \\ y = 2x & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), vem:

$$3^2 + 6^2 = 45$$
$$9 + 36 = 45$$
$$45 = 45 \text{ (verdadeira)}$$

De (II), tem-se:

$$y = 2x$$
$$6 = 2 \cdot 3$$
$$6 = 6 \text{ (verdadeira)}$$

Logo, (3, 6) é solução do sistema e a afirmação é verdadeira.

d) Substituindo x por -10 e y por 1 nas duas equações, tem-se:

$$\begin{cases} x + y = 9 & \text{(I)} \\ x \cdot y = -10 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), vem:

$$-10 + 1 = 9$$
$$-9 = 9 \text{ (falsa)}$$

De (II), tem-se:

$$(-10) \cdot 1 = -10$$
$$-10 = -10 \text{ (verdadeira)}$$

Portanto, o par ordenado $(-10, 1)$ não é solução do sistema. Logo, a afirmação é falsa.

Para corrigir essa afirmação, deve-se resolver o sistema e encontrar sua solução.

$$\begin{cases} x + y = 9 & \text{(I)} \\ x \cdot y = 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

Para encontrar a solução desse sistema, determinam-se os pares de números cuja soma seja 9 e o produto, −10. Esses números são −1 e 10.

Logo, os pares ordenados (−1, 10) e (10, −1) são soluções do sistema dado.

43. a) $$\begin{cases} x^2 - y = 74 \\ 16x - y = 137 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y = 74 \\ -16x + y = -137 \end{cases} +$$

$$x^2 - 16x = 74 - 137$$

$$x^2 - 16x = -63$$

$$x^2 - 16x + 63 = 0$$

Então, $S = 16$ e $P = 63$.

Portanto, $x_1 = 7$ e $x_2 = 9$.

Substituindo x_1 e x_2 em $y = 16x - 137$, obtêm-se, respectivamente, y_1 e y_2:

$$y_1 = 16 \cdot 7 - 137 = -25$$

$$y_2 = 16 \cdot 9 - 137 = 7$$

Logo, as soluções desse sistema são os pares ordenados (7, −25) e (9, 7).

b) $$\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$$

Da segunda equação, tem-se:

$$x = \frac{4}{y}$$

Substituindo o valor de x na primeira equação, tem-se:

$$2 \cdot \left(\frac{4}{y}\right) + 3y = 10$$

$$\frac{8}{y} + 3y = 10$$

$$8 + 3y^2 - 10y = 0$$

$$3y^2 - 10y + 8 = 0$$

Então, $a = 3$; $b = -10$ e $c = 8$.

Daí:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 100 - 96 = 4$

Logo:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-10) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3}$$

Assim:

$$y_1 = \frac{10 + 2}{6} = 2$$

$$y_2 = \frac{10 - 2}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Substituindo y_1 e y_2 em $x = \frac{4}{y}$, obtêm-se, respectivamente, x_1 e x_2:

$$x_1 = \frac{4}{y_1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{4}{y_2} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$$

Logo, as soluções desse sistema são os pares ordenados (2, 2) e $\left(3, \frac{4}{3}\right)$.

c) $$\begin{cases} 4x^2 + 2xy + y^2 = 37 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Da segunda equação, tem-se:

$$y = 2x - 1$$

Substituindo y na primeira equação, tem-se:

$$4x^2 + 2x \cdot (2x - 1) + (2x - 1)^2 = 37$$

$$4x^2 + 4x^2 - 2x + 4x^2 - 4x + 1 - 37 = 0$$

$$12x^2 - 6x - 36 = 0$$

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

Então, $a = 2$; $b = -1$ e $c = -6$.

Daí:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49$

Logo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

Assim:

$$x_1 = \frac{1 + 7}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{1 - 7}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

Substituindo x_1 e x_2 em $y = 2x - 1$, obtêm-se, respectivamente, y_1 e y_2:

$$y_1 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$y_2 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = -3 - 1 = -4$$

Logo, as soluções desse sistema são os pares ordenados (2, 3) e $\left(-\frac{3}{2}, -4\right)$.

d) $$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Da segunda equação, tem-se:

$$x = 1 - y$$

Substituindo $x = 1 - y$ na primeira equação, tem-se:

$$x^2 + 3y^2 = 7$$

$$(1 - y)^2 + 3y^2 = 7$$

$$1 - 2y + y^2 + 3y^2 = 7$$

$$4y^2 - 2y - 6 = 0$$

$$2y^2 - y - 3 = 0$$

Então, $a = 2$; $b = -1$ e $c = -3$.

Daí:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1 + 24 = 25$

Logo:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

Portanto:

$$y_1 = \frac{1 + 5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$y_2 = \frac{1 - 5}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Substituindo y_1 e y_2 em $x = 1 - y$, obtêm-se, respectivamente, x_1 e x_2:

$$x_1 = 1 - y_1 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 1 - y_2 = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Logo, as soluções desse sistema são os pares ordenados $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e (2, −1).

e) $$\begin{cases} x = y \\ 4xy + \frac{x}{5} - \frac{5y}{2} = 0 \end{cases}$$

Substituindo $x = y$ na segunda equação, obtém-se:

$$4y \cdot y + \frac{y}{5} - \frac{5y}{2} = 0$$

$$4y^2 + \frac{y}{5} - \frac{5y}{2} = 0$$

$$\frac{4y^2 \cdot 10 + y \cdot 2 - 5y \cdot 5}{10} = 0$$

$$40y^2 + 2y - 25y = 0$$

$$40y^2 - 23y = 0$$

$$y \cdot (40y - 23) = 0$$

Então:

- $y_1 = 0$
- $40y_2 - 23 = 0$

$$40y_2 = 23$$

$$y_2 = \frac{23}{40}$$

Substituindo y_1 e y_2 em $x = y$, obtêm-se, respectivamente, x_1 e x_2:

$$x_1 = y_1 = 0$$

$$x_2 = y_2 = \frac{23}{40}$$

Logo, as soluções desse sistema são os pares ordenados (0, 0) e $\left(\frac{23}{40}, \frac{23}{40}\right)$.

f) $$\begin{cases} x + y = 5 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Da primeira equação, tem-se:

$$x = 5 - y$$

Substituindo $x = 5 - y$ na segunda equação, tem-se:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{5-y} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{y-(5-y)}{y\cdot(5-y)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{y-5+y}{y\cdot(5-y)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{2y-5}{5y-y^2} = \frac{1}{6}$$

$$6\cdot(2y-5) = 1\cdot\left(5y-y^2\right)$$

$$12y - 30 = 5y - y^2$$

$$y^2 + 7y - 30 = 0$$

Então, $a = 1$; $b = 7$ e $c = -30$.

Daí:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 7^2 - 4\cdot 1\cdot(-30) = 49 + 120 = 169$

Logo:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{2\cdot 1} = \frac{-7 \pm 13}{2}$$

Portanto:

$$y_1 = \frac{-7+13}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_2 = \frac{-7-13}{2} = \frac{-20}{2} = -10$$

Substituindo y_1 e y_2 em $x = 5 - y$, obtêm-se, respectivamente, x_1 e x_2:

$x_1 = 5 - y_1 = 5 - 3 = 2$

$x_2 = 5 - y_2 = 5 - (-10) = 5 + 10 = 15$

Logo, as soluções desse sistema são os pares ordenados (15, −10) e (2, 3).

g) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{x+3}{y^2} = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

Da segunda equação, tem-se:

$$y = 2x$$

Substituindo $y = 2x$ na primeira equação, vem:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+3}{(2x)^2} = 2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{x+3}{4x^2} = 2$$

$$\frac{4x+x+3}{4x^2} = 2$$

$$\frac{5x+3}{4x^2} = 2$$

$$5x + 3 = 2\cdot 4x^2$$

$$5x + 3 = 8x^2$$

$$8x^2 - 5x - 3 = 0$$

Então, $a = 8$; $b = -5$ e $c = -3$.

Daí:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 8\cdot(-3) = 25 + 96 = 121$

Logo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{121}}{2\cdot 8} = \frac{5 \pm 11}{16}$$

Portanto:

$$x_1 = \frac{5+11}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

$$x_2 = \frac{5-11}{16} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

Substituindo x_1 e x_2 em $y = 2x$, obtêm-se, respectivamente, y_1 e y_2:

$$y_1 = 2x_1 = 2\cdot 1 = 2$$

$$y_2 = 2x_2 = 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

Logo, as soluções desse sistema são os pares ordenados (1, 2) e $\left(-\frac{3}{8}, -\frac{3}{4}\right)$.

44. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7 \\ x - y = \frac{3}{10} \end{cases}$

Da segunda equação, tem-se:

$$x = \frac{3}{10} + y$$

Antes de substituir o valor de x na segunda equação, deve-se simplificar a primeira equação:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7$$

$$\frac{y+x}{xy} = 7$$

$$y + x = 7xy$$

Agora, substituindo $x = \frac{3}{10} + y$ nessa equação, vem:

$$y + \frac{3}{10} + y = 7\cdot\left(\frac{3}{10} + y\right)\cdot y$$

$$2y + \frac{3}{10} = \frac{21y}{10} + 7y^2$$

$$20y + 3 = 21y + 70y^2$$

$$70y^2 + y - 3 = 0$$

Então, $a = 70$; $b = 1$ e $c = -3$.

Daí:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 70\cdot(-3) = 1 + 840 = 841$

Logo:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{841}}{2\cdot 70} = \frac{-1 \pm 29}{140}$$

Portanto:

$$y_1 = \frac{-1+29}{140} = \frac{28}{140} = \frac{1}{5}$$

$$y_2 = \frac{-1-29}{140} = \frac{-30}{140} = \frac{-3}{14}$$

Substituindo y_1 e y_2 em $x = \frac{3}{10} + y$, obtêm-se, respectivamente, x_1 e x_2:

- $x_1 = \frac{3}{10} + y_1 = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3+2}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
- $x_2 = \frac{3}{10} + y_2 = \frac{3}{10} + \left(-\frac{3}{14}\right) = \frac{21-15}{70} = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}$

Assim, os números são: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{5}$ ou $\frac{3}{35}$ e $-\frac{3}{14}$.

45. Considerando que as medidas dos lados dos quadrados são x e y, então:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Da segunda equação, tem-se:

$$x = 2 + y$$

Substituindo $x = 2 + y$ na primeira equação, vem:

$$(2+y)^2 + y^2 = 52$$

$$4 + 4y + y^2 + y^2 = 52$$

$$2y^2 + 4y - 48 = 0$$

$$y^2 + 2y - 24 = 0$$

Então, $a = 1$; $b = 2$ e $c = -24$.

Daí:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 2^2 - 4\cdot 1\cdot(-24) = 4 + 96 = 100$

Portanto:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm 10}{2}$$

Assim:

$$y_1 = \frac{-2+10}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y_2 = \frac{-2-10}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Substituindo y_1 e y_2 em $x = 2 + y$, obtêm-se, respectivamente, x_1 e x_2:

$$x_1 = 2 + 4 = 6$$

$$x_2 = 2 - 6 = -4$$

Como as medidas dos lados não podem ser negativas, então $x = 6$ e $y = 4$.

Seja A a medida da área e P a medida do perímetro de cada quadrado.

- Para o quadrado de lado 6, tem-se:

  $$A = 6^2 = 36$$

  Portanto, a medida da área desse quadrado é 36 cm².

  $$P = 4\cdot x = 4\cdot 6 = 24$$

  Portanto, a medida do perímetro desse quadrado é 24 cm.

- Para o quadrado de lado 4, tem-se:

$$A = 4^2 = 16$$

Portanto, a medida da área desse quadrado é 16 cm^2.

$$P = 4 \cdot y = 4 \cdot 4 = 16$$

Portanto, a medida do perímetro desse quadrado é 16 cm.

46. Sendo x e y as medidas dos comprimentos dos lados do retângulo, tem-se:

$$\begin{cases} x \cdot y = 300 \\ 2x + 2y = 70 \end{cases}$$

Da segunda equação, vem:

$$2x + 2y = 70$$
$$x + y = 35$$
$$y = 35 - x$$

Substituindo $y = 35 - x$ na primeira equação, obtém-se:

$$x \cdot y = 300$$
$$x \cdot (35 - x) = 300$$
$$35x - x^2 = 300$$
$$x^2 - 35x + 300 = 0$$

Então, $a = 1$; $b = -35$ e $c = 300$.

Daí:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-35)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 300 = 1\,225 - 1\,200 =$
$= 25$

Assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-35) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{35 \pm 5}{2}$$

Portanto:

$$x_1 = \frac{35 + 5}{2} = \frac{40}{2} = 20$$
$$x_2 = \frac{35 - 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Substituindo x_1 e x_2 em $y = 35 - x$, obtém-se, respectivamente, y_1 e y_2:

$$y_1 = 35 - x_1 = 35 - 20 = 15$$
$$y_2 = 35 - x_2 = 35 - 15 = 20$$

Os pares ordenados (20, 15) e (15, 20) são soluções do sistema.

Portanto, as medidas de comprimento dos lados desse terreno são 15 m e 20 m.

47. • Área da região verde:

$$x^2 - 4y^2 = 48 \quad \text{(I)}$$

- Perímetro do retângulo $ABCD$:

$$2y + 2 \cdot (x - 2y) = 12$$
$$2y + 2x - 4y = 12$$
$$2x - 2y = 12 \quad \text{(II)}$$

Montando o sistema formado pelas equações (I) e (II) tem-se:

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 48 \\ 2x - 2y = 12 \end{cases}$$

Da segunda equação, vem:

$$2x - 2y = 12$$
$$x - y = 6$$
$$x = y + 6$$

Substituindo $x = y + 6$ na primeira equação, obtém-se:

$$x^2 - 4y^2 = 48$$
$$(y + 6)^2 - 4y^2 = 48$$
$$y^2 + 12y + 36 - 4y^2 = 48$$
$$3y^2 - 12y + 12 = 0$$
$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

Assim, $S = 4$ e $P = 4$.

Logo:

$$y_1 = y_2 = 2$$

Substituindo y_1 e y_2 em $x = y + 6$, obtêm-se, respectivamente, x_1 e x_2:

$$x_1 = x_2 = y + 6 = 2 + 6 = 8$$

Portanto, $x = 8$ e $y = 2$.

PÁGINA 179 – DIVERSIFICANDO

1. Sabendo que a medida da área de um retângulo é dada pelo produto da medida do comprimento pela medida da largura, tem-se:

$$(2x - 1) \cdot (x + 3) = 130$$
$$2x^2 + 6x - x - 3 - 130 = 0$$
$$2x^2 + 5x - 133 = 0$$

2. a) Sabendo que a medida do lado do quadrado passou a ser $x + 3$, tem-se:

$$(x + 3)^2 = 256$$
$$x^2 + 6x + 9 - 256 = 0$$
$$x^2 + 6x - 247 = 0$$

b) Como a medida da área do quadrado inicial era x^2, precisa-se descobrir o valor de x. Então:

$$x^2 + 6x - 247 = 0$$

Então, $a = 1$; $b = 6$ e $c = -247$.

Daí:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-247) = 36 + 988 =$
$= 1\,024$

Assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-6 \pm 32}{2}$$

Portanto:

$$x_1 = \frac{-6 + 32}{2} = \frac{26}{2} = 13$$
$$x_2 = \frac{-6 - 32}{2} = \frac{-38}{2} = -19$$

Como se trata da medida do lado do quadrado inicial, o valor não pode ser negativo. Portanto:

$$A = 13^2 = 169$$

Logo, a área do quadrado antes da ampliação media 169 cm^2.

3. Como as áreas das regiões têm medidas iguais, então:

$$(2a)^2 = 9 \cdot a$$
$$4a^2 = 9a$$
$$4a = 9$$
$$a = \frac{9}{4}$$

4. Sabendo que a medida do perímetro é a soma das medidas dos lados do retângulo, tem-se:

$$2x^2 + 4 = 22$$
$$2x^2 = 22 - 4$$
$$2x^2 = 18$$
$$x^2 = \frac{18}{2}$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} \qquad (x > 0)$$
$$x = 3$$

5. Considerando x o número procurado, tem-se:

$$x - \frac{1}{x} = 2$$
$$\frac{x^2 - 1}{x} = 2$$
$$x^2 - 1 = 2x$$
$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

Então, $a = 1$; $b = -2$ e $c = -1$.

Daí:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8$

Assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Portanto, $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Logo, esse número pode ser $1 + \sqrt{2}$ ou $1 - \sqrt{2}$.

6.

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$
$$170 = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$
$$n^2 - 3n = 340$$
$$n^2 - 3n - 340 = 0$$

Então, $a = 1$; $b = -3$ e $c = -340$.

Resolvendo a equação, tem-se:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-340) = 9 + 1360 =$
$= 1369$

Assim:

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$n = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1369}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 37}{2}$$

Logo:

$$n_1 = \frac{3 + 37}{2} = \frac{40}{2} = 20$$
$$n_2 = \frac{3 - 37}{2} = \frac{-34}{2} = -17$$

Como $n > 2$, o polígono tem 20 lados, ou seja, é um icoságono.

7. A área da região amarela é igual à diferença entre a área do quadrado *ABCD* e a área do quadrado *EFGH*.

- Medida da área do quadrado *EFGH*:

$$x^2$$

- Medida da área do quadrado *ABCD*:

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2$$

- Medida da área da região amarela:

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - x^2 = 5$$

Resolvendo a última equação, obtém-se:

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - x^2 = 5$$
$$x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} - x^2 = 5$$
$$4 + \frac{4}{x^2} = 5$$
$$\frac{4}{x^2} = 5 - 4$$
$$\frac{4}{x^2} = 1$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

Como x deve ser maior que zero, pois é uma medida de comprimento, então $x = 2$.

8. a) O quadrado de área medindo x cm^2 tem lado de medida $\sqrt{x}$ cm.

O quadrado de área medindo $(x + 5)$ cm^2 tem lado de medida $\sqrt{x + 5}$ cm.

b) Como o quadrado de área medindo x cm^2 tem lado de medida $\sqrt{x}$ cm, então seu perímetro mede $4\sqrt{x}$ cm.

Como o quadrado de área medindo $(x + 5)$ cm^2 tem lado de medida $\sqrt{x + 5}$ cm, então seu perímetro mede $4\sqrt{x + 5}$ cm.

c) Como o fio de arame tinha 20 cm, então:

$$4\sqrt{x} + 4\sqrt{x + 5} = 20$$
$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{x + 5}\right) = \frac{20}{4}$$
$$\sqrt{x} + \sqrt{x + 5} = 5$$
$$\sqrt{x + 5} = 5 - \sqrt{x}$$
$$\left(\sqrt{x + 5}\right)^2 = (5 - \sqrt{x})^2$$
$$x + 5 = 25 - 10\sqrt{x} + x$$
$$10\sqrt{x} = 20$$
$$\sqrt{x} = 2$$
$$x = 2^2$$
$$x = 4$$

Portanto, $x = 4$ cm.

9. Sendo A_1 e P_1 as medidas da área e do perímetro, respectivamente, do quadrado azul e A_2 e P_2 as medidas da área e do perímetro, respectivamente, do quadrado marrom, tem-se:

$$A_1 + A_2 = x^2 + y^2 = 80$$
$$P_1 + P_2 = 4x + 4y = 32\sqrt{2}$$

Sabendo que $x > y$, pode-se montar um sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 80 \\ 4x + 4y = 32\sqrt{2} \end{cases}$$

Da segunda equação, tem-se:

$$4x + 4y = 32\sqrt{2}$$
$$x + y = 8\sqrt{2}$$
$$y = 8\sqrt{2} - x$$

Substituindo $y = 8\sqrt{2} - x$ na primeira equação, obtém-se:

$$x^2 + y^2 = 80$$
$$x^2 + \left(8\sqrt{2} - x\right)^2 = 80$$
$$x^2 + 128 - 16\sqrt{2}x + x^2 - 80 = 0$$
$$2x^2 - 16\sqrt{2}x + 48 = 0$$
$$x^2 - 8\sqrt{2}x + 24 = 0$$

Então, $a = 1$; $b = -8\sqrt{2}$ e $c = 24$.

Resolvendo essa equação, tem-se:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = \left(-8\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 128 - 96 = 32$$

Daí:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-\left(-8\sqrt{2}\right) \pm \sqrt{32}}{2 \cdot 1} = 4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}$$

Portanto:

$$x_1 = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$
$$x_2 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Substituindo x_1 e x_2 em $y = 8\sqrt{2} - x$, obtêm-se, respectivamente, y_1 e y_2:

$$y_1 = 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$
$$y_2 = 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Logo, $\left(6\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ e $\left(2\sqrt{2}, 6\sqrt{2}\right)$ satisfazem o sistema de equações. Porém, como $x > y$, tem-se $x = 6\sqrt{2}$ cm e $y = 2\sqrt{2}$ cm.

PÁGINA 180 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Os significados dos 5 Rs da sustentabilidade são: Repensar, Reduzir, Reutilizar, Reciclar e Recusar.

2. a) Resposta pessoal. Resposta possível: Água invisível é a água gasta nos processos de fabricação dos produtos ou em sua geração. Compreende desde a água gasta para a produção de 1 kg de carne pela agropecuária ou 1 kg de arroz pela agricultura até a água gasta para fazer roupas, sapatos, etc.

b) Considerando a população brasileira de 215 milhões de pessoas e um ano com 365 dias, calcula-se o consumo para 2 mil e 5 mil litros por dia.

- Consumo de 2 mil litros por dia:

$365 \cdot 2\,000 \cdot 215\,000\,000 =$
$= 156\,950\,000\,000\,000$

- Consumo de 5 mil litros por dia:

$365 \cdot 5\,000 \cdot 215\,000\,000 =$
$= 392\,375\,000\,000\,000$

Logo, a estimativa do consumo anual de “água invisível” da população brasileira é aproximadamente 157 bilhões de litros de água como valor inferior e 392 bilhões de litros de água como valor superior.

c) Resposta pessoal. Resposta possível: Porque resta à humanidade 0,7% da água doce da Terra, armazenada no subsolo, o que dificulta sua utilização. Somente 0,007% está disponível em rios e lagos superficiais.

PÁGINA 182 – INVESTIGAR

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

4. Resposta pessoal.

5. Resposta pessoal.

6. Respostas pessoais.

PÁGINA 184 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. a) $(3 + 2x)(3 - 2x) - 8(x - 2) + 8x - 5x^2 =$
$= 9 - 4x^2 - 8x + 16 + 8x - 5x^2 =$
$= 25 - 9x^2 = (5 - 3x)(5 + 3x)$

b) $(x + 3)(1 - 2x) + 3x(x - 1) + 13 =$
$= x - 2x^2 + 3 - 6x + 3x^2 - 3x + 13 =$
$= x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$

c) $(a + 3)^2 - 5(a + 1) + (a + 2)(a - 2) =$
$= a^2 + 6a + 9 - 5a - 5 + a^2 - 4 =$
$= 2a^2 + a = a(2a + 1)$

d) $x(2x - 1)^2 + 2x(2x - 1) =$
$= x\left(4x^2 - 4x + 1\right) + 4x^2 - 2x =$
$= 4x^3 - 4x^2 + x + 4x^2 - 2x =$
$= 4x^3 - x = x\left(4x^2 - 1\right) =$
$= x(2x + 1)(2x - 1)$

2. a) $\begin{cases} a^2 - b^2 = 39 \\ a - b = 3 \end{cases}$

Fatorando a primeira equação, tem-se:

$$a^2 - b^2 = 39$$
$$(a + b)\,(a - b) = 39$$

Como $a - b = 3$, então:

$$(a + b) \cdot 3 = 39$$
$$a + b = 13$$

b) Resolvendo o sistema formado pelas equações $a + b = 13$ e $a - b = 3$, tem-se:

$$\begin{cases} a + b = 13 \\ \underline{a - b = 3} \end{cases} +$$
$$a = 16$$
$$a = 8$$

Substituindo $a = 8$ em $a + b = 13$, tem-se:

$$b = 13 - a = 13 - 8 = 5$$

Portanto, $a = 8$ e $b = 5$.

3. É possível resolver essa atividade de duas maneiras diferentes.

- 1ª maneira: subtraindo a medida da área da pintura da medida da área do quadro:

$A = 25 \cdot 40 - [(25 - 2L) \cdot (40 - 2L)] =$
$= 1\,000 - [1\,000 - 50L - 80L + 4L^2] =$
$= 1\,000 - 1\,000 + 50L + 80L - 4L^2 =$
$= 130L - 4L^2 = 2L(65 - 2L)$

- 2ª maneira: decompondo em medidas das áreas menores da medida da área da moldura:

$A = 2 \cdot (25 - 2L) \cdot L + 2 \cdot 40 \cdot L =$
$= 50L - 4L^2 + 80L = 130L - 4L^2 =$
$= 2L \cdot (65 - 2L)$

Ou

$A = 2 \cdot L \cdot (25 - L) + 2 \cdot L \cdot (40 - L) =$
$= 50L - 2L^2 + 80L - 2L^2 =$
$= 130L - 4L^2 = 2L \cdot (65 - 2L)$

4. Seja x a medida do lado do quadrado inicial e A_i a medida de sua área. Então:

$$A_i = x^2$$

Considerando que, após o aumento, as medidas dos lados passaram a ser $(x + 4)$ m e $(x + 6)$ m e que A_f seja a medida da área após o aumento das dimensões do quadrado original, então:

$$A_f = (x + 6) \cdot (x + 4)$$

Mas $A_f = 2 \cdot A_i$, então:

$$(x + 6) \cdot (x + 4) = 2x^2$$
$$x^2 + 4x + 6x + 24 = 2x^2$$
$$x^2 + 10x + 24 - 2x^2 = 0$$
$$x^2 - 10x - 24 = 0$$

Então, $a = 1$; $b = -10$ e $c = -24$.

Resolvendo essa equação por soma e produto, tem-se:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-10)}{1} = 10$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-24}{1} = -24$$

Portanto, $x_1 = -2$ e $x_2 = 12$.

Como x é a medida do lado do quadrado, então $x > 0$. Logo, a medida dos lados do quadrado é 12 m.

5. Alternativa **e**.

Considerando m o número que foi apagado da equação do 2º grau, para descobrir o valor de m, usa-se a raiz que é dada e busca-se a solução por meio de uma equação.

$$2x^2 - mx + 60 = 0$$
$$2 \cdot 6^2 - m \cdot 6 + 60 = 0$$
$$2 \cdot 36 - 6m + 60 = 0$$
$$72 - 6m + 60 = 0$$
$$-6m + 132 = 0$$
$$-6m = -132$$
$$m = \frac{-132}{-6}$$
$$m = 22$$

6. $x^2 - 7x + k = 0$

Então, $a = 1$; $b = -7$ e $c = k$.

Como $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, vem:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{1} = 7 \quad \text{(I)}$$

Como as raízes devem ser consecutivas, então:

$$x_2 = x_1 + 1 \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), tem-se:

$$x_1 + x_2 = 7$$
$$x_1 + x_1 + 1 = 7$$
$$2x_1 + 1 = 7$$
$$2x_1 = 6$$
$$x_1 = 3$$

Substituindo $x_1 = 3$ em (II), tem-se:

$$x_2 = x_1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

Como o produto das raízes P da equação é dado por $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, então:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{k}{1}$$
$$3 \cdot 4 = k$$
$$k = 12$$

7. **a)** $z^2 - pz = 0$

$z(z - p) = 0$

Daí:

- $z = 0$
- $z - p = 0$

$z = p$

Portanto, as soluções da equação são 0 e p.

b) $(x - 2) \cdot [x - (-7)] = 0$

$$(x - 2) \cdot [x + 7] = 0$$
$$x^2 + 7x - 2x - 14 = 0$$
$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

c) Para que 3 seja solução da equação, pode-se substituir x por 3, tornando a igualdade verdadeira e, assim, determinar o valor de p.

$$8x^2 - 4x - p + 3 = 0$$
$$8 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 - p + 3 = 0$$
$$8 \cdot 9 - 12 - p + 3 = 0$$
$$72 - 12 - p + 3 = 0$$
$$-p + 63 = 0$$
$$p = 63$$

d) As duas raízes da equação são iguais.

8. Alternativa **a**.

Seja S a soma e P o produto das raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$ representada na forma $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, em que $\alpha = 1$; $\beta = a$; $\gamma = b$. Então:

$$S = v + w = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{a}{1} = -a$$

$$P = v \cdot w = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{b}{1} = b$$

Mas:

$$(v + w)^2 = v^2 + 2vw + w^2$$
$$S^2 = v^2 + 2P + w^2$$
$$(-a)^2 = v^2 + 2b + w^2$$
$$v^2 + w^2 = a^2 - 2b$$

9. Alternativa **b**.

Simplificando $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta$, tem-se:

$$\alpha\beta(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(\alpha\beta - 1)$$

Na equação $3x^2 + 7x - 18 = 0$, os coeficientes são $a = 3$; $b = 7$ e $c = -18$.

A soma e o produto das raízes dessa equação são dados respectivamente por:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{3}$$

$$P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{-18}{3} = -6$$

Portanto:

$(\alpha + \beta)(\alpha\beta - 1) = S \cdot (P - 1) = -\frac{7}{3} \cdot (-6 - 1) =$
$= -\frac{7}{3} \cdot (-7) = \frac{49}{3}$

10. Sabendo que $x^2 + y^2 = 1$ e $x^4 + y^4 = \frac{17}{18}$, então:

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 1^2$$
$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 1$$
$$x^4 + y^4 = 1 - 2x^2y^2$$
$$\frac{17}{18} = 1 - 2x^2y^2$$
$$2x^2y^2 = 1 - \frac{17}{18}$$
$$2x^2y^2 = \frac{1}{18}$$
$$x^2y^2 = \frac{1}{36}$$
$$\sqrt{x^2y^2} = \sqrt{\frac{1}{36}}$$

De acordo com o enunciado, os números x e y são reais positivos, então:

$$xy = \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{xy} = 6$$

11. Alternativa **a**.

Considerando x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 + 4x + m = 0$, tem-se:

- $a = 1$; $b = 4$; $c = m$
- $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -4$
- $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m$

De acordo com o enunciado, a soma dos quadrados das raízes da equação dada é igual a 40, então:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2$$
$$(-4)^2 = \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{40} + 2 \cdot \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{m}$$
$$16 = 40 + 2m$$
$$2m = -24$$
$$m = -12$$

Assim:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{S}{P} = \frac{-4}{m} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}$$

12. a)

$$x^2 + 5x = -4$$
$$x^2 + 5x + m^2 = -4 + m^2$$
$$x^2 + 2mx + m^2 = -4 + m^2$$
$$2mx = 5x$$
$$2m = \frac{5x}{x}$$
$$2m = 5$$
$$m = \frac{5}{2}$$

b) $x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -4 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = -4 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = -4 + \frac{25}{4}$$
$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{-16 + 25}{4}$$
$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$
$$x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$$
$$x + \frac{5}{2} = \pm\frac{3}{2}$$

Portanto:

$$x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$
$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

c) Resposta pessoal.

13. Sendo x a idade de Adriana e y a idade de Ana, tem-se:

$$\begin{cases} x \cdot y = 374 \\ x = 5 + y \end{cases}$$

Substituindo $x = 5 + y$ na primeira equação, tem-se:

$$(5 + y) \cdot y = 374$$
$$5y + y^2 = 374$$
$$y^2 + 5y - 374 = 0$$

Então, $a = 1$; $b = 5$ e $c = -374$.

Daí:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-374) = 25 + 1\,496 = 1\,521$

Portanto:

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{1\,521}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 39}{2}$$

Logo:

$$y_1 = \frac{-5 + 39}{2} = \frac{34}{2} = 17$$
$$y_2 = \frac{-5 - 39}{2} = \frac{-44}{2} = -22$$

Como y representa a idade de uma pessoa, então $y > 0$. Substituindo $y_1 = 17$ na segunda equação, obtém-se o valor de x_1:

$$x_1 = 5 + y_1 = 5 + 17 = 22$$

Portanto, Adriana tem 22 anos e Ana, 17 anos.

14. Sendo h o número de homens e m o número de mulheres no congresso, tem-se:

$$\begin{cases} h + m = 50 \\ h \cdot m = 621 \end{cases}$$

Da primeira equação, vem:

$$h + m = 50$$
$$h = 50 - m$$

Substituindo essa relação na segunda equação, tem-se:

$$(50 - m) \cdot m = 621$$
$$50m - m^2 = 621$$
$$-m^2 + 50m - 621 = 0$$

Então, $a = -1$; $b = 50$ e $c = -621$.

Daí:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 50^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-621) =$

$= 2\,500 - 2\,484 = 16$

Portanto:

$$m = \frac{-50 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-50 \pm 4}{-2} = 25 \pm 2$$

Logo:

$$m_1 = 25 - 2 = 23$$
$$m_2 = 25 + 2 = 27$$

Substituindo m_1 e m_2 em $h + m = 50$, obtêm-se h_1 e h_2.

$$h_1 = 50 - m_1 = 50 - 23 = 27$$
$$h_2 = 50 - m_2 = 50 - 27 = 23$$

Como $m > h$, estavam presentes no congresso 27 mulheres e 23 homens.

15. Resposta possível: Antes de começar o tempo de cozimento, Osmar virou as duas ampulhetas ao mesmo tempo. Quando a ampulheta que marca 7 minutos acabou, ele começou a contar o tempo de cozimento $(11 - 7 = 4)$. Assim que terminaram os 4 minutos restantes da ampulheta de 11 minutos, ele a virou novamente, obtendo ao final 15 minutos $(4 + 11 = 15)$.

16. Sendo x o número de garrafas compradas e y o valor de cada uma, tem-se:

- compra sem o desconto:

$$x \cdot y = 24$$

- compra com o desconto:

$$(x + 4) \cdot (y - 1) = 24$$

Assim, tem-se um sistema de equações:

$$\begin{cases} x \cdot y = 24 \\ (x + 4) \cdot (y - 1) = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 24 \\ xy + 4y - x - 4 = 24 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtém-se:

$$24 + 4y - x - 4 = 24$$
$$4y - x - 4 = 0$$

Da primeira equação, tem-se:

$$x \cdot y = 24$$
$$y = \frac{24}{x}$$

Substituindo o valor de y em $4y - x - 4 = 0$, obtém-se:

$$4 \cdot \frac{24}{x} - x - 4 = 0$$
$$\frac{96}{x} - x - 4 = 0$$
$$96 - x^2 - 4x = 0$$
$$x^2 + 4x - 96 = 0$$

Resolvendo essa equação tem-se:

- $a = 1$; $b = 4$; $c = -96$
- $\Delta = b^2 - 4ac$

  $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-96) = 16 + 384 = 400$
- $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

  $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{400}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-4 \pm 20}{2} = -2 \pm 10$

  Assim, $x_1 = -12$ e $x_2 = 8$.

Portanto, existem dois valores possíveis para x. Substituindo cada valor na primeira equação pode-se determinar o valor de y.

- Para $x_1 = -12$, tem-se:

$$x_1 \cdot y_1 = 24$$
$$(-12)y_1 = 24$$
$$y_1 = \frac{24}{-12}$$
$$y_1 = -2$$

- Para $x_2 = 8$, tem-se:

$$x_2 \cdot y_2 = 24$$
$$8y_2 = 24$$
$$y_2 = \frac{24}{8}$$
$$y_2 = 3$$

Logo, os pares ordenados $(-12, -2)$ e $(8, 3)$ são soluções do sistema.

Como $x > 0$ e $y > 0$, apenas o par $(8, 3)$ é solução para a situação proposta. Assim, cada refrigerante sem desconto custa R\$ 3,00.

Pelo valor de R\$ 3,00 por garrafa, Júnior comprou 8 garrafas $(24 : 3 = 8)$ de refrigerante.

17. Sendo x e y os dois números reais citados, tem-se:

- $x + y = \dfrac{7}{3}$
- $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{2}$ (condição de existência: $x \neq 0$ e $y \neq 0$)

Assim, tem-se um sistema de equações e pode-se determinar o valor de x e de y.

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Da primeira equação, tem-se:

$$x + y = \frac{7}{3}$$
$$y = \frac{7}{3} - x$$
$$y = \frac{7 - 3x}{3}$$

Substituindo essa relação na segunda equação, obtém-se:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{7-3x}{3}}=\frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{7-3x}=\frac{7}{2}$$

$$\frac{7-3x+3x}{x\cdot(7-3x)}=\frac{7}{2}$$

$$\frac{7}{7x-3x^2}=\frac{7}{2}$$

$$3x^2-7x+2=0$$

Resolvendo essa equação tem-se:

- $a=3$; $b=-7$; $c=2$
- $\Delta=b^2-4ac$

  $\Delta=(-7)^2-4\cdot3\cdot2=49-24=25$
- $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{25}}{2\cdot3}=\frac{7\pm5}{6}$

  Portanto:

$$x_1=\frac{7+5}{6}=\frac{12}{6}=2$$

$$x_2=\frac{7-5}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Logo, existem dois valores possíveis para x. Substituindo cada valor na primeira equação determina-se o valor de y.

- Para $x_1=2$, tem-se:

$$y_1=\frac{7-3x}{3}=\frac{7-3\cdot2}{3}=\frac{7-6}{3}=\frac{1}{3}$$

- Para $x_2=\frac{1}{3}$, tem-se:

$$y_2=\frac{7-3x}{3}=\frac{7-3\cdot\frac{1}{3}}{3}=\frac{7-1}{3}=$$

$$=\frac{6}{3}=2$$

Os pares ordenados $\left(2,\frac{1}{3}\right)$ e $\left(\frac{1}{3},2\right)$ são soluções do sistema. Portanto, 2 e $\frac{1}{3}$ são os números reais citados.

18. Considerando x a idade de um irmão e y a idade do outro, tem-se:

$$\begin{cases}x+y=12\\x\cdot y=35\end{cases}$$

Da primeira equação, tem-se:

$$x+y=12$$

$$x=12-y$$

Substituindo essa relação na segunda equação, encontra-se:

$$(12-y)y=35$$

$$12y-y^2-35=0$$

$$y^2-12y+35=0$$

Então, $a=1$; $b=-12$ e $c=35$.

Sejam S a soma e P o produto das raízes da equação, então:

$$S=y_1+y_2=\frac{-b}{a}=\frac{-(-12)}{1}=12$$

$$P=y_1\cdot y_2=\frac{c}{a}=\frac{35}{1}=35$$

Logo, $y_1=7$ e $y_2=5$.

Como $x=12-y$, tem-se:

- para $y_1=7$:

$$x_1=12-7=5$$

- para $y_2=5$:

$$y_2=12-5=7$$

Portanto, os irmãos têm 5 anos e 7 anos.

19. Sendo x o maior número e y o menor, tem-se:

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=2\\x^2-5y=21\end{cases}$$

Da primeira equação, tem-se:

$$\frac{x}{y}=2$$

$$x=2y$$

Substituindo essa relação na segunda equação, encontra-se:

$$x^2-5y=21$$

$$(2y)^2-5y-21=0$$

$$4y^2-5y-21=0$$

Então, $a=4$; $b=-5$ e $c=-21$.

Daí:

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=(-5)^2-4\cdot\ 4\cdot(-21)=25+336=361$$

Logo:

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm9}{2\cdot4}=\frac{5\pm19}{8}$$

Portanto:

$$y_1=\frac{5+19}{8}=\frac{24}{8}=3$$

$$y_2=\frac{5-19}{8}=\frac{-14}{8}=-\frac{7}{4}$$

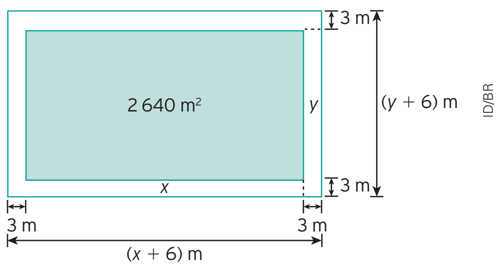
Como os números devem ser inteiros e positivos, então $y_2=-\frac{7}{4}$ não convém.

Portanto, considerando $y_1=3$, tem-se:

$$x_1=2y=2\cdot3=6$$

Logo, os números procurados são 3 e 6.

20.



Observando a figura, tem-se:

$$\begin{cases}x\cdot y=2\,640\\(x+6)(y+6)=3\,300\end{cases}$$

Da primeira equação, vem:

$$x\cdot y=2\,640$$

$$x=\frac{2\,640}{y}$$

Substituindo essa relação na segunda equação, tem-se:

$$\left(\frac{2\,640}{y} + 6\right)(y + 6) = 3\,300$$

$$2\,640 + \frac{15\,840}{y} + 6y + 36 = 3\,300$$

$$2\,640y + 15\,840 + 6y^2 + 36y - 3\,300y = 0$$

$$6y^2 - 624y + 15\,840 = 0$$

$$y^2 - 104y + 2\,640 = 0$$

Então, $a = 1$; $b = -104$ e $c = 2\,640$.

Daí:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-104)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2\,640 = 10\,816 - 10\,560 = 256$$

Portanto:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-104) \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 1}$$

Logo:

$$y_1 = \frac{104 + 16}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

$$y_2 = \frac{104 - 16}{2} = \frac{88}{2} = 44$$

Como $x = \frac{2\,640}{y}$, tem-se:

- para $y_1 = 60$:

$$x_1 = \frac{2\,640}{60} = 44$$

- para $y_2 = 44$:

$$x_2 = \frac{2\,640}{44} = 60$$

Portanto, como $x > y$, tem-se:

$$x + 6 = 60 + 6 = 66$$

$$y + 6 = 44 + 6 = 50$$

Logo, as dimensões da praça são 50 m por 66 m.

21. Alternativa **c**.

A receita obtida pela agência de viagem é igual ao produto do número de estudantes que compraram o pacote pelo valor individual. Assim:

$$R(x) = x \cdot (360 - 0{,}9x) = 360x - 0{,}9x^2$$

22. Sendo x o número de macacos, tem-se:

$$x = \left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12$$

$$x = \frac{x^2}{64} + 12$$

$$64x = x^2 + 768$$

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

Então, $a = 1$; $b = -64$ e $c = 768$.

Daí:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-64)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 768 = 4\,096 - 3\,072 = 1\,024$$

Assim:

$$x = \frac{-(-64) \pm \sqrt{1\,024}}{2 \cdot 1} = \frac{64 \pm 32}{2} = 32 \pm 16$$

Logo:

$$x_1 = 32 + 16 = 48$$

$$x_2 = 32 - 16 = 16$$

Portanto, na macacada há 16 ou 48 macacos.

23. Resposta pessoal.

UNIDADE 5 – GEOMETRIA

CAPÍTULO 1 – DISTÂNCIAS

PÁGINA 191 – ATIVIDADES

1. **a)** $A(-2, -2)$; $B(3, 1)$; $C(-2, 3)$; $D(6, 1)$; $E(4, 4)$; $F(4, 0)$; $G(6, -2)$

b)
- Medida da distância entre A e C

  Como o segmento $\overline{AC}$ é paralelo ao eixo y, então as abscissas desses pontos são iguais. Portanto, para calcular a medida da distância entre esses pontos, basta contar quantos lados de quadradinho (u.c.) existem entre eles. Nesse caso:

  $$d(A, C) = 5 \text{ u.c.}$$

- Medida da distância entre B e D

  Como o segmento $\overline{BD}$ é paralelo ao eixo x, então as ordenadas desses pontos são iguais. Portanto, para calcular a medida da distância entre esses pontos, basta contar quantos lados de quadradinho (u.c.) existem entre eles. Nesse caso:

  $$d(B, D) = 3 \text{ u.c.}$$

- Medida da distância entre E e F

  Como o segmento $\overline{EF}$ é paralelo ao eixo y, então as abscissas desses pontos são iguais. Portanto, para calcular a medida da distância entre esses pontos, basta contar quantos lados de quadradinho (u.c.) existem entre eles. Nesse caso:

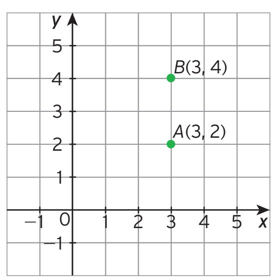
  $$d(E, F) = 4 \text{ u.c.}$$

- Medida da distância entre A e G

  Como o segmento $\overline{AG}$ é paralelo ao eixo x, as ordenadas desses pontos são iguais. Portanto, para calcular a medida da distância entre esses pontos, basta contar quantos lados de quadradinho (u.c.) existem entre eles. Nesse caso:

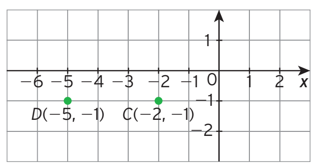
  $$d(A, G) = 8 \text{ u.c.}$$

2. **a)** Resposta possível:

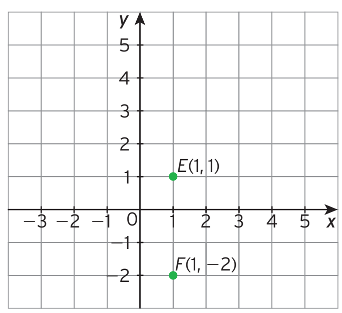


Ilustrações: ID/BR

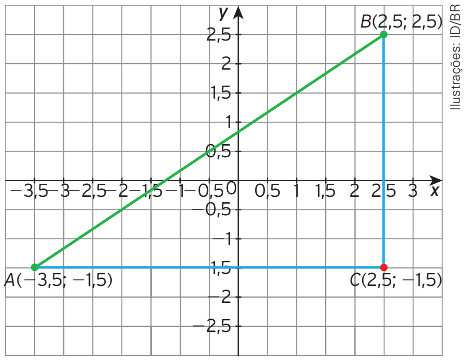
b) Resposta possível:



c) Resposta possível:



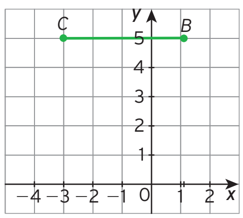
3. Os pontos A e B estão localizados no plano a seguir. Para calcular a distância entre eles, obtém-se o ponto C, conforme imagem.



Assim, para calcular a distância, aplica-se o teorema de Pitágoras:

$$(d(A, B))^2 = (d(A, C))^2 + (d(B, C))^2$$
$$(d(A, B))^2 = (|2{,}5 - (-3{,}5)|)^2 + (|-1{,}5 - 2{,}5|)^2$$
$$(d(A, B))^2 = (|+6|)^2 + (|-4|)^2$$
$$(d(A, B))^2 = (6)^2 + (4)^2$$
$$(d(A, B))^2 = 36 + 16$$
$$(d(A, B))^2 = 52$$
$$d(A, B) = \sqrt{52}$$
$$d(A, B) = 2\sqrt{13} \text{ u.c.}$$

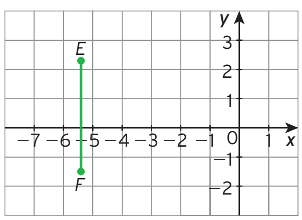
4. **a)** $B(1{,}2;\ 5)$ e $C(-3{,}1;\ 5)$



Como B e C têm a mesma ordenada, a distância entre eles é dada pelo módulo da diferença entre suas abscissas.

$$d(B, C) = |1{,}2 - (-3{,}1)| = |1{,}2 + 3{,}1| = 4{,}3$$

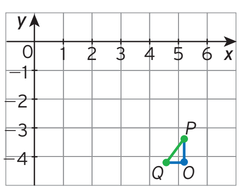
b) $E(-5{,}4;\ 2{,}3)$ e $F(-5{,}4;\ -1{,}5)$



Como E e F têm a mesma abscissa, a distância entre eles é dada pelo módulo da diferença entre suas ordenadas.

$$d(E, F) = |-1{,}5 - 2{,}3| = |-3{,}8| = 3{,}8$$

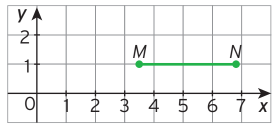
c) $P(5{,}2;\ -3{,}4)$ e $Q(4{,}6;\ -4{,}2)$



Como P e Q têm abscissas e ordenadas distintas, aplica-se o teorema de Pitágoras.

$$d(P, Q)^2 = (|5{,}2 - 4{,}6|)^2 + (|-3{,}4 - (-4{,}2)|)^2$$
$$d(P, Q)^2 = (0{,}6)^2 + (0{,}8)^2$$
$$d(P, Q)^2 = 0{,}36 + 0{,}64$$
$$d(P, Q)^2 = 1$$
$$d(P, Q) = \sqrt{1}$$
$$d(P, Q) = 1$$

d) $M(2\sqrt{3},\ 1)$ e $N(4\sqrt{3},\ 1)$



Como M e N têm a mesma ordenada, a distância entre eles é dada pelo módulo da diferença entre suas abscissas.

$$d(M, N) = |4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}| = |2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

PÁGINA 194 – ATIVIDADES

5. **a)** $A(3,\ 1)$ e $B(8,\ 4)$

Para obter a abscissa do ponto M, calcula-se a média aritmética das abscissas dos pontos A e B:

$$\frac{3 + 8}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

Para obter a ordenada do ponto M, calcula-se a média aritmética das ordenadas dos pontos A e B:

$$\frac{1 + 4}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Portanto, $M(5{,}5;\ 2{,}5)$ é o ponto médio de $\overline{AB}$.

b) $P(-2,\ 2)$ e $Q(4,\ 2)$

Para obter a abscissa do ponto M, calcula-se a média aritmética das abscissas dos pontos P e Q:

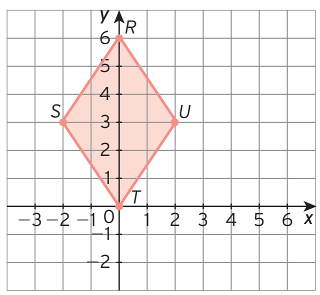
$$\frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Para obter a ordenada do ponto M, calcula-se a média aritmética das ordenadas dos pontos P e Q:

$$\frac{2 + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, $M(1,\ 2)$ é o ponto médio de $\overline{PQ}$.

6.



a) O quadrilátero formado é o losango.

b) Para calcular a medida da área do losango, deve-se determinar:

- a medida da diagonal menor:

$$SU = d(S, U) = |2 - (-2)| = |2 + 2| = 4$$

- a medida da diagonal maior:

$$RT = d(R, T) = |0 - 6| = |-6| = 6$$

Sendo A a medida da área, $d = SU$ a medida da diagonal menor e $D = RT$ a medida da diagonal maior do losango, tem-se:

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Logo, a medida da área do losango $RSTU$ é 12 u.a.

c) Para calcular a medida do perímetro do losango, é necessário determinar a medida de um de seus lados, pois os quatro lados do losango são congruentes, ou seja, $RS = ST = TU = UR$.

$$TU = d(T, U) = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Portanto, a medida do perímetro P é dada por:

$$P = RS + ST + TU + UR = \sqrt{13} + \sqrt{13} + \sqrt{13} + \sqrt{13} = 4\sqrt{13}$$

Logo, a medida do perímetro do losango $RSTU$ é $4\sqrt{13}$ u.c.

7. **a)** $A(-3, 1)$, $B(2, 1)$ e $C(2, -3)$

- $AB = d(A, B) = |2 - (-3)| = |2 + 3| = |5| = 5$
- $BC = d(B, C) = |-3 - 1| = |-4| = 4$
- $AC = d(A, C) = \sqrt{(2-(-3))^2 + (-3-1)^2} =$

$$= \sqrt{(2+3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

Logo, as medidas dos lados do triângulo ABC são $AB = 5$ u.c., $BC = 4$ u.c. e $AC = \sqrt{41}$ u.c.

b) Tem-se:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$\left(\sqrt{41}\right)^2 = (5)^2 + (4)^2$$
$$41 = 25 + 16$$

Logo, pelo recíproco do teorema de Pitágoras, ABC é um triângulo retângulo.

c) Como o triângulo ABC é um triângulo retângulo, a medida da sua área A equivale à metade do produto das medidas de seus catetos.

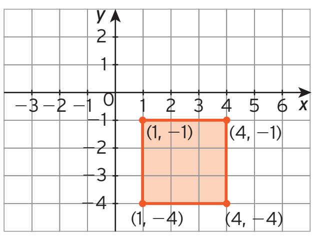
$$A = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Calculando a medida do perímetro P do triângulo ABC, tem-se:

$$P = 5 + 4 + \sqrt{41} = 9 + \sqrt{41}$$

Logo, a área do triângulo ABC mede 10 u.a. e seu perímetro mede $\left(9 + \sqrt{41}\right)$ u.c.

8. Localizando o vértice $(1, -1)$ do quadrado no plano cartesiano e sabendo que o quadrado, cujos lados são paralelos aos eixos e medem 3 u.c., está inteiramente no quarto quadrante, é possível localizar os outros três vértices.



Supondo $A(1, -1)$, tem-se:

$$B(1 + 3, -1) = B(4, -1)$$
$$C(4, -1 - 3) = C(4, -4)$$
$$D(4 - 3, -4) = D(1, -4)$$

Portanto, os outros vértices do quadrado são $(4, -1)$, $(4, -4)$ e $(1, -4)$.

9. As coordenadas dos vértices do trapézio são $A(-3, 2)$, $B(-1, 2)$, $C(2, -1)$ e $D(-3, -1)$.

Como a medida da área do trapézio é dada por $A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$ e sendo:

- $B = CD = d(C, D) = |2 - (-3)| = 5$
- $b = AB = d(A, B) = |-1 - (-3)| = |-1 + 3| = |2| = 2$
- $h = AD = d(A, D) = |-1 - 2| = |-3| = 3$

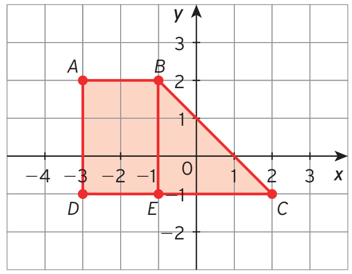
tem-se:

$$A = \frac{(5 + 2) \cdot 3}{2} = \frac{7 \cdot 3}{2} = 10{,}5$$

A medida do perímetro P do trapézio $ABCD$ é dada por:

$$AB + BC + CD + AD$$

Tomando $E(-1, -1)$, obtém-se o triângulo BCE retângulo em E.



Ilustrações: ID/BR

Então:

$$(BC)^2 = (BE)^2 + (EC)^2$$
$$(BC)^2 = 3^2 + 3^2$$
$$(BC)^2 = 2 \cdot 3^2$$
$$BC = \sqrt{2 \cdot 3^2}$$
$$BC = 3\sqrt{2}$$

Portanto:

$$P = AB + BC + CD + AD = 2 + 3\sqrt{2} + 5 + 3 = 10 + 3\sqrt{2}$$

Logo, a medida da área do trapézio $ABCD$ é 10,5 u.a. e o perímetro mede $\left(10 + 3\sqrt{2}\right)$ u.c.

PÁGINA 195 – DIVERSIFICANDO

1. **a)** $d(A, B) = |-2 - 3| = |-5| = 5$

Logo, a medida da distância entre os pontos A e B é 5 u.c.

b) $d(A, B) = |3 - (-2)| = |3 + 2| = |5| = 5$

Logo, a medida da distância entre os pontos A e B é 5 u.c.

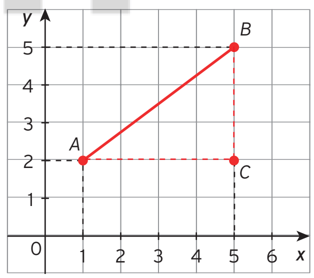
c) $d(A, B) = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{3^2 + (1+2)^2} =$

$$= \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$$

Logo, a medida da distância entre os pontos A e B é $3\sqrt{2}$ u.c.

2. **a)**
- A abscissa do ponto A é 1 e a ordenada é 2, portanto, $A(1, 2)$.
- A abscissa do ponto B é 5 e a ordenada é 5, portanto, $B(5, 5)$.

b)



Inicialmente determina-se o ponto $C(5, 1)$. Os catetos são $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Como os pontos A e C têm a mesma ordenada e os pontos B e C têm a mesma abscissa, então:

- $AC = |5 - 1| = |4| = 4$
- $BC = |2 - 5| = |-3| = 3$

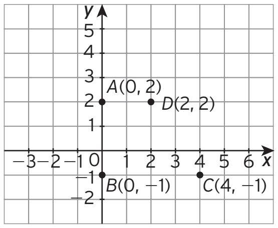
Portanto, as medidas dos catetos são 4 u.c. e 3 u.c.

c) Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

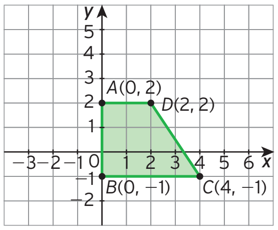
$$(AB)^2 = 3^2 + 4^2$$
$$(AB)^2 = 9 + 16$$
$$(AB)^2 = 25$$
$$AB = 5$$

Portanto, a medida do segmento $\overline{AB}$ é 5 u.c.

3. a)



b)



O polígono formado é um trapézio retângulo.

c) Inicialmente é necessário calcular as medidas dos lados do trapézio.

- $AB = |-1 - 2| = |-3| = 3$
- $BC = |4 - 0| = |4| = 4$
- $AD = |2 - 0| = |2| = 2$
- $DC = \sqrt{(4-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Então, calcula-se as medidas do perímetro P e da área A do trapézio.

- $P = AD + DC + BC + AB = 2 + \sqrt{13} + 4 + 3 = 9 + \sqrt{13}$
- $A = \dfrac{(BC + AD) \cdot AB}{2} = \dfrac{(4+2) \cdot 3}{2} = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$

Logo, a medida do perímetro desse trapézio é $(9 + \sqrt{13})$ u.c. e a medida da área é 9 u.a.

4. a) Para obter a abscissa do ponto M, calcula-se a média aritmética das abscissas dos pontos A e B.

$$x_M = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Para obter a ordenada do ponto M, encontra-se a média aritmética das ordenadas dos pontos A e B.

$$y_M = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto, $M(2, 1)$ é o ponto médio de $\overline{AB}$.

b) Para obter a abscissa do ponto M, encontra-se a média aritmética das abscissas dos pontos A e B.

$$x_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Para obter a ordenada do ponto M, encontra-se a média aritmética das ordenadas dos pontos A e B.

$$y_M = \frac{-7-6}{2} = \frac{-13}{2} = -6{,}5$$

Portanto, $M(2{,}5; -6{,}5)$ é o ponto médio de $\overline{AB}$.

5. Como a abscissa do ponto M é a média aritmética das abscissas dos pontos A e B, tem-se:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$
$$-1 = \frac{3 + x_B}{2}$$
$$-2 = 3 + x_B$$
$$x_B = -2 - 3$$
$$x_B = -5$$

Como a ordenada do ponto M é a média aritmética das ordenadas dos pontos A e B, tem-se:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$
$$3 = \frac{2 + y_B}{2}$$
$$6 = 2 + y_B$$
$$y_B = 6 - 2$$
$$y_B = 4$$

Portanto, $B(-5, 4)$ é o outro extremo do segmento $\overline{AB}$.

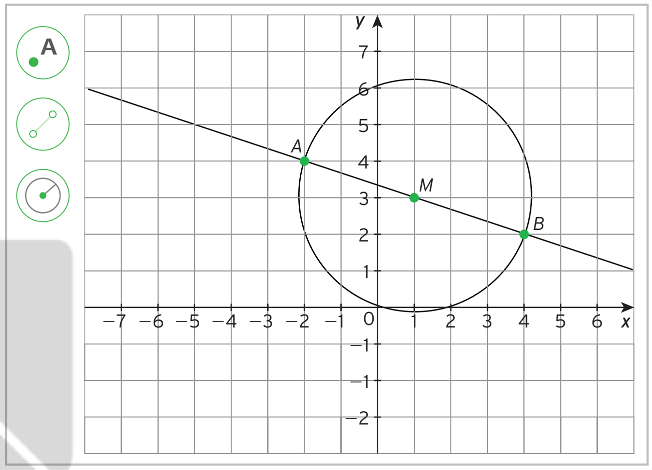
6. a) Resolução possível:

Com a ferramenta A, marque os pontos $A(-2, 4)$ e $M(1, 3)$.

Com a ferramenta, trace $\overleftrightarrow{AM}$.

Com a ferramenta, trace uma circunferência de centro M, passando por A.

Com a ferramenta A, marque o ponto de intersecção de $\overleftrightarrow{AM}$ com a circunferência.



Ilustrações: ID/BR

Portanto, (4, 2) é a extremidade B do segmento $\overline{AB}$.

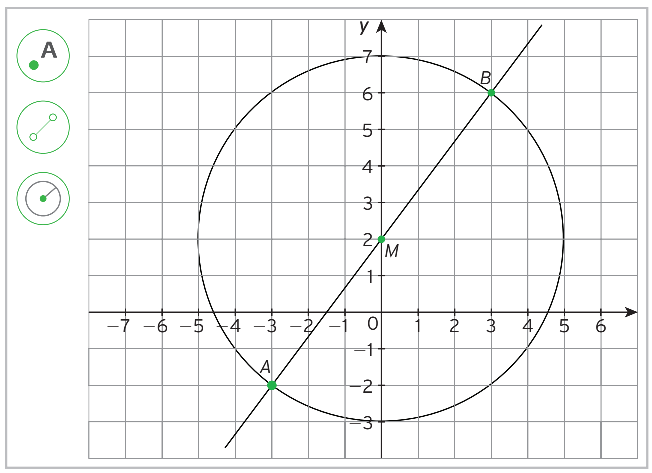
b) Resolução possível:

Com a ferramenta A, marque os pontos $A(-3, -2)$ e $M(0, 2)$.

Com a ferramenta, trace $\overleftrightarrow{AM}$.

Com a ferramenta, trace uma circunferência de centro M, passando por A.

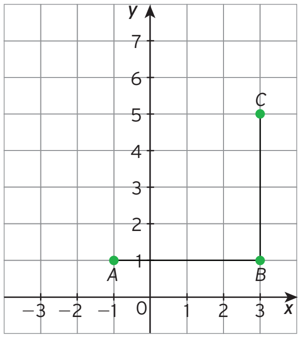
Com a ferramenta A, marque o ponto de intersecção de $\overleftrightarrow{AM}$ com a circunferência.



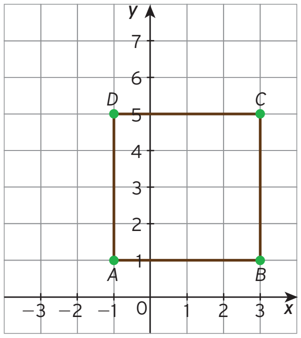
Portanto, (3, 6) é a extremidade B do segmento $\overline{AB}$.

7. **a)** Para determinar o vértice D do quadrado, representam-se os outros vértices no plano cartesiano:

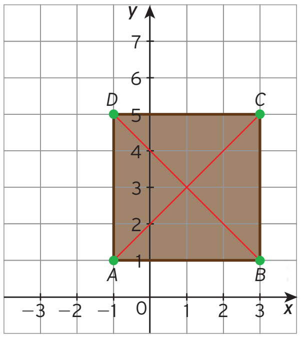
Ilustrações: ID/BR



Para que $ABCD$ seja um quadrado, deve-se ter $D(-1, 5)$.



b) Representando o quadrado e suas diagonais no plano cartesiano, tem-se:



Então:

- $AC = d(A, C) = \sqrt{(3-(-1))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{(3+1)^2 + 4^2} =$
  $= \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{2 \cdot 4^2} = 4\sqrt{2}$

- $BD = d(B, D) = \sqrt{(-1-3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} =$
  $= \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{2 \cdot 4^2} = 4\sqrt{2}$

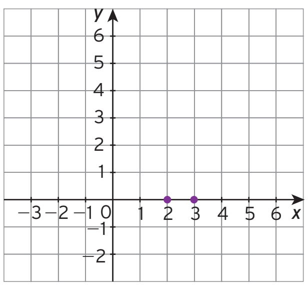
Logo, as duas diagonais do quadrado medem $4\sqrt{2}$u.c.

c) Calculando a média aritmética das coordenadas de A e C, obtém-se as coordenadas do ponto M, que é o ponto médio da diagonal $\overline{AC}$:

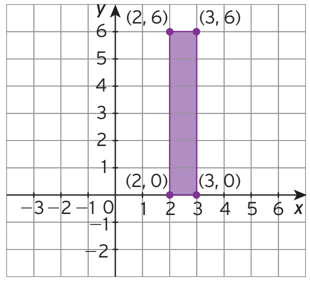
$$(x_M, y_M) = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{6}{2}\right) = (1, 3)$$

Portanto, $M(1, 3)$.

8. **a)** No plano cartesiano, localizamos os dois vértices: (2, 0) e (3, 0).



Como o retângulo tem 6 unidades de medida de área, ele é formado por 6 quadradinhos. Além disso, os vértices do retângulo são os pontos de coordenadas (2, 0), (3, 0) e dois outros pontos do primeiro quadrante. Então, ele pertence ao primeiro quadrante. Assim, tem-se:



Logo, as coordenadas dos vértices desse retângulo são (2, 0), (3, 0), (2, 6) e (3, 6).

b) Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2 – CIRCUNFERÊNCIAS E POLÍGONOS REGULARES

PÁGINA 197 – ATIVIDADES

1. **a)** Como a medida angular de um arco é igual à medida do ângulo central associado a ele, então $\text{med}(\widehat{AB}) = 93°$.

b) Como a medida angular de um arco é igual à medida do ângulo central associado a ele, então:

$$2x + 30° = 5x - 90°$$

$$3x = 120°$$

$$x = 40°$$

Assim, substituindo o valor de x em $2x + 30°$, tem-se:

$$2 \cdot 40° + 30° = 80° + 30° = 110°$$

Portanto, $\text{med}(\widehat{AB}) = 110°$.

2. A medida angular de uma circunferência equivale a 360°. Assim, a medida de uma semicircunferência equivale à metade da medida de uma circunferência, ou seja:

$$360 : 2 = 180$$

Logo, a medida de cada um desses arcos é 180°.

3. Como a medida angular do arco $\widehat{AD}$ é igual à medida do ângulo central associado a ele, e esse ângulo é suplementar do ângulo central associado ao arco $\widehat{AB}$, então:

$$\text{med}(\widehat{AD}) = 180° - 70° = 110°$$

A medida angular do arco $\widehat{DC}$ é igual à medida do ângulo central associado a ele, e esse ângulo é oposto pelo vértice do ângulo central associado ao arco $\widehat{AB}$, então:

$$\text{med}(\widehat{DC}) = \text{med}(\widehat{AB}) = 70°$$

A medida angular do arco $\widehat{CB}$ é igual à medida do ângulo central associado a ele, e esse ângulo é oposto pelo vértice do ângulo central associado ao arco $\widehat{AD}$, então:

$$\text{med}(\widehat{CB}) = \text{med}(\widehat{AD}) = 110°$$

PÁGINA 201 – ATIVIDADES

4. a) Como a medida do ângulo central é igual à medida angular do arco que esse ângulo determina na circunferência, e a medida do ângulo inscrito é igual à metade dessa medida, tem-se:

$$x = \frac{110°}{2} = 55°$$

b) Como a medida do ângulo central é igual à medida angular do arco que esse ângulo determina na circunferência, e a medida do ângulo inscrito é igual à metade dessa medida, tem-se:

$$\frac{x}{2} = 36°$$
$$x = 72°$$

5. Como a medida do ângulo central é igual à medida angular do arco que esse ângulo determina na circunferência, e a medida do ângulo inscrito é igual à metade dessa medida, tem-se:

$$x = 126°$$
$$y = \frac{x}{2} = \frac{126°}{2} = 63°$$

6. Como os ângulos de medida y e 35° estão associados ao mesmo arco, sendo o primeiro um ângulo central e o segundo um ângulo inscrito, tem-se:

$$y = 2 \cdot 35° = 70°$$

Os ângulos inscritos de medida x e z também estão associados a esse arco. Logo:

$$x = 35°$$
$$z = 35°$$

7. a) Como a medida do ângulo central é igual à medida angular do arco que esse ângulo determina na circunferência, e a medida do ângulo inscrito é igual à metade dessa medida, tem-se:

$$12x + 30° = 2 \cdot 75°$$
$$12x + 30° = 150°$$
$$12x = 120°$$
$$x = 10°$$

Logo, $x = 10°$ e o ângulo central mede o dobro de 75°, ou seja, 150°.

b) Como a medida do ângulo central é igual à medida angular do arco que esse ângulo determina na circunferência, e a medida do ângulo inscrito é igual à metade dessa medida, tem-se:

$$2 \cdot (2x + 6°) = 5x - 8°$$
$$4x + 12° = 5x - 8°$$
$$x = 20°$$

Substituindo $x = 20°$ na expressão que representa a medida do ângulo central, determina-se sua medida.

$$5x - 8° = 5 \cdot 20° - 8° = 100° - 8° = 92°$$

A medida do ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central, ou seja:

$$\frac{92°}{2} = 46°$$

Logo, $x = 20°$, o ângulo central mede 92° e o ângulo inscrito mede 46°.

8. Como a medida do ângulo central é igual à medida angular do arco que esse ângulo determina na circunferência, e a medida do ângulo inscrito é igual à metade dessa medida, tem-se:

$$4x + 10° = 2 \cdot (3x - 10°)$$
$$4x + 10° = 6x - 20°$$
$$2x = 30°$$
$$x = 15°$$

Logo:

$$\text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right) = 4x + 10° = 4 \cdot 15° + 10° = 60° + 10° = 70°$$

9. Como os ângulos inscritos $Q\hat{P}R$ e $Q\hat{S}R$ estão associados ao mesmo arco, eles são congruentes. Então:

$$\text{med}(Q\hat{P}R) = \text{med}(Q\hat{S}R)$$
$$3x + 2° = 110° - 6x$$
$$9x = 108°$$
$$x = 12°$$

10. Alternativa **b**.

O ângulo inscrito associado ao arco correspondente à semicircunferência mede 90°. Portanto, o triângulo é retângulo e seus ângulos medem 62°, 90° e x.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se:

$$90° + 62° + x = 180°$$
$$152° + x = 180°$$
$$x = 28°$$

11. Em ambos os itens, $\overset{\frown}{ACB}$ é um arco associado a uma semicircunferência, pois $A\hat{C}B$ mede 90°. Então, $\overline{AB}$ é diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

Sendo r a medida do raio da circunferência, tem-se:

$$r = MA = MB = MC$$

a) O triângulo ACM é isósceles, portanto:

$$\text{med}\left(C\hat{A}M\right) = \text{med}\left(M\hat{C}A\right) = 32°$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então:

$$\text{med}\left(A\hat{M}C\right) = 180° - 32° - 32° = 116°$$

Como $A\hat{M}C$ e $A\hat{B}C$ são, respectivamente, o ângulo central e o ângulo inscrito associados ao arco $\overset{\frown}{AC}$ e como a medida do ângulo central é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito quando associados ao mesmo arco, $\text{med}\left(A\hat{B}C\right) = 58°$.

Logo, a medida do ângulo $A\hat{B}C$ é 58°.

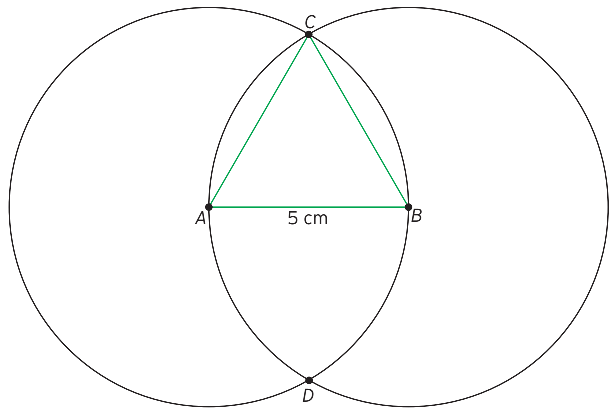
b) Como $A\hat{M}C$ e $A\hat{B}C$ são, respectivamente, o ângulo central e o ângulo inscrito associados ao arco $\overset{\frown}{AC}$ e como a medida do ângulo central é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito quando associados ao mesmo arco, $\text{med}\left(A\hat{B}C\right) = 23°$.

Logo, a medida do ângulo $A\hat{B}C$ é 23°.

PÁGINA 205 – ATIVIDADES

12. a) Construção possível:

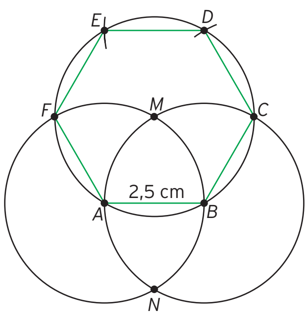
Traça-se um segmento $\overline{AB}$ de 5 cm. Com a ponta-seca do compasso em A e abertura entre a ponta-seca e a grafite medindo 5 cm, traça-se uma circunferência. Mantendo a abertura do compasso e com a ponta-seca em B, traça-se uma segunda circunferência que, ao cruzar a primeira, define os pontos C e D. Escolhe-se um desses pontos, por exemplo, o ponto C. Em seguida, traçam-se os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ para obter o triângulo equilátero ABC.



ID/BR

b) Construção possível:

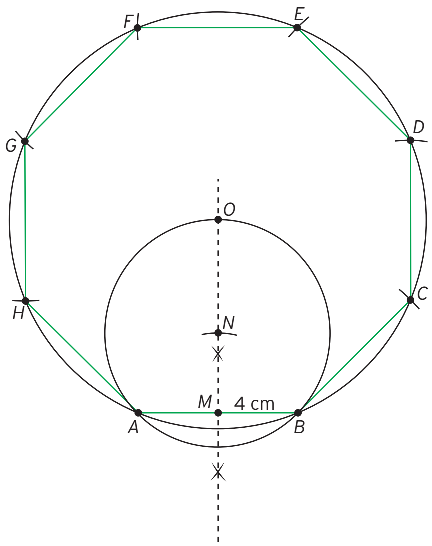
Traça-se um segmento $\overline{AB}$ de 2,5 cm. Com a ponta-seca do compasso em A e abertura entre a ponta-seca e a grafite medindo 2,5 cm, traça-se uma circunferência. Mantendo a abertura do compasso e com a ponta-seca em B, traça-se uma segunda circunferência que, ao cruzar a primeira, define outros dois pontos, por exemplo, os pontos M e N. Escolhe-se um desses pontos, por exemplo, o ponto M. Em seguida, mantendo a abertura do compasso e com a ponta-seca em M, traça-se outra circunferência, que, ao cruzar as outras duas, define os pontos C e F. A partir de um desses pontos, por exemplo, o ponto C, aplica-se sucessivas vezes a medida do lado $\overline{AB}$ na circunferência de centro M, determinando os pontos D e E. Ligam-se os pontos consecutivos que pertencem à circunferência de centro M, obtendo-se o hexágono regular $ABCDEF$.



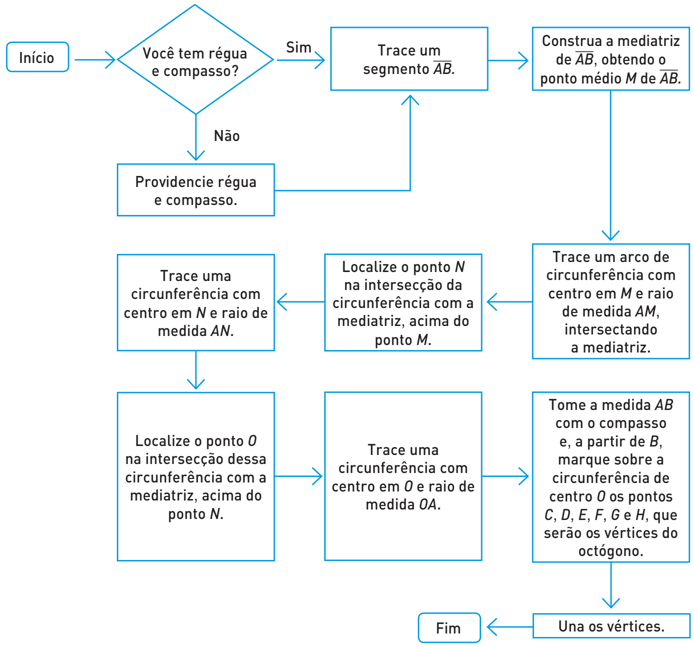
Ilustrações: ID/BR

c) Construção possível:

Traça-se um segmento $\overline{AB}$ de 4 cm. Em seguida, traça-se a mediatriz desse segmento, obtendo-se o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$. Com a ponta-seca do compasso em M e abertura AM, traça-se o arco que intersecta a mediatriz em N. Com a ponta-seca do compasso em N e abertura entre a ponta-seca e a grafite de medida AN, traça-se uma circunferência que intersecta a mediatriz em O. Esse ponto é o centro da circunferência que circunscreve o octógono. Agora, traça-se a circunferência de raio de medida OA. A partir de um dos extremos do segmento $\overline{AB}$, aplica-se sucessivas vezes a medida do lado $\overline{AB}$ na circunferência de centro O, dividindo-a em oito partes congruentes e determinando os pontos C, D, E, F, G e H. Ligam-se os pontos consecutivos que pertencem à circunferência de centro O, obtendo-se o octógono regular $ABCDEFGH$.

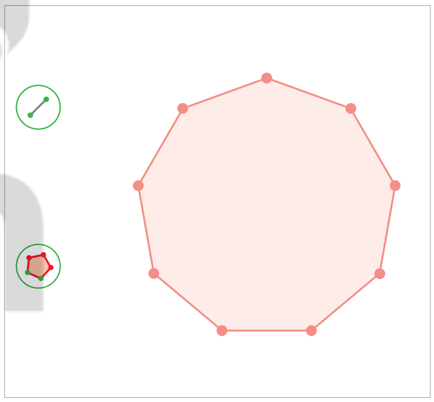


13. Descrição possível:



14. Construção possível:

Com a ferramenta “segmento com comprimento fixo”, desenha-se um segmento de comprimento medindo 2 u.c. Em seguida, clica-se na ferramenta “polígono regular” e selecionam-se os extremos do segmento construído. Depois, digita-se a quantidade de lados (nesse caso, 9), clica-se em OK e o eneágono será construído.



15. Descrição possível:

1º passo: Seleciona-se a ferramenta “segmento com comprimento fixo”.

2º passo: Clica-se na área de trabalho do *software*, digita-se a medida desejada e clica-se em OK.

3º passo: Seleciona-se a ferramenta “polígono regular”, clica-se em cada um dos extremos do segmento construído e digita-se a quantidade de lados desejada. Clica-se em OK.

PÁGINA 206 – DIVERSIFICANDO

1. A soma da medida dos três arcos resulta em 360°.

$$\text{med}(\overset{\frown}{BA}) + \text{med}(\overset{\frown}{AC}) + \text{med}(\overset{\frown}{CB}) = 360°$$

$$(5x + 20°) + (160° - x) + (10x + 40°) = 360°$$

$$220° + 14x = 360°$$

$$14x = 360° - 220°$$

$$14x = 140°$$

$$x = \frac{140°}{14}$$

$$x = 10°$$

Portanto:

$$m(\widehat{ABC}) = (5x + 20°) + (10x + 40°) = 15x + 60°$$

Substituindo $x = 10°$ em $m(\widehat{ABC}) = 15x + 60°$, tem-se:

$$m(\widehat{ABC}) = 15 \cdot 10° + 60° = 150° + 60° = 210°$$

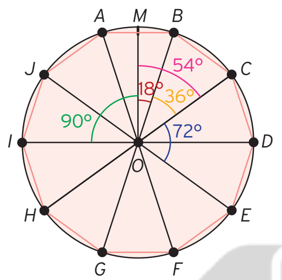
Logo, o arco $\widehat{ABC}$ mede 210°.

2. Resposta possível:

Traçam-se os dez ângulos centrais, cujos vértices são o centro da circunferência e cujos lados contêm os vértices do decágono. Eles serão congruentes e terão medida igual a 36° (360 : 10 = 36) cada um. Traçando a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, determina-se o ponto M e obtêm-se dois ângulos centrais medindo 18° cada um.

Sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$, tem-se:

- $B\hat{O}M = 18°$
- $C\hat{O}B = 36°$
- $C\hat{O}M = 18° + 36° = 54°$
- $E\hat{O}C = 36° + 36° = 72°$
- $M\hat{O}I = 18° + 36° + 36° = 90°$



Ilustrações: ID/BR

3. Tem-se que $med(\widehat{AB}) = 68°$, então:

$$x = \frac{med(\widehat{AB})}{2} = \frac{68°}{2} = 34°$$

Logo, a medida do ângulo indicado é 34°.

4. Como a medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco que esse ângulo determina na circunferência, então a medida do arco da circunferência é 87° (2 · 43,5 = 87).

5. O ângulo z é inscrito em uma semicircunferência. Assim, $z = 90°$.

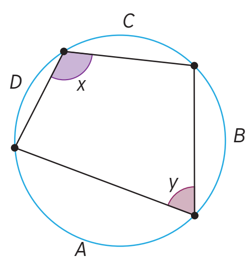
Como os seis arcos são congruentes, a circunferência foi dividida em seis partes iguais e cada arco formado está associado a um ângulo central de medida 60° (360 : 6 = 60).

Tem-se que x é ângulo inscrito e está associado a um arco, que, por sua vez, está associado a um ângulo central de 60°. Portanto, $x = 30°$ (60 : 2 = 30).

Tem-se que y é ângulo inscrito e está associado a dois desses arcos, que, então, têm medida 120° (2 · 60 = 120). Portanto, $y = 60°$ (120 : 2 = 60).

Tanto t como w são ângulos inscritos associados a um arco, que, por sua vez, está associado a um ângulo central de 60°. Portanto, eles medem 30° (60 : 2 = 30) cada.

6. Sejam A, B, C e D as medidas dos arcos.



Tem-se que:

- x é a medida de um ângulo inscrito e está associado a um arco de medida $(A + B)$, ou seja, $x = \frac{A + B}{2}$;
- y é a medida de um ângulo inscrito e está associado a um arco de medida $(C + D)$, ou seja, $y = \frac{C + D}{2}$.

Assim:

$$x + y = \frac{A + B}{2} + \frac{C + D}{2} = \frac{A + B + C + D}{2}$$

Como $A + B + C + D = 360°$, então:

$$x + y = \frac{360°}{2} = 180°$$

Portanto, a soma das medidas x e y é 180°.

7. Como $B\hat{A}C$ é inscrito em uma semicircunferência, então:

$$med(B\hat{A}C) = 90°$$

Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se:

$$med(B\hat{A}C) + \alpha + \beta = 180°$$
$$90° + \alpha + \beta = 180°$$
$$\alpha + \beta = 180° - 90°$$
$$\alpha + \beta = 90°$$

Como $\alpha = x + 20°$ e $\beta = 7x - 10°$, tem-se:

$$x + 20° + 7x - 10° = 90°$$
$$8x + 10° = 90°$$
$$8x = 80°$$
$$x = \frac{80°}{8}$$
$$x = 10°$$

Substituindo $x = 10°$ em $\alpha = x + 20°$ e $\beta = 7x - 10°$, tem-se:

- $\alpha = 10° + 20° = 30°$
- $\beta = 7 \cdot 10° - 10° = 70° - 10° = 60°$

Portanto, o menor ângulo do triângulo ABC mede 30°.

8. M é o ponto médio do segmento $\overline{AC}$, que mede 10 cm. Então:

$$AM = MC = 5 \text{ cm}$$

O arco $\widehat{AB}$ tem centro em M. Então:

$$AM = MB = 5 \text{ cm}$$

Portanto, o triângulo ABM é isósceles, pois $AM = MB$. Logo, os ângulos $M\hat{A}B$ e $M\hat{B}A$, cujas medidas pode-se chamar de x, são congruentes. Então:

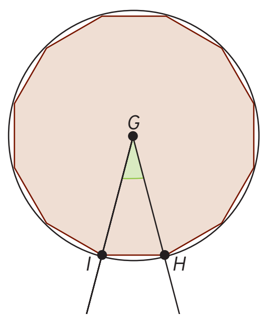
$$x + x + 60° = 180°$$
$$2x = 120°$$
$$x = 60°$$

Como os ângulos internos do triângulo ABM são congruentes e medem 60° cada, ABM é equilátero. Assim:

$$AM = MB = AB = 5 \text{ cm}$$

Dessa maneira, a formiga percorreu 15 cm (5 + 5 + 5 = 15) no trajeto $A \rightarrow B \rightarrow M \rightarrow C$.

9. **a)**



Considerando a circunferência circunscrita ao dodecágono, as semirretas determinam um arco de medida equivalente a $\frac{1}{12}$ da medida da circunferência, ou seja, a medida do ângulo $H\hat{G}I$ é 30° (360 : 12 = 30).

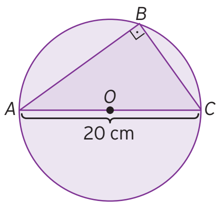
b) Como $\hat{x}$ é ângulo inscrito na circunferência e está associado ao arco equivalente a um ângulo central de medida 90° ($3 \cdot 30 = 90$), então $x = 45°$ ($90 : 2 = 45$).

Os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{z}$ são congruentes, pois as semirretas que os formam determinam o mesmo arco na circunferência circunscrita ao dodecágono. Logo, $z = x = 45°$.

O ângulo $\hat{y}$ é inscrito na circunferência e está associado ao arco equivalente a um ângulo central de medida 30°. Então, $y = 15°$ ($30 : 2 = 15$).

10. A construção é válida porque o ângulo $C\hat{A}B$ formado é um ângulo inscrito em uma circunferência e está associado a um arco que é uma semicircunferência, ou seja, o arco tem medida angular igual a 180°. Portanto, $C\hat{A}B$ mede 90° ($180 : 2 = 90$). Assim, a reta s, que contém o segmento $\overline{CA}$, é perpendicular à reta r, que contém o segmento $\overline{AB}$.

11. Um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência tem sua hipotenusa coincidindo com o diâmetro da circunferência.



Ilustrações: ID/BR

Como a hipotenusa mede 20 cm, a medida do raio dessa circunferência é 10 cm.

12. Sendo α a medida do ângulo entre os espelhos, para $N = 5$, tem-se:

$$5 = \frac{360°}{\alpha} - 1$$
$$5 + 1 = \frac{360°}{\alpha}$$
$$6 = \frac{360°}{\alpha}$$
$$6\alpha = 360°$$
$$\alpha = \frac{360°}{6}$$
$$\alpha = 60°$$

Portanto, o ângulo entre os espelhos mede 60°.

CAPÍTULO 3 – VISTAS

PÁGINA 210 – ATIVIDADES

1. a-III; b-IV; c-II; d-I

2. **a)** Vista I: figura B; vista II: figura C; vista III: figura A.

b) Desenho possível:

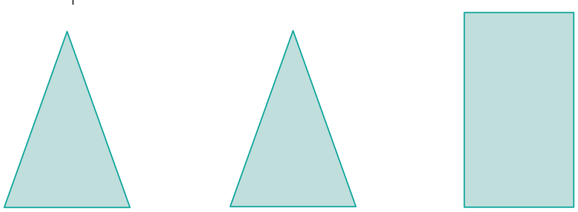


Figura A Figura B Figura C

3. A figura B (esfera) tem a mesma representação, qualquer que seja a vista.

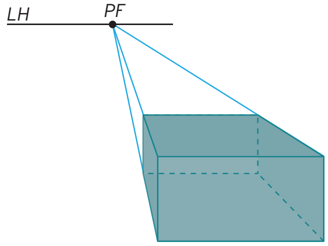
PÁGINA 214 – ATIVIDADES

4. Nas figuras 2 e 3, é possível identificar a ideia de perspectiva.

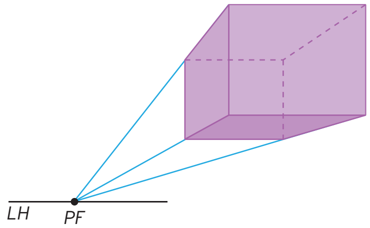
A primeira pintura não faz uso de nenhuma perspectiva, pois todas as construções estão representadas em um único plano e são proporcionais aos tamanhos reais, independentemente da posição que ocupam no espaço. A segunda e a terceira pinturas fazem uso de perspectiva, pois a rua e as linhas que limitam as construções convergem para um ponto ao fundo da reprodução.

5. As figuras dos itens **c** e **d** estão representadas em perspectiva. As figuras dos itens **a** e **b** parecem ser figuras planas, pois foram representados sem utilização de luz e sombra ou de técnicas de perspectiva.

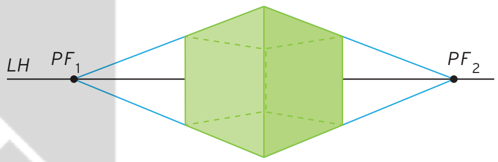
6. **a)**



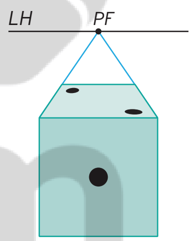
b)



c)

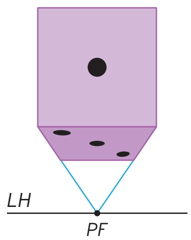


7. **a)**



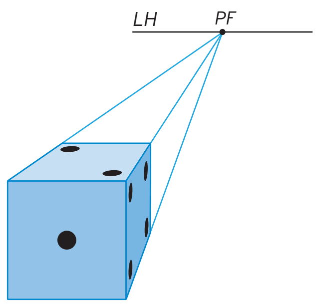
Abaixo da linha do horizonte.

b)

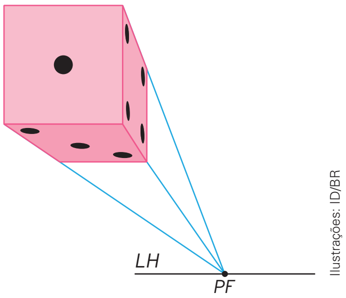


Acima da linha do horizonte.

c)

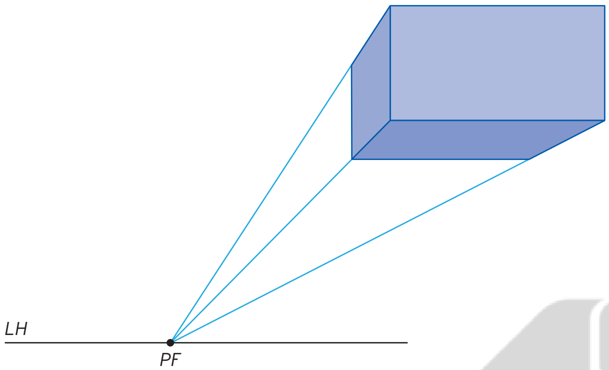


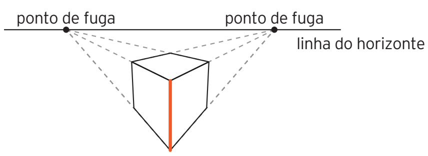
Abaixo da linha do horizonte.

d) 

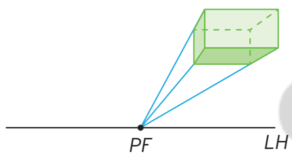
Acima da linha do horizonte.

8. Reprodução possível:

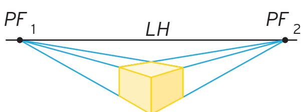


9. 

10. a) Construção possível:



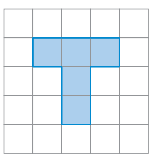
b) Construção possível:



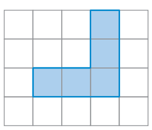
PÁGINA 215 – DIVERSIFICANDO

1. Desenho possível:

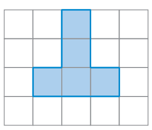
Vista 1:



Vista 2:



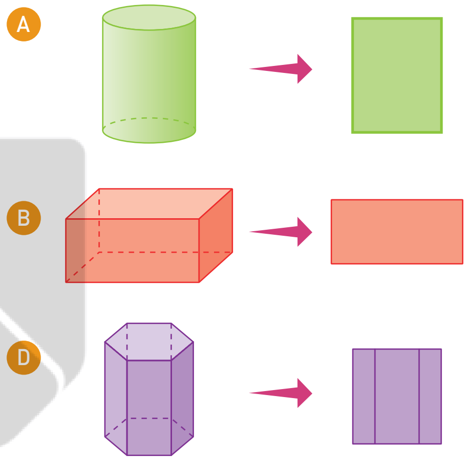
Vista 3:



2. a) Sabendo que a soma dos valores indicados nas faces opostas de um dado é igual a 7; que, no cubo de baixo, o número da face oposta à face de número 3 é 4; e que, no cubo de cima, o número da face oposta à face de número 4; é 3, a soma dos valores das faces opostas às faces que estão na frente é 7 (3 + 4 = 7).

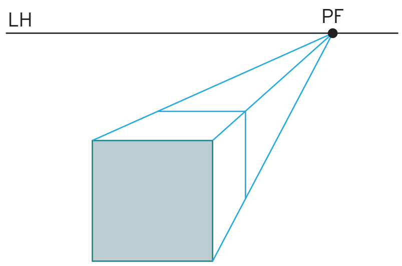
b) Sabendo que a soma dos valores indicados nas faces opostas de um dado é igual a 7; que, no cubo de baixo, o número da face oposta à face de número 1 é 6; e que, no cubo de cima, o número da face oposta à face de número 2 é 5; a soma dos valores das faces opostas às faces que estão na lateral direita é 11 (6 + 5 = 11).

c) No dado de baixo, as faces aparentes são os números 1 e 3. Como a soma dos valores indicados nas faces opostas de um dado é igual a 7, as faces opostas a essas são 6 e 4. Os números das faces restantes são 2 e 5. As duas faces restantes são a superior, apoiada no cubo de cima, e a inferior, apoiada na mesa. Como a face apoiada na mesa não apresenta o 5, seu número é o 2. No cubo de cima, a face apoiada sobre o cubo de baixo é a face oposta à face de número 1; então, ela apresenta o número 6. Portanto, a soma dos valores das faces que estão uma sobre a outra é 11 (5 + 6 = 11).

3. 

Nas figuras A (cilindro), B (bloco retangular ou paralelepípedo) e D (prisma hexagonal), pode-se ver um retângulo em pelo menos uma de suas vistas.

4. a) Esquema possível:

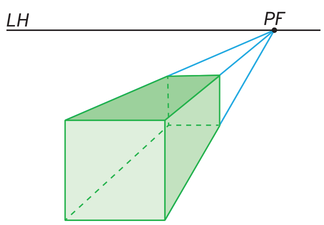


b) Abaixo da linha do horizonte.

c) O cubo é visto à esquerda do ponto de fuga.

d) As arestas horizontais da face frontal são paralelas à linha do horizonte e paralelas entre si. As arestas verticais da face frontal também são paralelas entre si.

5. Desenho possível:



6. Resposta pessoal.

PÁGINA 216 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Respostas pessoais.
2. A poupança é considerada um investimento seguro e de fácil entendimento e aplicação, por isso é o investimento mais procurado. Tem liquidez maior que a de outros investimentos, ou seja, possibilita a retirada do dinheiro investido (ou parte dele), quando necessário, acarretando a perda dos juros somente se o mês do depósito não estiver completo. Resposta pessoal.
3. a) Como alguns investimentos geram custos, como imposto de renda e taxas administrativas, que podem diminuir o ganho, para comparar os investimentos e descobrir a melhor opção do ponto de vista financeiro, deve-se calcular o valor da taxa mensal real, ou seja, a taxa mensal com a dedução dos impostos e das taxas administrativas.

Investimento	Taxa mensal esperada	Impostos e taxas	Taxa mensal real
Poupança	0,6%	Isento (não é cobrado)	0,6%
CDB X	0,9%	25% (sobre o ganho)	$75\% \cdot 0{,}9\% = 0{,}675\%$
CDB Y	0,8%	25% (sobre o ganho)	$75\% \cdot 0{,}8\% = 0{,}6\%$
Fundo Z	0,9%	25% (sobre o ganho)	$75\% \cdot 0{,}9\% = 0{,}675\%$

Das opções apresentadas e considerando exclusivamente o ponto de vista financeiro, as melhores opções são o CDB X e o Fundo Z, que apresentam taxa mensal real de 0,675%, enquanto os outros dois investimentos apresentam rendimento mensal real de 0,6%.

b) Resposta pessoal. Os aspectos financeiros podem estar associados ao risco, ainda que pequeno; ao desconhecimento que gera insegurança; a questões culturais; à aversão às perdas em outros investimentos; à maior tranquilidade mesmo ganhando menos; etc.

c) Resposta pessoal.

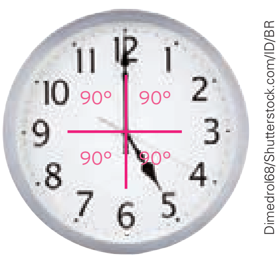
d) Resposta pessoal.
Calculando a taxa mensal real do Tesouro Direto, tem-se:

Investimento	Taxa mensal esperada	Impostos e taxas	Taxa mensal real
Tesouro Direto	1%	25% (sobre o ganho)	$75\% \cdot 1\% = 0{,}75\%$

Portanto, o Tesouro Direto possibilita maior rentabilidade que os demais investimentos, mas essa é uma escolha provável, porém não é única ou consensual.

PÁGINA 218 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. a)

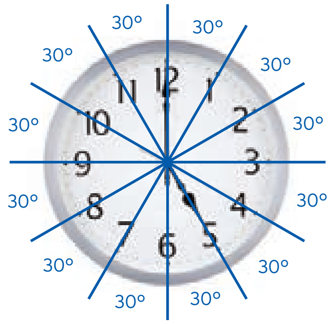


Dimedrol68/Shutterstock.com/ID/BR

Quando o relógio marca 9 horas, o menor ângulo formado pelos ponteiros equivale a $\frac{1}{4}$ de volta, portanto, mede 90° (360 : 4 = 90).

b) Como a volta inteira mede 360° e o menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio às 9 horas mede 90°, o ângulo maior formado pelos ponteiros do relógio às 9 horas mede 270° (360 − 90 = 270).

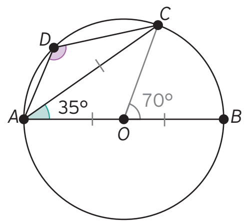
c) Dividindo o relógio em 12 partes congruentes, cada parte corresponde a 30° (360 : 12 = 30).



Dimedrol68/Shutterstock.com/ID/BR

Como a cada 1 hora o ponteiro anda 30°, então em 5 horas, o ponteiro andará 150° ($5 \cdot 30 = 150$).

2. Alternativa **a**.



Ilustrações: ID/BR

Tem-se:

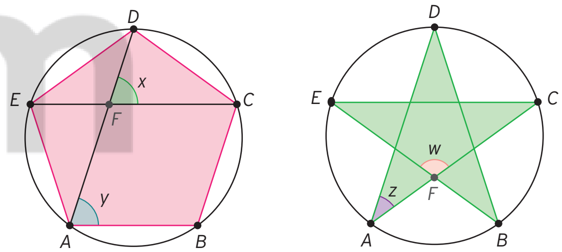
- $\text{med}(B\hat{A}C) = 35°$
- $\text{med}(B\hat{O}C) = 2 \cdot \text{med}(B\hat{A}C) = 2 \cdot 35° = 70°$

Então, $\text{med}(\overset{\frown}{BC}) = 70°$.

Como $\overline{AB}$ é diâmetro, $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 180°$. Logo:

- $\text{med}(\overset{\frown}{ABC}) = \text{med}(\overset{\frown}{AB}) + \text{med}(\overset{\frown}{BC}) = 180° + 70° = 250°$
- $\text{med}(A\hat{D}C) = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{ABC})}{2} = \dfrac{250°}{2} = 125°$

3. a)



Em ambas as figuras, a circunferência foi dividida em cinco partes iguais, ou seja, cada arco equivale a um ângulo central de medida 72° (360 : 5 = 72).

- Na primeira figura, o ângulo de medida y é inscrito na circunferência e está associado ao arco $\overset{\frown}{BCD}$. Logo, $y = 72°$.

  Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo CDF, tem-se:

  $$D\hat{C}F + F\hat{D}C + x = 180° \quad \text{(I)}$$

  Mas:

  $$D\hat{C}F \cong D\hat{C}E \text{ e } F\hat{D}C \cong A\hat{D}C \quad \text{(II)}$$

  De (I) e (II), tem-se:

  $$D\hat{C}E + A\hat{D}C + x = 180°$$

  Tem-se ainda que $A\hat{D}C$ e $D\hat{C}E$ são ângulos inscritos na circunferência e estão respectivamente associados aos arcos $\overset{\frown}{ABC}$ e $\overset{\frown}{DE}$.

  Portanto, $A\hat{D}C = 72°$ e $D\hat{C}E = 36°$.

Então:

$$D\hat{C}E + A\hat{D}C + x = 180°$$
$$36° + 72° + x = 180°$$
$$x = 180° - 108°$$
$$x = 72°$$

- Na segunda figura, o ângulo de medida z é inscrito na circunferência e está associado ao arco $\overset{\frown}{CD}$. Logo, $z = 36°$.

  Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo ECF, tem-se:

  $$F\hat{C}E + F\hat{E}C + w = 180° \quad \text{(I)}$$

  Mas:

  $$F\hat{C}E \cong A\hat{C}E \text{ e } F\hat{E}C \cong B\hat{E}C \quad \text{(II)}$$

  De (I) e (II), tem-se:

  $$A\hat{C}E + B\hat{E}C + w = 180°$$

  Tem-se ainda que $A\hat{C}E$ e $B\hat{E}C$ são ângulos inscritos na circunferência e estão respectivamente associados aos arcos congruentes $\overset{\frown}{EA}$ e $\overset{\frown}{BC}$. Portanto:

  $$A\hat{C}E = B\hat{E}C = 36°$$

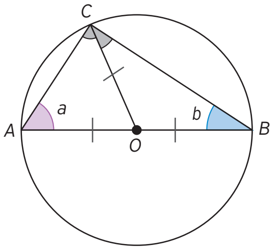
  Então:

  $$A\hat{C}E + B\hat{E}C + w = 180°$$
  $$36° + 36° + w = 180°$$
  $$w = 180° - 72°$$
  $$w = 108°$$

b) Como $\overleftrightarrow{AD}$ é transversal às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EC}$ e $x = y$, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{EC}$ são paralelos.

4. a) Sendo r o raio da circunferência, então $OC = OA = OB = r$. Logo, os triângulos OAC e OBC são isósceles.

b)

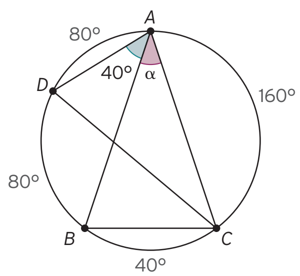


Ilustrações: ID/BR

Como os triângulos OAC e OBC são isósceles, os ângulos da base são congruentes. Assim:

- $\text{med}(O\hat{C}A) = \text{med}(O\hat{A}C) = a$
- $\text{med}(O\hat{C}B) = \text{med}(O\hat{B}C) = b$

5. Alternativa **c**.



Como a corda $\overline{CD}$ é bissetriz de $A\hat{C}B$, $A\hat{C}D$ é congruente a $D\hat{C}B$.

Como $D\hat{A}B$ e $D\hat{C}B$ são ângulos inscritos na circunferência e estão associados ao mesmo arco $\overset{\frown}{DB}$, então:

$$D\hat{C}B = D\hat{A}B = 40°$$

Portanto:

$$\text{med}(\overset{\frown}{DB}) = 2 \cdot \text{med}(D\hat{A}B) = 2 \cdot 40° = 80°$$

Como $AB \cong AC$, ABC é um triângulo isósceles.

Então:

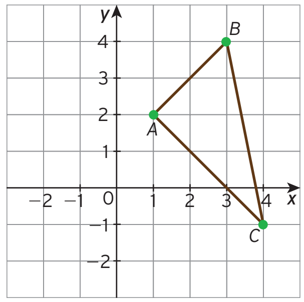
- $\text{med}(A\hat{C}B) = \text{med}(A\hat{C}D) + \text{med}(D\hat{C}B) = 40° + 40° = 80°$
- $\text{med}(A\hat{B}C) = \text{med}(A\hat{C}B) = 80°$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo ABC tem-se:

$$\alpha + \text{med}(A\hat{C}B) + \text{med}(A\hat{B}C) = 180°$$
$$\alpha + 80° + 80° = 180°$$
$$\alpha = 180° - 160°$$
$$\alpha = 20°$$

6. Alternativa **a**.

Incialmente marcam-se os pontos em um eixo cartesiano:



Agora, obtém-se a medida de cada um dos lados.

- Lado $\overline{AB}$:

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

- Lado $\overline{AC}$:

$$AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

- Lado $\overline{BC}$:

$$BC = \sqrt{(-1-4)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

Observando as medidas obtidas, tem-se:

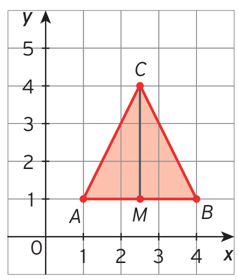
$$(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2$$

Então o triângulo ABC é retângulo em A. Logo, a medida da área A_t é dada por:

$$A_t = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}}{2} = \frac{\sqrt{144}}{2} = 6$$

Assim, $A_t = 6$ u.a.

7. Localizando os pontos A, B e C no plano cartesiano e unindo-os, obtém-se o triângulo ABC. O ponto M é o ponto médio de $\overline{AB}$, e $\overline{CM}$ é a altura do triângulo ABC relativa a $\overline{AB}$.



a) Como M é o ponto médio de $\overline{AB}$, suas coordenadas são iguais à média aritmética das coordenadas de A e B. Assim:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = M\left(\frac{1+4}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = M\left(\frac{5}{2}, 1\right)$$

Como o segmento $\overline{CM}$ é paralelo ao eixo vertical, podemos calcular sua medida pelo módulo da diferença entre as ordenadas de seus extremos.

$$CM = |y_M - y_C| = |1 - 4| = 3$$

Logo, a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$ é 3 u.c.

b) A medida do perímetro do triângulo ABC é dada por:

$$AB + BC + AC$$

em que $AC = BC$, pois o triângulo é isósceles.

Calculamos AB pela distância entre A e B. Como o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo horizontal, podemos calcular sua medida pelo módulo da diferença entre as abscissas de seus extremos.

$$AB = |x_B - x_A| = |4 - 1| = 3$$

Calculamos AC pela distância entre A e C. Considerando o triângulo ACM, $\overline{AC}$ é hipotenusa e $\overline{CM}$ e $\overline{AM}$ são catetos. Então, pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$$AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{(1{,}5)^2 + (3)^2} = \sqrt{2{,}25 + 9} = \sqrt{11{,}25}$$

Portanto:

$$BC = AC = \sqrt{11{,}25}$$

Logo, a medida do perímetro P é dada por:

$$P = AB + BC + AC = \sqrt{11{,}25} + \sqrt{11{,}25} + 3 = 3 + 2\sqrt{11{,}25}$$

Portanto, a medida do perímetro do triângulo ABC é:

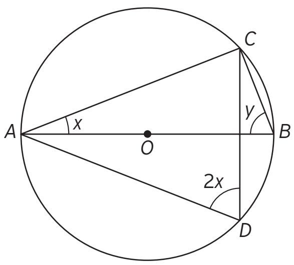
$(3 + 2\sqrt{11{,}25})$ u.c.

c) Para determinar a medida da área A do triângulo ABC, pode-se fazer:

$$A = \frac{AB \cdot CM}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Portanto, a medida da área do triângulo ABC é 4,5 u.a.

8.



Considerando o triângulo ABC e a circunferência circunscrita a ele, tem-se que $\overline{AB}$ é diâmetro da circunferência e, portanto, o triângulo ABC é retângulo em $\hat{C}$ e $\overline{AB}$ é sua hipotenusa.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se em ABC:

$$x + 90° + y = 180°$$
$$x + y = 90° \quad \text{(I)}$$

Como $C\hat{B}A$ e $C\hat{D}A$ são ângulos inscritos na circunferência e estão ambos associados ao arco $\overset{\frown}{CA}$, eles são congruentes e têm medida angular equivalente à metade da medida de $\overset{\frown}{CA}$, ou seja:

$$2x = y \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), tem-se:

$$\begin{cases} x + y = 90° \\ 2x = y \end{cases}$$

Substituindo $y = 2x$ na equação (I), tem-se:

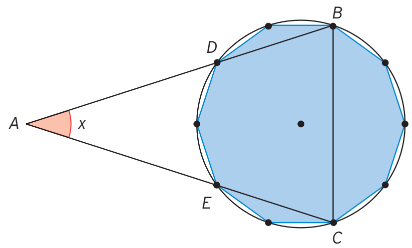
$$x + 2x = 90°$$
$$3x = 90°$$
$$x = 30°$$

Substituindo $x = 30°$ em (II), tem-se:

$$y = 2x = 2 \cdot 30° = 60°$$

Portanto, o valor da medida de y é 60°.

9.



Ilustrações: ID/BR

No decágono regular, cada arco está associado a um ângulo central de medida 36° (360 : 10 = 36).

No triângulo ABC, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são ângulos equivalentes aos ângulos $D\hat{B}C$ e $E\hat{C}B$ inscritos na circunferência e associados, respectivamente, aos arcos $\overset{\frown}{DEC}$ e $\overset{\frown}{BDE}$. Esses arcos são congruentes de medida angular igual a 144° (36 · 4 = 144).

Portanto, $D\hat{B}C$ e $E\hat{C}B$ medem 72° cada um. Assim:

$$\text{med}(A\hat{B}C) = \text{med}(A\hat{C}B) = 72°$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo ABC, tem-se:

$$x + \text{med}(A\hat{B}C) + \text{med}(A\hat{C}B) = 180°$$
$$x + 72° + 72° = 180°$$
$$x = 180° - 144°$$
$$x = 36°$$

10. Como M é o ponto médio de $\overline{AB}$, tem-se:

$$AM = MB$$
$$5x - 19 = 2x + 5$$
$$3x = 24$$
$$x = 8$$

O arco $\overset{\frown}{BCA}$ tem medida angular igual a 180°, pois ABC é um triângulo retângulo em $\hat{C}$ e está inscrito na circunferência de centro M que contêm $\overset{\frown}{BCA}$.

Assim, $CM = MB$, que são equivalentes à medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Portanto:

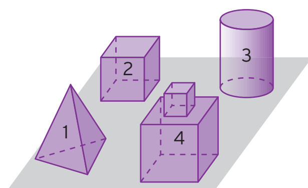
$$y + 4 = 2x + 5$$
$$y + 4 = 16 + 5$$
$$y = 21 - 4$$
$$y = 17$$

11. Alternativa **e**.

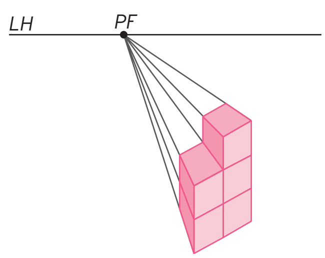
A vista da câmera é a vista superior. São quatro figuras com a seguinte disposição:

1	2
4	3

Iniciando com o tetraedro na posição 1, em sentido horário, tem-se na posição 2 o cubo menor, na posição 3 o cilindro e na posição 4 o cubo com o cubinho.

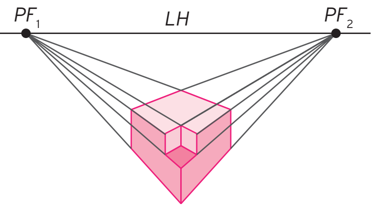


12. Desenho possível:



13. As intersecções das retas obtidas através do prolongamento das arestas da figura determinam os pontos de fuga. Ao ligar os dois pontos de fuga, obtemos a linha do horizonte.

Ilustrações: ID/BR



UNIDADE 6 – FUNÇÕES

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES

PÁGINA 225 – ATIVIDADES

1. a) A distância D e o tempo t.
   b) D
   c) t

2. a) A medida do perímetro P de um triângulo equilátero pode ser calculado multiplicando-se a medida do lado por 3. Seja P a medida do perímetro e ℓ a medida do lado do triângulo equilátero, então:
   - $\ell = 2$
     $P = 3 \cdot 2 = 6$
     Portanto, a medida do perímetro P é igual a 6 cm.
   - $\ell = 3{,}5$
     $P = 3 \cdot 3{,}5 = 10{,}5$
     Portanto, a medida do perímetro P é igual a 10,5 cm.
   - $\ell = x$
     $P = 3 \cdot x = 3x$
     Portanto, a medida do perímetro P é igual a $(3x)$ cm.

   b) $P(x) = 3x,\ x \in \mathbb{R}_+^*$

3. a) $b = 5a + 3$
   b é a variável dependente, e a é a variável independente.
   b) $g = 4 - 2h$
   g é a variável dependente, e h é a variável independente.
   c) $t = 10x$
   t é a variável dependente, e x é a variável independente.

4. Resposta possível: $f(n) = 3n - 1$, sendo n um número natural não nulo.

5. a) Há sempre duas cadeiras nas pontas de todas as configurações. Além delas há 4 cadeiras em cada mesa.
   Assim, se m representa a quantidade de mesas e c, a quantidade de cadeiras, tem-se:
   $$c = 4m + 2,\ m \in \mathbb{N}^*$$
   b) Sendo $c = 4m + 2$, para $c = 50$, tem-se:
   $$c = 4m + 2$$
   $$50 = 4m + 2$$
   $$4m = 50 - 2$$
   $$4m = 48$$
   $$m = \frac{48}{4}$$
   $$m = 12$$
   Logo, são necessárias 12 dessas mesas enfileiradas para acomodar 50 pessoas.

6. $m = 3n + 2$ (sendo n um número real)
   a) m é a variável dependente e n é a variável independente.
   b) $g(n) = 3n + 2$

7. $A_{\square ABOL} = 30^2 = 900$
   $A_{\square \text{branco}} = x^2$
   Logo, a lei da função que determina a medida da área A da região verde é dada por:
   $$A(x) = 900 - x^2$$

PÁGINA 226 – ATIVIDADES

8. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$
   - $f(0) = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 4 =$
     $= 2 \cdot 0 + 0 - 4 = 0 + 0 - 4 = -4$
   - $f(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 4 =$
     $= 2 \cdot 4 + 6 - 4 = 8 + 6 - 4 = 10$
   - $f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) - 4 =$
     $= 2 \cdot 9 - 9 - 4 = 18 - 9 - 4 = 5$

9. $f(x) = 4x + 1$
   a) • $f(-2) = 4 \cdot (-2) + 1 = -8 + 1 = -7$
      • $f(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 4 + 1 = 5$
   Portanto:
   $$f(-2) \cdot f(1) = -7 \cdot 5 = -35$$
   b) • $f(3) = 4 \cdot 3 + 1 = 12 + 1 = 13$
      • $f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$
   Portanto:
   $$2f(3) + f(0) = 2 \cdot 13 + 1 = 26 + 1 = 27$$

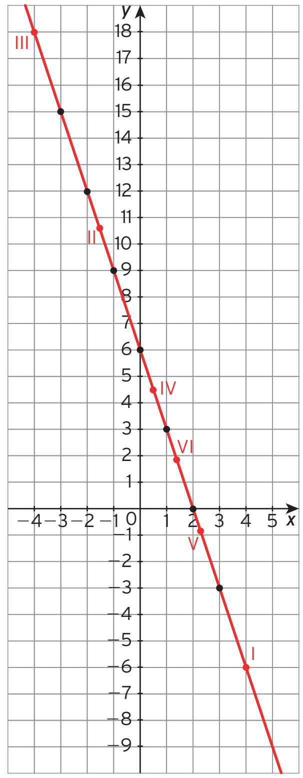
10. a) Resposta possível: A medida do perímetro é o quádruplo da medida do lado.
    b) Como a medida do perímetro é o quádruplo da medida do lado, então:
    $$p(\ell) = 4 \cdot \ell,\ \ell \in \mathbb{R}_+^*$$
    c) Para $\ell = 3{,}5$, tem-se:
    $$p(\ell) = 4 \cdot 3{,}5 = 14$$
    Logo, a medida do perímetro do quadrado cujo lado mede 3,5 cm é 14 cm.

PÁGINA 229 – ATIVIDADES

11. a)

x	$f(x) = 6 - 3x$	(x, y)
−3	$6 - 3 \cdot (-3) = 6 + 9 = 15$	(−3, 15)
−2	$6 - 3 \cdot (-2) = 6 + 6 = 12$	(−2, 12)
−1	$6 - 3 \cdot (-1) = 6 + 3 = 9$	(−1, 9)
0	$6 - 3 \cdot 0 = 6 - 0 = 6$	(0, 6)
1	$6 - 3 \cdot 1 = 6 - 3 = 3$	(1, 3)
2	$6 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0$	(2, 0)
3	$6 - 3 \cdot 3 = 6 - 9 = -3$	(3, −3)

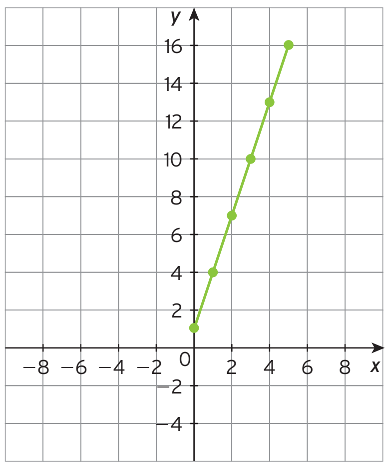
b) e c)



- Substituindo em $f(x)$ os valores de x, tem-se:
  I. $f(4) = 6 - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = -6$
  II. $f(-1{,}6) = 6 - 3 \cdot (-1{,}6) =$
  $= 6 + 4{,}8 = 10{,}8$
  III. $f(-4) = 6 - 3 \cdot (-4) = 6 + 12 =$
  $= 18$
  IV. $f(0{,}5) = 6 - 3 \cdot (0{,}5) = 6 - 1{,}5 =$
  $= 4{,}5$
  V. $f(2{,}3) = 6 - 3 \cdot (2{,}3) = 6 - 6{,}9 =$
  $= -0{,}9$
  VI. $f(\sqrt{2}) = 6 - 3 \cdot (\sqrt{2}) \simeq 6 - 4{,}2 =$
  $= 1{,}8$

  Para verificar se o valor obtido é próximo ao marcado no gráfico, é necessário comparar os valores encontrados nos cálculos com aqueles obtidos pela observação do gráfico. Comparando-se os valores, observa-se que eles são próximos.

12.



13. a) Observa-se, no gráfico da função h, que para $x = 2$, o valor de y é 1. Portanto, $h(2) = 1$.

b) Observa-se, no gráfico da função h, que para $x = 0$, o valor de y é 3. Portanto, $h(0) = 3$.

14. a) Verdadeira.

b) Verdadeira.

c) Falsa, pois o gráfico de f cruza o eixo x em mais dois pontos.

d) Falsa, pois para $x > 0$, a função f assume valores negativos ou zero, e a função g assume valor zero.

e) Verdadeira.

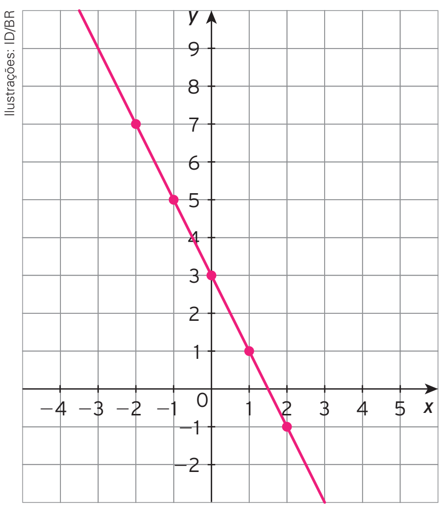
f) Verdadeira.

15. a)

x	$f(x) = -2x + 3$	$(x, f(x))$
-2	$-2 \cdot (-2) + 3 = 4 + 3 = 7$	$(-2, 7)$
-1	$-2 \cdot (-1) + 3 = 2 + 3 = 5$	$(-1, 5)$
0	$-2 \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$	$(0, 3)$
1	$-2 \cdot 1 + 3 = -2 + 3 = 1$	$(1, 1)$
2	$-2 \cdot 2 + 3 = -4 + 3 = -1$	$(2, -1)$

b)

Ilustrações: ID/BR



PÁGINA 230 – DIVERSIFICANDO

1. Resposta pessoal.

2. a) Sendo d a distância, v a velocidade e t o tempo, tem-se:

$$d = v \cdot t$$

Então, para $t = 2$, obtém-se:

$$d = 60 \cdot 2 = 120$$

Em 2 horas, são percorridos 120 km.

b) Para $d = 210$, tem-se:

$$210 = 60 \cdot t$$
$$t = \frac{210}{60}$$
$$t = 3,5$$

Para percorrer 210 km, essa motocicleta leva 3,5 horas.

3. A variável independente é o tempo t que Eva levará para tomar todo o remédio; a variável dependente é a quantidade q de remédio que ainda há no frasco.

Assim, como ela toma 5 mL a cada 4 horas, tem-se:

$$\frac{5}{4} = \frac{q}{t}$$
$$t = \frac{4 \cdot q}{5}$$

Como ainda há 60 mL no frasco, $q = 60$.

Substituindo esse valor em $t = \frac{4 \cdot q}{5}$, tem-se:

$$t = \frac{4 \cdot 60}{5} = \frac{240}{5} = 48$$

Eva levará 48 horas para tomar todo o remédio do frasco. Como um dia tem 24 horas, então:

$$\frac{48}{24} = 2$$

Portanto, Eva levará 2 dias para tomar todo o remédio do frasco.

4. a) A medida do perímetro do retângulo é dado por:

$f(x) = 2x + 1 + x + 1 + 2x + 1 + x + 1 =$
$= 6x + 4$

b) A medida da área do retângulo é dada por:

$g(x) = (2x + 1) \cdot (x + 1) = 2x^2 + 2x + x + 1 =$
$= 2x^2 + 3x + 1$

5. a) O passeio de Pedro e Júlia durou 80 minutos.

b) Eles ficaram parados durante 20 minutos ($60 - 40 = 20$).

c) Nos primeiros 40 minutos, eles percorreram 4 quilômetros.

d) Eles percorreram 5 quilômetros durante o passeio.

6. $f(x) = 2x$

- $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$
- $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$

Portanto:

$2 \cdot f(-2) + f(1) = 2 \cdot (-4) + 2 =$
$= -8 + 2 = -6$

7. Dada a função $f(x) = 2x - 3$, tem-se:

- para $x = 0$:

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

- para $x = 3$:

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3$$

Portanto, o gráfico dessa função passa pelos pontos $(0, -3)$ e $(3, 3)$. Dos dois gráficos apresentados, o que satisfaz essas condições é o gráfico apresentado no item **a**.

8. a) A medida do volume é dada pelo produto das três dimensões.

$$V = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Assim, o volume de água contido nesse tanque é 6 m^3.

b) Retirando-se 3 m^3 de água do tanque, restarão 3 m^3 ($6 - 3 = 3$).

Para $V = 3$, tem-se:

$$3 = 3 \cdot 2 \cdot c$$
$$6 \cdot c = 3$$
$$c = \frac{3}{6}$$
$$c = 0,5$$

O nível atingido pela água será 0,5 m.

Outra resolução possível: Como o volume foi reduzido à metade e as dimensões da base do tanque não foram alteradas, o nível de água será reduzido à metade, ou seja, 0,5 m ($1 : 2 = 0,5$).

c) $V = 3 \cdot 2 \cdot 0,25 = 1,5$

Portanto, a medida do volume é 1,5 m^3.

d) Considerando V_R a retirada, em metro cúbico, de água, tem-se:

$$6 - V_R = N \cdot 3 \cdot 2$$
$$N = \frac{6 - V_R}{6}, \text{ com } V_R \in \mathbb{R}^*$$

9. a)

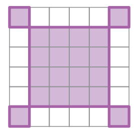


Figura 4

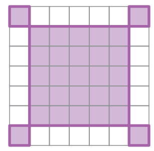
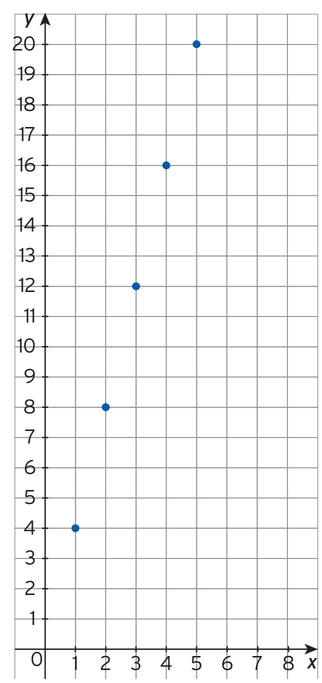


Figura 5

b) $T_n = (n + 2)^2$; $B_n = 4n$; $P_n = n^2 + 4$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c) Utilizando a relação $B_n = 4n$, obtém-se:



10. a) $f(2) = -1$; $f(5) = 2$.

b) $x = 3$

c) $x = 1$ e $x = 5$.

d) Como o gráfico cruza o eixo x em dois pontos, então a quantidade de valores de x para os quais a função se anula é 2.

e) Resposta possível: Entre 1 e 2.

11. a) 8% de 60 000 = 0,08 · 60 000 = 4 800

4 800 + 1 500 = 6 300

Portanto, se o funcionário vender R$ 60 000,00 em um mês, ele receberá R$ 6 300,00 de salário.

b) 7 800 − 1 500 = 6 300

6 300 : 0,08 = 78 750

Portanto, para receber um salário de R$ 7 800,00, o funcionário precisa vender R$ 78 750,00 em um mês.

c) O salário $S(t)$ pode ser descrito pela lei de formação $S(t) = 1500 + 0{,}08t$, em que t é o total vendido pelo funcionário em um mês.

12. a) 50 + 0,80 · 100 = 50 + 80 = 130

Portanto, se o cliente percorrer 100 quilômetros em um dia, ele deverá pagar R$ 130,00 pelo aluguel do carro.

b) 150 − 50 = 100

100 : 0,80 = 125

Logo, para gastar no máximo R$ 150,00, ele pode percorrer até 125 quilômetros nesse dia.

c) O total pago $p(x)$ em um dia pode ser descrito pela lei de formação $p(x) = 50 + 0{,}8x$, em que x é a distância, em quilômetros, percorrida nesse dia.

CAPÍTULO 2 – FUNÇÃO AFIM

PÁGINA 234 – ATIVIDADES

1. a) Função afim. Função polinomial do 1º grau.

b) Não é uma função afim.

c) Função afim. Função polinomial do 1º grau.

d) Função afim. Função polinomial do 1º grau.

e) Função afim constante.

f) Não é uma função afim.

2. $f(x) = -5x + 8$

a) $f(2) = -5 \cdot 2 + 8 = -10 + 8 = -2$

b) $f(0) = -5 \cdot 0 + 8 = 0 + 8 = 8$

c) $f(-3) = -5 \cdot (-3) + 8 = 15 + 8 = 23$

d) $f(1{,}6) = -5 \cdot 1{,}6 + 8 = -8 + 8 = 0$

3. a) $p(n) = 25n + 6$

b) Sim; função polinomial do 1º grau.

c) $p(n) = 25n + 6$

$p(3) = 25 \cdot 3 + 6$

$p(3) = 75 + 6$

$p(3) = 81$

O valor pago na compra de 3 *calzones* é R$ 81,00.

d) $p(n) = 25n + 6$

$181 = 25n + 6$

$25n = 181 - 6$

$25n = 175$

$n = \frac{175}{25} = 7$

Foram comprados 7 *calzones* por R$ 181,00.

4. $f(x) = x - 3$ e $g(x) = 21x$

a) $f(5) = 5 - 3 = 2$

$g(1) = 21 \cdot 1 = 21$

Portanto:

$$f(5) - g(1) = 2 - 21 = -19$$

b) $g(0) = 21 \cdot 0 = 0$

$f(-1) = (-1) - 3 = -4$

Portanto:

$$g(0) \cdot f(-1) = 0 \cdot (-4) = 0$$

PÁGINA 237 – ATIVIDADES

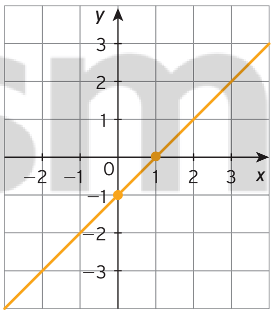
5. $f(x) = x - 1$, com x real

Escolhem-se dois valores para x e calculam-se os valores de $y = f(x)$ correspondentes:

$$f(1) = 1 - 1 = 0$$
$$f(0) = 0 - 1 = -1$$

Os pares (1, 0) e (0, −1) pertencem à reta que representa a função $f(x) = x - 1$.

Assim, marcam-se os pontos obtidos em um plano cartesiano e traça-se a reta que contém esses pontos, determinando, assim, o gráfico de $f(x) = x - 1$.



Ilustrações: ID/BR

a) O gráfico corta o eixo x quando $y = 0$, ou seja, no ponto (1, 0), e o gráfico corta o eixo y quando $x = 0$, ou seja, no ponto (0, −1).

b) O gráfico corta o eixo x no ponto (1, 0), portanto, a abscissa desse ponto é 1.

6. a) Verdadeira, pois uma função do tipo $f(x) = ax + b$ é linear quando $b = 0$. Portanto, seu gráfico sempre passa pela origem.

b) Falsa. O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

c) Falsa. Uma reta paralela ao eixo das ordenadas não pode ser o gráfico de uma função afim.

7. a) Para determinar a lei dessa função, substituímos os valores das coordenadas x e y de dois pontos na expressão da função afim $y = ax + b$.

- Para (0, −5), tem-se $y = -5$ e $x = 0$. Então:

$$y = ax + b$$
$$-5 = a \cdot 0 + b$$
$$b = -5$$

- Para (2, −1), tem-se $y = -1$ e $x = 2$. Então:

$$y = ax + b$$
$$-1 = a \cdot 2 + b$$

Como $b = -5$, tem-se:

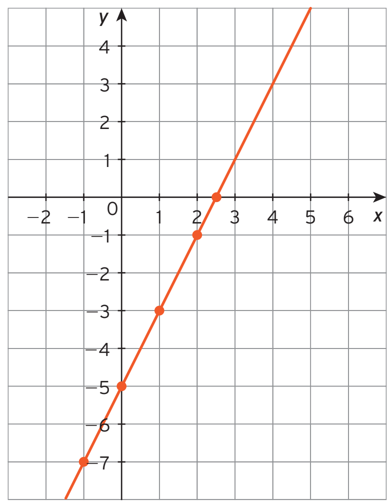
$$-1 = a \cdot 2 - 5$$
$$2a = 4$$
$$a = 2$$

Substituindo $a = 2$ e $b = -5$ em $y = ax + b$, obtém-se a lei da função afim cujo gráfico passa pelos pontos (0, −5) e (2, −1).

$$y = ax + b$$
$$y = 2x - 5$$

Portanto, a lei dessa função é $y = 2x - 5$.

b) Para construir o gráfico dessa função, marcam-se pelo menos dois pontos do quadro em um plano cartesiano e traça-se a reta que contém esses pontos.



c) Não, porque seu gráfico não é uma reta paralela ou coincidente ao eixo x (ou porque $a \neq 0$).

d) Não, porque seu gráfico não passa pela origem.

8. $f(x) = -3x$

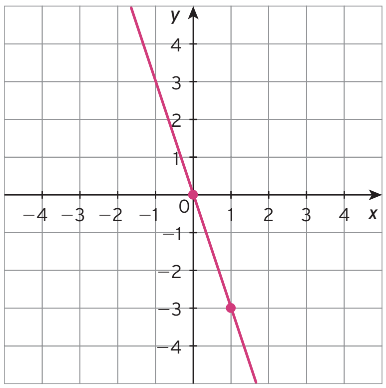
Escolhem-se dois valores para x e calculam-se os valores de $y = f(x)$ correspondentes:

$$f(0) = -3 \cdot 0 = 0$$
$$f(1) = -3 \cdot 1 = -3$$

Logo, os pares (0, 0) e (1, −3) pertencem à reta que representa a função $f(x) = -3x$.

Assim, marcam-se os pontos obtidos em um plano cartesiano e traça-se a reta que contém esses pontos, determinando o gráfico de $f(x) = -3x$.

Ilustrações: ID/BR



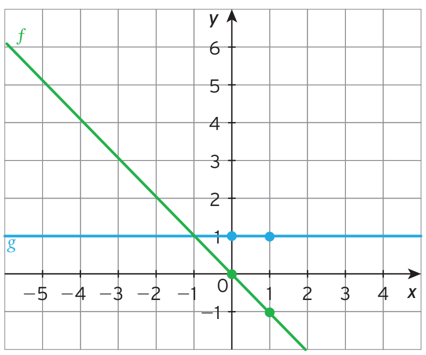
9. a) Constrói-se um quadro para obter alguns pares ordenados que determinem pontos que pertençam à reta da função $f(x) = -x$.

x	$f(x) = -x$	(x, y)
0	$y = 0$	(0, 0)
1	$y = -1$	(1, −1)

E constrói-se outro quadro para obter alguns pares ordenados que determinem pontos que pertençam à reta da função $g(x) = 1$.

x	$g(x) = 1$	(x, y)
0	$y = 1$	(0, 1)
1	$y = 1$	(1, 1)

Assim, em um mesmo plano cartesiano, marcam-se os pontos obtidos e traça-se a reta que contém esses pontos, para cada função.



Os gráficos das funções f e g intersectam-se no ponto (−1, 1).

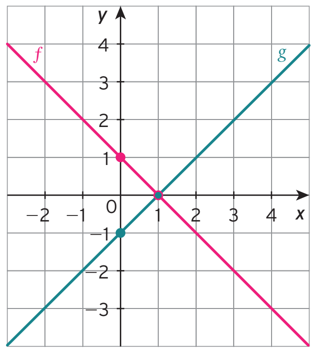
b) Constrói-se um quadro para obter alguns pares ordenados que determinem pontos que pertençam à reta da função $f(x) = -x + 1$.

x	$f(x) = -x + 1$	(x, y)
0	$y = -0 + 1 = 1$	(0, 1)
1	$y = -1 + 1 = 0$	(1, 0)

E constrói-se outro quadro para obter alguns pares ordenados que determinem pontos que pertençam à reta da função $g(x) = x - 1$.

x	$g(x) = x - 1$	(x, y)
0	$y = 0 - 1 = -1$	(0, −1)
1	$y = 1 - 1 = 0$	(1, 0)

Assim, em um mesmo plano cartesiano, marcam-se os pontos obtidos e traça-se a reta que contém esses pontos, para cada função.



Os gráficos das funções f e g intersectam-se no ponto (1, 0).

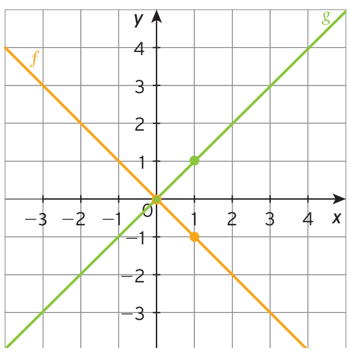
c) Constrói-se um quadro para obter alguns pares ordenados que determinem pontos que pertençam à reta da função $f(x) = -x$.

x	$f(x) = -x$	(x, y)
0	$y = 0$	(0, 0)
1	$y = -1$	(1, −1)

E constrói-se outro quadro para obter alguns pares ordenados que determinem pontos que pertençam à reta da função $g(x) = x$.

x	$g(x) = x$	(x, y)
0	$y = 0$	(0, 0)
1	$y = 1$	(1, 1)

Assim, em um mesmo plano cartesiano, marcam-se os pontos obtidos e traça-se a reta que contém esses pontos, para cada função.



Os gráficos das funções f e g intersectam-se no ponto (0, 0).

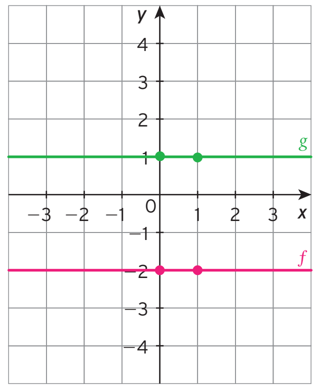
d) Constrói-se um quadro para obter alguns pares ordenados que determinem pontos que pertençam à reta da função $f(x) = -2$.

x	$f(x) = -2$	(x, y)
0	$y = -2$	(0, −2)
1	$y = -2$	(1, −2)

E constrói-se outro quadro para obter alguns pares ordenados que determinem pontos que pertençam à reta da função $g(x) = 1$.

x	$g(x) = 1$	(x, y)
0	$y = 1$	(0, 1)
1	$y = 1$	(1, 1)

Assim, em um mesmo plano cartesiano, marcam-se os pontos obtidos e traça-se a reta que contém esses pontos, para cada função.



Não há ponto de intersecção nesses gráficos.

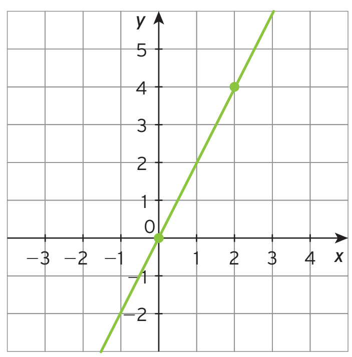
10. a) Como a função é linear, ela pode ser escrita na forma $g(x) = ax$ e passa pela origem, ou seja, por (0, 0).

Sabe-se que a função $g(x)$ passa pelo ponto (2, 4), ou seja, $g(2) = 4$. Logo:

$$g(x) = ax$$
$$g(2) = a \cdot 2$$
$$4 = a \cdot 2$$
$$2a = 4$$
$$a = 2$$

Portanto, $g(x) = 2x$.

Assim, marcam-se os pontos (0, 0) e (2, 4) em um plano cartesiano e traça-se a reta que os contém, determinando o gráfico da função $g(x) = 2x$.



b) $g(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$

Portanto, $g(-2) = -4$.

c) O gráfico seria uma reta paralela ao eixo x cortando o eixo y no ponto (0, 4). A função seria $g(x) = 4$ e passaria por todos os pontos da forma $(x, 4)$.

11. a) Função polinomial do 1º grau, pois o gráfico é uma reta inclinada que corta os dois eixos em pontos que são diferentes da origem (0, 0).

b) Função constante, pois o gráfico é uma reta paralela ao eixo x, que passa pelo ponto (0, −3).

c) Função linear, pois o gráfico é uma reta inclinada que passa pela origem, ou seja, que corta os eixos x e y em (0, 0).

d) Função polinomial do 1º grau, pois o gráfico é uma reta inclinada que corta os dois eixos em pontos que são diferentes da origem (0, 0).

PÁGINA 239 – ATIVIDADES

12. $f(x) = 2x - 4$

a) $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 4 = -2 - 4 = -6$

b) $f(x) = 0$

$2x - 4 = 0$

$2x = 4$

$x = 2$

c) O zero da função é definido como o valor de x para o qual $f(x) = 0$. Portanto, de acordo com o resultado do item anterior, o zero da função $f(x) = 2x - 4$ é 2.

13. a) A lei de formação da função identidade é $f(x) = x$.

$$f(x) = 0$$
$$x = 0$$

Logo, o zero da função identidade é 0.

b) A função afim dada por $f(x) = -7$ é uma função constante. Logo, $f(x) = -7$ não tem zero.

c) $g(x) = -x - 100$

$-x - 100 = 0$

$x = -100$

Portanto, o zero de $g(x) = -x - 100$ é -100.

d) $h(x) = 40x$

$40x = 0$

$x = \frac{0}{40}$

$x = 0$

Logo, o zero de $h(x) = 40x$ é 0.

14. $g(x) = -0{,}5x$

a) $y_1 = g(x_1) = -0{,}5x_1$

Como $x_1 = -1$, tem-se:

$$y_1 = g(-1) = -0{,}5 \cdot (-1) = 0{,}5$$

b) $g(y_1) = -0{,}5y_1$

Como $y_1 = 0{,}5$, então:

$$g(y_1) = g(0{,}5) = -0{,}5 \cdot 0{,}5 = -0{,}25$$

c) Não, pois $g(0{,}5) = -0{,}25 \neq 0$.

15. a) Como a função considerada é uma função afim, ela pode ser escrita na forma $f(x) = ax + b$. Se o zero da função é $\frac{3}{2}$, então $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

De acordo com o enunciado, tem-se dois pontos que pertencem ao gráfico de f. São eles: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e (1, 5).

Pode-se escrever um sistema de equações, substituindo $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e (1, 5) em $f(x) = ax + b$, assim:

$$\begin{cases} 5 = a \cdot 1 + b \\ 0 = a \cdot \frac{3}{2} + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = a + b \\ 0 = 3a + 2b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtêm-se os coeficientes a e b de $f(x) = ax + b$.

Multiplicando a primeira equação por (−2) e adicionando-a à segunda, obtém-se:

$$\begin{cases} -10 = -2a - 2b \\ \quad 0 = 3a + 2b \end{cases} +$$
$$-10 = a$$

Substituindo o valor $a = -10$ na equação $5 = a + b$, tem-se:

$$5 = -10 + b$$
$$b = 5 + 10$$
$$b = 15$$

Logo, $a = -10$ e $b = 15$.

b) $f(x) = -10x + 15$

$f(-3) = -10 \cdot (-3) + 15$

$f(-3) = 30 + 15$

$f(-3) = 45$

c) $f(x) = -10x + 15$

$25 = -10x + 15$

$10x = 15 - 25$

$10x = -10$

$x = -1$

16. Para que a função $h(x) = x - 4 + k$ tenha como zero $x = 2$, deve-se ter $h(2) = 0$. Assim:

$$h(x) = x - 4 + k$$
$$h(2) = 2 - 4 + k$$
$$h(2) = -2 + k$$
$$0 = -2 + k$$
$$k = 2$$

17. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal. O zero da função é o valor que x assume quando $f(x) = 0$.

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal. Para qualquer função, as coordenadas do ponto em que o gráfico intersecta o eixo x é o par ordenado $(x_0, 0)$, em que x_0 é o zero de f, calculado no item **b**.

e) A abscissa do ponto de intersecção do gráfico com o eixo x é o zero da função.

18. O zero da função é o valor que x assume no ponto em que o gráfico intersecta o eixo x.

a) O gráfico intersecta o eixo x no ponto (−2, 0), portanto o zero da função é −2.

b) O gráfico intersecta o eixo x no ponto (2, 0), portanto o zero da função é 2.

c) O gráfico intersecta o eixo x no ponto (0, 0), portanto o zero da função é 0.

d) O gráfico não intersecta o eixo x, portanto a função não tem zero.

e) O gráfico intersecta o eixo x no ponto (−1,5; 0), portanto o zero da função é −1,5.

PÁGINA 242 – ATIVIDADES

19. a) O gráfico representa uma função crescente, pois, à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y também aumentam.

b) O gráfico representa uma função constante, pois, para qualquer valor de x, y assume sempre o mesmo valor, ou seja, o valor de y independe do valor de x.

c) O gráfico representa uma função decrescente, pois, à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y diminuem.

20. Sendo a o coeficiente de x, a função polinomial do 1º grau $v(x) = ax + b$ é crescente quando $a > 0$ e decrescente quando $a < 0$.

a) A função $f(x) = -5x + 2$ é decrescente, pois $a < 0$.

b) A função $t(m) = \frac{1}{3}m - 5$ é crescente, pois $a > 0$.

c) A função $h(x) = -\frac{x}{4}$ é decrescente, pois $a < 0$.

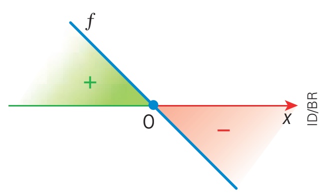
d) A função $g(x) = x + 3$ é crescente, pois $a > 0$.

e) A função $p(x) = 2x - 7$ é crescente, pois $a > 0$.

21. a) A função $f(x) = -2x$ é decrescente, pois $a < 0$. Portanto, o zero da função $f(x)$ é dado por:

$$f(x) = 0$$
$$-2x = 0$$
$$x = 0$$

Assim:



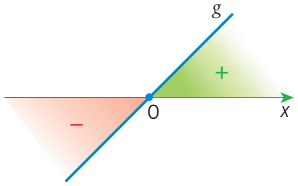
Portanto:

$$f(x) = 0, \text{ para } x = 0$$
$$f(x) > 0, \text{ para } x < 0$$
$$f(x) < 0, \text{ para } x > 0$$

b) A função $g(x) = 2x$ é crescente, pois $a > 0$. Portanto, o zero da função g é dado por:

$$g(x) = 0$$
$$2x = 0$$
$$x = 0$$

Assim:



Ilustrações: ID/BR

Portanto:

$$g(x) = 0,\ \text{para } x = 0$$
$$g(x) > 0,\ \text{para } x > 0$$
$$g(x) < 0,\ \text{para } x < 0$$

c) A função $p(x) = 0$ é constante, pois $a = 0$.

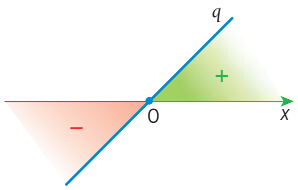
Portanto:

$$p(x) = 0 \text{ para todo } x \text{ real}$$
$$p(x) > 0 \text{ para nenhum } x \text{ real}$$
$$p(x) < 0 \text{ para nenhum } x \text{ real}$$

d) A função $q(x) = x$ é crescente, pois $a > 0$. Portanto, o zero da função q é dado por:

$$q(x) = 0$$
$$x = 0$$

Assim:



Portanto:

$$q(x) = 0 \text{ para } x = 0$$
$$q(x) > 0 \text{ para } x > 0$$
$$q(x) < 0 \text{ para } x < 0$$

22. Observando o gráfico, tem-se:

a) $f(x) = 0$ quando $x = -1$.

b) $f(x) > 0$ quando $x > -1$.

c) $f(x) < 0$ quando $x < -1$.

d) $f(x) = 2$ quando $x = 0$.

23. a) A função $h(x) = -0{,}5$ é constante, pois $a = 0$. Logo:

$$h(x) > 0 \text{ para nenhum } x \text{ real}$$
$$h(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ real}$$

b) A função $h(x) = -0{,}5x$ é decrescente, pois $a < 0$.

O zero da função h é:

$$h(x) = 0$$
$$-0{,}5x = 0$$
$$x = 0$$

Portanto:

$$h(x) > 0 \text{ para } x < 0$$
$$h(x) < 0 \text{ para } x > 0$$

c) A função $h(x) = x + 1$ é crescente, pois $a > 0$.

O zero da função h é:

$$h(x) = 0$$
$$x + 1 = 0$$
$$x = -1$$

Portanto:

$$h(x) > 0 \text{ para } x > -1$$
$$h(x) < 0 \text{ para } x < -1$$

d) A função $h(x) = -1 - x$ é decrescente, pois $a < 0$.

O zero da função h é:

$$h(x) = 0$$
$$-1 - x = 0$$
$$x = -1$$

Portanto:

$$h(x) > 0 \text{ para } x < -1$$
$$h(x) < 0 \text{ para } x > -1$$

24. Para que $f(x) = mx$ seja positiva para $x > 0$, é necessário que a função $f(x)$ seja crescente, ou seja, $m > 0$.

25. $g(x) = 8x - 3$

a) A função g é crescente, pois $a > 0$.

b) O zero da função g é:

$$g(x) = 0$$
$$8x - 3 = 0$$
$$8x = 3$$
$$x = \frac{3}{8}$$

Portanto:

$$g(x) = 0 \text{ para } x = \frac{3}{8}$$
$$g(x) > 0 \text{ para } x > \frac{3}{8}$$
$$g(x) < 0 \text{ para } x < \frac{3}{8}$$

c) Sim.

Como $423 > \frac{3}{8}$ e $g(x) > 0$ para $x > \frac{3}{8}$, temos $g(423) > 0$.

Outra maneira de resolver é calcular o valor de $g(423)$:

$$g(423) = 8 \cdot 423 - 3 = 3\,384 - 3 = 3\,381 > 0$$

Portanto, $g(423) > 0$.

26. Para que $h(x)$ seja sempre negativa ou sempre positiva para todo x real, o gráfico de $h(x)$ não pode intersectar o eixo das abscissas, pois, ao cruzar o eixo x, a função muda de sinal.

Assim, $h(x)$ deve ser uma função constante, então $h(x) = px + q$ é constante e, portanto, $p = 0$.

Logo, $h(x) < 0$ e $h(x) = q$, então $q < 0$.

PÁGINA 244 – ATIVIDADES

27. Para $f(x)$ ser diretamente proporcional a x, o quociente $\frac{f(x)}{x}$ deve ser o mesmo para todos os pares $(x, f(x))$ do quadro.

a)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	15	20	25	30	35

- $x = 1$

  $\frac{f(x)}{x} = \frac{15}{1} = 15$

- $x = 2$

  $\frac{f(x)}{x} = \frac{20}{2} = 10$

Como para o par (1, 15) e (2, 20) a razão $\frac{f(x)}{x}$ é diferente $(15 \neq 10)$, então a $f(x)$ não é diretamente proporcional a x.

b)

x	3	5	7	9	11
$f(x)$	21	35	49	63	77

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{21}{3} = \frac{35}{5} = \frac{49}{7} = \frac{63}{9} = \frac{77}{11} = 7$$

Portanto, $f(x)$ é diretamente proporcional a x.

c)

x	5	8	11	14	17
$f(x)$	45	72	99	126	153

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{45}{5} = \frac{72}{8} = \frac{99}{11} = \frac{126}{14} = \frac{153}{17} = 9$$

Portanto, $f(x)$ é diretamente proporcional a x.

28. a)

Tempo (h)	1	2	3	4	5
Distância percorrida (km)	60	120	180	240	300

b) Para saber se a distância e o tempo são grandezas proporcionais, deve-se calcular o quociente entre eles.

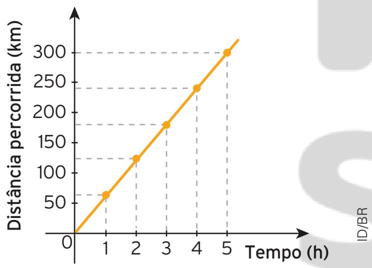
$$\frac{\text{distância}}{\text{tempo}} = \frac{60}{1} = \frac{120}{2} = \frac{180}{3} = \frac{240}{4} = \frac{300}{5} = 60$$

Logo, a distância e o tempo são grandezas diretamente proporcionais.

c) Como são percorridos 60 km a cada hora, tem-se:

$$f(x) = 60x$$

d) De acorto com o quadro do item **a**, tem-se:



PÁGINA 245 – DIVERSIFICANDO

1. A lei de formação da função afim é da forma $y = ax + b$.

Como os pontos (1, 0) e (2, 1) pertencem ao gráfico da função, ao substituir os valores das coordenadas x e y em $y = ax + b$, determina-se para cada ponto uma equação, formando, assim, um sistema de duas equações e duas incógnitas.

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 0 \\ a \cdot 2 + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \quad \cdot(-1) \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a - b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases} +$$

$$a = 1$$

Substituindo $a = 1$ na equação $a + b = 0$, tem-se:

$$a + b = 0$$
$$1 + b = 0$$
$$b = -1$$

Portanto, a lei dessa função é $y = x - 1$. Essa função é crescente, pois $a > 0$.

2. a) Resposta possível:

x	$y = L(x) = 3x + 3$	(x, y)
25	$3 \cdot 25 + 3 = 78$	(25, 78)
50	$3 \cdot 50 + 3 = 153$	(50, 153)
75	$3 \cdot 75 + 3 = 228$	(75, 228)
100	$3 \cdot 100 + 3 = 303$	(100, 303)

b) O lucro L é crescente, pois, à medida que os valores de x aumentam, os valores de $L(x)$ também aumentam.

3. a)

c (m)	1	2	3	4
p (reais)	150	300	450	600

b)
- Sim. Quando o valor de c foi duplicado, o valor de p também duplicou.
- O valor de p triplicou.
- c e p representam grandezas diretamente proporcionais.

4. a) Opção 1: $f(d) = 4 + 1{,}2d$

Opção 2: $g(d) = 2{,}35d$

b) Para visitar o cliente A, $d = 12$.
- Opção 1: $f(12) = 4 + 1{,}2 \cdot 12 = 4 + 14{,}4 = 18{,}4$
- Opção 2: $g(12) = 2{,}35 \cdot 12 = 28{,}2$

Portanto, para ir até o escritório do cliente A, a opção 1 é a mais barata.

c) Para visitar o cliente B, $d = 3{,}3$.
- Opção 1: $f(3{,}3) = 4 + 1{,}2 \cdot 3{,}3 = 4 + 3{,}96 = 7{,}96$
- Opção 2: $g(3{,}3) = 2{,}35 \cdot 3{,}3 \simeq 7{,}76$

Portanto, para ir até o escritório do cliente B, a opção 2 é a mais barata.

PÁGINA 246 – RESOLVENDO PROBLEMAS

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

1. R$ 1700,00

2. R$ 80,00

3. Da quantidade de geladeiras vendidas no mês.

4. Maior, pois no segundo mês ele vendeu 3 geladeiras a mais que no primeiro mês.

5. Como Joaquim vendeu 3 geladeiras a mais no segundo mês e, a cada geladeira vendida, ele ganha R$ 80,00, ele receberá de salário R$ 240,00 a mais que no mês anterior, pois $80 \cdot 3 = 240$.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

1. Seja S, em real, o salário de Joaquim.
- Primeiro mês: $S = 1700 + 80 \cdot 15 = 1700 + 1200 = 2\,900$
- Segundo mês: $S = 1700 + 80 \cdot 18 = 1700 + 1440 = 3\,140$

No primeiro mês de trabalho, Joaquim ganhou R$ 2 900,00 e, no segundo, ele ganhou R$ 3 140,00.

2. Resposta possível:

Quantidade de geladeiras vendidas	Valor recebido pelas geladeiras vendidas	Salário total de Joaquim em real (valor fixo de 1700 reais + + valor recebido pelas geladeiras vendidas
15	1200	$1700 + 1200 = 2\,900$
18	1440	$1700 + 1440 = 3\,140$
19	1520	$1700 + 1520 = 3\,220$
21	1680	$1700 + 1680 = 3\,380$
25	2000	$1700 + 2000 = 3\,700$
27	2160	$1700 + 2160 = 3\,860$
28	2240	$1700 + 2240 = 3\,940$
29	2320	$1700 + 2320 = 4\,020$

3. $S = 1700 + 80g$, em que S representa o salário de Joaquim e g, a quantidade de geladeiras vendidas no mês.

4. $$S = 1700 + 80g$$
$$4\,000 = 1700 + 80g$$
$$2300 = 80g$$
$$g = \frac{2\,300}{80}$$
$$g = 28{,}75$$
Para Joaquim ter um salário de pelo menos R$ 4 000,00, ele deve vender, no mínimo, 29 geladeiras no mês.

REFLEXÃO SOBRE O PROBLEMA

1. Respostas pessoais.
2. Respostas pessoais.
3. Resposta pessoal.
4. Resposta pessoal.
5. Respostas pessoais.
6. Respostas pessoais.

MAIS PROBLEMAS

1. a) Considerando P o valor total a pagar por cada corrida e q a distância percorrida em quilômetros por corrida, tem-se:
$$P(q) = 7{,}50 + 4{,}75q$$
Carlos realizou duas corridas, uma de manhã e outra à tarde, com os seguintes trajetos:

I. Casa $\xrightarrow[9\text{ km}]{}$ trabalho (9 km)

II. Trabalho $\xrightarrow[4\text{ km}]{}$ aeroporto $\xrightarrow[4\text{ km}]{}$ trabalho $\xrightarrow[9\text{ km}]{}$ casa (17 km)

Carlos vai pagar, em cada corrida, o valor da bandeirada mais o valor proporcional à distância percorrida. Substituindo esses valores na lei de formação, tem-se:

I. $P(q) = 7{,}50 + 4{,}75q$
$P(9) = 7{,}50 + 4{,}75 \cdot 9$
$P(9) = 7{,}50 + 42{,}75$
$P(9) = 50{,}25$

II. $P(q) = 7{,}50 + 4{,}75q$
$P(17) = 7{,}50 + 4{,}75 \cdot 17$
$P(17) = 7{,}50 + 80{,}75$
$P(17) = 88{,}25$

Somando as duas corridas:
$$P(9) + P(17) = 50{,}25 + 88{,}25 = 138{,}50$$
Assim, Carlos gastou R$ 138,50 com táxi naquele dia.

b) Considerando o mesmo trajeto, mas com os valores diferenciados, sendo P o valor total a pagar pela corrida e q a quantidade de quilômetros rodados, tem-se:
$$P(q) = 8 + 4{,}5q$$
Carlos vai pagar, em cada corrida, o valor da bandeirada mais o valor proporcional à distância percorrida. Substituindo esses valores na lei de formação, tem-se:

I. $P(q) = 8 + 4{,}5q$
$P(9) = 8 + 4{,}5 \cdot 9$
$P(9) = 8 + 40{,}50$
$P(9) = 48{,}50$

II. $P(q) = 8 + 4{,}5q$
$P(17)= 8 + 4{,}5 \cdot 17$
$P(17) = 8 + 76{,}50$
$P(17) = 84{,}50$

Comparando os valores, constata-se que Carlos teria gasto menos nas duas corridas de táxi do dia anterior, de modo que seria mais interessante contratar o motorista particular para as duas viagens.

2. Uma maneira de resolver esse problema é criar um quadro para organizar as informações:

Número de pessoas (p)	Bufê JantaBem $V_J = 300 + 20p$	Bufê Delícia $V_D = 150 + 30p$
1	$300 + 20 \cdot 1 = 320$	$150 + 30 \cdot 1 = 180$
2	$300 + 20 \cdot 2 = 340$	$150 + 30 \cdot 2 = 210$
3	$300 + 20 \cdot 3 = 360$	$150 + 30 \cdot 3 = 240$
4	$300 + 20 \cdot 4 = 380$	$150 + 30 \cdot 4 = 270$
5	$300 + 20 \cdot 5 = 400$	$150 + 30 \cdot 5 = 300$
6	$300 + 20 \cdot 6 = 420$	$150 + 30 \cdot 6 = 330$
7	$300 + 20 \cdot 7 = 440$	$150 + 30 \cdot 7 = 360$
8	$300 + 20 \cdot 8 = 460$	$150 + 30 \cdot 8 = 390$
9	$300 + 20 \cdot 9 = 480$	$150 + 30 \cdot 9 = 420$
10	$300 + 20 \cdot 10 = 500$	$150 + 30 \cdot 10 = 450$
11	$300 + 20 \cdot 11 = 520$	$150 + 30 \cdot 11 = 480$
12	$300 + 20 \cdot 12 = 540$	$150 + 30 \cdot 12 = 510$
13	$300 + 20 \cdot 13 = 560$	$150 + 30 \cdot 13 = 540$
14	$300 + 20 \cdot 14 = 580$	$150 + 30 \cdot 14 = 570$
15	**$300 + 20 \cdot 15 = 600$**	**$150 + 30 \cdot 15 = 600$**
16	$300 + 20 \cdot 16 = 620$	$150 + 30 \cdot 16 = 630$
17	$300 + 20 \cdot 17 = 640$	$150 + 30 \cdot 17 = 660$
18	$300 + 20 \cdot 18 = 660$	$150 + 30 \cdot 18 = 690$
19	$300 + 20 \cdot 19 = 680$	$150 + 30 \cdot 19 = 720$
20	$300 + 20 \cdot 20 = 700$	$150 + 30 \cdot 20 = 750$
21	$300 + 20 \cdot 21 = 720$	$150 + 30 \cdot 21 = 780$
22	$300 + 20 \cdot 22 = 740$	$150 + 30 \cdot 22 = 810$
23	$300 + 20 \cdot 23 = 760$	$150 + 30 \cdot 23 = 840$
24	$300 + 20 \cdot 24 = 780$	$150 + 30 \cdot 24 = 870$
25	**$300 + 20 \cdot 25 = 800$**	**$150 + 30 \cdot 25 = 900$**
26	$300 + 20 \cdot 26 = 820$	$150 + 30 \cdot 26 = 930$
27	$300 + 20 \cdot 27 = 840$	$150 + 30 \cdot 27 = 960$
28	$300 + 20 \cdot 28 = 860$	$150 + 30 \cdot 28 = 990$
29	$300 + 20 \cdot 29 = 880$	$150 + 30 \cdot 29 = 1\,020$

Observa-se que, até 14 convidados, o bufê Delícia é mais vantajoso; para 15 convidados, o valor a pagar é o mesmo; e, para mais de 15 convidados, o bufê JantaBem tem o melhor valor.

Outra maneira de resolver é igualar as duas expressões que representam o valor cobrado por cada bufê, encontrando a quantidade de convidados cujo valor cobrado por ambos bufês será o mesmo. Assim:
$$V_J = V_D$$
$$300 + 20p = 150 + 30p$$
$$10p = 150$$
$$p = 15$$
Portanto, o valor a pagar será o mesmo para 15 convidados.

Calculando o valor cobrado, por cada bufê, para 14 (15 − 1 = 14) e 16 (15 + 1 = 16) convidados, tem-se:

- para 14 convidados, ou seja, para $p = 14$:
  - no bufê JantaBem:

    $$V_J = 300 + 20p = 300 + 20 \cdot 14 = 300 + 280 = 580$$

  - no bufê Delícia:

    $$V_D = 150 + 30p = 150 + 30 \cdot 14 = 150 + 420 = 570$$

- para 16 convidados, ou seja, para $p = 16$:
  - no bufê JantaBem:

    $$V_J = 300 + 20p = 300 + 20 \cdot 16 = 300 + 320 = 620$$

  - no bufê Delícia:

    $$V_D = 150 + 30p = 150 + 30 \cdot 16 = 150 + 480 = 630$$

Portanto, para até 14 convidados, o bufê Delícia é mais vantajoso; e, para 16 ou mais convidados, o bufê JantaBem tem o melhor valor.

3. **a)** Montando um quadro, tem-se:

Quantidade de horas	Valor pago em reais
1	8
2	$8 + 2 \cdot 1 = 8 + 2 = 10$
3	$8 + 2 \cdot 2 = 8 + 4 = 12$
4	$8 + 2 \cdot 3 = 8 + 6 = 14$
5	$8 + 2 \cdot 4 = 8 + 8 = 16$
6	$8 + 2 \cdot 5 = 8 + 10 = 18$
7	$8 + 2 \cdot 6 = 8 + 12 = 20$
8	$8 + 2 \cdot 7 = 8 + 14 = 22$
9	$8 + 2 \cdot 8 = 8 + 14 = 24$
10	$8 + 2 \cdot 9 = 8 + 18 = 26$
11	$8 + 2 \cdot 10 = 8 + 20 = 28$
12	$8 + 2 \cdot 11 = 8 + 22 = 30$

Observando o quadro, quando Camila fica 8 horas no estacionamento, ela paga R$ 8,00 pela primeira hora mais R$ 14,00 pelas 7 horas adicionais, totalizando R$ 22,00.

Quando ela fica 5 horas, ela paga R$ 8,00 pela primeira hora, mais R$ 8,00 pelas 4 horas adicionais, totalizando R$ 16,00.

b) Considerando V o valor a pagar e h a quantidade de horas que o carro fica no estacionamento, tem-se:

$$V(1) = 8 + 2 \cdot 0$$
$$V(2) = 8 + 2 \cdot 1$$
$$V(3) = 8 + 2 \cdot 2$$
$$V(4) = 8 + 2 \cdot 3$$
$$\vdots$$
$$V(h) = 8 + 2 \cdot (h - 1)$$

PÁGINA 248 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Alternativa **a**.

Escrevendo as equações para as duas situações, tem-se:

Empresa 1: $100\,000n + 350\,000$

Empresa 2: $120\,000n + 150\,000$

Para obter a equação que torna indiferente a escolha de qualquer uma das propostas, deve-se igualar as equações. Então:

$$100\,000n + 350\,000 = 120\,000n + 150\,000$$
$$100n + 350 = 120n + 150$$

2. $f(x) = 3^x$

$$2 \cdot f(-1) + f(1) = 2 \cdot 3^{-1} + 3^1 = 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 = \frac{2}{3} + 3 =$$
$$= \frac{2 + 9}{3} = \frac{11}{3}$$

3. $f(x) = -\frac{x}{3} + 4$; $g(x) = -6 + 5x$;

$h(x) = 13 + \sqrt{2}x$

a) As funções $g(x)$ e $h(x)$ são crescentes, pois em ambos casos $a > 0$.

b) A função $f(x)$ é decrescente, pois $a < 0$.

c)
- $f(12) = -\frac{12}{3} + 4 = -4 + 4 = 0$
- $g(12) = -6 + 5 \cdot 12 = -6 + 60 = 54 \neq 0$
- $h(12) = 13 + \sqrt{2} \cdot 12 = 13 + 12\sqrt{2} \neq 0$

Portanto, 12 é zero de $f(x)$.

d) A função que apresenta um número irracional como coeficiente é a função $h(x)$, com $a = \sqrt{2}$.

4. Resposta pessoal.

5. **a)** O gráfico corta o eixo das abscissas no ponto (0, 0). Logo, o zero da função é 0.

A função é decrescente, pois, à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y diminuem.

b) O gráfico corta o eixo das abscissas no ponto (2, 0). Logo, o zero da função é 2.

A função é crescente, pois, à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y também aumentam.

c) O gráfico da função passa pelos pontos (0, −3) e (1, −1).

Substituindo os pontos (0, −3) e (1, −1) em $f(x) = ax + b$, obtêm-se os coeficientes a e b:

- $$f(0) = -3$$
  $$a \cdot 0 + b = -3$$
  $$b = -3$$
- $$f(1) = -1$$
  $$a \cdot 1 + b = -1$$
  $$a + b = -1$$
  $$a - 3 = -1$$
  $$a = 2$$

Substituindo os valores dos coeficientes a e b na equação da função $f(x)$, tem-se:

$$f(x) = 2x - 3$$

Para determinar o zero da função, deve-se calcular $f(x) = 0$, ou seja:

$$2x - 3 = 0$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$
$$x = 1{,}5$$

Portanto, o zero da função é 1,5.

A função é crescente, pois, à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y também aumentam.

d) O gráfico corta o eixo das abscissas no ponto (2, 0). Logo, o zero da função é 2.

A função é crescente, pois, à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y também aumentam.

e) O gráfico da função $f(x)$ passa pelos pontos (0, 1) e (1, -1). Utilizando a equação genérica da função afim, $f(x) = ax + b$, e substituindo os valores dos pontos, é possível calcular os valores das incógnitas a e b:

- $$f(0) = 1$$
$$a \cdot 0 + b = 1$$
$$b = 1$$

- $$f(1) = -1$$
$$a \cdot 1 + b = -1$$
$$a + 1 = -1$$
$$a = -2$$

Substituindo os valores das incógnitas a e b na equação da função $f(x)$, tem-se:

$$f(x) = -2x + 1$$

Para calcular o zero da função, tem-se $f(x) = 0$, ou seja:

$$-2x + 1 = 0$$
$$-2x = -1$$
$$2x = 1$$
$$x = 0{,}5$$

Portanto, o zero da função é 0,5, e a função é decrescente, pois, à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes de y diminuem.

f) O gráfico corta o eixo das abscissas no ponto (6, 0). Logo, o zero da função é 6.

A função é crescente, pois, à medida que os valores de x aumentam, os valores correspondentes a y também aumentam.

6. Como a função é constante, seu gráfico é uma reta paralela ao eixo x e o coeficiente de x é zero, ou seja, $a = 0$. Assim:

$$\left.\begin{matrix} f(x) = ax + b \\ a = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow f(x) = b$$

Portanto:

$$\left.\begin{matrix} f(x) = b \\ f(1) = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow b = 2$$

Logo, a função não tem zero.

7. a) Para que a função $f(x) = px^2 - 3x + p$ seja uma função afim, o coeficiente do termo x^2 deve ser igual a 0. Assim:

$$p = 0$$

b) Substituindo p por zero na função $f(x)$, tem-se:

$$f(x) = px^2 - 3x + p = 0 \cdot x^2 - 3x + 0 = -3x$$

Determinando o zero da função:

$$f(x) = 0$$
$$-3x = 0$$
$$x = 0$$

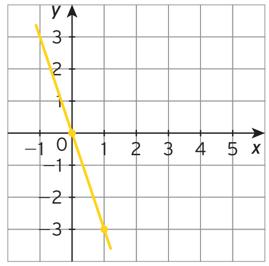
c) A função $f(x) = -3x$ é decrescente e intersecta o eixo x no ponto (0, 0).

Calculando outro ponto pertencente ao gráfico de $f(x)$, tem-se:

$$f(1) = -3 \cdot 1 = -3$$

Portanto, a reta que representa graficamente a função $f(x)$ passa pelos pontos (0, 0) e (1, -3).

Assim, marcam-se os pontos obtidos em um plano cartesiano e traça-se a reta que contém esses dois pontos.



Ilustrações: ID/BR

8. a) Como $g(x)$ é uma função afim, pode-se escrevê-la na forma $g(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

Pelo enunciado, sabe-se que:

$$\begin{cases} g(1{,}5) = 0 \\ g(1) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}5 \cdot a + b = 0 \\ 1 \cdot a + b = 5 \quad \cdot(-1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 1{,}5a + b = 0 \\ -a - b = -5 \end{cases} + \\ \hline 0{,}5a = -5 \\ a = -10 \end{array}$$

Substituindo o valor de a na equação $a + b = 5$, tem-se:

$$-10 + b = 5$$
$$b = 15$$

Portanto, $g(x) = -10x + 15$.

b) $g(-3) = -10 \cdot (-3) + 15 = 30 + 15 = 45$

c) $$g(x) = 20$$
$$-10x + 15 = 20$$
$$-10x = 5$$
$$x = \frac{5}{-10}$$
$$x = -0{,}5$$

d) A função $g(x) = -10x + 15$ é decrescente, pois $a < 0$.

9. $h(x) = (x + 1)^2 - (x - 1)^2$

a) • Para $x = 0$, tem-se:

$$h(0) = (0 + 1)^2 - (0 - 1)^2 = 1^2 - (-1)^2 = 1 - 1 = 0$$

• Para $x = 1$, tem-se:

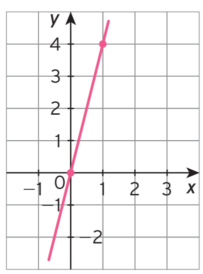
$$h(1) = (1 + 1)^2 - (1 - 1)^2 = 2^2 - 0^2 = 4 - 0 = 4$$

b) $h(x) = (x + 1)^2 - (x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) =$
$= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x$

Portanto, $h(x) = 4x$ é uma função afim.

c) Na função $h(x) = 4x$, os coeficientes são: $a = 4$; $b = 0$.

d) De acordo com o item **a**, a reta que representa a função $h(x)$ passa pelos pontos (0, 0) e (1, 4). Assim, marcam-se esses dois pontos em um plano cartesiano e traça-se a reta que os contém.



e) A função $h(x) = 4x$ é crescente, pois $a > 0$.

10. a) O ponto de intersecção do gráfico com o eixo y.

b) Se a função é crescente ($a > 0$), decrescente ($a < 0$), ou constante ($a = 0$).

c) O ponto de intersecção do gráfico com o eixo x.

11. $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = x + 12$

- Resolução algébrica

Ao igualar as duas funções, determina-se a abscissa do ponto de intersecção das duas funções:

$$f(x) = g(x)$$
$$2x - 3 = x + 12$$
$$x = 15$$

Substituindo a abscissa do ponto de intersecção das funções em uma delas, obtém-se a ordenada deste ponto.

$$g(15) = 15 + 12 = 27$$

Portanto, o ponto de intersecção das duas funções é (15, 27).

- Resolução geométrica

Representa-se o gráfico das duas funções em um mesmo plano cartesiano e descobre-se o par ordenado que representa o ponto de encontro dessas funções.

A função $f(x) = 2x - 3$ é crescente, pois $a = 2 > 0$.

Logo, o zero da função $f(x)$ é dado por:

$$f(x) = 0$$
$$2x - 3 = 0$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$

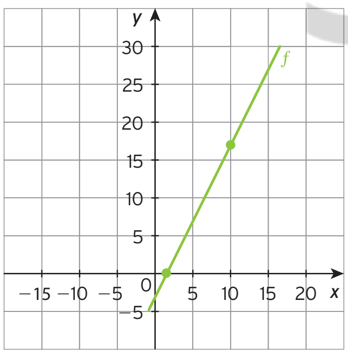
Portanto, a reta da função $f(x)$ contém o ponto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

São necessários dois pontos para traçar a reta, logo, pode-se calcular o valor de $f(10)$, por exemplo.

$$f(10) = 2 \cdot 10 - 3 = 20 - 3 = 17$$

Logo, a reta da função $f(x)$ também contém o ponto (10, 17).

Assim, marcam-se em um plano cartesiano os pontos obtidos e traça-se a reta que passa por eles.



Agora, faz-se o mesmo procedimento para a função $g(x)$.

A função $g(x) = x + 12$ é crescente, pois $a = 1 > 0$.

O zero da função g é:

$$g(x) = 0$$
$$x + 12 = 0$$
$$x = -12$$

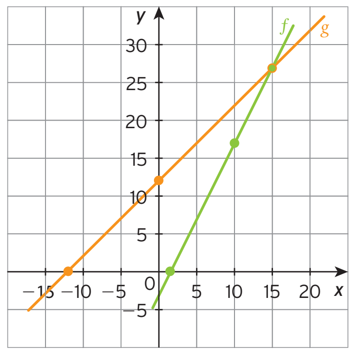
Portanto, a reta da função $g(x)$ contém o ponto $(-12, 0)$.

São necessários dois pontos para traçar a reta, logo, pode-se calcular o valor de $g(0)$.

$$g(0) = 0 + 12 = 12$$

Portanto, a reta da função $g(x)$ contém o ponto (0, 12).

Assim, marcam-se, no mesmo plano cartesiano construído para a função $f(x)$, os pontos $(-12, 0)$ e $(0, 12)$ e traça-se a reta que representa a função $g(x) = x + 12$.



Ilustrações: ID/BR

Logo, os gráficos se cruzam no ponto (15, 27).

12. **I.** $f(x) = \frac{1}{2}x$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(2) = 1 \\ a > 0 \rightarrow f(x) \text{ é crescente} \end{array}\right\} \text{gráfico } \mathbf{b}$$

Estudo do sinal: $a > 0$

$$f(x) \text{ é crescente} \rightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x = 0 \\ f(x) > 0, \text{ para } x > 0 \\ f(x) < 0, \text{ para } x < 0 \end{cases}$$

II. $f(x) = -3x$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -3 \\ f(0) = 0 \\ a < 0 \rightarrow f(x) \text{ é decrescente} \end{array}\right\} \text{gráfico } \mathbf{d}$$

Estudo do sinal: $a < 0$

$$f(x) \text{ é decrescente} \rightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x = 0 \\ f(x) > 0, \text{ para } x < 0 \\ f(x) < 0, \text{ para } x > 0 \end{cases}$$

III. $f(x) = -x$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f(0) = 0 \\ a < 0 \rightarrow f(x) \text{ é decrescente} \end{array}\right\} \text{gráfico } \mathbf{a}$$

Estudo do sinal: $a < 0$

$$f(x) \text{ é decrescente} \rightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x = 0 \\ f(x) > 0, \text{ para } x < 0 \\ f(x) < 0, \text{ para } x > 0 \end{cases}$$

IV. $f(x) = 5x$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 5 \\ f(0) = 0 \\ a > 0 \rightarrow f(x) \text{ é crescente} \end{array}\right\} \text{gráfico } \mathbf{c}$$

Estudo do sinal: $a > 0$

$$f(x) \text{ é crescente} \rightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \text{ para } x = 0 \\ f(x) > 0, \text{ para } x > 0 \\ f(x) < 0, \text{ para } x < 0 \end{cases}$$

Portanto, a-III; b-I; c-IV; d-II.

UNIDADE 7 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

CAPÍTULO 1 – PROBABILIDADE

PÁGINA 256 – ATIVIDADES

1. a) Números pares de 1 a 30:2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30.
Portanto, há 15 números pares de 1 a 30, e a probabilidade de o número sorteado ser par é $\frac{15}{30}$ ou 50%.

b) Múltiplos de 3 de 1 a 30: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.
Portanto, há 10 números múltiplos de 3 de 1 a 30, e a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 3 é $\frac{10}{30}$ ou, aproximadamente, 33,3%.

c) Múltiplos de 6 de 1 a 30: 6, 12, 18, 24, 30.
Portanto, há 5 números múltiplos de 6 de 1 a 30, e a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 6 é $\frac{5}{30}$ ou, aproximadamente, 16,6%.

d) De acordo com o item **a**, há 15 números pares de 1 a 30 (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30).
Desses números, apenas 5 são múltiplos de 6 (6, 12, 18, 24, 30).
Portanto, a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 6, sabendo que ele é par, é $\frac{5}{15}$ ou, aproximadamente, 33,3%.

2. a) Organizando os dados desse problema em um quadro, tem-se:

	Meninas	Meninos	Total
Manhã	300	200	500
Tarde	50	50	100
Noite	100	100	200
Total	450	350	800

A escola tem 800 estudantes, 100 deles estudam à tarde. Portanto, a probabilidade de escolher um estudante dessa escola ao acaso e ser do período da tarde é $\frac{100}{800}$ ou 0,125%.

b) O total de meninas dessa escola é 450. O total de meninas que estudam no período da tarde é 50. Portanto, escolhido um estudante ao acaso, a probabilidade de ele estudar à tarde, sabendo que é menina é $\frac{50}{450}$ ou, aproximadamente 11%.

PÁGINA 257 – DIVERSIFICANDO

1. a) Como há 3 bolas vermelhas, há 3 resultados favoráveis.

b) Há 3 bolas vermelhas em um total de 10 bolas. A probabilidade de sair uma bola vermelha é $\frac{3}{10}$ ou 30%.

c) Há 5 bolas amarelas em um total de 10 bolas. A probabilidade de sair uma bola amarela é $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ou 50%.

d) Há 7 bolas não vermelhas em um total de 10 bolas. A probabilidade de não sair uma bola vermelha é $\frac{7}{10}$ ou 70%.

2. a) Há 15 números na cartela de João em um total de 90 números. A probabilidade de sair um número da cartela de João é $\frac{15}{90}$ ou, aproximadamente, 16,7%.

b) Há 75 números que não estão na cartela de João em um total de 90 números. A probabilidade de sair um número que não esteja na cartela de João é $\frac{75}{90}$ ou, aproximadamente, 83,3%.

3. Pode-se representar, por meio de pares ordenados, as bolas das duas urnas. Considerando as bolas da urna que contém 3 bolas idênticas o primeiro elemento do par e as bolas da urna que contém 5 bolas idênticas o segundo elemento do par, tem-se:

(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5)
(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5)
(3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5)

Total de elementos do evento: 15

a) Observando os pares ordenados, apenas os seguintes pares têm soma dos pontos maior que 4: (1, 4); (1, 5); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5). Portanto, a probabilidade de isso acontecer é $\frac{9}{15}$ ou 60%.

b) Observando os pares ordenados, não existe nenhum par em que a soma dos pontos seja zero. Portanto, a probabilidade de isso acontecer é 0 ou 0%.

c) Observando os pares ordenados, apenas o par (1, 1) tem soma dos pontos menor ou igual a 2. Portanto, a probabilidade de isso acontecer é $\frac{1}{15}$ ou, aproximadamente, 6,7%.

d) Observando os pares ordenados, todos eles têm soma maior ou igual a 2 e menor ou igual a 8. Portanto, a probabilidade de isso acontecer é 1 ou 100%.

4. a) Pode-se obter os seguintes resultados:

		Moeda 2	
		cara	coroa
Moeda 1	cara	(cara, cara)	(cara, coroa)
	coroa	(coroa, cara)	(coroa, coroa)

Os resultados possíveis são:

(cara, cara), (coroa, cara), (cara, coroa) e (coroa, coroa)

b) Ao lançar duas moedas simultaneamente, tem-se quatro resultados possíveis.

c) Observando o quadro do item **a**, verifica-se que os resultados favoráveis à ocorrência do evento *A* "sair pelo menos uma cara" são:

$A = \{(\text{cara, cara}); (\text{cara, coroa}); (\text{coroa, cara})\}$

d) Observando o quadro do item **a**, verifica-se que os resultados favoráveis à ocorrência do evento *B* "saírem faces iguais nas duas moedas" são:

$B = \{(\text{cara, cara}); (\text{coroa, coroa})\}$

e) Considerando que o evento *A* (sair pelo menos uma cara) já aconteceu, tem-se as seguintes possibilidades para a ocorrência do evento *B*: (cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara). Desses resultados, o único resultado favorável ao evento *B* é (cara, cara). Portanto, dos três resultados possíveis, um é favorável ao evento *B*. Logo, a probabilidade de ocorrência do evento *B*, dado que o evento *A* já aconteceu, é $\frac{1}{3}$ ou, aproximadamente, 33,3%.

f) Para descobrir se os eventos *A* e *B* são dependentes ou independentes, é preciso considerar o evento *B* de duas maneiras diferentes: o evento *B* depende do evento *A*; e o evento *B* não depende do evento *A*. Se as probabilidades nesses dois casos forem iguais, os eventos são independentes; caso contrário, os eventos são dependentes.
No item **e**, já foi determinada a probabilidade de ocorrência do evento *B*, dado que o evento *A* já aconteceu, que é $\frac{1}{3}$; então, basta descobrir qual é a probabilidade de ocorrência do evento *B* sem levar em conta o evento *A*.
Para descobrir qual é essa probabilidade, primeiro encontra-se o espaço amostral desses eventos:

$S = \{(\text{cara, cara}); (\text{cara, coroa}); (\text{coroa, cara}); (\text{coroa, coroa})\}$

Os resultados favoráveis ao evento B sem levar em conta o evento A são (cara, cara) e (coroa, coroa).
Portanto, dos quatro resultados possíveis, dois são favoráveis ao evento B sem levar em conta o evento A. Logo, a probabilidade de ocorrência do evento B é $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{2}{4} = \frac{1}{2}\right)$.

Como as probabilidades são diferentes $\left(\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}\right)$, os eventos A e B são dependentes.

5. a) Total de máquinas usadas: 45 (15 + 30 = 45)
Total de máquinas usadas da marca Max: 15

Portanto, a probabilidade de um empregado pegar uma das máquinas usadas da marca Max é $\frac{15}{45}$ ou, aproximadamente, 33,3%.

b) Considere o evento A, "escolher uma máquina usada", e o evento B, "escolher uma máquina da marca Max".

De acordo com o item **a**, a probabilidade de escolher uma máquina usada da marca Max é $\frac{15}{45}$.

Agora, a probabilidade de escolher uma máquina usada sem levar em conta a marca é $\frac{45}{100}$.

Como as probabilidades são diferentes $\left(\frac{15}{45} \neq \frac{45}{100}\right)$, os eventos não são independentes.

6. a) Como a soma de dois números pares (ou dois números ímpares) resulta em um número par, a probabilidade de isso acontecer é 1 ou 100%.

b) Se, em um dos dados, a face voltada para cima é a de número 3, e a soma dos números dos dados deve ser ímpar, então, no segundo dado, só poderão aparecer os números 2, 4 ou 6. Logo, a probabilidade de isso acontecer é $\frac{3}{6}$ ou 50%.

7. a) Como há duas bolas pretas, são 2 as possibilidades. Como a bola retirada na primeira vez é recolocada na urna, continuam sendo 2 possibilidades.

b) Há 5 bolas na urna, sendo 3 azuis. Então, a probabilidade de sair uma bola azul na primeira retirada é $\frac{3}{5}$ ou 60%.

c) Como cada bola retirada é recolocada na urna, continua-se com 5 bolas na urna, sendo 2 pretas. Logo, a probabilidade de sair uma bola preta na segunda retirada é $\frac{2}{5}$ ou 40%.

d) Saber que na primeira retirada saiu uma bola azul não interfere na probabilidade de se retirar uma outra bola, seja ela preta, seja ela azul, na segunda retirada. Como há 5 bolas, sendo 2 pretas, a probabilidade de sair uma bola preta na segunda retirada é $\frac{2}{5}$ ou 40%.

e) Para que os eventos sejam independentes, deve-se ter:

$$P(B) = P(B|A)$$

Considere o evento A "sair uma bola azul na primeira retirada" e o evento B "sair uma bola preta na segunda retirada".
O espaço amostral desses eventos, considerando que a bola azul foi retirada antes da bola preta, é:

$$S = \{(\text{azul, azul}); (\text{azul, preta})\}$$

Desses resultados, os favoráveis ao evento B é (azul, preta). Portanto, dos dois resultados possíveis, um é favorável ao evento B. Logo, a probabilidade de ocorrência do evento B sabendo que o evento A já aconteceu, é:

$$P(B|A) = \frac{1}{2} \text{ ou } 50\%$$

Os resultados possíveis, nas duas extrações, com reposição, são (azul, azul), (azul, preta), (preta, azul) e (preta, preta).
Desses, apenas dois resultados são favoráveis à ocorrência do evento B "sair uma bola preta na segunda retirada": (azul, preta) e (preta, preta). Portanto, a probabilidade de ocorrência do evento B é $\frac{2}{4}$ ou 50%.
Como $P(B) = P(B|A)$, os eventos são independentes.

CAPÍTULO 2 – ESTATÍSTICA

PÁGINA 262 – ATIVIDADE

1. a) Inicialmente, deve-se colocar as medidas em ordem crescente.
150, 151, 155, 155, 155, 155, 155, 155, 156, 156, 156, 157, 157, 160, 160, 160, 161, 161, 161, 161, 161, 161, 161, 161, 162, 162, 164, 164, 164, 164, 165, 165, 167, 167, 167, 169, 169, 170, 170, 170

- $MA = \frac{150 + 151 + 6 \cdot 155 + 3 \cdot 156 + 2 \cdot 157 + 3 \cdot 160 + 8 \cdot 161 + 2 \cdot 162 + 4 \cdot 164 + 2 \cdot 165 + 3 \cdot 167 + 2 \cdot 169 + 3 \cdot 170}{40} =$

$= \frac{150 + 151 + 930 + 468 + 314 + 480 + 1\,288 + 324 + 656 + 330 + 501 + 338 + 510}{40} = \frac{6\,440}{40} = 161$

Logo, a média aritmética das alturas dos estudantes é 161 cm.

- A altura que apareceu com mais frequência foi 161 cm. Portanto, a moda das alturas dos estudantes é 161 cm.
- A mediana é o valor que ocupa a posição central do grupo de estudantes. Como há 40 estudantes, os termos centrais são os que ocupam as posições 20 e 21. Nesse caso, a medida é a média aritmética de 161 e 161.

$$MA = \frac{161 + 161}{2} = \frac{322}{2} = 161$$

Portanto, a mediana das alturas dos estudantes é 161 cm.

b) • Amplitude

Para calcular a amplitude, deve-se subtrair a menor altura da maior altura, ou seja:

$$A = 170 - 150 = 20$$

Portanto, a amplitude das alturas dos estudantes é 20 cm.

- Variância

Para determinar a variância das alturas dos estudantes, elevamos ao quadrado cada desvio e, depois, calcularmos a média aritmética.

Para calcular os desvios, determina-se a diferença entre cada uma das alturas dos estudantes e a média aritmética das alturas (161 cm).

$D(150) = 150 - 161 = -11$	$D(161) = 161 - 161 = 0$	$D(156) = 156 - 161 = -5$	$D(165) = 165 - 161 = 4$
$D(151) = 151 - 161 = -10$	$D(161) = 161 - 161 = 0$	$D(157) = 157 - 161 = -4$	$D(165) = 165 - 161 = 4$
$D(155) = 155 - 161 = -6$	$D(161) = 161 - 161 = 0$	$D(157) = 157 - 161 = -4$	$D(167) = 167 - 161 = 6$
$D(155) = 155 - 161 = -6$	$D(161) = 161 - 161 = 0$	$D(160) = 160 - 161 = -1$	$D(167) = 167 - 161 = 6$
$D(155) = 155 - 161 = -6$	$D(162) = 162 - 161 = 1$	$D(160) = 160 - 161 = -1$	$D(167) = 167 - 161 = 6$
$D(155) = 155 - 161 = -6$	$D(162) = 162 - 161 = 1$	$D(160) = 160 - 161 = -1$	$D(169) = 169 - 161 = 8$
$D(155) = 155 - 161 = -6$	$D(164) = 164 - 161 = 3$	$D(161) = 161 - 161 = 0$	$D(169) = 169 - 161 = 8$
$D(155) = 155 - 161 = -6$	$D(164) = 164 - 161 = 3$	$D(161) = 161 - 161 = 0$	$D(170) = 170 - 161 = 9$
$D(156) = 156 - 161 = -5$	$D(164) = 164 - 161 = 3$	$D(161) = 161 - 161 = 0$	$D(170) = 170 - 161 = 9$
$D(156) = 156 - 161 = -5$	$D(164) = 164 - 161 = 3$	$D(161) = 161 - 161 = 0$	$D(170) = 170 - 161 = 9$

Portanto, a variância das alturas dos estudantes é:

$$V = \frac{(-11)^2 + (-10)^2 + 6 \cdot (-6)^2 + 3 \cdot (-5)^2 + 2 \cdot (-4)^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 6^2 + 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 9^2}{40} =$$

$$= \frac{121 + 100 + 6 \cdot 36 + 3 \cdot 25 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 36 + 2 \cdot 64 + 3 \cdot 81}{40} =$$

$$= \frac{121 + 100 + 216 + 75 + 32 + 3 + 0 + 2 + 36 + 32 + 108 + 128 + 243}{40} = \frac{1\,096}{40} = 27{,}35$$

- Desvio-padrão

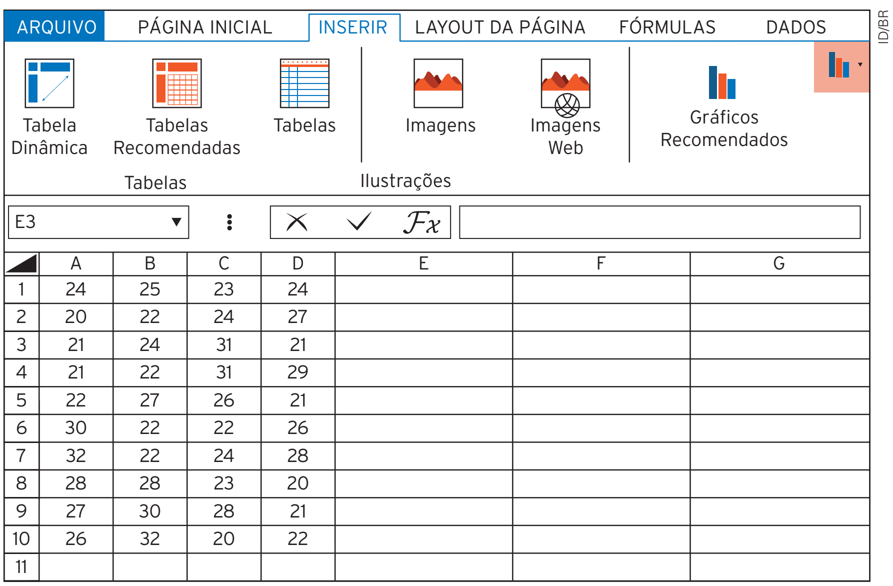
O desvio padrão das alturas dos estudantes corresponde à raiz quadrada da variância. Então:

$$DP = \sqrt{27{,}35} \simeq 5{,}23$$

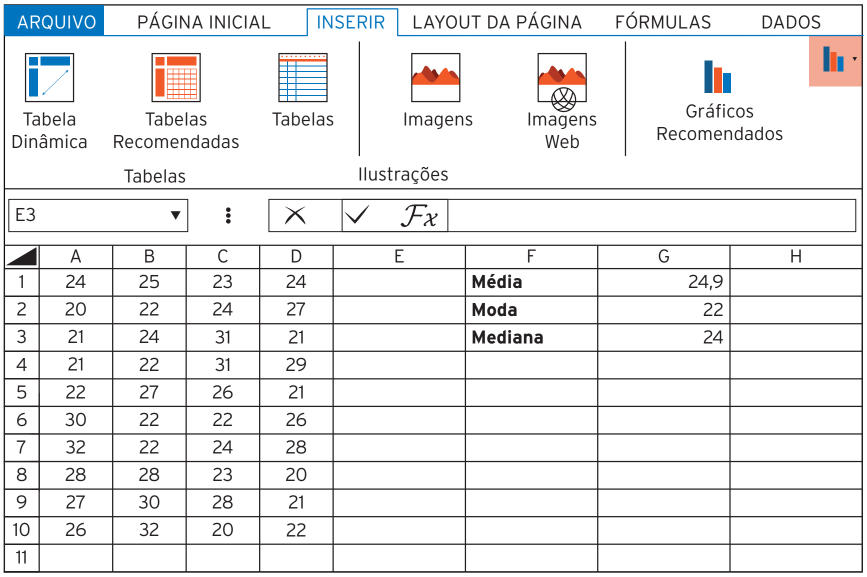
c) Resposta pessoal.

PÁGINA 265 – ATIVIDADE

2. a)

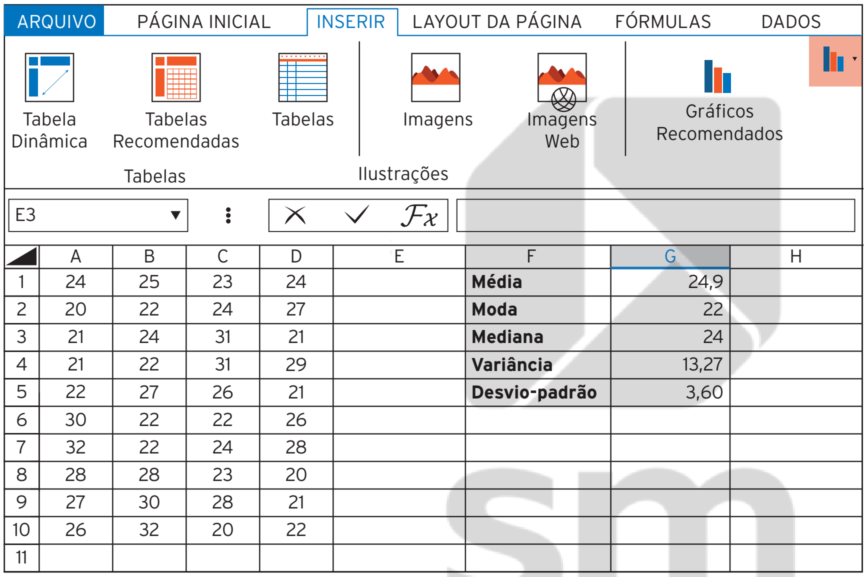


	A	B	C	D	E	F	G
1	24	25	23	24			
2	20	22	24	27			
3	21	24	31	21			
4	21	22	31	29			
5	22	27	26	21			
6	30	22	22	26			
7	32	22	24	28			
8	28	28	23	20			
9	27	30	28	21			
10	26	32	20	22			
11							

b) 

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	24	25	23	24		**Média**	24,9	
2	20	22	24	27		**Moda**	22	
3	21	24	31	21		**Mediana**	24	
4	21	22	31	29				
5	22	27	26	21				
6	30	22	22	26				
7	32	22	24	28				
8	28	28	23	20				
9	27	30	28	21				
10	26	32	20	22				
11								

Ilustrações: ID/BR

c) 

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	24	25	23	24		**Média**	24,9	
2	20	22	24	27		**Moda**	22	
3	21	24	31	21		**Mediana**	24	
4	21	22	31	29		**Variância**	13,27	
5	22	27	26	21		**Desvio-padrão**	3,60	
6	30	22	22	26				
7	32	22	24	28				
8	28	28	23	20				
9	27	30	28	21				
10	26	32	20	22				
11								

d) Resposta pessoal.

PÁGINA 270 – ATIVIDADES

3. a) De acordo com o gráfico, tem-se:

$$182 + 148 + 62 + 30 + 28 + 12 + 10 = 472$$

Portanto, foram entrevistados 472 estudantes.

b) • Média

$$MA = \frac{182 \cdot 1 + 148 \cdot 2 + 62 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 28 \cdot 5 + 12 \cdot 6 + 10 \cdot 7}{472} = \frac{182 + 296 + 186 + 120 + 140 + 72 + 70}{472} =$$

$$= \frac{1066}{472} \simeq 2{,}26$$

Portanto, a média de horas semanais estudadas é, aproximadamente, 2,26 horas.

• Moda

Observando o gráfico, verifica-se que o número de horas semanais estudadas mais frequente é 1, pois tem-se a maior parte dos estudantes pesquisados (182) nessa situação.

Portanto, a moda das horas semanais estudadas é 1 hora.

• Mediana

Como a mediana é o valor que ocupa a posição central dos dados apresentados, colocando-se o número de horas semanais estudadas em ordem crescente, por exemplo, obtém-se:

- 182 vezes o número 1;
- 148 vezes o número 2;
- 62 vezes o número 3;
- 30 vezes o número 4;
- 28 vezes o número 5;
- 12 vezes o número 6;
- 10 vezes o número 7.

Como o total de estudantes é 472, metade desses estudantes corresponde a 236 $\left(\frac{472}{2} = 236\right)$.

Portanto, a mediana ocupa a posição que indica a média aritmética entre as posições 236 e 237. Como o número de horas semanais 2 representa essas duas posições, a mediana dessas horas é 2.

c) $\dfrac{182 + 148}{472} = \dfrac{330}{472} \simeq 0{,}7$

Portanto, aproximadamente 70% dos estudantes estudam menos que a média.

4. a)

Quantidade de estudantes na enfermaria	1	2	3	4	5
Quantidade de dias no período	1	3	2	1	3

b) $MA = \dfrac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3}{10} = \dfrac{1 + 6 + 6 + 4 + 15}{10} = \dfrac{32}{10} = 3{,}2$

Logo, o número médio de estudantes que procuraram a enfermaria, por dia, foi 3,2.

c) • Mediana

Observando o quadro dado, tem-se a seguinte quantidade de estudantes, organizada em ordem crescente.

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 2 \quad 2}_{\text{1 termo}} \quad \underbrace{3}_{5^{\text{a}}\text{ posição}} \quad \underbrace{3}_{6^{\text{a}}\text{ posição}} \quad \underbrace{4 \quad 5 \quad 5 \quad 5}_{\text{4 termos}}$$

Como há 10 termos, os termos centrais são os que ocupam as posições 5 e 6. Logo, nesse caso, a mediana é a média aritmética de 3 e 3.

$$Md = \frac{3 + 3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Portanto, a mediana do número de estudantes que procuraram a enfermaria, por dia, é 3.

• Moda

Observando o conjunto de dados, notamos que os valores mais frequentes são 2 e 5, ambos aparecem três vezes.

5. a) $MA = \dfrac{17 \cdot 2\,000 + 7 \cdot 3\,600 + 4 \cdot 4\,000 + 2 \cdot 6\,000}{30} = \dfrac{34\,000 + 25\,200 + 16\,000 + 12\,000}{30} = \dfrac{87\,200}{30} \simeq 2\,906{,}67$

Portanto, a média salarial do total de funcionários é, aproximadamente, R$ 2 906,67. Nesse caso, a média não é representativa, pois a maioria dos funcionários ganha um salário abaixo da média (R$ 2 000,00).

b) Atualmente, tem-se um total de 30 funcionários, o que significa que, depois de colocados em ordem crescente por salário, os funcionários que ocupam as posições 15 e 16 recebem R$ 2 000,00 por mês.

Para que o novo valor das posições 15 e 16 passe para R$ 3 600,00, é necessário que três funcionários que recebem R$ 2 000,00 sejam promovidos, pois, dessa maneira, haverá 14 funcionários que receberão R$ 2 000,00 e 10 funcionários que receberão R$ 3 600,00.

6. a) • Média das velocidades

$MA = \dfrac{3 \cdot 20 + 20 \cdot 30 + 42 \cdot 40 + 15 \cdot 50 + 10 \cdot 60 + 5 \cdot 70 + 5 \cdot 80}{100} = \dfrac{60 + 600 + 1\,680 + 750 + 600 + 350 + 400}{100} =$

$= \dfrac{4\,440}{100} = 44{,}4$

Portanto, a média das velocidades é 44,4 km/h.

• Mediana das velocidades

De acordo com o gráfico, os dados já estão em ordem crescente. Para encontrar a mediana das velocidades, é necessário localizar a posição central. Como tem-se 100 veículos, a posição central é a média aritmética entre as posições 50 e 51.

Na primeira faixa (20 km/h), tem-se 3 veículos que ocupam as posições 1, 2 e 3. Na segunda faixa (30 km/h), tem-se 20 veículos que ocupam as posições 4 a 23. Na terceira faixa (40 km/h), tem-se 42 veículos que ocupam as posições 24 a 63.

Logo, as posições 50 e 51 estão na terceira faixa. Portanto, a mediana das velocidades dos veículos que trafegam nessa avenida é 40 km/h.

b) O limite de velocidade é 45 km/h. Observando o gráfico, verificamos que 65 motoristas (3 + 20 + 42 = 65) estão dentro do limite.

Dos 100 veículos, 65 respeitam a velocidade máxima permitida $\left(\dfrac{65}{100} = 65\%\right)$, o que significa que a maioria deles respeitou o limite de velocidade.

7. a) • Média

$MA = \dfrac{3 + 6 + 14 + 7 + 8 + 5 + 2 + 6 + 4 + 5 + 2 + 0 + 2 + 4 + 5 + 4 + 16 + 5 + 6 + 8 + 11 + 10}{22} =$

$= \dfrac{133}{22} \simeq 6$

• Moda

Observando o levantamento diário da quantidade de faltas em um mês, o número de faltas que mais se repetiu foi 5. Portanto, a moda desses dados é 5.

b)

Dia da semana	Quantidade de estudantes faltantes
Segunda-feira	38
Terça-feira	22
Quarta-feira	13
Quinta-feira	31
Sexta-feira	29

Média do número de faltas por dia da semana

- Segunda-feira: $MA = \dfrac{3 + 6 + 14 + 7 + 8}{5} = \dfrac{38}{5} = 7{,}6$
- Terça-feira: $MA = \dfrac{5 + 2 + 6 + 4 + 5}{5} = \dfrac{22}{5} = 4{,}4$
- Quarta-feira: $MA = \dfrac{2 + 0 + 2 + 4 + 5}{5} = \dfrac{13}{5} = 2{,}6$
- Quinta-feira: $MA = \dfrac{4 + 16 + 5 + 6}{4} = \dfrac{31}{4} = 7{,}75$
- Sexta-feira: $MA = \dfrac{8 + 11 + 10}{3} = \dfrac{29}{3} \simeq 9{,}67$

PÁGINA 273 – ATIVIDADE

8. **a)** O ano. A porcentagem da população brasileira de 6 a 14 anos que frequentava ou que já tinha concluído o Ensino Fundamental.

b) Não, pois o eixo horizontal não começa no zero, ou seja, nele está faltando o símbolo de supressão (⁄\/\⁄).

PÁGINA 275 – DESCUBRA MAIS

PARA CONCLUIR

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

PÁGINAS 276 – DIVERSIFICANDO

1. **a)** Tupi.

b) Não, pois ficou sempre em torno de 200 mil barris por dia.

2. **a)** Média

$$MA = \frac{15 \cdot 60 + 13 \cdot 65 + 5 \cdot 70 + 12 \cdot 75 + 10 \cdot 80}{55} =$$

$$= \frac{900 + 845 + 350 + 900 + 800}{55} = \frac{3\,795}{55} = 69$$

Portanto, a média dessa distribuição é 69 anos.

b) A moda dessa distribuição é 60 anos, pois é a idade que mais se repete.

Há 55 idosos, então:

$$\frac{55}{2} = 27{,}5$$

Como há 15 idosos com 60 anos e 13 idosos com 65 anos, o número 27,5 está na classe dos 65. Logo, a mediana dessa distribuição é 65 anos.

c) Como a média é 69 anos, 27 idosos (5 + 12 + 10 = 27) estão acima da média e 28 idosos (15 + 13 = 28) estão abaixo da média.

3. **a)** De acordo com o enunciado, em 10 anos (17 − 7 = 10), o adolescente leu 72 livros. Mas, de acordo com os dados da notícia (o brasileiro lê, em média, 5 livros por ano), esse adolescente teria lido 50 livros (5 · 10 = 50). Como ele leu bem mais que essa quantidade de livros, pode-se dizer que esse adolescente está acima da média informada.

b) $MA = \dfrac{72}{10} = 7{,}2$

Portanto, a média de leitura desse adolescente é 7,2 livros por ano.

c) $7{,}2 - 5 = 2{,}2$

A diferença entre a média desse adolescente e a média do brasileiro informada na pesquisa é 2,2 livros.

4. **a)** $MA = \dfrac{2{,}5 + 3{,}2 + 1{,}7 + 2{,}8 + 3{,}1}{5} = \dfrac{13{,}3}{5} = 2{,}66$

Portanto, a massa média dos peixes pescados é 2,66 kg.

b) $A = 3{,}2 - 1{,}7 = 1{,}5$

Portanto, a amplitude é 1,5 kg.

c) $D(2{,}5) = 2{,}5 - 2{,}66 = -0{,}16$

$D(3{,}2) = 3{,}2 - 2{,}66 = 0{,}54$

$D(1{,}7) = 1{,}7 - 2{,}66 = -\,0{,}96$

$D(2{,}8) = 2{,}8 - 2{,}66 = 0{,}14$

$D(3{,}1) = 3{,}1 - 2{,}66 = 0{,}44$

d) Para calcular o desvio-padrão, é necessário, em primeiro lugar, calcular a variância.

$$V = \frac{(-0{,}16)^2 + (0{,}54)^2 + (-0{,}96)^2 + (0{,}14)^2 + (0{,}44)^2}{5} =$$

$$= \frac{0{,}0256 + 0{,}2916 + 0{,}9216 + 0{,}0196 + 0{,}1936}{5} =$$

$$= \frac{1{,}452}{5} = 0{,}2904$$

Portanto, o desvio-padrão é dado por:

$$DP = \sqrt{0{,}2904} \simeq 0{,}54$$

5. **a)** De acordo com o gráfico, tem-se:

$$67\% \text{ de } 2\,300 = 0{,}67 \cdot 2\,300 = 1\,541$$

Assim, 1 541 pais responderam “sim”.

b) De acordo com o gráfico, tem-se:

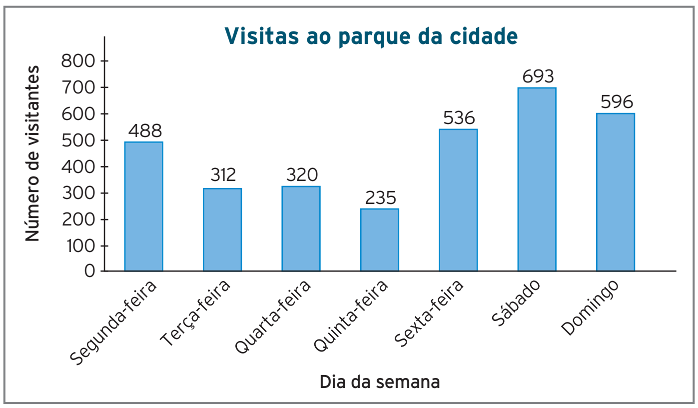
$$8\% \text{ de } 2\,300 = 0{,}08 \cdot 2\,300 = 184$$

Assim, 184 pais responderam “não sei avaliar”.

c) Respostas pessoais.

d) Resposta pessoal.

6. **a)** Uma resolução possível seria copiar a tabela em uma planilha eletrônica, depois, selecionar os dados e clicar em “Inserir gráfico”. Escolhendo o gráfico de colunas, tem-se:



ID/BR

Dados fornecidos pela administração do parque.

b) $MA = \dfrac{488 + 312 + 320 + 235 + 536 + 693 + 596}{7} =$

$= \dfrac{3\,180}{7} \simeq 454{,}29$

O número médio de visitas por dia é, aproximadamente, 454,29.

c) Como a média é, aproximadamente, 454,29, pode-se observar no gráfico que, na terça-feira (312), na quarta-feira (320) e na quinta-feira (235), os números de visitantes estão abaixo desse valor.

7. a) Respostas pessoais. Faltam o título do gráfico e a escala no eixo vertical.
b) Sim, são 8 divisões e a última representa 40 *notebooks* vendidos. Pode-se, então, dividir 40 por 8, obtendo 5, que representa a quantidade de *notebooks* vendidos em cada intervalo. Logo, os valores aumentam de 5 em 5.
c) Não, pois nesse semestre foram vendidos 175 *notebooks* (20 + + 25 + 20 + 35 + 35 + 40 = 175).
d) $MA = \frac{20 + 25 + 20 + 35 + 35 + 40}{6} = \frac{175}{6} \simeq 29{,}17$

Portanto, a média mensal de vendas nessa loja é, aproximadamente, 29,17 *notebooks*.

PÁGINA 278 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. O salário de Luciana é R$ 2 000,00. Considerando que a inflação é 10% ao ano e um produto que custe R$ 10,00 o quilograma, ela conseguiria comprar 200 kg desse produto, pois $\frac{2\,000}{10} = 200$.

a) Cenário 1

O produto custava R$ 10,00 e, após 1 ano com inflação de 10%, passou a custar R$ 11,00 $\left(10\% \text{ de } 10 = \frac{10}{100} \cdot 10 = 1;\ 10 + 1 = 11\right)$.

Agora, Luciana pode comprar, aproximadamente, 181,82 kg $\left(\frac{2\,000}{11} \simeq 181{,}82\right)$ do produto e não 200 kg como comprava. Portanto, houve uma redução de 9,1% $\left(\frac{181{,}82}{200} \simeq 0{,}909;\ 1 - 0{,}909 = 0{,}091 \text{ ou } 9{,}1\%\right)$ no poder de compra dela.

b) Cenário 2

Como o salário de Luciana aumentou 5%, ela passou a ganhar R$ 2 100,00 $\left(5\% \text{ de } 2\,000 = \frac{5}{100} \cdot 2\,000 = 100;\ 2\,000 + 100 = 2\,100\right)$.

Agora, Luciana pode comprar, aproximadamente, 190,91 kg $\left(\frac{2\,100}{11} \simeq 190{,}91\right)$ do produto e não mais 200 kg como comprava. Portanto, houve uma redução de 4,54% $\left(\frac{190{,}91}{200} \simeq 0{,}9546;\ 1 - 0{,}9546 = 0{,}0454 \text{ ou } 4{,}54\%\right)$ no poder de compra dela.

c) Cenário 3

Como o salário de Luciana aumentou 15%, ela passou a ganhar R$ 2 300,00 $\left(15\% \text{ de } 2\,000 = \frac{15}{100} \cdot 2\,000 = 300;\ 2\,000 + 300 = 2\,300\right)$.

Agora, Luciana pode comprar, aproximadamente, 209,09 kg $\left(\frac{2\,300}{11} \simeq 209{,}09\right)$ do produto e não mais 200 kg como comprava. Portanto, houve um aumento de 4,55% $\left(\frac{209{,}09}{200} \simeq 1{,}0455;\ 1{,}0455 - 1 = 0{,}0455 \text{ ou } 4{,}55\%\right)$ no poder de compra dela.

2. Resposta pessoal.

PÁGINA 280 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Alternativa **e**.
Um evento aleatório não depende da quantidade de execuções, pois, quando repetido em condições iguais (no caso, conquista de um território), os resultados ocorrem ao acaso.

2. Alternativa **d**.
- Possibilidades de Andrea obter a soma 11: 1 e 10; 2 e 9; 3 e 8; 4 e 7; 5 e 6.
  Portanto, tem-se 5 possibilidades.
- Possibilidades de Bruno obter a soma: 2 e 20; 3 e 19; 4 e 18; 5 e 17; 6 e 16; 7 e 15; 8 e 14; 9 e 13; 10 e 12.
  Portanto, tem-se 9 possibilidades.
- Possibilidades de Carlos obter a soma 28: 8 e 20; 9 e 19; 10 e 18; 11 e 17; 12 e 16; 13 e 15.
  Portanto, tem-se 6 possibilidades.

3. a) Resposta possível:

Tipo de dança	Mulheres	Homens	Total
Bolero	30 : 2 = 15	30 − 15 = 15	30
Samba	30	40 − 30 = 10	40
Tango	20 − 13 = 7	13	20
Forró	30 : 2 = 15	30 − 15 = 15	120 − 30 − 40 − 20 = 30
Total	67	53	120

b) Dos 120 alunos, 20 dançam tango. Dos alunos de tango, tem-se 7 mulheres. Logo, a probabilidade de ser sorteada uma mulher dentre os alunos de tango é $\frac{7}{20}$.
c) Dos 120 alunos, 53 são homens. Dos 53 alunos homens desta escola de dança, 10 dançam samba. Logo, a probabilidade de ser sorteado um aluno de samba dentre os alunos homens é $\frac{10}{53}$.

4. a) Para descobrir o total de estudantes que responderam à pesquisa, basta adicionar todos os estudantes do Ensino Fundamental I, do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio que participaram e todos os estudantes que não participaram das atividades esportivas. Então:

$$115 + 89 + 36 + 187 + 87 + 100 = 614$$

Portanto, 614 estudantes responderam à pesquisa.
b) Total de estudantes que participam das atividades esportivas: 376 (89 + 187 + 100 = 376).
Desses estudantes, 89 são do Ensino Fundamental I.
Portanto, a probabilidade de Carlos sortear um estudante do Ensino Fundamental I, sabendo que ele participa das atividades esportivas, é $\frac{89}{376}$.
c) Total de estudantes do Ensino Médio: 187 (87 + 100 = 187).
Desses estudantes, 87 não participam das atividades esportivas.
Portanto, a probabilidade de Carlos sortear um estudante que não participa das atividades esportivas, sabendo que ele é do Ensino Médio, é $\frac{87}{187}$.

5. a) $MA = \frac{9 + 8 + 8 + 7 + 9 + 8 + 10}{7} = \frac{59}{7} \simeq 8{,}4$

Portanto, a nota média que o jurado atribuiu às escolas de samba é, aproximadamente, 8,4.
b) As escolas que ficaram abaixo da média são: B, C, D e F.
c) A amplitude das notas é 3 (10 − 7 = 3).
d) A amplitude mudaria, pois o limite inferior mudou. Além disso, a média também mudaria, pois a nota dessa escola é diferente da média quando se consideram todos os valores.

6. a) • Atleta A

$$MA_A = \frac{2{,}8 + 2{,}2 + 3{,}1 + 2{,}5}{4} = \frac{10{,}6}{4} = 2{,}65$$

Portanto, a distância média do atleta A foi 2,65 m.

- Atleta B

$$MA_B = \frac{3,2 + 2,5 + 2,8 + 3,0}{4} = \frac{11,5}{4} = 2,875$$

Portanto, a distância média do atleta B foi 2,875 m.

- Atleta C

$$MA_C = \frac{2,9 + 2,8 + 3,0 + 2,8}{4} = \frac{11,5}{4} = 2,875$$

Portanto, a distância média do atleta C foi 2,875 m.

- Atleta D

$$MA_D = \frac{3,1 + 3,2 + 3,1 + 2,7}{4} = \frac{12,1}{4} = 3,025$$

Portanto, a distância média do atleta D foi 3,025 m.

- Atleta E

$$MA_E = \frac{2,8 + 3,2 + 3,4 + 2,1}{4} = \frac{11,5}{4} = 2,875$$

Portanto, a distância média do atleta E foi 2,875 m.

b) Para calcular o desvio-padrão de cada grupo de dados, precisamos encontrar o desvio e a variância de cada um deles.

- Atleta A
  - Desvio

$$D(2,8) = 2,8 - 2,65 = 0,15$$
$$D(2,2) = 2,2 - 2,65 = -0,45$$
$$D(3,1) = 3,1 - 2,65 = 0,45$$
$$D(2,5) = 2,5 - 2,65 = -0,15$$

  - Variância

$$V = \frac{(0,15)^2 + (-0,45)^2 + (0,45)^2 + (-0,15)^2}{4} =$$
$$= \frac{0,0225 + 0,2025 + 0,2025 + 0,0225}{4} = \frac{0,45}{4} = 0,1125$$

  - Desvio-padrão

$$DP_A = \sqrt{0,1125} \simeq 0,335$$

- Atleta B
  - Desvio

$$D(3,2) = 3,2 - 2,875 = 0,325$$
$$D(2,5) = 2,5 - 2,875 = -0,375$$
$$D(2,8) = 2,8 - 2,875 = -0,075$$
$$D(3,0) = 3,0 - 2,875 = 0,125$$

  - Variância

$$V = \frac{(0,325)^2 + (-0,375)^2 + (-0,075)^2 + (0,125)^2}{4} =$$
$$= \frac{0,105625 + 0,140625 + 0,005625 + 0,015625}{4} =$$
$$= \frac{0,2675}{4} = 0,066875$$

  - Desvio-padrão

$$DP_B = \sqrt{0,066875} \simeq 0,259$$

- Atleta C
  - Desvio

$$D(2,9) = 2,9 - 2,875 = 0,025$$
$$D(2,8) = 2,8 - 2,875 = -0,075$$
$$D(3,0) = 3,0 - 2,875 = 0,125$$
$$D(2,8) = 2,8 - 2,875 = -0,075$$

  - Variância

$$V = \frac{(0,025)^2 + (-0,075)^2 + (0,125)^2 + (-0,075)^2}{4} =$$
$$= \frac{0,000625 + 0,005625 + 0,015625 + 0,005625}{4} =$$
$$= \frac{0,0275}{4} = 0,006875$$

  - Desvio-padrão

$$DP_C = \sqrt{0,006875} \simeq 0,083$$

- Atleta D
  - Desvio

$$D(3,1) = 3,1 - 3,025 = 0,075$$
$$D(3,2) = 3,2 - 3,025 = 0,175$$
$$D(3,1) = 3,1 - 3,025 = 0,075$$
$$D(2,7) = 2,7 - 3,025 = -0,325$$

  - Variância

$$V = \frac{(0,075)^2 + (0,175)^2 + (0,075)^2 + (-0,325)^2}{4} =$$
$$= \frac{0,005625 + 0,030625 + 0,005625 + 0,105625}{4} =$$
$$= \frac{0,1475}{4} = 0,036875$$

  - Desvio-padrão

$$DP_D = \sqrt{0,036875} \simeq 0,192$$

- Atleta E
  - Desvio

$$D(2,8) = 2,8 - 2,875 = -0,075$$
$$D(3,2) = 3,2 - 2,875 = 0,325$$
$$D(3,4) = 3,4 - 2,875 = 0,525$$
$$D(2,1) = 2,1 - 2,875 = -0,775$$

  - Variância

$$V = \frac{(-0,075)^2 + (0,325)^2 + (0,525)^2 + (-0,775)^2}{4} =$$
$$= \frac{0,005625 + 0,105625 + 0,275625 + 0,600625}{4} =$$
$$= \frac{0,9875}{4} = 0,246875$$

  - Desvio-padrão

$$DP_E = \sqrt{0,246875} \simeq 0,497$$

c) O atleta C teve o desempenho mais homogêneo, pois apresenta o menor desvio-padrão.

d) O atleta E teve o desempenho menos homogêneo, pois apresenta o maior desvio-padrão.

7. Alternativa **b**.
Observando o gráfico, as linhas que representam cada candidato se encontram no mês de agosto.

8. Alternativa **b**.
Calculando as porcentagens, tem-se:

- Assistência médica: 10% de 200 = 20
- Genética: 17% de 200 = 34
- Meio ambiente: 20% de 200 = 40
- Estilo de vida: 53% de 200 = 106

O gráfico de barras que indica as quantidades calculadas acima é o da alternativa **b**.

UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS

CAPÍTULO 1 – ALGUMAS GRANDEZAS

PÁGINA 287 – ATIVIDADES

1. **a)** Resposta pessoal.
   b) Resposta pessoal. Resposta possível: nanômetro.
   c) Resposta de acordo com a unidade indicada no item **b**. Caso a unidade indicada seja o nanômetro, teríamos o seguinte texto:
   Vírus são estruturas simples com diâmetro que, em geral, varia de 20 nm a 300 nm. Eles só podem ser vistos com o auxílio de microscópios eletrônicos.

2. **a)** $150\,000\,000 \text{ km} = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km}$
   b) Como 1 km equivale a 1 000 m, tem-se:
   $23\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ m} = 23\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ km} =$
   $= 2{,}3 \cdot 10^{16} \text{ km}$
   c) $0{,}000000000027 \text{ m} = 2{,}7 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
   d) $0{,}00000000000000000000587 \text{ mm} = 5{,}87 \cdot 10^{-21} \text{ mm}$
   Como 1 m equivale a 1 000 mm, tem-se:
   $5{,}87 \cdot 10^{-21} : 10^3 = 5{,}87 \cdot 10^{-21-3} = 5{,}87 \cdot 10^{-24} \text{ m}$

PÁGINA 288 – ATIVIDADES

3. **a)** $0{,}0000725 \text{ g} = 7{,}25 \cdot 10^{-5} \text{ g}$
   Como 1 μg equivale a 10^{-6} g, tem-se:
   $$7{,}25 \cdot 10^{-5} : 10^{-6} = 7{,}25 \cdot 10^{-5-(-6)} = 7{,}25 \cdot 10^1 = 72{,}5$$
   Portanto, 0,0000725 g equivale a 72,5 μg.
   b) $0{,}0032 \text{ g} = 3{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ g}$
   Como 1 μg equivale a 10^{-6} g, tem-se:
   $3{,}2 \cdot 10^{-3} : 10^{-6} = 3{,}2 \cdot 10^{-3-(-6)} = 3{,}2 \cdot 10^3 = 3\,200$
   Portanto, 0,0032 g equivale a 3 200 μg.
   c) $0{,}04 \text{ mg} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ mg}$
   Como 1 μg equivale a 10^{-6} g e 1 mg equivale a 10^{-3} g, tem-se:
   $4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^{-2+(-3)} = 4 \cdot 10^{-5} = 4 \cdot 10^{-5} : 10^{-6} =$
   $= 4 \cdot 10^{-5-(-6)} = 4 \cdot 10^1 = 40$
   Portanto, 0,04 mg equivale a 40 μg.
   d) $0{,}008 \text{ mg} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ mg}$
   Como 1 mg equivale a 10^{-3} g e 1 μg equivale a 10^{-6} g, tem-se:
   $8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^{-3+(-3)} = 8 \cdot 10^{-6} = 8 \cdot 10^{-6} : 10^{-6} =$
   $= 8 \cdot 10^{-6-(-6)} = 8 \cdot 10^0 = 8$
   Portanto, 0,008 mg equivale a 8 μg.

4. • Concentração média de $MP_{2,5}$ em São José do Rio Preto:
   $$0{,}000085 \text{ g} = 85 \cdot 10^{-6} \text{ μg}$$
   • Concentração média de $MP_{2,5}$ recomendada pela OMS:
   $$0{,}00001 \text{ g} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ μg}$$
   Portanto, a quantidade de vezes que a concentração média de $MP_{2,5}$ de São José do Rio Preto é maior que a recomendada pela OMS é dada por:
   $$\frac{85 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-6}} = 8{,}5$$
   Portanto, a concentração média de $MP_{2,5}$ de São José do Rio Preto é 8,5 vezes maior do que a recomendada pela OMS.

PÁGINA 290 – ATIVIDADES

5. **a)** A memória RAM pode armazenar 8 GB e o HD pode armazenar 2 TB.
   b) No HD desse computador, é possível armazenar 2 199 023 255 552 caracteres ($2 \cdot 1\,099\,511\,627\,776 = 2\,199\,023\,255\,552$).
   c) Resposta pessoal.

6. **a)** Para comparar a capacidade dos três dispositivos apresentados, é necessário deixá-los na mesma unidade de medida. Escolhendo o *gigabyte* como unidade de medida, temos:
   - DVD-R: 4,7 GB;
   - *Pen-drive*: 256 GB;
   - HD externo: 1 TB = 1 024 GB.

   Portanto, o dispositivo que tem a maior capacidade de armazenamento de dados é o HD externo, e o que tem a menor capacidade é o DVD-R.
   b) Para armazenar a mesma quantidade de informações de um HD externo são necessários 4 *pen-drives* (1 024 : 256 = 4).

PÁGINA 291 – DIVERSIFICANDO

1. **a)** • $0{,}02 \text{ μm} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ μm}$
   Como 1 μm equivale a 10^{-6} m, então:
   $$2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-8} = 2 \cdot 10^{-8}$$
   Como 1 m equivale a 10^3 mm, tem-se:
   $$2 \cdot 10^{-8} \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^{-5} = 0{,}00002$$
   • $0{,}2 \text{ μm} = 2 \cdot 10^{-1} \text{ μm}$
   Como 1 μm equivale a 10^{-6} m, tem-se:
   $$2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-7} = 2 \cdot 10^{-7} \text{m}$$
   Como 1 m equivale a 10^3 mm, tem-se:
   $$2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 = 2 \cdot 10^{-4} = 0{,}0002$$
   Portanto, a faixa de comprimento de um femtoplâncton mede de 0,00002 mm a 0,0002 mm.
   b) A menor medida de comprimento que aparece na tabela é 0,02 μm e a maior, 200 cm. Transformando essas unidades de medida em metro, tem-se:
   - $0{,}02 \text{ μm} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ μm} = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} \text{ m} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ m} =$ $= 0{,}00000002$
   - 200 cm = 2 m

   Portanto, a diferença entre a maior medida de comprimento e a menor medida de comprimento é 1,99999998 m ($2 - 0{,}00000002 = 1{,}99999998$).
   c) Transforma-se a maior medida de um microplâncton (200 μm) em milímetros para poder compará-la com a maior medida de um mesoplâncton (20 mm).
   $200 \text{ μm} = 200 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 \text{ mm} =$
   $= 2 \cdot 10^{-1} \text{ mm} = 0{,}2 \text{ mm}$
   Portanto, um mesoplâncton pode ser até 100 vezes maior que um microplâncton ($20 = 100 \cdot 0{,}2$).

2. $75 \cdot 10^6 \text{ km} = 7{,}5 \cdot 10^7 \text{ km}$
   Como 1 km equivale a 10^3 m, tem-se:
   $$7{,}5 \cdot 10^7 \cdot 10^3 = 7{,}5 \cdot 10^{7+3} = 7{,}5 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

3. **a)** $128 \text{ GB} = 128 \cdot 1\,024 \text{ MB} = 131\,072 \text{ MB}$
   b) $8\,192 \text{ MB} = \frac{8\,192}{1\,024} \text{ GB} = 8 \text{ GB}$
   $8 \text{ GB} = 8 \cdot 2^{20} \text{ KB} = 8 \cdot 1\,048\,576 \text{ KB} = 8\,388\,608 \text{ KB}$
   Então:
   $$8\,192 \text{ MB} = 8 \text{ GB} = 8\,388\,608 \text{ KB}$$

c) $2\text{ TB} = 2 \cdot 1024\text{ GB} = 2048\text{ GB}$

d) $2048\text{ MB} = 2 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}\text{ KB} = 2 \cdot 2^{20}\text{ KB} = 2\,097\,152\text{ KB}$

$2\,097\,152\text{ KB} = \dfrac{2 \cdot 2^{20}}{2^{20}}\text{ GB} = 2\text{ GB}$

Então:

$$2048\text{ MB} = 2\,097\,152\text{ KB} = 2\text{ GB}$$

4. Sofia tem disponível 0,3 GB ($64 - 63{,}7 = 0{,}3$), que corresponde a 307,2 MB ($0{,}3 \cdot 1024 = 307{,}2$). Como são necessários 365 MB para instalar o aplicativo, não haverá espaço disponível no celular.

5. Inicialmente, transforma-se 4,7 GB em MB.

Sabe-se que 1 GB = 1024 MB, então:

$$4{,}7\text{ GB} = 4{,}7 \cdot 1024\text{ MB} = 4812{,}8\text{ MBw}$$

Como cada vídeo ocupa, em média, 300 MB, Tomas consegue armazenar 16 vídeos $\left(\dfrac{4812{,}8}{300} \simeq 16\right)$, no máximo, em um DVD.

6. Resposta possível: O armazenamento de dados na nuvem é um modelo de computação que permite aos usuários o acesso remoto a programas, arquivos e serviços por meio da internet. Existem diversas possibilidades de utilizar o armazenamento na nuvem e a quantidade de espaço para armazenamento também é variável: 1 GB, 2 GB, 1 TB.

7.

Unidade de medida	Símbolo	Valor equivalente	Quantidade de caracteres
petabyte	PB	1024 TB	2^{50}
exabyte	EB	1024 PB	2^{60}
zettabyte	ZB	1024 EB	2^{70}

Então:

- $1\text{ PB} = 1024\text{ TB} = 2^{10} \cdot 2^{40}$ *bytes* $= 2^{50}$ *bytes*
- $1\text{ EB} = 1024\text{ PB} = 2^{10} \cdot 2^{50}$ *bytes* $= 2^{60}$ *bytes*
- $1\text{ ZB} = 1024\text{ EB} = 2^{10} \cdot 2^{60}$ *bytes* $= 2^{70}$ *bytes*

8. • Se $1\text{ Å} = 10^{-10}\text{ m}$, então:

$$20\text{ Å} = 20 \cdot 10^{-10}\text{ m}$$

Mas $1\text{ nm} = 10^{-9}\text{ m}$, então:

$$1\text{ nm} \text{ ——— } 10^{-9}\text{ m}$$
$$x\text{ nm} \text{ ——— } 20 \cdot 10^{-10}\text{ m}$$

$$x = \frac{20 \cdot 10^{-10}}{10^{-9}} = 20 \cdot 10^{-1} = 2$$

Logo, 20 Å equivalem a 2 nm.

• Se $1\text{ Å} = 10^{-10}\text{ m}$, então:

$$36\text{ Å} = 36 \cdot 10^{-10}\text{ m}$$

Mas $1\text{ nm} = 10^{-9}\text{ m}$, então:

$$1\text{ nm} \text{ ——— } 10^{-9}\text{ m}$$
$$x\text{ nm} \text{ ——— } 36 \cdot 10^{-10}\text{ m}$$

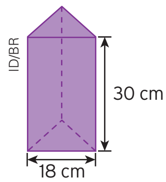
$$x = \frac{36 \cdot 10^{-10}}{10^{-9}} = 36 \cdot 10^{-1} = 3{,}6$$

Logo, 36 Å equivalem a 3,6 nm.

CAPÍTULO 2 – VOLUME

PÁGINA 296 – ATIVIDADES

1. De acordo com o enunciado, pode-se representar o prisma da seguinte maneira:



Como o volume de um prisma é dado por $V_{prisma} = A_{base} \cdot H$, inicialmente, encontra-se a medida da área da base. Como a base é formada por um triângulo equilátero, tem-se:

$$A_{base} = \frac{\ell \cdot h}{2} = \frac{18 \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9 \cdot 18\sqrt{3}}{2} = 81\sqrt{3}$$

Portanto:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot H = 81\sqrt{3} \cdot 30 = 2\,430\sqrt{3}$$

Logo, a medida do volume do prisma é $2\,430\sqrt{3}\text{ cm}^3$.

2. $V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot H = \dfrac{1}{3} \cdot \ell^2 \cdot 15 = \dfrac{1}{3} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot 15 =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2 \cdot 15 = 90$

Portanto, a medida do volume da pirâmide é 90 cm^3.

PÁGINA 297 – ATIVIDADES

3. $V_{cilindro} = A_{base} \cdot H = \pi r^2 \cdot 8 = 3 \cdot 3^2 \cdot 8 = 216$

Portanto, a medida do volume do cilindro é 216 cm^3.

4. a) $V_{cilindro} = A_{base} \cdot H$

$3\,000 = A_{base} \cdot 5$

$A_{base} = \dfrac{3\,000}{5}$

$A_{base} = 600$

Portanto, a medida da área da base do cilindro é 600 cm^2.

b) $A_{base} = \pi r^2$

$600 = 3r^2$

$r^2 = \dfrac{600}{3}$

$r^2 = 200$

$r = 10\sqrt{2}$

Portanto, o raio da base do cilindro mede $10\sqrt{2}$ cm.

PÁGINA 298 – DESCUBRA MAIS

PARA CONCLUIR

1. Sim. A razão entre as medidas das alturas alcançadas pela água no recipiente e a razão entre as medidas dos volumes dos modelos são, aproximadamente, $\frac{1}{3}$. Sim.

2. Sim, pois a razão entre as medidas das alturas dos recipientes não seria equivalente à razão entre as medidas dos volumes dos modelos.

3. Sim, com um prisma e uma pirâmide de mesma base e mesma altura. A razão entre os volumes dessas duas figuras geométricas não planas também é $\frac{1}{3}$.

4. Resposta pessoal.

PÁGINA 300 – ATIVIDADES

5. a) $A_{base} = \pi r^2 = 3 \cdot 5^2 = 75$

Portanto, a medida da área da base do cone é 75 cm^2.

b) $V = \frac{1}{3}A_{base} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 75 \cdot 7 = 175$

Portanto, a medida do volume do cone é 175 cm^3.

6. • Área da base

$$V = \frac{1}{3}A_{base} \cdot H$$

$$1\,600\pi = \frac{1}{3}A_{base} \cdot 12$$

$$1\,600\pi = 4A_{base}$$

$$A_{base} = \frac{1\,600\pi}{4}$$

$$A_{base} = 400\pi$$

Portanto, a medida da área da base do cone é 400π cm^2.

• Raio da base

$$A_{base} = 400\pi$$

$$\pi r^2 = 400\pi$$

$$r^2 = 400$$

$$r = 20$$

Portanto, o raio da base do cone mede 20 cm.

PÁGINA 301 – DIVERSIFICANDO

1. Como $V_{pirâmide} = \frac{1}{3}A_{base} \cdot H$, é necessário calcular a área da base.

Como a base é triangular, tem-se:

$$A_{base} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4,5 \cdot 3}{2} = 6,75$$

Então:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot 6,75 \cdot 5,1 = 11,475$$

Agora, calcula-se o volume de 250 peças iguais a essa:

$$250 \cdot 11,475 = 2\,868,75$$

Portanto, a medida do volume de alumínio necessário para produzir 250 peças maciças é 2 868,75 cm^3.

2. $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \ell^2 \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48$

Portanto, a medida do volume de cada pirâmide é 48 cm^3.

3. Como a cisterna lembra a forma de um cilindro, então calcula-se a área da base desse cilindro.

$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot H$$

$$81 = A_{base} \cdot 3$$

$$A_{base} = 27$$

Mas como a base do cilindro é um círculo, então:

$$A_{base} = \pi r^2$$

$$27 = 3r^2$$

$$r^2 = 9$$

$$r = 3$$

Portanto, a medida do diâmetro da nova cisterna deve ser 6 m ($2 \cdot 3 = 6$).

4. Uma possível resolução seria calcular a medida do volume dos dois prismas: um com base retangular e outro com base triangular. Em seguida, somá-las para encontrar a medida do volume da estufa.

Como a resposta deve ser dada em metro cúbico, é recomendável converter as medidas dadas para metros. Portanto, 273 cm equivalem a 2,73 m, 200 cm equivalem a 2 m, 220 cm equivalem a 2,2 m e 137 cm equivalem a 1,37 m.

• Cálculo da medida do volume do prisma de base retangular

$$V_{\text{prisma de base retangular}} = A_{base} \cdot H = 2,73 \cdot 2 \cdot 2,2 = 12,012$$

Portanto, a medida do volume do prisma de base retangular é 12,012 m^3.

• Cálculo do volume do prisma de base triangular

$$V_{\text{prisma de base triangular}} = A_{base} \cdot H = \frac{2,73 \cdot 1,37}{2} \cdot 2 = 3,7401$$

Portanto, o volume do prisma de base triangular é 3,7401 m^3.

• Cálculo do volume da estufa

$$V_{estufa} = V_{\text{prisma de base retangular}} + V_{\text{prisma de base triangular}} =$$

$$= 12,012 + 3,7401 = 15,7521$$

Logo, a medida do volume da estufa é 15,7521 m^3.

5. Como $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot H$ e $H = 5$ cm, é necessário calcular a área da base dessa pirâmide.

Como a pirâmide é regular, a base é um triângulo equilátero que, nesse caso, tem lados medindo 6 cm. Então:

$$A_{base} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

Logo:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 5 = 15\sqrt{3}$$

Portanto, a medida do volume da peça que Sofia escolheu é $15\sqrt{3}$ cm^3.

6. • $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 7^2 \cdot 6 = 98$

Portanto, a medida do volume da pirâmide é 98 cm^3.

• $V_{cilindro} = A_{base} \cdot H = 9 \cdot 5 = 45$

Portanto, a medida do volume do cilindro é 45 cm^3.

Logo, a pirâmide de base quadrada tem o maior volume.

7. • Medida do volume da vela em formato de cilindro

$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot H = \pi r^2 \cdot 15 = \pi \cdot 5^2 \cdot 15 = \pi \cdot 25 \cdot 15 = 375\pi$$

• Medida do volume da vela em formato de cone

$$V_{cone} = \frac{1}{3}A_{base} \cdot H = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = = 500\pi$$

Como a medida do volume da vela em formato de cone é maior que a do volume da vela em formato de cilindro, a vela em formato de cone é mais cara.

8. Resposta pessoal.

PÁGINA 302 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Respostas pessoais.

2. a) O valor acumulado no tesouro direto, ou valor futuro (V_f), pode ser calculado em etapas, aplicando sucessivamente as porcentagens, ou diretamente, como apresentado a seguir.

$$V_f = 10\,000 \cdot (1 + 0,56\%) \cdot (1 + 0,63\%) \cdot (1 + 0,73\%) =$$

$$= 10\,000 \cdot (1 + 0,0056) \cdot (1 + 0,0063) \cdot (1 + 0,0073) =$$

$$= 10\,000 \cdot 1,0056 \cdot 1,0063 \cdot 1,0073 \simeq 10\,193,22$$

Portanto, o valor futuro, transcorridos os três meses no tesouro direto, seria R$ 10 193,22.

Já o valor futuro (V_f), transcorrido o mesmo período na poupança, também pode ser calculado em etapas, aplicando sucessivamente as porcentagens, ou diretamente, como apresentado a seguir.

$V_f = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}36\%) \cdot (1 + 0{,}44\%) \cdot (1 + 0{,}49\%) =$

$= 10\,000 \cdot (1 + 0{,}0036) \cdot (1 + 0{,}0044) \cdot (1 + 0{,}0049) =$

$= 10\,000 \cdot 1{,}0036 \cdot 1{,}0044 \cdot 1{,}0049 \simeq 10\,129{,}55$

Portanto, o valor futuro, transcorridos os três meses na poupança, seria R\$ 10 129,55.

b) A diferença de rentabilidade entre um tipo de investimento e outro é R\$ 63,67 (10 193,22 − 10 129,55 = 63,67).

Portanto, vale mais a pena investir no tesouro direto.

PÁGINA 304 – INVESTIGAR

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO

1. Respostas pessoais.
2. Respostas pessoais.
3. Respostas pessoais.
4. Resposta pessoal.
5. Resposta pessoal.

PÁGINA 306 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Alternativa **c**.

A caixa-d'água lembra a forma de um bloco retangular, então:

$$V = a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 9$$

Portanto, a medida do volume da caixa-d'água é 9 m^3.

2. Inicialmente, deve-se encontrar a medida da aresta do cubo. Como a área total do cubo é igual mede 96 m^2, tem-se:

$$6a^2 = 96$$
$$a^2 = \frac{96}{6}$$
$$a^2 = 16$$
$$a = \sqrt{16}$$
$$a = 4$$

Logo, a aresta do cubo mede 4 m.

Para que a medida do volume do cubo seja 125 m^3, é necessário descobrir qual é a medida da nova aresta. Então:

$$V = a^3$$
$$125 = a^3$$
$$a = \sqrt[3]{125}$$
$$a = 5$$

Logo, a nova aresta mede 5 m.

Portanto, a medida da aresta do cubo deve ser aumentada em 1 m (5 − 4 = 1) para que a medida de seu volume se torne igual a 125 m^3.

3. Sabendo que $V_{prisma} = A_{base} \cdot H$, inicialmente, calcula-se a área da base desse tprisma. Como a base é um hexágono regular, pode-se dividi-lo em 6 triângulos equiláteros. Portanto, deve-se calcular a medida da área de um triângulo equilátero de base 8 cm.

$$A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

Como a base desse prisma é um hexágono, tem-se:

$$A_{base} = 6A_{triângulo} = 6 \cdot 16\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$$

Logo:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot H = 96\sqrt{3} \cdot 15 = 1\,440\sqrt{3}$$

Logo, a medida do volume do prisma é $1\,440\sqrt{3}$ cm^3.

4. Alternativa **c**.

Considera-se que a piscina não tem nenhuma inclinação. Dessa maneira, basta calcular a medida do volume do bloco retangular de 25 m de largura por 50 m de comprimento por 1,5 m de profundidade.

$$V_{bloco\ retangular} = a \cdot b \cdot c = 25 \cdot 50 \cdot 1{,}5 = 1\,875$$

Portanto, a medida do volume da piscina sem inclinação é 1 875 m^3.

A diferença entre as profundidades, considerando a piscina sem inclinação e a piscina com inclinação, é 1 m (2,5 − 1,5 = 1).

Agora, obtém-se a medida do volume da piscina considerando a inclinação. Portanto, deve-se calcular a medida do volume do prisma triangular de 25 m de largura, 50 m de comprimento e 1 m de profundidade.

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot H = \frac{1 \cdot 50}{2} \cdot 25 = 625$$

Portanto, a medida do volume da piscina é igual a 2 500 m^3 (1 875 + 625 = 2 500).

5. Para calcular a medida do volume do prisma, é necessário calcular a área da base. Como a base desse prisma é um trapézio, tem-se:

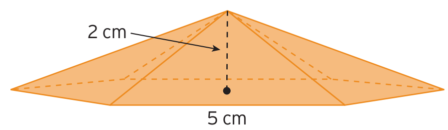
$$A_{base} = \frac{(6 + 5{,}5) \cdot 2}{2} = 11{,}5$$

Portanto, a medida do volume do prisma pode ser calculado da seguinte maneira:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot H = 11{,}5 \cdot 20 = 230$$

Logo, a medida do volume do prisma é 230 m^3.

6. Pelo enunciado, pode-se representar a figura descrita da seguinte maneira:



Como $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot H$, precisa-se calcular a área da base.

A base dessa pirâmide é um hexágono regular de lados medindo 5 cm. Como o hexágono é formado por 6 triângulos equiláteros, e a medida da altura do triângulo equilátero é dada por $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, tem-se:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Assim:

$$A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

Como o hexágono é formado por 6 triângulos, tem-se:

$$A_{hexágono} = 6 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a medida do volume da pirâmide é dada por:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{75\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 25\sqrt{3}$$

Portanto, a medida do volume da pirâmide é $25\sqrt{3}$ cm^3.

7. Alternativa **c**.

A medida do volume do cilindro, considerando o raio da base medindo r e a altura medindo H, é dada por:

$$V_{cilindro_1} = A_{base} \cdot H = \pi r^2 H$$

A medida do volume do cilindro, considerando o raio da base medindo $3r$ e a altura medindo H, é dada por:

$$V_{cilindro_2} = A_{base} \cdot H = \pi \cdot (3r)^2 \cdot H = 9\pi r^2 H$$

Portanto:

$$V_{cilindro_2} = 9\underbrace{\pi r^2 H}_{V_{cilindro_1}} = 9V_{cilindro_1}$$

8. Alternativa **c**.

Inicialmente, calcula-se a medida do volume da embalagem plástica no formado de paralelepípedo retangular reto:

$$V = 10 \cdot 10 \cdot 20 = 2\,000$$

Sabendo que a medida de volume aumenta em 25% quando a mistura for levada ao congelador e, chamando de V_c a medida do volume da mistura de chocolate e V_m a medida do volume da mistura de morango, tem-se:

$$(V_c + V_m) \cdot 1{,}25 = 2\,000$$

$$(1\,000 + V_m) \cdot 1{,}25 = 2\,000$$

$$1\,000 + V_m = \frac{2\,000}{1{,}25}$$

$$1\,000 + V_m = 1\,600$$

$$V_m = 600$$

9. Alternativa **c**.

A medida do volume de água no aquário de dimensões

40 cm × 20 cm × 25 cm é dada por:

$$V = 40 \cdot 20 \cdot 25 = 20\,000$$

Portanto, a medida do volume de água no aquário é 20 000 cm^3.

Se o aquário fosse apoiado sobre a face de dimensões 20 cm × 30 cm, a medida da altura da água seria, aproximadamente, 33 cm $\left(\frac{20\,000}{20 \cdot 30} \simeq 33\right)$.

10. Alternativa **a**.

Inicialmente, deve-se encontrar o volume do recipiente II:

$$V_{\text{recipiente II}} = A_{\text{base}} \cdot H = \pi r^2 \cdot 4 = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$$

Portanto, o volume do recipiente II mede 16π cm^3.

Logo, o volume de metade desse recipiente mede 8π cm^3 $\left(\frac{16\pi}{2} = 8\pi\right)$.

Para encher pela metade 10 recipientes iguais ao recipiente II, são necessários 80π cm^3 $(10 \cdot 8\pi = 80\pi)$.

Agora, deve-se calcular a medida do volume do recipiente I.

$$V_{\text{recipiente I}} = A_{\text{base}} \cdot H = \pi r^2 \cdot 10 = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 160\pi$$

Portanto, o volume do recipiente I mede 160π cm^3.

Dessa forma, pode-se concluir que Vanessa deverá encher o recipiente I até a metade, pois ele tem um volume 10 vezes maior que o volume do recipiente II.

11. Alternativa **e**.

A medida do volume de um prisma regular de altura medindo h é dada por:

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

A base desse prisma é um hexágono regular, então, para calcular a medida da área, pode-se dividir o hexágono em 6 triângulos equiláteros de lado ℓ e altura H.

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot H}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Como a base desse prisma é um hexágono, tem-se:

$$A_{\text{base}} = 6A_{\text{triângulo}} = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a medida do volume desse prisma é dada por:

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2} \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ell^2 h$$

12. O diâmetro da base do cone mede 5 cm, então o raio mede 2,5 cm. Logo, a medida do volume de um cone de chocolate é dada por:

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot 7 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (2{,}5)^2 \cdot 7 = 43{,}75$$

Para fazer os 200 cones de chocolate, serão necessários 8 750 cm^3 $(200 \cdot 43{,}75 = 8\,750)$ de chocolate.

13. Para determinar qual a embalagem é a mais vantajosa, é preciso comparar a razão entre a medida do volume e o preço de cada uma delas.

- Lata 1 de raio da base medindo 5 cm e altura medindo h
  - Volume:

    $$V_{\text{lata}_1} = A_{\text{base}} \cdot h = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot h = 25h\pi$$
  - Razão entre a medida do volume e o preço:

    $$\frac{V_{\text{lata}_1}}{\text{preço}_1} = \frac{25h\pi}{16{,}85} \simeq 1{,}48h\pi$$
- Lata 2 de raio da base medindo 8 cm e altura medindo H
  - Volume:

    $$V_{\text{lata}_2} = A_{\text{base}} \cdot H = \pi r^2 H = \pi \cdot 8^2 \cdot H = 64H\pi$$
  - Razão entre a medida do volume e o preço:

    $$\frac{V_{\text{lata}_2}}{\text{preço}_2} = \frac{64H\pi}{17{,}29} \simeq 3{,}70H\pi$$

Como 3,70 > 1,48, a segunda embalagem é economicamente mais vantajosa para o consumidor.

14. Para calcular a medida do volume total do recipiente, é necessário adicionar a medida do volume do cilindro à medida do volume do cone.

- $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}A_{\text{base}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 H = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 7 = 700$
- $V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h = \pi r^2 \cdot 4 = 3 \cdot 10^2 \cdot 4 = 1\,200$
- $V_{\text{total}} = V_{\text{cone}} + V_{\text{cilindro}} = 700 + 1200 = 1\,900$

Logo, a capacidade desse recipiente é de 1 900 cm^3.

15. Resposta pessoal.

GERAÇÃO
ALPHA

Matemática 9

Ensino Fundamental | Anos finais | 9º ano
Componente curricular: Matemática

Carlos N. C. de Oliveira
Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP).
Especialista em Educação Matemática pelo Centro Universitário Fundação Santo André (FSA).
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).
Professor e coordenador de ensino de Matemática.

Felipe Fugita
Licenciado em Matemática pelo IME-USP.
Professor de Matemática.

Editora responsável: Isabella Semaan
Bacharela em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal do ABC (UFABC).
Editora e elaboradora de conteúdo para materiais didáticos.

Organizadora: SM Educação
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação.

São Paulo, 4ª edição, 2022

sm

Geração Alpha **Matemática 9**

Direção editorial Cláudia Carvalho Neves
Gerência editorial Lia Monguilhott Bezerra
Gerência de *design* e produção André Monteiro
Edição executiva Isabella Semaan
Edição: Cármen Matricardi, Carolina Maria Toledo, Cristiano Oliveira da Conceição, Diana Maia, Eduardo Chavante, Luana Fernandes de Souza
Suporte editorial: Fernanda de Araújo Fortunato
Coordenação de preparação e revisão Cláudia Rodrigues do Espírito Santo
Preparação: Ana Paula Perestrelo, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares
Revisão: Ana Paula Perestrelo, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares, Renata Tavares
Apoio de equipe: Camila Lamin Lessa, Maria Clara Loureiro
Coordenação de *design* Gilciane Munhoz
***Design*:** Carla Almeida Freire, Tiago Stéfano, Victor Malta (Interação)
Coordenação de arte Andressa Fiorio
Edição de arte: Vitor Trevelin
Assistência de arte: Viviane Ayumi Yonamine
Assistência de produção: Júlia Stacciarini Teixeira
Coordenação de iconografia Josiane Laurentino
Pesquisa iconográfica: Camila D'Angelo, Fabio Matsuura
Tratamento de imagem: Marcelo Casaro
Capa João Brito/Gilciane Munhoz
Ilustração da capa: Denis Freitas
Projeto gráfico Rafael Vianna Leal
Pré-impressão Américo Jesus
Fabricação Alexander Maeda
Impressão

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Oliveira, Carlos N. C. de
Geração alpha matemática : 9º ano : ensino fundamental : anos finais / Carlos N. C. de Oliveira, Felipe Fugita ; editora responsável Isabella Semaan ; organizadora SM Educação ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação. — 4. ed. — São Paulo : Edições SM, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-65-5744-753-6 (aluno)
ISBN 978-65-5744-749-9 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Fugita, Felipe. II. Semaan, Isabella. III. Título.

22-111783 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

4ª edição, 2022

SM Educação
Avenida Paulista, 1842 – 18º andar, cj. 185, 186 e 187 – Condomínio Cetenco Plaza
Bela Vista 01310-945 São Paulo SP Brasil
Tel. 11 2111-7400
atendimento@grupo-sm.com
www.grupo-sm.com/br

Apresentação

Caro estudante,

Ser jovem no século XXI significa estar em contato constante com múltiplas linguagens, uma imensa quantidade de informações e inúmeras ferramentas tecnológicas. Isso ocorre em um cenário mundial que apresenta grandes desafios sociais, econômicos e ambientais.

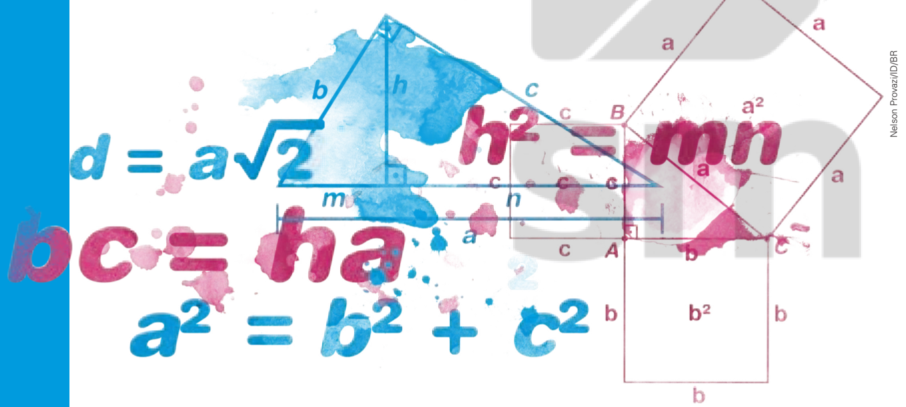
Diante dessa realidade, esta coleção foi cuidadosamente pensada para ajudar você a enfrentar esses desafios com autonomia e espírito crítico.

Atendendo a esse propósito, os textos, as imagens e as atividades nela propostos se configuram como oportunidades para que você reflita sobre o que aprende, expresse suas ideias e desenvolva habilidades de comunicação para as mais diversas situações de interação em sociedade.

Vinculados aos conhecimentos próprios de cada disciplina, são apresentados, em situações e atividades reflexivas, aspectos sobre valores universais, como justiça, respeito, solidariedade, responsabilidade, honestidade e criatividade. Esperamos, assim, contribuir para que você compartilhe dos conhecimentos construídos pela **Matemática** e os utilize para fazer escolhas responsáveis e transformadoras em sua vida.

Desejamos também que esta coleção contribua para que você se torne um jovem atuante na sociedade do século XXI, capaz de questionar a realidade em que vive e de buscar respostas e soluções para os desafios presentes e para os que estão por vir.

Equipe editorial



3

Conheça seu livro

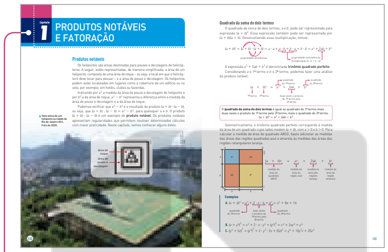
ABERTURA DE UNIDADE

No início de cada unidade, você é apresentado ao tema que vai estudar.

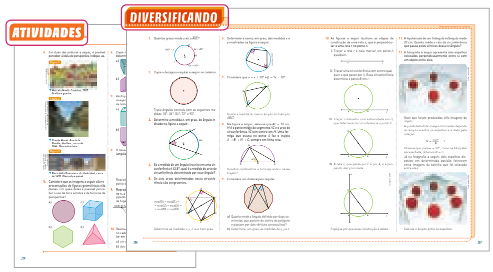
Uma imagem vai instigar sua curiosidade.

Primeiras ideias
Texto que explica a imagem e permite estabelecer relações com o que será estudado na unidade. Algumas questões vão incentivar você a contar o que sabe do assunto e a levantar algumas hipóteses sobre ele.

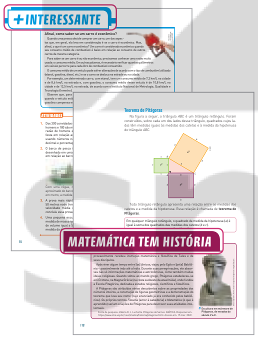
CAPÍTULOS



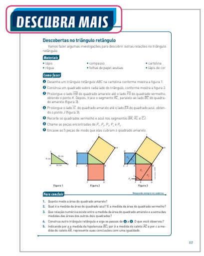
Abertura de capítulo
Textos, imagens e esquemas apresentam o conteúdo a ser estudado.



Atividades
As atividades vão ajudá-lo a desenvolver diferentes habilidades e competências. Após a apresentação dos conteúdos, vem a seção **Atividades**. E, no final de cada capítulo, há a seção **Diversificando**.



Os boxes **Matemática tem história** e **+Interessante** apresentam textos relacionados à história da Matemática e curiosidades.



No boxe **Descubra mais**, você vai realizar atividades práticas e investigativas para aprender mais sobre o assunto estudado. Com os colegas, vai levantar hipóteses, desenvolver um trabalho investigativo ou de experimentação e elaborar conclusões.

Boxes

GRANDEZAS PROPORCIONAIS
Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, ao multiplicar o valor de uma delas por um número não nulo, o valor correspondente da

Esses boxes retomam, complementam e ampliam o assunto em estudo.

DIREITO À MORADIA
A expressão "direitos humanos" se refere a direitos inerentes a todos os seres humanos, independentemente de

Valor
Apresentam temas e questões relacionados a valores humanos para você refletir e se posicionar.

PARA EXPLORAR
Uma proporção ecológica, de Luzia Faraco Ramos. São Paulo: Ática, 2008 (Coleção A Descoberta da Matemática).
Esse livro aborda os conceitos

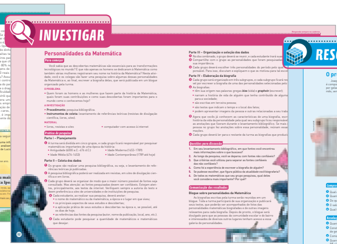
Para explorar
Oferecem indicações de livros, *sites* e passeios relacionados ao assunto.

$MP_{2,5}$: são partículas inaláveis de poeira, metais e componentes tóxicos com medida do diâmetro menor que ou igual a $2,5 \cdot 10^{-6}$ m.

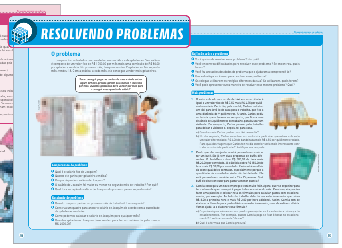
Glossário
Expressões e palavras que talvez você não conheça são explicadas nesses boxes.

FECHAMENTO DE UNIDADE

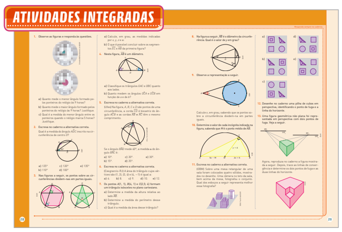
Ampliando horizontes
Essa seção consta no final de algumas unidades e, com base em temas relacionados à Educação Financeira, convida você a refletir sobre como nossos valores influenciam nossa vida.



Investigar
Em dois momentos do livro, você vai entrar em contato com diferentes metodologias de pesquisa, como entrevistas, observação de campo, etc.
Também vai desenvolver sua habilidade de comunicação ao compartilhar os resultados da investigação.

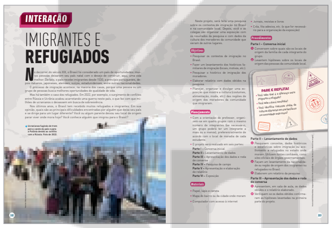


Resolvendo problemas
Com os problemas propostos, você vai desenvolver a compreensão e as estratégias de resolução, aliadas às habilidades de ler, representar informações diante de situações--problema e tomar decisões.



Atividades integradas
Essas atividades integram os assuntos da unidade. São uma oportunidade para você analisar o quanto aprendeu e refletir sobre os assuntos estudados.

FINAL DO LIVRO



Interação
Essa seção propõe um projeto coletivo cujo produto poderá ser destinado à comunidade escolar.

5

Sumário

Unidade 5 GEOMETRIA 186

Francesca Volpi/Bloomberg/Getty Images

Unidade 6 FUNÇÕES 220

Lilkin/iStock/Getty Images

Unidade 7 PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA 250

Abramova Elena/Shutterstock.com/ID/BR

Unidade 8 GRANDEZAS E MEDIDAS 282

Pressmaster/Shutterstock.com/ID/BR

7

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
7 e 9.

Competência específica de Matemática
3

Temas Contemporâneos Transversais
Meio Ambiente, Cidadania e Civismo, Ciência e Tecnologia e Economia.

Habilidades

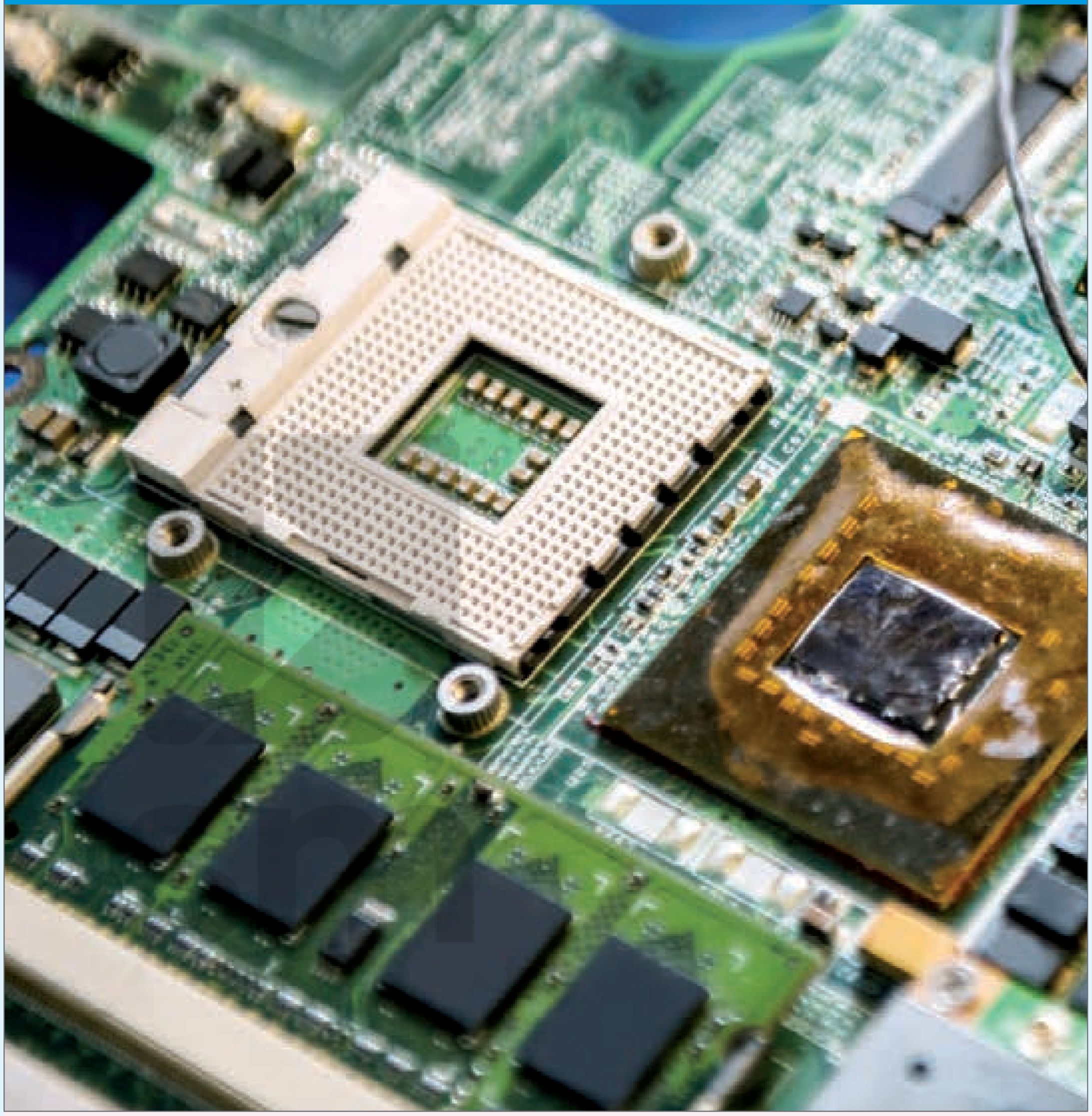
(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

(EF09MA04) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

UNIDADE 1

CONJUNTOS NUMÉRICOS, POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO



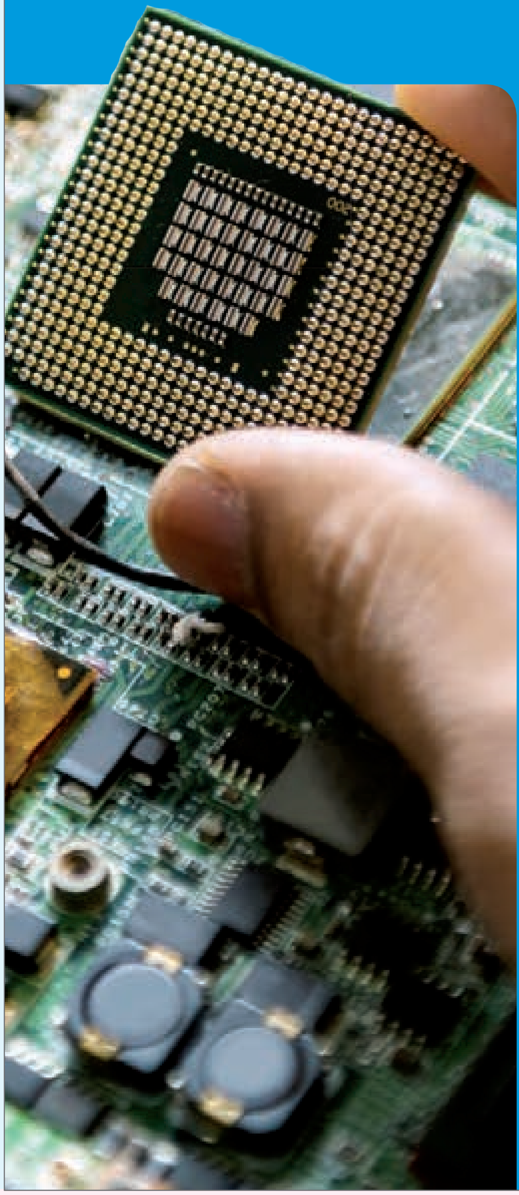
SOBRE A UNIDADE

Nesta unidade, são retomados os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais aplicados em contextos do dia a dia. Também são apresentados o conjunto dos números irracionais e o conjunto dos números reais. O conjunto dos números reais é apresentado como a união do conjunto dos números racionais e dos números irracionais.

A representação dos números naturais, inteiros e racionais na reta numérica é retomada e ampliada aos números irracionais. Da mesma forma, as operações com números racionais são retomadas e aprofundadas nos números reais.

CAPÍTULO 1
Conjuntos numéricos

CAPÍTULO 2
Potenciação e radiciação



Ravpixel.com/Shutterstock.com/ID/BR

← Microprocessador é um circuito eletrônico integrado constituído por unidade de controle, registradores e unidade aritmética e lógica. Ele é capaz de obedecer a um conjunto predeterminado de instruções e é utilizado como unidade central de processamento de um microcomputador.

PRIMEIRAS IDEIAS

O microcomputador é um computador pessoal, no qual o processamento de dados é realizado por um microprocessador.
Por causa de um problema em alguns microprocessadores, um computador cometeu erros ao dividir números racionais em determinado intervalo. Por exemplo, ao dividir 4 195 837 por 3 145 727, o resultado apresentado foi 1,33374 em vez de 1,33382. Um erro de 0,006%, ocasionado por uma tabela de divisão em que faltavam aproximadamente 5 mil entradas, o que resultou em falhas de arredondamento.

1. Em uma reta numérica, quantos números racionais existem entre 0 e 1?
2. Qual é a diferença entre o resultado correto e o apresentado pelo microcomputador? Apresente essa resposta na forma decimal e em notação científica.

PRIMEIRAS IDEIAS

- Utilize a imagem de abertura da unidade para explorar com os estudantes o que é um microcomputador e quais são suas funções e aplicações na sociedade e explicar a eles que seu processamento de dados é realizado por um microprocessador.
- Converse com os estudantes sobre como a sociedade atual é dependente do computador para realizar diversas atividades em várias áreas da ciência, da tecnologia e da cultura e como um erro pode impactar o desempenho das tarefas realizadas por ele na sociedade.

RESPOSTAS

1. Existem infinitos números racionais entre 0 e 1.
2. A diferença é 0,00008. Em notação científica: $8 \cdot 10^{-5}$.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Conjunto dos números naturais.
- Conjunto dos números inteiros.
- Conjunto dos números racionais.
- Conjunto dos números irracionais.
- Conjunto dos números reais.
- Representação, ordenação e comparação dos números reais na reta numérica.
- Operações com números reais.

Objetivos

- Reconhecer o conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais e suas representações na reta numérica.
- Construir o conceito de números reais, a partir de seus subconjuntos numéricos.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de reconhecer o conjunto dos números reais, compreendendo suas características e propriedades, associando seus elementos com pontos na reta numérica. Esse estudo permite que os estudantes desenvolvam a noção de continuidade ou de completude dos números reais, um dos conceitos mais difíceis e abstratos da Matemática, que pode ser entendida, nesse primeiro momento, de maneira intuitiva.

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

- Converse com os estudantes sobre o processo histórico da construção do conjunto dos números naturais, devido à necessidade de realizar contagens.
- Peça aos estudantes que observem com atenção a imagem de abertura deste capítulo e percebam que os animais estão livres nessa reserva. Pergunte a eles se conhecem o objetivo de um parque nacional e instigue-os a socializar suas respostas. Comente que essa área contribui para que espécies, faunas e floras ameaçadas sejam preservadas. Com isso, essa área contribui também para pesquisas científicas e visitas guiadas a esse local para compreender as consequências da extinção de animais e os efeitos de mudanças climáticas e a importância de preservar a biodiversidade para a sobrevivência da humanidade. Se julgar necessário, apresente à turma algumas Unidades de Conservação brasileiras listadas no portal do Instituto Chico Mendes de Conservação de Biodiversidade (ICMBio), disponível em: https://www.gov.br/icmbio/pt-br/assuntos/biodiversidade/unidade-de-conservacao/unidades-de-biomas/mata-atlantica/lista-de-ucs/apa-bacia-do-rio-paraiba-do-sul (acesso em 30 jun. 2022). O acervo apresenta dados e vídeo sobre a área de proteção ambiental Bacia do Rio Paraíba do Sul. Essa reflexão desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação Ambiental, que pertence à macroárea **Meio Ambiente**.

Capítulo **1**

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Para compreender os conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes conheçam o conjunto dos números naturais, o dos números inteiros e o dos números racionais.

Conjunto dos números naturais

Você já estudou os números naturais e sabe que, em geral, eles estão associados à ideia de contagem de objetos, pessoas, animais, entre outros, ou seja, tudo aquilo que pode ser contado.

Com cerca de 40 000 km^2, o Parque Nacional do Serengeti apresenta diferentes ecossistemas. Está localizado na região que ocupa o norte da Tanzânia e o sudoeste do Quênia, na África Oriental.

O parque, que é Patrimônio Mundial da Unesco, é famoso pelas migrações anuais de gnus e zebras. O lugar abriga mais de 35 espécies de mamíferos e mais de 500 espécies de pássaros.

Para saber quantas são as espécies que vivem nesse parque e quantos são os indivíduos de cada espécie, é preciso fazer uma contagem.

Da necessidade de fazer contagens surgiram os números naturais.

Gnus e zebras no Parque Nacional do Serengeti, na Tanzânia. Foto de 2021.

Danita Delimont/Alamy/Fotoarena

10

A sequência dos números naturais é:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

Essa sequência inicia-se pelo número zero e cresce infinitamente de um em um.

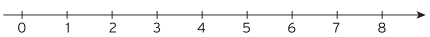
Reunindo todos os números naturais, formamos o **conjunto dos números naturais**, que representamos por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$$

No conjunto dos números naturais, a adição e a multiplicação de dois números naturais sempre têm como resultado um número natural.

Números naturais: representação na reta numérica

Veja um exemplo de como os números naturais podem ser representados em uma reta numérica.

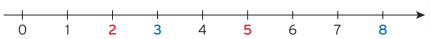


ID/BR

Comparação de números naturais

A reta numérica pode ser usada para comparar dois números naturais. Dados dois números naturais localizados em uma reta numérica horizontal, em ordem crescente da esquerda para a direita, o maior número é o que está à direita do outro.

Por exemplo, temos: $5 > 2$ e $3 < 8$.



ID/BR

Conjunto dos números inteiros

Embora sejam úteis para realizar contagens, os números naturais não são suficientes em muitas situações. Por exemplo, quando precisamos representar o saldo de gols negativo de um time em um campeonato de futebol. Ou, ainda, para indicar o prejuízo contábil de uma empresa ou os andares que ficam abaixo do térreo em um prédio.

Nessas e em outras situações, utilizamos os números negativos.

Reunindo o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros negativos, formamos o **conjunto dos números inteiros**, que pode ser representado por:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...\}$$

ou

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

irinacapel/Shutterstock.com/ID/BR

Painel de elevador que utiliza números negativos para indicar os andares abaixo do térreo.

Observe que todo número natural é um número inteiro.

Por convenção, utilizamos o símbolo $\mathbb{Z}$ para nomear o conjunto dos números inteiros porque Z é a letra inicial da palavra *Zahl*, que significa "número" em alemão.

- Retome a exploração da reta numérica com o intuito de ampliar essa maneira de representação dos números, relembrando aos estudantes como ordenar e comparar números naturais na reta numérica.
- Destaque a posição do zero na reta numérica e sua característica de não ser sucessor de nenhum número natural.

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

- Peça aos estudantes que observem alguns elementos do conjunto dos números inteiros. Verifique se eles percebem que o conjunto dos números inteiros é a união de todos os elementos do conjunto dos números naturais com todos os elementos do conjunto dos números inteiros negativos. Ou seja, o conjunto dos números inteiros é uma ampliação do conjunto dos números naturais.

- Explore com os estudantes a representação dos números inteiros na reta numérica.
- As atividades **1** e **5** exploram a comparação entre dois números inteiros por meio do uso dos sinais $>$ (maior que) ou $<$ (menor que).
- Aproveite a atividade **3** para verificar se os estudantes entenderam como construir e localizar números inteiros em uma reta numérica.
- Se necessário, ao realizar o item **a** da atividade **6**, retome com os estudantes o critério de divisibilidade por 5. Além disso, verifique se eles sabem o significado da palavra "distintos". Peça que deem exemplos de números inteiros formados por três algarismos distintos.
- Sugira aos estudantes que utilizem a reta numérica para resolver a atividade **7**.

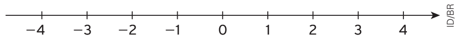
Veja algumas características do conjunto dos números inteiros.

- Todo número inteiro n tem um sucessor $n + 1$ e um antecessor $n - 1$.
- Se n é um número inteiro, então $n - 1$, n e $n + 1$ são três números consecutivos.
- Se n é um número inteiro diferente de zero, então $-n$ é o número oposto ou simétrico desse número.

No conjunto dos números inteiros, a adição, a subtração e a multiplicação de dois números inteiros sempre resultam em um número inteiro.

Números inteiros: representação na reta numérica

Os números inteiros também podem ser associados a pontos em uma reta numérica. Veja.



3.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Copie os itens a seguir no caderno, substituindo cada ■ pelos sinais $>$ (maior que) ou $<$ (menor que).

a) 78 ■ 84 **<**

b) 16 ■ 43 **<**

c) 1 463 ■ 1 324 **>**

d) 461 ■ 416 **>**

2. Responda às questões.

a) Todo número natural tem um antecessor? E um sucessor? **Não; sim.**

b) O conjunto dos números naturais tem quantos elementos? **Infinitos.**

c) Qual é o menor elemento do conjunto dos números naturais? **Zero.**

3. Construa uma reta numérica no caderno e represente nela os seguintes números:

−8	−3	2
−15	0	4
7	14	−2

4. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras. Se alguma delas for falsa, corrija-a no caderno.

a) Todo número inteiro tem um sucessor e um antecessor. **Verdadeira.**

b) O conjunto dos números inteiros tem infinitos elementos. **Verdadeira.**

c) O menor número do conjunto dos números inteiros é -57.

5. Copie os itens a seguir no caderno, substituindo cada ■ pelos sinais $<$ ou $>$.

a) −8 ■ 15 **<**

b) 9 ■ −9 **>**

c) −18 ■ −27 **>**

d) −213 ■ −312 **>**

6. Escreva o que se pede em cada item.

a) O maior número inteiro de três algarismos distintos divisível por 5. **985**

b) O maior número natural par de quatro algarismos distintos. **9 876**

c) O menor número inteiro par de quatro algarismos distintos. **−9 876**

7. Indique quantos são os números inteiros:

a) de −2 a −6, incluindo esses dois números; **5 números.**

b) de −5 a 6, incluindo o número −5, mas não o número 6. **11 números.**

8. Identifique quais das operações a seguir não resultam em um número natural. **Alternativas d e h.**

a) 9 + 12

b) 34 + 158

c) 96 − 81

d) 16 − 32

e) 8 · 4

f) 27 · 6

g) 45 : 5

h) 37 : 3

4. c) Falsa. O conjunto dos números inteiros não tem um menor elemento.

Conjunto dos números racionais

Lembra-se de quando você estudou números na forma de fração e na forma decimal? Você conheceu diversas situações em que os números inteiros não são suficientes, nas quais, no entanto, os números racionais podem ser usados.

Nomeamos o **conjunto dos números racionais** com o símbolo $\mathbb{Q}$, originado da palavra "quociente".

Os **números racionais** são aqueles que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros e que b é diferente de zero.

É comum os indicadores de combustível dos automóveis utilizarem frações para medir a quantidade de combustível disponível no tanque. As frações são números racionais.

Representamos o conjunto dos números racionais da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

No conjunto dos números racionais, a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão (com divisor diferente de zero) de dois números racionais são sempre possíveis e têm como resultado um número racional.

Números racionais: representação na reta numérica

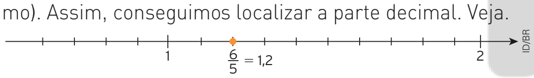
Veja alguns exemplos de como representar números racionais em uma reta numérica.

Exemplos

A. Vamos representar o número $\frac{6}{5}$ na reta numérica.

Realizando a divisão de 6 por 5, obtemos 1,2 como resultado. Ou seja, a fração $\frac{6}{5}$ está entre 1 e 2.

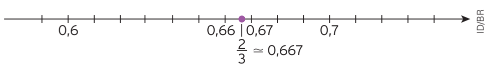
Para localizar a parte decimal, podemos dividir o segmento da reta que representa esse intervalo em dez partes iguais. Cada uma dessas partes representa 0,1 (um décimo). Assim, conseguimos localizar a parte decimal. Veja.



B. Vamos representar o número $\frac{2}{3}$ na reta numérica.

Realizando a divisão de 2 por 3, obtemos $0,\overline{6}$ como resultado. Ou seja, a fração $\frac{2}{3}$ está entre 0 e 1, mais precisamente entre 0,66 e 0,67.

Para localizar o ponto, podemos aproximar $0,\overline{6}$ para 0,667.



CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

- Converse com os estudantes sobre o conjunto dos números racionais. Observe se eles percebem que esse conjunto é uma ampliação do conjunto dos números inteiros.
- Mostre aos estudantes que há diferentes modos de representar um mesmo número racional, como $\frac{1}{4} = 0,25$. Peça a eles que apresentem outros exemplos de números racionais.
- Reforce a importância de saber relacionar os dois tipos de representação dos números racionais, na forma de fração e na forma decimal, levando os estudantes a reconhecer situações em que é melhor utilizar uma ou outra forma.
- Ao ampliar os conjuntos numéricos, enfatize a inclusão dos conjuntos numéricos estudados (naturais, inteiros, racionais), contribuindo para melhor compreensão do conjunto dos números reais, que será objeto de estudo mais adiante.

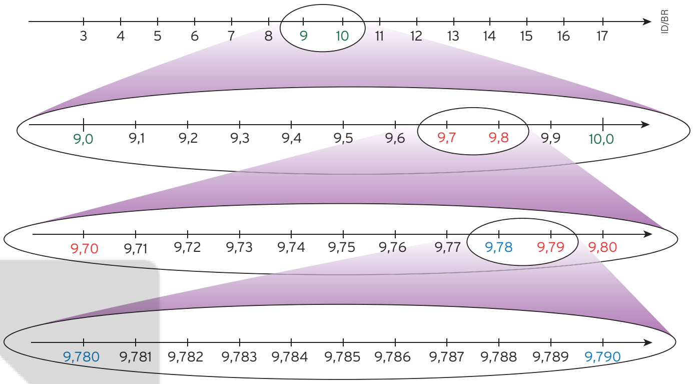
- Explique aos estudantes que sempre existe um número racional entre dois números racionais.
- Verifique se os estudantes conseguem ordenar e comparar os números racionais com e sem o auxílio da reta numérica.
- Sugira aos estudantes que efetuem a divisão do numerador pelo denominador com intuito de transformar a representação fracionária de um número racional na representação decimal.
- Retome os conteúdos apresentados, perguntando aos estudantes qual é a ideia intuitiva que eles têm a respeito de representação decimal finita e representação decimal infinita e periódica. Peça a eles que apresentem alguns exemplos do uso dos números racionais no cotidiano.
- Aproveite o *zoom* dado entre os números 9 e 10 na reta numérica e comente com os estudantes que existem infinitos números entre dois números racionais.

Números racionais entre dois racionais

Entre dois números naturais consecutivos não há outro número natural. Por exemplo, entre os números naturais 5 e 6 não há nenhum número natural. Entre dois números inteiros consecutivos também não há outro número inteiro. Por exemplo, entre os números inteiros −14 e −13 não há nenhum número inteiro. No entanto, entre dois números racionais, sempre existe outro número racional. Veja.

- Entre os números 9 e 10 temos, por exemplo: 9,1; 9,2; 9,3; 9,4; 9,5; 9,6; 9,7; 9,8; 9,9.
- Entre os números 9,7 e 9,8 temos, por exemplo: 9,71; 9,72; 9,73; 9,74; 9,75; 9,76; 9,77; 9,78; 9,79.
- Entre os números 9,78 e 9,79 temos, por exemplo: 9,781; 9,782; 9,783; 9,784; 9,785; 9,786; 9,787; 9,788; 9,789. E assim podemos continuar indefinidamente.

Agora, acompanhe as representações nas retas numéricas a seguir.



Observe que encontraremos infinitos números entre dois números racionais, quaisquer que sejam eles.

Representação decimal dos números racionais: finita ou infinita e periódica

Para representar um número racional na forma de fração na forma decimal, basta efetuar a divisão do numerador pelo denominador da fração. A representação decimal de qualquer número racional pode ser finita ou infinita e periódica.

Representação decimal finita

Sempre que a divisão tiver resto zero, teremos uma quantidade finita de algarismos decimais no quociente da divisão. Dizemos que se trata de uma representação decimal finita de um número racional. Acompanhe, a seguir, alguns exemplos.

Exemplos

A. $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5$

B. $\frac{1515}{20} = 1515 : 20 = 75{,}75$

C. $\frac{6}{1000} = 6 : 1000 = 0{,}006$

D. $\frac{24}{96} = 24 : 96 = 0{,}25$

Representação decimal infinita e periódica

Vamos escrever o número $\frac{2}{9}$ na forma decimal. Observe, na divisão a seguir, que $\frac{2}{9} = 0{,}222...$

```
20  |9
 20  0,222...
  20
   2
```

ID/BR

Perceba que o resto 2 se repete indefinidamente. Portanto, o mesmo acontece com o algarismo 2 do quociente. O resultado dessa divisão é uma **dízima periódica**, ou seja, um número decimal com infinitas casas decimais que se repetem.

O número formado pelos algarismos que se repetem em uma dízima periódica é chamado de período. Em vez de usar as reticências, podemos colocar um traço acima do período. Na divisão anterior, o período é 2 e podemos indicar essa dízima por 0,222... ou por $0{,}\overline{2}$.

9. a) Resposta possível: -5.
b) Resposta possível: $-\frac{1}{3}$.
c) Resposta possível: $\frac{2}{5}$.
d) Não existe.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

9. Dê um exemplo, quando existir, de um número:
a) inteiro que não é natural;
b) racional que não é natural;
c) racional que não é inteiro;
d) natural que não é racional.

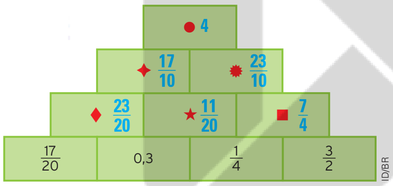
10. Construa uma reta numérica no caderno. Localize nela os seguintes números:

$A = \frac{12}{10}$ $B = \frac{3}{5}$ $C = \frac{24}{9}$ $D = -2{,}1$

11. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras. Se houver afirmações falsas, corrija-as no caderno.
a) Entre dois números naturais consecutivos não há outro número natural.
b) Entre dois números naturais consecutivos existem infinitos números racionais.
c) Entre dois números racionais não há outro número racional.
d) Existem infinitos números naturais, infinitos números inteiros e finitos números racionais.
e) O número $-1{,}79$ está entre -2 e -1.
f) O número 13,57 está entre 13,6 e 13,7.

11. Consulte as respostas neste manual.

12. O número representado em cada retângulo desta figura corresponde à soma dos números representados nos dois retângulos que estão logo abaixo dele.



Reproduza a figura no caderno e substitua cada símbolo pelo número que falta.

13. Escreva os números a seguir em ordem crescente. $-4 < -3 < -\frac{3}{2} < \frac{4}{3} < \frac{10}{4} < 4$

4 $\frac{4}{3}$ $\frac{10}{4}$ -3 -4 $-\frac{3}{2}$

10.


- Lembre aos estudantes que as reticências são usadas para indicar que o número tem infinitas casas decimais.
- Reforce que a dízima periódica também pode ser representada com um traço acima dos algarismos que formam o período. O número 1,383838..., por exemplo, pode ser representado por $1{,}\overline{38}$.
- Aproveite a atividade **9** para verificar se os estudantes compreenderam que o conjunto dos números naturais é subconjunto dos números inteiros, que, por sua vez, é subconjunto dos números racionais.
- Nas atividades **10** e **13**, sugira aos estudantes que transformem os números que estão representados na forma de fração para a forma decimal, dividindo o numerador pelo denominador.

RESPOSTAS

11. a) Verdadeira.
b) Verdadeira.
c) Falsa. Correção possível: Entre dois números racionais existem infinitos números racionais.
d) Falsa. Correção possível: Existem infinitos números naturais, infinitos números inteiros e infinitos números racionais.
e) Verdadeira.
f) Falsa. Correção possível: O número 13,57 está entre 13,5 e 13,6.

CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

- Sugira aos estudantes que acompanhem e reproduzam, com a calculadora, os cálculos apresentados no Livro do Estudante para determinar o valor de $\sqrt{2}$ por aproximação.
- Introduza, em seguida, o conceito dos números irracionais, explicando que esses números que não podem ser escritos na forma de uma fração irredutível e, por isso, não podem pertencem ao conjunto dos números racionais. Se achar necessário, retome com eles a forma geral de um número racional $\left(\frac{a}{b}\text{, sendo } a \text{ e } b \text{ inteiros e } b \neq 0\right)$.

Conjunto dos números irracionais

Observe os números a seguir.

- 1,10100100010000...
- 941,4734871566715...
- $\sqrt{3}$ = 1,73205080756...
- $\sqrt{5}$ = 2,23606797749...

A representação decimal de cada um desses números tem infinitas casas decimais e é não periódica, ou seja, não tem um período que se repete. Números como esses são chamados de **números irracionais**.

Indicamos o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{I}$.

Agora, vamos estudar dois importantes números irracionais: $\sqrt{2}$ e π.

O número $\sqrt{2}$

Podemos calcular o valor aproximado de $\sqrt{2}$ fazendo tentativas e aproximações sucessivas de números racionais. Para isso, buscamos um número positivo que, elevado ao quadrado, seja próximo a 2. Acompanhe a seguir.

1º passo: Encontrar um número racional que, elevado ao quadrado, seja próximo de 2.

$1^2 = 1$ (menor que 2)
$2^2 = 4$ (maior que 2)

$\sqrt{2}$ está entre 1 e 2.

2º passo: Encontrar um número racional com uma casa decimal que, elevado ao quadrado, seja próximo de 2.

$1{,}1^2 = 1{,}21$ (menor que 2)
$1{,}2^2 = 1{,}44$ (menor que 2)
$1{,}3^2 = 1{,}69$ (menor que 2)
$1{,}4^2 = 1{,}96$ (menor que 2)
$1{,}5^2 = 2{,}25$ (maior que 2)

$\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5.

3º passo: Encontrar um número racional com duas casas decimais que, elevado ao quadrado, seja próximo de 2.

$1{,}41^2 = 1{,}9881$ (menor que 2)
$1{,}42^2 = 2{,}0164$ (maior que 2)

$\sqrt{2}$ está entre 1,41 e 1,42.

4º passo: Encontrar um número racional com três casas decimais que, elevado ao quadrado, seja próximo de 2.

$1{,}411^2 = 1{,}990921$ (menor que 2)
$1{,}412^2 = 1{,}993744$ (menor que 2)
$1{,}413^2 = 1{,}996569$ (menor que 2)
$1{,}414^2 = 1{,}999396$ (menor que 2)
$1{,}415^2 = 2{,}002225$ (maior que 2)

$\sqrt{2}$ está entre 1,414 e 1,415.

5º passo: Encontrar um número racional com quatro casas decimais que, elevado ao quadrado, seja próximo de 2.

$1{,}4141^2 = 1{,}99967881$ (menor que 2)
$1{,}4142^2 = 1{,}99996164$ (menor que 2)
$1{,}4143^2 = 2{,}00024449$ (maior que 2)

$\sqrt{2}$ está entre 1,4142 e 1,4143.

Prosseguimos desse modo até encontrar a aproximação de $\sqrt{2}$ com o número de casas decimais que desejarmos.

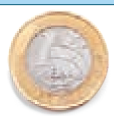
$$\sqrt{2} \simeq 1{,}414213562...$$

Na forma decimal, o número $\sqrt{2}$ tem infinitas casas decimais sem que haja um grupo de algarismos que se repete infinitas vezes. Logo, $\sqrt{2}$ é um número irracional.

O número π

O contorno das moedas brasileiras lembra uma circunferência. No quadro a seguir, é possível ver a medida do comprimento e a medida do diâmetro de algumas delas.

Relação entre a medida do comprimento e a medida do diâmetro das moedas de real

Moeda	Medida aproximada do comprimento (C) (em mm)	Medida do diâmetro (d) (em mm)	$\frac{C}{d}$
	84,82	27	Aproximadamente 3,14
	72,26	23	Aproximadamente 3,14
	78,54	25	Aproximadamente 3,14
	62,83	20	Aproximadamente 3,14
	69,12	22	Aproximadamente 3,14

Fotografias: Banco Central/Reprodução fotográfica: ID/BR

Observando o quadro, o que você percebe nos valores da última coluna? A razão entre a medida do comprimento e a medida do diâmetro é aproximadamente 3,14. Esse valor corresponde ao número π.

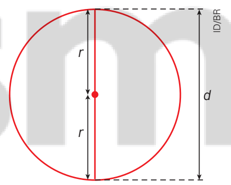
O número π é obtido pela divisão da medida do comprimento de uma circunferência pela medida de seu diâmetro, na mesma unidade de medida.

Ele é um número irracional, pois tem infinitas casas decimais e não tem um período que se repete.

$$\pi = 3{,}141592653...$$

MEDIDA DO COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Conhecendo o número π, é possível determinar a medida do comprimento C de uma circunferência a partir da medida de seu diâmetro (d) ou da medida de seu raio (r).



$C = \pi \cdot d$ ou $C = \pi \cdot 2r$

- Incentive os estudantes a perceber, por meio da observação do quadro desta página do Livro do Estudante que a razão entre a medida do comprimento e a medida do diâmetro das moedas é sempre constante e aproximadamente igual a 3,14.
- Verifique se os estudantes compreenderam que a razão discutida é uma constante, denominada π (pi), e que se trata também de um número irracional, ou seja, é um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica.
- Mostre aos estudantes, por meio da circunferência apresentada no boxe *Medida do comprimento da circunferência*, que, com base na definição de π (pi), podemos relacionar a medida do comprimento de qualquer circunferência com a medida de seu raio ou de seu diâmetro.

DE OLHO NA BASE

Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA02**.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Depois de explicar o quadro com a relação entre a medida de comprimento e a medida do diâmetro das moedas de real, proponha aos estudantes a atividade a seguir.

- Solicite aos estudantes, antecipadamente, que tragam para a sala de aula objetos circulares e uma calculadora.
- Organize-os em grupos de dois ou três integrantes e disponibilize réguas e barbantes.
- Peça aos estudantes que meçam a medida de comprimento e a medida de diâmetro de cada objeto circular, anotando os valores em um quadro. Depois, peça a eles que verifiquem, em diferentes objetos, que a razão entre a medida do comprimento e a medida do diâmetro é sempre constante e aproximadamente igual a 3,14.

- Converse com os estudantes sobre como calcular o valor de raízes utilizando uma calculadora.
- Ao realizar a atividade **14**, verifique se os estudantes compreenderam que todos os números naturais são números inteiros e que todos os números inteiros são números racionais. Além disso, é importante que eles entendam que não existe um número que seja racional e irracional ao mesmo tempo.
- Na atividade **15**, proponha aos estudantes que observem cada número que pretendem classificar e comparem-no com as sete características apresentadas, associando àquelas que correspondem ao número analisado.
- Na atividade **16**, para determinar $\sqrt{2,25}$, os estudantes podem utilizar diferentes métodos. Uma possível maneira de calcular raízes de números decimais é escrevê-los na representação fracionária e, depois, determinar a raiz do numerador e do denominador.
- Nas atividades **18** e **19** , espera-se que os estudantes utilizem as relações entre a medida do diâmetro e a medida do raio e entre essas medidas e a medida do comprimento da circunferência.

Calculadora e raízes aproximadas

A calculadora também fornece aproximações de números irracionais.

Exemplo

Para calcular o valor de $\sqrt{75}$ em algumas calculadoras, digitamos:

7 5 √

Em outras calculadoras, digitamos:

√ 7 5 =

Nos dois casos, os oito primeiros números que aparecem no visor são:

8.6602540

Logo, a aproximação de $\sqrt{75}$ com sete casas decimais é 8,6602540. Essa aproximação pode ser arredondada para 8,7, que tem apenas uma casa decimal. Note que esse valor é aproximado, pois representamos apenas uma parte das infinitas casas decimais.

14. c) $\sqrt{25}$, -5, $\frac{1}{5}$ e 0,5.
d) $\sqrt{5}$ e $\frac{\pi}{5}$.

18. a) 16,956 m
b) 113,04 cm
c) 10 cm

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

14. Considere os números a seguir.

$\sqrt{25}$	-5	$\sqrt{5}$
$\frac{1}{5}$	0,5	$\frac{\pi}{5}$

Indique quais desses números são:

a) naturais; **$\sqrt{25}$**
b) inteiros; **$\sqrt{25}$ e -5.**
c) racionais;
d) irracionais.

15. Considere as seguintes características:

I. Número racional positivo e não inteiro.
II. Dízima periódica negativa.
III. Número inteiro positivo.
IV. Número irracional não positivo.
V. Número natural maior que 0,7.
VI. Número irracional positivo.
VII. Número racional negativo e não inteiro.

Com base nessas características, classifique os números dos itens a seguir.

a) $\sqrt{13}$ **VI**
b) 1 **III e V.**
c) 0,123123 **I**
d) π **VI**
e) $-52,031\overline{3}$ **II e VII.**
f) $-2,9111$ **VII**
g) $\sqrt{9}$ **III e V.**
h) 508 934 **III e V.**

16. Determine o resultado de $\sqrt{2,25}$. Esse número é racional ou irracional? **1,5. Racional.**

17. Encontre o valor aproximado, com duas casas decimais, de cada raiz quadrada dos itens a seguir. Depois, utilizando uma calculadora, confira se os valores obtidos são aproximações dessas raízes.

a) $\sqrt{12}$ **3,46**
b) $\sqrt{38}$ **6,16**
c) $\sqrt{97}$ **9,85**
d) $\sqrt{112}$ **10,58**

18. Considere $\pi = 3,14$ e responda às questões a seguir.

a) Qual é a medida do comprimento da circunferência cujo diâmetro mede 5,4 m?
b) Qual é a medida do comprimento da circunferência cujo raio mede 18 cm?
c) Qual é a medida do raio de uma circunferência cujo comprimento mede 62,8 cm?

19. Sabendo que o diâmetro das rodas de uma bicicleta mede 66 cm e considerando $\pi = 3,14$, calcule:

a) a medida, em centímetro, de uma volta completa de uma das rodas; **207,24 cm**
b) a medida da distância, em centímetro, que um ciclista percorre quando as rodas dão 10 voltas completas. **2 072,4 cm**

Conjunto dos números reais

Você já deve ter reparado que a rua onde você mora fica em um bairro. Esse bairro pertence a um município, que faz parte de um estado. Esse e outros estados formam o Brasil, um país situado na América do Sul, que é parte da América. A América é um dos continentes do planeta Terra. Observe que os limites geográficos dão ideia de conjunto.

Fotomontagem: ID/BR Image Landsat/Copernicus/NASA; ADVTP/Shutterstock.com/ID/BR; Matheus Silva/iStock/Getty Images

Destaque do Museu de Arte de São Paulo (Masp), localizado na avenida Paulista, em São Paulo (SP). A imagem do planeta Terra é de 2015. Foto da avenida Paulista, 2022. Foto do Masp, 2021.

Na Matemática, o conjunto dos números reais engloba todos os conjuntos que vimos até agora: naturais, inteiros, racionais e irracionais. Veja o quadro a seguir.

Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$
Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)	$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$
Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$
Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$)	É todo número cuja representação decimal tenha infinitas casas decimais não periódicas.

Vimos que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros e que o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).

SÍMBOLO $\subset$

O símbolo $\subset$ representa a relação "está contido em".

Unindo o conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, obtemos o **conjunto dos números reais**, que indicamos por $\mathbb{R}$.

Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ têm infinitos elementos. O conjunto dos números reais contém todos os elementos desses conjuntos, ou seja, qualquer número natural, inteiro, racional ou irracional é um número real.

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

- Converse com os estudantes a respeito da ideia de inclusão que está sendo trabalhada no início deste tópico. Observe se os estudantes percebem o sentido de inclusão dos respectivos elementos: o bairro, que pertence ao município, o município que faz parte do estado, o estado que faz parte do Brasil, o Brasil que faz parte da América do Sul, a América do Sul que faz parte da América e, finalmente, a América que faz parte da Terra. A compreensão do pertencimento é muito importante para a compreensão do conjunto dos números reais.
- Realize um trabalho interdisciplinar com o componente curricular Geografia e apresente aos estudantes um mapa político de todos os continentes, disponível em: https://portaldemapas.ibge.gov.br/portal.php#mapa807 (acesso em: 30 jun. 2022). Localize com eles o Brasil e os demais limites regionais e internacionais. Se julgar necessário, organize a turma em grupos de quatro estudantes e solicite-lhes que pesquisem cada país. Esse trabalho promove a representação das diferenças sociais, históricas, políticas, econômicas, demográficas e culturais de outros povos e países.
- É importante que os estudantes compreendam que o conjunto dos números reais engloba o conjunto dos números racionais e dos números irracionais. E que não há nenhum número que pertença a esses dois conjuntos ao mesmo tempo, ou seja, não há intersecção entre eles.
- Comente com os estudantes que o conjunto dos números racionais engloba os números inteiros, que, por sua vez, abrangem, além dos números negativos, todos os números naturais.
- Verifique se a relação de inclusão entre os conjuntos numéricos é compreendida pelos estudantes:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- A ideia de correspondência entre os números reais e a reta numérica ou, ainda, o fato de o conjunto dos números reais não ter “buraco” ilustram a noção de continuidade ou de completude, um dos conceitos mais difíceis e abstratos da Matemática, mas é necessário que os estudantes compreendam essa correlação, que pode ser entendida, nesse primeiro momento, de maneira intuitiva.
- Apresente aos estudantes os passos para localizar o número $\sqrt{5}$ na reta numérica, conforme apresentado no Livro do Estudante. Explique a eles que, a cada passo apresentado, aumenta-se uma casa decimal no número aproximado e, assim, obtém-se maior precisão na localização do número $\sqrt{5}$ na reta numérica. No 3º passo, descobre-se que $\sqrt{5}$ está entre 2,23 e 2,24.

DE OLHO NA BASE

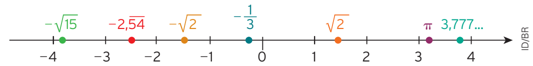
Compreender o procedimento para a localização de um número irracional na reta numérica contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA02**.

Números reais: representação na reta numérica

Todos os números racionais não preenchem completamente uma reta numérica. Assim, sobram pontos sem números correspondentes. Ao incluirmos os números irracionais nessa reta, todos os pontos são preenchidos.

Isso significa que, para cada número real, há um ponto correspondente na reta numérica e, da mesma maneira, para cada ponto da reta, há um número real correspondente.

Veja a seguir alguns números reais representados na reta numérica.



Você já sabe como localizar números racionais na reta numérica. Agora, vamos localizar os números irracionais na reta.

Os números irracionais podem ser representados na reta numérica considerando seus valores aproximados. Por exemplo, para representar o número irracional π, podemos considerar o valor aproximado 3,1.

Acompanhe como podemos fazer para representar $\sqrt{5}$, que é um número real,na reta numérica.

1º passo: Encontrar um número racional que, elevado ao quadrado, seja próximo de 5.

$1^2 = 1$ (menor que 5)
$2^2 = 4$ (menor que 5)
$3^2 = 9$ (maior que 5)

$\sqrt{5}$ está entre 2 e 3.

2º passo: Encontrar um número racional com uma casa decimal que, elevado ao quadrado, seja próximo de 5.

$2,1^2 = 4,41$ (menor que 5)
$2,2^2 = 4,84$ (menor que 5)
$2,3^2 = 5,29$ (maior que 5)

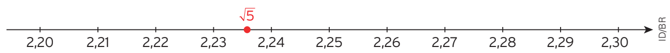
$\sqrt{5}$ está entre 2,2 e 2,3.

3º passo: Encontrar um número racional com duas casas decimais que, elevado ao quadrado, seja próximo de 5.

$2,21^2 = 4,8841$ (menor que 5)
$2,22^2 = 4,9284$ (menor que 5)
$2,23^2 = 4,9729$ (menor que 5)
$2,24^2 = 5,0176$ (maior que 5)

$\sqrt{5}$ está entre 2,23 e 2,24.

4º passo: Desenhar uma reta numérica e localizar nela o valor aproximado de $\sqrt{5}$. Como a aproximação de $\sqrt{5}$ está entre 2,23 e 2,24, podemos desenhar a reta numérica com intervalos de 0,01.



Comparação de números reais

Acompanhe como podemos comparar números reais.

Exemplos

A. Vamos comparar os números $\frac{1}{8}$ e $0,3\overline{14}$.

Para realizar a comparação, escrevemos os dois números usando a mesma representação.

Nesse caso, vamos apresentar a comparação na forma de fração, encontrando a fração geratriz do número $0,3\overline{14}$. Sendo x a fração geratriz da dízima $0,3\overline{14}$ ou 0,3141414..., temos:

$$x = 0,3141414...$$

Vamos multiplicar os dois membros dessa igualdade por 10 para obter no 2º membro uma dízima periódica simples:

$$10 \cdot x = 10 \cdot 0,3141414...$$
$$10x = 3,141414... \quad \text{(I)}$$

Agora, para obter outro número na forma decimal com o mesmo período (14), multiplicamos os dois membros dessa igualdade por 100:

$$100 \cdot 10x = 100 \cdot 3,141414...$$
$$1\,000x = 314,141414... \quad \text{(II)}$$

Subtraindo a equação I da II, obtemos:

$$\begin{array}{rrcl} & 1\,000x & = & 314,141414... \\ - & 10x & = & 3,141414... \\ \hline & 990x & = & 311 \\ & x & = & \frac{311}{990} \end{array}$$

Portanto, $0,3\overline{14} = \frac{311}{990}$.

Agora, comparamos as frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{311}{990}$.

Como essas frações não têm o mesmo denominador, podemos encontrar frações equivalentes a elas que tenham o mesmo denominador para fazer a comparação:

$$\frac{1}{8} = \frac{495}{3\,960} \text{ e } \frac{311}{990} = \frac{1\,244}{3\,960}$$

Como $\frac{495}{3\,960} < \frac{1\,244}{3\,960}$, então $\frac{1}{8} < \frac{311}{990}$.

Logo, $\frac{1}{8} < 0,3\overline{14}$.

B. Vamos comparar os números $-\sqrt{45}$ e $-6,848$.

Com o auxílio de uma calculadora, representamos $-\sqrt{45}$ com aproximação decimal. Escolhemos uma aproximação com três casas decimais. Assim: $-\sqrt{45} \simeq -6,708$

Ao comparar $-6,708$ e $-6,848$, concluímos que: $-\sqrt{45} > -6,848$.

- Retome com os estudantes o método para transformar uma dízima periódica na forma fracionária, encontrando sua fração geratriz. Com isso, eles poderão comparar os números do exemplo **A** usando apenas frações.

OPERAÇÕES COM NÚMEROS REAIS

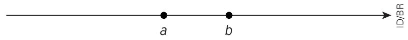
- Dê vários exemplos aos estudantes de adição e de multiplicação de dois números reais. Mostre a eles que todas as propriedades que eles já estudaram para essas duas operações com números racionais também valem para os números reais.
- Na atividade **20**, reforce para os estudantes que não há intersecção entre os conjuntos dos números racionais e dos números irracionais e que a reunião desses dois conjuntos é o conjunto dos números reais.
- Dê um tempo maior para os estudantes realizarem a atividade **21**. Caminhe pela sala de aula e verifique quais são as estratégias usadas por eles para localizar na reta numérica os números reais dados. Compartilhe com toda a turma as estratégias encontradas pelos estudantes para resolver essa atividade.

DE OLHO NA BASE

Estimar a localização dos números irracionais na reta numérica, como na atividade **21**, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA02**.

Outra maneira de comparar números reais é por meio da representação em uma reta numérica.

Como os números reais são representados na reta numérica em ordem crescente, da esquerda para a direita, e *a* e *b* são números reais, temos $a < b$.



Operações com números reais

No conjunto dos números reais, a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão (com divisor diferente de zero) de dois números reais são sempre possíveis e têm como resultado um número real.

Além disso, as propriedades da adição e da multiplicação já estudadas no conjunto dos números racionais também valem para os números reais.

Assim, se *a*, *b* e *c* são números reais, temos:

- $(a + b) \in \mathbb{R}$
  Propriedade comutativa da adição: $a + b = b + a$
  Propriedade associativa da adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$
  Existência do elemento oposto da adição: $a + (-a) = 0$
  Existência do elemento neutro da adição: $a + 0 = a$
- $(a - b) \in \mathbb{R}$
- $(a \cdot b) \in \mathbb{R}$
  Propriedade comutativa da multiplicação: $a \cdot b = b \cdot a$
  Propriedade associativa da multiplicação: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  Propriedade distributiva da multiplicação: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  Existência do elemento inverso da multiplicação: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, com $a \neq 0$
  Existência do elemento neutro da multiplicação: $a \cdot 1 = a$
- $(a : b) \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

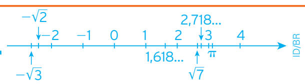
20. Observe os números a seguir.

$\sqrt{7}$ | $3{,}25\overline{65}$ | 2 | $\sqrt{13}$ | $-\frac{365}{5\,874}$ | $\frac{27}{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1{,}3\overline{45}$

a) Quais desses números são naturais? **1; 2; $\frac{27}{3}$.**
b) Quais desses números são racionais? **$-\frac{365}{5\,874}$; 1; $1{,}3\overline{45}$; 2; $3{,}25\overline{65}$; $\frac{27}{3}$.**
c) Quais desses números são irracionais? **$\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.**
d) Quais desses números são reais? **Todos.**

21. Localize os números a seguir em uma reta numérica.

$\sqrt{7}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\sqrt{2}$ | π | $1{,}618...$ | $2{,}718...$

21. 

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Para reforçar a maneira de realizar a comparação entre números reais por meio da representação na reta numérica, proponha a seguinte atividade:

Organize os estudantes em duplas, forneça-lhes alguns números reais e peça a eles que representem esses números na reta numérica, indicando se são racionais ou irracionais.

DIVERSIFICANDO

11. b) Falsa. Resposta possível: $0,\overline{4} > \frac{3}{9}$. **d) Falsa. Resposta possível: $9,\overline{2} < \frac{92}{9}$.**

Responda sempre no caderno.

e) Verdadeira. **f) Falsa. Resposta possível: $\frac{13}{11} < 1,\overline{18} \cdot \frac{8}{7}$.**

1. Observe os números e responda às questões.

-15	$\sqrt{53}$	$(\sqrt{7})^{\frac{5}{4}}$
$1\,001$	$\sqrt{169}$	$\sqrt{20}$

a) Quais desses números pertencem ao conjunto dos números naturais? **$1\,001$ e $\sqrt{169}$.**

b) Quais desses números pertencem ao conjunto dos números inteiros? **-15, $1\,001$ e $\sqrt{169}$.**

c) Quais desses números pertencem ao conjunto dos números racionais? **-15, $1\,001$ e $\sqrt{169}$.**

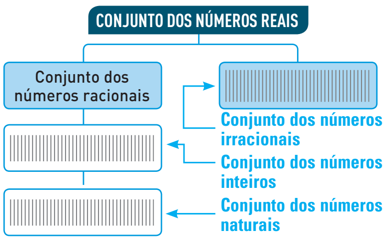
d) Quais desses números pertencem ao conjunto dos números irracionais?

e) Quais desses números pertencem ao conjunto dos números reais? **Todos.**

1. d) $\sqrt{53}$, $(\sqrt{7})^{\frac{5}{4}}$ e $\sqrt{20}$.

2. $\sqrt{30}$ está entre quais números naturais? **5 e 6.**

3. Copie o esquema a seguir no caderno e complete-o.



4. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras. Se existirem afirmações falsas, corrija-as no caderno. **Consulte as respostas neste manual.**

a) Todo número real é natural.

b) Todo número racional é real.

c) Existem números irracionais que não são reais.

d) Existem números reais que não são racionais.

5. Responda às questões.

a) A soma de dois números inteiros consecutivos é 47. Quais são esses números? **23 e 24.**

b) Qual é a soma de dois números opostos? **0**

c) De um número inteiro subtraiu-se o oposto de 47 e o resultado foi -18. Qual é esse número? **-65**

6. Copie cada item a seguir no caderno, substituindo ★ por um número inteiro de modo que cada igualdade seja verdadeira.

a) $13 - (-★) + 4 = 23$ **6**

b) $10 - 4 + 16 - ★ = 15$ **7**

c) $32 - ★ + 121 - 25 = 64$ **64**

7. Escreva a alternativa correta no caderno. $\sqrt{150}$ é um número compreendido entre:

a) 13 e 14.

b) 10 e 11.

c) 12 e 13. **Alternativa c.**

d) 11 e 12.

8. Determine a medida do raio de uma região circular que tem 9 420 m de medida de comprimento. (Use $\pi = 3,14$.) **1 500 m.**

9. Fernanda caminha diariamente em torno de uma praça circular de 40 m de medida de raio. Se ela der 20 voltas completas, qual será, aproximadamente, a distância que ela percorrerá? (Use $\pi = 3,14$.) **5 024 m**

10. Copie as sentenças a seguir no caderno e substitua ♥ pelos símbolos < ou > para comparar os números.

a) $\sqrt{3}$ ♥ 2 **<**

b) $2\sqrt{2}$ ♥ $(\sqrt{4})^2$ **<**

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ♥ $\sqrt{10}$ **<**

d) $-\sqrt{35}$ ♥ $-\sqrt{25}$ **<**

e) $\sqrt{4+5}$ ♥ $\sqrt{8}$ **>**

f) $\sqrt{81}$ ♥ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ **>**

11. Verifique se as sentenças a seguir são verdadeiras ou falsas. Se houver afirmações falsas, corrija-as no caderno.

a) $\frac{2}{3} < \frac{7}{6}$ **Verdadeira.**

b) $0,\overline{4} < \frac{3}{9}$

c) $\frac{7}{99} = 0,\overline{07}$ **Verdadeira.**

d) $9,\overline{2} = \frac{92}{9}$

e) $\frac{1}{4} < \frac{7}{9} < \frac{5}{3}$

f) $\frac{13}{11} = 1,\overline{18} \cdot \frac{8}{7}$

12. O número 1,73 é maior que, menor que ou igual a $\sqrt{3}$? Para responder a essa pergunta, utilize uma calculadora e determine o valor aproximado de $\sqrt{3}$ com três casas decimais. **Menor que $\sqrt{3}$.**

13. Organize os números a seguir em ordem decrescente. **$3,\overline{62} > \pi > \sqrt{6} > \frac{3}{2} > 1,15 > 1,1$**

$\sqrt{6}$	$1,15$	$\frac{3}{2}$
$3,\overline{62}$	π	$1,1$

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **1**, verifique se os estudantes incluem os números naturais no conjunto dos números inteiros e os números inteiros no conjunto dos números racionais, assim como os números irracionais e os números racionais na classificação do conjunto dos números reais.
- Na atividade **2**, para descobrir entre quais números naturais o número $\sqrt{30}$ está localizado, sugira aos estudantes que encontrem os quadrados perfeitos imediatamente maiores e menores que 30.
- Na atividade **8**, verifique se os estudantes compreenderam que a medida do raio pode ser calculada pela razão entre a medida do comprimento da praça circular e 2π.
- Na atividade **9**, chame a atenção dos estudantes para o fato de que a distância percorrida diariamente por Fernanda é igual a 20 vezes a medida do comprimento da praça circular.

RESPOSTAS

4. a) Falso. Existem números reais que não são números naturais, como os números negativos. Possíveis correções: “Todo número natural é real.” ou “Existem números reais que não são naturais.”.

b) Verdadeiro.

c) Falso. O conjunto dos números reais é formado pela união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Correção possível: “Todo número irracional é real.”.

d) Verdadeiro.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para auxiliar os estudantes que apresentarem dificuldade nas atividades de ordenação dos números reais, sugira a eles que utilizem a reta numérica para localizar os pontos correspondentes a cada número.

Proponha aos estudantes que elaborem um mapa conceitual estruturado dos números reais. O mapa deve apresentar definições, relações entre os conjuntos e exemplos; partindo dos números reais até chegar aos números naturais.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Potenciação com expoentes inteiros e suas propriedades.
- Notação científica.
- Radiciação e suas propriedades.
- Potência com expoente fracionário.
- Comparação entre radicais.
- Radicais semelhantes.
- Operações com radicais.
- Potência de radicais.
- Racionalização de denominadores.

Objetivos

- Efetuar potenciação de números reais com expoente inteiro e com expoente fracionário.
- Resolver problemas que envolvem números reais, inclusive com números em notação científica.
- Reconhecer e aplicar as propriedades da potenciação com números reais.
- Efetuar radiciação.
- Reconhecer e aplicar as propriedades dos radicais com números reais.
- Operar com radicais.
- Racionalizar denominadores.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo da potenciação e da radiciação, efetuando essas operações com números reais e construindo significado para suas propriedades e estratégias de cálculo. Assim, eles terão a oportunidade de desenvolver o raciocínio lógico-matemático e descubrir novas estratégias de cálculo.

POTENCIAÇÃO

- Utilize a situação de Marcelo apresentada no Livro do Estudante para iniciar uma conversa sobre fenômenos que crescem exponencialmente.
- Discuta a notícia com os estudantes e peça a eles que tragam outros exemplos cotidianos parecidos com a situação apresentada.
- Depois de ler o gênero textual notícia com os estudantes, pergunte a eles se conhecem o termo em inglês *fake news* e a que esse termo se refere. Espera-se que eles comentem que esse termo significa “notícias falsas”. Verifique se eles sabem em qual mídia de comunicação ele é veiculado e o contexto no qual é utilizado.
- Instigue os estudantes a discutir entre si sobre a intenção de alguém propagar notícias falsas à sociedade, se já se depararam com essa situação, como descobriram de que se tratava e as atitudes que o leitor deve ter para identificar e verificar alguma publicação falsa, seja em redes sociais, seja em aplicativos de telefone celular.

Capítulo

2 POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

Para compreender os conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes dominem a resolução de problemas que envolvam as quatro operações, além da potenciação e da radiciação de números racionais.

Potenciação

Leia o trecho da seguinte notícia:

Plataforma *web* detecta *fake news* em português de forma automática

Na atual era de *fake news* tem sido cada vez mais desafiador distinguir notícias falsas ou falsificadas das reais.

Uma plataforma *web* criada por pesquisadores ligados ao Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI) [da USP] pode facilitar essa tarefa.

Por meio de uma combinação de modelos estatísticos e técnicas de aprendizado de máquina, a plataforma é capaz de predizer a probabilidade de um texto ser *fake*.

Resultados preliminares indicaram que o sistema foi capaz de detectar notícias falsas com 96% de precisão.

[...]

Elton Alisson. Plataforma *web* detecta *fake news* em português de forma automática. *Agência Fapesp*, 23 fev. 2022. Disponível em: https://agencia.fapesp.br/plataforma-web-detecta-ifake-news-i-em-portugues-de-forma-automatica/38004/. Acesso em: 2 maio 2022.

Agora, imagine que Marcelo recebeu uma *fake news* por um aplicativo de mensagens. Sem checar a veracidade dessa notícia, ele a compartilhou com 3 amigos. Cada um desses amigos, por sua vez, também compartilhou a notícia falsa com mais 3 pessoas e assim sucessivamente. No quinto compartilhamento, essa notícia atingiu quantas pessoas?

Seguindo esse padrão, após o quinto envio, 3^5 pessoas terão recebido a notícia falsa, ou seja, 243 pessoas.

João Picoli/ID/BR

24

Essa situação mostra um caso de potenciação que já estudamos: potenciação cuja base e cujo expoente são números naturais. Vamos rever algumas situações e ampliar nosso estudo de potenciação para os números reais.

TERMOS DA POTENCIAÇÃO

expoente

$5^2 = 25$

base | potência

Potência com expoente natural

Vamos estudar os três casos de potência com expoente natural: expoente 1, expoente zero e expoente maior que 1.

Potência com expoente 1

Potências cuja base é um número real e o expoente é 1 têm resultado igual à própria base.

$$\boxed{a^1 = a, \text{ com } a \in \mathbb{R}}$$

Exemplos

A. $4^1 = 4$

B. $(\sqrt{3})^1 = \sqrt{3}$

C. $\left(\frac{2}{9}\right)^1 = \frac{2}{9}$

D. $(3{,}6)^1 = 3{,}6$

Potência com expoente zero

Potências cuja base é um número real diferente de zero e o expoente é zero têm resultado igual a 1.

$$\boxed{a^0 = 1, \text{ com } a \in \mathbb{R}^*}$$

Exemplos

A. $35^0 = 1$

B. $(\sqrt{5})^0 = 1$

C. $\left(\frac{2}{9}\right)^0 = 1$

D. $(84{,}85)^0 = 1$

Potência com expoente natural maior que 1

Potências cuja base é um número real e o expoente é um número natural maior que 1 têm resultado igual ao produto dessa base por ela mesma tantas vezes quanto indicar o expoente.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ vezes}}, \text{ com } a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1$$

Potência de base real positiva

Toda potência de base real positiva e expoente natural é um número positivo.

Exemplos

A. $6^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,296$

B. $(9{,}1)^2 = 9{,}1 \cdot 9{,}1 = 82{,}81$

C. $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

D. $(1{,}5)^2 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$

- O contexto apresentado nesta abertura do capítulo pode servir de ponto de partida para um trabalho interdisciplinar com o componente curricular Língua Portuguesa, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09LP01** [Analisar o fenômeno da disseminação de notícias falsas nas redes sociais e desenvolver estratégias para reconhecê-las, a partir da verificação/avaliação do veículo, fonte, data e local da publicação, autoria, URL, da análise da formatação, da comparação de diferentes fontes, da consulta a *sites* de curadoria que atestam a fidedignidade do relato dos fatos e denunciam boatos etc.].
- Compartilhe com a turma um *podcast* ou um texto de como identificar uma *fake news* e observe se eles têm esses comportamentos, disponível em: https://jornal.usp.br/podcast/fake-news-nao-pod-01-como-identificar-uma-fake-news/ (acesso em: 30 jun. 2022). Incentive-os a refletir que essas notícias abordam diversos temas em debate na sociedade com o objetivo de impedir que as pessoas tenham acesso à veracidade das informações, o que pode prejudicá-las de acordo com a situação vivenciada por elas, como saúde, ciência, mudanças climáticas, política, etc.
- Ressalte a importância de todos se posicionarem de maneira crítico-reflexiva para que a sociedade se torne melhor e utilizar a internet de maneira responsável, com atitudes de um bom cidadão digital. Esse debate desenvolve os **Temas Contemporâneos Transversais** Educação em Direitos Humanos e Ciência e Tecnologia, que pertencem, respectivamente, às macroáreas **Cidadania e Civismo** e **Ciência e Tecnologia**.
- Retome com os estudantes a potenciação com expoente natural apresentando-lhes alguns exemplos. Varie a base para relembrar os casos que envolvem potências de expoentes zero e um.
- Explique aos estudantes que a potenciação corresponde a uma multiplicação de fatores iguais, evitando que eles se confundam e efetuem o produto entre a base e o expoente da potência, por não compreender o significado da potenciação.

- Retome com os estudantes a diferença entre potências de bases reais negativas com expoente par e expoente ímpar.
- Relembre aos estudantes que, quando o sinal do expoente é negativo, se eleva o inverso da base ao módulo do expoente.

PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

- Apresente algebricamente as propriedades da potenciação relacionando-as com exemplos numéricos.
- O entendimento das propriedades das potências será útil na transformação e na simplificação de expressões. Verifique se os estudantes compreenderam as propriedades das potências; caso ainda tenham dúvidas, dê-lhes outros exemplos para saná-las.
- Pedir aos estudantes que mostrem algebricamente cada uma das propriedades das potências auxilia no desenvolvimento dos diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático, uma vez que eles utilizam fatos conhecidos para tentar justificar tais propriedades.

Potência de base real negativa

Toda potência de base real negativa e expoente natural ímpar é um número negativo.

Exemplo

$(-5{,}3)^3 = (-5{,}3) \cdot (-5{,}3) \cdot (-5{,}3) = -148{,}877$

Toda potência de base real negativa e expoente natural par é um número positivo.

Exemplo

$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

Potência com expoente inteiro negativo

Toda potência de base real diferente de zero e expoente inteiro negativo é dada por $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

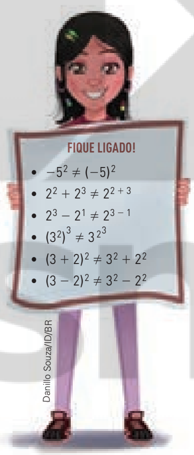
Exemplos

A. $4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

B. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

Propriedades da potenciação

Para representar as propriedades de uma potência, considere que a e b são números reais não nulos e m e n são números inteiros.



Danillo Souza/ID/BR

Propriedade	Representação algébrica	Exemplos
Produto de potências de mesma base: mantemos a base e adicionamos os expoentes.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e m e $n \in \mathbb{Z}$	• $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$ • $\left(-\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^{4+2} = \left(-\frac{2}{5}\right)^6$
Quociente de potências de mesma base: mantemos a base e subtraímos os expoentes.	$a^m : a^n = a^{m-n}$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e m e $n \in \mathbb{Z}$	• $7^6 : 7^4 = 7^{6-4} = 7^2$ • $\left(\frac{3}{8}\right)^5 : \left(\frac{3}{8}\right)^7 = \left(\frac{3}{8}\right)^{5-7} = \left(\frac{3}{8}\right)^{-2}$
Potência de uma potência: mantemos a base e multiplicamos os expoentes.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e m e $n \in \mathbb{Z}$	• $[(3{,}1)^2]^4 = 3{,}1^{2 \cdot 4} = 3{,}1^8$ • $\left[\left(\frac{1}{6}\right)^3\right]^5 = \left(\frac{1}{6}\right)^{3 \cdot 5} = \left(\frac{1}{6}\right)^{15}$
Potência de um produto: elevamos cada fator da multiplicação ao expoente da potência.	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, com a e $b \in \mathbb{R}^*$ e $m \in \mathbb{Z}$	• $(4{,}5 \cdot 2{,}7)^4 = 4{,}5^4 \cdot 2{,}7^4$ • $\left[\left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \frac{3}{7}\right]^9 = \left(-\frac{4}{9}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^9$
Potência de um quociente: elevamos o dividendo e o divisor ao expoente da potência.	$(a : b)^m = a^m : b^m$, com a e $b \in \mathbb{R}^*$ e $m \in \mathbb{Z}$	• $[(-6) : 5{,}9]^3 = (-6)^3 : 5{,}9^3$ • $\left(\frac{1}{2} : \frac{5}{9}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 : \left(\frac{5}{9}\right)^7$

Notação científica

Quando representamos um número por um produto de dois fatores, sendo um deles um número maior que ou igual a 1 e menor que 10 e o outro uma potência de 10, dizemos que o número está escrito em **notação científica**.

Para efetuar adições ou subtrações com esses números, precisamos, primeiro, representá-los na mesma potência de 10. No caso das multiplicações ou das divisões, basta efetuar as operações.

Exemplos

A. $3{,}2 \cdot 10^5 + 5{,}2 \cdot 10^5 = (3{,}2 + 5{,}2) \cdot 10^5 = 8{,}4 \cdot 10^5$

B. $4{,}584 \cdot 10^3 - 2{,}541 \cdot 10^2$

Para deixar os dois números na mesma potência de 10, podemos transformar $2{,}541 \cdot 10^2$ em um número com potência de base 10 e expoente 3.

$$\underbrace{2{,}541}_{:10} \cdot \underbrace{10^2}_{\cdot 10}$$

Portanto, $2{,}541 \cdot 10^2 = 0{,}2541 \cdot 10^3$.

Agora, podemos efetuar a subtração:

$4{,}584 \cdot 10^3 - 0{,}2541 \cdot 10^3 = (4{,}584 - 0{,}2541) \cdot 10^3 = 4{,}3299 \cdot 10^3$

C. $2{,}5 \cdot 10^7 \cdot 3{,}2 \cdot 10^3 = (2{,}5 \cdot 3{,}2) \cdot (10^7 \cdot 10^3) = 8 \cdot 10^{7+3} = 8 \cdot 10^{10}$

D. $8{,}54 \cdot 10^6 : (3{,}2 \cdot 10^{-2}) = (8{,}54 : 3{,}2) \cdot (10^6 : 10^{-2}) = 2{,}66875 \cdot 10^{6-(-2)} =$
$= 2{,}66875 \cdot 10^8$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Em cada caso, identifique a propriedade utilizada.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$ **Potência de um quociente.**

b) $(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4}$ **Potência de uma potência.**

c) $7^2 : 7^5 = 7^{2-5}$ **Quociente de potências de mesma base.**

d) $8^3 \cdot 8^5 = 8^{3+5}$ **Produto de potências de mesma base.**

e) $(2 \cdot 6)^2 = 2^2 \cdot 6^2$ **Potência de um produto.**

2. Nos itens a seguir, aplique as propriedades da potenciação e dê o resultado na forma de uma única potência.

a) $4^6 \cdot 4^{-3}$ $\mathbf{4^3}$

b) $(0{,}2)^{-2} : (0{,}2)^2$ $\mathbf{(0{,}2)^{-4}}$

c) $\left(\frac{1}{8}\right)^6 : \left(\frac{1}{8}\right)^7$ **8**

d) $(a^8)^2$ $\mathbf{a^{16}}$

e) $2^7 \cdot 2^4 \cdot 2^2$ $\mathbf{2^{13}}$

f) $b^m \cdot b^{m+2} \cdot b^{m+4}$ $\mathbf{b^{3m+6}}$

3. Reduza os casos a seguir a uma potência de base 3.

a) $\frac{1}{243}$ $\mathbf{3^{-5}}$

b) 9^5 $\mathbf{3^{10}}$

c) $\left(\frac{1}{81}\right)^3$ $\mathbf{3^{-12}}$

d) 27^{-4} $\mathbf{3^{-12}}$

4. Determine o valor das potências.

a) 3^{2^4} **43 046 721**

b) $(3^2)^4$ **6 561**

5. Em cada caso, escreva a base da potência na forma de fração.

a) $(3^{-2})^3$ $\mathbf{\left(\frac{1}{3}\right)^6}$

b) $(4^2)^{-2}$ $\mathbf{\left(\frac{1}{4}\right)^4}$

c) $(5^1)^{-1}$ $\mathbf{\frac{1}{5}}$

d) $(6^1)^{-4}$ $\mathbf{\left(\frac{1}{6}\right)^4}$

e) $(14^6)^3$ $\mathbf{\left(\frac{1}{14}\right)^{-18}}$

f) $(23^{-5})^2$ $\mathbf{\left(\frac{1}{23}\right)^{10}}$

6. Uma bactéria tem $5 \cdot 10^{-6}$ metro de medida de comprimento, e um vírus, $5 \cdot 10^{-9}$ metro de medida de comprimento. Usando a notação científica, determine qual desses organismos tem maior medida de comprimento. **A bactéria.**

NOTAÇÃO CIENTÍFICA

- Reforce para os estudantes que a notação científica é uma maneira de escrever números muito pequenos ou muito grandes, representado-os por meio de um produto de dois fatores, em que um dos fatores é um número positivo maior que ou igual a 1 e menor que 10 e o outro fator é uma potência de base 10.
- É importante que os estudantes compreendam como operar com números escritos em notação científica, pois esse conteúdo será utilizado na unidade **8**.
- Na atividade **6**, espera-se que os estudantes comparem as potências de base 10 de cada organismo e descubram qual deles tem a maior medida de comprimento.

DE OLHO NA BASE

Compreender como representar um número em notação científica contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA04**.

RADICIAÇÃO

- Retome com os estudantes o conceito de radiciação por meio de sua relação inversa com a potenciação.
- Se os estudantes tiverem dúvidas sobre os conceitos apresentados nestas páginas do Livro do Estudante, dê-lhes outros exemplos numéricos.

TERMOS DA RADICIAÇÃO

índice

$\sqrt[n]{a} = b$ raiz

radicando

Radiciação

Vamos ampliar o estudo de radiciação para os números reais.

Raiz quadrada

A raiz quadrada de um número real não negativo *a* é o número real que, elevado ao quadrado, é igual a *a*.

Raiz quadrada exata

Dizemos que a raiz quadrada de um número real é exata quando resulta em um número racional.

Exemplos

A. $\sqrt{0,49} = 0,7$, pois: $(0,7)^2 = 0,49$

B. $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$, pois: $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

Raiz quadrada aproximada

Quando não existe raiz quadrada exata de um número real, usamos aproximações decimais com quantas casas quisermos.

Exemplos

A. $\sqrt{2} \simeq 1,41$ ou $\sqrt{2} \simeq 1,414$ ou $\sqrt{2} \simeq 1,4142$ ou $\sqrt{2} \simeq 1,41421$

B. $\sqrt{7} \simeq 2,6$ ou $\sqrt{7} \simeq 2,65$ ou $\sqrt{7} \simeq 2,646$ ou $\sqrt{7} \simeq 2,6458$

Raiz cúbica

A raiz cúbica de um número real *a* é o número real que, elevado ao cubo, é igual a *a*.

Exemplos

A. $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois: $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

B. $\sqrt[3]{0,008} = 0,2$, pois: $0,2^3 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$

Raiz enésima

A raiz enésima de um número real *a* é o número real *b* – de mesmo sinal que *a*– que, elevado ao índice natural *n*, maior ou igual a 2, é igual a *a*, ou seja:

$\sqrt[n]{a} = b$ se e somente se $b^n = a$, em que *a* e *b* têm o mesmo sinal e $n \geqslant 2$

Exemplos

A. $\sqrt[4]{81} = 3$, pois: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

B. $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois: $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Para as raízes enésimas, vamos considerar dois casos: índice par e índice ímpar.

Índice par

Se o índice n for um número natural par, o radicando a não pode ser menor que zero, pois não existe número real que, elevado ao quadrado ou a qualquer outro expoente par, tenha como resultado um número real negativo. Assim, $\sqrt[n]{a}$ será positivo sempre que estiver definido.

Exemplos

A. $\sqrt[6]{-64}$ não é um número real, pois não existe número real que elevado a 6 seja igual a -64.

B. $\sqrt[6]{64} = 2$, pois: $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

Índice ímpar

Se o índice n for um número natural ímpar, o radicando a pode ser menor que zero, pois um número real negativo elevado a um expoente ímpar tem como resultado um número real negativo. Assim, $\sqrt[n]{a}$ pode ser menor que zero.

Se a for um número real menor que zero, $\sqrt[n]{a}$ será um número real negativo.

Exemplo

$\sqrt[7]{-2\,187} = -3$, pois: $(-3)^7 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) =$
$= -2\,187$

Se a for um número real maior que zero, $\sqrt[n]{a}$ será um número real positivo.

Exemplo

$\sqrt[5]{7\,776} = 6$, pois: $6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7\,776$

Potência com expoente fracionário

Toda potência de base real positiva e expoente de número racional pode ser escrita como uma raiz.

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ com } a \in \mathbb{R}^*_+,\ m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^*}$$

Exemplos

A. $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$

B. $(-4)^{\frac{8}{7}} = \sqrt[7]{(-4)^8}$

ATIVIDADES

9. Alternativa b. Resposta possível: z tem valor positivo se x for par e $y > 0$.

Responda sempre no caderno.

7. Verifique se as igualdades a seguir são verdadeiras ou falsas.

a) $\sqrt{16} = \sqrt[5]{32}$ **Falsa.**

b) $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[7]{1}$ **Falsa.**

c) $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[9]{-1}$ **Verdadeira.**

d) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[4]{81}$ **Falsa.**

8. Quais raízes a seguir não estão definidas no conjunto dos números reais? **A do item a.**

a) $\sqrt[6]{-15}$ b) $\sqrt[5]{8}$ c) $\sqrt[4]{444}$

9. Considere a expressão $\sqrt[x]{y} = z$, com y e $z \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{N}$ e $x \geqslant 2$. Indique no caderno a alternativa falsa e corrija-a.

a) z tem valor negativo se x for ímpar e $y < 0$.

b) z tem valor positivo se x for par e $y < 0$.

10. Calcule:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ **2** b) $27^{\frac{1}{3}}$ **3** c) $32^{\frac{1}{5}}$ **2**

- Explique aos estudantes que raízes de índice par de números negativos não são números reais e que raízes de índice ímpar são sempre reais, mesmo quando o radicando for negativo.
- Chame a atenção dos estudantes para o fato de que as potências de expoente fracionário podem ser escritas como raízes.
- É importante ficar atento se os estudantes não confundem o numerador e o denominador ao escrever a raiz usando a representação de potência com expoente fracionário. Caso eles tenham essa dificuldade, explique-lhes com outros exemplos de forma que eles consigam perceber que o numerador da fração será a potência do radicando e o denominador será o índice da raiz.
- Na atividade **8**, explique aos estudantes que o fato de uma raiz não estar definida em dado conjunto significa que não é possível determiná-la nesse conjunto. Nesse caso, especificamente, não existe um número real que, elevado à sexta potência, resulte em -15.
- Para auxiliar os estudantes na atividade **9**, proponha a eles que substituam x, y e z por números conforme descrito em cada item.

DE OLHO NA BASE

Compreender que as potências com expoente fracionário podem ser escritas como uma raiz e efetuar cálculos como os propostos na atividade **10** contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA03**.

- Explique as propriedades dos radicais aos estudantes com os exemplos apresentados no Livro do Estudante. Se necessário, dê-lhes outros exemplos numéricos.
- Se julgar oportuno, compare as propriedades da potenciação e as da radiciação.

Propriedades dos radicais

A fim de facilitar os cálculos, veremos a seguir algumas propriedades que envolvem as raízes enésimas de números reais.

1ª propriedade

Sendo *a* um número real e *n* um número natural ímpar maior que 2, temos:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ com } a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ ímpar maior que 2}}$$

Sendo *a* um número real e *n* um número natural par não nulo, temos:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = |a|, \text{ com } a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \text{ par}}$$

Exemplos

A. $\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

B. $\sqrt[3]{-729} = \sqrt[3]{(-9)^3} = -9$

C. $\sqrt[4]{1\,296} = \sqrt[4]{6^4} = 6$

D. $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

2ª propriedade

Sendo *a* um número real não negativo, ao dividir o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número natural maior que zero, o valor do radical não se altera.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+,\ m \in \mathbb{Z},\ n \text{ e } p \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant 2 \text{ e } p \text{ divisor comum de } m \text{ e de } n}$$

Exemplo

Considere os radicais $\sqrt[12]{8^{12}}$ e $\sqrt[6]{8^6}$.

Como vimos na primeira propriedade, $\sqrt[12]{8^{12}} = 8$ e $\sqrt[6]{8^6} = 8$. Logo, $\sqrt[12]{8^{12}} = \sqrt[6]{8^6}$.

Podemos dizer que $\sqrt[6]{8^6}$ é uma simplificação de $\sqrt[12]{8^{12}}$. Para fazer essa simplificação, dividimos o expoente do radicando e o índice do radical pelo mesmo número. Observe:

$$\sqrt[12]{8^{12}} = \sqrt[12:2]{8^{12:2}} = \sqrt[6]{8^6} = 8$$

Esse processo pode ser feito para qualquer radical $\sqrt[n]{a^m}$, em que *m* e *n* têm divisor comum diferente de 1 e *a* é um número real não negativo.

Também podemos escrever a 2ª propriedade da seguinte maneira:

Ao multiplicar o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número natural maior que zero, o valor do radical não se altera.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+,\ m \in \mathbb{Z},\ n \text{ e } p \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \geqslant 2}$$

Exemplo

$$\sqrt[7]{\frac{5}{4}} = \sqrt[7 \cdot 3]{\left(\frac{5}{4}\right)^{1 \cdot 3}} = \sqrt[21]{\left(\frac{5}{4}\right)^3}$$

3ª propriedade

Sendo a e b números reais não negativos e n um número natural maior ou igual a 2, temos:

$$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2}$$

Exemplo

Vamos calcular o valor de $\sqrt{16 \cdot 4}$ e de $\sqrt{16} \cdot \sqrt{4}$.

$\sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{64} = 8$

$\sqrt{16} \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$

Assim, $\sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{4}$.

4ª propriedade

Sendo a e b números reais não negativos, com $b \neq 0$, e n um número natural maior ou igual a 2, temos:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{R}_+, b \neq 0, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2}$$

Exemplo

Vamos calcular o valor de $\sqrt[4]{\frac{625}{256}}$ e de $\frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{256}}$.

$\sqrt[4]{\frac{625}{256}} = \sqrt[4]{\left(\frac{5}{4}\right)^4} = \frac{5}{4}$

$\frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{256}} = \frac{\sqrt[4]{5^4}}{\sqrt[4]{4^4}} = \frac{5}{4}$

Assim, $\sqrt[4]{\frac{625}{256}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{256}}$.

5ª propriedade

Sendo a um número real não negativo e n e p números naturais com n e p maiores ou iguais a 2, temos:

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+, n \text{ e } p \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \text{ e } p \geqslant 2}$$

Exemplo

Vamos calcular o valor de $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}}$ e de $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$.

$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2}$

$\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = \frac{1}{2}$

Assim, $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{64}}$.

- Explore as propriedades dos radicais enfatizando as ideias apresentadas em cada uma delas. É importante incentivar os estudantes a compreender matematicamente as propriedades dos radicais, evitando a memorização do conteúdo.

- Explique aos estudantes que, para realizar a comparação entre radicais, é necessário que os índices dos radicais que se deseja comparar sejam iguais.
- Se julgar necessário, retome com os estudantes o procedimento para realizar o cálculo do mmc.

Comparação entre radicais

A comparação entre radicais pode ser imediata, nos casos em que os índices são iguais, ou pode requerer a manipulação dos radicais, nos casos em que os índices são diferentes. Vamos estudar esses dois casos.

Radicais com índices iguais

Quando os radicais têm mesmo índice, basta comparar os radicandos.

Exemplos

A. Vamos comparar os radicais $\sqrt{25}$ e $\sqrt{81}$.

Comparando os radicandos, temos $25 < 81$. Logo, $\sqrt{25} < \sqrt{81}$.

B. Vamos comparar os radicais $\sqrt[3]{10}$ e $\sqrt[3]{7}$.

Como $10 > 7$, então $\sqrt[3]{10} > \sqrt[3]{7}$.

Radicais com índices diferentes

Para comparar radicais com índices diferentes, é preciso reduzi-los ao mesmo índice e aplicar a regra anterior.

Exemplos

A. Vamos comparar os radicais $\sqrt[5]{3^2}$ e $\sqrt[3]{2}$.

Os índices desses radicais são 5 e 3. Podemos usar o mmc para reduzir os radicais ao mesmo índice.

Como mmc(5, 3) = 15, temos:

$$\sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5 \cdot 3]{3^{2 \cdot 3}} = \sqrt[15]{3^6} = \sqrt[15]{729}$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 5]{2^{1 \cdot 5}} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{32}$$

Agora que o índice dos radicais é o mesmo, podemos comparar os radicandos.

Como $729 > 32$, então $\sqrt[15]{729} > \sqrt[15]{32}$.

Portanto, $\sqrt[5]{3^2} > \sqrt[3]{2}$.

B. Vamos comparar os radicais $\sqrt[4]{2^3}$ e $\sqrt[6]{9^2}$.

mmc(4, 6) = 12

$$\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4 \cdot 3]{2^{3 \cdot 3}} = \sqrt[12]{2^9} = \sqrt[12]{512}$$

$$\sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6 \cdot 2]{9^{2 \cdot 2}} = \sqrt[12]{9^4} = \sqrt[12]{6\,561}$$

Como $512 < 6561$, então $\sqrt[12]{512} < \sqrt[12]{6\,561}$.

Portanto, $\sqrt[4]{2^3} < \sqrt[6]{9^2}$.

C. Vamos escrever os números $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{2}$ e $\sqrt[4]{2}$ em ordem crescente.

mmc(3, 5, 4) = 60

$\sqrt[3]{2} = \sqrt[60]{2^{20}}$, $\sqrt[5]{2} = \sqrt[60]{2^{12}}$ e $\sqrt[4]{2} = \sqrt[60]{2^{15}}$

Como $2^{12} < 2^{15} < 2^{20}$, então $\sqrt[60]{2^{12}} < \sqrt[60]{2^{15}} < \sqrt[60]{2^{20}}$.

Logo, $\sqrt[5]{2} < \sqrt[4]{2} < \sqrt[3]{2}$.

Simplificação de radicais

Em alguns casos, podemos escrever expressões mais simples para representar radicais. Quando reescrevemos um radical de maneira mais simples, estamos fazendo uma simplificação de radicais.

Índice do radical e expoentes do radicando com fator em comum

Quando o índice do radical e os expoentes de todos os fatores do radicando têm divisor comum diferente de 1, podemos dividir o índice do radical e todos os expoentes do radicando por esse divisor comum.

Exemplos

A. $\sqrt[9]{5^6} = \sqrt[9:3]{5^{6:3}} = \sqrt[3]{5^2}$

B. $\sqrt[12]{9^8} = \sqrt[12:4]{9^{8:4}} = \sqrt[3]{9^2}$

Um ou mais fatores do radicando com expoente igual ao índice do radical

Se um ou mais fatores do radicando têm expoente igual ao índice do radical, esses fatores podem ser extraídos da raiz.

Exemplos

A. Vamos simplificar $\sqrt{2^2 \cdot 3^2}$.

De acordo com a 3ª propriedade dos radicais, temos:

$$\sqrt{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2}$$

De acordo com a 1ª propriedade dos radicais, temos:

$$\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} = 2 \cdot 3 = 6$$

B. $\sqrt[3]{5^3 \cdot 6^2} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{6^2} = 5\sqrt[3]{6^2}$

Em alguns casos, podemos decompor o radicando em fatores primos.

Exemplos

A. $\sqrt[4]{2\,401} = \sqrt[4]{7^4} = 7$

B. $\sqrt[3]{7\,000} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5^3 \cdot 7} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{7} = 10\sqrt[3]{7}$

Em outros casos, podemos decompor o radicando em um produto de potências de mesma base para poder extrair fatores desse mesmo radicando.

Exemplos

A. $\sqrt[5]{4^7} = \sqrt[5]{4^5 \cdot 4^2} = 4\sqrt[5]{4^2}$

B. $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$

- Comente com os estudantes que ao ordenar os radicais, quando for necessário realizar alguma transformação, devemos apresentar na resposta final os números propostos inicialmente. Observe que, no exemplo **C**, após determinar o mmc e realizar as transformações, que possibilitam a comparação entre os radicais, a resposta final traz os números antes da transformação.
- Se julgar necessário, retome com os estudantes o procedimento para realizar a decomposição em fatores primos e as propriedades da potenciação.

- Explique aos estudantes que, para dois radicais serem semelhantes, eles precisam necessariamente ter o mesmo índice e o mesmo radicando.
- Apresente aos estudantes alguns radicais e, depois, peça a eles que mostrem outros radicais semelhantes aos apresentados no Livro do Estudante.
- Antes de realizar a atividade **11**, sugira aos estudantes que fatorem os radicandos e reescreva-os em forma de potência.

Radicais semelhantes

Dois ou mais radicais são semelhantes quando têm o mesmo índice e o mesmo radicando.

Exemplos

A. $\sqrt[3]{5}$, $-2\sqrt[3]{5}$ e $\frac{5\sqrt[3]{5}}{3}$ são radicais semelhantes.

B. $-\sqrt[4]{5}$ e $\sqrt[3]{5}$ não são radicais semelhantes, pois, apesar de terem o mesmo radicando, têm índices diferentes.

C. $\sqrt{2}$ e $\sqrt{14}$ não são radicais semelhantes, pois, apesar de terem o mesmo índice, têm radicandos diferentes.

Há casos em que, apesar de os radicais terem índices ou radicandos diferentes, é possível obter radicais semelhantes após algumas transformações.

Exemplos

A. Vamos verificar se $\sqrt[3]{72}$ e $\sqrt[3]{1\,125}$ são radicais semelhantes.

$\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{9}$

$\sqrt[3]{1\,125} = \sqrt[3]{3^2 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[3]{5^3} = 5\sqrt[3]{3^2} = 5\sqrt[3]{9}$

Portanto, $\sqrt[3]{72}$ e $\sqrt[3]{1\,125}$ são radicais semelhantes.

B. Vamos verificar se 5 e $\sqrt[3]{8}$ são semelhantes.

Note que 5 pode ser expresso como radical:

$$5 = \sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{125}$$

Logo, $\sqrt[3]{125}$ e $\sqrt[3]{8}$ não são radicais semelhantes, pois têm radicandos diferentes.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

11. Utilize as propriedades dos radicais para determinar o valor de cada expressão a seguir.

a) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{27}}$ $\sqrt[5]{3}$

b) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{4}$ 16

c) $\left(\sqrt[5]{\sqrt{1\,024}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3\,125}}{\sqrt[3]{25}}\right)^3$ 1 000

12. Escreva os radicais representados em cada item em ordem crescente.

a) $\sqrt{7}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{19}$ e $\sqrt{3}$ $\sqrt{3} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{19}$

b) $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{10}$ e $\sqrt[3]{1}$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$, $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$ e $\sqrt[6]{0,81}$

d) $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt[2]{3^3}$ e $\sqrt[6]{15}$ $\sqrt[6]{15} < \sqrt[3]{2^2} < \sqrt[2]{3^3}$

e) $\sqrt{9}$, $\sqrt{40}$ e $\sqrt[3]{9}$ $\sqrt[3]{9} < \sqrt{9} < \sqrt{40}$

13. Simplifique os seguintes radicais:

a) $\sqrt[8]{7^4}$ $\sqrt{7}$

b) $\sqrt[4]{\frac{625}{10\,000}}$ $\frac{1}{2}$

c) $\sqrt[15]{(5,2)^5}$ $\sqrt[3]{5,2}$

d) $\sqrt[24]{8^4}$ $\sqrt{2}$

e) $\sqrt[12]{27^5}$ $\sqrt[4]{3^5}$

f) $\sqrt[6]{\left(\frac{16}{25}\right)^2}$ $\sqrt[3]{\left(\frac{4}{5}\right)^2}$

14. Verifique se os radicais são semelhantes em cada item.

a) $\sqrt{300}$, $\sqrt{500}$, $\sqrt{700}$ **Não são semelhantes.**

b) $\sqrt[3]{1\,000}$, $\sqrt[3]{2\,000}$, $\sqrt[3]{5\,000}$, $\sqrt[3]{11\,000}$

c) $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt{300}$, $\sqrt{324}$ **Não são semelhantes.**

d) $\sqrt{27}$, $\sqrt{108}$, $\sqrt{243}$ **São semelhantes.**

14. b) Não são semelhantes.

12. b) $\sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{10}$

12. c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} < \sqrt[3]{\frac{5}{9}} < \sqrt[3]{\frac{3}{5}} < \sqrt[6]{0,81}$

Adição e subtração de radicais

A adição e a subtração de radicais, quando o valor de cada um desses radicais é um número racional, são iguais à adição e à subtração desses números racionais.

Exemplos

A. $\sqrt{25} + \sqrt{16} = 5 + 4 = 9$

B. $\sqrt{100} - \sqrt[3]{216} = 10 - 6 = 4$

Na adição e na subtração de radicais, quando pelo menos um deles é um número irracional, devemos determinar radicais semelhantes em todos os termos para, então, adicioná-los e subtraí-los.

Quando não há radicais semelhantes, não é possível realizar a adição algébrica.

Exemplos

A. Vamos calcular $4\sqrt{11} + 3\sqrt{11}$.

Os dois radicais são semelhantes. Então, podemos efetuar as adições dos fatores externos e manter o mesmo radical.

$$4\sqrt{11} + 3\sqrt{11} = (4 + 3) \cdot \sqrt{11} = 7\sqrt{11}$$

B. Vamos calcular $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{81}$.

Começamos simplificando para encontrar os radicais semelhantes:

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$

Agora que os radicais são semelhantes, podemos efetuar as adições e as subtrações dos fatores externos, mantendo o mesmo radical.

$$\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{81} = 2\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = (2 - 1 + 3) \cdot \sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3}$$

C. Vamos calcular $\sqrt[6]{3^8} - \sqrt{225} - \sqrt[3]{81} + \sqrt{169}$.

Simplificando os radicais e efetuando a adição algébrica, temos:

$$\sqrt[6]{3^8} - \sqrt{225} - \sqrt[3]{81} + \sqrt{169} = \cancel{\sqrt[3]{3^4}} - \sqrt{15^2} - \cancel{\sqrt[3]{3^4}} + \sqrt{13^2} = -15 + 13 = -2$$

D. Vamos calcular $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$.

Esses radicais não são semelhantes; portanto, não é possível realizar a adição algébrica.

Observação

A soma de dois radicais, em geral, é diferente da raiz da soma de seus radicandos.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$$

Por exemplo, $\sqrt{4} + \sqrt{9} \neq \sqrt{4 + 9}$, pois:

$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$

$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

Logo, como $5 \neq \sqrt{13}$, concluímos que $\sqrt{4} + \sqrt{9} \neq \sqrt{4 + 9}$.

- É importante que os estudantes tenham compreendido como identificar e obter os radicais semelhantes para realizar as operações de adição e de subtração de radicais, quando pelo menos uma parcela for um número irracional.
- Explore os exemplos apresentados no Livro do Estudante e, se julgar necessário, retome com os estudantes as propriedades dos radicais.
- Reforce para os estudantes que, se os radicais não forem semelhantes, não será possível realizar a adição ou a subtração desses radicais.

- Solicite aos estudantes que tragam para a sala de aula uma calculadora simples e que possua o botão √.
- Explore o cálculo apresentado no exemplo do Livro do Estudante e, se julgar pertinente, proponha outras adições com números irracionais para que os estudantes as efetuem utilizando uma calculadora.
- Comente com os estudantes que o ponto, na maioria das calculadoras, indica a separação entre a parte inteira e a parte decimal do número.
- Na atividade **15**, sugira aos estudantes que decomponham os radicandos em fatores primos.
- Na atividade **16**, verifique se os estudantes apresentam dificuldades no uso da calculadora e na aproximação dos resultados.
- Na atividade **18**, se julgar necessário, relembre aos estudantes que a medida do perímetro é a soma das medidas de todos os lados de um polígono e que os polígonos regulares têm todos os lados congruentes.

DE OLHO NA BASE

Reconhecer e compreender radiciação auxiliará os estudantes a desenvolver as habilidades **EF09MA03** e **EF09MA04**.

Adição e subtração de radicais com a calculadora

Em alguns casos em que os radicais de uma expressão não são semelhantes, pode ser necessário determinar o valor aproximado da adição algébrica. Nessas situações, calculamos o valor aproximado de cada termo e efetuamos a adição.

Exemplo

Vamos calcular $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ usando a calculadora.

Digitamos na calculadora 3 e, em seguida, √. No visor, vai aparecer, por exemplo: 1.7320508. Em seguida, digitamos M+ para guardar esse número na memória da calculadora.

Depois, digitamos + 5 e, em seguida, √. No visor da calculadora, vai aparecer, por exemplo: 2.2360679.

Finalmente, digitamos = e, no visor, vai aparecer o resultado aproximado: 3.9681187.

Assim:

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} \simeq 3,9681187$$

CALCULADORA CIENTÍFICA

Em grande parte das calculadoras comuns, é possível obter o valor numérico da raiz quadrada de um número. No entanto, para determinar a raiz enésima de um número, é necessário usar uma calculadora científica.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

15. Calcule o resultado das adições algébricas a seguir.

a) $\sqrt[3]{18} + 5\sqrt[3]{18} - 13\sqrt[3]{18}$ **$-7\sqrt[3]{18}$**

b) $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{32}$ **$2\sqrt{2}$**

c) $\sqrt[2]{54} + \sqrt[2]{24} - \sqrt[2]{96}$ **$\sqrt{6}$**

d) $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{180}$ **$-\sqrt{5}$**

e) $\sqrt{300} - \sqrt[2]{27} - \sqrt{45}$ **$7\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$**

16. Calcule o resultado de cada adição e subtração utilizando uma calculadora. Aproxime as raízes até a segunda casa decimal.

a) $\sqrt{11} + \sqrt{13}$ **6,93**

b) $\sqrt{12} + \sqrt{6}$ **5,91**

c) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ **4,89**

d) $\sqrt{15} - \sqrt{19}$ **−0,49**

17. No caderno, reescreva as igualdades a seguir, substituindo o símbolo ■ pelo valor que as torna verdadeiras.

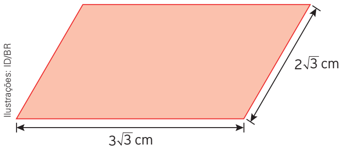
a) $3\sqrt{7} +$ ■ $-4\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$ **$6\sqrt{7}$**

b) ■ $- 4\sqrt{2} = \sqrt{18}$ **$7\sqrt{2}$**

c) $\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{135} =$ ■ **$4\sqrt[3]{5}$**

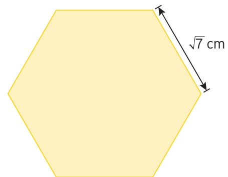
18. Determine a medida do perímetro de cada figura representada a seguir.

a) paralelogramo **$10\sqrt{3}$ cm**



Ilustrações: ID/BR

b) hexágono regular **$6\sqrt{7}$ cm**



Multiplicação de radicais

Vamos estudar a multiplicação de radicais no caso em que os índices são iguais e no caso em que os índices são diferentes.

Radicais com índices iguais

De acordo com a 3ª propriedade dos radicais, temos:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2$$

Assim, podemos escrever:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}, \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2}$$

Exemplos

A. $\sqrt[4]{343} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{343 \cdot 7} = \sqrt[4]{2401} = \sqrt[4]{7^4} = 7$

B. $\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{15} = \sqrt[5]{3^2 \cdot 15} = \sqrt[5]{135}$

Radicais com índices diferentes

Para multiplicar radicais com índices diferentes, basta expressá-los com índices iguais e efetuar a multiplicação.

Exemplos

A. Vamos calcular $\sqrt[3]{3^{-4}} \cdot \sqrt{3^3}$.

mmc(3, 2) = 6

$\sqrt[3]{3^{-4}} = \sqrt[3 \cdot 2]{3^{-4 \cdot 2}} = \sqrt[6]{3^{-8}}$

$\sqrt{3^3} = \sqrt[2 \cdot 3]{3^{3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{3^9}$

$\sqrt[3]{3^{-4}} \cdot \sqrt{3^3} = \sqrt[6]{3^{-8}} \cdot \sqrt[6]{3^9} = \sqrt[6]{3^{-8} \cdot 3^9} = \sqrt[6]{3^{-8+9}} = \sqrt[6]{3^1}$

B. Vamos calcular $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$.

mmc(4, 3) = 12

$\sqrt[4]{2} = \sqrt[4 \cdot 3]{2^{1 \cdot 3}} = \sqrt[12]{2^3}$

$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^{2 \cdot 4}} = \sqrt[12]{2^8}$

$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{2^3} \cdot \sqrt[12]{2^8} = \sqrt[12]{2^3 \cdot 2^8} = \sqrt[12]{2^{3+8}} = \sqrt[12]{2^{11}}$

C. Vamos calcular $\sqrt[6]{576} \cdot \sqrt{400} \cdot \sqrt{3}$.

Vamos decompor os radicandos em fatores primos e reduzir os radicais ao mesmo índice:

$\sqrt[6]{576} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 3^2}$

$\sqrt{400} = \sqrt{20^2} = 20$

$\sqrt{3} = \sqrt[2 \cdot 3]{3^{1 \cdot 3}} = \sqrt[6]{3^3}$

Por fim, efetuamos a multiplicação, simplificando quando possível:

$\sqrt[6]{576} \cdot \sqrt{400} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 3^2} \cdot 20 \cdot \sqrt[6]{3^3} = 20 \cdot \sqrt[6]{2^6 \cdot 3^2 \cdot 3^3} = 20 \cdot 2\sqrt[6]{3^5} =$

$= 40\sqrt[6]{243}$

- Apresente aos estudantes, com exemplos numéricos, os casos de multiplicação de radicais.
- Se necessário, relembre a 3ª propriedade dos radicais e o procedimento para determinar o mmc de dois números.

- Apresente aos estudantes, com exemplos numéricos, os casos de divisão de radicais.
- Se necessário, relembre a 4ª propriedade dos radicais e o procedimento para determinar o mmc de dois números.
- Na atividade **20**, verifique se os estudantes se lembram que, para calcular a medida da área de um retângulo, deve-se multiplicar a medida da base pela medida da altura.

Divisão de radicais

Vamos estudar a divisão de radicais no caso em que os índices são iguais e no caso em que os índices são diferentes.

Radicais com índices iguais

De acordo com a 4ª propriedade dos radicais, temos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{R}_+, b \neq 0, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2$$

Assim, podemos escrever:

$$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{R}_+, b \neq 0, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2}$$

Exemplos

A. $\sqrt[3]{128} : \sqrt[3]{2} = \dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

B. $\sqrt{24} : \sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$

Radicais com índices diferentes

Para dividir radicais com índices diferentes, basta expressá-los com índices iguais e efetuar a divisão.

Exemplo

Vamos calcular $\sqrt[5]{7^4} : \sqrt[4]{7^3}$.

mmc(5, 4) = 20

$\sqrt[5]{7^4} = \sqrt[5 \cdot 4]{7^{4 \cdot 4}} = \sqrt[20]{7^{16}}$

$\sqrt[4]{7^3} = \sqrt[4 \cdot 5]{7^{3 \cdot 5}} = \sqrt[20]{7^{15}}$

$\sqrt[5]{7^4} : \sqrt[4]{7^3} = \sqrt[20]{7^{16}} : \sqrt[20]{7^{15}} = \sqrt[20]{7^{16} : 7^{15}} = \sqrt[20]{7^{16-15}} = \sqrt[20]{7}$

ATIVIDADES Responda sempre no caderno.

19. Calcule o valor das expressões e simplifique-as sempre que possível.

a) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{99}} \cdot \dfrac{\sqrt{22}}{\sqrt{12}}$ **$\frac{1}{3}$**

b) $\dfrac{1}{\sqrt{8}} \cdot \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{27}}$ **$\frac{1}{3}$**

c) $2 \cdot \sqrt{\dfrac{12}{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{30}}{6\sqrt{2}}$ **2**

d) $\dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[6]{7}}$ **$\sqrt[6]{7}$**

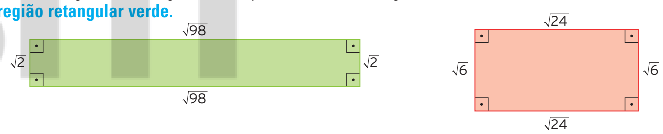
e) $6 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{54}} \cdot 3 \cdot \sqrt{\dfrac{27}{18}}$ **3**

f) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3^2}$ **$\sqrt[6]{108}$**

g) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}$ **$\sqrt[30]{2^{27} \cdot 3^{10}}$**

h) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{8} : \sqrt{4}$ **$\sqrt{3}$**

20. Qual das regiões retangulares representadas a seguir tem a maior medida de área?
A região retangular verde.



Ilustrações: ID/BR

Potência de radicais

Sendo a um número real não negativo, m um número inteiro e n um número natural, com $n \geqslant 2$, temos:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+,\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2$$

Exemplos

A. $\left(\sqrt[9]{4}\right)^4 = \sqrt[9]{4} \cdot \sqrt[9]{4} \cdot \sqrt[9]{4} \cdot \sqrt[9]{4} = \sqrt[9]{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \sqrt[9]{4^4}$

B. $\left(\sqrt[4]{5}\right)^6 = \sqrt[4]{5^6} = \sqrt[4:2]{5^{6:2}} = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2 \cdot 5} = 5\sqrt{5}$

C. $\left(\sqrt[10]{2^3}\right)^5 = \sqrt[10]{2^{3 \cdot 5}} = \sqrt[10]{2^{15}} = \sqrt[10:5]{2^{15:5}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

D. $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^{-3} = \sqrt[3]{(5^2)^{-3}} = \sqrt[3]{5^{-6}} = 5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

E. $\left(\sqrt[12]{2^9}\right)^4 = \sqrt[12]{(2^9)^4} = \sqrt[12]{2^{36}} = 2^3 = 8$

Racionalização de denominadores

Racionalizar o denominador de uma expressão fracionária que contém um ou mais radicais em seu denominador é encontrar uma expressão equivalente a essa, mas sem radicais no denominador.

Denominador com radical de índice 2

Para eliminar o radical no denominador, multiplicamos o numerador e o denominador por um mesmo número diferente de zero, obtendo uma expressão equivalente.

Exemplos

A. Vamos racionalizar $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

B. Vamos racionalizar $\dfrac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$.

$$\frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{18}}{3\sqrt{9}} = \frac{6\sqrt{2 \cdot 3^2}}{3 \cdot 3} = \frac{(6 \cdot 3) \cdot \sqrt{2}}{9} =$$

$$= \frac{18\sqrt{2}}{9} = 2\sqrt{2}$$

C. Vamos calcular $\sqrt{12{,}5} + \sqrt{64}$.

$$\sqrt{12{,}5} + \sqrt{64} = \sqrt{\frac{25}{2}} + 8 = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} + 8 = \frac{5}{\sqrt{2}} + 8$$

Vamos racionalizar o denominador de $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $\sqrt{12{,}5} + \sqrt{64} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} + 8$.

- Apresente, com exemplos numéricos, a potência de radicais.
- Mostre aos estudantes, com exemplos numéricos, os casos de racionalização de denominadores.
- Explique aos estudantes que, quando uma expressão fracionária tem denominador irracional, devemos racionalizar esse denominador, transformando-o em um número racional.

39

- Explique aos estudantes que, quando o índice do radical for maior que 2, devemos multiplicar numerador e denominador da expressão fracionária por um radical de mesmo índice e mesmo radicando com um expoente tal que a soma dos expoentes dos radicandos do denominador seja igual ao índice.
- Apresente aos estudantes, com exemplos numéricos, alguns casos de radicais e peça a eles que determinem qual deve ser o fator que devem escolher para multiplicar, de maneira que o produto seja racional.

Denominador com radical de índice maior que 2

Ao racionalizarmos um denominador em que aparece um radical de índice maior que 2, devemos multiplicar ambos os termos da expressão fracionária por um radical de mesmo índice e mesmo radicando, com um expoente tal que a soma dos expoentes dos radicandos do denominador seja igual ao índice.

Exemplos

A. Vamos racionalizar $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$.

Como o expoente do radicando é 1 e o índice do radical é 3, podemos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt[3]{4^2}$ para que o denominador se torne racional.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{2\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{2\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}}{4} = \frac{2 \cdot 2\sqrt[3]{2}}{4} =$$

$$= \frac{4\sqrt[3]{2}}{4} = \sqrt[3]{2}$$

B. Vamos racionalizar $\frac{12}{\sqrt[5]{3^2}}$.

$$\frac{12}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{12}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{12\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{12\sqrt[5]{27}}{3} = 4\sqrt[5]{27}$$

C. Vamos racionalizar $\frac{\sqrt[5]{2}}{3\sqrt[4]{2}}$.

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{3\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{3\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}}{3\sqrt[4]{2 \cdot 2^3}} = \frac{\sqrt[5 \cdot 4]{2^4} \cdot \sqrt[4 \cdot 5]{(2^3)^5}}{3\sqrt[4]{2^4}} =$$

$$= \frac{\sqrt[20]{2^4} \cdot \sqrt[20]{2^{15}}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt[20]{2^{19}}}{6}$$

Denominador com adição ou subtração de dois termos

Nos casos em que há uma adição ou uma subtração com pelo menos um radical no denominador, para racionalizá-lo temos de multiplicar essa adição ou subtração pela sua expressão conjugada e, em seguida, aplicar a propriedade distributiva da multiplicação.

EXPRESSÃO CONJUGADA

Dada a expressão $a + b$, a expressão conjugada a ela é $a - b$.

Exemplos

A. Vamos racionalizar $\frac{2}{2 + \sqrt{5}}$.

$$\frac{2}{2 + \sqrt{5}} = \frac{2}{2 + \sqrt{5}} \cdot \frac{(2 - \sqrt{5})}{(2 - \sqrt{5})} = \frac{2 \cdot (2 - \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{5}) \cdot (2 - \sqrt{5})} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 - 2\sqrt{5}}{2 \cdot 2 - \cancel{2\sqrt{5}} + \cancel{2\sqrt{5}} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{4 - 5} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{-1} =$$

$$= -4 + 2\sqrt{5}$$

B. Vamos racionalizar $\dfrac{18}{\sqrt{10}-2}$.

$$\frac{18}{\sqrt{10}-2} = \frac{18}{\sqrt{10}-2} \cdot \frac{(\sqrt{10}+2)}{(\sqrt{10}+2)} = \frac{18 \cdot (\sqrt{10}+2)}{(\sqrt{10}-2) \cdot (\sqrt{10}+2)} =$$

$$= \frac{18\sqrt{10} + 18 \cdot 2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} + \cancel{2\sqrt{10}} - \cancel{2\sqrt{10}} - 2 \cdot 2} = \frac{18\sqrt{10} + 36}{10 - 4} =$$

$$= \frac{18\sqrt{10} + 36}{6} = 3\sqrt{10} + 6$$

C. Vamos racionalizar $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$.

$$\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})} = \frac{5 \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{5\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{7 + \cancel{\sqrt{14}} - \cancel{\sqrt{14}} - 2} = \frac{5\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{7} + \sqrt{2}$$

D. Vamos racionalizar $\dfrac{5}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}$.

$$\frac{5}{\sqrt{15}+\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{15}+\sqrt{3}} \cdot \frac{(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{(\sqrt{15}-\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{5 \cdot (\sqrt{15}-\sqrt{3})}{(\sqrt{15}+\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{15}-\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{5\sqrt{15} - 5\sqrt{3}}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15} - \sqrt{15} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{15} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{15} - 5\sqrt{3}}{15 - \cancel{\sqrt{45}} + \cancel{\sqrt{45}} - 3} = \frac{5\sqrt{15} - 5\sqrt{3}}{12}$$

E. Vamos racionalizar $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}} \cdot \frac{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot (2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{3}+3\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{6} + 3 \cdot 2}{(2 \cdot 2) \cdot \sqrt{3 \cdot 3} + (2 \cdot 3) \cdot \sqrt{3 \cdot 2} - (3 \cdot 2) \cdot \sqrt{2 \cdot 3} - (3 \cdot 3) \cdot \sqrt{2 \cdot 2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{6} + 6}{4 \cdot 3 + \cancel{6\sqrt{6}} - \cancel{6\sqrt{6}} - 9 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{6} + 6}{12 - 18} = \frac{2\sqrt{6} + 6}{-6} = \frac{-\sqrt{6} - 3}{3}$$

- Explique aos estudantes que, no estudo de denominadores que apresentem uma soma ou uma subtração de dois termos, em que pelo menos um deles é um número irracional, é preciso inicialmente determinar a expressão conjugada e, em seguida, realizar o produto, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação.
- Comente com os estudantes que a expressão conjugada de $(a + b)$ é $(a - b)$. Se julgar necessário, apresente-lhes algumas expressões que tenham uma soma ou uma subtração de dois termos, em que pelo menos um deles seja um número irracional, e solicite-lhes que determinem a expressão conjugada.

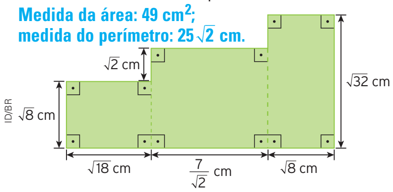
- Para calcular a medida da área da figura da atividade **21**, podem-se calcular separadamente as medidas das áreas das três regiões e adicioná-las. Para o cálculo da medida do perímetro, basta somar as medidas de todos os lados.
- Na atividade **24**, peça aos estudantes que racionalizem os radicais da coluna da esquerda e, em seguida, façam a correlação com a outra coluna.
- Na atividade **26**, solicite aos estudantes que resolvam as expressões dadas nos itens I, II e III antes de responder às questões.
- Para descobrir quantos baldes serão necessários para encher a piscina no item **a** da atividade **27**, devemos inicialmente calcular a medida da capacidade da piscina multiplicando as três dimensões, obtendo 18 m^3, que equivalem a 18 000 L.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

21. Calcule a medida da área e a medida do perímetro da figura a seguir racionalizando o denominador quando necessário.

Medida da área: 49 cm^2; medida do perímetro: $25\sqrt{2}$ cm.



22. Calcule as potências de radicais a seguir.

a) $\left(\sqrt[6]{7}\right)^4$ **$\sqrt[6]{2401}$**
b) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$ **$2\sqrt{2}$**
c) $\left(\sqrt{6}\right)^3$ **$6\sqrt{6}$**
d) $\left(\sqrt[4]{12}\right)^3$ **$2\sqrt[4]{108}$**
e) $\left(\sqrt[5]{16}\right)^3$ **$4\sqrt[5]{4}$**
f) $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^4$ **$25\sqrt[3]{25}$**
g) $\left(\sqrt[5]{3^4}\right)^2$ **$3\sqrt[5]{27}$**
h) $\left(\sqrt[4]{6^3}\right)^3$ **$36\sqrt[4]{6}$**

23. Racionalize os denominadores das expressões fracionárias a seguir.

a) $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ **$\frac{2\sqrt{5}}{15}$**
b) $\frac{9}{\sqrt{6}}$ **$\frac{3\sqrt{6}}{2}$**
c) $\frac{13}{21\sqrt{15}}$ **$\frac{13\sqrt{15}}{315}$**
d) $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$ **$\frac{5\sqrt{10}}{6}$**
e) $\frac{8}{\sqrt[3]{2}}$ **$4\sqrt[3]{4}$**
f) $\frac{14}{\sqrt[4]{7}}$ **$2\sqrt[4]{343}$**
g) $\frac{10}{\sqrt[5]{81}}$ **$\frac{10\sqrt[5]{3}}{3}$**
h) $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{36}}$ **$\frac{\sqrt[4]{108}}{6}$**

24. No caderno, associe cada radical da coluna da esquerda com o radical racionalizado correspondente da coluna da direita.

a-II; b-I; c-III

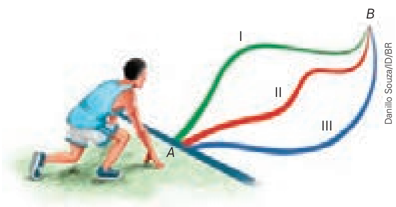
a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ I. $2\sqrt{5}$
b) $\frac{10}{\sqrt{5}}$ II. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
c) $\frac{1}{10\sqrt{5}}$ III. $\frac{\sqrt{5}}{50}$

25. Racionalize o denominador de cada expressão na forma de fração a seguir.

a) $\frac{16}{5+\sqrt{5}}$ **$\frac{4(5-\sqrt{5})}{5}$**
b) $\frac{7}{3-\sqrt{2}}$ **$3+\sqrt{2}$**
c) $\frac{9}{\sqrt{7}-4}$ **$-\sqrt{7}-4$**
d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}-1}$ **$\frac{4+\sqrt{2}}{7}$**
e) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{27}}$ **$\frac{3}{4}$**
f) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$
g) $\frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
h) $\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

26. Leia o texto e, depois, responda às questões.

Em uma corrida, os atletas devem escolher um dos caminhos a seguir para ir do ponto *A* para o ponto *B* no menor intervalo de tempo possível e correndo a uma velocidade de, no máximo, 10 quilômetros por hora durante o percurso.



O professor Carlos indicou as medidas de comprimento de cada caminho, em quilômetro, usando números reais.

I. $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}-1\right):\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

II. $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}+\frac{20\sqrt{3}+48}{5}$

III. $\sqrt[5]{(243)^2}-\sqrt{9}$

a) Qual dos caminhos o atleta deve escolher para percorrer a menor medida de distância? **O caminho I.**

b) Se um atleta escolher o caminho mais curto e conseguir correr o tempo todo na velocidade máxima permitida, em quanto tempo ele chegará ao ponto *B*? **Em 12 minutos.**

27. Para encher com água uma piscina em formato de paralelepípedo, pretende-se usar um balde com medida de capacidade de 5 L. As dimensões da piscina são $\frac{12}{\sqrt[3]{6^2}}$ m, $\frac{9}{\sqrt[3]{9}}$ m e $\sqrt[3]{1,5}$ m.

a) Quantos baldes serão necessários para encher a piscina? **3600 baldes.**

b) Supondo que sejam necessários 5 minutos para encher o balde e despejar seu conteúdo na piscina, em quanto tempo ela estará cheia? **Em 300 horas.**

c) Como você faria para encher uma piscina como essa? **Resposta pessoal.**

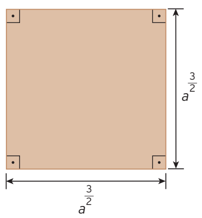
25. f) $\frac{10+5\sqrt{10}}{3}$ g) $7\sqrt{3}+7\sqrt{2}$ h) $-24\sqrt{2}+8\sqrt{21}$

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. A área de um terreno com formato de um quadrado mede 361 m^2. Ele será cercado com arame. Sabendo que a cerca terá três voltas de arame, determine quantos metros desse material serão necessários. **228 metros.**

2. Considere a região quadrada representada a seguir, em que $a > 0$.



Qual deve ser a medida da altura de uma região retangular cuja medida da base é $\sqrt{a}$, para que sua medida de área seja igual à medida da área dessa região quadrada? $\boldsymbol{a^2\sqrt{a}}$

3. Escreva no caderno a alternativa correta.

$\sqrt{20^{20}}$ é igual a: **Alternativa c.**

a) 1010

b) $20^{2\sqrt{5}}$

c) $5^{10} \cdot 2^{20}$

d) 10^{20}

4. Simplifique as expressões e calcule os respectivos resultados.

a) $12\sqrt{20} - 8\sqrt{20} + 3\sqrt{20}$ $\mathbf{14\sqrt{5}}$

b) $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{90} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{250} + \frac{2}{5} \cdot \sqrt{50}$ $\mathbf{\frac{13\sqrt{10}}{4} + 2\sqrt{2}}$

c) $\sqrt[6]{10^5} : \sqrt[4]{10^3}$ $\mathbf{\sqrt[12]{10}}$

d) $(\sqrt[5]{2} - 2) \cdot (\sqrt{2} - 5)$ $\mathbf{\sqrt[10]{2^7} - 5\sqrt[5]{2} - 2\sqrt{2} + 10}$

e) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$ $\mathbf{\sqrt[6]{108}}$

5. Calcule o valor das expressões a seguir e dê a resposta na forma mais simplificada possível.

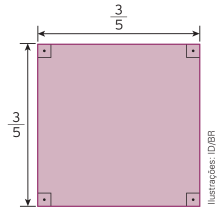
a) $\left(\sqrt[5]{7}\right)^{10}$ **49**

b) $\sqrt{\frac{32}{2}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{36}}$ $\mathbf{\frac{11}{2}}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{32}}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{16}} \cdot \sqrt[24]{2^6}$ **2**

d) $\sqrt{14 - \sqrt{180}} \cdot \sqrt{14 + \sqrt{180}}$ **4**

6. Considere a região quadrada a seguir. Depois, faça o que se pede.



Escreva uma potência:

a) que represente a medida da área dessa região quadrada; $\mathbf{\left(\frac{3}{5}\right)^2}$

b) com expoente $\frac{1}{2}$ que represente a medida do comprimento do lado dessa região. $\mathbf{\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}}}$

7. Racionalize o denominador da expressão fracionária a seguir.

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{12}} \quad \mathbf{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

8. Calcule o valor da raiz quadrada da seguinte expressão:

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \quad \mathbf{\frac{1}{2}}$$

9. Verifique se as igualdades a seguir são verdadeiras ou falsas.

a) $10^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^{-2}}$ **Verdadeira.**

b) $6^{0,25} = \sqrt{6}$ **Falsa.**

c) $\sqrt{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$ **Verdadeira.**

d) $\frac{2}{\sqrt{20}} = 5^{-0,5}$ **Verdadeira.**

10. Determine o valor da expressão a seguir. **7**

$$\sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}}}}}$$

11. Elabore uma situação-problema para cada proposta a seguir. Depois, troque de caderno com um colega para que um resolva os problemas criados pelo outro. **Respostas pessoais.**

a) Situação-problema que envolva comparação de números reais.

b) Situação-problema que envolva potenciação e notação científica.

c) Situação-problema que envolva radiciação.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **1**, verifique se os estudantes percebem que é necessário calcular inicialmente a medida do lado do quadrado cuja área mede 361 m^2.
- Peça aos estudantes que leiam cuidadosamente a atividade **2** e compartilhem o que compreenderam. Verifique se eles entenderam que as duas regiões devem ter a mesma medida de área.
- Na atividade **7**, sugira aos estudantes que escrevam $\sqrt{12}$ como $2 \cdot \sqrt{3}$.

DE OLHO NA BASE

As atividades **1**, **2** e **6** contribuem para que os estudantes desenvolvam a habilidade **EF09MA04**, por meio da resolução de problemas que envolvem números reais e diferentes operações.

A atividade **11** permite aos estudantes elaborar e resolver problemas que envolvem números reais, inclusive em notação científica, desenvolvendo as habilidades **EF09MA03** e **EF09MA04**.

ESTRATÉGIA DE APOIO

Caso os estudantes apresentem dificuldades na resolução da atividade **10**, sugira a eles que resolvam essa atividade parte por parte.

Peça a eles que escrevam a última raiz separadamente e a resolvam; nesse caso, devem começar pela $\sqrt{9}$. Em seguida, devem escrever a penúltima raiz separadamente também, adicionando-a com o primeiro resultado obtido. E assim, passo a passo, eles conseguem resolver a atividade, que é simples, mas passa a ideia de ser difícil inicialmente.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, o tema abordado é o empréstimo. Antes de iniciar a leitura do texto, proponha aos estudantes que respondam à pergunta: É melhor comprar à vista ou a prazo? Ao final da leitura, retome essa questão e observe se eles mantêm a mesma opinião inicial, levando-os a refletir sobre a ideia do empréstimo e sua relação com a tomada de decisão.
- Incentive os estudantes a compreender que, antes de tomar uma decisão, eles sempre precisam analisar a situação financeira em que se encontram para verificar se é ou não vantajoso realizar um empréstimo para obter determinado produto. Essa reflexão desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação Financeira, que pertence à macroárea **Economia**.
- Incentive os estudantes a discutir sobre os direitos e deveres de quem empresta e de quem obtém o empréstimo. Se achar oportuno, peça a eles que pesquisem as taxas de juros sobre os pagamentos em prestações, como ela pode ser escolhida, como pode ser negociada, etc.
- Explique aos estudantes que saber usar estratégias para se proteger dos perigos e das armadilhas do mercado e, ao mesmo tempo, aproveitar as oportunidades financeiras de acordo com os princípios éticos e morais nos torna consumidores mais conscientes.
- As atividades propostas nessa seção têm o objetivo de preparar os estudantes a resolver questões do cotidiano, permitindo que desenvolvam a autonomia e o protagonismo. Propostas como essa são fundamentadas na metodologia de aprendizagem baseada em problemas.

DE OLHO NA BASE

Essa seção contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**, permitindo que os estudantes sintam segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

Além disso, refletir sobre esse tema auxilia os estudantes a argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vistas e decisões comuns que respeitem e promovam o consumo responsável em âmbito local, regional e global, contribuindo também para o desenvolvimento da **competência geral 7**.

AMPLIANDO HORIZONTES

Pensando sobre empréstimos

Você já ouviu a expressão “cabe no bolso”? Ela costuma ser utilizada para comparar o preço de um produto ou serviço ao poder aquisitivo de uma pessoa. Por exemplo, em situações em que as pessoas querem ou precisam comprar algo e não têm o dinheiro necessário para pagar à vista, ou seja, de uma só vez, no ato da compra, poderíamos afirmar que o produto desejado “não cabe no bolso”. Quando isso acontece, há duas opções: as pessoas economizam até conseguir o dinheiro necessário ou recorrem a um empréstimo.

Fluxo de pagamentos
Empréstimo na Loja das Bicicletas

Mês	Dívida inicial	Pagamento	Dívida final
0	R$ 1000,00	R$ 0,00	R$ 1000,00
1	R$ 1000,00	R$ 500,00	R$ 500,00
2	R$ 500,00	R$ 500,00	R$ 0,00

Fluxo de pagamentos
Empréstimo na Bikes & Cia.

Mês	Dívida inicial	Pagamento	Dívida final
0	R$ 1000,00	R$ 0,00	R$ 1000,00
1	R$ 1050,00	R$ 537,80	R$ 512,20
2	R$ 537,80	R$ 537,80	R$ 0,00

OUTRAS FONTES

BRÊTAS, P. Confira dez dicas para evitar as armadilhas do crédito consignado. *Extra*, 7 nov.2021. Disponível em: https://extra.globo.com/economia-e-financas/confira-dez-dicas-para-evitar-as-armadilhas-do-credito-consignado-25266257.html. Acesso em: 30 jun. 2022.

Reportagem que aborda os perigos do crédito consignado e os cuidados que devem ser tomados para evitar o superendividamento e as fraudes envolvendo essa operação.

Eu vou levar. Série Eu e meu dinheiro. Banco Central do Brasil. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=FdTip4SdWMw. Acesso em: 30 jun. 2022.

Nesse episódio da série “Eu e meu dinheiro”, são mostrados dois jovens com condições socioeconômicas semelhantes, mas que têm diferentes estratégias de compra.

Quando alguém faz um empréstimo, além do valor do produto ou do serviço, é preciso pagar um valor a mais, cobrado pela instituição que emprestou o dinheiro, que pode ser a própria loja, um banco, uma administradora de cartões, etc. Esse valor é chamado de **juro**, que é a quantia que as pessoas pagam por usar um dinheiro que, a princípio, elas não têm, e corresponde à diferença entre o valor total emprestado e o valor que será pago à instituição. As taxas de juros no Brasil estão entre as mais altas do mundo.

O valor total do empréstimo, que é composto do valor solicitado mais os juros, é dividido em parcelas menores, que devem ser pagas de acordo com o tempo estabelecido pela instituição. Com o dinheiro em mãos, as pessoas compram o produto e vão pagando em parcelas ao longo do tempo. Essas parcelas são chamadas de **prestações**, e essas compras são chamadas de compras a prazo. Enquanto todas as parcelas não forem pagas, a pessoa que fez o empréstimo é considerada devedora, e a instituição que emprestou o dinheiro é chamada de credora.

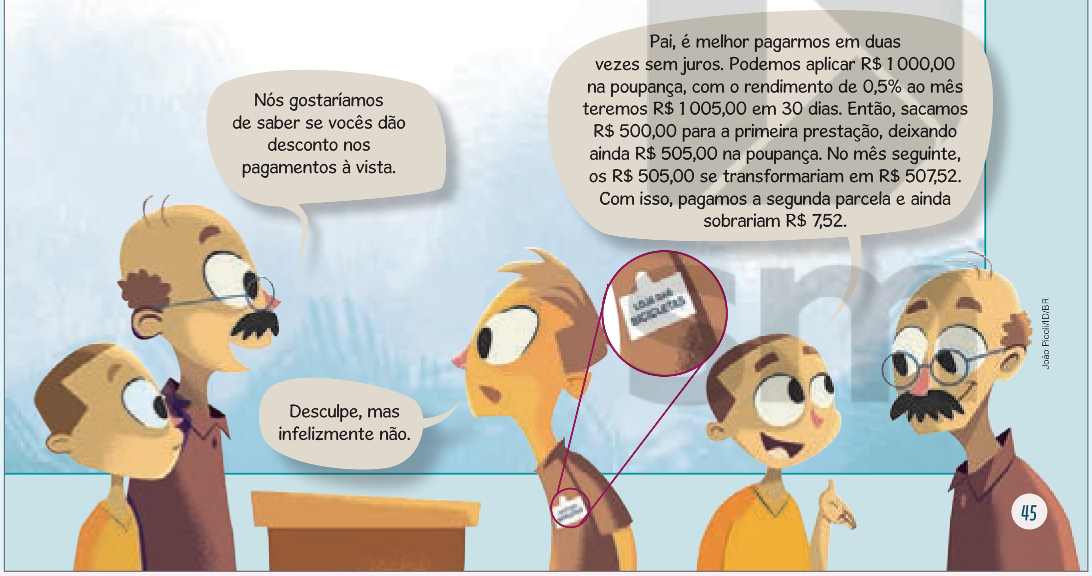
Para refletir

Responda sempre no caderno.

Consulte as respostas neste manual.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir.

1. Qual é a opinião de vocês sobre o fato de os credores cobrarem juros das pessoas que pedem dinheiro emprestado? Justifiquem sua resposta.
2. Comprar a prazo pagando juros pode ser vantajoso em alguma situação? Apresentem situações em que pagar a prazo com juros pode ser uma boa saída ou um bom negócio.
3. Observem a situação ilustrada nesta seção.
   a) Se vocês tivessem os R\$ 1 000,00, em qual das duas lojas comprariam? Por quê?
   b) A loja Bikes & Cia. cobra uma taxa de 5% ao mês sobre o saldo devedor. Se o valor de cada prestação não fosse apresentado no cartaz, como você o encontraria?



João Picoli/ID/BR

45

- O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes deve ser preservada. Para isso, valorize situações em que os estudantes se sintam acolhidos, incentivando o desenvolvimento da empatia e da solidariedade.

  A Educação Financeira tem papel importante nesse contexto, pois as situações-problema que envolvem o uso do dinheiro visam aproximar teoria e prática, desenvolvendo a capacidade de os estudantes gerirem as próprias finanças, além de lhes permitir sentir-se inseridos na sociedade ao depararem com uma situação real de compra e venda, com os pais ou responsáveis, colaborando para o aumento da autonomia e da autoestima nesses momentos.

Honestidade

O assunto tratado nessa seção possibilita aos estudantes refletir sobre a decisão de contratar um empréstimo, comprometendo-se com o pagamento de juros ou com prestações. Nesse caso, é importante que eles ajam com responsabilidade, pois trata-se de compromissos financeiros, de curto, médio ou longo prazos, que afetarão as possibilidades de gastos e investimentos futuros.

DE OLHO NA BASE

Ao se reunir em duplas e discutir as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 9**.

RESPOSTAS

1. Resposta pessoal. Se julgar oportuno, proponha aos estudantes que se coloquem no lugar de quem realiza um empréstimo. É importante que eles percebam que é necessário existir regras para definir os termos do empréstimo.
2. Resposta pessoal. Permita aos estudantes registrar suas impressões e produzir seus significados e conhecimento.
3. a) Respostas pessoais. Aceite diferentes respostas dos estudantes, desde que as justifiquem.
   b) Resposta pessoal.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta dupla de páginas, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Na atividade **1**, verifique se os estudantes incluem, no item **c**, os números que eles classificaram como racionais e como irracionais nos itens anteriores.
- Na atividade **2**, sugira aos estudantes que escrevam *x* e *y* na forma de fração antes de efetuar os cálculos.
- Aproveite a atividade **3** para verificar se os estudantes entenderam que os números naturais são também números inteiros, racionais e reais.
- Na atividade **5**, não é necessário que os estudantes calculem as raízes. A ideia é que eles transformem as raízes em potências com expoente fracionário.
- Na atividade **7**, verifique se os estudantes aplicam corretamente as propriedades de potência. É importante que eles percebam que, em alguns casos, deverão deixar as potências de 10 com o mesmo expoente para efetuar a adição ou a subtração, bem como analisar se o resultado dessa operação já estará em notação científica, ou se será necessário transformá-lo nessa notação.
- Peça aos estudantes que exemplifiquem e expliquem como pensaram para responder à atividade **8**. Incentive-os a trabalhar a comparação entre radicais, em duplas e por meio de exemplos, com números maiores que 0 e menores que 1 e com números maiores que 1.
- Para comparar os radicais da atividade **14**, sugira aos estudantes que decomponham os radicandos em fatores primos.
- Na atividade **16**, se necessário, retome o conceito de radicais semelhantes.
- Na atividade **17**, verifique se os estudantes, ao simplificarem a expressão, encontraram o número 10 antes de decidir qual deve ser a alternativa correta.
- Na atividade **19**, é importante que os estudantes simplifiquem o radical antes de identificar o estudante que acertou.
- Na atividade **20**, os estudantes devem determinar entre quais quadrados perfeitos o número 39 se encontra.
- Na atividade **22**, peça aos estudantes que expliquem como pensaram para realizar a atividade e solicite-lhes alguns exemplos numéricos que ilustrem o procedimento descrito no enunciado.
- Na atividade **23**, sugira aos estudantes que decomponham os radicais em fatores primos para simplificar o denominador antes de racionalizar.
- Na atividade **24**, verifique se os estudantes percebem que podem aplicar as propriedades de potenciação.

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. I. infinita periódica; II. infinita não periódica; III. finita; IV. infinita periódica; V. infinita não periódica; VI. finita.

1. A representação decimal de um número pode ser finita, infinita periódica ou infinita não periódica. Qual é o caso de representação decimal de cada número a seguir?

I. $-\frac{70}{33}$ III. $\frac{8}{25}$ V. $\sqrt{3}$

II. π IV. $7,28\overline{5}$ VI. $-\sqrt{16}$

Agora, responda às questões.

a) Quais desses números são racionais? **I, III, IV e VI.**

b) Quais são irracionais? **II e V.**

c) Quais são reais? **Todos.**

2. Sendo $x = 0,\overline{30}$ e $y = 1,\overline{2}$, represente na forma de fração as expressões a seguir.

a) $x + y$ $\mathbf{\frac{151}{99}}$ b) $y - x$ $\mathbf{\frac{91}{99}}$ c) $\frac{x}{y}$ $\mathbf{\frac{30}{121}}$

3. Verifique se as sentenças a seguir são verdadeiras ou falsas. Se houver afirmações falsas, corrija-as no caderno.

a) $\sqrt{17}$ é um número racional.

b) $\sqrt{121}$ é um número natural.

c) Nenhum número irracional é real.

d) π é maior que $\sqrt{10}$.

4. Calcule as potências a seguir.

a) $(\sqrt{2})^0$ **1**   e) $(-5)^{-3}$ $\mathbf{-\frac{1}{125}}$

b) 0^1 **0**   f) $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ $\mathbf{\frac{1}{625}}$

c) $(-0,3)^2$ **0,09**   g) $1\,024^{0,5}$ **32**

d) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^1$ $\mathbf{\frac{\pi}{2}}$ h) $\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{4}}$ $\mathbf{\frac{1}{4}}$

5. Escreva as raízes a seguir como potências de expoente fracionário.

a) $\sqrt{12}$ $\mathbf{12^{\frac{1}{2}}}$ e) $\sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$ $\mathbf{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}}$

b) $\sqrt{2,7}$ $\mathbf{2,7^{\frac{1}{2}}}$ f) $\sqrt[3]{8^{-1}}$ $\mathbf{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}}$

c) $\sqrt[3]{0,5}$ $\mathbf{0,5^{\frac{1}{3}}}$ g) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$ $\mathbf{2^{\frac{1}{2}}}$

d) $\sqrt[5]{7^3}$ $\mathbf{7^{\frac{3}{5}}}$ h) $\sqrt[3]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-4}}$ $\mathbf{\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{4}{3}}}$

6. Aplique as propriedades da potenciação e escreva cada item na forma de uma só potência.

a) $8^2 \cdot 8^3$ $\mathbf{8^5}$ e) $6^7 : 6^9$ $\mathbf{6^{-2}}$

b) $12^3 \cdot 12^5$ $\mathbf{12^8}$ f) $16^4 : 4^3$ $\mathbf{4^5}$

c) $14^{-6} \cdot 14^4$ $\mathbf{14^{-2}}$ g) $(7^2)^6$ $\mathbf{7^{12}}$

d) $9^8 \cdot 3^2$ $\mathbf{3^{18}}$ h) $(2^4)^3$ $\mathbf{2^{12}}$

3. a) Falsa. Correção possível: $\sqrt{17}$ é um número irracional.
b) Verdadeira.
c) Falsa. Correção possível: Todos os números irracionais são reais.
d) Falsa. Correção possível: π é menor que $\sqrt{10}$.

7. Utilizando uma calculadora, efetue as operações a seguir. Escreva os resultados em notação científica.

a) $3,25 \cdot 10^3 + 7,2 \cdot 10^3$ $\mathbf{1,045 \cdot 10^4}$

b) $7,821 \cdot 10^{-3} + 9,254 \cdot 10^{-2}$ $\mathbf{1,00361 \cdot 10^{-1}}$

c) $4,25 \cdot 10^5 - 1,2 \cdot 10^5$ $\mathbf{3,05 \cdot 10^5}$

d) $7,4 \cdot 10^{-1} - 3,2 \cdot 10^{-5}$ $\mathbf{7,39968 \cdot 10^{-1}}$

e) $1,45 \cdot 10^6 \cdot 8,2 \cdot 10^{-9}$ $\mathbf{1,189 \cdot 10^{-2}}$

f) $5,24 \cdot 10^3 \cdot 3,21 \cdot 10^{-3}$ $\mathbf{1,68204 \cdot 10}$

g) $5,6 \cdot 10^{13} : 4 \cdot 10^7$ $\mathbf{1,4 \cdot 10^6}$

h) $1,03 \cdot 10^{-4} : 8,04 \cdot 10^7$ $\mathbf{1,28109 \cdot 10^{-12}}$

8. A raiz quadrada de um número positivo é sempre menor que o próprio número? Discuta com os colegas. **Ela é menor somente se o número for maior que 1.**

9. Qual é a medida do comprimento de um reservatório que tem o formato de um cubo cujo volume mede 1 728 m³? **12 m**

10. Cada aula de Matemática na escola em que Eliana estuda tem 50 minutos de duração. Ela desafiou os colegas de outra escola a descobrir quantas aulas de Matemática ela vai ter este trimestre, dizendo: "Já tive $4,2 \cdot 10^3$ minutos de aulas de Matemática".

Quantas aulas de Matemática Eliana já teve este ano? **84 aulas.**

11. Qual é a medida da área de uma região quadrada cuja medida do perímetro é $(16 + 8\sqrt{5})$ cm? $\mathbf{(36 + 16\sqrt{5})\ cm^2}$

12. Cada divisão da forma de gelo ilustrada a seguir tem dimensões internas iguais a $\sqrt{4}$ cm, $\sqrt{9}$ cm e $\sqrt[3]{64}$ cm.

ID/BR

Determine quantos centímetros cúbicos de água são necessários para preencher todas as divisões da forma. $\mathbf{384\ cm^3}$

13. Em uma festa, foram servidas 128 coxinhas. Cada um dos convidados comeu uma quantidade do salgado igual à quantidade de pessoas que estavam na festa. Sabendo que sobraram 7 coxinhas, quantas pessoas havia na festa? **11 pessoas.**

DE OLHO NA BASE

A atividade **5** permite aos estudantes que efetuem cálculos que envolvem potências com expoentes fracionários, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA03**.

A atividade **7** permite aos estudantes efetuar cálculos que envolvem números reais escritos em notação científica, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA04**.

14. Em cada item, compare os radicais e determine qual é o maior deles.

a) $\sqrt{21}$ e $\sqrt{48}$ **$\sqrt{48}$**

b) $\sqrt{12}$ e $\sqrt[3]{31}$ **$\sqrt{12}$**

c) $\sqrt[3]{24}$ e $\sqrt[4]{80}$ **$\sqrt[4]{80}$**

d) $\sqrt{36}$ e $\sqrt[4]{256}$ **$\sqrt{36}$**

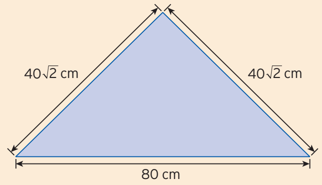
e) $\sqrt[3]{7^2}$ e $\sqrt{9^5}$ **$\sqrt{9^5}$**

f) $\sqrt[4]{4^3}$ e $\sqrt[5]{7^4}$ **$\sqrt[5]{7^4}$**

g) $\sqrt[6]{2^8}$ e $\sqrt[4]{4^5}$ **$\sqrt[4]{4^5}$**

h) $\sqrt[3]{16}$ e $\sqrt[4]{4^6}$ **$\sqrt[4]{4^6}$**

15. Calcule a medida do perímetro da figura a seguir, considerando $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$.
Aproximadamente 192 cm.



16. Resolva as expressões a seguir, simplificando quando possível.

a) $5\sqrt{8} + 2\sqrt{2}$ **$12\sqrt{2}$**

b) $\sqrt{12} - 9\sqrt{3} - 7$ **$-7\sqrt{3} - 7$**

c) $4\sqrt{45} + 3\sqrt{500} - \sqrt{245}$ **$35\sqrt{5}$**

d) $2\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6} - 7\sqrt[3]{2} \cdot 4\sqrt[3]{12} + 14\sqrt[3]{3}$ **$-38\sqrt[3]{3}$**

e) $\sqrt{80} - 2\sqrt{100} - 3\sqrt{360}$ **$4\sqrt{5} - 20 - 18\sqrt{10}$**

f) $\sqrt{63} + \sqrt{28} + 2\sqrt{45}$ **$5\sqrt{7} + 6\sqrt{5}$**

17. Escreva a alternativa correta no caderno.

Considerando o número $9^{\frac{1}{5}} \cdot \dfrac{10}{\sqrt[5]{3^2}}$, qual das afirmativas a seguir está correta? **Alternativa c.**

a) É um número irracional.

b) É um número maior que 100.

c) É um número múltiplo de 5.

d) É uma dízima periódica.

e) É um número negativo.

18. Efetue a expressão a seguir, obtendo o resultado mais simplificado possível. **$19^{21} - \sqrt{21} - 35$**

$$\frac{-2\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - 3\sqrt{100} + 19^0 \cdot 19^{21}$$

19. A professora pediu aos estudantes que simplificassem o radical $\sqrt{5\,988}$.

Observe, a seguir, as respostas de três estudantes e verifique quem acertou. **Isabela acertou.**

- Tomás: 88,25
- Isabela: $2\sqrt{1\,497}$
- Ana: não dá para simplificar.

20. Escreva a alternativa correta no caderno.

(Etec-SP) Dada a expressão a seguir, $A = \sqrt{3} \cdot \sqrt{13}$, podemos afirmar que o valor aproximado de A está entre: **Alternativa a.**

a) 6 e 7.

b) 5 e 6.

c) 4 e 5.

d) 3 e 4.

e) 2 e 3.

21. Galileu Galilei, nascido na Itália em 1564, foi um grande físico, matemático e astrônomo. Ele desenvolveu algumas fórmulas que relacionam a medida da velocidade v com que um corpo chega ao solo e a medida da altura h de onde ele foi solto. Sendo g a aceleração da gravidade, que mede aproximadamente 10 m/s², tem-se $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$.

a) Com que velocidade chega ao solo um corpo que cai de uma altura de 20 metros? **20 m/s**

b) Se um corpo solto em queda livre chega ao solo com velocidade de 60 m/s, de que altura ele foi abandonado? **De 180 m.**

22. Multiplica-se por 2 o índice de um radical e o expoente do radicando. Explique o que é esse procedimento.

23. Identifique a alternativa correta no caderno.

(CMRJ) Racionalizando o denominador da fração $\dfrac{5}{\sqrt[6]{16} + \sqrt[6]{196} + \sqrt[3]{49}}$, obtemos: **Alternativa c.**

a) $3 + \sqrt[3]{2}$

b) $3 - \sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2}$

d) $5 + \sqrt[3]{5}$

e) $7 + \sqrt[3]{2}$

24. Escreva a alternativa correta no caderno.

(CMRJ) Assinale a única FALSA, dentre as alternativas abaixo. **Alternativa d.**

a) $(3^{-4})^5 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{20}$

b) $2^{-3} : 2^{-8} = 2^5$

c) $\dfrac{16^2 \cdot 8^3}{2^9} = 2^8$

d) $\sqrt[3]{8} : \sqrt{2} = 1$

e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{2}} = 1$

22. Esse procedimento corresponde à segunda propriedade dos radicais: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam a autoavaliação.

- Consigo classificar um número em natural, inteiro, racional e irracional e representá-lo na reta numérica?
- Sei comparar dois números reais com e sem o uso da reta numérica?
- Aprendi a calcular potências de números reais com expoente racional?
- Consigo resolver problemas com números reais, inclusive com notação científica?
- Consigo reconhecer e aplicar as propriedades da potenciação com números reais?
- Compreendi a operação de radiciação?
- Consigo reconhecer e aplicar as propriedades dos radicais com números reais?
- Consigo operar com radicais?
- Aprendi a racionalizar denominadores?
- Procurei conversar com os colegas ou o professor para eliminar minhas possíveis dúvidas?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para auxiliar os estudantes que apresentarem dúvidas nas atividades que trabalham os conjuntos numéricos, retome as definições de cada conjunto, solicitando-lhes que apresentem exemplos numéricos para cada um deles. Retome a ideia da construção dos números reais partindo da reunião dos números racionais com os números irracionais. É importante que os estudantes compreendam que não há elementos em comum entre os dois conjuntos (racionais e irracionais). Em seguida, trabalhe a definição dos números racionais, levando-os a perceber que qualquer número que pode ser escrito na forma de fração, com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero, é racional.

Se necessário, retome as operações com números racionais, inclusive a potenciação e a radiciação e suas propriedades.

Relembre com os estudantes os procedimentos para escrever os números em fatores primos e para calcular o mmc entre dois números.

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
1, 5, 8 e 9.

Competência específica de Matemática
3

Temas Contemporâneos Transversais
Meio Ambiente, Economia e Cidadania e Civismo.

Habilidades

(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.

(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

UNIDADE 2

RAZÃO, PROPORÇÃO E MATEMÁTICA FINANCEIRA

SOBRE A UNIDADE

Nesta unidade, serão trabalhados os conceitos de razão, proporção e porcentagem.

O conceito de razão (comparação entre duas quantidades por meio de uma divisão) é de extrema importância, pois auxiliará em outros componentes curriculares, como Física e Geografia, que utilizam amplamente algumas razões, por exemplo, densidade de um corpo, densidade demográfica, escalas e velocidade média. Além disso, o conceito de razão é a base para o entendimento do conceito de proporção, que é uma igualdade entre razões. Esses dois conceitos serão muito utilizados pelos estudantes para resolver problemas cotidianos.

A proporção auxilia na discussão sobre como fazer divisão em partes proporcionais, sejam diretamente ou inversamente proporcionais. Em particular, a noção de proporcionalidade inversa não é tão natural e fácil de compreender quanto a proporcionalidade direta. Assim, o trabalho com ela deve ser cuidadoso e enfatizado com a apresentação de diversos exemplos.

Um método muito utilizado no que se refere à proporção é a regra de três. Portanto, são discutidas a regra de três simples e a regra de três composta, com grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, para ampliar o entendimento das possibilidades de uso.

No desenvolvimento do tema porcentagem, utilizam-se exemplos como as relações comerciais, de modo a trabalhar as noções de acréscimo percentual, de descontos e de acréscimos sucessivos. Nesse caso, o uso da calculadora é enfatizado e incentivado.

CAPÍTULO 1
Razão e proporção

CAPÍTULO 2
Matemática financeira

Termômetro com temperatura nas escalas Celsius e Fahrenheit, em Camanducaia (MG). Foto de 2019.

Luciano Queiroz/Pulsar Imagens

PRIMEIRAS IDEIAS

Você já viu uma medida de temperatura com uma unidade de medida diferente de °C? As escalas termométricas Celsius (°C) e Fahrenheit (°F), representadas no termômetro desta imagem, foram desenvolvidas em lugares e em tempos diferentes. No entanto, elas medem a mesma propriedade dos corpos (o grau de agitação das moléculas) e é possível encontrar a equivalência entre as temperaturas usando uma relação de proporcionalidade.

1. Quanto mede a temperatura mostrada no termômetro, no momento da foto, na escala °C? E na escala °F? Você acha que elas são equivalentes?
2. A escala °C tem 100 divisões entre o ponto de solidificação e o de ebulição da água, e a escala °F tem 180 divisões entre esses mesmos dois pontos. Com base na análise das equivalências, você conseguiria fazer uma relação entre essas escalas?

PRIMEIRAS IDEIAS

- A proposta de trabalhar com duas escalas de temperatura é interessante, pois possibilita a inter-relação com o componente curricular Física. Pergunte aos estudantes se eles conhecem essas duas escalas e a diferença entre elas. Se não conhecem, sugira a eles que pesquisem informações sobre a criação de cada uma delas, em quais países são usadas, por que e como relacioná-las matematicamente.
- Depois, promova uma discussão em sala de aula para que os estudantes possam compartilhar o que encontraram sobre as escalas, por exemplo, a história do desenvolvimento de ambas, por que alguns países usam cada uma delas e, especialmente, como empregá-las em várias aplicações da matemática.

RESPOSTAS

1. No momento da foto, o termômetro marca 24 °C e 75 °F.

   Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes notem que as duas escalas representam a mesma medida de temperatura e, por esse motivo, elas podem ser relacionadas, sendo possível estabelecer uma equivalência entre as escalas Celsius e Fahrenheit.

2. Resposta pessoal. Para se obter a relação, é necessário observar que uma medida de temperatura qualquer na escala Celsius está para a amplitude do intervalo de solidificação e de ebulição, assim como a medida equivalente de temperatura na escala Fahrenheit está para a amplitude do intervalo de ebulição nessa escala. Assim, sendo C a medida de temperatura em grau Celsius e F a medida de temperatura em grau Fahrenheit, temos:

$$\frac{C-0}{100-0} = \frac{F-32}{212-32}$$

$$\frac{C}{100} = \frac{F-32}{180}$$

$$C = 100 \cdot \left(\frac{F-32}{180}\right)$$

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Razão.
- Proporção.
- Divisão em partes proporcionais.
- Regra de três simples e regra de três composta.

Objetivos

- Compreender o que é razão e proporção.
- Conhecer razões especiais e como utilizá-las.
- Entender a divisão em partes diretamente proporcionais.
- Compreender divisão em partes inversamente proporcionais.
- Identificar se duas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.
- Utilizar regra de três simples ou composta para cálculo de proporções.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar as ideias de razão e proporção, aprofundando o estudo para compreender algumas razões especiais, além de avançar na análise de grandezas direta e inversamente proporcionais por meio do cálculo da regra de três composta. Com esses estudos, espera-se aprimorar os raciocínios proporcional e lógico-dedutivo dos estudantes, tornando-os mais autônomos para resolver problemas do cotidiano deles.

RAZÃO

- Verifique se os estudantes conhecem algum dos recursos de representação citados (plantas baixas, maquetes e miniaturas), para que seja feita uma relação entre o que eles já conhecem e o conteúdo que será apresentado no capítulo. Assim, será possível discutir os exemplos de forma que eles, intuitivamente, entendam que é preciso reduzir todos os elementos de uma figura com a mesma razão para que a reprodução em miniatura da figura, por exemplo, seja semelhante à figura original.
- Converse com os estudantes sobre a semelhança entre as reproduções em miniaturas dos objetos e os objetos. Eles devem compreender que essa semelhança é devido à razão de proporcionalidade entre elas. No texto, é apresentada a razão de proporcionalidade entre a miniatura da basílica de São Pedro e a basílica retratada; no caso, as dimensões da miniatura são 25 vezes menores que as dimensões da basílica retratada. Peça aos estudantes que calculem a medida do comprimento e a medida da altura da basílica retratada. Eles devem encontrar 218 metros de comprimento e 136 metros de altura.
- Sugira aos estudantes que construam uma maquete ou uma planta baixa de algum ambiente presente no dia a dia deles.

Capítulo 1

RAZÃO E PROPORÇÃO

Para desenvolver os conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes se lembrem dos conceitos já estudados de razão, proporção e regra de três. Além disso, é importante que eles dominem cálculos que envolvem frações e equações.

Razão

Plantas baixas, maquetes e miniaturas são recursos que muitos profissionais, como arquitetos, engenheiros, decoradores, *designers*, etc., utilizam em sua rotina.

Todos esses recursos preservam as características originais do objeto ou da pessoa, porém em tamanho diferente do original, e, para que isso aconteça, é preciso utilizar uma razão.

O parque Tobu, no Japão, reúne miniaturas de lugares famosos do mundo todo.

Na fotografia apresentada, é possível ver a miniatura da basílica de São Pedro, que fica no Vaticano. A miniatura tem 8,72 m de medida de comprimento por 5,44 m de medida de altura e é 25 vezes menor que a basílica real. Como você acha que os responsáveis pelo parque chegaram às medidas da miniatura? **Resposta pessoal.**

Uma possibilidade é escolher, por exemplo, a medida de uma parte qualquer do objeto real e calcular a razão entre a medida da miniatura e a medida do objeto real. Neste caso, a razão deve ser equivalente a $\frac{1}{25}$, pois todas as miniaturas do parque são 25 vezes menores que os objetos reais. Representamos essa razão da seguinte maneira:

$$\frac{\text{medida do comprimento da miniatura}}{\text{medida do comprimento do objeto real}} = \frac{1}{25}$$

Equipe realiza a limpeza da miniatura da basílica de São Pedro no parque temático Tobu, na cidade de Nikko, no Japão. Foto de 2020.

Kunihiko Miura/The Yomiuri Shimbun/AFP

50

Quando comparamos duas medidas ou duas quantidades por meio de uma divisão, o quociente dessa divisão é chamado de razão.

A **razão entre dois números *a* e *b***, nessa ordem, com $b \neq 0$, é o quociente de a por b. Essa razão é indicada por $\frac{a}{b}$ ou $a : b$ (lê-se: "razão de *a* para *b*" ou "*a* para *b*").

Podemos expressar uma razão na forma de fração, de número decimal ou de porcentagem.

Exemplo

Uma empresa tem 120 funcionários, dos quais 70 são mulheres. Qual é a razão que indica, nesta ordem, a quantidade de mulheres em relação ao total de funcionários da empresa?

Podemos representar a razão solicitada da seguinte maneira:

$$\frac{70 \ (\text{número de funcionárias mulheres})}{120 \ (\text{número total de funcionários})} = \frac{7}{12}$$

Logo, a razão entre a quantidade de mulheres e a quantidade total de funcionários da empresa, nessa ordem, é $\frac{70}{120}$ ou $\frac{7}{12}$.

Nesse contexto, a razão $\frac{7}{12}$ expressa que, de cada 12 funcionários dessa empresa, 7 são mulheres.

PARE E REFLITA

Considerando o exemplo dado, como você representaria a razão que indica a quantidade de mulheres em relação ao total de funcionários da empresa utilizando um número na forma decimal? E utilizando uma porcentagem?

Aproximadamente 0,58; Aproximadamente 58%.

Razões especiais

No cotidiano, algumas razões são muito utilizadas e, provavelmente, você já deve lido ou ouvido falar sobre elas em momentos diversos. Elas são conhecidas por nomes especiais, por exemplo, escala, velocidade média, densidade demográfica e densidade de um corpo. A seguir, vamos estudá-las.

Escala

A escala em mapas, plantas ou maquetes, entre outros recursos, pode ser escrita como a razão entre a medida do comprimento no desenho e a medida do comprimento real correspondente, ambos medidos na mesma unidade.

No mapa a seguir a escala é 1 : 33 500 000 ou $\frac{1}{33\,500\,000}$.

OBSERVAÇÃO

1 km = 100 000 cm

Paquistão

Essa escala indica que cada centímetro da representação equivale a 335 quilômetros na paisagem real.

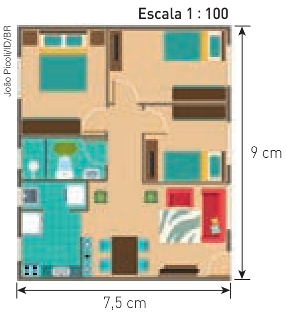
Fonte de pesquisa: *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 47.

- Verifique se os estudantes compreenderam o conceito de escala propondo que meçam a largura e o comprimento da capa de um livro. Em seguida, peça que façam um desenho da capa do livro no caderno de modo que as proporções sejam mantidas. Ou seja, se a largura do livro for 20 cm e o comprimento for 30 cm, eles poderão, por exemplo, desenhar um retângulo de largura 4 cm e comprimento 6 cm; nesse caso, cada 1 cm no desenho corresponderá a 5 cm do objeto real. Depois, peça a eles que escrevam a escala utilizada; nesse exemplo, podemos representar por 1 : 5 ou $\frac{1}{5}$.

- Explique aos estudantes que as medidas reais de um apartamento, como no exemplo citado, são obtidas com base na escala. Nesse caso, se cada centímetro da planta vale 100 centímetros do apartamento, então os 9 centímetros de comprimento indicados na planta equivalem a 900 centímetros, ou 9 metros, do comprimento do apartamento retratado. Escrevendo como uma proporção, obtém-se $\frac{1}{100} = \frac{9}{900}$. Aproveite esse exemplo para verificar se os estudantes se lembram das relações entre centímetro e metro e entre outras unidades de medida de comprimento.
- Observe se os estudantes compreenderam o conceito de velocidade média, ou seja, a razão entre a medida da distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la.
- Proponha, se possível, uma discussão com o professor de Ciências para que os estudantes entendam por que existe uma velocidade máxima estipulada por lei em cada tipo de via e o motivo pelo qual devemos respeitá-la.
- Aproveite para relembrar unidades de medida, como quilômetro, metro, hora e segundo, e de que forma elas se relacionam ao representar a razão expressa pela velocidade média.

Exemplo

Tatiana recebeu a planta de seu apartamento e precisa calcular as medidas reais para planejar a decoração.



Para calcular as medidas reais do apartamento, ela precisa analisar a escala utilizada na planta. Observe que na planta está indicada uma escala de 1 : 100 (lê-se: escala de 1 para 100). Essa escala indica que 1 cm na planta corresponde a uma medida real de 100 cm. Assim, podemos calcular as medidas reais do apartamento do seguinte modo:

$$\frac{1}{100} = \frac{9}{?} \rightarrow \overset{\cdot 9}{\underset{\cdot 9}{\frac{1}{100} = \frac{9}{900}}} \qquad \frac{1}{100} = \frac{7{,}5}{?} \rightarrow \overset{\cdot 7{,}5}{\underset{\cdot 7{,}5}{\frac{1}{100} = \frac{7{,}5}{750}}}$$

Portanto, as medidas reais do apartamento são 900 cm de comprimento e 750 cm de largura. Ou, como 100 cm equivalem a 1 m, podemos dizer que as medidas reais do apartamento são 9 m e 7,5 m.

Velocidade média

A velocidade de um corpo (carro, ônibus, bola, pessoa, etc.) pode variar durante um percurso, mas, conhecendo a distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la, podemos calcular a velocidade média desse corpo.

A razão entre a medida da distância percorrida por um corpo e o tempo que ele gasta para percorrê-la é chamada velocidade média.

Como as grandezas distância e tempo possuem naturezas diferentes, as unidades de medida devem sempre ser indicadas. Algumas unidades comuns de velocidade média são:

- km/h: quilômetro por hora
- m/s: metro por segundo

Exemplo

Pedro decidiu fazer uma viagem de carro em suas férias. No primeiro dia da viagem, ele percorreu 180 quilômetros em 3 horas.

Para calcular a medida da velocidade média nesse percurso, podemos fazer o seguinte cálculo:

$$\frac{\text{medida da distância percorrida}}{\text{tempo gasto}} = \frac{180\text{ km}}{3\text{ h}} = 60\text{ km/h}$$

Logo, a velocidade média nesse trajeto mede 60 km/h.

Observe, porém, que isso não significa que o carro tenha se locomovido a 60 km/h durante todo o percurso. Ele pode ter desempenhado velocidades maiores e menores em diferentes momentos, de modo que, em média, percorreu 60 quilômetros a cada hora.

Densidade demográfica

Para saber se um local é muito ou pouco povoado, não basta saber quantos habitantes vivem ali. É preciso relacionar a quantidade de habitantes com a medida da área ocupada por eles.

A razão entre a quantidade de habitantes de uma região e a medida da área dessa região é chamada de densidade demográfica.

Exemplo

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2021, a população estimada do município de Curitiba, no Paraná, era 1 963 726 habitantes em uma área aproximada de 434,892 km². Vamos determinar a medida da densidade demográfica de Curitiba:

$$\frac{\text{quantidade de habitantes}}{\text{medida da área do município}} = \frac{1\,963\,726 \text{ habitantes}}{434{,}892 \text{ km}^2} \simeq 4\,515 \text{ hab./km}^2$$

símbolo de aproximadamente

Portanto, a medida da densidade demográfica do município de Curitiba é de aproximadamente 4 515 habitantes por quilômetro quadrado.

Isso significa que, em uma região quadrada de 1 km de lado, vivem, em média, 4 515 habitantes.

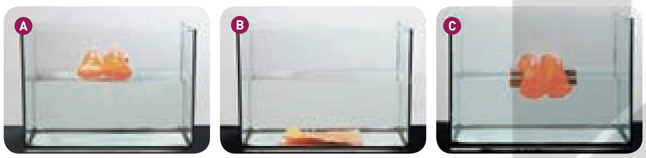
Densidade de um corpo

Você já percebeu que, quando colocados na água, alguns objetos afundam e outros não? A característica que faz com que alguns objetos afundem e outros flutuem está relacionada à densidade de seus corpos.

A densidade de um corpo é a razão entre as grandezas massa e volume do corpo, em certas condições de temperatura.

Quando um corpo possui uma medida de densidade maior que a de um líquido, ele afunda nesse líquido; e, quando a medida da densidade é menor, ele flutua sobre esse mesmo líquido.

Fotografias: Sérgio Dotta Jr./ID/BR



Em A, a boia cheia de ar flutua na água. Em B, a boia vazia afunda. Em C, o conjunto (boia + tijolo) flutua na água.

Exemplo

Para realizar um experimento com mercúrio líquido, um cientista precisava determinar a medida da densidade desse metal a certa temperatura. Para isso, ele separou 40,5 g do metal e verificou que a medida do volume ocupado era de 3 cm³. Para calcular a medida da densidade do mercúrio líquido, podemos fazer o seguinte cálculo:

$$\frac{\text{medida da massa}}{\text{medida do volume}} = \frac{40{,}5 \text{ g}}{3 \text{ cm}^3} = 13{,}5 \text{ g/cm}^3$$

Portanto, a medida da densidade do mercúrio líquido é 13,5 g/cm³ (lê-se: 13,5 gramas por centímetro cúbico).

- Explique aos estudantes que com a medida da densidade demográfica é possível compreender se uma cidade ou região é mais ou menos populosa do que outra, como no exemplo apresentado na página do Livro do Estudante.
- Sugira aos estudantes que façam uma pesquisa sobre a população de grandes e pequenas cidades, de diversas regiões do país. Proponha que discutam se a distribuição da população é equilibrada, o que há de interessante nessa distribuição, etc.
- A medida da densidade de um corpo também é uma razão especial e está relacionada às características físicas do corpo. Se estudada em conjunto com o professor de Ciências, é possível pesquisar corpos que flutuam ou não na água ou em outros líquidos e discutir a densidade de cada corpo.
- Verifique se os estudantes compreendem que, como a razão que representa a densidade de um corpo é a medida da massa do corpo pela medida do volume que ele ocupa, então ela pode ser dada em gramas por centímetros cúbicos, como no exemplo apresentado no Livro do Estudante, ou envolver outras unidades de medida de massa e de volume.
- Ao trabalhar com o último exemplo desta página, comente com os estudantes que o mercúrio é o único metal líquido em temperatura ambiente. Informe-os de que o mercúrio assume diversas formas químicas e pode causar problemas à nossa saúde. Explique a eles que antigamente, para medir a temperatura das pessoas, eram utilizados termômetros de mercúrio, mas estes não são mais recomendados porque o mercúrio é uma substância tóxica. De acordo com o Ministério do Meio Ambiente, a exposição a 12 mg de mercúrio por apenas algumas horas, pode causar bronquite química e, em seguida, fibrose pulmonar, além de causar problemas no sistema nervoso central e na tireoide, caso a exposição seja maior. Se julgar oportuno, convide o professor de Ciências para contribuir com mais explicações.

DE OLHO NA BASE

Os conceitos e os exemplos analisados envolvem problemas de razão entre grandezas especiais, como velocidade média e densidade demográfica, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA07**.

+ INTERESSANTE

Comente com os estudantes que, do mesmo modo que ocorre com alguns aparelhos eletrônicos, como geladeira e secador de cabelo, o Inmetro fornece aos veículos produzidos no Brasil a etiquetagem referente ao consumo energético dos carros cujos fabricantes aderiram ao programa de forma voluntária. Esse programa classifica os carros de uma mesma categoria, por sua eficiência energética, ou seja, o consumo de combustível, em cinco classes, que variam de A a E, sendo A a que menos consome combustível e E a que mais consome.

Esclareça os estudantes que o objetivo desse programa é informar ao cliente a qualidade dos produtos e como a aquisição deles com essa classificação indica também a redução de impactos causados pela ação humana no meio ambiente, como a emissão de gás de efeito estufa (CO_2) na camada de ozônio, ao substituir um tipo de energia não renovável por uma renovável. Essa conversa desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação para o Consumo, que pertence à macroárea **Meio Ambiente**.

- A atividade **1** aborda a razão entre homens e mulheres em uma festa e solicita a representação das quantidades na forma de fração, na forma decimal e em porcentagem, assunto que será retomado e aprofundado no capítulo seguinte.
- Nas atividades **2** e **6**, os estudantes devem utilizar réguas para medir respectivamente o comprimento do barco e a distância entre Brasília e Salvador, para determinar a medida real a partir do uso da escala apresentada.
- Para ampliar a atividade **5**, proponha aos estudantes que pesquisem quais são os municípios do Brasil com as maiores densidades demográficas.

DE OLHO NA BASE

A atividade **1** envolve uma situação com cálculo de porcentagem, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA05**. Além disso, as demais atividades permitem utilizar razões especiais em contextos socioculturais, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA08**.

+ INTERESSANTE

Afinal, como saber se um carro é econômico?

Maderla/Shutterstock.com/ID/BR

Quando uma pessoa decide comprar um carro, um dos aspectos que, em geral, ela leva em consideração é se o carro é econômico. Mas, afinal, o que é um carro econômico? Um carro é considerado econômico quando seu consumo médio de combustível é baixo em relação ao consumo de outros carros da mesma categoria.

Para saber se um carro é ou não econômico, precisamos conhecer uma razão muito usada: o consumo médio. Em outras palavras, é necessário verificar quantos quilômetros um veículo percorre para cada litro de combustível consumido.

O consumo médio de um veículo pode sofrer alterações de acordo com o tipo de combustível utilizado (etanol, gasolina, *diesel*, etc.) e se o carro se desloca na estrada ou na cidade.

Por exemplo, um determinado carro, com etanol, tem um consumo médio de 7,3 km/L na cidade e de 8,6 km/L na estrada e, com gasolina, o consumo médio desse veículo é de 10,8 km/L na cidade e de 12,5 km/L na estrada, de acordo com o Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro).

Observe que, para o carro utilizado como exemplo, apesar de o consumo médio ser maior quando o veículo está abastecido com gasolina, é preciso verificar se o preço pago por litro de gasolina compensa em relação ao preço pago pelo litro do etanol.

ATIVIDADES

1. Homens: $\frac{2}{5}$, 0,4 e 40%. Mulheres: $\frac{3}{5}$, 0,6 e 60%.

Responda sempre no caderno.

1. Dos 300 convidados de uma festa, 120 são homens e 180 são mulheres. Determine a razão de homens e de mulheres nessa festa em relação ao total de convidados usando números nas formas de fração, decimal e porcentagem.
2. O barco de pesca ilustrado a seguir foi desenhado em uma escala de 1 para 200 em relação ao barco real.

João Picoli/ID/BR

Com uma régua, meça o comprimento aproximado do barco desenhado e calcule, em metro, a medida de comprimento real. **10,40 metros.**

3. A prova mais rápida da natação é a de 50 metros nado livre. Qual foi a medida da velocidade média de um nadador que concluiu essa prova em 30 segundos? **Aproximadamente 1,7 m/s.**
4. Uma pequena escultura de bronze tem medida de massa igual a 4 370 g e medida de volume igual a 500 cm^3. Determine a medida da densidade dessa escultura. **8,74 g/cm^3**
5. Um município com 150 mil habitantes tem medida da densidade demográfica igual a 500 hab./km^2. Qual é a medida da área desse município? **300 km^2**
6. Veja o mapa da divisão política do Brasil apresentado a seguir e faça o que se pede.

Brasil – Mapa político

João Miguel A. Moreira/ID/BR

Fonte de pesquisa: *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 90.

Usando a escala indicada no mapa, calcule, aproximadamente, a medida da distância real, em linha reta, entre as cidades de Brasília e Salvador. **1 117,5**

Proporção

Se duas razões são iguais, elas formam uma proporção.

Quatro números não nulos, a, b, c e d, formam, nessa ordem, uma **proporção** quando: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Lê-se: "$a$ está para b assim como c está para d".

O conceito de proporção é utilizado em diversas situações do nosso dia a dia e, muitas vezes, o usamos sem nem ao menos perceber.

Sequências diretamente ou inversamente proporcionais

Observe as sequências a seguir.

2, 6, 10, 12   1, 3, 5, 6

Dizemos que os números da primeira sequência são **diretamente proporcionais** aos números correspondentes da segunda sequência, pois, ao calcular as razões entre os números da primeira sequência e os números correspondentes na segunda sequência, obtemos uma igualdade.

$$\frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6} = 2 \leftarrow \text{razão ou fator de proporcionalidade } (k)$$

Os números não nulos da sequência $(a_1, a_2, ..., a_n)$ são **diretamente proporcionais** aos números não nulos correspondentes da sequência $(b_1, b_2, ..., b_n)$ quando $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k$, com $k \neq 0$.

Agora, considere as sequências a seguir.

1, 2, 3, 5   60, 30, 20, 12

Dizemos que os números da primeira sequência são **inversamente proporcionais** aos números correspondentes da segunda sequência, pois o quociente de cada número da primeira sequência pelo inverso de cada número correspondente na segunda resulta sempre no mesmo número. Também podemos escrever as igualdades anteriores como igualdades de razões.

$$\frac{1}{\frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{30}} = \frac{3}{\frac{1}{20}} = \frac{5}{\frac{1}{12}} = 60 \leftarrow \text{razão ou fator de proporcionalidade } (k)$$

Em relação a essas sequências, observe que também podemos escrever a seguinte relação:

$$1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 5 \cdot 12 = 60$$

Os números não nulos da sequência $(a_1, a_2, ..., a_n)$ são **inversamente proporcionais** aos números não nulos correspondentes da sequência $(b_1, b_2, ..., b_n)$ quando $\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = ... = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}} = k$, com $k \neq 0$.

PROPORÇÃO

- Comente com os estudantes que, por ser muito comum o uso da palavra "proporção" no sentido de relação entre as partes de um todo, quase nunca nos lembramos de que, em Matemática, proporção é a relação de igualdade entre duas razões.
- Ao trabalhar com as sequências numéricas, dê especial atenção às sequências inversamente proporcionais, pois os estudantes costumam ter dificuldades em compreendê-las.

55

- Ao fazer uma divisão em partes proporcionais, é preciso verificar se as partes são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.
- Como há estudantes que têm muita dificuldade em compreender e observar essa diferença, ajude-os a entender esses conceitos, analisando com eles, caso a caso, as situações apresentadas nesta dupla de páginas.
- Na situação **1**, os irmãos devem ser responsáveis por cuidar do cachorro da família durante determinada quantidade de dias, e essa tarefa deve ser dividida proporcionalmente à idade de cada um deles. Assim, é necessário determinar a razão entre a quantidade de dias e a idade de cada irmão para obter a quantidade de dias que cada um dos irmãos será responsável por essa tarefa.

  Além disso, é preciso observar que o mês considerado tem 30 dias e que a soma das idades é 60 anos. Isso justifica o uso da propriedade das proporções utilizadas nesta página.

João Picoli/ID/BR

PROPRIEDADES DAS PROPORÇÕES

Dados quatro números, a, b, c e d, não nulos, de modo que eles formem a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:

- $a \cdot d = c \cdot b$ — propriedade fundamental das proporções
- $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$; $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$; $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ — 1ª propriedade
- $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ — 2ª propriedade

Divisão em partes proporcionais

Vamos analisar as situações a seguir.

Situação 1

Como solução para dividir a tarefa diária de cuidar do cachorro de estimação da família, que inclui limpar o quintal, alimentá-lo e passear com ele, um pai propôs que a quantidade de dias em que cada um de seus 4 filhos deverá ser o responsável por tratar do cachorro seja diretamente proporcional à idade de cada um deles.

Sabendo que eles têm 12, 14, 16 e 18 anos, vamos calcular por quantos dias cada um deles será responsável pelos cuidados com o cachorro no próximo mês, e para isso vamos assumir que o mês tenha 30 dias.

Como a quantidade de dias que cada um dos irmãos cuidará do cachorro deve ser diretamente proporcional à idade de cada um deles, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{14} = \frac{w}{16} = \frac{z}{18}$$

em que x, y, z e w são as quantidades de dias em que cada um dos irmãos será responsável pelo cachorro.

Utilizando a 2ª propriedade das proporções, temos:

$$\frac{x+y+w+z}{12+14+16+18} = \frac{x}{12} = \frac{y}{14} = \frac{w}{16} = \frac{z}{18}$$

Como $x + y + w + z$ é igual a 30, pois representa a quantidade total de dias do mês, podemos determinar o fator de proporcionalidade k.

$$k = \frac{x+y+w+z}{12+14+16+18} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

Agora, determinamos cada uma das incógnitas:

- $\frac{x}{12} = k \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{12}{2} \Rightarrow x = 6$
- $\frac{y}{14} = k \Rightarrow \frac{y}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{14}{2} \Rightarrow y = 7$
- $\frac{w}{16} = k \Rightarrow \frac{w}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow w = \frac{16}{2} \Rightarrow w = 8$
- $\frac{z}{18} = k \Rightarrow \frac{z}{18} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{18}{2} \Rightarrow z = 9$

Portanto, as respectivas quantidades de dias em que cada um dos irmãos será responsável por cuidar do cachorro são 6 dias, 7 dias, 8 dias e 9 dias.

Dividir um número em partes diretamente proporcionais a outros números é decompô-lo em parcelas proporcionais a esses números.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Ao trabalhar a divisão de uma quantidade em partes diretamente proporcionais, os estudantes podem ter alguma dificuldade em entender como determinar a razão de proporcionalidade. Para ajudá-los, você pode propor atividades cuja situação envolva a necessidade de distribuir as pessoas que não contribuíram da mesma forma, como no exemplo a seguir.

Pedro, Carlos, Fernando, Ricardo e Tiago queriam participar de uma corrida com bastão. Eles estavam muito empolgados, mas era preciso pagar o valor da inscrição no torneio, que era de 100 reais por equipe. Eles combinaram que cada um daria a quantia que fosse possível e, assim, Pedro deu 8 reais, Carlos e Tiago deram 35 reais cada um e Fernando deu 22 reais. Eles ficaram em segundo lugar, ganharam um prêmio de 2 500 reais e distribuíram esse prêmio de acordo com o que cada um pagou na inscrição. Quantos reais cada um deve receber?

Para fazer a distribuição, é preciso determinar a razão entre o lucro e o gasto: $\frac{2\,500}{100} = 25$. Assim, Pedro receberá 200 reais ($8 \cdot 25 = 200$), Fernando receberá 550 reais ($22 \cdot 25 = 550$) e Carlos e Tiago receberão 875 reais cada um ($35 \cdot 25 = 875$).

Situação 2

Em uma competição amadora de gastronomia, os competidores deveriam preparar a mesma sequência de pratos. Os quatro competidores que preparassem os pratos no menor tempo ganhariam um prêmio de R$ 8900,00, que seria distribuído de maneira inversamente proporcional ao tempo de cada um deles. Ou seja, dos quatro competidores, o que preparasse os pratos em menor tempo ganharia mais, e o que preparasse em maior tempo ganharia menos.

Sabendo que os 4 competidores que venceram a prova gastaram, respectivamente, 4 horas, 5 horas, 6 horas e 8 horas, vamos calcular quanto cada um deles recebeu como prêmio.

Sendo *a*, *b*, *c* e *d* os valores recebidos pelo primeiro, pelo segundo, pelo terceiro e pelo quarto colocados, respectivamente, e sabendo que o prêmio foi distribuído de maneira inversamente proporcional ao tempo que cada um deles utilizou para preparar a sequência de pratos, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\frac{a}{\frac{1}{4}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = \frac{d}{\frac{1}{8}}$$

Utilizando a 2ª propriedade das proporções, temos:

$$\frac{a+b+c+d}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{a}{\frac{1}{4}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = \frac{d}{\frac{1}{8}}$$

Como $a + b + c + d$ é igual a 8900, pois representa o valor total do prêmio, podemos determinar o fator de proporcionalidade k.

$$k = \frac{a+b+c+d}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{8\,900}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{8\,900}{\frac{30}{120}+\frac{24}{120}+\frac{20}{120}+\frac{15}{120}} =$$

$$= \frac{8\,900}{\frac{30+24+20+15}{120}} = \frac{8\,900}{\frac{89}{120}} = 12\,000$$

Agora, determinamos cada uma das incógnitas:

- $\frac{a}{\frac{1}{4}} = k \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{4}} = 12\,000 \Rightarrow a = 12\,000 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow a = 3\,000$
- $\frac{b}{\frac{1}{5}} = k \Rightarrow \frac{b}{\frac{1}{5}} = 12\,000 \Rightarrow b = 12\,000 \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow b = 2\,400$
- $\frac{c}{\frac{1}{6}} = k \Rightarrow \frac{c}{\frac{1}{6}} = 12\,000 \Rightarrow c = 12\,000 \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow c = 2\,000$
- $\frac{d}{\frac{1}{8}} = k \Rightarrow \frac{d}{\frac{1}{8}} = 12\,000 \Rightarrow d = 12\,000 \cdot \frac{1}{8} \Rightarrow d = 1\,500$

Assim, o primeiro colocado recebeu R$ 3000,00; o segundo, R$ 2400,00; o terceiro, R$ 2000,00; e o quarto, R$ 1500,00.

- Uma das possíveis dificuldades dos estudantes com a divisão em partes proporcionais é justamente definir se a proporcionalidade é inversa ou não.
- Sugira aos estudantes que prestem muita atenção aos enunciados dos problemas e analisem as grandezas envolvidas.
- Na situação **2**, o enunciado esclarece que os competidores serão premiados por preparar a sequência de pratos em menor tempo; logo, quem utilizar o menor tempo na preparação, ganha mais e, portanto, as grandezas são inversamente proporcionais.

57

REGRA DE TRÊS

- É importante que os estudantes entendam que a regra de três é um método prático usado em situações em que se estabelece uma relação de proporcionalidade entre grandezas.
- Quando duas grandezas são diretamente proporcionais, as medidas de ambas aumentam a uma certa razão, como é o caso do exemplo do filme de curta-metragem apresentado nessa página do Livro do Estudante.
- Para o uso da regra de três com grandezas inversamente proporcionais, é preciso explicar aos estudantes que, enquanto a medida de uma grandeza aumenta, a da outra diminui, e ambas fazem isso na mesma razão. Discuta com os estudantes o problema apresentado na situação **2**, para que eles entendam como aplicar a regra de três simples com grandezas inversamente proporcionais.

Regra de três

Algumas situações que envolvem grandezas diretamente ou inversamente proporcionais podem ser resolvidas utilizando um método chamado **regra de três**. Esse método é utilizado para resolver problemas de proporcionalidade que envolvem quatro valores, dos quais três são conhecidos e um é desconhecido (incógnita).

Mas, antes de estudarmos como esse método funciona, vamos retomar o que são grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando variam sempre na mesma razão. Ou seja, ao dobrarmos o valor de uma, o valor da outra também dobra; ao reduzirmos o valor de uma à quarta parte, o valor da outra também fica reduzido à quarta parte; e assim por diante.

Em contrapartida, duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando variam na razão inversa uma da outra. Ou seja, ao dobrarmos o valor de uma, o valor da outra é reduzido pela metade; ao reduzirmos o valor de uma à terça parte, o valor da outra é triplicado; e assim por diante.

Regra de três simples

A regra de três simples é utilizada para resolver alguns problemas que envolvem duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Quando assistimos a um filme, para termos a ideia de movimento de maneira suave, ou seja, sem variações bruscas, é preciso que o filme tenha entre 30 e 60 imagens apresentadas por segundo.

Se um filme curta-metragem é gravado com 48 imagens por segundo e tem 90 segundos de duração, quantas imagens ele tem no total?

Considerando x o número total de imagens em 90 segundos de filme, construímos um quadro com as grandezas envolvidas e seus respectivos valores. Veja.

Duração do filme (em segundo)	Quantidade de imagens
1	48
90	x

Analisando as grandezas envolvidas nessa situação, podemos concluir que elas são diretamente proporcionais, pois, se o tempo de duração do filme dobra, a quantidade de imagens também dobra; se o tempo de duração triplica, a quantidade de imagens também triplica; e assim por diante. Assim, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\frac{1}{90} = \frac{48}{x}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$x \cdot 1 = 90 \cdot 48$$
$$x = 4\,320$$

Portanto, esse curta-metragem é composto de 4 320 imagens.

+INTERESSANTE

Câmera lenta

Você sabia que a ideia de movimento dos filmes é dada por uma sequência de imagens?

Recurso geralmente usado em filmes de ficção, a câmera lenta é um processo realizado com câmeras especiais que conseguem filmar um número de quadros por segundo (qps) muito superior ao das câmeras comuns. Por exemplo, ao registrar uma mesma cena com duração de 5 segundos a 30 qps e a 120 qps, a filmagem a 120 qps pode ser reproduzida, sem perder a fluidez, com duração de 20 segundos.

Situação 2

Para construir uma casa popular de um programa social, 4 pedreiros levam 20 dias. Quantos dias seriam gastos para construir uma casa do mesmo modelo se 5 pedreiros com a mesma eficiência trabalhassem nela?

Considerando x o número de dias gastos para construir uma casa se 5 pedreiros trabalhassem, montamos um quadro com as grandezas envolvidas e seus respectivos valores. Veja.

Quantidade de pedreiros	Dias
4	20
5	x

Analisando as grandezas envolvidas nessa situação, podemos concluir que elas são inversamente proporcionais, pois, se a quantidade de pedreiros dobra, a quantidade de dias se reduz pela metade; se a quantidade de pedreiros for reduzida à quarta parte, o número de dias será quadruplicado; e assim por diante. Observe que essas relações só são válidas porque os pedreiros trabalham com a mesma eficiência. Assim, podemos escrever a seguinte proporção:

razão inversa

$$\frac{4}{5} = \frac{x}{20}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$x \cdot 5 = 4 \cdot 20$$
$$5x = 80$$
$$x = \frac{80}{5}$$
$$x = 16$$

Portanto, 5 pedreiros com a mesma eficiência construiriam uma casa desse programa em 16 dias.

DIREITO À MORADIA

A expressão "direitos humanos" se refere a direitos inerentes a todos os seres humanos, independentemente de raça, sexo, nacionalidade, etnia, idioma, religião ou qualquer outra condição.

Direito à moradia é um dos direitos humanos e, para que ele seja garantido, existem programas de governo que planejam e constroem casas populares. Existem também muitos programas de voluntariado que auxiliam na construção de moradias populares.

1. **Com um colega, pesquise se na região onde vocês moram há algum projeto do governo que busca garantir o direito à moradia.**

2. **Pesquisem e façam uma lista com alguns dos outros direitos humanos. Depois, compartilhem com a turma o que vocês encontraram.**

Respostas pessoais.

+ INTERESSANTE

Aproveite a ideia apresentada para sugerir aos estudantes que pesquisem como funcionam as câmeras durante a gravação e como funciona a câmera lenta. Sugira a eles que pesquisem também a quantidade de quadros por segundo de uma câmera de celular e se os filmes reproduzidos em celulares podem ser exibidos em câmera lenta.

Justiça

Promova um debate com os estudantes com base na pesquisa realizada sobre a crise de moradia enfrentada por pessoas em grandes centros urbanos do Brasil, principalmente durante a pandemia da covid-19, em que famílias vivenciaram situação de emergência habitacional. Essa pesquisa pode considerar classe social, gênero, raça e cor para identificar aqueles que são mais atingidos pelas desigualdades sociais que aumentaram em virtude da crise pandêmica. Questione-os se eles conhecem algumas políticas públicas que combatem esse problema social que assola o país há muito tempo, independentemente da crise vivenciada. Essa conversa desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação em Direitos Humanos, que pertence à macroárea **Cidadania e Civismo**.

(IN)FORMAÇÃO

Se for conveniente ou surgir algum questionamento, comente com os estudantes que, devido à pandemia de covid-19, os jogos olímpicos de 2020 ocorreram no ano de 2021.

De acordo com a Organização Pan-Americana da Saúde (Opas), em 31 de dezembro de 2019 a Organização Mundial da Saúde (OMS) recebeu uma notificação sobre diversos casos de pneumonia na cidade de Wuhan, na China. Logo em seguida, na primeira semana de janeiro de 2020, as autoridades chinesas confirmaram que haviam identificado um novo tipo de coronavírus, o SARS-CoV-2, até então não identificado em seres humanos.

No fim de janeiro de 2020, a OMS declarou que o surto do novo coronavírus se enquadrava como uma Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional (ESPII), que configura o mais alto nível de alerta da Organização. Até então, esse alerta havia sido emitido em apenas cinco ocasiões:

- 25 de abril de 2009: pandemia de H1N1.
- 5 de maio de 2014: disseminação internacional de poliovírus.
- 8 de agosto de 2014: surto de ebola na África Ocidental.
- 1º de fevereiro de 2016: vírus zika e aumento de casos de microcefalia e outras malformações congênitas.
- 18 de maio de 2018: surto de ebola na República Democrática do Congo.

Em 11 de março de 2020, a covid-19, doença causada pelo SARS-CoV-2, foi caracterizada como pandemia. Vale ressaltar que o termo "pandemia" não está relacionado com a gravidade da doença, mas sim com uma questão geográfica.

No Brasil, assim como na maior parte do mundo, para conter o avanço da doença e amenizar o impacto no sistema de saúde, foram adotadas, em um primeiro momento, medidas de isolamento social. Estabelecimentos que prestavam serviços caracterizados como não essenciais (estádios de futebol, cinemas, escolas, teatros, igrejas, lojas, entre outros) foram fechados e os hábitos tiveram de ser rapidamente modificados para que as pessoas trabalhassem (no caso de serviços considerados não essenciais) e estudassem de maneira remota. Depois, também foi adotado o uso obrigatório de máscaras individuais para reduzir o contágio. Muitos eventos importantes, como as Olimpíadas de Tóquio, foram adiados, cancelados ou transformados em eventos virtuais.

Em 2021, após o desenvolvimento de algumas vacinas, teve início o processo de vacinação. No Brasil, até 24 de maio de 2022, mais de 667 mil pessoas haviam morrido de covid-19, e o número de casos confirmados já passava dos 31 milhões.

Fontes de pesquisa: WHO. Disponível em: https://www.who.int/pt; Opas. Disponível em: https://www.paho.org/pt/brasil. Acessos em: 3 ago. 2022.

- Explique aos estudantes que, para aplicar a regra de três composta, é necessário ter uma relação entre mais de duas grandezas. Da mesma forma que na regra de três simples, também é possível pensar em frações equivalentes para resolver problemas desse tipo, bem como utilizar o método prático da regra de três composta. Para utilizar qualquer dessas opções, é preciso compreender o enunciado do problema e observar quais são as grandezas envolvidas e se elas são diretamente ou inversamente proporcionais.
- Na situação **1**, a quantidade de máquinas, o número de dias de trabalho e a quantidade de portas produzidas são grandezas que crescem proporcionalmente uma em relação à outra. Quanto mais máquinas trabalhando, mais portas são produzidas, e quanto mais dias com as máquinas em uso, mais portas são produzidas.
- É importante que os estudantes entendam que, na regra de três composta, não é preciso fazer o cálculo de duas regras de três para obter ao resultado solicitado. Na regra de três composta devem-se multiplicar as duas razões conhecidas e igualar o resultado à razão em que há um termo desconhecido, como descrito na situação que envolve a produção das portas.

Regra de três composta

O procedimento da regra de três composta é utilizado em situações que apresentam três ou mais grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1


Worawut/Shutterstock.com/ID/BR

Estoque de portas de carros.

Em uma fábrica de peças para carros, 5 máquinas produzem, em 4 dias, 200 portas de carro iguais. Quantas portas serão produzidas se 7 máquinas estiverem funcionando, no mesmo ritmo, em 10 dias?

Representando por x a quantidade de portas produzidas por 7 máquinas em 10 dias, podemos organizar um quadro. Veja.

Quantidade de máquinas	Número de dias	Quantidade de portas produzidas
5	4	200
7	10	x

Agora, precisamos comparar a grandeza quantidade de portas produzidas, na qual está o termo desconhecido, com as outras duas grandezas: a quantidade de máquinas e a de dias.

- Quantidade de máquinas: a quantidade de máquinas funcionando é diretamente proporcional à quantidade de portas produzidas, pois, ao aumentar a quantidade de máquinas funcionando, a quantidade de portas produzidas aumenta na mesma razão.
- Número de dias: a quantidade de dias é diretamente proporcional à quantidade de portas produzidas, pois, ao aumentar a quantidade de dias, a quantidade de portas produzidas aumenta na mesma razão.

Observe como escrevemos uma igualdade entre essas grandezas e como solucionamos o problema.

diretamente proporcional à quantidade de portas produzidas

diretamente proporcional à quantidade de portas produzidas

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{10} = \frac{200}{x}$$

Simplificamos a fração $\frac{4}{10}$.

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{200}{x}$$

Multiplicamos as frações

$$\frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{200}{x}$$

$$\frac{10}{35} = \frac{200}{x}$$

Usamos a propriedade fundamental das proporções.

$$10 \cdot x = 35 \cdot 200$$

$$10x = 700$$

$$x = \frac{7\,000}{10}$$

$$x = 700$$

Portanto, 7 máquinas trabalhando durante 10 dias produzirão 700 portas de carro.

OUTRAS FONTES

ENZENSBERGER, H. M. *O diabo dos números*. São Paulo: Seguinte, 1997.

Um livro para tirar o medo da Matemática e desmistificar que a disciplina não tem sentido prático.

SMOOTHEY, M. *Atividades e jogos com razão e proporção*. São Paulo: Scipione, 1998.

Nesse livro, o professor encontra diversos jogos e brincadeiras nos quais são usados os conceitos de razão e proporção.

Situação 2

Uma pequena empresa tem 5 impressoras, que produzem 40 cópias em 2 minutos. Em quanto tempo 96 cópias seriam produzidas por 8 dessas impressoras?

Representando por x a quantidade de minutos que 8 impressoras levariam para produzir 96 cópias, podemos organizar um quadro. Veja.

Tempo (minutos)	Quantidade de cópias	Quantidade de impressoras
2	40	5
x	96	8

Agora, precisamos comparar a grandeza tempo, na qual está o termo desconhecido, com as outras duas grandezas: a quantidade de cópias e a quantidade de impressoras.

- Considerando a mesma quantidade de cópias, podemos concluir que o tempo e a quantidade de impressoras são grandezas inversamente proporcionais, pois, aumentando a quantidade de impressoras, o tempo para tirar as cópias diminui na mesma razão.
- Considerando a mesma quantidade de impressoras, podemos constatar que o tempo e a quantidade de cópias são grandezas diretamente proporcionais, pois, aumentando o tempo, a quantidade de cópias aumenta na mesma razão.

Assim, observe como podemos escrever uma igualdade entre essas grandezas.

diretamente proporcional ao tempo

inversamente proporcional ao tempo

$$\frac{40}{96} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2}{x}$$

Observe que invertemos a razão correspondente à grandeza que é inversamente proporcional ao tempo. Ou seja, em vez de escrevermos $\frac{5}{8}$, escrevemos $\frac{8}{5}$.

Por fim, determinamos o valor de x:

$$\frac{40}{96} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2}{x}$$

Simplificamos a fração $\frac{40}{96}$.

$$\frac{5}{12} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2}{x}$$

Multiplicamos as frações.

$$\frac{40}{60} = \frac{2}{x}$$

Usamos a propriedade fundamental das proporções.

$$40 \cdot x = 2 \cdot 60$$

$$40x = 120$$

$$x = \frac{120}{40}$$

$$x = 3$$

Portanto, 8 impressoras produziriam 96 cópias em 3 minutos.

- Explique aos estudantes que, para usar a regra de três composta com medidas de grandezas inversamente proporcionais, é preciso compreender quais são as grandezas que são diretamente proporcionais e quais são as grandezas inversamente proporcionais.
- Após analisar a situação **2** com os estudantes, se julgar necessário, com o objetivo de levá-los a ter maior familiaridade com resoluções de problemas que envolvem grandezas inversamente proporcionais, apresente-lhes outras situações-problema para serem analisadas.

61

- Na atividade **11**, espera-se que os estudantes percebam que 48 é o triplo de 16; portanto, é necessário o triplo de cada ingrediente para produzir essa quantidade de bombons.
- Na atividade **12**, é importante destacar que o tempo de realização da prova foi aproximado para fins didáticos, pois a brasileira Ana Marcela da Cunha venceu a prova em 1 h 59 min 30 s, ou seja, em menos de 2 horas. Vale comentar com os estudantes que cada segundo é precioso em provas desse tipo, uma vez que a segunda colocada, a holandesa Sharon van Rouwenadaal, fez a prova em 1 h 59 min 31 s e a terceira colocada, a australiana Kareena Lee, completou a prova em 1 h 59 min 32 s. Ressalte que todas fizeram em menos de 2 horas. Comente também que foi a primeira vez que uma brasileira conquistou a medalha de ouro em jogos olímpicos na modalidade maratona aquática de 10 km.
- Verifique se os estudantes percebem que a atividade **14** apresenta uma situação em que as grandezas são inversamente proporcionais: quanto mais vacas para alimentar, menos tempo dura o estoque de ração. Já as atividades **15** e **17** podem ser resolvidas com a regra de três composta.
- Ao explorar a atividade **17**, promova uma conversa sobre o consumo de lâmpadas elétricas. Ajude os estudantes a refletir sobre gastos desnecessários e formas de economizar energia em casa.
- As atividades **19** e **20** trabalham a ideia de proporcionalidade inversa. Aproveite para verificar se os estudantes entenderam esse raciocínio e o que devem fazer para resolver os problemas. Se ainda assim tiverem dificuldade, ajude-os a analisar as situações e a obter as informações necessárias para concluir que as grandezas são inversamente proporcionais.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nessa página envolvem razões e proporções direta e inversa entre duas ou mais grandezas, em contextos socioculturais, o que favorece desenvolvimento da habilidade **EF09MA08**.

10. R$ 240 000,00, R$ 160 000,00, R$ 96 000,00, R$ 80 000,00 e R$ 60 000,00, respectivamente.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

7. Divida o número 140 em partes proporcionais aos números 2, 3 e 5.
28, 42 e 70, respectivamente.

8. Divida o número 2 990 em partes diretamente proporcionais a 8 e 15.
1 040 e 1 950, respectivamente.

9. Três amigos decidiram comprar um bilhete de um sorteio cujo prêmio é de R$ 96 000,00. Como eles não possuíam quantias iguais para a compra do bilhete, cada um contribuiu com o que podia. As quantias foram: R$ 8,00, R$ 10,00 e R$ 14,00. Sabendo que, caso sejam sorteados, eles dividirão o prêmio proporcionalmente à quantia com que cada um contribuiu para a compra do bilhete, calcule a parcela que cada um poderá receber.
R$ 24 000,00, R$ 30 000,00 e R$ 42 000,00, respectivamente.

10. Uma avó deixou de herança a quantia de R$ 636 000,00 para ser dividida entre os netos na razão inversa de suas idades, que eram 4, 6, 10, 12 e 16 anos. Quanto recebeu cada um deles?

11. Para fazer 16 bombons, Cátia usou 1 lata de creme de leite e 500 gramas de chocolate em barra. Quanto ela usaria de creme de leite e de chocolate para fazer 48 desses bombons?

12. Nos Jogos Olímpicos de Tóquio 2020, Ana Marcela Cunha venceu uma prova aquática nadando com velocidade média de aproximadamente 5 km/h.

a) Sabendo que ela levou cerca de 2 h para concluir a prova, quantos quilômetros ela nadou? 10 km

b) Se ela nadasse 12 km com essa velocidade média, quanto tempo levaria para concluir o percurso? 2 horas e 24 minutos.

13. Uma torneira tem vazão de 15 litros por minuto e consegue encher um tanque em 12 horas. Quanto tempo uma torneira que tem vazão de 20 litros por minuto levaria para encher o mesmo tanque?
9 horas.

14. Uma fazenda tem estoque de ração suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 dias. Caso o número de vacas fosse 450, a ração seria suficiente para quantos dias? 22 dias.

15. Por 5 dias de hospedagem em um hotel, 4 pessoas pagaram ao todo R$ 1 200,00. Quanto esse hotel cobrará de 6 pessoas por 10 dias de hospedagem, sabendo que o preço da diária por pessoa é sempre o mesmo? R$ 3 600,00

16. Caminhando 10 horas diárias, durante 24 dias, um viajante percorreu 720 km. Para percorrer 432 km, caminhando na mesma velocidade por 8 horas diárias, quantos dias serão necessários? 18 dias.

GUIZIOU Franck/Hemis/AFP

Pessoa caminhando nos arredores de Triacastela, rota espanhola da peregrinação a Santiago de Compostela. Foto de 2021.

17. Oito lâmpadas iguais, acesas durante 4 horas diárias, consomem, em 30 dias, 48 kWh (quilowatt-hora). Quanto consumirão 6 lâmpadas iguais a essas, ficando acesas 3 horas por dia, durante 20 dias?
18 kWh

18. Dois alfaiates costuram 10 barras de calça em 20 minutos. Calcule quantas barras seriam costuradas por 3 alfaiates em 12 minutos. Considere que todos os alfaiates fazem o mesmo serviço no mesmo tempo.
9 barras.

19. Um motorista, dirigindo com velocidade de 100 km/h, gasta 6 horas para ir de uma cidade a outra. Quantas horas esse motorista gastará para percorrer o mesmo trecho se ele aumentar a velocidade para 120 km/h? 5 horas.

20. Para pintar uma casa, foram contratados 4 pintores igualmente eficientes, que terminariam a obra em 30 dias. Depois de 5 dias, o responsável pela pintura decidiu agilizar o trabalho e contratou mais um pintor, com a mesma capacidade de trabalho dos outros. Quantos dias durou essa obra? 25 dias.

11. 3 latas de creme de leite e 1 500 gramas de chocolate em barra.

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. a) Diretamente proporcionais e $k = \frac{1}{20}$. b) Inversamente proporcionais e $k = 24$.

1. Verifique se os números das sequências a seguir são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. Depois, determine os fatores de proporcionalidade.
   a) (1, 3) e (20, 60)
   b) (2, 3, 4) e (12, 8, 6)

2. Uma fábrica, funcionando 6 horas por dia, produz 20 motos em 8 dias. O dono da fábrica precisa aumentar a produção para 30 motos em 9 dias. Para que esse objetivo seja alcançado, quantas horas por dia a fábrica precisa funcionar? **8 horas por dia.**

3. Uma fábrica produz 400 bonecas em 5 horas. Quantas horas são necessárias para produzir 1 000 bonecas? **12,5 horas.**

4. A padaria de um supermercado produz 240 kg de pão com 200 kg de farinha.
   a) Quantos quilogramas de farinha são necessários para fazer 3 kg de pão? **2,5 kg**
   b) Quantos pães de 50 g podem ser feitos com 500 kg de farinha? **12 000 pães.**

5. A razão entre as medidas dos lados de dois quadrados é $\frac{4}{5}$, e o lado do quadrado menor mede 12 cm.
   a) Qual é a medida do lado do quadrado maior? **15 cm**
   b) Qual é a razão entre a medida do perímetro do quadrado menor e a medida do perímetro do quadrado maior? $\frac{4}{5}$
   c) Qual é a razão entre a medida da área da região quadrada menor e medida da área da região quadrada maior? $\frac{16}{25}$
   d) Verifique se a razão entre as medidas dos perímetros e a razão entre as medidas das áreas formam uma proporção. **As razões não formam proporção.**

6. Para preparar determinado suco, misturam-se 2 copos de polpa de fruta para cada 10 copos de água. Mariana usou 36,5 copos de água para preparar o suco.
   a) A quantos copos com polpa corresponde essa quantidade de água? **7,3 copos.**
   b) Quantos copos desse suco, completamente cheios, poderão ser servidos? Lembre-se: O suco pronto contém as quantidades de água e de polpa que foram utilizadas. **43 copos.**

7. Uma empresa engarrafadora de água mineral consegue encher 3 mil garrafas em 5 dias, funcionando 6 horas por dia. O dono do negócio quer aumentar a produção para 4 mil garrafas em 4 dias.
   a) Calcule quantas horas por dia a empresa deve funcionar para que o dono do negócio atinja seu objetivo. **10 horas por dia.**
   b) Dadas as mesmas condições, calcule quantas horas a empresa deve funcionar para engarrafar 4 000 garrafas de água mineral em um dia. **Essa produção é impossível.**

8. Uma máquina embala 20 caixas de biscoito por minuto. Se 3 dessas máquinas funcionarem 6 horas por dia, quantas caixas de biscoito serão embaladas por dia? **21 600 caixas.**

9. Seis lâmpadas iguais, acesas durante 5 horas diárias, têm um consumo mensal de 40 kWh (quilowatt-hora). Qual será o consumo mensal de 8 lâmpadas acesas 6 horas por dia? **64 kWh**

10. O dono de uma empresa resolveu distribuir uma gratificação de R$ 2 280,00 entre seus três gerentes: Alberto, Beatriz e Cléber, de modo que o valor recebido fosse inversamente proporcional às faltas de cada um no decorrer do ano. Considerando que Alberto faltou 5 vezes, Beatriz faltou 4 vezes e Cléber faltou 2 vezes, quanto cada gerente receberá do bônus? **Alberto: R$ 480,00; Beatriz: R$ 600,00 e Cléber: R$ 1 200,00.**

11. A medida de massa de 80 cadernos universitários de 140 páginas é 72 kg. Qual é a medida de massa de 70 cadernos universitários com 120 páginas cada um? **54 kg**

12. Quinze operários igualmente eficientes constroem 3 lajes de um edifício em 8 dias. Quantos operários, com essa mesma capacidade de trabalho, serão necessários para construir as 12 lajes restantes do edifício em 20 dias? **24 operários.**

13. Cada cidadão brasileiro produz, em média, 387 kg de resíduos em um ano. Pesquise no *site* do IBGE a população de um município do seu estado e peça a um colega que calcule a produção de lixo daquele município em determinado número de anos. Depois, calcule a produção de lixo do município que seu colega pesquisou, na mesma quantidade de anos. **Resposta pessoal.**

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Para a resolução da atividade **1**, é preciso que os estudantes tenham compreendido o conceito de proporcionalidade inversa ou direta. No item **a**, para obter 20 e 60 de 1 e 3, é possível multiplicar ambos os números por 20; portanto, esses números são diretamente proporcionais. Já no item **b**, a proporcionalidade não é tão visível, pois é indireta. Além disso, os estudantes podem achar que é uma proporcionalidade direta, pois, para obter 12 a partir de 2, basta multiplicar por 6. Mas a multiplicação por 6 não é válida para outros termos e, então, eles terão de buscar outras estratégias.
- A atividade **5** é uma boa oportunidade para discutir alguns resultados da Geometria. A razão entre as medidas dos lados de dois quadrados pode ser usada para o cálculo da medida do perímetro deles, mas não da medida da área. Sugira aos estudantes que observem as razões entre as medidas das áreas obtidas no item **c** para verificar se eles notam alguma regularidade. É importante que eles percebam que a razão entre as medidas das áreas corresponde ao quadrado da razão entre as medidas dos lados dos quadrados.
- A atividade **13** é mais uma boa oportunidade para sugerir aos estudantes que acessem o *site* do IBGE Cidades@, disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/ (acesso em: 28 jun. 2022), e descubram diversas informações sobre nosso país.

DE OLHO NA BASE

As atividades apresentadas nessa seção envolvem a resolução de problemas que abordam proporcionalidade direta e inversa, bem como a divisão em partes proporcionais, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA08**.

Também discutem algumas razões especiais, como velocidade média e densidade demográfica, o que possibilita o desenvolvimento da habilidade **EF09MA07**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para ajudar os estudantes com dificuldade de compreensão em grandezas inversamente proporcionais, discuta com eles situações em que elas podem surgir. Por exemplo, acrescentar uma máquina a mais a um trabalho pode diminuir o tempo em que o trabalho será realizado. Aumentar a quantidade de trabalhadores em uma obra pode diminuir o tempo em que a obra será realizada. Aumentar a quantidade de tecido comprado por atacado pode diminuir o preço desse tecido e, portanto, diminuir o custo de confecção de uma roupa.

Discuta esses e outros exemplos com os estudantes e também peça a eles que apresentem mais exemplos, de forma que compreendam as situações em que as grandezas são inversamente proporcionais.

Outra estratégia para auxiliar os estudantes com dificuldade é propor que as atividades sejam realizadas em grupos, pois eles poderão, em conjunto, ajudar-se mutuamente e sanar algumas dificuldades.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Porcentagem.
- Descontos e acréscimos sucessivos.
- Juros.

Objetivos

- Reconhecer o uso de porcentagens em relações comerciais.
- Utilizar a calculadora para o cálculo de porcentagens.
- Compreender descontos e acréscimos sucessivos.
- Compreender a ideia de juro.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo de porcentagem em temas que envolvem finanças, para compreender e resolver situações que apresentam descontos, acréscimos e juros. Com esses estudos, espera-se prepará-los para exercer a cidadania, sabendo analisar criticamente situações que envolvem operações financeiras, refletindo e decidindo sobre o que é melhor para as pessoas e para o mundo, no presente e no futuro, utilizando conhecimentos adquiridos na escola.

PORCENTAGEM

- Nas relações comerciais, a porcentagem aparece com grande frequência, pois o comércio estipula o valor de suas mercadorias com base em porcentagens de lucro e também oferece promoções aos clientes com base em porcentagens de desconto, especialmente em tempos de crise, de baixa procura e muita oferta.
- Converse com os estudantes sobre o conceito de porcentagem. Verifique se eles sabem o que significa. Explique-lhes o significado da palavra para que entendam porcentagem como "por cento", isto é, por cada 100.
- Converse com os estudantes sobre as promoções realizadas pelas lojas de diversos segmentos. Sugira a eles que troquem ideias em grupos, analisando se já as viram expostas nas vitrines das lojas, em publicidades da internet, em folhetos, etc. e se as situações apresentadas compensavam adquirir determinado produto. Além disso, converse com eles sobre liquidações nas quais o preço sobe alguns dias antes da promoção para dar a impressão de que houve uma grande queda para que o cliente realize a compra. Ressalte à turma que identificar essas sutilezas nos anúncios e saber realizar o cálculo de porcentagem previne o cliente de ter prejuízos financeiros futuramente. Essa conversa desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação Financeira, que pertence à macroárea **Economia**.

Capítulo

2 MATEMÁTICA FINANCEIRA

Para desenvolver os conteúdos deste capítulo, os estudantes precisam estar com seus conhecimentos sobre porcentagens, acréscimos e decréscimos simples bem sedimentados.

Porcentagem

Você já deve ter visto o símbolo de porcentagem (%) em notícias sobre economia, em folhetos de supermercados, em vitrines de lojas, na televisão, etc. Esse símbolo aparece em diversas situações cotidianas.

Por exemplo, você já foi a um restaurante e o garçom perguntou se ele poderia incluir o serviço? Você sabe o que isso significa? Para compreender essa e outras relações presentes em nosso dia a dia, é necessário entender as relações comerciais. Mas, antes, é preciso retomar o conceito de porcentagem.

Porcentagem ou **taxa percentual** é a razão entre um número x e 100, que indicamos por $\frac{x}{100}$ ou x%.

Agora, observe a imagem a seguir. O símbolo de porcentagem está sendo utilizado com que finalidade? Converse com os colegas e o professor.
Resposta pessoal.

Anúncio de desconto em uma loja.

TZIDO SUN/Shutterstock.com/ID/BR

64

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas neste capítulo também contribuem para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**, permitindo que os estudantes sintam segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

- O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes deve ser preservada. Para isso, valorize situações em que eles se sintam acolhidos, incentivando o desenvolvimento da empatia e da solidariedade.

A Educação Financeira tem um papel importante nesse contexto, pois as situações-problema que envolvem o uso do dinheiro visam aproximar teoria e prática, desenvolvendo a capacidade de eles gerirem as próprias finanças. Além disso, permite aos estudantes se sentir inseridos na sociedade ao deparar com situações reais de compra e venda com os pais ou responsáveis, colaborando para o aumento da autonomia e da autoestima deles nesses momentos.

Situações que envolvem porcentagem

Vamos analisar algumas situações que envolvem o cálculo de porcentagem.

Situação 1

Uma vendedora de roupas recebe, além de seu salário fixo, 10% de comissão sobre o valor das peças que vende. Sabendo que, no mês passado, suas vendas totalizaram R$ 9 000,00, quanto foi sua comissão nesse mês?

Vamos resolver essa situação de três maneiras.

1ª maneira

Uma maneira de obter esse valor é calcular 10% de 9 000.

$$10\% \cdot 9\,000 = \frac{1\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot 9\,00\cancel{0} = \frac{1}{1} \cdot 900 = 900$$

2ª maneira

Também podemos utilizar uma calculadora.

Para calcular 10% de 9 000 usando a calculadora, apertamos as seguintes teclas:

9 0 0 0 × 1 0 %

Aparecerá no visor:

900

João Picoli/ID/BR

3ª maneira

Sabemos que o valor total das vendas, R$ 9 000,00 corresponde a 100%. Assim, para determinarmos o valor *x*, em real, que corresponde a 10%, podemos usar uma regra de três.

Valor (em real)	Porcentagem (%)
9 000	100
x	10

O valor e a porcentagem são grandezas proporcionais, então:

$$\frac{9\,000}{x} = \frac{100}{10}$$

$$x \cdot 100 = 9\,000 \cdot 10$$

$$100x = 90\,000$$

$$x = \frac{90\,000}{100}$$

$$x = 900$$

Portanto, o valor da comissão dessa vendedora no mês passado foi R$ 900,00.

- Os estudantes provavelmente já conhecem e compreendem o conceito de porcentagem e, por isso, não terão dificuldade em entender como o cálculo de 10% de R$ 9 000,00 foi realizado na situação **1**. Caso alguns deles encontrem dificuldade nesse cálculo, a segunda maneira de resolver, com o auxílio da calculadora, pode ser mais fácil para eles. Além disso, saber utilizar a calculadora é uma habilidade que os estudantes precisam desenvolver.
- Peça aos estudantes que tragam calculadora para a aula ou utilizem a do celular (se for possível), promovendo a discussão da existência de diversos tipos de calculadora.
- O uso de calculadoras é importante para os estudantes entenderem o conceito de porcentagem. No entanto, usar somente a calculadora para fazer os cálculos pode prejudicar a compreensão deles a respeito da ideia que está por trás desses cálculos.

65

- Na situação **2** trabalhada nesta página, procura-se encontrar a taxa percentual de aprovados no curso mediante a razão entre o número de aprovados em cada um dos cursos pelo número de candidatos inscritos em cada um deles.
- Outra maneira de obter a taxa percentual é dividir o número de aprovados pelo número de inscritos. Converse com os estudantes sobre esta outra maneira:
  - Curso A:

$$\frac{35}{68} \simeq 0{,}5147 = 51{,}47\%$$

  - Curso B:

$$\frac{28}{75} \simeq 0{,}3733 = 37{,}33\%$$

  - Curso C:

$$\frac{36}{44} \simeq 0{,}8182 = 81{,}82\%$$

Situação 2

O quadro mostra o número de pessoas que se inscreveram e o número de pessoas que foram aprovadas para fazer três cursos de verão em certa instituição de gastronomia. Qual foi a taxa percentual de aprovação de cada curso?

	Curso A	Curso B	Curso C
Número de inscritos	68	75	44
Número de aprovados	35	28	36

A taxa percentual de aprovação de cada curso corresponde à porcentagem dos inscritos que foram aprovados.

- Curso A

Sendo x a taxa percentual de aprovação do curso A, sabemos que $x\%$ de 68 é 35. Assim, para determinar o valor de x, temos:

$$x\% \cdot 68 = 35$$
$$\frac{x}{100} \cdot 68 = 35$$
$$x \cdot 68 = 35 \cdot 100$$
$$68x = 3\,500$$
$$x = \frac{3\,500}{68}$$
$$x \simeq 51{,}47$$

- Curso B

Sendo y a taxa percentual de aprovação do curso B, sabemos que $y\%$ de 75 é 28. Assim, para determinar o valor de y, temos:

$$y\% \cdot 75 = 28$$
$$\frac{y}{100} \cdot 75 = 28$$
$$y \cdot 75 = 28 \cdot 100$$
$$75y = 2\,800$$
$$y = \frac{2\,800}{75}$$
$$y \simeq 37{,}33$$

- Curso C

Sendo z a taxa percentual de aprovação do curso C, sabemos que $z\%$ de 44 é 36. Assim, para determinar o valor de z, temos:

$$z\% \cdot 44 = 36$$
$$\frac{z}{100} \cdot 44 = 36$$
$$z \cdot 44 = 36 \cdot 100$$
$$44z = 3\,600$$
$$z = \frac{3\,600}{44}$$
$$z \simeq 81{,}82$$

Portanto, as taxas de aprovação dos cursos A, B e C, respectivamente, foram de, aproximadamente, 51,47%, 37,33% e 81,82%.

Situação 3

Uma loja vende peças de reposição para quatro modelos de máquinas agrícolas (colheitadeiras e tratores). No entanto, um dos modelos para o qual essa loja fornece peças parou de ser fabricado. Para tentar reduzir o estoque de peças para esse modelo, a loja ofereceu um desconto de 10% nessas peças. Depois de um mês, mesmo com o desconto, ainda havia muitas peças no estoque. Então, o proprietário decidiu dar mais 15% de desconto. Sabendo que, inicialmente, cada uma dessas peças era vendida por R$ 1 750,00, depois desses dois descontos, por quanto cada uma dessas peças passou a ser vendida?


Gerson Gerloff/Pulsar Imagens

Colheitadeira descarregando arroz, em Restinga Seca (RS). Foto de 2021.

Inicialmente, devemos calcular o valor da peça após o primeiro desconto. Como o primeiro desconto foi de 10%, sabemos que o novo preço da peça corresponde a 90% do valor inicial, pois:

$$100\% - 10\% = 90\%$$

Assim, para descobrir o preço após o desconto de 10%, devemos calcular 90% de R$ 1 750,00.

$$90\% \cdot 1\,750 = \frac{90}{100} \cdot 1\,750 = 0{,}9 \cdot 1\,750 = 1\,575$$

Agora, precisamos determinar o valor da peça depois do desconto de 15%. O preço final da peça corresponde a 85% do valor que acabamos de obter, pois:

$$100\% - 15\% = 85\%$$

Para descobrir o preço após o desconto de 15%, devemos calcular 85% de R$ 1 575,00.

$$85\% \cdot 1\,575 = \frac{85}{100} \cdot 1\,575 = 0{,}85 \cdot 1\,575 = 1\,338{,}75$$

Portanto, o preço da peça depois dos dois descontos é R$ 1 338,75.

Outra maneira de calcular o preço final da peça seria multiplicar o valor inicial da peça pelos fatores correspondentes a cada desconto. Assim:

fator correspondente ao primeiro desconto

fator correspondente ao segundo desconto

$$1\,750 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}85 =$$
$$= 1\,575 \cdot 0{,}85 =$$
$$= 1\,338{,}75$$

Observe que, nessa situação, não é possível adicionar os valores dos descontos e depois aplicar o resultado obtido como se fosse um desconto único sobre o preço inicial.

Esse procedimento não é válido, pois o segundo desconto é aplicado sobre um valor diferente do valor inicial do produto. Ou seja, calcular 10% de um valor e, depois, 15% sobre o resultado não é o mesmo que calcular 25% (10% + 15%) desse valor.

PARE E REFLITA

Faça as contas e confirme que calcular 10% de um valor e, então, 15% do resultado não é o mesmo que calcular 25% desse valor. Compare os resultados que você obteve com os de um colega.

- Ao analisar a situação **3**, pergunte aos estudantes se conhecem o processo do beneficiamento do arroz desde a colheita até o consumo, os equipamentos utilizados para facilitar a colheita e a logística desses grãos pelas rodovias ou por outros meios de transporte utilizados para que esse produto seja comercializado interna ou externamente. Ressalte a importância do povo do campo, que depende de condições climáticas e de investimentos para a compra de máquinas e para a produção do alimento que chega às prateleiras do supermercado, pois, muitas vezes, essas situações influenciam o preço dos produtos. Dessa maneira, essa conversa valoriza positivamente a cultura, as tradições e a participação social do povo do campo.
- É importante que os estudantes verifiquem que não é possível adicionar os valores dos descontos. Ao pedir que calculem o preço da peça com um desconto de 25%, eles verificarão que o valor final da peça será menor que com descontos sucessivos de 10% e 15%. Com um desconto único de 25% o valor a ser pago corresponde a 75% do valor inicial da peça:

  $$0{,}75 \cdot 1\,750 = 1\,312{,}50$$

  Dois descontos sucessivos, um de 10% e outro de 15% correspondem a um desconto único de 23,5%, pois, $0{,}9 \cdot 0{,}85 = 0{,}765$. Ou seja, o valor a ser pago corresponde a 76,5% do valor inicial da peça:

  $$0{,}765 \cdot 1\,750 = 1\,338{,}75$$
- Esses cálculos são mais demorados para serem realizados com papel e lápis; por isso, o uso da calculadora é muito útil, uma vez que os estudantes compreendem o processo para tais cálculos, ou seja, o importante nesse momento é que eles entendam o processo para a obtenção do valor a ser pago após os descontos sucessivos, e não a determinação desse valor.
- Peça aos estudantes que escrevam argumentos lógicos para justificar a resolução da atividade do boxe *Pare e reflita*. Por exemplo, eles podem escrever:
  - Se calcular 10% de um valor x é igual a $0{,}1x$ e 15% do valor $0{,}1x$ corresponde a $0{,}15 \cdot 0{,}1x$, então calcular 25% de x não é igual a $0{,}15 \cdot 0{,}1x$.
  - Como 10% de um valor x é igual a $0{,}1x$ e 15% de $0{,}1x$ é igual a $0{,}15 \cdot 0{,}1x$, então $0{,}15 \cdot 0{,}1x = 0{,}015x$.
  - Tem-se que 25% de x é igual a $0{,}25x$.
  - Como $0{,}015 \neq 0{,}25$, então tem-se que $0{,}015x \neq 0{,}25x$.
  - Portanto, calcular 10% de um valor e calcular 15% do resultado não é o mesmo que calcular 25% desse valor.

- Comente com os estudantes que analisar os acréscimos sucessivos é importante para o desenvolvimento deles como cidadãos, pois eles precisam compreender como são calculados os acréscimos nos preços de produtos que consomem.
- Discuta com os estudantes as diferentes representações utilizadas para as porcentagens. Nos exemplos anteriores dos descontos sucessivos, inicialmente representava-se a porcentagem por um número na representação decimal para, depois, multiplicá-lo pelo valor. Nos acréscimos sucessivos, é preciso adicionar o valor do produto ao valor da porcentagem; por isso, ela é representada em números decimais com o acréscimo de 1, isto é, o preço e mais o aumento.
- Destaque que os cálculos efetuados com números em representação decimal são aproximados.

PARA EXPLORAR

***Uma proporção ecológica*, de Luzia Faraco Ramos. São Paulo: Ática, 2008 (Coleção A Descoberta da Matemática).**

Esse livro aborda os conceitos matemáticos de razão, proporção, regra de três e porcentagem de maneira lúdica e combina conhecimento com o prazer da leitura. Na trama, um grupo de jovens passa alguns dias em uma pequena cidade para divulgar o sistema de coleta seletiva de lixo e, para controlar a quantidade de lixo coletado, precisa utilizar esses conhecimentos matemáticos.

Situação 4

Em 2021, o preço do botijão do gás de cozinha teve os seguintes aumentos: 7,5% no segundo trimestre, 9,3% no terceiro trimestre e 8,5% no quarto trimestre.

Se em determinada cidade o botijão de gás de 13 kg no primeiro trimestre de 2021 era vendido em média por R$ 80,00, qual passou a ser o seu preço médio depois desses reajustes?

Essa situação envolve acréscimos sucessivos. Vamos resolvê-la de três maneiras.

1ª maneira: calculando cada um dos acréscimos.

Se o acréscimo no segundo trimestre foi de 7,5%, podemos dizer que o preço do botijão de gás vai passar a ser 107,5% do valor inicial, pois:

$$100\% + 7{,}5\% = 107{,}5\%$$

Assim, temos que calcular 107,5% de R$ 80,00.

$$107{,}5\% \text{ de } 80 = \frac{107{,}5}{100} \cdot 80 = 1{,}075 \cdot 80 = 86$$

Portanto, no segundo trimestre, o preço médio do botijão de gás passou a ser R$ 86,00.

Agora, vamos determinar o preço do botijão de gás depois do reajuste do terceiro trimestre, ou seja, vamos determinar 109,3% do preço do botijão, pois:

$$100\% + 9{,}3\% = 109{,}3\%$$

Repare que o reajuste do terceiro trimestre incide sobre o preço médio do botijão de gás do segundo trimestre. Assim, temos:

$$109{,}3\% \text{ de } 86 = \frac{109{,}3}{100} \cdot 86 = 1{,}093 \cdot 86 = 93{,}998$$

Portanto, no terceiro trimestre, o preço médio do botijão de gás passou a ser de aproximadamente R$ 94,00.

Por fim, vamos determinar o preço médio do botijão de gás após o reajuste do quarto trimestre. Isto é, vamos determinar o valor correspondente a 108,5% do preço do botijão, pois:

$$100\% + 8{,}5\% = 108{,}5\%$$

Como o reajuste incide sobre o preço médio do botijão de gás no terceiro trimestre, temos:

$$108{,}5\% \text{ de } 94 = \frac{108{,}5}{100} \cdot 94 = 1{,}085 \cdot 94 = 101{,}99$$

Portanto, depois dos três reajustes, o preço médio do botijão de gás passou a ser de R$ 101,99.

2ª maneira: calculando todos os acréscimos de uma única vez.

Outra maneira de obter o preço médio do botijão de gás após os três acréscimos seria multiplicar o preço médio inicial do botijão pelos acréscimos sucessivos. Assim:

$$80 \cdot [(100\% + 7{,}5\%) \cdot (100\% + 9{,}3\%) \cdot (100\% + 8{,}5\%)] =$$
$$= 80 \cdot [(1 + 0{,}075) \cdot (1 + 0{,}093) \cdot (1 + 0{,}085)] =$$
$$= 80 \cdot (1{,}075 \cdot 1{,}093 \cdot 1{,}085) =$$
$$= 80 \cdot 1{,}274847875 \simeq 102{,}00$$

3ª maneira: utilizando uma calculadora.

Para calcularmos os acréscimos sucessivos na calculadora, apertamos as seguintes teclas:

8 0 × 1 0 7 . 5 % × 1 0 9 . 3 % × 1 0 8 . 5 %

Aparecerá no visor:

101,98783

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Um modelo de carro tem 8% de depreciação de seu valor ao ano. Suponha que esse carro seja vendido pela concessionária por R$ 40 000,00. Calcule o valor desse automóvel 1 ano após sua venda. **R$ 36 800,00**

2. Devido ao atraso no pagamento de um boleto, Marcelo teve de pagar uma multa de 4% sobre o valor do boleto. Sabendo que o valor desse boleto para pagamento em dia era R$ 360,00, qual foi o valor pago por Marcelo? **R$ 374,40**

3. Uma agência de viagens realizou uma promoção na qual daria um desconto de 15% para quem comprasse um pacote de viagens para Salvador. O valor do pacote por pessoa antes do desconto era de R$ 3 200,00. Quantos reais uma família com 5 integrantes economizaria ao comprar os pacotes com desconto? **R$ 2 400,00**

4. Uma mercadoria sofreu dois reajustes sucessivos em seu valor, provocados pela variação do preço do combustível e pelo aumento do frete. Sabendo que o valor desse produto antes dos reajustes era R$ 28,00 e que o reajuste devido ao aumento do combustível foi de 5% e o reajuste devido ao aumento do frete foi de 10%, quanto passou a ser o valor desse produto? **R$ 32,34**

5. Uma importadora reajustou os valores de seus produtos três vezes seguidas. Sabendo que cada um dos reajustes foi de 7%, podemos afirmar que os preços tiveram reajuste de 21% após os três acréscimos? Justifique sua resposta. **Não, o reajuste foi de aproximadamente 22,5%.**

6. Em um *site* de comparação de preços, é possível acompanhar o histórico do preço dos produtos. O preço de um liquidificador teve reajustes em dois meses seguidos, que foram de 5% e 8%, respectivamente, e depois um desconto de 5%. Sabe-se que o preço do liquidificador era R$ 200,00 antes dos reajustes. Qual é o preço do liquidificador depois do desconto de 5%? **R$ 215,46**
Dica: Use uma calculadora.

7. Um comerciante que vende bandeiras do Brasil, muito utilizadas por torcedores de futebol para enfeitar suas casas para a Copa do Mundo, resolveu aumentar o preço de suas bandeiras em 15% na semana que antecedeu a abertura da Copa da Rússia de 2018. Passada a primeira rodada da Copa, o dono da loja reavaliou seu estoque de bandeiras e decidiu voltar ao preço antigo, ou seja, antes do reajuste de 15%. De quanto será o desconto que ele deve anunciar no preço da bandeira? **Aproximadamente 13%.**

- A atividade **1** apresenta a depreciação do valor de um carro. Além de resolvê-la, aproveite para discutir com os estudantes se eles sabem que há mercadorias cujo valor é depreciado pelo uso. Explique-lhes, por exemplo, que um carro pode perder muito valor se não estiver em boas condições de uso.
- Na atividade **4**, observa-se que o preço de uma mercadoria pode ser modificado por causa de elementos como o valor do combustível e o do frete.
- A atividade **6** apresenta uma ideia útil para o desenvolvimento do cidadão, os *sites* de comparação de preços. Neles, é possível acompanhar o preço de determinado produto e observar se há aumentos abusivos ou não. Também é possível observar se é uma boa época para comprar um dado produto. Para resolver essa atividade, os estudantes podem usar a calculadora para calcular os acréscimos sucessivos e, por último, o desconto de 5%.

DE OLHO NA BASE

Os exemplos analisados e as atividades propostas nestas páginas envolvem o cálculo de porcentagens com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos com e sem o uso de calculadora, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA05**.

Além disso, analisar as situações que são comuns no cotidiano, de forma crítica e reflexiva, contribui para o desenvolvimento da **competência geral 5**.

OUTRAS FONTES

Iezzi, G.; Hazzan, S.; Degenszajn, D. *Fundamentos de matemática elementar*: matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva. São Paulo: Atual, 2013. v. 11.

Esse livro apresenta discussões sobre matemática financeira, entre elas o estudo das porcentagens.

Teixeira, M. R. *Uma ideia cem por cento*: porcentagem. São Paulo: FTD, 1997 (Coleção Matemática em Mil e Uma Histórias).

Nesse livro, o gênero textual das histórias em quadrinhos é utilizado para discutir a ideia de porcentagem.

JUROS

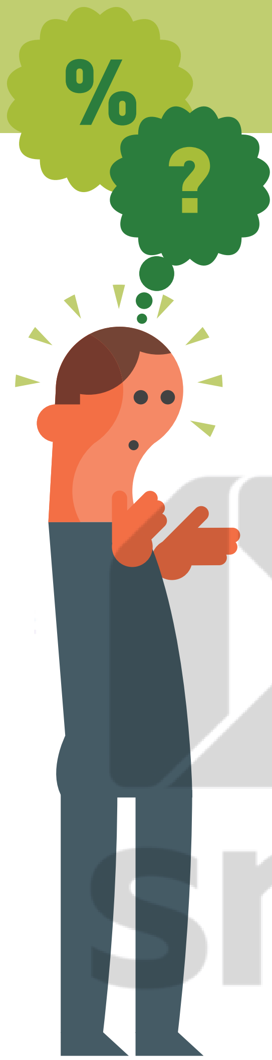
- Comente que os juros estão presentes nos preços dos produtos e também nas operações financeiras, como empréstimos, ou em investimentos, por exemplo, a poupança.
- Discuta com os estudantes como são as compras feitas à prestação, como os juros aumentam o preço do produto e como uma prestação baixa pode iludir o consumidor e levá-lo a realizar uma compra de um produto e pagar por um valor muito mais alto que o preço inicial.
- Aproveite para propor aos estudantes outras situações-problema envolvendo juros e o montante, que permitam a resolução sem o uso de fórmulas e a escolha de diferentes estratégias de resolução. Proponha atividades que incentivem a troca e o compartilhamento de estratégias de resolução entre eles.
- Converse com os estudantes sobre as três situações apresentadas No Livro do Estudante:
  - No empréstimo, o banco cobrou juros, pois emprestou dinheiro para João pagar o montante em diversas prestações menores. Isso ocorre como compensação pelo tempo que o banco demora para receber.
  - Na compra a prazo, o consumidor não tem todo o dinheiro para pagar pelo produto na hora e parcela o pagamento. Como compensação, o comerciante acrescenta juros ao preço do produto, e o consumidor paga prestações por alguns meses com essa compensação ao comerciante.
  - Por fim, no investimento, o banco recebe o dinheiro do cliente, como se estivesse recebendo um empréstimo do cliente para o banco. Assim, enquanto a quantia do cliente está depositada no banco, ele recebe juros e a quantia aumenta.

Juros

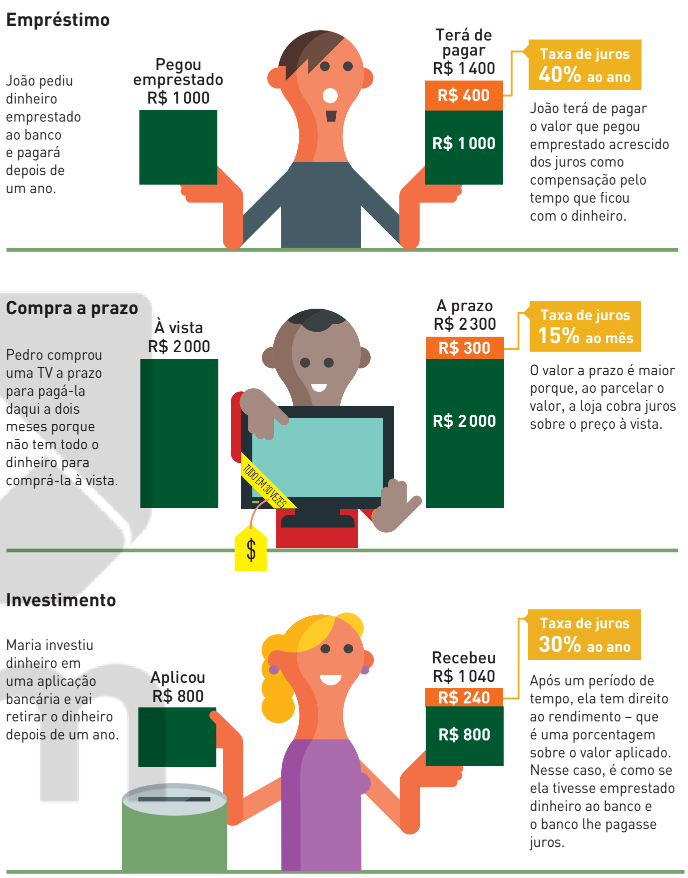
Os juros estão presentes no dia a dia das pessoas em compras a prazo, empréstimos e investimentos bancários. Eles podem fazer uma dívida aumentar muito, mas também podem fazer aumentar o dinheiro de quem poupa.

O que é juro?

Juro é um valor cobrado para que alguém use uma quantia que não é sua por um determinado período de tempo (dias, meses ou anos).



Veja alguns exemplos de situações que envolvem juros.



Fonte de pesquisa: Banco Central do Brasil. *Glossário simplificado de termos financeiros*. Brasília: BCB, 2013.

Calculando os juros

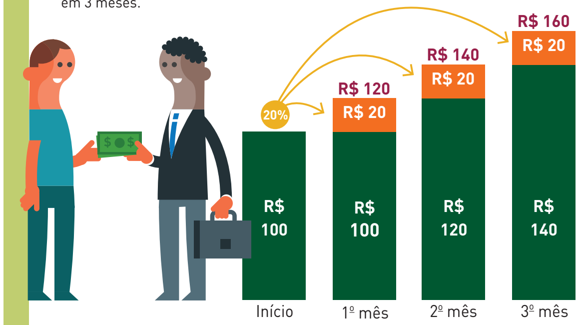
Existem dois tipos de juros: juros simples e juros compostos. Na maior parte das operações que realizamos, são aplicados os juros compostos, que fazem com que o valor acumulado aumente rapidamente, como veremos a seguir. Isso é lucrativo para quem empresta o dinheiro, mas pode gerar uma dívida alta em pouco tempo para quem toma o dinheiro emprestado.

Juros simples

O valor dos juros simples é calculado sempre com base no **valor inicial** (capital), em todos os períodos.

Veja como fica a correção do valor de um empréstimo de R$ 100,00 com uma **taxa de juros simples** mensal de 20% em 3 meses.

Observe que o valor dos juros é sempre o mesmo.



Juros compostos

O valor dos juros compostos em determinado período é calculado com base no **valor acumulado** do período anterior. Assim, o montante de um período torna-se o capital no cálculo do período seguinte.

Veja como fica a correção de R$ 100,00 em uma compra a prazo com uma **taxa de juros compostos** mensal de 20% em 3 meses.

Note que o valor dos juros é diferente em cada período.

Legenda: Capital | Taxa de juros | Juros | Montante

Como calcular?

Ilustrações: Mario Kanno/ID/BR

A seguir, apresentamos as fórmulas para encontrar os valores dos juros e do montante, usando as situações dadas como exemplos. Considere:

j: juros
C: capital (valor inicial)
i: taxa de juros
t: tempo
M: montante (valor final)

Cálculo de juros simples

$$j = C \cdot i \cdot t$$

No empréstimo

$$j = 100 \cdot 0{,}2 \cdot 3 = 60$$

Montante de juros simples

$$M = C + j$$

No empréstimo

$$M = 100 + 60 = 160$$

Montante de juros compostos

$$M = C(1 + i)^t$$

Na compra a prazo

$$M = 100(1 + 0{,}2)^3$$
$$M = 172{,}80$$

Cálculo de juros compostos

$$j = M - C$$

Na compra a prazo

$$j = 172{,}80 - 100$$
$$j = 72{,}80$$

Observe que, no cálculo de juros compostos, primeiro obtemos o valor do montante e, depois, o valor dos juros.

- Para calcular os juros, deve-se observar qual é o tipo considerado:
  - Nos juros simples, a taxa é aplicada no valor inicial, que, no exemplo, é R$ 100,00. Então, 20% de R$ 100,00 é igual a R$ 20,00. Assim, no primeiro mês, o pagamento será R$ 120,00, e nos meses seguintes haverá aumento de R$ 20,00 em relação ao valor da prestação do mês anterior.
  - Nos juros compostos, a taxa não é aplicada ao valor inicial, mas, sim, às parcelas. Então, se a taxa ainda for 20%, no primeiro mês a parcela a ser paga será R$ 120,00, pois foram aplicados 20% de R$ 100,00. No segundo mês, deve-se aplicar 20% na parcela do primeiro mês, isto é, em R$ 120,00. Como essa porcentagem equivale a R$ 24,00, então a segunda parcela a ser paga será R$ 144,00. No terceiro mês, aplica-se a taxa de juros à parcela do segundo mês, o que equivale a R$ 28,80. Assim, a terceira parcela a ser paga será R$ 144,00 + R$ 28,80, o que resulta em R$ 172,80. É importante que os estudantes observem que essas parcelas são maiores que aquelas calculadas com juros simples.

DE OLHO NA BASE

Nos exemplos apresentados, foram trabalhadas as ideias de juros simples e juros compostos, com o cálculo de porcentagens, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA05**.

- No boxe *Para explorar*, propõe-se aos estudantes que façam um passeio com os pais ou responsáveis pela região em que moram. Se possível, forneça-lhes instruções e subsídios para que a atividade seja realizada, como orientá-los a levar um caderno para fazer os registros e explicar alguns cuidados que eles devem ter durante o passeio: ter cuidado ao andar pela rua para não tropeçar ou esbarrar nas pessoas, ficar atento e respeitar os pais ou responsáveis ao atravessar ruas.

  Outro aspecto que deve ser enfatizado para os estudantes é para que eles mantenham o foco durante o passeio. Não é incomum que estudantes se distraiam e se esqueçam do propósito do passeio. Uma possibilidade de evitar que isso aconteça é propor a eles que estabeleçam um roteiro com alguns itens: Quais lojas visitei? Em qual delas havia informações relacionadas a juros? Onde essas informações estavam presentes: em vitrines ou em etiquetas? Quais foram os valores observados? Por fim, reserve um tempo para que as experiências sejam compartilhadas com a turma e para a troca de ideias.
- Ao responder aos questionamentos do boxe *Pare e reflita*, os estudantes podem utilizar os conhecimentos matemáticos para justificar suas respostas. Atividades desse tipo contribuem para o desenvolvimento de diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático.

DE OLHO NA BASE

Essas atividades giram em torno do conceito de juros e suas aplicações, usando cálculos de porcentagem, em situações do cotidiano, com abordagem de Educação Financeira, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA05**.

PARA EXPLORAR

Com um responsável, faça um passeio pelo comércio da região onde você mora e observe as situações em que os juros estão presentes. Anote ou fotografe suas observações e compartilhe com os colegas.

Agora, acompanhe outra situação que envolve o cálculo de juros.

Uma loja vende um modelo de forno elétrico por R$ 1 450,00 à vista ou em 4 parcelas iguais de R$ 380,00. Qual é a taxa mensal de juros simples mensal que a loja está cobrando na compra parcelada?

Primeiro, vamos determinar o preço total a ser pago pelo forno elétrico na compra parcelada.

$$4 \cdot \text{R\$ } 380{,}00 = \text{R\$ } 1\,520{,}00$$

A diferença entre o preço total parcelado e o preço à vista corresponde ao juro cobrado pela loja. Assim, determinamos que o juro cobrado é:

$$\text{R\$ } 1\,520{,}00 - \text{R\$ } 1\,450{,}00 = \text{R\$ } 70{,}00$$

Por fim, precisamos determinar a taxa de juros que a loja cobra na compra parcelada.

$$j = C \cdot i \cdot t$$
$$70 = 1\,450 \cdot i \cdot 4$$
$$70 = 5\,800i$$
$$\frac{70}{5\,800} = i$$
$$0{,}012 \simeq i$$

Portanto, a taxa de juros simples mensal que a loja está cobrando é de aproximadamente 1,2%.

PARE E REFLITA

Considerando que você fosse comprar o forno da situação descrita, você pagaria à vista ou a prazo? O que você levaria em consideração para fazer essa escolha? **Respostas pessoais.**

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

8. Um capital de R$ 600,00 aplicado no sistema de juros simples produziu um montante de R$ 768,00 após quatro meses de aplicação. Qual foi a taxa mensal de juros nesse período? **7% ao mês.**

9. Considere que em um período de três meses a caderneta de poupança rendeu, em regime de juros compostos, 0,6559% ao mês. Qual é o montante resgatado por um investidor que teve uma aplicação de R$ 2 000,00 nesse período? **R$ 2 039,61**

Dica: Use uma calculadora.

10. Paula investiu R$ 30 000,00 em um fundo de investimento. Qual será o montante que ela vai resgatar após três meses, sabendo que a taxa de juros compostos é de 2% ao mês? **R$ 31 836,24**

11. Josué comprou um *notebook* de R$ 1 800,00, mas pagou após dois meses, com taxa de juros simples de 3% ao mês.

a) Qual é o valor pago pelo *notebook* após os dois meses? **R$ 1 908,00**

b) Se a taxa fosse de juros compostos, qual seria o valor pago por Josué? **R$ 1 909,62**

12. Simone aplicou R$ 1 200,00 a uma taxa de 2% ao mês durante 14 meses. Determine a taxa de juros compostos e o montante dessa aplicação. **2%; R$ 1 583,37**

13. Adriana decidiu investir um dinheiro. O gerente da sua conta informou que os dois melhores investimentos que ela poderia fazer com esse valor eram: aplicar na poupança, que tem um rendimento de 0,8% ao mês, ou realizar um outro investimento, com duração obrigatória de 6 meses, com rendimento de 4,5% no período. Sabendo que ela pretende aplicar por 6 meses o seu capital, responda: Qual é a aplicação mais vantajosa para Adriana? **A aplicação mais vantajosa para Adriana é a poupança.**

14. Foram pagos R$ 200,00 de juros por um empréstimo de R$ 600,00 feito em uma instituição financeira pelo período de dois meses. Calcule a taxa mensal de juros compostos desse empréstimo. **15,47%**

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

5. a) Não, pois o segundo reajuste foi em cima do valor já alterado após o primeiro reajuste.
b) 7,12%.

1. É comum a conta de consumo em bares, restaurantes e lanchonetes vir com um acréscimo de 10% sobre o valor do consumo. Essa quantia corresponde à comissão paga ao garçom. Essa cobrança é válida, mas o pagamento pelo consumidor é opcional. Amanda e seus pais jantaram em uma churrascaria e o valor total do consumo deles foi de R$ 175,00. Ela sabia que pagar 10% sobre o valor da conta era opcional. Caso eles tenham optado por pagar essa comissão ao garçom, qual foi o valor total da conta? **R$ 192,50**

2. Ana comprou um tênis à vista e recebeu 15% de desconto, economizando, assim, R$ 48,00. Quanto ela pagou pelo tênis? **R$ 272,00**

3. Joaquim colocou uma casa à venda pelo valor de R$ 240 000,00. Sabendo que a casa valoriza 6% ao ano, calcule o valor dessa casa após:

a) 1 ano; **R$ 254 400,00**
b) 3 anos. **R$ 285 843,84**

4. Uma pizzaria fornece desconto de 10% de terça a quinta-feira e oferece outro desconto de 5% caso o cliente retire a *pizza*. Se uma *pizza* nessa pizzaria custa R$ 60,00, calcule o valor que um cliente pagou na compra de 2 *pizzas* nessa promoção, retirando-as no local. **R$ 102,60**

5. Em um mês, um posto de combustível reajustou duas vezes o valor do etanol. O primeiro reajuste foi de 4%, e o segundo foi de 3%.

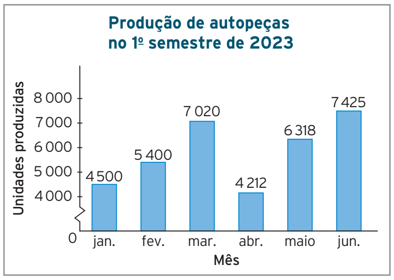
a) Pode-se dizer que o aumento do etanol no mês foi de 7,0%? Justifique sua resposta.
b) De quanto foi o aumento total?

6. Ao comprar um celular que custava R$ 800,00, Paola ganhou um desconto de R$ 57,60, pois pagou à vista e em dinheiro. Qual foi a taxa de desconto que ela recebeu? **7,2%**

7. Para um lojista, o preço de custo de um artigo é R$ 247,50. Em sua loja, ele vende esse mesmo artigo por R$ 330,00. Qual deve ser o desconto anunciado pelo lojista para vender o artigo a preço de custo? **25%**

8. Carlos fez uma aplicação a juros simples. Após três meses, o rendimento foi de R$ 480,00. Sabendo que a aplicação rendeu 20% ao ano, quanto Carlos aplicou? **R$ 9 600,00**

9. Veja a seguir o gráfico que representa a produção de autopeças de uma indústria durante o 1º semestre de 2023.



Dados fornecidos pela administração da indústria.

a) Qual foi o percentual de aumento na produção de março em relação a fevereiro? **30%**
b) Qual foi o percentual de queda na produção de abril em relação a março? **40%**
c) Qual foi o percentual de aumento na produção do último mês do período em relação ao primeiro? **65%**

10. Eliza decidiu investir uma quantia em uma aplicação recomendada pelo gerente da sua conta. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total investido. No segundo mês, ela recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, ela decidiu retirar o montante de R$ 3 800,00 gerado pela aplicação. Qual foi a quantia inicial que Eliza aplicou? **R$ 5 000,00**

11. Elabore uma situação-problema que trabalhe com descontos ou aumentos sucessivos de 13% e 7%. Em seguida, troque com um colega a situação-problema que você criou, para que ele a resolva, enquanto você resolve a situação-problema criada por ele. **Resposta pessoal.**

12. Em dezembro de 2021, o salário mínimo no Brasil era R$ 1 100,00. Em janeiro de 2022, passou a ser R$ 1 212,00.

a) Qual foi, aproximadamente, o aumento percentual do salário mínimo de 2021 para 2022? **10,18%**
b) Suponha que, a partir de 2022, especialistas estimem um reajuste de 4% ao ano no salário mínimo até 2026. Qual seria o valor do salário mínimo em 2026? **R$ 1 417,87**

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- A atividade **2** pode ser resolvida em conjunto com os estudantes porque exige um raciocínio inverso daquele que eles vinham trabalhando.
- Na atividade **5**, aplicam-se os acréscimos sucessivos para o valor do etanol, para que os estudantes reflitam que acréscimos sucessivos não são simplesmente adição de acréscimos, mas um acréscimo que modifica o valor inicial para o cálculo do outro acréscimo.
- A atividade **9** é interessante por apresentar um gráfico do qual os estudantes devem extrair informações para responder aos questionamentos. Aproveite para verificar se eles conseguem interpretar gráficos de colunas, perguntando-lhes sobre o que indica cada coluna, como foi feita a escala do eixo vertical, etc.

DE OLHO NA BASE

As atividades dessa seção, que envolvem problemas com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, favorecem o desenvolvimento da habilidade **EF09MA05**.

ESTRATÉGIA DE APOIO

Nas atividades propostas, os estudantes podem ter dificuldade em resolver problemas que solicitam o capital inicial em vez do montante. Assim, podem ser apresentados a eles outros problemas em que tal informação é solicitada. Talvez seja interessante discutir os problemas do Livro do Estudante já resolvidos por eles, porém apresentando-lhes o montante e solicitando o capital inicial. Assim, eles podem aproveitar os problemas para verificar se o raciocínio está correto.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, o tema abordado é sobre o fenômeno da ancoragem aplicado à Educação Financeira. Verifique se os estudantes compreenderam o que é ancoragem e como isso pode influenciar a tomada de decisão.
- As questões comportamentais aplicadas a situações econômico-financeiras são estudadas por uma área chamada psicologia econômica, que é uma junção de várias áreas, em especial a psicologia cognitiva e a microeconomia. Os pesquisadores dessa área têm contribuído com estudos que procuram descrever o comportamento humano diante do julgamento sob incerteza e da tomada de decisão, incluindo o comportamento que envolve dinheiro.

DE OLHO NA BASE

Refletir sobre o tema dessa seção auxilia os estudantes a valorizar e a utilizar os conhecimentos adquiridos para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa e democrática, mobilizando o desenvolvimento da **competência geral 1**.

Além disso, permite aos estudantes conhecer a si mesmos, apreciar-se e cuidar da saúde física e emocional, desenvolvendo a **competência geral 8**.

Criatividade

O assunto tratado nessa seção possibilita aos estudantes refletir sobre como a ancoragem pode influenciar as escolhas feitas em situações de consumo, de investimento e de poupança, as quais estão no âmbito da Educação Financeira Escolar. Estudar esse conceito é importante para que entendam como as pessoas tomam decisões financeiras e como podem usar a criatividade para resistir aos efeitos da ancoragem.

AMPLIANDO HORIZONTES

Lançar âncoras!

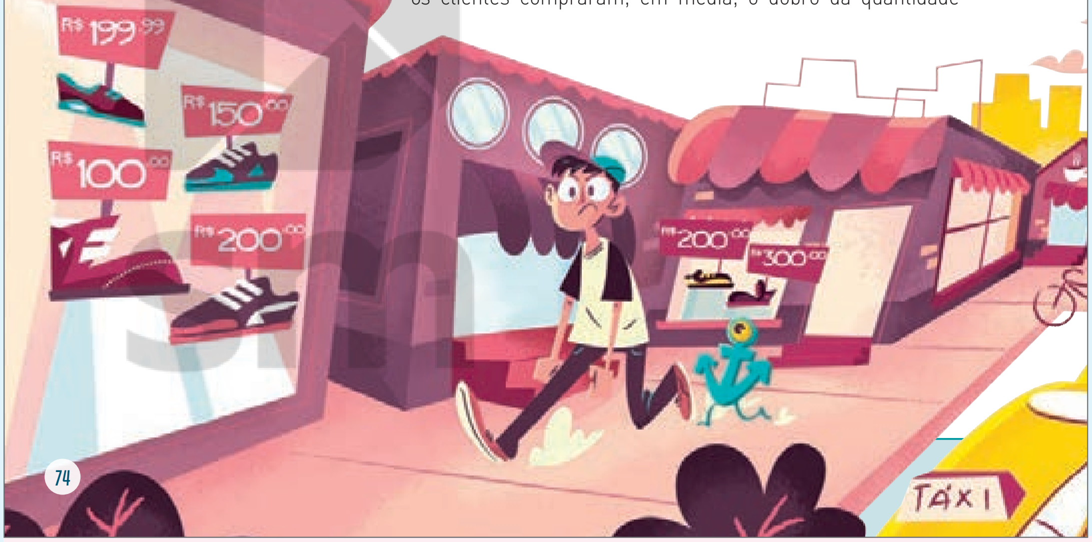
Ao ser lançada, a âncora se “agarra” ao fundo do mar e serve justamente para prender a embarcação. Se a embarcação não for ancorada, a correnteza e as ondas podem levá-la para outro lugar. Mas o que âncoras e embarcações têm a ver com educação financeira? As âncoras das embarcações podem ser relacionadas a um fenômeno psicológico chamado **ancoragem**, que nos ajuda a explicar alguns comportamentos humanos, incluindo a maneira como lidamos com o dinheiro e o consumo.

A ancoragem acontece quando ficamos marcados por um número, um valor ou uma situação, de modo que nossas escolhas subsequentes refletem essa influência, ainda que muitas vezes nem percebamos. Ficamos “presos” a essas âncoras, de modo que tomamos decisões influenciados por elas.

Estudos têm mostrado que o cérebro humano se deixa influenciar por um valor particular para, a partir dele, estimar outros valores, ou usá-lo como referência para fazer julgamentos em situações variadas, tais como a negociação da compra e da venda de uma casa, uma doação, entre outras. Os efeitos da ancoragem estão por toda parte.

Daniel Kahneman, um dos maiores pesquisadores nessa área, informa que esses estudos têm sido utilizados para incentivar as pessoas a comprar mais. Um exemplo comum são as estratégias psicológicas de preços. Kahneman menciona uma pesquisa sobre o comportamento dos consumidores de um supermercado em Iowa, nos Estados Unidos, diante da promoção de um produto, vendido em latas, com um desconto de 10% sobre o preço normal. Em alguns dias, eram espalhados pelo supermercado cartazes anunciando um limite de 12 unidades por pessoa; em outros dias, os cartazes diziam “sem limite por pessoa”. A pesquisa mostrou que os clientes compraram, em média, o dobro da quantidade

Leandro Lassmar/ID/BR



74

OUTRAS FONTES

Efeito de ancoragem. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=vqy1_DAfJIU. Acesso em: 28 jun. 2022.

Esse vídeo aborda o efeito de ancoragem.

FERREIRA, V. R. M. *Decisões econômicas*: você já parou para pensar? São Paulo: Évora, 2011.

Esse livro, escrito por uma das maiores especialistas no assunto no país, trata de decisões econômicas do ponto de vista da psicologia econômica.

NOFSINGER, J. R. *A lógica do mercado*: como lucrar com finanças comportamentais. São Paulo: Fundamento, 2006.

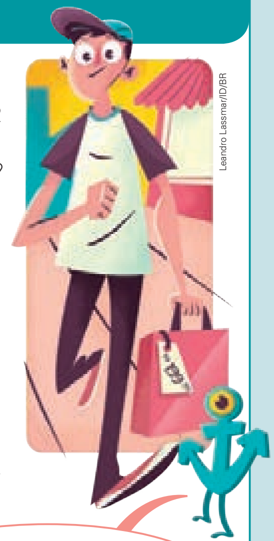
Esse livro descreve alguns dos principais resultados da psicologia econômica.

de latas desse produto quando os cartazes apresentavam o limite de 12 unidades do que nos dias em que não havia limite. O número 12 servia de âncora para que as pessoas comprassem mais produtos.

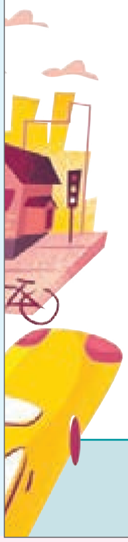
Mas como podemos lidar com esse padrão do nosso cérebro? Será que precisamos resistir a ele? Será que estamos sendo intencionalmente induzidos a comprar mais do que desejamos? Como podemos nos proteger? Vimos que a ancoragem pode, em alguns casos, nos fazer gastar mais do que planejamos ou nos levar a fazer determinadas estimativas. Em muitos casos, situações como essas podem nos levar ao endividamento, que, provavelmente, vai nos privar de outras coisas que julgamos importantes. Por isso, é preciso se proteger.

Para lidar com a ancoragem, é preciso tomar cuidado com as primeiras propostas que são apresentadas. Além disso, se você vai comprar algo e o preço estiver exagerado ou muito acima do planejado, busque na memória situações em que comprou melhor ou mais barato. Ou, então, espere um pouco ou faça outras coisas para só depois ir às compras novamente. Nem sempre temos tempo e disposição para isso, no entanto, é importante entender o fenômeno da ancoragem para lidar com os efeitos tanto das âncoras ocasionais como das âncoras intencionalmente elaboradas para influenciar nossa decisão, e, assim, garantir a nossa saúde financeira.

É preciso muita agilidade para navegar no mar das opções, sem ficar preso a âncoras que podem impedir a nossa viagem.



Leandro Lassmar/ID/BR



Para refletir

Responda sempre no caderno.

Respostas pessoais.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir.

1. O que vocês entenderam sobre o efeito de ancoragem? De que maneira ele se relaciona com a educação financeira?
2. Vocês já viveram alguma situação financeira em que tomaram uma decisão com base no efeito de ancoragem? Conte aos demais colegas como foi. Se fosse hoje, vocês tomariam uma decisão diferente?
3. Considerem uma situação em que vocês vão a uma loja e se deparam com camisetas em promoção com os seguintes preços:

R$ 99,99 | R$ 119,99 | R$ 109,99 | R$ 129,99

Se vocês comprassem a camiseta mais cara, é possível dizer que vocês pagariam R$ 130,00? Expliquem sua resposta.

PARA REFLETIR

- Na questão **1**, espera-se que, com a leitura do texto, os estudantes compreendam que a ancoragem acontece quando uma pessoa registra um número, um valor ou uma situação (chamados de âncoras), de modo que as escolhas subsequentes reflitam essa influência, ainda que, muitas vezes, ela não perceba isso e, assim, toma decisões influenciada por elas.
- Após a realização da questão **2**, incentive os estudantes a compartilhar as experiências entre si.
- A ideia da questão **3** é convidar os estudantes a refletir sobre a prática de anúncios de preços que terminam em 90 ou 99. Essa estratégia é usada basicamente porque temos a tendência de olhar para o primeiro número, que é a âncora, e nele o cérebro tende a se fixar e a tomar como referência. Assim, tendemos a pensar que vamos pagar, por exemplo, 129 e não 130. Ao mesmo tempo que não temos o poder de influenciar as lojas a mudar essa prática, precisamos prestar atenção para não achar que temos, investimos ou gastamos mais dinheiro pela maneira como enquadramos os preços baseados nas âncoras dos primeiros números. Isso pode, em alguns casos, atrapalhar nosso planejamento, dando a impressão de que temos mais dinheiro do que realmente possuímos ou que vamos gastar menos.

DE OLHO NA BASE

Ao se reunir em duplas e discutir as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, desenvolvendo a **competência geral 9**.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Na atividade **3**, verifique se os estudantes percebem que é necessário calcular qual é a porcentagem que cada sócio investiu em relação ao valor total do investimento.
- A atividade **9** envolve a divisão em partes proporcionais. Deixe que os estudantes apresentem aos colegas as estratégias que usaram nessa resolução.
- Na atividade **10**, a escala dos aviões será de 2 : 1 000, ou seja, 1 000 cm no avião retratado equivalem a 2 cm na maquete. Portanto, para a resolução dessa atividade, os estudantes deverão usar a regra de três para calcular as medidas na maquete. Se julgar necessário, lembre-os de trabalhar com as medidas em centímetro, e não em metro. Caso os estudantes tenham dificuldade nesse tipo de conversão, faça uma vez com eles. Depois, peça-lhes que convertam as medidas das dimensões do avião de metros para centímetros.

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Registre no caderno a alternativa correta.

(Enem) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a: **Alternativa c.**

a) 2
b) 4
c) 5
d) 8
e) 9

2. Indique no caderno a alternativa correta.

(OBM) Anita imaginou que levaria 12 minutos para terminar sua viagem, enquanto dirigia à velocidade constante de 80 km/h, numa certa rodovia. Para sua surpresa, levou 15 minutos. Com qual velocidade constante essa previsão teria se realizado? **Alternativa c.**

a) 90 km/h
b) 95 km/h
c) 100 km/h
d) 110 km/h
e) 120 km/h

3. Em certo ano, os dois sócios de uma empresa obtiveram lucro de R\$ 20 000,00. Proporcionalmente, quanto cada sócio deve receber, sabendo que um deles investiu R\$ 190 000,00 e o outro, R\$ 210 000,00? **R\$ 9 500,00 e R\$ 10 500,00.**

4. Escreva no caderno a alternativa que responde corretamente à atividade a seguir.

(FGV-SP) Fábio recebeu um empréstimo bancário de R\$ 10 000,00 para ser pago em duas parcelas anuais, a serem pagas respectivamente no final do primeiro ano e do segundo ano, sendo cobrados juros compostos à taxa de 20% ao ano. Sabendo que o valor da primeira parcela foi de R\$ 4 000,00, podemos concluir que o valor da segunda foi de:

a) R\$ 8 800,00.
b) R\$ 9 000,00.
c) R\$ 9 200,00.
d) R\$ 9 400,00.
e) R\$ 9 600,00.

Alternativa e.

5. Resolva a atividade a seguir e registre no caderno a alternativa correta.

(ESPM-SP) Um capital de R\$ 6 000,00 é aplicado por 4 meses a juros compostos de 2% ao mês. Qual é o valor do juro resultante dessa aplicação?

Você pode usar um dos dados abaixo: **Alternativa d.**

$1{,}02^4 = 1{,}0824$

$1{,}2^4 = 2{,}0736$

$1{,}02 \cdot 4 = 4{,}08$

a) R\$ 6 494,40
b) R\$ 6 480,00
c) R\$ 6 441,60
d) R\$ 494,40
e) R\$ 480,00

6. Reúna-se com um colega para fazer o que se pede em cada item. **6. b) 8 g c) 9 g**

a) Copiem a frase a seguir substituindo cada ■ por valores que permitam obter uma afirmação verdadeira. **Resposta possível: 1; 7.**

> A medida da densidade de um material é 7 g/cm^3. Isso significa que um cubo com medida de volume igual a ■ cm^3 feito com esse material terá ■ g de medida de massa.

b) Se um material tem medida de densidade igual a 8 g/cm^3, determine a medida da massa de um cubo feito com esse material e cuja medida de volume é 1 cm^3.

c) Se um material tem medida de densidade igual a 9 g/cm^3, determine a medida da massa de um cubo feito com esse material e cuja medida de volume é 1 cm^3.

d) Analisando as respostas dos itens anteriores, respondam: Podemos afirmar que, quanto maior for a densidade de um material, maior será a medida da massa de um cubo feito com esse material e cuja medida de volume é 1 cm^3? Justifique. **Sim, pois são grandezas diretamente proporcionais.**

7. Em uma pista de corrida, Aílton percorreu 1 800 m em 10 minutos, e Patrícia percorreu a mesma distância em 12 minutos.

a) Calcule a medida da velocidade média de Aílton. **180 m/min**

ESTRATÉGIA DE APOIO

Caso os estudantes ainda apresentem dificuldade em resolver atividades de regra de três, resolva com eles a atividade **1**.

A atividade pode ser realizada por partes pelos estudantes, não necessariamente na mesma ordem. Mas é necessário determinar o fluxo de água por ralo por hora do primeiro reservatório para então calcular o número de ralos necessários para o novo reservatório.

Explique aos estudantes que, como o reservatório de 900 m^3 com 6 ralos demora 6 horas para esvaziar completamente, então podemos determinar o fluxo de água por ralo.

São 900 m^3 em 6 ralos, ou seja, 150 m^3 por ralo em 6 horas. Se julgar pertinente, faça um esquema para os estudantes mostrando quanto é o fluxo por 6 ralos, por 3 ralos (metade), por 2 ralos (um terço) e, finalmente, por 1 ralo.

Depois, determinamos o fluxo por ralo por hora. E, assim como feito para determinar o fluxo por 1 ralo, podemos fazer para o fluxo por uma hora em um ralo. Se são 150 m^3 por ralo em 6 horas, então serão 75 m^3 por ralo por 3 horas (metade), o que corresponde a 25 m^3 por ralo por hora (um terço). Esse também será o fluxo do ralo do novo reservatório.

Se o fluxo do ralo por hora é 25 m^3 e o novo reservatório deve ser esvaziado em 4 horas, então cada ralo terá o fluxo de 100 m^3 em 4 horas. Assim, para esvaziar 500 m^3 de água em 4 horas, serão necessários 5 ralos.

b) Calcule a medida da velocidade média de Patrícia. **150 m/min**

c) Compare a medida da velocidade de Aílton e a de Patrícia com a de Usain Bolt, atleta jamaicano recordista mundial que correu 100 m em 9,58 segundos em Berlim, em 2009. **Usain Bolt: 10,44 m/s, Aílton: 3 m/s e Patrícia: 2,5 m/s.**

8. Escreva no caderno a alternativa correta.

(Enem) Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: pagar à vista, por R$ 55 000,00;
- Opção 2: pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30 000,00, e mais uma prestação de R$ 26 000,00 para dali a 6 meses;
- Opção 3: pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20 000,00, mais uma prestação de R$ 20 000,00 para dali a 6 meses e outra de R$ 18 000,00 para dali a 12 meses da data da compra;
- Opção 4: pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15 000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39 000,00;
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60 000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção: **Alternativa d.**

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

9. Indique no caderno a alternativa correta.

Três empresários montaram uma empresa. O sócio majoritário entrou na sociedade com R$ 40 000,00, o minoritário entrou com a metade do que foi dado pelo majoritário, e o terceiro, com $\frac{3}{4}$ do que foi investido pelo majoritário. Após três anos de atividade, houve um lucro de R$ 270 000,00, que foi dividido proporcionalmente aos capitais investidos.

Ao sócio majoritário coube o valor de:

a) R$ 180 000,00. d) R$ 90 000,00.
b) R$ 150 000,00. e) R$ 120 000,00.
c) R$ 60 000,00. **Alternativa e.**

10. Indique a alternativa correta no caderno.

Uma empresa lançou um avião com 84 metros de comprimento e 88 metros de envergadura, além de ter massa de 175 toneladas. Para presentear seus clientes no voo inaugural, a empresa contratou um arquiteto para montar uma maquete desse avião, na escala 2 : 1 000. Assim, a maquete apresentará, em centímetros, as medidas de comprimento e envergadura, respectivamente, iguais a:

a) 17,6 e 16,8. d) 16,8 e 176.
b) 16,8 e 17,6. e) 168 e 176.
c) 168 e 17,6. **Alternativa b.**

11. Registre no caderno a alternativa correta.

Para garantir o abastecimento de água de uma empresa, uma engenheira identificou a necessidade de construir dois tanques de água, cada um com capacidade de 10 000 litros. Em cada tanque, deve-se ligar dois sistemas hídricos idênticos, de modo que cada sistema hídrico leve, em média, uma hora e meia para abastecer completamente o tanque. Podemos afirmar que o tempo médio, em hora, para abastecer completamente os dois tanques será:

a) 1,25. c) 0,75. e) 12,5.
b) 1. d) 7,5. **Alternativa c.**

12. Devido à baixa procura por pacotes de férias para o mês de julho, uma agência de viagens realizou uma promoção na qual daria um desconto de 10% para quem comprasse um pacote de viagens para a chapada Diamantina. Caso o valor do pacote seja pago por boleto bancário, a empresa dará mais 3% de desconto.

a) Que percentual de desconto uma pessoa receberia ao comprar um pacote de viagens para a chapada Diamantina pagando no boleto? **12,7%**

b) Caso o valor do pacote por pessoa antes dos descontos fosse R$ 2 500,00, uma família de 4 integrantes que pagasse os 4 pacotes no boleto bancário faria uma economia de quantos reais? **R$ 1 270,00**

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam a autoavaliação.

- Aprendi o que é razão?
- Conheci razões especiais e sei como utilizá-las?
- Aprendi o que é proporção?
- Entendi a divisão em partes diretamente e inversamente proporcionais?
- Sei identificar se duas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais?
- Utilizei regras de três simples ou compostas para calcular as proporções?
- Discuti porcentagens em relações comerciais?
- Utilizei a calculadora para o cálculo de porcentagens?
- Entendi o que são descontos e acréscimos sucessivos?
- Compreendi o que são juros?
- Participei ativamente dos trabalhos em grupo?
- Colaborei com os colegas quando eles tiveram dúvidas?
- Esclareci minhas dúvidas com os colegas e o professor?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
7 e 9.

Competências específicas de Matemática
1, 3 e 6.

Temas Contemporâneos Transversais
Multiculturalismo e Cidadania e Civismo.

Habilidades

(EF09MA01) Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).

(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.

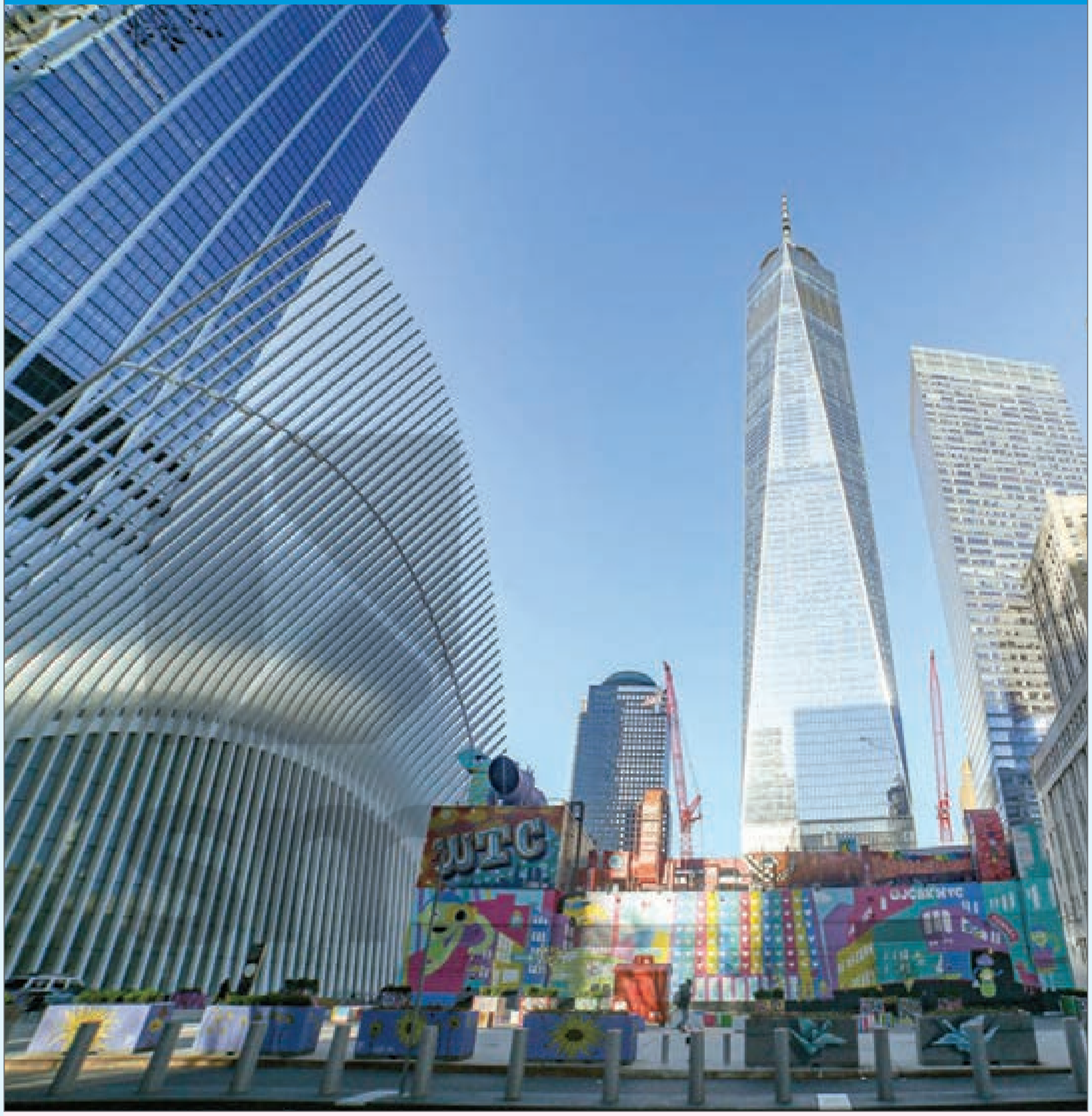
(EF09MA12) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

UNIDADE 3

RETAS E ÂNGULOS, SEMELHANÇA E TRIÂNGULO RETÂNGULO



SOBRE A UNIDADE

O estudo de ângulos, distâncias, figuras semelhantes, triângulos retângulos e suas relações é importante, pois vivemos em uma sociedade tecnológica, que utiliza esses conceitos desde as situações mais simples do cotidiano até estudos mais complexos de outras áreas do conhecimento. Mecânica, engenharia, topografia e construção civil são algumas áreas que aplicam esses conhecimentos no cotidiano.

Recomendamos que os conceitos sejam explorados, inicialmente, mediante uma abordagem que leve em conta a capacidade intuitiva dos estudantes, buscando a percepção das relações existentes nas próprias figuras geométricas e também entre elas.

Por exemplo, no estudo dos ângulos determinados por paralelas cortadas por uma transversal, se julgar necessário, pode-se pedir aos estudantes que construam a figura e meçam os ângulos obtidos com o transferidor para verificar, em um primeiro momento, quais pares de ângulos correspondentes e de ângulos alternos têm a mesma medida e quais pares de ângulos colaterais são suplementares, para, em seguida, trabalhar as demonstrações e os processos formais.

Nesta unidade, os estudantes terão a oportunidade de desenvolver a percepção sobre vários tópicos da Geometria, aplicando os conceitos de razão e proporção entre segmentos de reta. O estudo sobre proporcionalidade e semelhança possibilita aos estudantes construir conhecimentos sobre propriedades

CAPÍTULO 1
Retas e ângulos

CAPÍTULO 2
Semelhança

CAPÍTULO 3
Triângulo retângulo

Nicolas Economou/NurPhoto/Getty Images

← O *One World Trade Center* foi construído no lugar das torres gêmeas que foram atacadas por terroristas no dia 11 de setembro de 2001. Foto de 2020.

PRIMEIRAS IDEIAS

A imagem focaliza a torre principal do novo complexo de edifícios chamado *World Trade Center*.

A riqueza de suas linhas arquitetônicas torna o complexo de edifícios um lindo espaço localizado em Nova York, nos Estados Unidos. O *One World Trade Center*, seu prédio principal, é repleto de linhas transversais que dão formato triangular a suas faces, conferindo um ar moderno à construção. O complexo tem ainda dois prédios menores de arquitetura similar. Apesar de não terem o mesmo tamanho, suas linhas de construção são muito parecidas.

1. Observe novamente os edifícios na imagem. Que conhecimentos de Geometria você acha que arquitetos e engenheiros precisam ter para projetar e construir edifícios como esses?
2. Na região onde você mora, há algum edifício que chama a atenção pelos traços geométricos que possui?

PRIMEIRAS IDEIAS

- Peça aos estudantes que observem as construções representadas na imagem e verifiquem se elas se parecem com alguma figura geométrica. Espera-se que eles notem, por exemplo, que algumas partes dos edifícios lembram blocos retangulares.
- Chame a atenção dos estudantes para o fato de que um dos edifícios, em estilo moderno e arrojado, apresenta faces triangulares.
- Discuta com os estudantes sobre a importância da aplicação de conhecimentos geométricos na arquitetura e na engenharia civil, desde um pequeno esboço de uma planta baixa até a construção de edifícios, como os apresentados nesta foto que abre a unidade.
- Se julgar oportuno, pergunte aos estudantes: Além da Engenharia e da Arquitetura, que outras áreas usam conhecimentos de Geometria?
- Comente com os estudantes sobre essa nova edificação do World Trade Center, que foi construída no lugar da anterior, que sofreu ataque terrorista em 2001. Ressalte que nesse lugar também foram construídos um memorial e um museu em homenagem às vítimas dessa tragédia. Essa conversa é uma oportunidade para apresentar as diferenças sociais, políticas e culturais do povo estadunidense.

RESPOSTAS

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes citem as propriedades dos ângulos complementares e suplementares; as propriedades dos ângulos formados por uma transversal que corta retas paralelas; a rigidez dos triângulos, amplamente utilizadas nas estruturas de obras arquitetônicas.
2. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a compartilhar as construções que conhecem com esses traços. Se possível, peça a eles que tragam para a sala de aula fotos dessas construções para mostrar aos colegas.

das figuras geométricas e suas relações. É importante que eles entrem em contato com várias situações-problema para que possam compreender as aplicações do teorema de Tales e a semelhança entre as figuras geométricas.

A unidade explora o estudo do triângulo retângulo e suas relações métricas por meio das construções geométricas, com a manipulação de instrumentos, propiciando aos estudantes um estudo mais participativo.

Ainda são abordados o teorema de Pitágoras e suas diferentes aplicações tanto no cálculo da diagonal de um quadrado, da altura de um triângulo equilátero, da diagonal de um bloco retangular e da diagonal de um cubo quanto na resolução de diversas situações-problema.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Retas cortadas por uma transversal.
- Relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.
- Razão e proporção entre segmentos.
- Feixe de retas paralelas cortado por transversais.
- Teorema de Tales.
- Aplicações do teorema de Tales.

Objetivos

- Identificar ângulos congruentes e suplementares em retas paralelas distintas cortadas por uma transversal.
- Atribuir significado aos conceitos de razão e proporção.
- Estabelecer a razão e a proporção entre segmentos de reta.
- Dividir segmentos de reta com o auxílio de régua, compasso e esquadro.
- Verificar e aplicar o teorema de Tales em situações-problema.
- Aplicar o teorema da bissetriz interna na resolução de atividades.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de compreender novas relações envolvendo retas, segmentos de retas e ângulos, aplicando ainda conceitos de razão e proporção estudados anteriormente. Esses conhecimentos proporcionarão a eles a compreensão de diferentes relações entre campos da Matemática, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio lógico e do espírito de investigação e favorecendo a maneira de eles atribuírem significado aos problemas do cotidiano.

RETAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

- Para iniciar o estudo sobre retas cortadas por uma transversal, se julgar pertinente, peça aos estudantes que observem a imagem de satélite representada nesta página e, em seguida, questione-os sobre como eles classificariam cada rua representada na imagem em relação a uma outra. Por exemplo, pergunte a eles qual é a posição da rua Alexandrino dos Santos em relação à rua Jamil Tannus. Esse tipo de questionamento servirá para que os estudantes relembrem as posições relativas entre as retas no plano.

Capítulo 1 RETAS E ÂNGULOS

Para o desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes saibam resolver equações do 1º grau e sistemas de equações, medir ângulos com transferidor, construir retas paralelas, conhecer razão e proporção, identificar ângulos complementares, suplementares, agudos e obtusos e dominar o conceito de bissetriz de um ângulo. Além disso, eles devem saber manusear compasso e esquadros.

Retas cortadas por uma transversal

No dia a dia, é comum usar mapas para nos localizar ou para realizar deslocamentos.

Muitas vezes, a imagem de satélite da região onde faremos o deslocamento facilita a localização e a definição do trajeto que queremos realizar. Hoje em dia, aplicativos nos auxiliam nessa tarefa, pois reproduzem a imagem de satélite de determinada região.

A imagem a seguir mostra uma região na cidade de Uberlândia, em Minas Gerais. Observe que foram destacadas algumas ruas que lembram partes de retas. Perceba que, por exemplo, a rua Augusto César é concorrente à rua Johen Carneiro e à rua Carajás. Podemos dizer que a rua Augusto César é transversal às ruas destacadas.

Chamamos de reta transversal a reta que corta duas ou mais retas em pontos distintos.

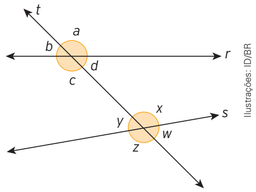
Na tela do *tablet*, imagem de satélite de uma região de Uberlândia (MG).

golibo/iStock/Getty Images

80

Ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal

Observe, na figura a seguir, que os pontos de encontro da reta transversal t com as retas r e s determinam oito ângulos com vértices nos pontos de intersecção.



REPRESENTAÇÃO DE ÂNGULO

Para simplificar, usaremos a notação a para indicar a **medida do ângulo $\hat{a}$**.

Os pares de ângulos: $\hat{a}$ e $\hat{c}$, $\hat{b}$ e $\hat{d}$, $\hat{x}$ e $\hat{z}$ e $\hat{y}$ e $\hat{w}$ são chamados de ângulos opostos pelo vértice (**o.p.v.**).

Com o auxílio de um transferidor, meça os pares de ângulos o.p.v. da figura anterior. O que você pode concluir sobre as medidas obtidas?

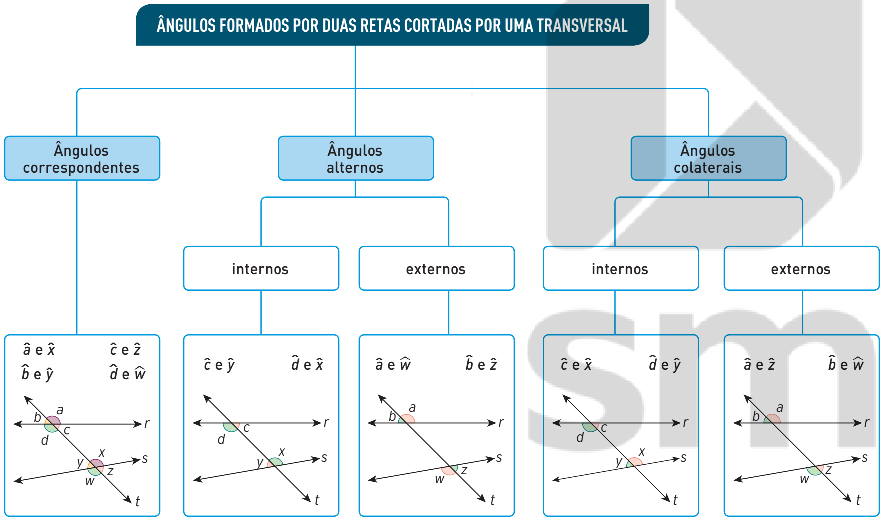
Espera-se que os estudantes concluam que os pares de ângulos o.p.v. são congruentes entre si.

Medindo esses ângulos com transferidor, obtemos:

- $a + b = 180°$
- $x + y = 180°$
- $c + d = 180°$
- $w + z = 180°$

Os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$, $\hat{x}$ e $\hat{y}$ e $\hat{w}$ e $\hat{z}$ são ângulos **suplementares**, ou seja, **a soma de suas medidas é igual a 180°**.

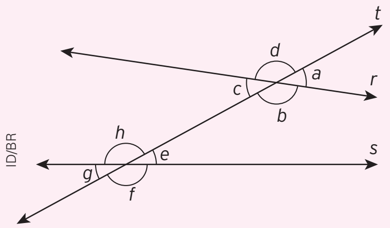
O esquema a seguir mostra como podemos classificar, de acordo com a posição que ocupam, os oito ângulos formados por duas retas cortadas por uma reta transversal.



- Antes de iniciar o estudo da relação entre as medidas dos ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal, relembre com os estudantes os oito ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal, nomeando-os e observando a posição deles em relação às retas.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Esta atividade tem como objetivo aplicar o conceito de ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.). Peça aos estudantes que desenhem aleatoriamente duas retas r e s, cortadas por uma transversal t, nomeando os oito ângulos obtidos de $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$, $\hat{f}$, $\hat{g}$ e $\hat{h}$. Veja a indicação da medida de cada um desses ângulos neste esboço:



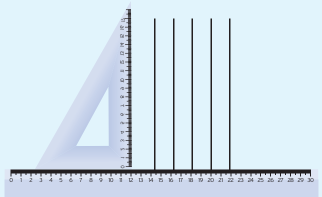
Depois, peça aos estudantes que indiquem os pares de ângulos opostos pelo vértice, medindo-os com o transferidor e registrando o resultado obtido.

Solicite aos estudantes que escrevam uma conclusão a respeito das medidas dos pares de ângulos o.p.v.

São opostos pelo vértice os pares de ângulos: $\hat{a}$ e $\hat{c}$, $\hat{b}$ e $\hat{d}$, $\hat{e}$ e $\hat{g}$, $\hat{f}$ e $\hat{h}$. Assim: $med(\hat{a}) = med(\hat{c})$, $med(\hat{b}) = med(\hat{d})$, $med(\hat{e}) = med(\hat{g})$, $med(\hat{f}) = med(\hat{h})$.

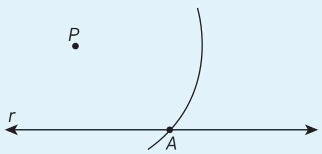
Conclusão: ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.

- É importante que os estudantes explorem com precisão as relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal; por isso, é necessário que eles representem as retas paralelas com precisão. Se julgar pertinente, retome o passo a passo dessas construções. Para isso, apresentamos duas técnicas para construir retas paralelas.
  - **Utilizando régua e esquadro:**
    Trace uma reta *r*. Com a régua sobre a reta *r*, apoie o esquadro na borda da régua e deslize-o sobre a régua para traçar as retas paralelas.

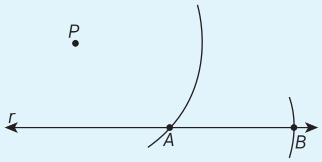


Ilustrações: ID/BR

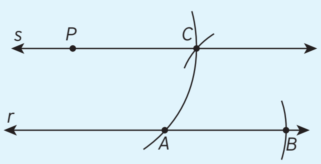
  - **Utilizando régua e compasso:**
    A seguir, apresentamos uma técnica para construir uma reta paralela a uma reta *r*, que passa por um ponto *P* que não pertence a *r*.
    Vamos utilizar o fato de um paralelogramo, como o losango, apresentar os pares de lados opostos paralelos.
    Primeiro, trace um arco qualquer com o compasso centrado em *P*, que intersecte a reta *r* determinando um ponto *A*.



Depois, com a mesma abertura, centre o compasso em *A* e trace um arco que intersecte a reta *r* em um ponto *B*.



Ainda com a mesma abertura, trace um arco, centrado em *B*, que intersecte em um ponto *C* (diferente de *A*) o arco traçado anteriormente. Trace a reta $\overleftrightarrow{PC}$. Ela é paralela à reta *r*, pois o quadrilátero *PABC* é um losango.

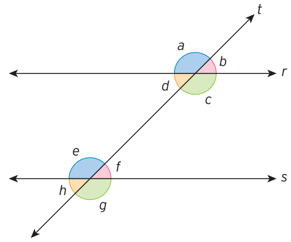


Relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal

Vamos relembrar as relações entre as medidas dos ângulos correspondentes, alternos e colaterais formados no caso particular em que as duas retas cortadas pela transversal são paralelas.

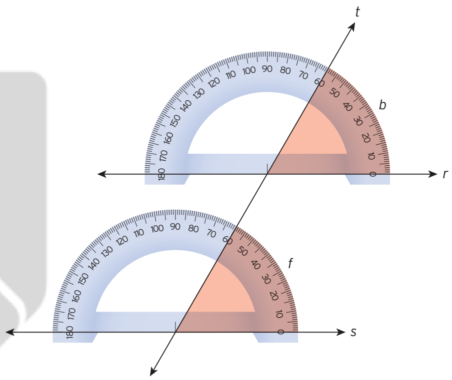
Ângulos correspondentes

Na figura a seguir, as retas *r* e *s* são paralelas entre si ($r \mathbin{/\mkern-6mu/} s$) e a reta *t* é transversal a elas.



Considere os ângulos correspondentes $\hat{b}$ e $\hat{f}$.

Com um transferidor, medimos o ângulo $\hat{b}$ e o ângulo $\hat{f}$. Veja a seguir.



Com esse procedimento, é possível verificar que $\hat{b}$ e $\hat{f}$ têm medidas iguais; ou seja, os ângulos $\hat{b}$ e $\hat{f}$ são congruentes.

Agora, usando um transferidor, meça os outros ângulos. Os outros pares de ângulos correspondentes também são congruentes? **Sim.**

> Os ângulos correspondentes determinados por duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal são congruentes.

A recíproca também é verdadeira: se os ângulos correspondentes forem congruentes, as duas retas cortadas pela transversal são paralelas.

OUTRAS FONTES

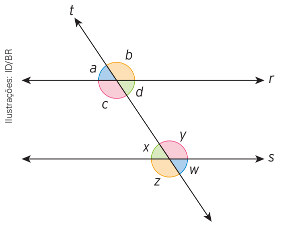
Como utilizar o transferidor. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Q3aHosIDuAE. Acesso em: 29 jun. 2022.

Nessa videoaula é ensinado o passo a passo de como medir um ângulo usando o transferidor.

Ângulos alternos

Considere as retas paralelas *r* e *s* cortadas pela transversal *t*, conforme a figura a seguir. Os pares de ângulos alternos estão indicados com cores iguais.

Ilustrações: ID/BR

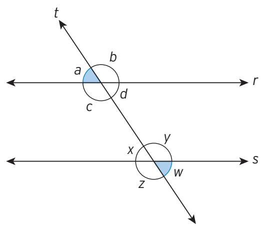


Ângulos alternos externos: $\hat{a}$ e $\hat{w}$; $\hat{b}$ e $\hat{z}$

Ângulos alternos internos: $\hat{c}$ e $\hat{y}$; $\hat{d}$ e $\hat{x}$

Vamos demonstrar que duas retas paralelas, cortadas por uma transversal, determinam ângulos alternos (internos ou externos) que são congruentes.

Ângulos alternos externos



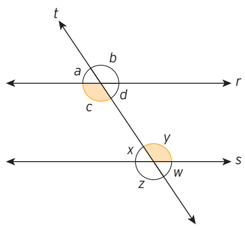
Sendo $r \,//\, s$, temos:

- $\hat{a} \cong \hat{d}$, pois são ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.);
- $\hat{d} \cong \hat{w}$, pois são ângulos correspondentes;

Portanto, podemos afirmar que $\hat{a} \cong \hat{w}$.

De maneira análoga, é possível demonstrar que $\hat{b} \cong \hat{z}$.

Ângulos alternos internos



Sendo $r \,//\, s$, temos:

- $\hat{c} \cong \hat{b}$, pois são ângulos o.p.v.;
- $\hat{b} \cong \hat{y}$, pois são ângulos correspondentes.

Portanto, podemos afirmar que $\hat{c} \cong \hat{y}$.

De maneira análoga, é possível demonstrar que $\hat{d} \cong \hat{x}$.

- Caso alguns estudantes tenham dificuldade de perceber a congruência entre os ângulos alternos internos, sugira a eles que imaginem uma das retas paralelas se deslocando em direção à outra reta paralela; assim, quando os vértices dos ângulos em questão fossem sobrepostos, os ângulos alternos internos ficariam posicionados como se fossem ângulos opostos pelo vértice e, portanto, poderiam concluir que esses ângulos são congruentes. O mesmo poderia ser feito com os ângulos alternos externos.

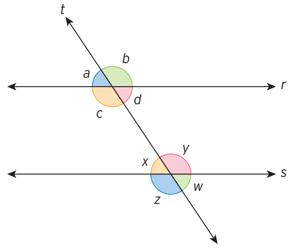
DE OLHO NA BASE

Os conceitos trabalhados nesta dupla de páginas contribuem para demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA10**.

- Relembre aos estudantes que os pares de ângulos colaterais se encontram posicionados no mesmo lado em relação à transversal e podem ser internos, se estiverem entre as retas paralelas, ou externos, se não estiverem entre as retas paralelas.
- Se achar necessário, esclareça aos estudantes que, caso dois ângulos estejam posicionados do mesmo lado da transversal, sendo, porém, um ângulo interno e o outro externo, então esses ângulos são denominados correspondentes.

Ângulos colaterais

Considere as retas paralelas r e s cortadas pela transversal t, conforme a figura a seguir. Os pares de ângulos colaterais estão indicados com cores iguais.

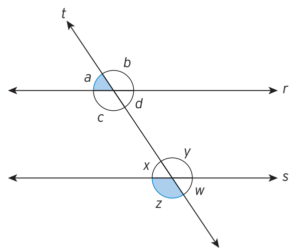


Ângulos colaterais externos: $\hat{a}$ e $\hat{z}$; $\hat{b}$ e $\hat{w}$

Ângulos colaterais internos: $\hat{c}$ e $\hat{x}$; $\hat{d}$ e $\hat{y}$

Vamos demonstrar que duas retas paralelas, cortadas por uma transversal, determinam ângulos colaterais (internos ou externos) que são suplementares.

Ângulos colaterais externos



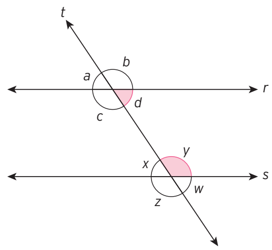
Sendo $r \,//\, s$, temos:

- $\hat{a} \cong \hat{x}$, pois são ângulos correspondentes;
- $x + z = 180°$, pois $\hat{x}$ e $\hat{z}$ são ângulos suplementares.

Portanto, podemos afirmar que $a + z = 180°$.

De maneira análoga, podemos demonstrar que $b + w = 180°$.

Ângulos colaterais internos



Ilustrações: ID/BR

Sendo $r // s$, temos:

- $\hat{d} \cong \hat{x}$, pois são ângulos alternos internos;
- $x + y = 180°$, pois $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são ângulos suplementares.

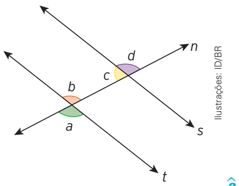
Portanto, podemos afirmar que $d + y = 180°$.

De maneira análoga, podemos demonstrar que $c + x = 180°$.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Sabendo que na figura a seguir as retas *t* e *s* são paralelas entre si, responda às questões.

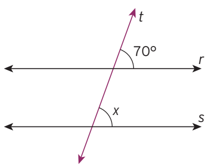


a) Quais são os ângulos alternos externos? **$\hat{a}$ e $\hat{d}$.**

b) Quais são os ângulos colaterais internos? **$\hat{b}$ e $\hat{c}$.**

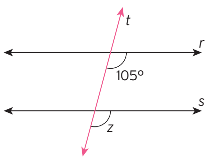
2. Nas figuras a seguir, as retas *r* e *s* são paralelas entre si. Determine o valor de *x* e *z* em grau.

a)



70°

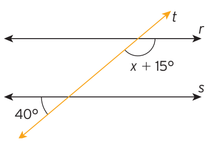
b)



105°

3. Sabendo que $r // s$, calcule o valor de *x* e *y* em grau.

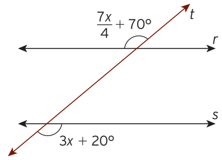
a)



125°

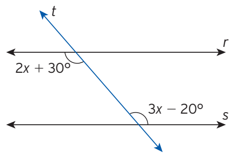
4. a) Consulte a resposta neste manual.

b)



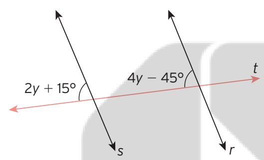
40°

c)



50°

d)



30°

4. Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos colaterais internos expressos em grau por $4x + 28°$ e $3x - 23°$. Considerando isso, faça o que se pede em cada item.

a) Faça um esboço da situação no caderno.

b) Esses ângulos são congruentes ou suplementares? **Suplementares.**

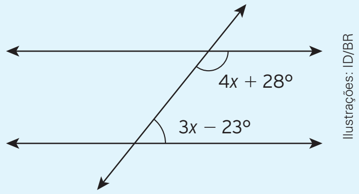
c) Qual é a medida de cada um desses ângulos? **128° e 52°.**

5. Duas retas paralelas intersectadas por uma transversal determinam dois ângulos colaterais internos; a medida de um deles é o triplo da medida do outro. Faça uma figura que represente essa situação e determine as medidas dos oito ângulos formados entre as paralelas e a transversal. **Consulte a resposta neste manual.**

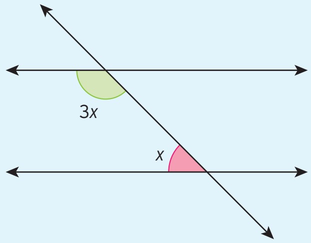
- As atividades desta página trabalham desde a identificação e a classificação dos ângulos, segundo as posições que ocupam, até as relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.
- As atividades **4** e **5** trabalham com a relação entre os ângulos colaterais internos.

RESPOSTAS

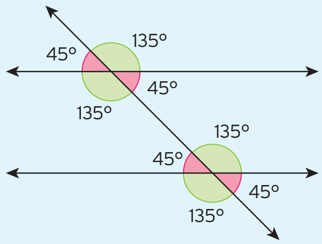
4. a) Resposta possível:



5. Resposta possível: Sendo *x* a medida do menor ângulo, o ângulo maior medirá 3*x*.



Com base nessa figura, as medidas dos oito ângulos formados entre as paralelas e a transversal são:



RAZÃO ENTRE SEGMENTOS

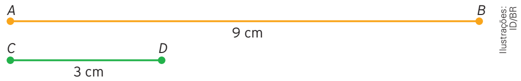
- Se julgar pertinente, antes de trabalhar com os segmentos proporcionais, retome o conceito de proporção entre razões numéricas. Reforce a importância de utilizar sempre a mesma unidade de medida de comprimento para os segmentos.
- As atividades **6** e **7** desta página trabalham com os mesmos segmentos, os que foram apresentados na figura da atividade **6**. No entanto, a atividade **6** solicita aos estudantes que determinem algumas razões e a atividade **7**, que determinem segmentos proporcionais. Utilize essas atividades para verificar se eles compreenderam bem os dois conceitos trabalhados. É importante que você acompanhe de perto as resoluções, pois, se houver algum erro na determinação da razão entre os segmentos na atividade **6**, consequentemente haverá erro na atividade **7**, na formação da proporção.

Razão entre segmentos

A razão entre dois segmentos é a razão entre suas medidas, considerando a mesma unidade de medida de comprimento.

Exemplo

Considere os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, representados a seguir.



A razão entre eles é $\frac{AB}{CD} = \frac{9}{3} = 3$.

Podemos dizer que a medida do segmento $\overline{AB}$ é três vezes maior que a medida do segmento $\overline{CD}$.

Segmentos proporcionais

Considere os segmentos de reta mostrados a seguir.

Calculando a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e depois entre $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$, temos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{PQ}{RS} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Como as razões obtidas são iguais, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$, nessa ordem, formam uma proporção:

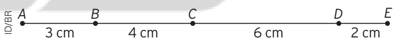
$$\frac{AB}{CD} = \frac{PQ}{RS}$$

Quatro segmentos, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$, nessa ordem, são segmentos proporcionais quando suas medidas, tomadas na mesma unidade de medida, formam uma proporção, isto é, $\frac{AB}{CD} = \frac{PQ}{RS}$.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

6. Considere a figura a seguir.



Escreva no caderno as razões entre as medidas dos segmentos indicadas a seguir.

a) $\frac{AB}{CD}$ **$\frac{1}{2}$**

b) $\frac{BC}{DE}$ **2**

c) $\frac{BC}{CE}$ **$\frac{1}{2}$**

d) $\frac{AC}{DE}$ **$\frac{7}{2}$**

e) $\frac{AE}{AE}$ **1**

f) $\frac{AD}{AC}$ **$\frac{13}{7}$**

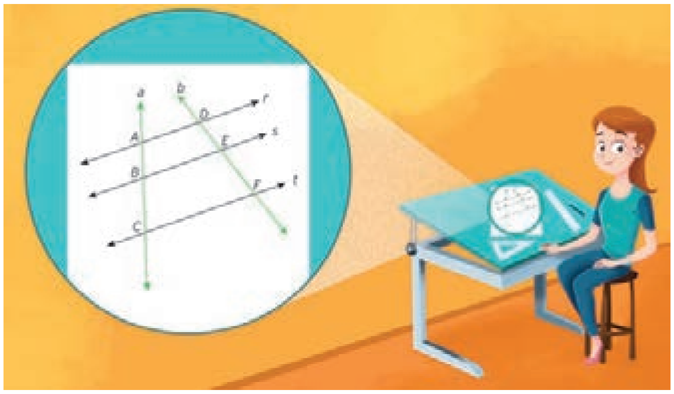
7. Duas das razões apresentadas nos itens da atividade anterior formam uma proporção. Descubra quais são elas e escreva no caderno essa proporção. **$\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{CE}$**

8. Os segmentos $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ e $\overline{IJ}$, nessa ordem, formam uma proporção. Quanto mede $\overline{IJ}$, sabendo que $CD = 24$ cm, $EF = 32$ cm e $GH = 36$ cm? **48 cm**

9. Quatro segmentos, x, y, z e w, formam, nessa ordem, uma proporção. Determine as medidas de z e de w, sabendo que $x = 12$ cm, $y = 15$ cm e $z + w = 72$ cm.
$z = 32$ cm; $w = 40$ cm

Feixe de retas paralelas cortadas por transversais

Utilizando régua e esquadro, Marina traçou três retas paralelas entre si ($r \parallel s \parallel t$) e duas retas ($a$ e b) que as intersectam em pontos distintos. Observe.



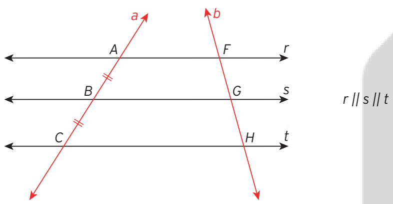
João Picoli/ID/BR

Um conjunto de três ou mais retas paralelas, em um mesmo plano, é chamado de **feixe de retas paralelas**.

No desenho de Marina, as retas r, s e t formam um feixe de retas paralelas e as retas a e b são transversais a esse feixe de retas paralelas.

Agora, considere a figura a seguir, em que $r \parallel s \parallel t$ e as retas a e b são retas transversais no mesmo plano.

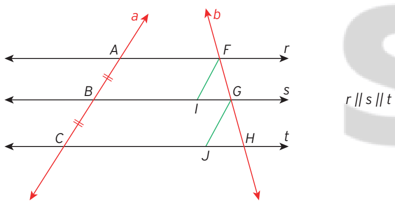
ID/BR



Vamos provar que, se $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, então $\overline{FG} \cong \overline{GH}$.

Primeiro, traçamos por F o segmento $\overline{FI}$ paralelo à reta a. Em seguida, traçamos por G o segmento $\overline{GJ}$ paralelo à reta a, como mostrado na figura a seguir.

ID/BR



FEIXE DE RETAS PARALELAS CORTADAS POR TRANSVERSAIS

- Verifique se os estudantes compreenderam que um feixe de retas paralelas é um conjunto de três ou mais retas paralelas em um mesmo plano.
- Se julgar pertinente, peça aos estudantes que desenhem no caderno uma reta transversal, considerando que as linhas do caderno formam um feixe de retas paralelas. Peça a eles que meçam com a régua alguns segmentos da reta transversal traçada e, depois, verifiquem a proporção entre esses segmentos. Explique que, ao efetuar os cálculos, a proporção que eles encontrarão dependerá muito da precisão de como eles mediram os segmentos com a régua.

87

DESCUBRA MAIS

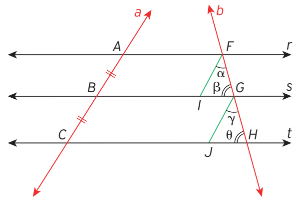
A atividade orientada nesse boxe permitirá aos estudantes verificar a propriedade apresentada: se um feixe de paralelas determinar segmentos congruentes sobre uma transversal, esse feixe determinará segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

Para que os resultados da atividade sejam satisfatórios, é importante ressaltar que os estudantes devem ter habilidade de construir retas paralelas que estejam a uma distância predeterminada.

Essa atividade pode ser realizada utilizando a metodologia de sala de aula invertida, uma vez que ela apresenta um roteiro claro para os estudantes seguirem, construírem as retas solicitadas e realizarem as medições necessárias. Depois disso, eles podem responder às questões do *Para concluir*. Em sala da aula, os estudantes devem trazer suas anotações e, então, o espaço da aula será de discussão acerca das dificuldades e das aprendizagens envolvidas.

PARA CONCLUIR

- Espera-se que os estudantes encontrem pares de segmentos de reta congruentes.
- Espera-se que os estudantes encontrem em ambas as figuras que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$ são, nessa ordem, proporcionais.
- Espera-se que os estudantes encontrem em ambas as figuras que os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{FG}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, são proporcionais.



$r \parallel s \parallel t$

Observando a figura, temos:

- $ABIF$ é um paralelogramo, pois $\overline{AB} \parallel \overline{FI}$ e $\overline{AF} \parallel \overline{BI}$;
- $BCJG$ é um paralelogramo, pois $\overline{BC} \parallel \overline{GJ}$ e $\overline{BG} \parallel \overline{CJ}$.

Como os lados opostos de um paralelogramo têm a mesma medida, então $\overline{AB} \cong \overline{FI}$ e $\overline{BC} \cong \overline{GJ}$.

Mas $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, então $\overline{FI} \cong \overline{GJ}$.

Agora, considerando os triângulos FIG e GJH, temos:

- $\overline{FI} \cong \overline{GJ}$, como provado anteriormente;
- $\hat{\alpha} \cong \hat{\gamma}$, pois são ângulos correspondentes;
- $\hat{\beta} \cong \hat{\theta}$, pois são ângulos correspondentes.

Portanto, pelo caso lado-ângulo-ângulo oposto (LAA_o), os triângulos FIG e GJH são congruentes. Como $\overline{FG}$ e $\overline{GH}$ são lados correspondentes em triângulos congruentes, então $\overline{FG} \cong \overline{GH}$.

> Se um feixe de retas paralelas determinar segmentos congruentes sobre uma transversal, esse feixe determinará segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

DESCUBRA MAIS

Verificações experimentais

Vamos fazer dois experimentos para verificar relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por transversais.

Materiais

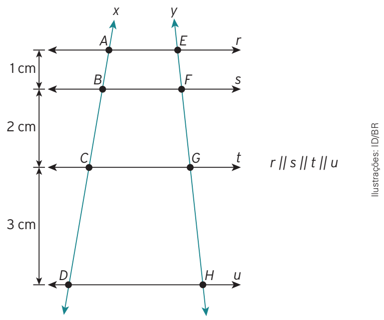
- lápis
- régua
- esquadro
- folhas de papel avulsas

(Representações sem proporção de tamanho entre si)

Como fazer

1. Desenhe um feixe de retas paralelas a, b, c e d, tal que a medida da distância entre as retas a e b seja 1 cm, a medida da distância entre as retas b e c seja 2 cm e a medida da distância entre as retas c e d seja 3 cm.
2. Trace duas retas, x e y, transversais a esse feixe.
3. Indique por A, B, C e D os pontos em que as retas paralelas cruzam a reta x e por E, F, G e H os pontos em que as retas paralelas cruzam a reta y. Você deve obter uma figura parecida com a mostrada a seguir.

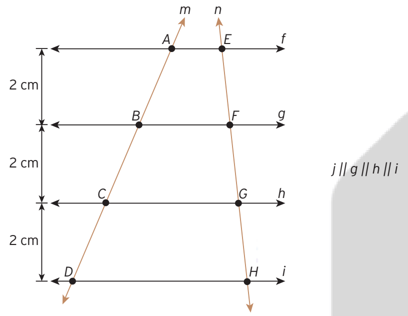
88



4 Meça os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, que pertencem à reta *x*, e os segmentos $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{GH}$, que pertencem à reta *y*. Anote as medidas na figura que você construiu.

5 Agora, desenhe um feixe com quatro retas paralelas, *f*, *g*, *h* e *i*; a distância entre *f* e *g*, *g* e *h* e *h* e *i* deve medir 2 cm.

6 Trace as retas transversais *m* e *n* cruzando o feixe de retas paralelas. Indique por *A*, *B*, *C* e *D* os pontos em que as retas paralelas cruzam a reta *m* e por *E*, *F*, *G* e *H* os pontos em que as retas paralelas cruzam a reta *n*. Você deve obter uma figura parecida com esta.



7 Meça os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, que pertencem à reta *m*, e os segmentos $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{GH}$, que pertencem à reta *n*. Anote as medidas na figura que você construiu.

Para concluir

Responda sempre no caderno.

Respostas pessoais.

1. Depois de determinar as medidas dos segmentos de cada figura, o que é possível concluir sobre elas?
2. Para cada figura que você construiu, calcule as seguintes razões: $\frac{AB}{BC}$ e $\frac{EF}{FG}$. Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$, nessa ordem, são proporcionais?
3. Para cada figura que você construiu, calcule as seguintes razões: $\frac{BC}{CD}$ e $\frac{FG}{GH}$. Os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{FG}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, são proporcionais?

DE OLHO NA BASE

Os conceitos trabalhados no boxe *Descubra mais* contribuem para que os estudantes possam resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade em retas paralelas cortadas por secantes, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA14**.

Além disso, contribuem para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**, permitindo que os estudantes sintam segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

- O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes deve ser preservada. Para isso, valorize situações em que eles se sintam acolhidos, incentivando o desenvolvimento da empatia e da solidariedade.

Os processos cognitivos como percepção, memorização, raciocínio, imaginação e resolução de problemas podem contribuir para elevar a autoestima dos estudantes, apesar de a saúde mental parecer um assunto que não tem relação com a Educação Matemática.

TEOREMA DE TALES

- A demonstração do teorema foi particularizada para facilitar a compreensão dos estudantes. É importante destacar que a demonstração desse teorema se estende para feixes com mais de três retas paralelas. Além disso, avalie a pertinência de informar aos estudantes que é possível demonstrar que o teorema é válido para medidas de segmentos expressas por quaisquer números reais positivos.
- Verifique se os estudantes compreenderam quais são os segmentos correspondentes, pois, caso existam dúvidas em relação a esses segmentos, eles poderão ter dificuldade de determinar as relações proporcionais.
- Se julgar oportuno, realize a demonstração do teorema na lousa, incentivando a participação dos estudantes, pois isso facilita o entendimento, além de mostrar que a linguagem matemática é um excelente recurso de construção da interpretação. Além disso, a compreensão de demonstrações matemáticas é uma oportunidade para o desenvolvimento de diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático.

Teorema de Tales

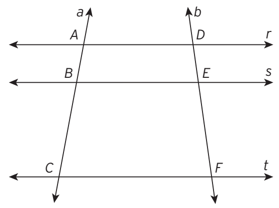
Agora, vamos conhecer o teorema de Tales.

Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, os segmentos determinados sobre a primeira transversal são proporcionais a seus correspondentes determinados sobre a segunda transversal.

Demonstração

Vamos demonstrar que o teorema de Tales é válido para qualquer feixe de retas paralelas cortado por duas transversais.

Considere a figura a seguir, em que as retas r, s e t são paralelas, as retas a e b são transversais e $\overline{AB} \neq \overline{BC}$.

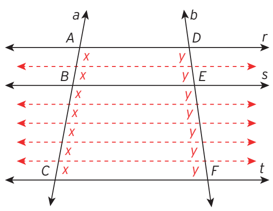


Ilustrações: ID/BR

Note que as retas paralelas r, s e t determinam sobre a reta transversal a os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e sobre a reta transversal b os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$.

Vamos mostrar que os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são proporcionais aos segmentos de reta $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$, ou seja, $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Dividimos os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ em partes de medidas iguais e traçamos pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ retas paralelas do feixe. Essas retas dividirão $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ em segmentos congruentes, de medida y, como mostra a figura a seguir.



Calculando a razão $\frac{AB}{BC}$, temos $\frac{AB}{BC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$ (I)

Calculando a razão $\frac{DE}{EF}$, temos $\frac{DE}{EF} = \frac{2y}{5y} = \frac{2}{5}$ (II)

Comparando (I) e (II), temos $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Portanto, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são proporcionais aos segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$.

(IN)FORMAÇÃO

Aprendendo em sala de aula o teorema de Tales, através da história da Matemática

[…]

Ao abordar, explicitar e destacar através da História da Matemática a importância do Teorema de Tales proponho, por meio deste artigo, estratégias que incentivem a criatividade, a intuição e a argumentação dos alunos, auxiliando no aprendizado permanente e significativo. Como também problematizar a interpretação e a produção de cálculos pela observação de regularidade do Teorema de Tales. Salientar a importância da Matemática como um dos muitos elementos possíveis para o desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, que também são necessárias para o aprendizado em geral e construir, interpretar e aplicar o Teorema de Tales, verificando-o experimentalmente e em situações do cotidiano.

Sobre a vida e sobre a obra de Tales de Mileto, matemático grego, existem algumas dúvidas, porém ao ser mencionado por Heródoto, em obra escrita por volta de 440 a.C., percebem-se registros que confirmam suas contribuições, e posteriormente por Aristóteles (384-322 a.C.) e Proclus (420-485 d.C.).

Segundo Fainguelernt [...], "Tales é o primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas". Em geometria, creditam-se a ele os seguintes resultados elementares:

1. Qualquer diâmetro efetua a bisseção do círculo em que é traçado.

2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.

4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.

5. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto.

[…]

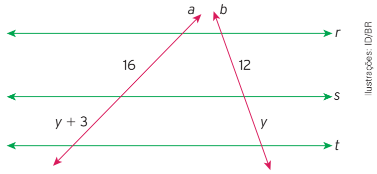
[…] (Tales de Mileto), […], é considerado como o marco inicial da filosofia ocidental. Em 582 a.C., o Oráculo de Delfos proclamou-o como o primeiro dos sete sábios da antiguidade. […]

[…]

[Tales] Desempenhou um papel muito importante na Matemática ao atribuir a esta ciência um caráter dedutivo. Através de sua escola filosófica é que os gregos começaram a reunir os conhecimentos matemáticos vindos dos Egípcios

Exemplo

Vamos calcular o valor de y na figura a seguir. Considere $r \parallel s \parallel t$.



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{y+3}{16} = \frac{y}{12}$$

$$12 \cdot (y + 3) = 16 \cdot y$$

Resolvendo a equação, temos:

$$12y + 36 = 16y$$

$$36 = 4y$$

$$y = 9$$

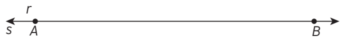
Aplicações do teorema de Tales

Vamos estudar quatro aplicações do teorema de Tales: na divisão de um segmento de reta em partes de medidas iguais, na divisão de um segmento de reta em partes de medidas proporcionais, em triângulos e no teorema da bissetriz de um ângulo interno em um triângulo.

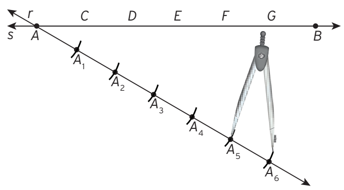
Divisão de um segmento de reta em partes de medidas iguais

Veja como podemos dividir um segmento de reta em seis partes de medidas iguais usando compasso, régua não graduada e um par de esquadros.

1º passo: Traçamos uma reta s e marcamos os pontos A e B, distintos, que formarão o segmento de reta $\overline{AB}$.



2º passo: Traçamos uma reta r, formando um ângulo agudo com $\overline{AB}$, passando por uma das extremidades (A, por exemplo). Em seguida, com o compasso, definimos uma distância qualquer entre a ponta-seca e a grafite e, repetindo essa mesma distância, marcamos na reta r o número de unidades iguais em que queremos dividir $\overline{AB}$ a partir do ponto A (neste caso, seis), determinando os pontos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6.



- Se julgar pertinente, pergunte aos estudantes onde eles veem o teorema de Tales na divisão de um segmento de reta em partes de medidas iguais. Espera-se que eles notem que, traçando o feixe de retas paralelas, tanto o segmento que se deseja dividir quanto a reta utilizada para marcar o número de divisões desejado no segmento constituem retas transversais ao feixe, ou seja, os segmentos determinados no segmento inicial e na reta traçada são proporcionais.

e dos Caldeus. Logo, podemos considerar Tales como usuário inteligente dos conhecimentos práticos da geometria do Egito, acrescidos embora de algum progresso. Tales foi, portanto, apenas um iniciador da geometria abstrata.

No estudo da geometria plana apresenta-se como um dos temas centrais, pois sua origem na resolução de problemas práticos envolve conceitos de paralelismo e proporcionalidade. Observamos sua presença na teoria da semelhança e na trigonometria justificando o seno, cosseno e tangente de ângulos, assim como na geometria espacial no estudo das secções de sólidos interceptados por planos paralelos à base. A tradição atribui este teorema ao filósofo grego Tales de Mileto, por ter usado a propriedade dos segmentos proporcionais para o cálculo de distâncias inatingíveis.

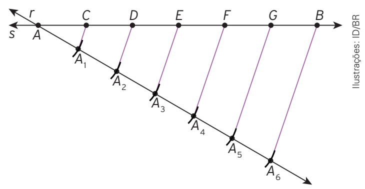
O Teorema de Tales possui diversas aplicações práticas, como por exemplo: descobrir a altura de um prédio, de uma casa, de uma árvore ou distâncias inacessíveis. Calculou a altura da pirâmide através da semelhança dos triângulos formados pela projeção das sombras da pirâmide e da vara, e com isso verificou que os dois triângulos apresentam ângulos respectivamente congruentes.

[...]

Massuquetto, A.; Zanlorenzi, M. A. Aprendendo em sala de aula o teorema de Tales, através da história da Matemática. *In*: Paraná (Estado). Secretaria da Educação. *Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE*, 2014 (Cadernos PDE, v. 1). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_ufpr_mat_artigo_almir_massuquetto.pdf. Acesso em: 30 jun. 2022.

- A divisão de um segmento de reta em partes de medidas proporcionais nada mais é que um aprimoramento da divisão de um segmento de reta em partes de medidas iguais.
- Embora seja trabalhada no Livro do Estudante a divisão de um segmento em partes proporcionais a 1, a 2 e a 3, foi apresentada a divisão da reta em seis partes iguais e, depois, as paralelas foram traçadas nos pontos A_1, A_3 e A_6. Explique aos estudantes que a divisão pode ser feita em mais ou menos partes, pois depende exclusivamente das proporções que desejamos obter na divisão do segmento. Se julgar oportuno, proponha aos estudantes que dividam um segmento de reta utilizando o procedimento apresentado em partes proporcionais a 2, a 5 e a 8.

3º passo: Traçamos o segmento $\overline{A_6B}$ e, com o par de esquadros, traçamos segmentos paralelos a $\overline{A_6B}$ passando pelos pontos A_5, A_4, A_3, A_2 e A_1, determinando os pontos G, F, E, D e C, que dividem o segmento $\overline{AB}$ em seis partes de medidas iguais.



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\overline{AC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GB}$$

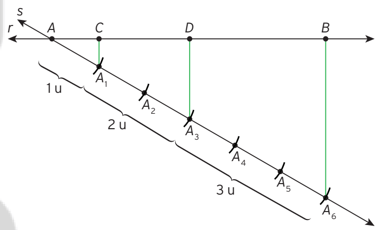
Divisão de um segmento de reta em partes de medidas proporcionais

Vamos dividir um segmento em partes proporcionais a 1, a 2 e a 3.

1º passo: Traçamos uma reta r e marcamos os pontos A e B, distintos, que formarão o segmento de reta $\overline{AB}$.

2º passo: Traçamos uma reta s, formando um ângulo agudo com $\overline{AB}$, passando por uma das extremidades (A, por exemplo). Em seguida, com o compasso (sempre com a mesma distância entre a ponta-seca e a grafite), marcamos na reta s a partir do ponto A os pontos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6.

3º passo: Traçamos o segmento $\overline{A_6B}$ e, com o par de esquadros, traçamos segmentos paralelos a $\overline{A_6B}$ passando pelos pontos A_1 e A_3, determinando os pontos C e D, que dividem o segmento $\overline{AB}$ em partes proporcionais a 1, a 2 e a 3.



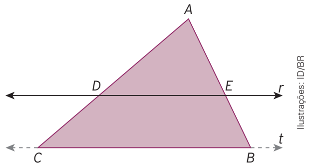
Pelo teorema de Tales, temos:

- $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AA_1}{A_1A_3} = \dfrac{1\text{ u}}{2\text{ u}} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{CD}{DB} = \dfrac{A_1A_3}{A_3A_6} = \dfrac{2\text{ u}}{3\text{ u}} = \dfrac{2}{3}$

Portanto, os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$ são proporcionais a 1, a 2 e a 3, respectivamente.

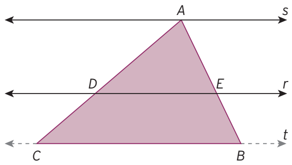
Teorema de Tales em triângulos

Considere o triângulo ABC a seguir. Traçamos uma reta r paralela ao lado $\overline{BC}$ passando pelos pontos D e E.



Vamos demonstrar que $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EB}$.

Traçamos mais uma reta paralela às outras duas pelo ponto A. Teremos, então, três retas paralelas (s, r e t) cortadas por duas retas transversais ($\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$), como mostra a figura a seguir.



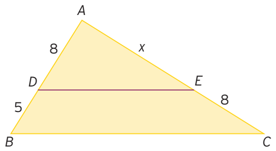
Se $s \parallel r \parallel t$, então, pelo teorema de Tales, podemos escrever $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EB}$.

> Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados (ou seus prolongamentos) em dois pontos distintos determina sobre esses lados segmentos proporcionais.

Exemplos

Vamos obter o valor de x nas figuras a seguir, sabendo que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

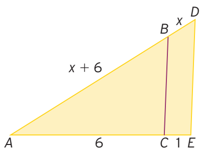
A.



Aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{8}{5} = \frac{x}{8}$$
$$5x = 64$$
$$x = \frac{64}{5}$$
$$x = 12,8$$

B.



Aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{x+6} = \frac{1}{6}$$
$$6x = x + 6$$
$$6x - x = 6$$
$$5x = 6$$
$$x = \frac{6}{5} = 1,2$$

- Verifique se os estudantes compreenderam bem a aplicação do teorema de Tales no triângulo, pois, quando forem utilizar essa aplicação, em alguns casos, eles deverão perceber que, ao traçar a reta paralela em relação a um dos lados do triângulo, os lados não paralelos a essa reta serão segmentos sobre retas transversais e terão medidas proporcionais.

93

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

Leia com os estudantes o texto sobre Tales de Mileto para que eles conheçam um pouco da vida desse matemático e algumas de suas descobertas.

Converse com eles sobre como conhecer outros povos e outras culturas pode influenciar o modo de pensar e de observar nosso cotidiano e nossos problemas de outro ponto de vista e como isso pode ter sido importante para as pesquisas que Tales realizou.

Comente com eles que Tales observou que os raios solares que chegavam à Terra incidiam de forma inclinada e eram paralelos e, assim, concluiu que havia uma proporcionalidade entre as medidas da sombra e da altura dos objetos. Então, fixou uma estaca perpendicularmente ao solo no ponto em que a sombra projetada da pirâmide acabava.

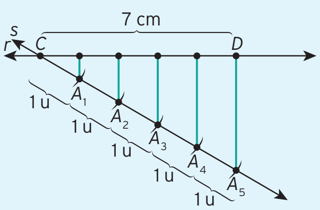
DE OLHO NA BASE

A contextualização histórica é importante para que os estudantes percebam o que motivou a construção de determinado conhecimento matemático e reconheçam que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas. Dessa forma, desenvolve-se a **competência específica de Matemática 1**.

- As atividades **11** e **12** trabalham com divisão de segmentos, porém na atividade **11** a divisão se dá em segmentos congruentes e na atividade **12**, em três partes proporcionais.

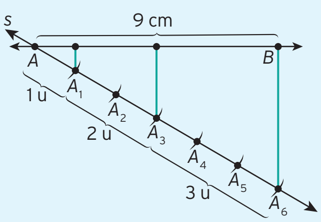
RESPOSTAS

11. Resposta possível:



Cada uma das 5 partes desse segmento $\overline{CD}$ terá a medida de 1,4 cm.

12. Resposta possível:



Ao dividir um segmento de 9 cm em partes proporcionais a 3, a 2 e a 1, obtêm-se segmentos que medem respectivamente 4,5 cm, 3,0 cm e 1,5 cm.

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

Tales de Mileto

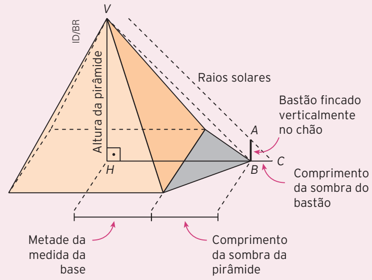
Tales de Mileto foi um filósofo da Antiguidade que nasceu na Ásia Menor, na antiga colônia grega de Mileto, atual Turquia. Não se sabe exatamente as datas de nascimento e de morte dele, mas estima-se que ele tenha vivido entre os anos 630 a.C. e 550 a.C.

Segundo alguns historiadores, Tales foi comerciante, o que lhe rendeu recursos suficientes para dedicar-se a suas pesquisas. Ele provavelmente viajou para o Egito e para a Babilônia, entrando em contato com astrônomos e matemáticos.

Atribuem-se a ele diversas descobertas matemáticas. Além de estudar a geometria do círculo e do triângulo isósceles, Tales mostrou como calcular a medida da altura de uma pirâmide, com base no comprimento de sua sombra.

Com a ideia de que os raios de sol incidem inclinados e paralelos, Tales fez a seguinte relação entre as medidas dos segmentos $\overline{VH}$, $\overline{AB}$, $\overline{HB}$ e $\overline{BC}$:

$\frac{VH}{AB} = \frac{HB}{BC}$, ou seja:



$$\text{medida da altura da pirâmide} = VH = \frac{HB \cdot AB}{BC}$$

Como as medidas dos segmentos $\overline{VH}$, $\overline{AB}$, $\overline{HB}$ e $\overline{BC}$ eram fáceis de se obter, Tales conseguiu estimar uma altura de medida 158,8 m para a pirâmide de Quéops, por volta de 600 a.C. Hoje a altura da pirâmide de Quéops mede aproximadamente 146 m.

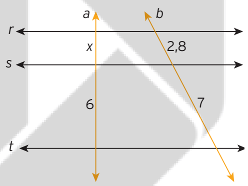
Fontes de pesquisa: UOL Educação. Tales de Mileto. Disponível em: https://educacao.uol.com.br/biografias/tales-de-mileto.htm; Derivando a Matemática. A altura da pirâmide de Quéops e o Teorema de Tales. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/a-altura-da-piramide-de-queops-e-o-teorema-de-tales/. Acessos em: 11 mar. 2022.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

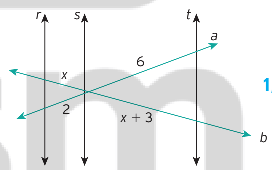
10. Calcule o valor de x em cada caso, sabendo que as retas r, s e t são paralelas entre si.

a)



2,4

b)

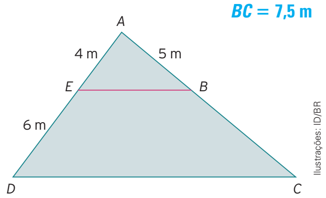


1,5

11. Usando esquadros e compasso, divida um segmento $\overline{CD}$ em 5 partes congruentes, sabendo que ele mede 7 cm. **Consulte a resposta neste manual.**

12. Divida um segmento que mede 9 cm em partes proporcionais a 3, a 2 e a 1. **Consulte a resposta neste manual.**

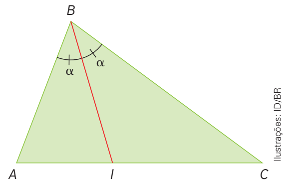
13. Na figura a seguir, o triângulo está dividido pelo segmento $\overline{BE}$, que é paralelo à base $\overline{CD}$. Calcule a medida do segmento $\overline{BC}$. **$BC = 7{,}5$ m**



14. Um prédio que mede 34 m de altura projeta uma sombra de 24 m de extensão. Quanto uma pessoa que mede 1,70 m de altura pode se afastar da base do prédio ao longo da sombra de maneira que, em pé, continue totalmente na sombra? **22,8 m**

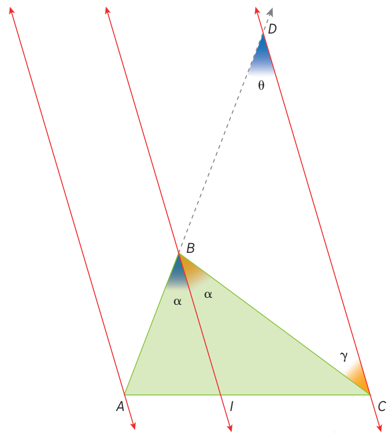
Teorema da bissetriz interna

Observe a seguir o triângulo ABC, em que $\overline{BI}$ é bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$.



Vamos demonstrar que $\frac{AI}{AB} = \frac{IC}{BC}$.

Traçamos pelo ponto C e pelo ponto A duas retas paralelas ao segmento $\overline{BI}$.



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AI}{IC} = \frac{AB}{BD} \quad \text{ou} \quad \frac{AI}{AB} = \frac{IC}{BD} \quad \text{(I)}$$

De acordo com a figura, temos:

- $\hat{\alpha} \cong \hat{\theta}$, pois são ângulos correspondentes;
- $\hat{\gamma} \cong \hat{\alpha}$, pois são ângulos alternos internos.

Logo, $\hat{\theta} \cong \hat{\gamma}$.

Então, o $\triangle BCD$ é isósceles e, portanto, $\overline{BC} \cong \overline{BD}$, ou seja, $BC = BD$.

Agora, substituindo BD por BC em (I), obtemos:

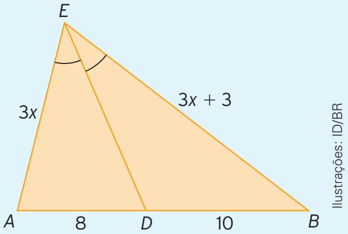
$$\frac{AI}{AB} = \frac{IC}{BC}$$

A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto ao ângulo em dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

- Se julgar pertinente, retome a definição de bissetriz, ou seja, o lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas concorrentes, dividindo o ângulo formado entre essas duas retas em dois ângulos congruentes.
- Enfatize aos estudantes que o teorema da bissetriz interna é importante na Geometria plana, pois permite determinar segmentos proporcionais em qualquer triângulo.

RESPOSTAS

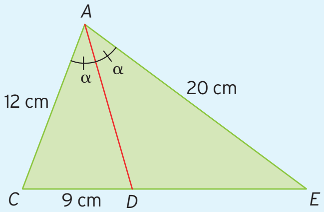
16. Esboço possível:



a) O valor de x é 4.

b) Os lados $\overline{AB}$, $\overline{AE}$ e $\overline{BE}$ medem, respectivamente, 18 cm, 12 cm e 15 cm.

17. Esboço possível:

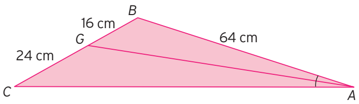


O segmento $\overline{ED}$ mede 15 cm.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

15. Calcule a medida do lado $\overline{AC}$ do triângulo a seguir, sabendo que $\overline{AG}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$. ***AC* = 96 cm**



16. Faça um esboço de um triângulo ABE no caderno, sabendo que:

- $\overline{ED}$ é bissetriz interna do ângulo $\hat{E}$;
- $AD = 8$ cm;
- $BD = 10$ cm;
- $AE = (3x)$ cm;
- $EB = (3x + 3)$ cm.

Consulte as respostas neste manual.

Em seguida, calcule:

a) o valor de x;

b) as medidas dos lados do triângulo.

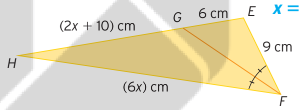
17. Esboce um triângulo ACE no caderno, sabendo que:

- $\overline{AD}$ é bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$;
- $AC = 12$ cm;
- $AE = 20$ cm;
- $DC = 9$ cm.

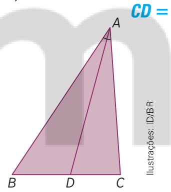
Consulte as respostas neste manual.

Em seguida, calcule a medida do segmento $\overline{ED}$.

18. Calcule o valor de x, sabendo que $\overline{FG}$ é bissetriz interna relativa ao ângulo $\hat{F}$. ***x* = 5**

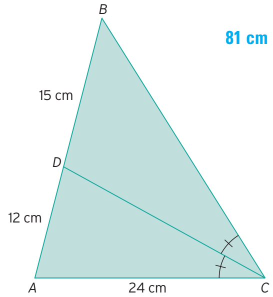


19. No triângulo ABC, $\overline{AD}$ é bissetriz interna. Sabendo que $AB = 9$ cm, $AC = 7{,}5$ cm e $BC = 5{,}5$ cm, calcule a medida de $\overline{CD}$. ***CD* = 2,5 cm**

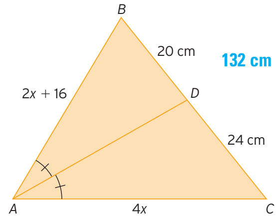


20. Calcule a medida do perímetro dos triângulos ABC a seguir.

a) **81 cm**

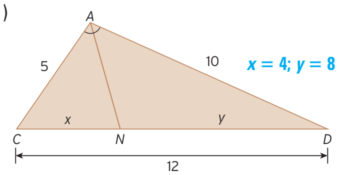


b) **132 cm**

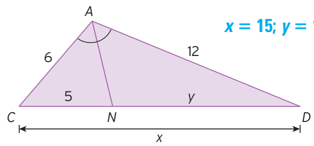


21. Calcule x e y nos triângulos ACD a seguir, sabendo que $\overline{AN}$ é bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$.

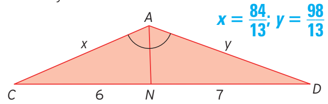
a) **$x = 4$; $y = 8$**



b) **$x = 15$; $y = 10$**



c) $2x + 2y = 28$ **$x = \frac{84}{13}$; $y = \frac{98}{13}$**

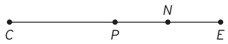


DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

2. a) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ b) Amarelo: 16 m; azul: 96 m d) Amarelo: 12 m^2; azul: 432 m^2

1. Na figura a seguir, P é o ponto médio de $\overline{CE}$ e N é o ponto médio de $\overline{PE}$.



Sabendo que $CE = 100$ cm, determine:

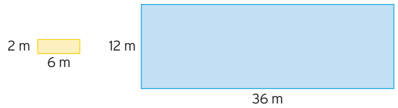
a) a medida do segmento $\overline{PN}$; **25 cm**

b) a razão entre PN e CN; $\frac{1}{3}$

c) a razão entre PN e CE; $\frac{1}{4}$

d) a razão entre PN e CP. $\frac{1}{2}$

2. Considere os retângulos a seguir e faça o que se pede em cada item.



a) Qual é a razão entre as medidas dos lados do retângulo amarelo? E a razão entre as medidas dos lados do retângulo azul?

b) Qual é a medida do perímetro do retângulo amarelo? E a medida do perímetro do retângulo azul?

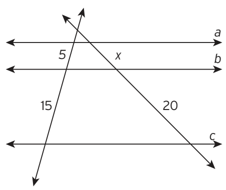
c) Qual é a razão entre a medida do perímetro do retângulo amarelo e a medida do perímetro do retângulo azul? $\frac{1}{6}$

d) Qual é a medida da área do retângulo amarelo? E a medida da área do retângulo azul?

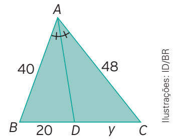
e) Qual é a razão entre as medidas da área do retângulo amarelo e da área do retângulo azul? $\frac{1}{36}$

3. As retas paralelas r, s e t determinam sobre uma reta transversal três pontos, C, D e E, respectivamente, de modo que $CD = 20$ cm e $DE = 25$ cm, e sobre outra reta transversal determinam outros três pontos, M, N e P, respectivamente. Sabendo que $MP = 72$ cm, calcule as medidas dos segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$.
$MN = 32$ cm; $NP = 40$ cm

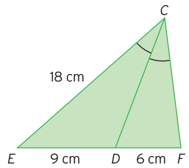
4. Sabendo que a // b // c, calcule o valor de x. $x = \frac{20}{3}$



5. No triângulo ABC, $\overline{AD}$ é bissetriz de $\hat{A}$. Qual é o valor de y? **$y = 24$**



6. No triângulo CEF da figura a seguir, $\overline{CD}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{C}$.

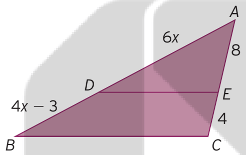


Determine a medida:

a) do lado $\overline{CF}$; **12 cm**

b) do perímetro do triângulo CEF. **45 cm**

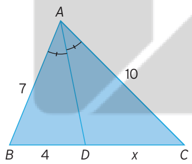
7. No triângulo a seguir, $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$. Sabendo que as medidas estão dadas em centímetro, determine o valor de x.



$x = 3$

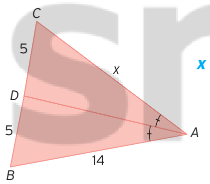
8. Nas figuras a seguir, determine o valor de x.

a)



$x = \frac{40}{7}$

b)



$x = 14$

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- As atividades **5**, **6** e **8** abordam o teorema da bissetriz interna. Caso alguns estudantes tenham dificuldade na resolução, e se julgar oportuno, proponha a resolução delas em dupla. Procure formar duplas reunindo estudantes que saibam resolver com outros que ainda apresentem dificuldade.

ESTRATÉGIA DE APOIO

A atividade **7** envolve o teorema de Tales aplicado ao triângulo. Caso alguns estudantes tenham dificuldade de compreendê-lo, pergunte-lhes quais são as paralelas apresentadas e quais são os segmentos correspondentes. Essas perguntas podem facilitar o encontro da proporção para resolver a atividade.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Figuras semelhantes.
- Ampliação e redução de figuras.
- Semelhança de polígonos.
- Casos de semelhança de triângulos.

Objetivos

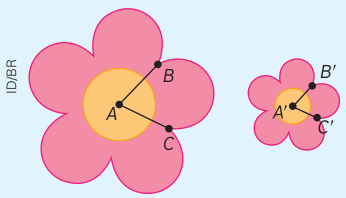
- Reconhecer figuras e polígonos semelhantes utilizando as propriedades geométricas.
- Aplicar as propriedades de semelhança de figuras na resolução de situações-problema.
- Aplicar os casos de semelhança de triângulos em situações-problema.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de reconhecer situações que envolvem semelhanças de polígonos para atribuir significado a propriedades envolvendo triângulos. Esses conteúdos servirão de suporte para estudos sobre relações métricas no triângulo retângulo e sobre seno e cosseno, que serão abordados no próximo capítulo e também no Ensino Médio e que vão aprimorar as estratégias de resolução de problemas que envolvem conhecimentos geométricos.

FIGURAS SEMELHANTES

- Pergunte aos estudantes o que imaginam quando ouvem a expressão "figuras semelhantes". Espera-se que eles a definam como figuras parecidas, que têm a mesma aparência.
- Explique que, em Matemática, podemos afirmar que duas figuras são semelhantes quando guardam proporção entre suas medidas. Observe as figuras das flores F e F', apresentadas a seguir. Note que as figuras das flores são muito parecidas, porém só poderemos afirmar que são semelhantes se conseguirmos apresentar uma proporção entre as medidas dessas figuras.



Flor F　　Flor F'

Tomando os pontos A e A', respectivamente, nos centros dos círculos e os pontos B e B' e C e C' na intersecção de duas pétalas das flores F e F', obteremos os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$. Medindo esses segmentos e determinando as razões $\frac{AB}{A'B'}$ e $\frac{AC}{A'C'}$, pode-se observar que essas razões constituem uma proporção, pois $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$. Se repetirmos cálculos semelhantes a esse para outros pontos das duas figuras, observaremos que eles serão sempre proporcionais. Assim, podemos afirmar que as figuras das flores F e F' são semelhantes.

Capítulo

2 SEMELHANÇA

Para o desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo, os estudantes precisam reconhecer os polígonos e suas características, ter noções de razão e de proporção e compreender o teorema de Tales e os conceitos de perímetro e área.

Figuras semelhantes

O *tsuru* é uma ave da família dos grous (cegonhas), nativa do Japão. É considerado símbolo da saúde, da boa sorte, da felicidade, da longevidade (acredita-se que um *tsuru* pode chegar a viver 1 000 anos) e da fortuna.

A tradição oriental em torno do pássaro também prega que, se uma pessoa construir mil *origamis* de *tsuru*, terá seus pedidos atendidos.

Origamis de *tsuru* podem ser feitos de diferentes tamanhos, mas todos terão o mesmo formato. Assim, podemos dizer que eles são **semelhantes**.

Duas ou mais figuras são semelhantes quando têm a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Isso significa que deve existir uma correspondência entre seus pontos, de modo que as figuras tenham dimensões correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

Os *origamis* de *tsuru* são confeccionados em diferentes tamanhos e cores.

FabrikaSimf/Shutterstock.com/ID/BR

98

OUTRAS FONTES

Friedlander, A.; Lappan, G. Semelhança: pesquisas nos níveis escolares médios. *In*: Lindquist, Mary M.; Shulte, A. P. (org.). *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994. p. 168-170.

Esse artigo aborda o conceito de semelhança geométrica por meio de atividades exploratórias informais.

Ampliação e redução de figuras

Observe as fotos a seguir.

Foto I

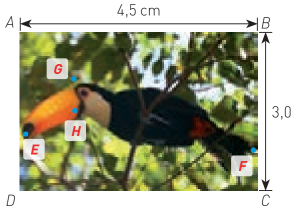
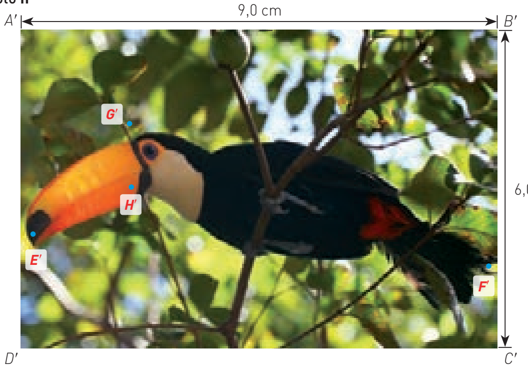


Foto II



Fotografias: Fabio Colombini/Acervo do fotógrafo

← O tucanuçu ou tucano-toco pesa entre 500 g e 860 g e mede entre 53 cm e 63 cm de comprimento.

Podemos dizer que a foto II é uma ampliação da foto I ou que a foto I é uma redução da foto II. Observe que tanto na ampliação como na redução as medidas dos ângulos correspondentes são iguais e que as medidas das dimensões (comprimento e largura) correspondentes são proporcionais. Não há deformação. Assim, dizemos que as duas fotos são semelhantes.

Em Matemática, a semelhança está ligada à ampliação, à redução ou à reprodução de figuras ou de objetos sem que sua forma se altere.

Agora, ainda observando as fotos, vamos verificar que a razão entre as medidas do comprimento ($\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$) e a razão entre as medidas da largura ($\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$) são iguais.

- $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{4{,}5}{9{,}0} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{3{,}0}{6{,}0} = \dfrac{1}{2}$

O número obtido é constante e é denominado **razão de semelhança**.

> A razão entre as medidas de dois segmentos correspondentes de figuras semelhantes é denominada razão de semelhança.

Um caso particular de semelhança é aquele em que a razão de semelhança é igual a 1. Esse tipo de semelhança recebe um nome especial: **congruência**.

Os estudantes devem obter como resposta $\frac{1}{2}$. Espera-se que eles percebam que, ao calcular as razões entre as medidas de um segmento qualquer da foto I e do segmento correspondente da foto II, verificamos que elas são iguais; com relação às fotos I e II, são iguais a $\frac{1}{2}$.

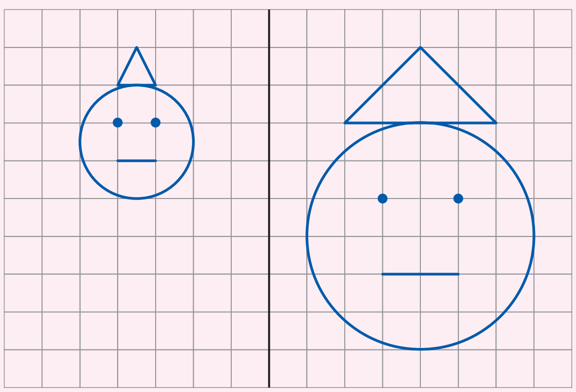
PARE E REFLITA

Considere as fotos I e II.

Calcule a razão entre as medidas dos segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{E'F'}$. Em seguida, calcule a razão entre as medidas dos segmentos $\overline{GH}$ e $\overline{G'H'}$. O que você pode observar?

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Verifique se estas figuras são semelhantes, justificando sua resposta.



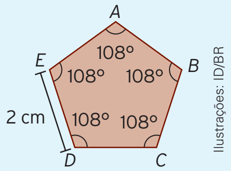
ID/BR

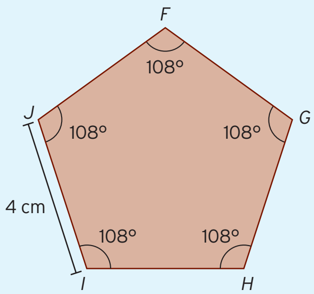
As figuras não são semelhantes, pois a razão entre as medidas dos raios das circunferências que formam os rostos das figuras é de 1 : 2, e a razão entre as medidas das bases dos chapéus das figuras é de 1 : 4.

- Informe aos estudantes que, pelo fato de os *origamis* de *tsuru* serem feitos à mão, eles podem ter pequenas diferenças entre si. Esclareça a eles que essa tradição milenar japonesa tem base em crenças que remetem à cultura e à vivência desse povo, assim como o ritual *tooro nagashi*, no qual as pessoas lançam lanternas feitas de papel no rio para homenagear os antepassados. Em razão disso, peça a eles que citem outras tradições de que se lembrem ou conheçam da própria região, da cultura africana ou da indígena, etc. Ressalte que as pessoas têm o direito de se expressar de acordo com sua cultura ou sua religião e por isso elas devem ser respeitadas. As atitudes de preconceito e de *bullying* contra alguém não devem ser toleradas em nossa sociedade. Essas reflexões ajudam a desenvolver os **Temas Contemporâneos Transversais** Diversidade Cultural e Educação em Direitos Humanos, que pertencem às macroáreas **Multiculturalismo** e **Cidadania e Civismo**.
- Se possível, trabalhe de maneira imersiva com um simulador de *origami* em 3-D usando um telefone celular ou a sala de informática, levando os estudantes a explorar diferentes imagens. Como sugestão, indicamos o simulador disponível em: https://origamisimulator.org/ (acesso em: 30 jun. 2022). Para acessar um modelo de *tsuru*, na parte superior do *site*, em inglês, clique em *Examples*; *Origami*; *Flapping Bird*. É possível manipular a dobradura ao deslizar o controle que indica a porcentagem de dobra até formar a figura escolhida e rotacioná-la.
- Verifique se os estudantes compreendem que a ampliação, a redução ou a reprodução de uma figura é a confecção de uma figura semelhante à original. Na ampliação, as medidas dos lados da imagem ampliada serão maiores quando comparadas às respectivas medidas da imagem original. Já na redução, as medidas dos comprimentos da imagem reduzida serão menores quando comparadas às respectivas medidas da figura original. Por fim, na reprodução, as medidas da imagem reproduzida serão do mesmo tamanho das medidas da imagem original.
- Associe a ideia de figuras semelhantes a ampliações ou reduções de uma fotografia, de modo que os estudantes percebam que as alterações realizadas na imagem mantêm a proporção entre as medidas correspondentes.
- Se julgar pertinente, comente com os estudantes que, na ampliação, a razão entre as medidas da figura ampliada e da figura original será maior que 1; na redução, essa razão será menor que 1; e, na reprodução, essa razão será igual a 1, o que chamamos de congruência.

SEMELHANÇA DE POLÍGONOS

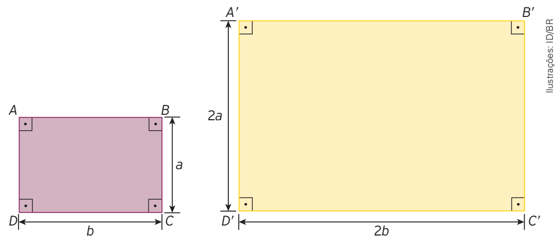
- Chame a atenção dos estudantes para o fato de que dois ou mais polígonos serão semelhantes se houver proporcionalidade entre as medidas de seus lados correspondentes e se os ângulos correspondentes forem congruentes.
- Vale observar que dois ou mais polígonos regulares, com o mesmo número de lados, sempre serão semelhantes. Por exemplo, na figura a seguir são dados dois pentágonos regulares, de tamanhos diferentes, ambos polígonos semelhantes.





Semelhança de polígonos

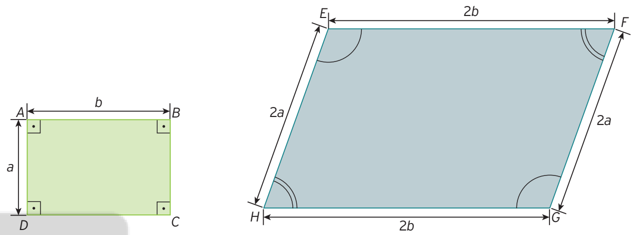
Observe os quadriláteros a seguir.



Eles são semelhantes?

Note que as medidas dos lados correspondentes dos quadriláteros são proporcionais e seus ângulos correspondentes são congruentes. Então, os quadriláteros são semelhantes.

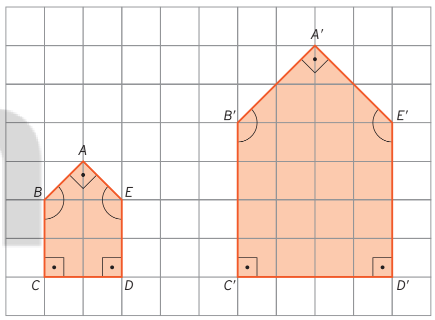
Agora, observe estes outros dois quadriláteros.



Note que as medidas dos lados correspondentes são proporcionais: a medida de cada lado do polígono *ABCD* é a metade da medida do lado correspondente do polígono *EFGH*. No entanto, os ângulos internos correspondentes não são congruentes. Assim, esses quadriláteros **não** são semelhantes.

Dois polígonos são semelhantes quando os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

Agora, observe os polígonos desenhados na malha quadriculada a seguir.



ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Para verificar se os estudantes compreenderam os requisitos necessários para classificar os polígonos como semelhantes, se julgar pertinente, faça a seguinte pergunta a eles: Dois retângulos sempre serão semelhantes? Peça a eles que justifiquem a resposta.

Resposta esperada: Não, pois, embora os ângulos dos retângulos sempre sejam congruentes, as medidas dos lados nem sempre serão proporcionais.

As medidas dos lados do polígono $A'B'C'D'E'$ são o dobro das medidas dos lados do polígono $ABCDE$. Observe, também, que os ângulos correspondentes são congruentes. Portanto, os dois polígonos são semelhantes.

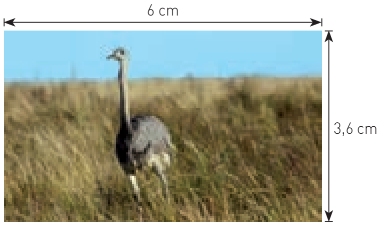
A razão de semelhança entre dois polígonos semelhantes é a razão entre as medidas de dois segmentos correspondentes quaisquer. Portanto, a razão de semelhança entre o polígono $ABCDE$ e o polígono $A'B'C'D'E'$ é $\frac{1}{2}$ e entre o polígono $A'B'C'D'E'$ e o $ABCDE$ é $\frac{2}{1}$.

2. A proporção da imagem não será preservada, pois $\frac{24}{15} = \frac{8}{5} \neq \frac{9}{6}$.

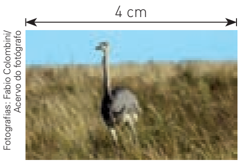
ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. As fotografias a seguir são figuras semelhantes. Observe-as e, depois, faça o que se pede.



Fotografia 1



Fotografia 2

↑ A ema pode medir até 2 metros de comprimento e ter massa igual a 36 quilogramas.

a) Determine a medida da altura da fotografia 2. **2,4 cm**

b) Se na fotografia 2 o pescoço da ema mede 1 cm, quanto ele mede na fotografia 1? **1,5 cm**

2. Um porta-retratos de 24 cm por 15 cm vai ser usado para colocar uma foto de 9 cm por 6 cm que será ampliada para ter as medidas dele.

Nesse caso, será possível preservar a imagem com todas as proporções? Explique.

3. Converse com um colega sobre as questões a seguir e registre suas conclusões no caderno.

a) Duas esferas são sempre semelhantes? **Sim.**

b) Dois quadrados são sempre semelhantes? **Sim.**

c) Dois retângulos são sempre semelhantes? **Não.**

4. Com um colega, dê um exemplo de dois quadriláteros não semelhantes cujos lados sejam proporcionais. **Resposta possível: um quadrado e um losango.**

5. Com um colega, dê um exemplo de dois quadriláteros não semelhantes cujos ângulos correspondentes sejam congruentes. **Resposta possível: um quadrado e um retângulo.**

6. Responda às questões a seguir, justificando suas respostas. **Consulte as respostas neste manual.**

a) Dois losangos são sempre semelhantes?

b) Dados dois polígonos em que todos os ângulos internos de um são congruentes aos ângulos internos correspondentes do outro, é possível afirmar que eles são semelhantes?

c) Dois polígonos regulares com mesma quantidade de lados são sempre semelhantes?

d) Um quadrilátero tem lados com medidas 2 cm, 2,5 cm, 3 cm e 2 cm. Outro quadrilátero tem lados com medidas 6 cm, 7,5 cm, 9 cm e 6 cm. Esses quadriláteros são semelhantes?

7. Polígonos regulares são sempre semelhantes? Por quê? **Não. Polígonos regulares são semelhantes se tiverem a mesma quantidade de lados.**

- Na atividade **2**, os estudantes devem perceber que, para que seja possível realizar a ampliação, é necessário que a razão entre as dimensões da foto seja igual à razão entre as dimensões do porta-retratos.

RESPOSTAS

6. Respostas possíveis:

a) Não, pois nem sempre os ângulos de dois losangos são congruentes.

b) Não, pois, mesmo que os ângulos correspondentes desses polígonos sejam congruentes, os lados correspondentes desses polígonos podem não ter a mesma razão. Um exemplo seria comparar um retângulo com um quadrado.

c) Sim, pois, se os polígonos são regulares com a mesma quantidade de lados, então seus ângulos internos são congruentes, independentemente da medida de seus lados. Além disso, os polígonos regulares têm todos os lados com a mesma medida e, assim, os lados correspondentes dos dois polígonos terão a mesma razão.

d) Não é possível afirmar, pois, embora as medidas dos lados correspondentes sejam proporcionais, não podemos afirmar que os ângulos correspondentes são congruentes.

SEMELHANÇA APLICADA A TRIÂNGULOS

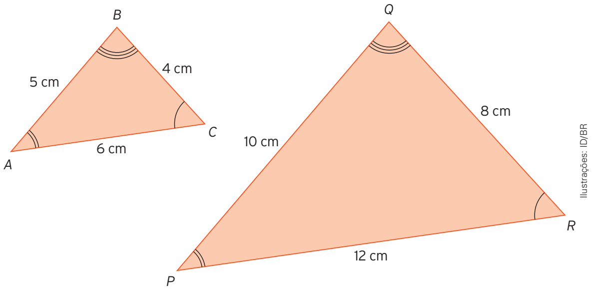
- Comente com os estudantes que, como os triângulos são polígonos, valem as mesmas condições vistas anteriormente para que dois triângulos sejam semelhantes: a medida dos lados de um deles deve ser proporcional à medida dos lados correspondentes do outro e os ângulos desses triângulos devem ser congruentes.

  No entanto, para verificar se dois triângulos são semelhantes, não é necessário conhecer as medidas de todos os seus elementos, pois a semelhança de triângulos tem algumas particularidades, que serão tratadas nos casos de semelhança de triângulos.
- Aproveite para retomar o teorema de Tales aplicado ao triângulo, pois uma reta paralela a um dos lados de um triângulo, que corta os outros lados em pontos distintos, além de determinar segmentos proporcionais nesses lados, também determina um triângulo semelhante a ele, como enuncia o teorema fundamental da semelhança de triângulos.
- Observe se os estudantes não confundem os casos de semelhança de triângulos com os de congruência de triângulos. Explique a eles que dois triângulos são congruentes quando seus lados correspondentes têm as mesmas medidas e seus ângulos correspondentes são congruentes. Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos correspondentes são congruentes, e as medidas de seus lados correspondentes são proporcionais.

  Se necessário, explique aos estudantes que, se dois triângulos são congruentes, eles também são semelhantes, com razão de semelhança igual a 1, mas nem sempre dois triângulos semelhantes são congruentes.

Semelhança aplicada a triângulos

Considere os triângulos *ABC* e *PQR* mostrados a seguir.



Observe que:

- $\hat{A} \cong \hat{P}$, $\hat{B} \cong \hat{Q}$ e $\hat{C} \cong \hat{R}$, pois os ângulos correspondentes são congruentes;
- $\frac{AB}{PQ} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\frac{AC}{PR} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ e $\frac{BC}{QR} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

  Portanto, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$, e a razão entre as medidas dos lados correspondentes é $\frac{1}{2}$.

Podemos concluir que os triângulos *ABC* e *PQR* são semelhantes. Indicamos por:

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

(lê-se: "o triângulo *ABC* é semelhante ao triângulo *PQR*")

Como os triângulos são polígonos, temos:

> Dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

OBSERVAÇÃO

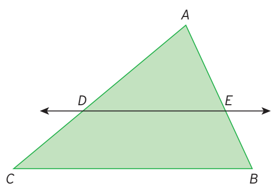
Se dois triângulos são semelhantes e a razão de semelhança é igual a k, então:

- a razão entre as medidas de duas alturas correspondentes é igual a k;
- a razão entre as medidas de duas medianas correspondentes é igual a k;
- a razão entre as medidas de duas bissetrizes correspondentes é igual a k;
- a razão entre as medidas de seus perímetros é igual a k;
- a razão entre as medidas de suas áreas é igual a k^2.

Teorema fundamental da semelhança de triângulos

> Toda reta paralela a um lado de um triângulo, que cruza os outros dois lados (ou seus prolongamentos) em dois pontos distintos, determina um triângulo semelhante a ele.

Observe a figura a seguir.

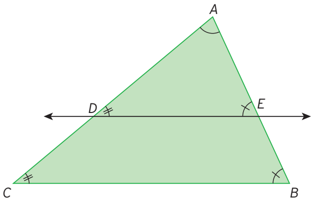


Se $\overline{DE} \,//\, \overline{CB}$, então $\triangle ACB \sim \triangle ADE$.

Demonstração

Vamos demonstrar que os triângulos *ADE* e *ACB* são semelhantes. Para isso, precisamos provar que os ângulos correspondentes são congruentes e que as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

Vamos começar pelos ângulos correspondentes.



Ilustrações: ID/BR

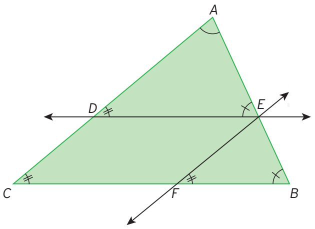
De acordo com a figura, temos:

- $D\hat{A}E \cong C\hat{A}B$, pois são ângulos comuns aos dois triângulos;
- $A\hat{E}D \cong A\hat{B}C$, pois são ângulos correspondentes em retas paralelas ($\overline{DE} \,//\, \overline{CB}$);
- $A\hat{D}E \cong A\hat{C}B$, pois são ângulos correspondentes em retas paralelas ($\overline{DE} \,//\, \overline{CB}$).

Portanto, os triângulos *ADE* e *ACB* têm ângulos correspondentes congruentes.

Agora, vamos verificar se os lados correspondentes são proporcionais, ou seja, se $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{CB}$.

Para isso, traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ que passa por *E* e intersecta o lado $\overline{BC}$ em *F*. Veja na figura a seguir.



Com isso, temos:

- $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ e $\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CB}$, pelo teorema de Tales;
- $CF = DE$, pois são lados opostos do paralelogramo *DEFC*.

Logo, $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{CB}$.

Portanto, os triângulos *ADE* e *ACB* têm as medidas dos lados correspondentes proporcionais.

Então, como os ângulos correspondentes dos dois triângulos são congruentes e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais, concluímos que os triângulos *ADE* e *ACB* são semelhantes.

- Se julgar oportuno, antes de apresentar a demonstração aos estudantes, peça a eles que façam a verificação do teorema fundamental da semelhança de triângulos. Para isso, segue sugestão de uma atividade prática. Para realizar essa atividade, será necessário que cada estudante tenha uma folha de papel avulsa, lápis, régua e esquadro.

  Peça aps estudantes que sigam estas orientações:

  I. Na folha de papel avulsa, construam três retas paralelas, denominando-as *r*, *s* e *t*, nessa ordem.

  II. Marquem dois pontos não coincidentes sobre a reta *r*, denominando-os *B* e *C*.

  III. Marquem um ponto sobre a reta *t*, denominando-o *A*.

  IV. Tracem o triângulo *ABC*.

  V. Denominem *M* e *N* os pontos de intersecção dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ com a reta *s*.

  VI. Registrem as medidas dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ do triângulo *ABC*.

  VII. Anotem as medidas dos lados $\overline{AM}$, $\overline{MN}$ e $\overline{AN}$ do triângulo *AMN*.

  VIII. Verifiquem a proporcionalidade entre a medida dos lados dos dois triângulos, determinando a razão *k*:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{AN} = k$$

RESPOSTAS

11. a) Resposta possível: Como $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos, temos que os triângulos *FAB* e *FCD* são semelhantes.

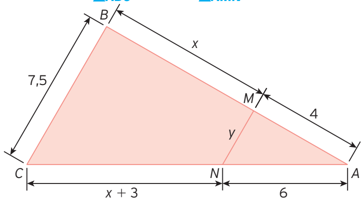
b) A medida do perímetro do trapézio *ABDC* é igual a 152 cm.

ATIVIDADES

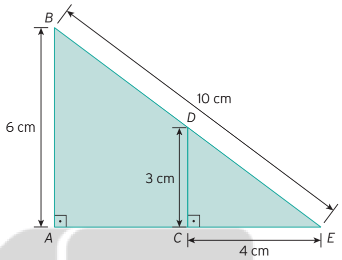
Responda sempre no caderno.

8. No caderno, desenhe um par de triângulos semelhantes e um par de triângulos que não sejam semelhantes. **Resposta pessoal.**

9. Na figura a seguir, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$. Determine a medida do perímetro dos triângulos *ABC* e *AMN*. $P_{\triangle ABC} = 32{,}5$; $P_{\triangle AMN} = 13$



10. Na figura a seguir, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



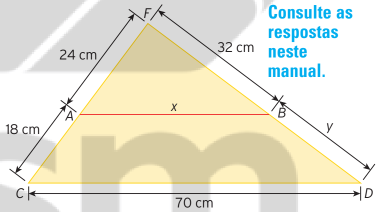
a) Determine a razão de semelhança entre os triângulos *ABE* e *CDE*. **2**

b) Quais são as medidas dos lados do triângulo *EDC*? **3 cm, 4 cm e 5 cm.**

c) Qual é a medida do perímetro do triângulo *ABE*? **24 cm**

11. No triângulo a seguir, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

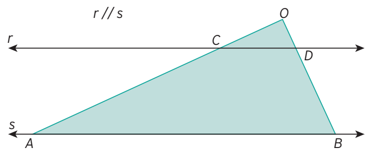
Consulte as respostas neste manual.



a) Justifique a semelhança que existe entre os triângulos da figura.

b) Qual é a medida do perímetro do trapézio *ABDC*?

12. Na figura a seguir, os triângulos *OAB* e *OCD* são semelhantes. Sabendo que $OA = 5{,}2$ cm, $OC = 1{,}3$ cm e $OD = 0{,}6$ cm, faça o que se pede.



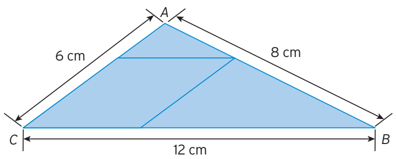
Ilustrações: ID/BR

a) Calcule a razão de semelhança entre os triângulos *OCD* e *OAB*. $\frac{1}{4}$

b) Calcule a medida do segmento $\overline{OB}$. **2,4 cm**

c) Sabendo que a medida da área do triângulo *OCD* é 0,25 cm^2, determine a medida da área do triângulo *OAB*. **4 cm^2**

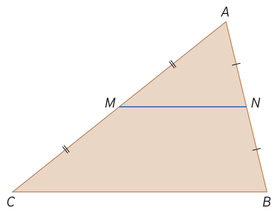
13. Na figura a seguir, há um losango "encaixado" em um triângulo.



Determine a medida do lado desse losango, sabendo que $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm e $AC = 6$ cm. **4 cm**

14. A razão de semelhança entre dois triângulos é $\frac{1}{2}$. Determine as medidas dos lados do triângulo maior, sabendo que as medidas dos lados do triângulo menor são 10 cm, 12 cm e 15 cm. **20 cm, 24 cm e 30 cm.**

15. A medida da área do triângulo *ABC* da figura a seguir é 100 cm^2.



Qual é a medida da área da região *MNBC*? **75 cm^2**

104

Casos de semelhança de triângulos

Sabemos que dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

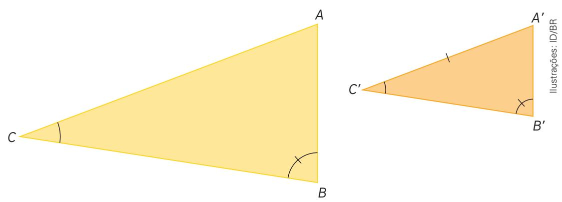
No entanto, podemos descobrir se dois triângulos são semelhantes pelos casos de semelhança entre triângulos, apresentados a seguir.

Caso ângulo-ângulo (AA)

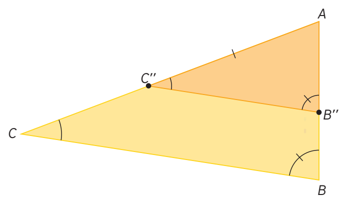
Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos correspondentes de outro triângulo, então esses triângulos são semelhantes.

Demonstração

Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$, em que os ângulos $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$ e $C \cong \widehat{C'}$.



Supondo que $AC > A'C'$, marcamos o ponto C'' no segmento $\overline{AC}$, tal que $\overline{AC''} \cong \overline{A'C'}$. Então, traçamos por C'' a paralela ao segmento $\overline{BC}$, que corta o segmento $\overline{AB}$ em B'', como mostra a figura a seguir.



Assim, temos:

- $\widehat{C''} \cong \widehat{C}$ e $\widehat{B''} \cong \widehat{B}$, pois são ângulos correspondentes em retas paralelas ($\overline{C''B''} \, // \, \overline{CB}$);
- $\overline{A'C'} \cong \overline{AC''}$ por construção;
- como $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$ e $\widehat{B} \cong \widehat{B''}$, então $\widehat{B'} \cong \widehat{B''}$;
- como $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{C''}$, então $\widehat{C'} \cong \widehat{C''}$.

Pelo caso LAA_o, temos $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C''$.

Agora, pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos, temos $\triangle AB''C'' \sim \triangle ABC$.

Como $\triangle A'B'C' \cong \triangle AB''C''$ e $\triangle AB''C'' \sim \triangle ABC$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

CASOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

- Se julgar oportuno, solicite antecipadamente aos estudantes que tragam para a sala de aula régua e transferidor para realizar uma atividade prática para verificar o caso de semelhança ângulo-ângulo (AA).

  Peça a eles que construam dois triângulos de medidas de lados diferentes e que cada um dos triângulos tenha dois ângulos com medidas iguais a 45° e 90°.

  Em seguida, com o auxílio do transferidor, solicite a eles que meçam o outro ângulo de cada um dos triângulos. Eles deverão obter 45° como medida dos outros ângulos.

  Depois, peça que comparem as medidas dos lados correspondentes dos dois triângulos e verifiquem se elas são proporcionais.

  Com essa atividade, espera-se que os estudantes assimilem esse caso de semelhança.

DE OLHO NA BASE

O conteúdo trabalhado nesta e nas próximas páginas possibilita aos estudantes reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes, contribuindo, assim, para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA12**.

- Avalie a possibilidade de realizar uma atividade prática para que os estudantes verifiquem o caso de semelhança lado-ângulo-lado (LAL).

Proponha aos estudantes que construam em uma folha de papel avulsa um triângulo com um ângulo de 60° formado por dois lados cujas medidas sejam múltiplas de 2 e 3; por exemplo, um triângulo cujos lados formem um ângulo de 60° com medidas 4 e 6.

Em seguida, oriente-os a medir, com o auxílio de um transferidor e de uma régua, os outros dois ângulos e o outro lado do triângulo e a anotar as medidas no caderno.

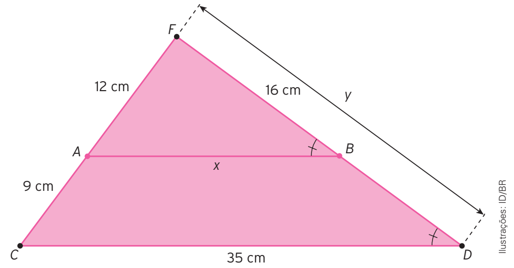
Solicite-lhes, então, que troquem os triângulos confeccionados com um colega e meçam os lados e os ângulos com o auxílio de um transferidor e de uma régua.

Por fim, eles deverão comparar as medidas dos lados correspondentes dos dois triângulos e verificar se elas são proporcionais.

Com essa atividade, espera-se que os estudantes assimilem o conceito de que um triângulo é semelhante a outro desde que ambos tenham um ângulo congruente e que os lados que formam esse ângulo tenham medidas proporcionais.

Exemplo

Vamos calcular o valor de x e de y nos triângulos a seguir, sabendo que $\overline{AB} // \overline{CD}$.



Nesses triângulos, temos:

- $\widehat{F}$ é ângulo comum aos triângulos FAB e FCD;
- $\widehat{B} \cong \widehat{D}$, pois são ângulos correspondentes.

Portanto, $\triangle FAB \sim \triangle FCD$ pelo caso AA.

Assim, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{FA}{FC} \Rightarrow \frac{x}{35} = \frac{12}{12+9} \Rightarrow \frac{x}{35} = \frac{12}{21} \Rightarrow 21 \cdot x = 12 \cdot 35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{420}{21} \Rightarrow x = 20$$

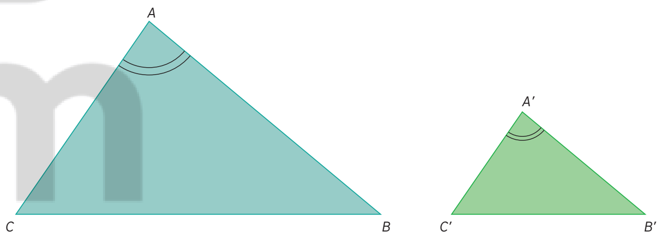
$$\frac{AB}{CD} = \frac{FB}{FD} \Rightarrow \frac{20}{35} = \frac{16}{y} \Rightarrow 20 \cdot y = 35 \cdot 16 \Rightarrow y = \frac{560}{20} \Rightarrow y = 28$$

Caso lado-ângulo-lado (LAL)

Se as medidas de dois lados de um triângulo são proporcionais às medidas de dois lados correspondentes de outro triângulo e os ângulos formados por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

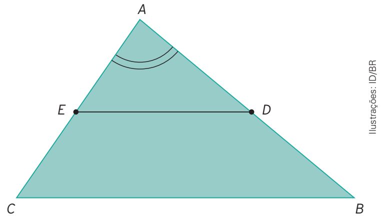
Demonstração

Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$, em que $\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$ e $\widehat{A} \cong \widehat{A}'$.



Vamos supor que $AC > A'C'$.

No triângulo ABC, construímos o segmento $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, de modo que o ponto D pertença ao segmento $\overline{AB}$ e o ponto E pertença ao segmento $\overline{AC}$, tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Veja a figura a seguir.



Pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$; então, podemos escrever que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

Além disso, temos:

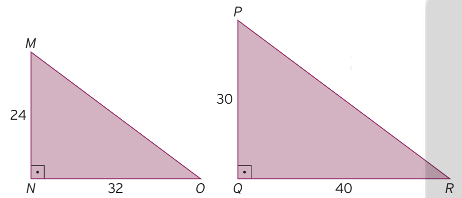
- $B\hat{A}C \cong D\hat{A}E$;
- $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ por construção;
- como $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ e $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, temos $\frac{A'B'}{AB} = \frac{AE}{AC}$;
- comparando $\frac{A'B'}{AB} = \frac{AE}{AC}$ com $\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$, temos $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.

Portanto, pelo caso lado-ângulo-lado (LAL) de congruência de triângulos, temos $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

Como $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Exemplo

Observe os triângulos a seguir.



Vamos verificar se os triângulos MNO e PQR são semelhantes.

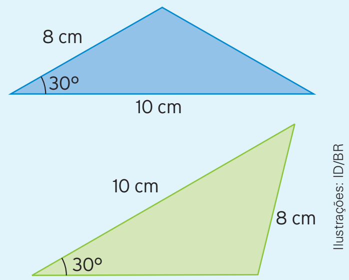
Então, temos:

- $\hat{N} \cong \hat{Q}$;
- $\frac{MN}{PQ} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$;
- $\frac{NO}{QR} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$.

Logo, $\frac{MN}{PQ} = \frac{NO}{QR}$.

Portanto, os triângulos MNO e PQR são semelhantes pelo caso LAL.

- Verifique se os estudantes compreenderam o exemplo. Caso julgue pertinente, apresente-lhes outros exemplos.
- Em geral, alguns estudantes se confundem e acabam deduzindo que dois triângulos que têm dois lados proporcionais e algum par de ângulos congruentes são semelhantes. Para sanar a confusão, se julgar oportuno, proponha uma atividade em que eles devem identificar os triângulos semelhantes, incluindo um par de triângulos nos quais um dos ângulos congruentes de um dos triângulos não seja o ângulo formado pelos lados proporcionais, como é apresentado nas figuras a seguir.



107

- Para verificar o caso de semelhança lado-lado-lado (LLL), peça aos estudantes que construam triângulos proporcionais nas seguintes medidas: 4 cm, 6 cm e 8 cm. Ao final da atividade, solicite que meçam, com o auxílio de um transferidor, os ângulos internos dos triângulos construídos e, depois, comparem os resultados com os obtidos pelos colegas.

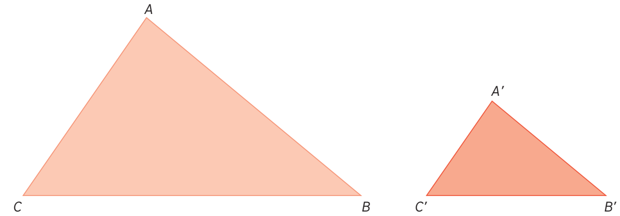
  Espera-se que todos obtenham as mesmas medidas para os ângulos correspondentes; contudo, por ser uma atividade prática, ressalte que, caso as medidas dos ângulos obtidas por eles não sejam exatamente iguais, isso pode ser devido a alguma diferença na maneira de construir o triângulo ou à imprecisão no modo de medir utilizando o transferidor.

Lado-lado-lado (LLL)

Se as medidas dos três lados de um triângulo são proporcionais às medidas dos três lados correspondentes de outro triângulo, então esses triângulos são semelhantes.

Demonstração

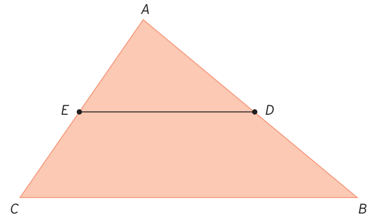
Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$, em que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.



Ilustrações: ID/BR

Vamos supor que $AB > A'B'$.

No triângulo ABC, construímos o segmento $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$, de modo que o ponto D pertença ao segmento $\overline{AB}$ e o ponto E pertença ao segmento $\overline{AC}$, tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Veja a figura a seguir.



Pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos, temos $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Além disso, $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ por construção.

Como $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (pois $\triangle ABC \sim \triangle ADE$) e $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, temos $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AE}$.

Comparando $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AE}$ com $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, temos $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$.

Como $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$ (pois $\triangle ABC \sim \triangle ADE$) e $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, temos $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{DE}$.

Comparando $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{DE}$ com $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$, temos $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$.

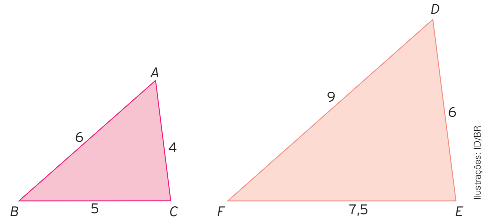
Logo, $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$ e $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$.

Então, pelo caso lado-lado-lado (LLL) de congruência de triângulos, temos $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.

Como $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Exemplo

Observe os triângulos a seguir.



Vamos verificar se os triângulos *ABC* e *DFE* são semelhantes. Então, temos:

- $\dfrac{AB}{DF} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$
- $\dfrac{AC}{DE} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$
- $\dfrac{BC}{FE} = \dfrac{5}{7{,}5} = \dfrac{2}{3}$

Logo, $\dfrac{AB}{DF} = \dfrac{AC}{DE} = \dfrac{BC}{FE} = \dfrac{2}{3}$.

Portanto, os triângulos *ABC* e *DFE* são semelhantes pelo caso LLL.

PARA EXPLORAR

***Semelhança*, de Luiz Márcio Imenes, José Jakubo e Marcelo Lellis. São Paulo: Atual, 2005 (Coleção Pra Que Serve Matemática?).**

Nesse livro, o conceito da semelhança é trabalhado por meio de recursos visuais, partes da história da Matemática, quebra-cabeças e charadas, tornando esse conhecimento agradável e interessante.

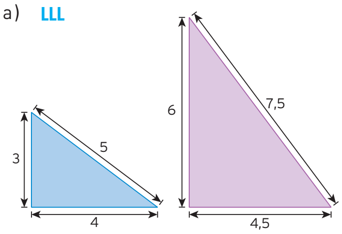
ATIVIDADES

17. Os triângulos *ABD* e *CBA* são semelhantes, pois os ângulos $A\hat{D}B$ e $C\hat{A}B$ são congruentes e $A\hat{B}C$ é ângulo comum.

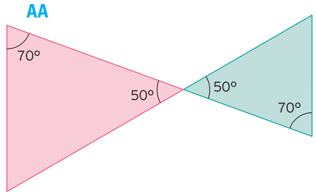
Responda sempre no caderno.

16. Em cada item a seguir, os triângulos são semelhantes. Identifique o caso de semelhança em cada par de triângulos.

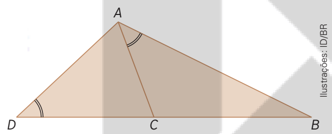
a) **LLL**



b) **AA**



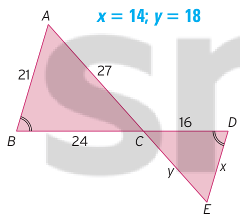
17. Na figura a seguir, é possível identificar três triângulos, nos quais marcas iguais indicam ângulos congruentes.



Quais são os triângulos semelhantes nessa figura? Justifique sua resposta.

18. Calcule o valor de *x* e de *y*.

$x = 14$; $y = 18$



- Na atividade **16**, espera-se que os estudantes possam reconhecer os casos de semelhança dos triângulos apresentados nos itens **a** e **b**.

  No item **a**, por estarem representadas as três medidas dos lados de cada um dos triângulos, os estudantes devem encontrar os lados correspondentes e verificar se eles estão na mesma razão. Assim, eles concluirão que se trata do caso de semelhança lado-lado-lado (LLL).

  No item **b**, os triângulos apresentados têm dois ângulos congruentes; portanto, essa informação é suficiente para que os estudantes concluam que se trata do caso de semelhança ângulo-ângulo (AA).
- A atividade **17** apresenta uma figura, na qual é possível identificar três triângulos: *ABD*, *CBA* e *ACD*. Caso os estudantes tenham dificuldades de determinar quais desses triângulos são semelhantes, sugira que desenhem cada um deles em separado, nomeando cada um dos lados e ângulos, atentando para utilizar o mesmo nome quando se tratar de um mesmo lado ou ângulo.
- Na atividade **18**, os estudantes deverão reconhecer os lados correspondentes e, em seguida, determinar a razão de proporção entre as medida deles, para obter os valores de *x* e de *y*.

DE OLHO NA BASE

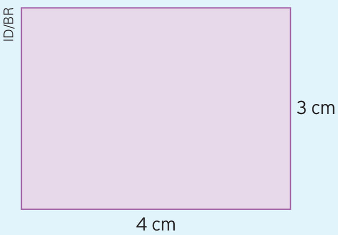
Nas atividades desta página, os estudantes devem reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA12**.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- As atividades apresentadas nessa seção destacam os conteúdos trabalhados no capítulo. Aproveite este momento para avaliar o aprendizado e o desenvolvimento dos estudantes em relação aos objetivos propostos neste capítulo.
- A atividade **1** propõe aos estudantes que, com base em construções de retângulos semelhantes, observem que a razão de semelhança das medidas de seus perímetros será a mesma da medida de seus lados. No item **e**, se julgar conveniente, repita a experiência com outros polígonos semelhantes, mas é importante enfatizar que essa relação sempre é válida, observando que medidas de lados e de perímetros são calculadas com as unidades de medida de comprimento e que, no caso, mantêm a razão 1 : 3.
- A atividade **4** trabalha com a razão entre as medidas das áreas de dois quadrados, sendo que um deles tem a medida do lado igual ao dobro da medida do lado do outro.
- Na atividade **8**, verifique se os estudantes percebem que as diagonais do trapézio determinam dois triângulos semelhantes, pois os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ do trapézio são paralelos; assim, a razão das medidas das bases desses triângulos é a mesma da razão entre as medidas das alturas desses triângulos.

RESPOSTAS

1. a) Resposta possível:



b) Respostas possíveis: desenho de um retângulo cujos lados medem 12 cm por 9 cm ou de um retângulo cujos lados medem $1,\overline{3}$ cm por 1 cm.

c) $\frac{14}{42} = \frac{1}{3}$

d) Comparando as razões entre as medidas dos lados e a do perímetro dos dois retângulos, observa-se que elas são iguais.

e) Resposta pessoal.

DIVERSIFICANDO

Consulte as respostas neste manual.

1. No caderno, faça o que se pede.

a) Desenhe um retângulo cujas medidas dos lados sejam 4 cm e 3 cm.

b) Desenhe um retângulo semelhante ao do item **a**, de modo que a razão de semelhança entre ele e o do item **a** seja $\frac{1}{3}$.

c) Qual é a razão entre a medida do perímetro do retângulo desenhado no item **b** e a medida do perímetro do retângulo desenhado no item **a**?

d) Qual é a relação entre a razão de semelhança entre esses retângulos e a razão entre as medidas dos perímetros desses retângulos?

e) Você acha que essa relação é válida para todos os polígonos semelhantes? Converse com um colega.

2. Trace a diagonal dos dois retângulos desenhados na atividade **1**. Sem efetuar medições com a régua, escreva qual é a razão entre a medida da diagonal do retângulo desenhado no item **b** e a medida da diagonal do retângulo desenhado no item **a**. **A razão é $\frac{1}{3}$.**

3. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras. Corrija as afirmações falsas, se houver.

a) Dois retângulos são sempre semelhantes.

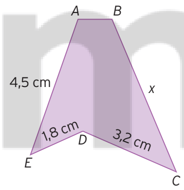
b) Se a medida de um lado de um pentágono regular for o dobro da medida de um lado de outro pentágono regular, então os dois pentágonos serão semelhantes.

c) Dois polígonos são semelhantes quando as medidas de seus lados correspondentes são proporcionais.

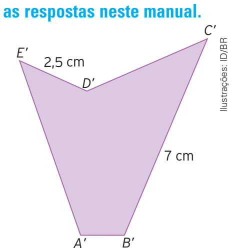
d) Se dois polígonos são semelhantes, então as medidas de seus lados correspondentes são proporcionais.

4. Se duplicarmos todas as medidas dos lados de um quadrado, sua área também se duplicará? Explique. **Consulte a resposta neste manual.**

5. Os polígonos representados a seguir são semelhantes.



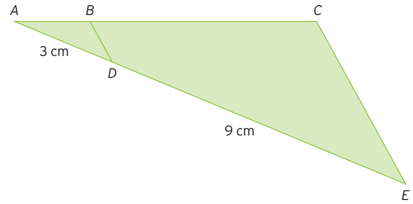
3. Consulte as respostas neste manual.



a) Qual é a razão de semelhança entre o polígono *ABCDE* e o *A'B'C'D'E'*? **0,72**

b) Calcule o valor de *x*. **5,04 cm**

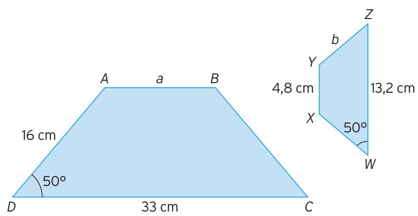
6. Na figura a seguir, a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ é igual à razão entre $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$.



a) Sabendo que AC = 18 cm, qual é a medida do segmento $\overline{AB}$? **4,5 cm**

b) Meça com um transferidor os ângulos $A\hat{D}B$ e $A\hat{E}C$. O que se pode afirmar sobre os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$? **Os segmentos são paralelos.**

7. Os trapézios isósceles *ABCD* e *XYZW* são semelhantes.



a) Qual é a razão de semelhança entre esses trapézios? $\frac{5}{2}$

b) Qual é a medida do ângulo $\hat{B}$, em grau? **130°**

c) Quanto mede *a*, em centímetro? E *b*? **a = 12 cm; b = 6,4 cm**

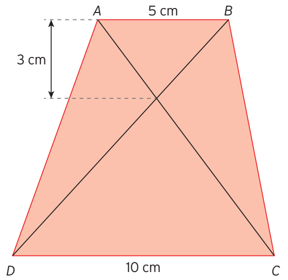
d) Qual é a razão entre as medidas dos perímetros desses trapézios? $\frac{5}{2}$

ESTRATÉGIAS DE APOIO

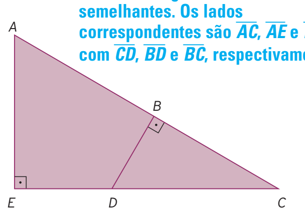
Para que o estudo dos casos de semelhança de triângulos seja significativo e não apenas decorado, proponha aos estudantes que, sempre que possível, tentem resolver as atividades com o uso do teorema fundamental da semelhança de triângulos, pois, assim, eles conseguirão enxergar essa parte da Geometria de maneira mais ampla. Nos triângulos, esse teorema também pode ser percebido como uma aplicação do teorema de Tales. Vale ressaltar, no entanto, que algumas atividades exigirão que eles reconheçam se dois triângulos são semelhantes e identifiquem qual é o caso de semelhança. Por isso, eles devem realizar as atividades de modo que esse reconhecimento aconteça de maneira natural.

Responda sempre no caderno.

8. Calcule a medida da área do trapézio *ABCD* mostrado a seguir. **67,5 cm²**

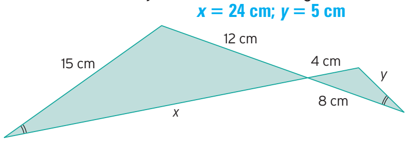


9. Na figura a seguir, é possível identificar dois triângulos. **Sim, os triângulos são semelhantes. Os lados correspondentes são $\overline{AC}$, $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$ com $\overline{CD}$, $\overline{BD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.**

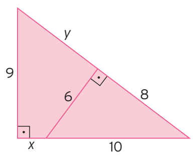


Eles são semelhantes? Caso sejam, identifique os lados correspondentes.

10. Determine *x* e *y* indicados nesta figura. **$x = 24$ cm; $y = 5$ cm**



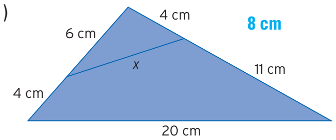
11. Nesta figura, estão identificadas algumas medidas, em centímetro.



Calcule o valor das medidas indicadas por *x* e *y*. **$x = 2$ cm; $y = 7$ cm**

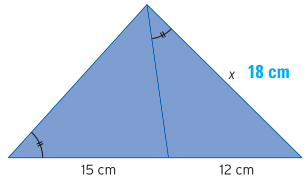
12. Calcule o valor de *x* representado em cada figura a seguir.

a) **8 cm**

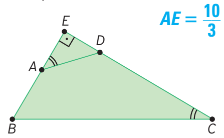


Ilustrações: ID/BR

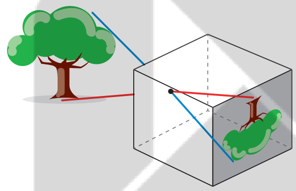
b) **18 cm**



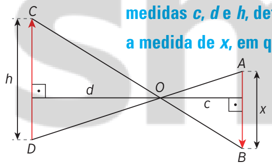
13. Calcule a medida de $\overline{AE}$, sabendo que $BE = 4{,}8$ cm, $CE = 8$ cm e $DE = 2$ cm. **$AE = \frac{10}{3}$ cm**



14. Uma antiga técnica de fotografia consiste em colocar um papel fotográfico no fundo de uma caixa escura com um orifício. A luz entra pelo orifício e a cena é mostrada no papel fotográfico. Veja.



Explique como é possível calcular a medida do comprimento *x* da imagem obtida nessa caixa escura conhecendo apenas as medidas indicadas a seguir. **Os triângulos *OAB* e *OCD* são semelhantes. Conhecendo as medidas *c*, *d* e *h*, determina-se a medida de *x*, em que $x = \frac{ch}{d}$.**



RESPOSTAS

3. a) A afirmação é falsa. Dois retângulos são semelhantes se e somente se a medida de seus lados correspondentes forem proporcionais.

b) A afirmação é verdadeira. Como os pentágonos são regulares, todos os seus ângulos são congruentes. Além disso, se a razão entre as medidas de seus lados for 2, então as medidas dos lados correspondentes desses pentágonos são proporcionais.

c) A afirmação é falsa. Dois polígonos são semelhantes se a medida de seus lados correspondentes forem proporcionais e se os ângulos correspondentes forem congruentes.

d) A afirmação é verdadeira. Se os polígonos são semelhantes, então as medidas de seus lados correspondentes precisam ser proporcionais.

4. Caso seja duplicada a medida do lado do quadrado, sua área não será duplicada.

Explicação possível: Sendo *x* a medida do lado do quadrado inicial, então a medida de cada lado do quadrado obtido será igual a 2*x*. Calculando a medida da área desses quadrados, temos:

Quadrado inicial: $x \cdot x = x^2$

Quadrado obtido: $2x \cdot 2x = 4x^2$

Portanto, a medida da área do quadrado inicial será quadruplicada.

CAPÍTULO 3

Conteúdos

- Elementos do triângulo retângulo.
- Medidas no triângulo retângulo.
- Relações métricas no triângulo retângulo.
- Teorema de Pitágoras e suas aplicações.

Objetivos

- Reconhecer um triângulo retângulo, identificar seus elementos e suas medidas.
- Determinar as relações métricas entre triângulos retângulos a partir da semelhança entre eles.
- Aplicar as relações métricas no triângulo retângulo para resolver situações-problema.
- Compreender e aplicar o teorema de Pitágoras para resolver situações-problema.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de avançar no estudo de semelhança de polígonos para que compreendam as relações métricas no triângulo retângulo, aplicando essas relações em outras figuras geométricas, planas ou não planas. As tarefas propostas vão dar suporte e aprimorar o pensamento lógico-dedutivo dos estudantes no campo da Geometria, propiciando melhor compreensão da análise de elementos da natureza e de diferentes produções humanas.

TRIÂNGULO RETÂNGULO

- Explore com os estudantes a imagem da ponte suspensa e peça a eles que identifiquem nela os triângulos retângulos.
- Verifique se os estudantes reconhecem o ângulo reto nos triângulos retângulos.
- Se julgar necessário, retome alguns conceitos que serão importantes para o aprendizado dos conteúdos deste capítulo, como operações com números irracionais, resolução de equações, área, perímetro, ângulos e semelhança de triângulos.

Capítulo

3 TRIÂNGULO RETÂNGULO

Para o desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo, os estudantes devem ter compreendido os conceitos de área, perímetro, ângulo, razão e número irracional. Além disso, é necessário saber resolver equações do 1º grau e equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ e simplificar radicais.

Triângulo retângulo

É interessante observar que os triângulos estão presentes na maioria das estruturas de edificações, em particular os triângulos retângulos. Você sabe explicar por que isso ocorre?

Para entender esse fato, é necessário conhecer as características que tornam o triângulo retângulo tão especial.

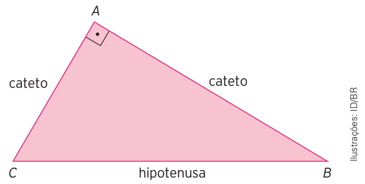
O triângulo retângulo apresenta características únicas que permitem associar de maneira simples as medidas de seus lados com os ângulos que o formam. Ele é conhecido e estudado pelos matemáticos desde a época do sábio grego Pitágoras, que viveu no século VI a.C.

Ponte suspensa localizada na província de Hunan, na China. Foto de 2020.

SCOBJ-JZ/iStock/Getty Images

Elementos do triângulo retângulo

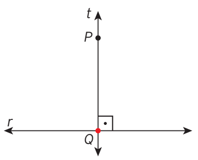
O triângulo *ABC* mostrado a seguir é um triângulo retângulo, pois tem um ângulo reto.



Em um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa**. Os lados perpendiculares entre si (que formam o ângulo reto) são chamados de **catetos**.

Antes de prosseguir com o estudo do triângulo retângulo, vamos ver alguns conceitos sobre projeções ortogonais para entender os termos que serão usados.

Para estudar a projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta, vamos considerar uma reta *r* e um ponto *P* fora de *r*. Construímos por *P* a reta *t*, perpendicular a *r*. Veja.



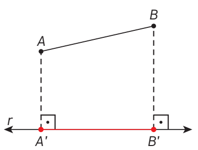
No cruzamento das retas *r* e *t*, obtemos o ponto *Q*. Dizemos que o ponto *Q* é a projeção ortogonal de *P* sobre a reta *r*.

Caso o ponto *P* pertença à reta, a projeção de *P* sobre a reta é o próprio ponto *P*.

Para fazer a projeção ortogonal de um segmento sobre uma reta, é preciso projetar ortogonalmente todos os pontos do segmento sobre a reta. De forma prática, basta projetar suas extremidades e determinar o segmento sobre a reta.

Observe dois casos a seguir.

1º caso: As extremidades *A* e *B* não pertencem à reta *r*.



Projetamos as extremidades do segmento $\overline{AB}$ sobre *r*, obtendo os pontos *A'* e *B'*.

O segmento $\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre a reta *r*.

ELEMENTOS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

- Explique aos estudantes que todos os triângulos têm três alturas, cada uma relativa a um de seus lados. Verifique se eles compreendem que, nos triângulos retângulos, há duas alturas que coincidem com os catetos.
- Apresente aos estudantes a projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta por meio da ideia da sombra do ponto sobre a reta. Depois, use a mesma ideia para apresentar o conceito de projeção ortogonal de um segmento sobre uma reta.
- Se achar conveniente, apresente também aos estudantes a projeção ortogonal de um segmento sobre um plano. Para ilustrar essa ideia, você pode utilizar um pedaço de barbante para representar a reta e uma carteira para representar o plano. Você pode obter essa projeção com a luz da lanterna de um celular. Explique aos estudantes que essa projeção ortogonal pode existir em qualquer plano; utilize a lousa, uma das paredes ou o teto da sala de aula e o mesmo pedaço de barbante para ilustrar essa situação.

MEDIDAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

- Reproduza na lousa um triângulo retângulo e trace a altura relativa à hipotenusa, destacando os segmentos obtidos a partir da projeção de cada cateto sobre a hipotenusa.

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

- Verifique se os estudantes percebem que os três triângulos determinados têm os ângulos correspondentes de mesmas medidas, ou seja, ângulos correspondentes congruentes.
- É importante que os estudantes identifiquem os pares de lados correspondentes e verifiquem a semelhança entre os triângulos, dois a dois.

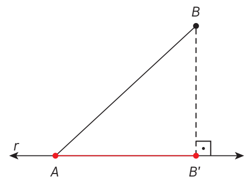
PARE E REFLITA

Como deve ser a projeção ortogonal sobre a reta r de um segmento $\overline{AB}$ que está contido em uma reta perpendicular à reta r?

Como deve ser a projeção ortogonal sobre a reta r de um segmento $\overline{AB}$ que está contido em r?

Espera-se que os estudantes percebam que, se um segmento $\overline{AB}$ está contido em uma reta perpendicular a uma reta r, então sua projeção ortogonal sobre a reta r é um ponto.
Além disso, espera-se que eles percebam que, se um segmento $\overline{AB}$ está contido em r, sua projeção ortogonal sobre r é ele mesmo.

2º caso: Uma das extremidades (A, por exemplo) pertence à reta r.

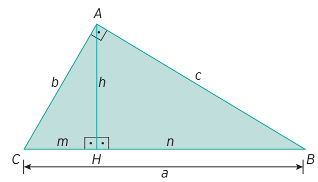


Como A pertence à reta r, projetamos o ponto B sobre r, obtendo o ponto B'.

O segmento $\overline{AB'}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre a reta r.

Medidas no triângulo retângulo

Observe o triângulo ABC a seguir. Nele, traçamos a altura $\overline{AH}$, relativa à hipotenusa, obtendo os segmentos $\overline{CH}$ (que é a projeção ortogonal do segmento $\overline{CA}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$) e $\overline{HB}$ (que é a projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$).

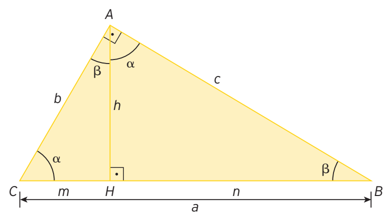


Assim, nesse triângulo, temos:

- a é a medida da hipotenusa $\overline{BC}$;
- b é a medida do cateto $\overline{AC}$, oposto ao ângulo $\hat{B}$;
- c é a medida do cateto $\overline{AB}$, oposto ao ângulo $\hat{C}$;
- h é a medida da altura $\overline{AH}$, relativa à hipotenusa $\overline{BC}$;
- m é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$;
- n é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$.

Relações métricas no triângulo retângulo

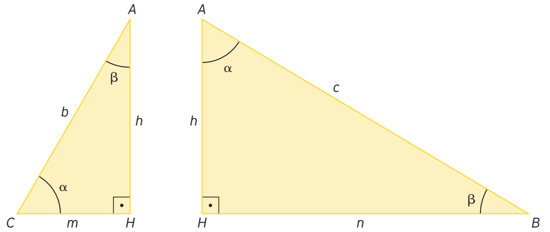
Ao traçar a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, determinamos três triângulos retângulos semelhantes entre si. Veja o caso do triângulo ABC a seguir.



Observe que a altura $\overline{AH}$ divide o triângulo *ABC* em dois triângulos retângulos, *HAC* e *HBA*. A seguir, vamos estudar as relações métricas entre esses três triângulos.

Primeira relação métrica no triângulo retângulo

Observe os triângulos a seguir.



Ilustrações: ID/BR

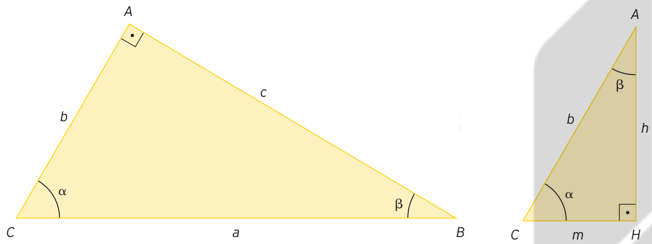
Como os triângulos *HAC* e *HBA* são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}, \text{ ou seja, } h^2 = m \cdot n$$

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.

Segunda relação métrica no triângulo retângulo

Observe os triângulos a seguir.



Como os triângulos *HAC* e *ABC* são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{b}, \text{ ou seja, } b^2 = a \cdot m$$

Analogamente, como os triângulos *HBA* e *ABC*, vistos no começo do tópico "Relações métricas no triângulo retângulo", são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c}, \text{ ou seja, } c^2 = a \cdot n$$

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de cada cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal desse cateto sobre ela.

- Apresente aos estudantes uma relação de semelhança entre os dois triângulos destacados em cada caso. Se julgar necessário, desenhe cada par de triângulos na lousa de maneira que ambos fiquem na mesma posição. Escreva as relações entre os lados, para cada par de triângulos, partindo dos ângulos correspondentes.
- Explique aos estudantes que, na primeira relação métrica no triângulo retângulo, que vem da observação dos triângulos *HAC* e *HBA*, a razão $\frac{h}{n}$ está relacionada com os lados opostos ao ângulo α e que, da observação dos lados opostos ao ângulo β, vem a razão $\frac{m}{h}$. A segunda relação métrica no triângulo retângulo vem da observação dos triângulos *ABC* e *HAC*, em que a razão $\frac{b}{m}$ está relacionada com os lados opostos ao ângulo β, enquanto a razão $\frac{a}{b}$ se relaciona com o ângulo reto.
- Chame a atenção dos estudantes para que percebam que, ao relacionarmos hipotenusa, cateto e sua projeção em relação à hipotenusa, essa projeção sempre se refere ao cateto considerado na relação.

DE OLHO NA BASE

Compreender a demonstração das relações métricas a partir da semelhança de triângulos favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA13**.

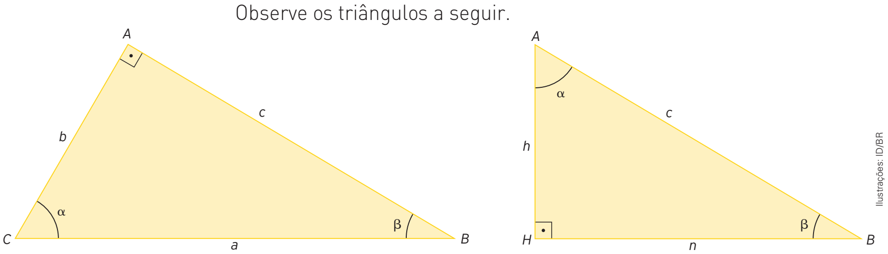
- A terceira relação métrica no triângulo retângulo se origina da observação dos triângulos ABC e HBA, em que a razão $\frac{a}{c}$ está relacionada com os lados opostos ao ângulo reto, enquanto a razão $\frac{b}{h}$ se relaciona com os lados opostos ao ângulo β.
- Para resolver a atividade **1**, sugira aos estudantes que separem os três triângulos, dois a dois, e escrevam as razões de semelhança em cada par de triângulos, observando os lados opostos a cada ângulo.
- Na atividade **3**, pergunte aos estudantes o que significa o suporte ter o menor tamanho possível. É importante que eles percebam que o ângulo formado entre o suporte e a rampa deve ser um ângulo reto. Se necessário, trace outros segmentos partindo do encontro da parede com o chão e chegando até a rampa, mas sem formar 90°, para que, assim, eles notem que o suporte teria uma medida maior que na posição em que o ângulo formado com a rampa é reto.
- Na atividade **4**, peça aos estudantes que localizem a altura e determinem qual das relações métricas estudadas envolve a medida da altura e das projeções dos catetos. Espera-se que eles mencionem a relação $h^2 = m \cdot n$.

DE OLHO NA BASE

Essas atividades favorecem o desenvolvimento da habilidade **EF09MA13**.

Terceira relação métrica no triângulo retângulo

Observe os triângulos a seguir.



Como os triângulos HBA e ABC são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{b}{h} = \frac{a}{c}, \text{ ou seja, } b \cdot c = a \cdot h$$

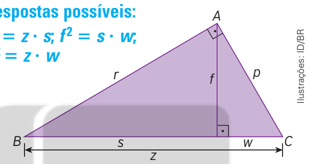
Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

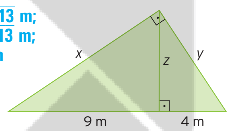
1. Escreva no caderno pelo menos três relações envolvendo as medidas indicadas no triângulo a seguir.

Respostas possíveis: $r^2 = z \cdot s$; $f^2 = s \cdot w$; $p^2 = z \cdot w$

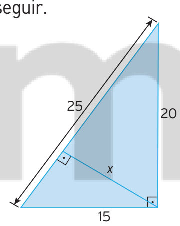


2. Calcule o valor de x, y e z em metro.

$x = 3\sqrt{13}$ m; $y = 2\sqrt{13}$ m; $z = 6$ m

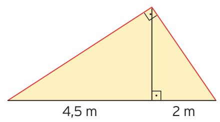


3. Uma parede mede 20 dm de altura e serve de apoio a uma rampa de 25 dm de medida de comprimento cuja base está 15 dm distante da parede, como representado na figura a seguir.



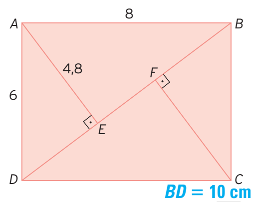
Deseja-se colocar um suporte com o menor tamanho possível apoiado no pé da parede para dar mais sustentação à rampa. Qual deve ser a medida do comprimento x desse suporte? **12 dm**

4. Um ciclista profissional de *bicicross* resolveu construir uma rampa para treinar. Veja a seguir um esboço dessa rampa, indicada em vermelho.



Qual é a medida da altura do ponto máximo dessa rampa, em metro? **3 m**

5. Na figura a seguir, $ABCD$ é um retângulo. As medidas estão indicadas em centímetro.



a) Qual é a medida da diagonal $\overline{BD}$? **$BD = 10$ cm**

b) Qual é a medida do segmento $\overline{EF}$? **$EF = 2,8$ cm**

DESCUBRA MAIS

Descobertas no triângulo retângulo

Vamos fazer algumas investigações para descobrir outras relações no triângulo retângulo.

Materiais

- lápis
- régua
- compasso
- folhas de papel avulsas
- cartolina
- lápis de cor

Como fazer

1. Desenhe um triângulo retângulo *ABC* na cartolina conforme mostra a figura 1.
2. Construa um quadrado sobre cada lado do triângulo, conforme mostra a figura 2.
3. Prolongue o lado $\overline{HB}$ do quadrado amarelo até o lado $\overline{FG}$ do quadrado vermelho, obtendo o ponto *K*. Depois, trace o segmento $\overline{KL}$, paralelo ao lado $\overline{BC}$ do quadrado amarelo (figura 3).
4. Prolongue o lado $\overline{IC}$ do quadrado amarelo até o lado $\overline{EA}$ do quadrado azul, obtendo o ponto *J* (figura 3).
5. Recorte os quadrados vermelho e azul nos segmentos $\overline{BK}$, $\overline{KL}$ e $\overline{CJ}$.
6. Chame as peças encontradas de P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5.
7. Encaixe as 5 peças de modo que elas cubram o quadrado amarelo.

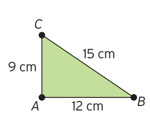


Figura 1

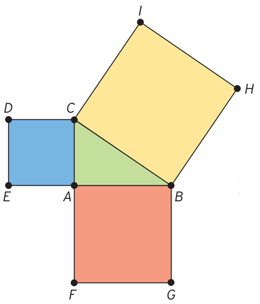


Figura 2

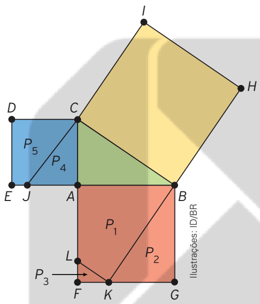


Figura 3

Para concluir

Responda sempre no caderno.

1. Quanto mede a área do quadrado amarelo? **225 cm²**
2. Qual é a medida da área do quadrado azul? E a medida da área do quadrado vermelho? **81 cm²; 144 cm²**
3. Que relação numérica existe entre a medida da área do quadrado amarelo e a soma das medidas das áreas dos outros dois quadrados?
4. Construa outro triângulo retângulo e siga os passos de 2 a 7. O que você observou? **Resposta pessoal.**
5. Indicando por *a* a medida da hipotenusa $\overline{BC}$, por *b* a medida do cateto $\overline{AC}$ e por *c* a medida do cateto $\overline{AB}$, represente suas conclusões com uma igualdade. $a^2 = b^2 + c^2$

3. Espera-se que os estudantes percebam que a medida da área do quadrado amarelo é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados vermelho e azul (225 = 81 + 144).

DESCUBRA MAIS

Se julgar conveniente, organize os estudantes em duplas ou em trios, procurando formar grupos heterogêneos em relação ao grau de facilidade/dificuldade do aprendizado de Geometria.

Peça aos estudantes que leiam todos os passos do tópico *Como fazer* antes de iniciar a atividade propriamente dita. É importante que eles discutam a sequência de passos com os demais integrantes do grupo antes de iniciar o passo 1, para que tenham certeza de que entenderam o procedimento como um todo.

Durante a execução da atividade, caminhe pela sala de aula, de grupo em grupo, para se certificar de que os estudantes estão realizando-a corretamente.

Reforce aos estudantes que recortar as peças é o último passo antes de encaixá-las, para que consigam traçar o segmento $\overline{KL}$ paralelo ao lado $\overline{BC}$.

Relembre aos estudantes que a área de um quadrado é dada pelo quadrado da medida do lado.

Incentive-os a realizar pelo menos mais uma construção, conforme solicitado na questão **4** do tópico *Para concluir*. Nessas construções, é interessante que o triângulo tenha outras medidas, diferentes das do primeiro. Verifique se as medidas escolhidas pelos estudantes são realmente de um triângulo retângulo. Valorize as conclusões dos estudantes antes de iniciar a atividade **5** e verifique se eles chegam à conclusão de que a relação encontrada na atividade **3** se mantém válida para qualquer triângulo retângulo.

TEOREMA DE PITÁGORAS

- É importante que a atividade do boxe *Descubra mais*, da página anterior, tenha sido realizada pelos estudantes antes de explicar a eles o teorema de Pitágoras.
- A construção do conceito por meio da atividade concreta é extremamente importante para que os estudantes tenham um aprendizado efetivo e não apenas memorizem a relação $a^2 = b^2 + c^2$, vazia de significado.
- Enfatize aos estudantes que o teorema de Pitágoras só é válido se o triângulo for retângulo.
- Apresente aos estudantes outros triângulos retângulos e nomeie os lados com letras diferentes de a, b e c. Peça a eles que escrevam a relação entre os catetos e a hipotenusa. A intenção é que percebam a relação, independentemente do nome dado à hipotenusa e aos catetos.

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

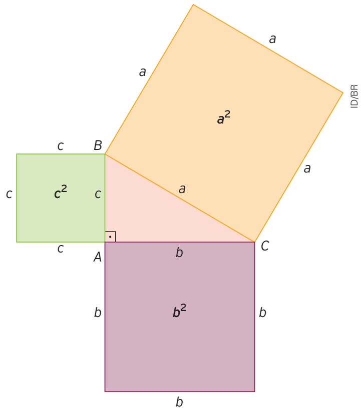
Leia com os estudantes o texto sobre Pitágoras e peça que destaquem a passagem do texto que mais chamou a atenção deles. Faça uma breve discussão sobre os trechos selecionados pelos estudantes. Esse tipo de trabalho contribui para o desenvolvimento de algumas habilidades de pesquisa, como localizar, selecionar, compartilhar informações e formar opiniões sobre como o conhecimento matemático foi construído.

DE OLHO NA BASE

Reconhecer, por meio do conhecimento histórico, que a Matemática é uma ciência humana e que se desenvolveu em diferentes épocas e civilizações contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 1**.

Teorema de Pitágoras

Na figura a seguir, o triângulo *ABC* é um triângulo retângulo. Foram construídos, sobre cada um dos lados desse triângulo, quadrados cujos lados têm medidas iguais às medidas dos catetos e à medida da hipotenusa do triângulo *ABC*.



ID/BR

Todo triângulo retângulo apresenta uma relação entre as medidas dos catetos e a medida da hipotenusa. Essa relação é chamada de **teorema de Pitágoras**.

> Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa (a) é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos (b e c).
>
> $$a^2 = b^2 + c^2$$

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

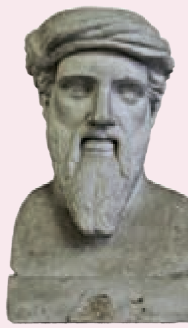
Pitágoras (c. 580 a.C.-c. 500 a.C.)

Pitágoras nasceu em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, na Grécia, e provavelmente recebeu instrução matemática e filosófica de Tales e de seus discípulos.

Após viver algum tempo entre [os] jônicos, viajou pelo Egito e [pela] Babilônia – possivelmente indo até a Índia. Durante suas peregrinações, ele absorveu não só informações matemáticas e astronômicas, como também muitas ideias religiosas. Quando voltou ao mundo grego, Pitágoras estabeleceu-se em Crotona, na Magna Grécia (na costa sudoeste da atual Itália), onde fundou a Escola Pitagórica, dedicada a estudos religiosos, científicos e filosóficos.

A Pitágoras são atribuídas várias descobertas sobre as propriedades dos números inteiros, a construção de figuras geométricas e a demonstração do teorema que leva seu nome (cujo enunciado já era conhecido pelos babilônios). Os próprios termos *Filosofia* (amor à sabedoria) e *Matemática* (o que é aprendido) seriam criações de Pitágoras para descrever suas atividades intelectuais.

Fonte de pesquisa: Valéria O. J. Luchetta. Pitágoras de Samos. iMÁTICA. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/pitagoras.html. Acesso em: 15 mar. 2022.


Musei Capitolini, Rome, Italy. Fotografia: Bridgeman Images/Easypix

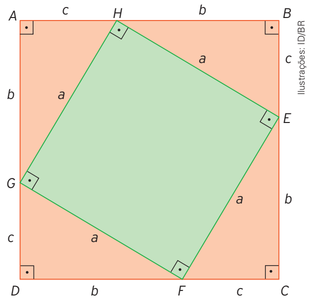
Escultura em mármore de Pitágoras, de meados do século V a.C.

Demonstração

O teorema de Pitágoras pode ser demonstrado de diversas formas. A seguir, vamos ver duas delas.

Primeira demonstração

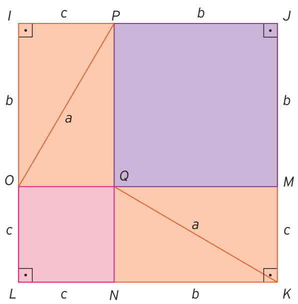
Considere o quadrado *ABCD* a seguir, formado pelo quadrado *EFGH* e por quatro triângulos retângulos ($\triangle GAH$, $\triangle HBE$, $\triangle ECF$, $\triangle FDG$).



A área desse quadrado é dada por:

$$A_{ABCD} = \underbrace{(b+c)^2}_{\text{área do quadrado } ABCD \text{ de lado } (b+c)} = \underbrace{a^2}_{\text{área do quadrado } EFGH \text{ de lado } a} + 4 \cdot \underbrace{\left(\frac{b \cdot c}{2}\right)}_{\text{área dos triângulos retângulos de lados } b,\ c \text{ e } a\ (\triangle GAH,\ \triangle HBE,\ \triangle ECF,\ \triangle FDG)}$$

Vamos rearranjar os triângulos retângulos *GAH*, *HBE*, *ECF* e *FDG*, congruentes pelo caso LAL, para que formem dois retângulos. Assim, obtemos o quadrado *IJKL*. Veja a figura a seguir.



A área do quadrado *IJKL* é dada por:

$$A_{IJKL} = \underbrace{(b+c)^2}_{\text{área do quadrado } IJKL \text{ de lado } (b+c)} = \underbrace{b^2}_{\text{área do quadrado } PJMQ \text{ de lado } b} + \underbrace{c^2}_{\text{área do quadrado } LOQN \text{ de lado } c} + 2 \cdot \underbrace{(b \cdot c)}_{\text{área dos retângulos } IPQO \text{ e } MKNQ \text{ de lados } b \text{ e } c}$$

Os quadrados *ABCD* e *IJKL* têm a mesma área, já que seus lados têm a mesma medida $(b + c)$. Então, podemos escrever que: $A_{ABCD} = A_{IJKL}$.

• Se julgar conveniente, peça aos estudantes que se reúnam em duplas e realizem, concretamente, a primeira demonstração do teorema de Pitágoras apresentada no Livro do Estudante.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Se julgar necessário, depois de apresentar a demonstração do teorema de Pitágoras, resolva com os estudantes as duas atividades complementares a seguir, que apresentam aplicações desse teorema.

1. Os lados de um triângulo *ABC* medem 10 cm, 24 cm e 26 cm. Esse triângulo é retângulo?

Se a medida do maior lado do triângulo *ABC* for igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados dele, então o triângulo será retângulo. Considerando $a = 26$ cm, $b = 10$ cm e $c = 24$ cm, podemos verificar que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$26^2 = 24^2 + 10^2$$
$$676 = 576 + 100$$

Logo, o triângulo *ABC* é retângulo.

2. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 14 cm e um dos catetos mede $5\sqrt{3}$ cm. Determine a medida do outro cateto.

Como o triângulo é retângulo, por meio do teorema de Pitágoras, obtém-se a medida do outro cateto. Sendo *x* o valor desconhecido, temos:

$$14^2 = x^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2$$
$$x^2 = 196 - 75$$
$$x^2 = 121$$
$$x = 11$$

Portanto, o outro cateto mede 11 cm.

- Verifique se os estudantes compreendem as passagens da segunda demonstração. Peça a eles que reproduzam a parte algébrica da demonstração no caderno.

Respeito

Leia o texto do boxe *Rampas de acesso* com os estudantes e ressalte que as obras públicas ou privadas devem atender às normas de acessibilidade e, assim, construir ambientes e espaços de inclusão que contribuam para as relações sociais de cadeirantes e de pessoas com mobilidade reduzida. Enfatize à turma que o respeito a essas pessoas deve perpassar por atitudes diárias em diversos espaços públicos. Incentive-os a socializar alguns espaços da própria cidade que poderiam ser aprimorados para atender a essa população com equidade. Depois, peça a eles que respondam às questões e apresentem aos colegas suas respostas e opiniões sobre o tema.

Se julgar oportuno, comente com os estudantes que, geralmente, o valor máximo permitido pela ABNT NBR 9050, 3ª edição, 2015, para a razão entre a medida *h* e a medida *d* é 1 : 12, ou $0{,}08\overline{3}$. Essa reflexão desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação em Direitos Humanos, que pertence à macroárea **Cidadania e Civismo**.

DE OLHO NA BASE

O conteúdo do boxe *Rampas de acesso* também contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**, para que os estudantes exercitem a empatia, respeitem e promovam o respeito ao outro e aos direitos humanos, acolham e valorizem a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

Compreender que a Matemática contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, como na construção de rampas de acesso, favorece o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 1**.

- Promova, de maneira recorrente, rodas de conversa que possibilitem aos estudantes sentir que o ambiente escolar é um espaço livre de quaisquer atos violentos (verbais ou não verbais), em que o respeito a diferentes opiniões e posicionamentos sejam constantemente desenvolvidos. Aproveite esses momentos para buscar soluções coletivas e democráticas de maneira que seja possível identificar, prevenir e reverter situações de conflito no ambiente escolar. Desse modo, os estudantes podem ter sentimentos de pertencimento à escola e reconhecê-la como um espaço saudável de convivência.

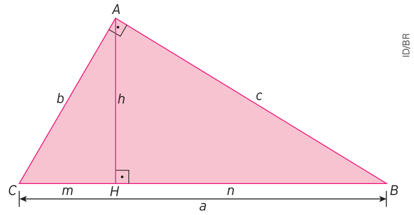
Como $A_{ABCD} = A_{IJKL}$, temos:

$$a^2 + 4 \cdot \left(\frac{b \cdot c}{2}\right) = b^2 + c^2 + 2 \cdot (b \cdot c)$$
$$a^2 + 2 \cdot (b \cdot c) = b^2 + c^2 + 2 \cdot (b \cdot c)$$
$$a^2 + 2 \cdot (b \cdot c) \mathbf{- 2 \cdot (b \cdot c)} = b^2 + c^2 + 2 \cdot (b \cdot c) \mathbf{- 2 \cdot (b \cdot c)}$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Como *a* é a medida da hipotenusa e *b* e *c* são as medidas dos catetos de um triângulo retângulo, demonstramos que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Segunda demonstração

Considere o triângulo retângulo *ABC* a seguir.



Da segunda relação métrica, temos:

$$b^2 = m \cdot a \quad \text{e} \quad c^2 = n \cdot a$$

Adicionando membro a membro as duas igualdades, obtemos:

$$b^2 + c^2 = m \cdot a + n \cdot a$$
$$b^2 + c^2 = a \cdot (m + n)$$
$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$

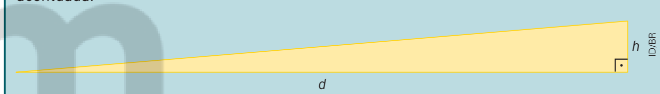
Colocamos *a* em evidência

Como $CB = CH + HB$, então $a = m + n$. Substituímos $(m + n)$ por *a*.

Desse modo, provamos o teorema de Pitágoras.

RAMPAS DE ACESSO

Com o objetivo de garantir a todas as pessoas direitos iguais de acesso aos locais, diversas ações têm sido tomadas para facilitar a vida dos cadeirantes ou das pessoas com mobilidade reduzida, como a construção de rampas em locais onde há desnível. As normas técnicas para sua construção exigem que a razão entre a medida *h* e a medida *d* da rampa (veja a figura) seja no máximo $\frac{1}{12}$, de modo que a inclinação da rampa não seja muito acentuada.



1. Nos locais que você costuma frequentar, há rampas de acesso?

2. Em sua opinião, que outras melhorias poderiam ser feitas em todos os lugares para facilitar a locomoção de cadeirantes ou de pessoas com mobilidade reduzida?

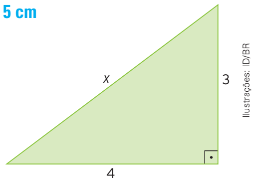
Respostas pessoais.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

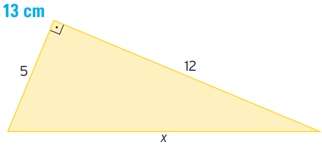
6. Determine o valor de x em cada caso. As medidas são dadas em centímetro.

a) **5 cm**

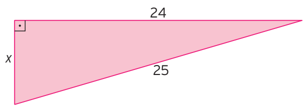


Ilustrações: ID/BR

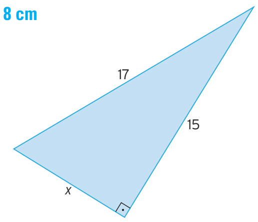
b) **13 cm**



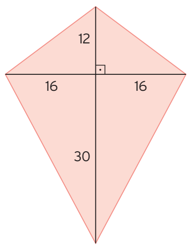
c) **7 cm**



d) **8 cm**

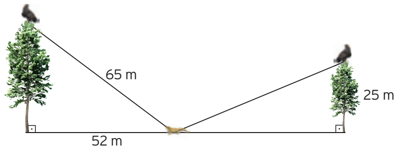


7. Para fazer uma pipa, Beto usou duas varetas com as medidas, em centímetro, dadas a seguir.



Qual é a medida do perímetro (medida do contorno, em rosa) da pipa que Beto fez? **108 cm**

8. Dois gaviões, cada um no topo de uma árvore, avistaram um lagarto no solo e lançaram-se ao mesmo tempo em direção ao réptil.

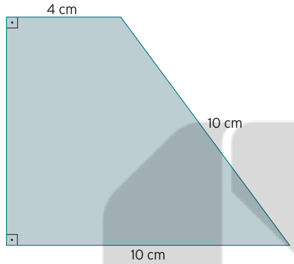


Calcule o que se pede em cada item, considerando que os dois gaviões percorreram a mesma distância para chegar ao lagarto.

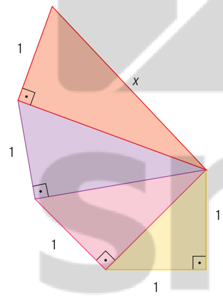
a) A medida da altura da árvore maior. **39 m**

b) A medida da distância entre o lagarto e a árvore menor. **60 m**

9. Calcule a medida da área do trapézio representado a seguir. **56 cm²**



10. Considere a figura a seguir. As medidas são dadas em centímetro.

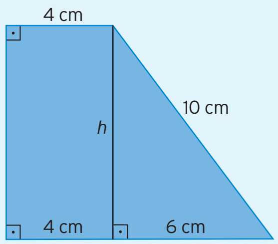


Qual é o valor de x indicado na figura? $x = \sqrt{5}$

"[...] para a efetivação dos Direitos Humanos e da Cultura de Paz, é imprescindível a sua prática cotidiana, na qual a educação é um fator essencial, capaz de incentivar a reflexão crítica e a transformação de realidades violentas, excludentes e preconceituosas. [...]"

Fonte: *Convivência escolar e cultura de paz*. Brasília: SEEDF/Subeb, 2020. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 4 jul. 2022.

- A atividade **6** permite que os estudantes apliquem o teorema de Pitágoras. Comente com eles que todos os triângulos são retângulos, pois têm um ângulo reto.
- Para calcular a medida do perímetro da pipa de Beto, na atividade **7**, os estudantes podem calcular as medidas das hipotenusas e somá-las. Verifique se eles percebem que a diagonal maior da pipa é o eixo de simetria dela; portanto, dos quatro triângulos formados, dois a dois são congruentes.
- Na atividade **8**, ressalte aos estudantes que os dois gaviões percorreram a mesma distância para chegar ao lagarto.
- Na atividade **9**, verifique se os estudantes notam que, para calcular a medida da área do trapézio, é necessário determinar a medida da altura dele. Eles devem perceber que, ao traçar a altura perpendicular à base do trapézio, obtém-se um retângulo e um triângulo retângulo, como na figura a seguir.



ID/BR

DE OLHO NA BASE

Por meio da aplicação do teorema de Pitágoras na resolução dos problemas, as atividades propostas nesta página favorecem o desenvolvimento da habilidade **EF09MA14**.

OUTRAS FONTES

SANTOS, M. C. dos. *Teorema de Pitágoras*: suas diversas demonstrações. 2011. 41 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba , Campina Grande, 2011. Disponível em: http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/678/1/PDF%20-%20Marconi%20Coelho%20dos%20Santos.pdf. Acesso em: 4 jul. 2022.

Nessa monografia, o autor apresenta, além de um estudo sobre a vida de Pitágoras, diversas maneiras de demonstrar seu teorema, tanto no campo geométrico, em que as demonstrações envolvem comparação de áreas, como no campo algébrico, em que elas se baseiam nas relações métricas do triângulo retângulo.

- As duas aplicações do teorema de Pitágoras visam determinar relações em figuras planas, apresentando as fórmulas para calcular as medidas da diagonal de um quadrado e da altura de um triângulo equilátero. Não é necessário que os estudantes memorizem as fórmulas. A ideia é mostrar que eles poderão aplicá-las nas atividades que envolvem essas medidas, pois são relações válidas para qualquer quadrado e qualquer triângulo equilátero.

DE OLHO NA BASE

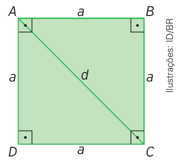
O conteúdo trabalhado nesta e nas próximas páginas possibilita aos estudantes reconhecer – uma vez fixada uma unidade de comprimento – que existem segmentos de reta cuja medida de comprimento não é expressa por um número racional (como as medidas das diagonais de um polígono e as medidas das alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). Isso contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA01**.

Aplicações do teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras pode ser utilizado em algumas situações. Acompanhe a explicação a seguir.

Medida da diagonal de um quadrado

Considere o quadrado *ABCD* a seguir cujo lado mede *a*. Traçando uma das diagonais do quadrado, $\overline{AC}$, por exemplo, obtêm-se dois triângulos retângulos congruentes ($\triangle ABC$ e $\triangle ADC$).



Ao aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *ADC*, por exemplo, obtemos:

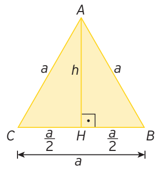
$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{2a^2} \Rightarrow d = a\sqrt{2}$$

Portanto, em um quadrado com lados de medida *a*, a medida da diagonal é $a\sqrt{2}$.

Esse procedimento pode ser aplicado para determinar a medida da diagonal de qualquer quadrado.

Medida da altura de um triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero *ABC* a seguir cujo lado mede *a*. Traçando a altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$, obtêm-se dois triângulos retângulos: *AHB* e *AHC*. A altura de um triângulo equilátero também é a mediana desse triângulo. Então, $\overline{AH}$ divide o lado $\overline{BC}$ em dois segmentos congruentes ($\overline{BH} \cong \overline{CH}$).



Ao aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *AHC*, por exemplo, temos:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, em um triângulo equilátero com lados de medida *a*, a medida da altura é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A relação entre a medida da altura de um triângulo equilátero e a medida de seu lado é válida para qualquer triângulo equilátero.

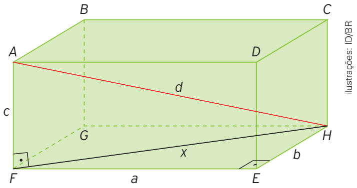
122

Medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

Um paralelepípedo reto-retângulo é um prisma cujas faces são retangulares.

A diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo é um segmento não contido em qualquer de suas faces e cujas extremidades são vértices do paralelepípedo.

Na figura a seguir, $\overline{AH}$ é uma diagonal do paralelepípedo *ABCDEFGH*, e $\overline{FH}$ é a diagonal da face *EFGH*.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *HEF*, temos:

$$x^2 = a^2 + b^2 \quad \text{(I)}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *AFH*, temos:

$$d^2 = x^2 + c^2 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

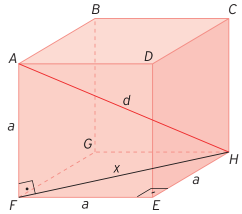
$$d^2 = x^2 + c^2$$
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Portanto, em um paralelepípedo reto-retângulo com arestas de medidas a, b e c, a medida da diagonal é $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

A relação entre a medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo e as medidas de suas arestas é válida para qualquer paralelepípedo reto-retângulo.

Medida da diagonal de um cubo

O cubo é um caso particular de paralelepípedo reto-retângulo, em que o comprimento, a largura e a altura têm medidas iguais. Observe o cubo a seguir.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *HEF*, temos:

$$x^2 = a^2 + a^2 \quad \text{(I)}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *AFH*, temos:

$$d^2 = a^2 + x^2 \quad \text{(II)}$$

- As duas aplicações apresentadas do teorema de Pitágoras no Livro do Estudante visam determinar relações em figuras espaciais para se obterem as fórmulas para calcular a medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo e a medida da diagonal de um cubo. Aqui também não é necessário que os estudantes memorizem as fórmulas. A ideia continua sendo mostrar a eles que poderão aplicá-las na resolução de atividades que envolvem essas medidas, pois são relações válidas para qualquer paralelepípedo reto-retângulo e para qualquer cubo.

- Na atividade **13**, sugira aos estudantes que desenhem o triângulo no caderno. Verifique se eles percebem que, como o triângulo é equilátero, para determinar a medida de cada lado basta dividir a medida do perímetro por 3, obtendo 8 cm.
- Na atividade **17**, a relação que os estudantes podem encontrar para calcular a medida da área a partir da medida da diagonal também pode ser deduzida utilizando-se o teorema de Pitágoras.
- Na atividade **19**, os estudantes devem lembrar que um cubo tem 6 faces.

DE OLHO NA BASE

Nas atividades desta página, os estudantes devem reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de medida de comprimento, existem segmentos de reta cuja medida de comprimento não é expressa por um número racional (como as medidas das diagonais de um polígono e as medidas das alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). Isso contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA01**.

Substituindo (I) em (II), temos:

$$d^2 = a^2 + x^2$$
$$d^2 = a^2 + a^2 + a^2$$
$$d^2 = 3a^2$$
$$d = \sqrt{3a^2}$$
$$d = a\sqrt{3}$$

Portanto, em um cubo com arestas de medida a, a medida da diagonal é $a\sqrt{3}$.

A relação entre a medida da diagonal de um cubo e as medidas de suas arestas é válida para qualquer cubo.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

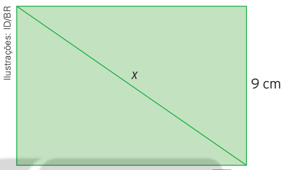
11. A diagonal de um quadrado mede $9\sqrt{2}$ cm. Determine as medidas:

a) do lado desse quadrado; **9 cm**

b) de sua área. **81 cm²**

12. Calcule o valor de x, em centímetro.

Ilustrações: ID/BR



$x = 5\sqrt{10}$ **cm**

13. A medida do perímetro de um triângulo equilátero é 24 cm. Determine as medidas:

a) do lado desse triângulo; **8 cm**

b) da sua altura; $4\sqrt{3}$ **cm**

c) da sua área. $16\sqrt{3}$ **cm²**

14. A diagonal de um retângulo mede 10 cm e um de seus lados mede 8 cm. Determine a medida:

a) do outro lado desse retângulo; **6 cm**

b) de seu perímetro; **28 cm**

c) de sua área. **48 cm²**

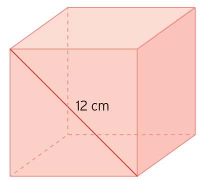
15. Determine a medida da diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo cujas arestas medem 6 cm, 8 cm e $5\sqrt{5}$ cm. **15 cm**

16. Quanto mede a diagonal de um cubo com arestas que medem $4\sqrt{3}$ cm? **12 cm**

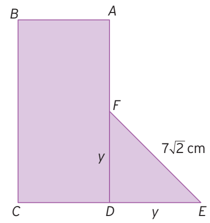
17. Betina desenhou um quadrado cuja diagonal mede 6 cm. Ela quer determinar a medida da área desse quadrado sem calcular a medida de seu lado. Converse com os colegas e verifique se isso é possível.

18. Se a diferença entre as medidas da altura de dois triângulos equiláteros é $5\sqrt{3}$ cm, qual é a diferença entre as medidas de seus lados? **10 cm**

19. Considere o cubo representado a seguir. Determine a soma das medidas de área de todas as suas faces. **432 cm²**



20. Na figura a seguir, $ED = DC$ e F é o ponto médio de $\overline{AD}$ no retângulo $ABCD$.



Determine:

a) o valor de y; **7 cm**

b) a medida do perímetro da figura toda; $(42 + 7\sqrt{2})$ **cm**

c) a medida da área do triângulo; **24,5 cm²**

d) a medida da área da figura toda. **122,5 cm²**

17. Espera-se que os estudantes verifiquem que é possível calcular a medida da área do quadrado usando apenas a medida da diagonal.

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. Em um triângulo retângulo *ABC*, a hipotenusa $\overline{BC}$ mede 10 cm e o cateto $\overline{AB}$ mede 8 cm. Determine a medida:

a) da projeção ortogonal de cada cateto sobre a hipotenusa; **3,6 cm e 6,4 cm**

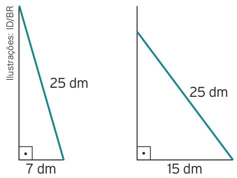
b) da altura relativa à hipotenusa; **4,8 cm**

c) do perímetro do triângulo *ABC*. **24 cm**

2. Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 13 cm e sua projeção ortogonal sobre a hipotenusa mede 5 cm. Qual é a medida da altura relativa à hipotenusa do triângulo? **12 cm**

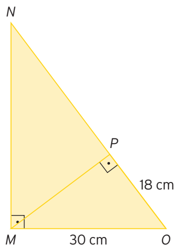
3. Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 15 cm e um de seus catetos mede 12 cm. Quanto medem as projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa? **5,4 cm e 9,6 cm**

4. Uma escada de 25 dm estava apoiada em uma parede. O pé dela estava distante 7 dm da parede. Em dado momento, o pé da escada escorregou 8 dm. As figuras a seguir ilustram a situação.

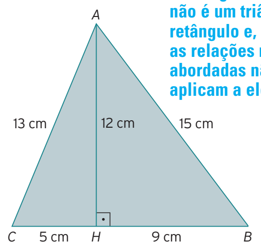


Calcule quantos decímetros a extremidade da escada que estava encostada na parede desceu. **4 dm**

5. Calcule a medida do perímetro do triângulo *MNO* representado a seguir. **120 cm**

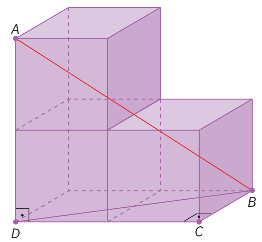


6. Todas as medidas indicadas na figura a seguir estão corretas. Com alguns colegas, explique por que as relações métricas vistas neste capítulo não são válidas para o triângulo *ABC*.



O triângulo *ABC* não é um triângulo retângulo e, portanto, as relações métricas abordadas não se aplicam a ele.

7. A figura a seguir mostra três cubos idênticos cujas arestas medem 4 cm cada uma.



Calcule a medida do segmento $\overline{AB}$. **12 cm**

8. Roberta aumentou em 2 m cada lado do seu quintal, de formato quadrado, de modo que ele permaneceu com a mesma forma. Isso provocou um aumento de 16 m^2 na área do quintal. Qual era a medida original da diagonal do quintal? **$3\sqrt{2}$ m**

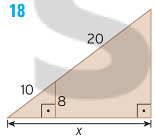
9. Calcule o aumento na medida da altura de um triângulo equilátero quando a medida de cada um de seus lados for aumentada em 6 m. **$3\sqrt{3}$ m**

10. As projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa medem 3 cm e 9 cm. Qual é a medida do cateto menor? **6 cm**

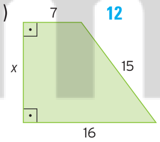
11. Calcule a medida da área de um hexágono regular cujo lado mede 8 cm. **$96\sqrt{3}$ cm^2**

12. Determine *x* em cada caso.

a) **18**



b) **12**



ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Nas atividades que não apresentarem figuras, incentive os estudantes a desenhá-las para facilitar o entendimento do que está sendo pedido e auxiliá-los nas resoluções.
- Na atividade **2**, são dadas as medidas de um cateto e da sua projeção ortogonal. Verifique se os estudantes percebem que, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo formado por essas três medidas, obtém-se a medida da altura.
- Na atividade **3**, os estudantes devem perceber que, com as medidas apresentadas no enunciado, pode-se descobrir a medida do outro cateto, aplicando-se o teorema de Pitágoras e, em seguida, podem calcular as medidas das projeções usando a relação: cateto^2 = hipotenusa · projeção.
- Na atividade **4**, os estudantes deverão calcular as medidas da parede e do chão até onde a escada se apoia neles, antes e depois de ela escorregar, aplicando o teorema de Pitágoras. Depois, basta calcular a diferença entre as medidas encontradas.
- Para calcular a medida do segmento $\overline{AB}$ na atividade **7**, é necessário aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo *ABD*. Inicie a resolução pedindo aos estudantes que identifiquem esse e o outro triângulo retângulo da figura. Espera-se que eles apontem o triângulo *BCD*, em que as medidas $CD = 8$ e $BC = 4$ são obtidas do enunciado, pois as arestas de cada cubo medem 4 cm cada uma. Por fim, basta aplicar o teorema de Pitágoras nesse triângulo.
- Na atividade **8**, os estudantes devem perceber que, se o lado do quintal media *x*, passou a medir $x + 2$.
- Para calcular a medida da área do hexágono regular, na atividade **11**, sugira aos estudantes que descubram como dividir um hexágono regular em 6 triângulos equiláteros.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para auxiliar os estudantes na resolução das atividades referentes à aplicação do teorema de Pitágoras e às relações métricas no triângulo retângulo, incentive-os a desenhar as figuras em cada atividade, partindo do enunciado. Outra estratégia que pode ajudá-los é compor e decompor as figuras em figuras mais simples, como quadrados, retângulos e triângulos.

Retome algumas atividades de semelhança de triângulos a fim de que possam utilizar esse conhecimento para deduzir as relações métricas sem a necessidade de memorizá-las, evitando a mecanização das resoluções.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Resolver um problema usando a estratégia "consultar um problema mais simples" possibilita aos estudantes reescrevê-lo de uma maneira que a resolução lhes seja mais familiar, oportunizando o desenvolvimento de diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático.
- No campo da Geometria, podemos compor e decompor figuras e determinar relações com base nas informações dos enunciados, buscando um problema mais simples para resolver outro mais complexo.

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

- Para a compreensão de um problema, é importante que os estudantes leiam o enunciado e extraiam dele os dados importantes para desenvolver a resolução. Eles devem observar que o formato da sala é circular, com diâmetro medindo 12 m, que inicialmente seria totalmente revestido por cerâmica branca; porém, o revestimento final do piso da sala será composto de cerâmica cujo formato é um hexágono regular verde, e o restante da área da sala será revestido com cerâmica branca.

RESPOSTAS – *RESOLUÇÃO DO PROBLEMA*

1. Resposta possível: Como a sala tem o formato de círculo, os estudantes podem determinar a medida da sua área total por meio da fórmula da área do círculo: $A = \pi \cdot r^2$. A medida da área total da sala é aproximadamente 113,04 m^2.
2. Resposta possível: Como a cerâmica verde tem o formato de um hexágono regular, para saber a medida da sua área devemos descobrir a medida da área do hexágono regular. Para isso, podemos verificar a possibilidade de transformar esse problema em um problema mais simples; nesse caso, decompor o hexágono em 6 triângulos equiláteros.

   Os triângulos obtidos têm todos os lados com a mesma medida, e seus lados coincidem com os raios do círculo e medem 6 metros. Assim, calculamos a medida da área de um desses triângulos e multiplicamos o resultado por 6, para obter a medida da área do hexágono regular. A medida da área da parte da sala que será recoberta com cerâmica verde é aproximadamente 93,53 m^2.
3. Resposta possível: A medida da área da parte que será recoberta com cerâmica branca pode ser obtida pela diferença entre a medida da área total da sala e a medida da área da parte da sala que será recoberta com cerâmica verde. A medida da área da sala recoberta com cerâmica branca é 19,51 m^2.

RESOLVENDO PROBLEMAS

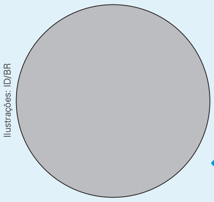
O problema

Cecília é arquiteta e realiza reformas. Em uma das obras em que ela está trabalhando, há uma sala em formato circular com diâmetro medindo 12 metros.

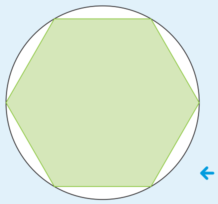
Inicialmente, o cliente dessa obra havia pedido que o piso dessa sala fosse todo revestido de cerâmica branca. Mas, antes de Cecília comprar o material necessário, o cliente mudou de ideia e pediu que uma parte do piso da sala fosse revestido de cerâmica verde, formando uma região com formato de um hexágono regular, de modo que os "cantos" dessa região, que representam os vértices do hexágono, tocassem as paredes da sala, e o restante do piso fosse revestido de cerâmica branca.

Veja a seguir um esquema que mostra o piso sem revestimento e o piso revestido.

Ilustrações: ID/BR



Piso sem revestimento.



Piso com revestimento.

Quanto mede a área do piso que será revestida de cerâmica verde? E qual é a medida da área que será revestida de cerâmica branca? (Considere $\pi \simeq 3{,}14$ e $\sqrt{3} \simeq 1{,}732$.)

Compreensão do problema

1. Qual é o formato da sala que será revestida de cerâmica? **Circular.**
2. Qual é a medida do diâmetro dessa sala? **12 metros.**
3. Qual é o formato da região que será revestida com cerâmica verde? **Formato de um hexágono regular.**
4. Qual é a medida do lado da região revestida com cerâmica verde, em metro? **6 metros.**

Resolução do problema

Consulte as respostas neste manual.

1. Como podemos determinar a medida da área total do piso da sala que será reformada? Qual é essa medida, em metro quadrado?
2. Como podemos calcular a medida da área da região revestida com cerâmica verde? Qual é essa medida, em metro quadrado?
3. Como podemos determinar a medida da área da sala que será coberta com a cerâmica branca? Qual é essa medida, em metro quadrado?

DE OLHO NA BASE

O debate sobre diferentes meios de resolver um problema permite aos estudantes criar um repertório e melhorar a própria capacidade de argumentação, desenvolvendo a **competência geral 7**.

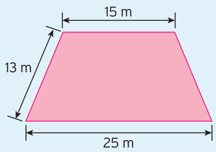
Os problemas propostos na seção *Mais problemas* auxiliam os estudantes a enfrentar situações-problema em múltiplos contextos – incluindo situações imaginadas –, a expressar suas respostas e a sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens, desenvolvendo a **competência específica de Matemática 6**.

Reflexão sobre o problema Respostas pessoais.

1. Você gostou de resolver esse problema? Por quê?
2. Você encontrou dificuldades para resolver esse problema? Se encontrou, quais foram as dificuldades?
3. Você fez anotações dos dados do problema que o ajudaram a compreender o problema?
4. Que estratégia você usou para resolver esse problema?
5. Compare sua estratégia com a que foi utilizada pelos colegas. Eles utilizaram estratégias diferentes da sua? Se utilizaram, quais foram?
6. Você consegue pensar em outra maneira de resolver esse problema? Se sim, qual?

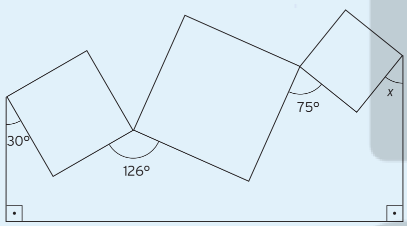
Mais problemas

1. Laura pretende pintar uma parede com formato de trapézio isósceles, representada na imagem a seguir. Como não quer diferença na tonalidade da cor, Laura comprará toda a tinta de uma só vez. Cada litro de tinta permite cobrir 15 m^2 de parede. Ela quer dar duas demãos de tinta nessa parede. Quantos litros de tinta Laura terá de comprar? **32 L de tinta.**



Ilustrações: ID/BR

2. Resolva a atividade a seguir e registre a alternativa correta no caderno.
(OBM) Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura.



A medida do ângulo *x* é: **Alternativa a.**

a) 39° b) 41° c) 43° d) 44° e) 46°

3. Imagine que em uma gaiola tenha certo número de coelhos e de galinhas, totalizando 7 cabeças e 22 patas e pés. Quantos animais de cada tipo estão nessa gaiola? Como você resolveria essa atividade sem utilizar um sistema de equações?
Dica: Um coelho tem 4 patas e uma galinha tem 2 pés. **4 coelhos e 3 galinhas; Resposta pessoal.**

REFLEXÃO SOBRE O PROBLEMA

- Refletir sobre o problema é importante para que você avalie se o tipo de problema apresentado foi interessante para os estudantes e se pode ser utilizado em outro momento. Também é importante saber as dificuldades que os estudantes tiveram ao resolvê-lo, assim como eles mesmos devem se conscientizar disso. Se o problema for muito fácil, isso pode desmotivá-los a resolver outros problemas em outro momento.
- A observação da própria estratégia de resolução é fundamental para cada estudante, pois lhe permite compreendê-la melhor e utilizá-la em outros momentos da vida escolar. Além disso, deparar-se com diferentes estratégias de resolução pode ampliar a visão e o repertório de resolução de problemas do estudante e a compreensão de que um problema, em Matemática, pode ter mais de uma estratégia de resolução.
- Na questão **1**, é interessante saber se os estudantes gostaram de resolver o problema proposto e, principalmente, o(s) motivo(s) apontado(s) por eles.
- Na questão **2**, saber se os estudantes tiveram alguma dificuldade para resolver esse problema e qual foi a dificuldade possibilita ajudá-los a construir o conhecimento para futuras resoluções de problemas.
- Na questão **5**, as várias estratégias utilizadas pelos estudantes devem ser discutidas em sala de aula. Esse é um importante momento de reflexão dos estudantes para conhecer outras maneiras de pensar em um mesmo problema.

DE OLHO NA BASE

A seção *Resolvendo problemas* também contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**, permitindo que os estudantes sintam segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

- O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes deve ser preservada. Para isso, valorize situações em que os estudantes se sintam acolhidos, incentivando o desenvolvimento da empatia e da solidariedade.

Os processos cognitivos como percepção, memorização, raciocínio, imaginação e resolução de problemas podem contribuir para elevar a autoestima dos estudantes, apesar de a saúde mental parecer um assunto que não tem relação com a Educação Matemática.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Na atividade **1**, é importante que os estudantes desenhem a figura antes de resolvê-la.
- Reforce para os estudantes que as divisões feitas no canteiro da atividade **3** são paralelas à base $\overline{AB}$.
- Na atividade **4**, verifique se os estudantes conseguem relacionar os pares de lados correspondentes na figura apresentada. Sugira a eles que separem os dois triângulos, colocando-os na mesma posição.
- Na atividade **6**, a compreensão do enunciado é fundamental para que os estudantes consigam resolver o problema.
- Na atividade **14**, peça aos estudantes que identifiquem o triângulo retângulo que permite resolver a situação proposta pela aplicação do teorema de Pitágoras.

DE OLHO NA BASE

Por meio da elaboração de uma situação-problema envolvendo o teorema de Pitágoras, a atividade **11** favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA14**.

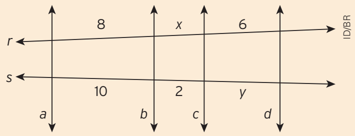
ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Registre a alternativa correta no caderno.

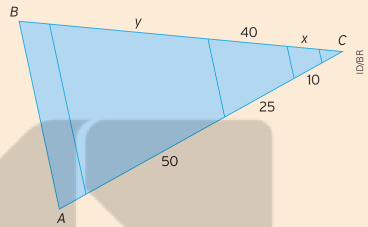
(Ufes) Uma transversal intercepta duas paralelas formando ângulos alternos internos expressos em graus por $(5x + 8)$ e $(7x - 12)$. A soma das medidas desses ângulos é:

a) 40°
b) 58°
c) 80°
d) 116° **Alternativa d.**
e) 150°

2. Na figura a seguir, $a // b // c // d$. Determine x e y. $x = 1,6$; $y = 7,5$

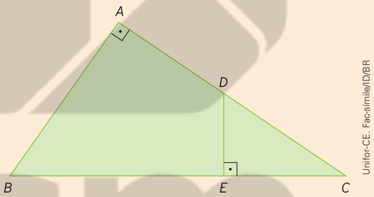


3. No sítio de Cláudio foi feito um canteiro na forma triangular. Ele fez sucessivas divisões, todas paralelas à base $\overline{AB}$ do triângulo ABC. Calcule os valores de x e de y. $x = 16$; $y = 80$



4. Registre a alternativa correta no caderno.

(Unifor-CE) Na figura a seguir, tem-se: $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm e $EC = 4$ cm.

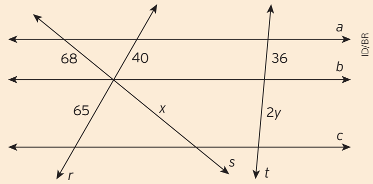


A medida de $\overline{DE}$, em centímetros, é igual a: **Alternativa d.**

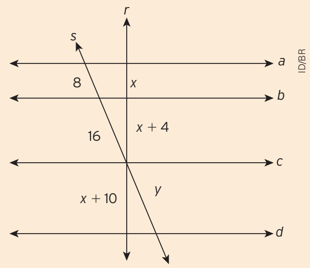
a) $\frac{12}{5}$
b) $\frac{5}{2}$
c) $2\sqrt{2}$
d) 3
e) $2\sqrt{3}$

5. Em cada item, calcule o valor de x e de y.

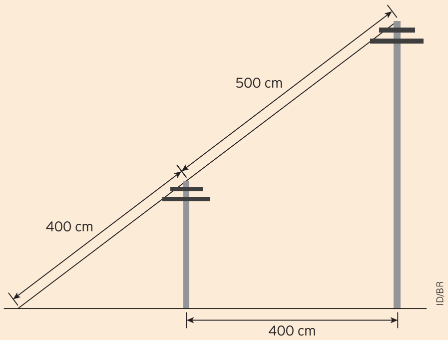
a) $a // b // c$ $x = 110,5$; $y = 29,25$



b) $a // b // c // d$ $x = 4$; $y = 28$



6. Dois postes perpendiculares ao solo estão a uma distância de 400 cm um do outro, e um fio bem esticado de 500 cm liga seus topos, como mostra a figura a seguir.

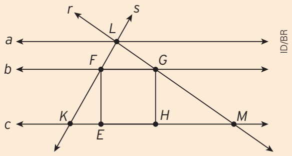


Prolongando esse fio até prendê-lo no solo, são utilizados mais 400 cm de fio. Determine a medida da distância, em metro, entre o ponto em que o fio foi preso ao solo e o poste mais próximo a ele. **3,2 m**

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para auxiliar os estudantes que apresentarem dificuldades na resolução de atividades como a atividade **5**, refaça a figura na lousa traçando uma reta paralela a cada uma das retas que se cruzam – na atividade em questão, são as retas *r*, *s* e *t* no item **a** e *r* e *s* no item **b** –, de modo que os estudantes possam visualizar as retas separadamente e compreender melhor as relações de proporcionalidade. Faça inicialmente o mesmo desenho que foi apresentado na atividade e, em seguida, vá afastando as retas, até que elas se “descruzem” e se afastem. Esse movimento de separar as retas faz com que os estudantes utilizem um exercício mais simples para resolver um mais complexo. Outra estratégia que pode auxiliá-los é reproduzir as retas que se cruzam com cores diferentes.

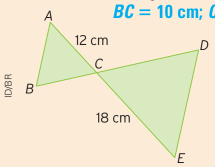
7. Observe o triângulo *KLM* e o quadrado *EFGH*. A altura do triângulo relativa ao lado $\overline{KM}$ mede 60 cm e o segmento $\overline{KM}$ mede 120 cm.



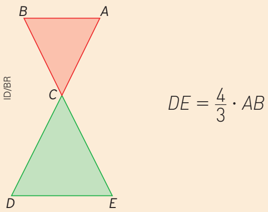
Sabendo que as retas *a*, *b* e *c* são paralelas entre si, quanto mede o lado do quadrado? **40 cm**

8. Determine a medida da altura de um triângulo equilátero, sabendo que a medida de sua área é $36\sqrt{3}$ cm². **$6\sqrt{3}$ cm**

9. Na figura a seguir, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são paralelos e o segmento $\overline{BD}$ mede 25 cm. Determine as medidas dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$. **$BC = 10$ cm; $CD = 15$ cm**



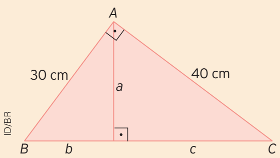
10. Considere os triângulos representados a seguir e a relação indicada.



$$DE = \frac{4}{3} \cdot AB$$

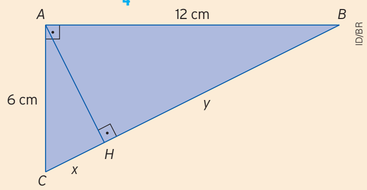
Sabendo que a medida da área da região triangular *ABC* é 18 cm² e que $\overline{AB}$ // $\overline{DE}$, calcule a medida da área da região triangular *CDE*. **32 cm²**

11. Veja o triângulo *ABC* a seguir.



Agora, considerando o triângulo, junte-se a um colega para elaborar um problema que deve ser resolvido usando o teorema de Pitágoras. Em seguida, resolvam o problema criado por outra dupla. **Resposta pessoal.**

12. Determine a razão $\frac{x}{y}$ no triângulo retângulo da figura a seguir. **$\frac{1}{4}$**



13. Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 20 cm, a sua projeção sobre a hipotenusa mede 16 cm e o outro cateto mede 15 cm. Determine a medida:

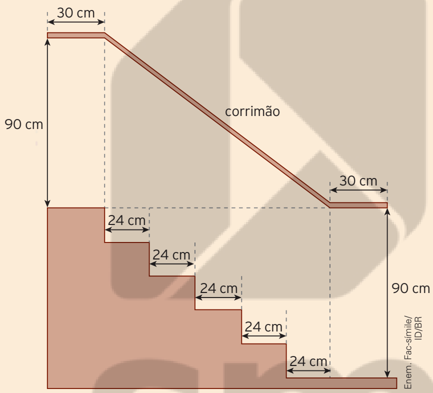
a) da altura relativa à hipotenusa; **12 cm**

b) da hipotenusa; **25 cm**

c) da projeção do outro cateto. **9 cm**

14. Registre a alternativa correta no caderno.

(Enem)



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

a) 1,8 m
b) 1,9 m
c) 2,0 m
d) 2,1 m
e) 2,2 m

Alternativa d.

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Aprendi a identificar ângulos congruentes e suplementares em retas paralelas cortadas por uma transversal?
- Aprendi a estabelecer a razão e a proporção entre segmentos de reta?
- Sei dividir segmentos de reta em partes proporcionais com o auxílio de régua, compasso e esquadro?
- Sei reconhecer polígonos semelhantes utilizando propriedades geométricas?
- Aprendi a aplicar as propriedades de semelhança de figuras na resolução de problemas?
- Consigo aplicar os casos de semelhança de triângulos na resolução de problemas?
- Compreendi o conceito de projeção ortogonal?
- Reconheço um triângulo retângulo e identifico seus elementos?
- Sei determinar as relações métricas entre triângulos retângulos a partir da semelhança entre eles?
- Sei aplicar as relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas?
- Consigo resolver problemas que envolvam a aplicação dos teoremas de Tales e de Pitágoras?
- Consigo aplicar o teorema da bissetriz interna na resolução de problemas?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

129

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
1, 7 e 9.

Competências específicas de Matemática
1, 3 e 8.

Habilidade
(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

UNIDADE 4

PRODUTOS NOTÁVEIS, FATORAÇÃO E EQUAÇÕES

SOBRE A UNIDADE

Esta unidade aborda produtos notáveis, fatoração, fração algébrica e equações de 2º grau, trabalhando esses conteúdos conjuntamente, pois o aprendizado de um pode colaborar com o aprendizado de outro. Por exemplo, equações do 2º grau podem ser resolvidas sem utilizar a fórmula resolutiva ou fórmula de Bhaskara, por meio da utilização de produtos notáveis e de fatoração.

Além disso, é evidenciada a frequência com que os produtos notáveis aparecem na Matemática e como eles facilitam as operações. Nesse sentido, são explorados exemplos geométricos na abordagem dos produtos notáveis e das fatorações, de modo a tornar o conceito mais concreto para os estudantes, auxiliando-os, assim, na assimilação do conteúdo. Com isso, eles reconhecem que a fatoração é um modo de facilitar o desenvolvimento e a resolução de expressões complexas.

Por meio do estudo das frações algébricas, das equações e de seus sistemas, os estudantes compreenderão a importância da álgebra na resolução de problemas. É uma boa oportunidade para ampliar e consolidar os conhecimentos adquiridos nos anos anteriores sobre o assunto.

Museu de Belas Artes, Houston. Fotografia: Bridgeman/Easypix

PRIMEIRAS IDEIAS

Na imagem, podemos ver uma das obras de Geraldo de Barros (1923-1998), que foi um fotógrafo e pintor brasileiro. Observe que essa pintura é formada por uma composição de quadrados.

Essa figura será bastante utilizada para representar geometricamente o que vamos estudar de maneira algébrica nesta unidade.

1. Para calcular a medida da área dos quadrados representados na obra, poderíamos utilizar uma régua para medir o comprimento de seus lados e, assim, obter as medidas das áreas. Mas como poderíamos realizar esses cálculos algebricamente?
2. Considere que o lado do quadrado verde mede *a* e que o lado do menor quadrado branco mede *b*. Como você determinaria a medida da área da região branca desse quadrado?

← Geraldo de Barros. *Concreto*, 1958. Esmalte sobre compensado, 49 cm × 71 cm. Museu de Belas Artes. Houston, Estados Unidos.

PRIMEIRAS IDEIAS

- Sugira aos estudantes que observem a obra e analisem as figuras geométricas que a compõem. Verifique se eles se lembram como pode ser realizado o cálculo da medida da área de quadrados. Pergunte a eles se é possível escrever uma fórmula para encontrar a medida de área mesmo não tendo as medidas dos lados dessas figuras.
- Leia com os estudantes o texto apresentado no Livro do Estudante e verifique se eles percebem quantos quadrados compõem essa obra. Espera-se que eles compreeendam que, como a pintura é formada por uma composição de quadrados, então a obra foi criada com quatro quadrados: dois brancos, um verde e um vermelho.
- Pergunte como os estudantes representariam algebricamente a medida de área das partes brancas que ficaram visíveis nas composições. Ajude-os a perceber diferentes meios de representar essas medidas. Depois, indique que algumas das expressões obtidas podem ser chamadas de produtos notáveis.
- Explique aos estudantes que há outros produtos notáveis que podem ser obtidos com o auxílio de figuras geométricas. Essa prática pode colaborar para que eles utilizem figuras geométricas para relembrar os produtos notáveis.

RESPOSTAS

1. Sendo a medida do lado do quadrado igual a ℓ, a medida da área é igual a ℓ^2. Assim, é possível determinar a medida da área de cada região na figura, estabelecendo uma variável para representar a medida do lado.
2. Resposta pessoal. Uma possível resposta seria chamar de A_b a medida da área do quadrado branco, de A_v a medida da área do quadrado verde e de A a medida da área da região branca. Então:

$$A = A_b - A_v$$
$$A = b^2 - a^2$$

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Quadrado da soma e da diferença de dois termos.
- Produto da soma pela diferença de dois termos.
- Cubo da soma e da diferença de dois termos.
- Fator comum em evidência.
- Agrupamento.
- Diferença de dois quadrados.
- Trinômio quadrado perfeito.
- Soma e diferença de dois cubos.

Objetivos

- Apresentar os produtos notáveis.
- Relacionar os produtos notáveis às medidas da área e do volume de figuras geométricas.
- Compreender a fatoração.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de reconhecer produtos notáveis e efetuar a fatoração de polinômios, fazendo relação entre as representações algébrica e geométrica. Essa prática, além de expandir o estudo de Geometria, pode ajudar os estudantes a usar a Álgebra para aprimorar suas capacidades de resolver problemas.

PRODUTOS NOTÁVEIS

- Para iniciar o trabalho com esse conteúdo, proponha aos estudantes algumas atividades que envolvam propriedades da multiplicação, em particular as propriedades comutativa e distributiva da multiplicação em relação à adição. Essas propriedades são úteis para explicar aos estudantes os produtos notáveis, e retomá-las pode colaborar para o desenvolvimento desse conteúdo. Por exemplo, sugira a eles que calculem a medida da área de um quadrado cujo lado mede 18 u.c. Para isso, eles devem escrever 18^2 u.a. como $(10 + 8)^2$ u.a., pois:

  $$(10 + 8)^2 = (10 + 8) \cdot (10 + 8)$$

  Verifique se eles lembram que para resolver essa expressão podemos utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.
- Discuta com os estudantes quais figuras geométricas compõem o heliponto e como podemos calcular a área dos seus quadrados. Converse com eles sobre a possibilidade de não se conhecer as medidas dos lados de cada quadrado e o que eles poderiam fazer para encontrá-las.

Capítulo 1

PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO

Para o desenvolvimento dos conteúdos apresentados neste capítulo, é importante que os estudantes tenham bem consolidado como utilizar a propriedade comutativa e, principalmente, a propriedade distributiva da multiplicação.

Produtos notáveis

Os helipontos são áreas destinadas para pousos e decolagens de helicópteros. A seguir, estão representadas, de maneira simplificada, a área de um heliponto, composta de uma área de toque – ou seja, o local em que o helicóptero deve tocar para pousar – e a área de pouso e decolagem. Os helipontos podem estar localizados em lugares como a cobertura de um edifício ou no solo, por exemplo, em hotéis, clubes ou fazendas.

Indicando por a^2 a medida da área de pouso e decolagem do heliponto e por b^2 a da área de toque, $a^2 - b^2$ representa a diferença entre a medida da área de pouso e decolagem e a da área de toque.

Podemos verificar que $a^2 - b^2$ é o resultado do produto $(a + b) \cdot (a - b)$, ou seja, que $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$, para quaisquer a e b. O produto $(a + b) \cdot (a - b)$ é um exemplo de **produto notável**. Os produtos notáveis apresentam regularidades que permitem resolver determinados cálculos com maior praticidade. Neste capítulo, vamos conhecer alguns deles.

Vista aérea de um heliponto na cidade do Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2020.

132

Quadrado da soma de dois termos

O quadrado da soma de dois termos, a e b, pode ser representado pela expressão $(a + b)^2$. Essa expressão também pode ser representada por $(a + b)(a + b)$. Desenvolvendo essa multiplicação, temos:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + \underbrace{a \cdot b + b \cdot a}_{\text{propriedade comutativa da multiplicação } (a \cdot b = b \cdot a)} + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

propriedade distributiva

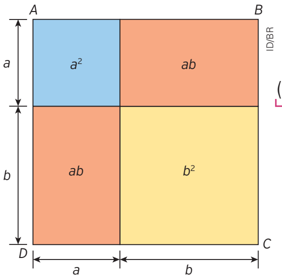
A expressão $a^2 + 2ab + b^2$ é denominada **trinômio quadrado perfeito**.

Considerando a o 1º termo e b o 2º termo, podemos fazer uma análise do produto notável:

$$(\underbrace{a}_{\text{1º termo}} + \underbrace{b}_{\text{2º termo}})^2 = \overbrace{a^2}^{\text{quadrado do 1º termo}} + \underbrace{2ab}_{\text{duas vezes o produto do 1º termo pelo 2º termo}} + \overbrace{b^2}^{\text{quadrado do 2º termo}}$$

> O **quadrado da soma de dois termos** é igual ao quadrado do 1º termo mais duas vezes o produto do 1º termo pelo 2º termo, mais o quadrado do 2º termo.
>
> $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Geometricamente, o trinômio quadrado perfeito corresponde à medida da área de um quadrado cujos lados medem $(a + b)$, com $a > 0$ e $b > 0$. Para calcular a medida da área do quadrado $ABCD$, basta adicionar as medidas das áreas das regiões quadradas azul e amarela às medidas das áreas das regiões retangulares laranja.



$$\underbrace{(a + b)^2}_{\text{medida da área do quadrado } ABCD} = \underbrace{a^2}_{\text{medida da área da região azul}} + \underbrace{2ab}_{\text{medida da área das regiões laranja}} + \underbrace{b^2}_{\text{medida da área da região amarela}}$$

Exemplos

A. $(x + 4)^2 = \underbrace{x^2}_{\text{quadrado do 1º termo}} + \underbrace{2 \cdot x \cdot 4}_{\text{duas vezes o produto do 1º termo pelo 2º termo}} + \underbrace{4^2}_{\text{quadrado do 2º termo}} = x^2 + 8x + 16$

B. $(x + y^2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y^2 + (y^2)^2 = x^2 + 2xy^2 + y^4$

C. $(y^3 + 5z)^2 = (y^3)^2 + 2 \cdot y^3 \cdot 5z + (5z)^2 = y^6 + 10y^3z + 25z^2$

- Sugira aos estudantes que façam a multiplicação da soma de dois termos pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Espera-se que eles cheguem à conclusão de que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

- Outra maneira de os estudantes encontrarem esse produto notável é discutir com eles a área de um quadrado, como se apresenta na figura do Livro do Estudante. Sendo a medida do lado do quadrado igual a $a + b$, então é possível dividir o quadrado em dois retângulos e dois quadrados e observar a área de cada figura. Assim, verifica-se que um quadrado tem área de medida a^2, o outro tem área que mede b^2 e os retângulos têm área de medida $a \cdot b$, o que resulta em $a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$.
- Ao trabalhar os exemplos desta página, observe se os estudantes compreenderam que a e b representam um valor qualquer e podem ser substituídos por outras variáveis ou números. No primeiro exemplo, a foi substituído por x e b foi substituído por 4. Assim, eles podem entender melhor como efetuar as operações ou utilizar a "regra", mas, especialmente, como apresentar o quadrado cuja área será representada por um produto notável.

OUTRAS FONTES

Coqueiro, V. dos S. *et al. Manual didático para o uso dos materiais do laboratório de matemática do Programa Brasil Profissionalizado.* Campo Mourão, PR: Unespar, 2017. Disponível em: https://campomourao.unespar.edu.br/editora/documentos/manual-didatico.pdf. Acesso em: 29 jun. 2022.

O capítulo 5 desse manual apresenta como confeccionar e utilizar um material manipulativo para o ensino e a aprendizagem de produtos notáveis.

- Antes de trabalhar o produto notável quadrado da diferença de dois termos, sugira aos estudantes que pesquisem outra maneira de calcular 18^2; porém, dessa vez, utilizando a informação de que $20^2 = 400$. Isso os levará a fazer $(20-2)^2$ e a desenvolver o quadrado da diferença de dois termos.
- Observe como os estudantes realizam esse exemplo numérico e desenvolva o produto notável com base nesse trabalho. Isso fará com que eles se lembrem do processo de obtenção do produto notável em vez de simplesmente decorar uma fórmula que poderá ser rapidamente esquecida.
- Tanto a figura geométrica quanto o uso da propriedade distributiva da multiplicação podem colaborar para que os estudantes entendam como reconstruir o produto notável sem a necessidade de decorar uma regra. À medida que trabalham com esses produtos, eles poderão compreender a regra sem ter de deduzi-la toda vez que precisar.
- Novamente, faça os exemplos com os estudantes, garantindo que eles compreendam cada um dos termos da diferença, sejam eles variáveis ou números ou até mesmo números multiplicados por variáveis.

DE OLHO NA BASE

A explanação dos produtos notáveis apresentados possibilita compreender as relações entre Álgebra e Geometria, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

Quadrado da diferença de dois termos

Tal como apresentado para o quadrado da soma de dois termos, o quadrado da diferença de dois termos pode ser representado algebricamente por $(a-b)^2$, que corresponde a $(a-b)\cdot(a-b)$. Vamos verificar como efetuar algebricamente essa multiplicação.

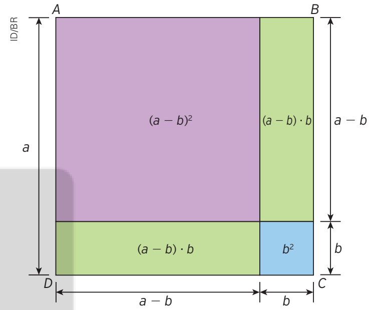
$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a - \underbrace{a\cdot b - b\cdot a}_{\substack{\text{propriedade comutativa}\\ \text{da multiplicação}\\ (-a\cdot b = -b\cdot a)}} + b\cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

propriedade distributiva

O **quadrado da diferença de dois termos** é igual ao quadrado do 1º termo menos duas vezes o produto do 1º termo pelo 2º termo mais o quadrado do 2º termo.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Na representação geométrica, a medida da área da região quadrada de cor roxa corresponde ao quadrado da diferença de dois termos. O quadrado $ABCD$ foi dividido em duas regiões retangulares verdes e duas regiões quadradas, uma roxa e outra azul.



$(a > 0 \text{ e } b > 0)$

Para determinar a medida da área da região quadrada roxa, calculamos a medida da área do quadrado $ABCD$ de lado medindo a e subtraímos desse valor a medida da área das regiões retangulares verdes e a medida da área da região quadrada azul.

$$\underbrace{(a-b)^2}_{\substack{\text{medida da}\\ \text{área da}\\ \text{região roxa}}} = \underbrace{a^2}_{\substack{\text{medida da}\\ \text{área do}\\ \text{quadrado}\\ ABCD}} - \underbrace{2\cdot b\cdot(a-b)}_{\substack{\text{medida da}\\ \text{área das}\\ \text{regiões verdes}}} - \underbrace{b^2}_{\substack{\text{medida da}\\ \text{área da}\\ \text{região azul}}} = a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemplos

A. $(x-5)^2 = \underbrace{x^2}_{\substack{\text{quadrado}\\ \text{do 1º termo}}} - \underbrace{2\cdot x\cdot 5}_{\substack{\text{duas vezes o}\\ \text{produto do 1º termo}\\ \text{pelo 2º termo}}} + \underbrace{5^2}_{\substack{\text{quadrado do}\\ \text{2º termo}}} = x^2 - 10x + 25$

B. $(m^2 - 3a^3)^2 = (m^2)^2 - 2\cdot m^2\cdot 3a^3 + (3a^3)^2 = m^4 - 6m^2a^3 + 9a^6$

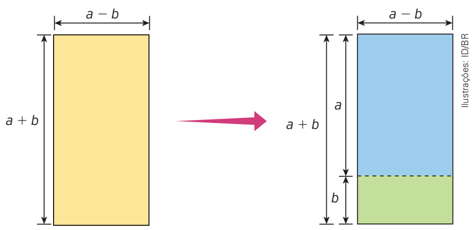
Produto da soma pela diferença de dois termos

Dados dois termos a e b, representamos o produto da soma pela diferença desses termos por meio da expressão $(a + b) \cdot (a - b)$. Vamos verificar como efetuar algebricamente essa multiplicação:

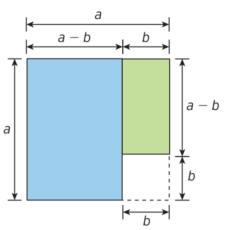
$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot a \underbrace{- a \cdot b + b \cdot a}_{-a \cdot b + b \cdot a = -a \cdot b + a \cdot b = 0} + b \cdot (-b) = a^2 - b^2$$

> O **produto da soma pela diferença de dois termos** é igual ao quadrado do 1º termo menos o quadrado do 2º termo.
>
> $$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Esse produto notável também pode ser representado geometricamente. Considere o retângulo amarelo a seguir, cujos lados medem $(a + b)$ e $(a - b)$, com a e b positivos e $a > b$. Dividindo esse retângulo em dois retângulos, um azul, de lados a e $a - b$, e outro verde, de lados b e $a - b$, conforme mostrado na figura a seguir, temos:



Rotacionando e deslocando o retângulo verde para a direita do retângulo azul, temos uma nova disposição dos retângulos, porém a medida da área da figura permanece a mesma do retângulo amarelo: $(a + b) \cdot (a - b)$. A medida da área da região final corresponde à diferença entre a medida da área do quadrado de lado a e a medida da área do quadrado que está "faltando".



$$\underbrace{(a + b) \cdot (a - b)}_{\text{medida da área da região colorida}} = \underbrace{a^2}_{\text{medida da área do quadrado de lado } a} - \underbrace{b^2}_{\text{medida da área do quadrado que está "faltando"}}$$

Exemplos

A. $(x + 5) \cdot (x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$

B. $(2xy^2 + 10x) \cdot (2xy^2 - 10x) = (2xy^2)^2 - (10x)^2 = 4x^2y^4 - 100x^2$

C. $\left(\frac{3}{2}ab + \frac{1}{8}b^2\right) \cdot \left(\frac{3}{2}ab - \frac{1}{8}b^2\right) = \left(\frac{3}{2}ab\right)^2 - \left(\frac{1}{8}b^2\right)^2 = \frac{9}{4}a^2b^2 - \frac{1}{64}b^4$

- O produto da soma pela diferença de dois termos também pode ser obtido aplicando a propriedade distributiva da multiplicação. Sugira aos estudantes que apliquem essa propriedade e discuta com eles os resultados obtidos.
- Incentive os estudantes a compreender a multiplicação realizada em vez de simplesmente sugerir que decorem uma regra, pois é mais importante que eles compreendam como desenvolver essa "regra".
- Discuta também como os estudantes podem obter esse produto notável por meio de figuras geométricas. Para isso, pode-se retomar o exemplo da página de abertura da unidade, no qual a área de cada figura branca resulta da subtração da área de outro quadrado.
- Certifique-se de que os estudantes entenderam qual é o primeiro termo e qual é o segundo em um produto da soma pela diferença de dois termos. Assim, eles podem efetuar a multiplicação com mais facilidade e compreender o produto notável.

- Na atividade **8**, é interessante observar se os estudantes compreenderam o desenvolvimento de um produto notável; nesse caso, do quadrado da soma de dois termos. Se compreenderam, eles observarão que o primeiro termo do trinômio quadrado perfeito é $4x$ e, por isso, vão dividir 48 por 4, que é 12, e 12 por 2, que é 6. Assim, descobrirão que o segundo termo é 6, cujo quadrado é 36. É importante ficar atento para o fato de que os estudantes podem se apressar em responder que a alternativa correta é a **b**, por encontrarem o valor 6, que é o termo, e não o termo ao quadrado.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. d) $16p^2 + 40p + 25$ e) $b^2 + 3b + \frac{9}{4}$ f) $\frac{4x^2}{9} + 8x^5 + 36x^8$

1. Desenvolva algebricamente os seguintes produtos notáveis:

a) $(x + 3)^2$ $x^2 + 6x + 9$

b) $(y + 1)^2$ $y^2 + 2y + 1$

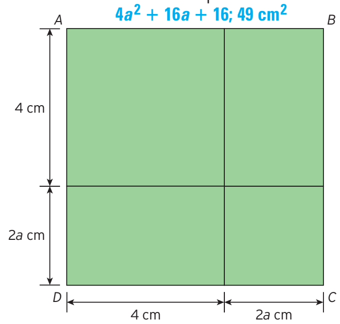
c) $(2 + y)^2$ $4 + 4y + y^2$

d) $(4p + 5)^2$

e) $\left(b + \frac{3}{2}\right)^2$

f) $\left(\frac{2x}{3} + 6x^4\right)^2$

2. Escreva o polinômio que representa a medida da área do quadrado *ABCD* apresentado a seguir. Depois, considerando a medida *a* igual a 1,5 cm, determine a medida da área desse quadrado. $4a^2 + 16a + 16$; $49\ cm^2$



3. Desenvolva algebricamente os seguintes produtos notáveis:

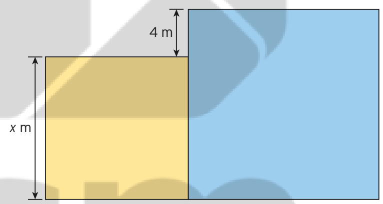
a) $(x - 1)^2$ $x^2 - 2x + 1$

b) $(4x - 11)^2$ $16x^2 - 88x + 121$

c) $(2 - z)^2$

d) $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2$

4. A figura a seguir mostra duas regiões quadradas.



Considerando $x > 0$, escreva um polinômio que represente:

a) a medida da área da região amarela, em metro quadrado; $x^2\ m^2$

b) a medida da área da região azul, em metro quadrado; $(x^2 + 8x + 16)\ m^2$

c) a diferença entre a medida da área da região azul e a medida da área da região amarela; $(8x + 16)\ m^2$

d) a medida do perímetro da figura, em metro. $(6x + 16)\ m$

5. Desenvolva algebricamente os seguintes produtos notáveis:

a) $(y + 6)(y - 6)$ $y^2 - 36$

b) $(2c + 3)(2c - 3)$ $4c^2 - 9$

c) $(4h^2 - 3y^3)(4h^2 + 3y^3)$ $16h^4 - 9y^6$

d) $(xy + z^3)(xy - z^3)$ $x^2y^2 - z^6$

6. Simplifique as expressões a seguir.

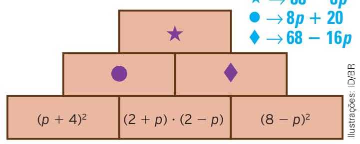
a) $(b - 1)(b + 1) + 1$ b^2

b) $(x + 1)(x - 1) - x(x^2 + x)$ $-x^3 - 1$

c) $(4 - 3y)(4 + 3y) + (3y + 2)(3y - 2)$ 12

7. Copie o esquema a seguir no caderno e substitua cada símbolo pela soma dos dois polinômios que estão nos retângulos inferiores.

★ → $88 - 8p$
● → $8p + 20$
♦ → $68 - 16p$



Ilustrações: ID/BR

8. Analise as alternativas a seguir e escreva no caderno o valor correto para *y*, considerando que a expressão $16x^2 + 48x + y$ é um trinômio quadrado perfeito. Alternativa c.

a) 4

b) 6

c) 36

d) 64

9. Monte um produto notável utilizando os termos $5x^2$ e 8. Em seguida, resolva-o.

10. Seja $a = 3$ e $b = -2$, calcule o produto $(a + b)(a + b)$ e o produto $(a + b)(a - b)$. $(a + b)(a + b) = 1$; $(a + b)(a - b) = 5$

11. Escreva no caderno a alternativa correta. O resultado $m^2n^2 - 4x^2$ é obtido por meio de qual dos produtos notáveis a seguir? Alternativa e.

a) $(mn + 2x)^2$

b) $(m + x)(n + 2)$

c) $(m + x)(n - 2)$

d) $(mn + 2x)(mn + 2x)$

e) $(mn + 2x)(mn - 2x)$

3. c) $4 - 4z + z^2$ d) $\frac{x^4}{9} - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{4}$

9. Resposta possível: $(5x^2 + 8)^2 = 25x^4 + 80x^2 + 64$

OUTRAS FONTES

Almeida, G. C. E. de. *Ensino de produtos notáveis através de material concreto*. Curitiba: CRV, 2013.

Nessa obra, a autora apresenta meios para trabalhar os produtos notáveis mediante o uso de material concreto.

Coxford, A. F. E.; Shulte, A. P. (org.). *As ideias da álgebra*. São Paulo: Atual, 1994.

Nesse livro, o professor encontrará discussões sobre como abordar ideias da Álgebra em sala de aula, envolvendo prática e teoria.

Coelho, F. U.; Aguiar, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. *Estudos Avançados*, v. 32, n. 94, p. 171-187, 2018. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ea/a/6KryLd3HngCnBwJtWFHxSHj/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 29 jun. 2022.

Nesse artigo, os autores apresentam como os conceitos que foram relevantes para o desenvolvimento da Álgebra, desde os primórdios até os dias atuais, podem e devem participar de seu processo de ensino.

Cubo da soma de dois termos

Dados dois termos a e b, o cubo da soma deles é representado pela expressão $(a + b)^3$. Reescrevendo esse produto e utilizando o desenvolvimento do quadrado da soma de dois termos, obtemos:

$$(a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b)^2 = (a+b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$$

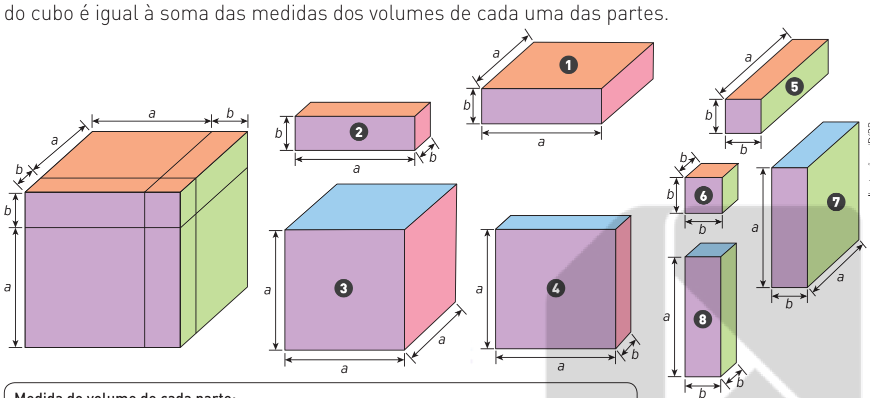
Agrupando os termos similares, temos:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

O **cubo da soma de dois termos** é igual ao cubo do 1º termo mais três vezes o produto do quadrado do 1º termo pelo 2º termo, mais três vezes o produto do 1º termo pelo quadrado do 2º termo, mais o cubo do 2º termo.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Geometricamente, esse produto notável pode representar a medida do volume de um cubo cujas arestas medem $(a + b)$. A medida do volume total do cubo é igual à soma das medidas dos volumes de cada uma das partes.



Ilustrações: ID/BR

Medida do volume de cada parte:
❶ a^2b ❷ ab^2 ❸ a^3 ❹ a^2b ❺ ab^2 ❻ b^3 ❼ a^2b ❽ ab^2

A medida do volume total do cubo $(a + b)^3$ é igual à soma das medidas dos volumes de cada uma das partes:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Exemplos

A. $(x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

B. $\left(\frac{3}{2}a + 5b^2\right)^3 = \left(\frac{3}{2}a\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{3}{2}a\right)^2 \cdot 5b^2 + 3 \cdot \frac{3}{2}a \cdot (5b^2)^2 + (5b^2)^3 =$

$= \frac{27}{8}a^3 + 3 \cdot \frac{9}{4}a^2 \cdot 5b^2 + 3 \cdot \frac{3}{2}a \cdot 25b^4 + 125b^6 =$

$= \frac{27}{8}a^3 + \frac{135}{4}a^2b^2 + \frac{225}{2}ab^4 + 125b^6$

- Para o trabalho com figuras geométricas referente a produtos notáveis que envolvam soma ou diferença de dois termos elevados ao cubo, é necessário utilizar figuras espaciais. Isso significa que a visão geométrica dos estudantes deve ser mais acurada. Para isso, é essencial apresentar cubos nas aulas.
- Se possível, apresente o *applet* Cubo da soma de dois termos, de autoria de Aparecido Souza, disponível em: https://www.geogebra.org/m/k5gnqdsf (acesso em: 29 jun. 2022), para que os estudantes verifiquem esse produto notável mediante uma animação.
- Ao tratar o produto notável algebricamente, relacione-o com o cálculo da medida do volume de um cubo que foi cortado em partes. Por exemplo, para determinar a medida do volume de um cubo cujas arestas medem 18 u.c., pode-se calcular $(10 + 8)^3$ u.a. Desse modo, o estudo com esse produto notável pode se tornar mais significativo.

137

- Analise com os estudantes o desenvolvimento do cubo da diferença de dois termos. Como eles já passaram pela experiência de desenvolver o cubo da soma, espera-se que eles encontrem o resultado. No entanto, esse desenvolvimento não é simples, pois envolve muitas passagens e eles podem apresentar dificuldade em algumas delas. Discuta com eles a importância da propriedade distributiva da multiplicação nesses casos e como trabalhar com ela.
- Na atividade **12**, observe se os estudantes utilizam os termos de maneira correta; por exemplo, no item **d**, o primeiro termo é $\frac{a}{3}$ e o segundo é b. Assim:

$$\left(\frac{a}{3}+b\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{a}{3}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^2\cdot b + 3\cdot\frac{a}{3}\cdot b^2 + b^3$$

Cubo da diferença de dois termos

Tal como foi feito para o cubo da soma, a seguir demonstramos como calcular o cubo da diferença de dois termos, dado por $(a-b)^3$.

Reescrevendo esse produto e utilizando o desenvolvimento do quadrado da diferença de dois termos, obtemos:

$$(a-b)^3 = (a-b)\cdot(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a^2-2ab+b^2) = a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3$$

Reduzindo a última expressão, temos:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

O **cubo da diferença de dois termos** é igual ao cubo do 1º termo menos três vezes o produto do quadrado do 1º termo pelo 2º termo, mais três vezes o produto do 1º termo pelo quadrado do 2º termo, menos o cubo do 2º termo.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Exemplos

A. $(2x-y)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot y + 3\cdot 2x\cdot y^2 - y^3 =$

$= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

B. $\left(-\frac{1}{3}a^2-\frac{3}{5}b\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}a^2\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{1}{3}a^2\right)^2\cdot\frac{3}{5}b + 3\cdot\left(-\frac{1}{3}a^2\right)\cdot\left(\frac{3}{5}b\right)^2 - \left(\frac{3}{5}b\right)^3 =$

$= -\frac{1}{27}a^6 - 3\cdot\frac{1}{9}a^4\cdot\frac{3}{5}b + (-a^2)\cdot\frac{9}{25}b^2 - \frac{27}{125}b^3 =$

$= -\frac{1}{27}a^6 - \frac{1}{5}a^4b - \frac{9}{25}a^2b^2 - \frac{27}{125}b^3$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

12. Desenvolva algebricamente os seguintes produtos notáveis:

a) $(y+3)^3$ $\mathbf{y^3 + 9y^2 + 27y + 27}$

b) $(2x+z^2)^3$ $\mathbf{8x^3 + 12x^2z^2 + 6xz^4 + z^6}$

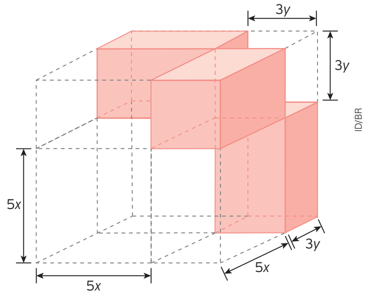
c) $(a^2+4b)^3$ $\mathbf{a^6 + 12a^4b + 48a^2b^2 + 64b^3}$

d) $\left(\frac{a}{3}+b\right)^3$ $\mathbf{\frac{a^3}{27} + \frac{a^2b}{3} + ab^2 + b^3}$

13. Considerando $p \neq 0$, $q \neq 0$ e $p > q$, determine a medida da aresta de um cubo cuja medida do volume, em decímetro cúbico, é dada pela seguinte expressão: **$(p-q)$ dm**

$$p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$$

14. Calcule a medida do volume da figura a seguir em termos de x e y. **$135y^2x$**



Fatoração

As expressões matemáticas podem ser escritas de diversas maneiras. Assim, duas expressões aparentemente diferentes podem representar a mesma expressão.

Por exemplo, a expressão $x^2 + 5x + 6$ pode ser escrita como $(x + 3) \cdot (x + 2)$.

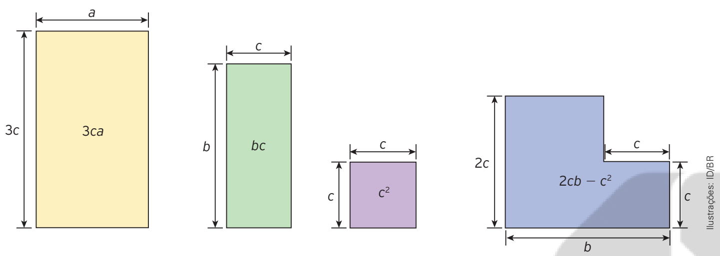
$$(x + 3) \cdot (x - 2) = x^2 + 5x + 6$$

Dizemos que a expressão $(x + 3) \cdot (x + 2)$ está na **forma fatorada**, ou seja, explicita quais são os fatores da multiplicação. O polinômio $x^2 + 5x + 6$ é o produto da multiplicação.

Neste estudo, faremos o inverso do que realizamos quando estudamos os produtos notáveis. Ou seja, vamos partir de um polinômio para representá-lo como fatores de uma multiplicação que resultam nele. Esse processo é chamado de **fatoração** de um polinômio.

Acompanhe o exemplo a seguir.

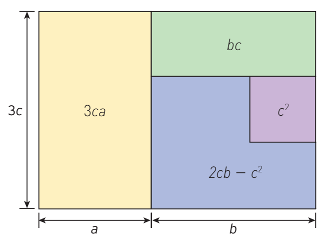
As figuras a seguir são peças de um quebra-cabeça retangular. Se considerarmos as medidas indicadas em cada peça, podemos representar a medida da área de cada uma delas por uma expressão.



A soma da medida da área de cada uma das peças resulta em um polinômio que representa a medida da área total (A) do quebra-cabeça:

$$A = 3ca + bc + c^2 + 2cb - c^2$$

Veja a seguir um possível encaixe das peças desse quebra-cabeça.



$$A = 3c \cdot (a + b)$$

Observe que as expressões $3ca + bc + c^2 + 2cb - c^2$ e $3c \cdot (a + b)$ representam a mesma medida de área. Dizemos que a expressão $3c \cdot (a + b)$ representa a medida dessa área na forma fatorada.

FATORAÇÃO

- Relembre com os estudantes os nomes dos termos de uma multiplicação. Discuta com eles que são multiplicados dois fatores que resultam em um produto. Então, pergunte: O que vocês entendem por "fatorar"? Os estudantes devem entender que "fatorar" é tornar uma expressão em uma multiplicação de fatores. Muitas vezes, escrever uma expressão na forma fatorada colabora para que se observem raízes de uma equação e para que os cálculos, usando tal expressão, sejam mais rápidos e simples de serem realizados.
- Reproduza as peças do quebra-cabeça apresentado nessa página do Livro do Estudante, em quantidade suficiente para cada grupo de quatro estudantes. Distribua-as aos grupos e solicite aos estudantes que escrevam as expressões que representam a medida da área de cada uma delas e as adicionem para saber a medida da área total do jogo.
- Solicite aos estudantes que encaixem as peças de modo a formar uma única figura antes de olhar o resultado no Livro do Estudante e que escrevam a expressão da medida da área pensando na figura total. Assim, eles podem comparar as duas expressões obtidas e concluir que elas são iguais.
- Peça aos estudantes que tentem, algebricamente, explicar como a primeira expressão pode ser modificada para chegar à segunda expressão. Como possivelmente eles ainda não sabem fatorar, essa atividade pode ser um estímulo para a introdução desse conteúdo.

- Como o nome indica, uma das maneiras de fatorar uma expressão é buscar um fator comum para colocar em evidência. Isso significa que há termos na expressão que foram multiplicados pelo mesmo fator e que este pode ser colocado em evidência para transformar dois termos em uma multiplicação.
- No exemplo do Livro do Estudante, x e y foram multiplicados por a e os produtos foram adicionados, resultando em $ax + ay$. Assim, é possível colocar a em evidência, isto é, dividir ambos os termos por a e colocar os resultados multiplicando a, tornando-os fatores. Isso resulta em $a(x + y)$.
- Explique aos estudantes que é possível checar se a fatoração está correta fazendo a multiplicação novamente e verificando se a expressão inicial é obtida. Assim, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, eles podem determinar se a fatoração foi feita de maneira adequada.
- Deixe que os estudantes estudem os exemplos apresentados e discutam entre si para verificar se compreenderam como colocar um fator em evidência.

DE OLHO NA BASE

Analisar com os estudantes a relação entre as expressões algébricas e suas representações geométricas favorece o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

Fator comum em evidência

Considere o polinômio $ax + ay$, com $a \neq 0$. Note que a letra a aparece nos dois termos. Por isso, dizemos que a é o **fator comum** desse polinômio.

Para fatorar esse polinômio, ou seja, escrevê-lo como um produto de polinômios, colocamos o fator comum a em evidência. Isso significa que ele será um dos fatores da multiplicação.

Em seguida, dividimos o polinômio $ax + ay$ por a para obter o outro fator da multiplicação.

$$ax + ay = \underbrace{a}_{\text{fator comum}} \cdot \underbrace{(x + y)}_{(ax\,:\,a)\,+\,(ay\,:\,a),\ \text{com } a \neq 0}$$

A forma fatorada do polinômio $ax + ay$ é $a(x + y)$.

Para verificar se a fatoração está correta, usamos a propriedade distributiva da multiplicação:

$$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y = ax + ay$$

Exemplos

A. Vamos fatorar o polinômio $ax^2 + 3ax$.

O fator comum dos dois termos é ax. Logo:

$$ax^2 + 3ax = \underbrace{ax}_{\text{fator comum}} \cdot \underbrace{(x + 3)}_{(ax^2\,:\,ax)\,+\,(3ax\,:\,ax),\ \text{com } a \neq 0 \text{ e } x \neq 0}$$

Para verificar se a fatoração está correta, basta aplicar a propriedade distributiva da multiplicação:

$$ax \cdot (x + 3) = ax \cdot x + ax \cdot 3 = ax^2 + 3ax$$

B. Vamos fatorar o polinômio $12x^4 + 18x^3 - 24x^2$.

Note que a letra x aparece com expoentes diferentes em todos os termos.

Quando isso ocorre, a letra elevada ao menor expoente é colocada em evidência, nesse caso, x^2.

Como há coeficientes inteiros em todos os termos, colocamos em evidência o máximo divisor comum entre eles. Nesse caso, mdc(12, 18, 24) = 6.

Portanto, o fator comum dos três termos é $6x^2$.

$$12x^4 + 18x^3 - 24x^2 = \underbrace{6x^2}_{\text{fator comum}} \cdot \underbrace{(2x^2 + 3x - 4)}_{(12x^4\,:\,6x^2)\,+\,(18x^3\,:\,6x^2)\,-\,(24x^2\,:\,6x^2),\ \text{com } x \neq 0}$$

Agrupamento

Considere o polinômio $ax + ay + bx + by$.

Não existe um fator comum aos quatro termos. Porém, os termos ax e ay têm o fator comum a, e os termos bx e by têm o fator comum b.

Colocando em evidência os fatores a e b, temos:

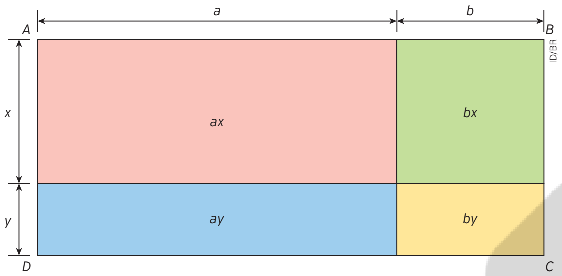
$$ax + ay + bx + by = \underbrace{(ax + ay)}_{\text{fator comum: } a} + \underbrace{(bx + by)}_{\text{fator comum: } b} = a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y)$$

Os dois termos da expressão obtida têm o fator comum $(x + y)$. Colocando esse fator em evidência, obtemos a forma fatorada desse polinômio:

$$ax + ay + bx + by = (x + y)(a + b)$$

Na **fatoração por agrupamento**, formamos grupos que têm fator comum. Em seguida, fatoramos esses grupos e verificamos se eles apresentam um novo fator comum, que é colocado em evidência, para assim completar a fatoração.

A fatoração por agrupamento também pode ser representada geometricamente. Por exemplo, podemos exprimir a medida da área do retângulo $ABCD$ a seguir de duas maneiras diferentes.



1ª maneira: Adicionando as medidas das áreas das quatro regiões menores.

$$\overbrace{ax}^{\text{região vermelha}} + \underbrace{ay}_{\text{região azul}} + \overbrace{bx}^{\text{região verde}} + \underbrace{by}_{\text{região amarela}}$$

2ª maneira: Calculando diretamente a medida da área total do retângulo $ABCD$.

$$(a + b)(x + y)$$

Como as quatro regiões menores formam o retângulo $ABCD$, podemos escrever:

$$ax + ay + bx + by = (a + b)(x + y)$$

Exemplo

$$x^3 - 2x^2y + 5xy - 10y^2 = \underbrace{(x^3 - 2x^2y)}_{\text{fator comum: } x^2} + \underbrace{(5xy - 10y^2)}_{\text{fator comum: } 5y} =$$

$$= x^2\underbrace{(x - 2y)} + 5y\underbrace{(x - 2y)} = \underbrace{(x - 2y)}_{\text{fator comum}}(x^2 + 5y)$$

- Para entender a fatoração por agrupamento, peça aos estudantes que reflitam sobre as similaridades entre expressões, pois eles precisam não somente observar fatores em comum em alguns termos, mas também verificar que determinados termos podem gerar um novo fator em comum. Esse tipo de fatoração exige certa familiaridade com expressões algébricas que os estudantes podem não ter adquirido ainda, dado o pouco tempo de estudo das expressões.
- Peça aos estudantes que observem similaridades nos termos da expressão apresentada:

  $$ax + ay + bx + by$$

  Eles podem observar que há dois termos com a e dois termos com b, assim como há dois termos com x e dois termos com y. Explique a eles que podem fazer de ambas as maneiras, pois o resultado final será sempre o mesmo. Além disso, sugira a cada estudante ou grupo de estudantes que apresente a própria resolução para que todos observem que o resultado é o mesmo. Assim, é possível obter:

  $$a(x + y) + b(x + y)$$

  ou

  $$x(a + b) + y(a + b)$$

  No primeiro caso, obtém-se $(x + y)$ como novo fator comum, enquanto, no segundo caso, o novo fator comum é $(a + b)$. Ambas as expressões resultam em:

  $$(x + y) \cdot (a + b)$$

  Espera-se que os estudantes compreendam que, pela propriedade comutativa da multiplicação, tem-se:

  $$(x + y) \cdot (a + b) = (a + b) \cdot (x + y)$$
- Para observar a fatoração por agrupamento com o uso de figuras geométricas, sugira aos estudantes que construam, com papel ou outro material, retângulos com medidas de área iguais a cada um dos termos adicionados e, depois, os reúnam de forma a obter um retângulo maior. Eles observarão que as medidas das áreas são representadas por expressões equivalentes, e uma delas está na forma fatorada.
- Apresente aos estudantes novos exemplos para construírem geometricamente. Esse tipo de atividade colabora para que entendam a fatoração por abordagem geométrica.

- Explique novamente aos estudantes que a fatoração é o inverso do que eles faziam com os produtos notáveis, isto é, multiplicar os fatores e obter o produto. Na fatoração, a partir do produto (que, às vezes, é notável) chega-se aos fatores que foram multiplicados para obtê-los.
- Retome com os estudantes os produtos notáveis vistos até então e associe-os à fatoração correspondente. Por exemplo, o produto da soma pela diferença de dois termos é a fatoração da diferença de dois quadrados. Assim:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

- Comente cada um dos exemplos com os estudantes para que eles determinem a fatoração adequada. No exemplo **C**, observe se eles conseguem perceber que há uma segunda diferença de dois quadrados que pode ser fatorada.
- No exemplo **D**, retome os quadrados do início da unidade, para que os estudantes compreendam a fatoração a partir das figuras geométricas.

Diferença de dois quadrados

Vimos que o produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo menos o quadrado do 2º termo.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Assim, sempre que houver uma diferença de dois quadrados, como $a^2 - b^2$, podemos escrevê-la na forma fatorada como $(a + b)(a - b)$.

Exemplos

A. $y^2 - 16$

Como $y^2 = (y)^2$ e $16 = 4^2$, podemos escrever:

$$y^2 - 16 = y^2 - 4^2 = (y + 4)(y - 4)$$

B. $4a^2 - 1$

Como $4a^2 = (2a)^2$ e $1 = 1^2$, podemos escrever:

$$4a^2 - 1 = (2a)^2 - 1^2 = (2a + 1)(2a - 1)$$

C. $81m^4 - n^4$

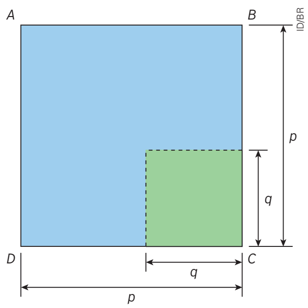
Como $81m^4 = (9m^2)^2$ e $n^4 = (n^2)^2$, podemos escrever:

$$81m^4 - n^4 = (9m^2)^2 - (n^2)^2 = (9m^2 + n^2)(9m^2 - n^2)$$

Nesse caso, observe que o último fator $(9m^2 - n^2)$ também é uma diferença de dois quadrados, em que $9m^2 = (3m)^2$. Portanto, podemos fatorá-lo novamente; assim, o polinômio fatorado será:

$$81m^4 - n^4 = (9m^2 + n^2)(3m + n)(3m - n)$$

D. Considere o quadrado *ABCD* a seguir, que está dividido em duas regiões.



Vamos determinar a expressão algébrica na forma fatorada que representa a medida da área da região azul.

- Medida da área do quadrado *ABCD*: p^2
- Medida da área da região verde: q^2
- Medida da área da região azul: $p^2 - q^2$

Fatorando a expressão da medida da área azul, obtemos:

$$p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$$

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Sugira aos estudantes que construam quadrados para representar a fatoração da diferença de dois quadrados. Peça a eles que analisem os dois quadrados, descubram como eles podem ser sobrepostos e qual é a medida da área que é retirada de qual quadrado.

Proponha aos estudantes que usem os quadrados de outros colegas, para que observem que, mesmo que a medida do lado do quadrado se modifique, a expressão que representa a medida da área da diferença de dois quadrados é a mesma, seja ela desenvolvida ou fatorada.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

15. Fatore os polinômios a seguir usando o método do agrupamento.

a) $px + py + bx + by$ **$(x + y)(p + b)$**

b) $k^2a - k^2b + 6a - 6b$ **$(a - b)(k^2 + 6)$**

c) $5gh + 3g + 40h + 24$ **$(5h + 3)(g + 8)$**

d) $ax - ay - bx + by$ **$(x - y)(a - b)$**

16. Calcule o valor numérico das expressões a seguir. Dica: Antes de calcular, fatore e simplifique as expressões.

a) $xy - x + y - 1$, para $x = 99$ e $y = 101$. **10 000**

b) $\frac{2mp - mq + 2np - nq}{2m + 2n}$, para $p = 5$, $q = -10$ e $(m + n) \neq 0$. **10**

c) $3x^2 + 3xy + 2xy^2 + 2y^3$, para $x = 2$ e $y = 5$. **392**

d) $a^3 - 4a^2b + 3ab - 12b^2$, para $a = 4$ e $b = 3$. **−200**

17. Fatore os polinômios a seguir.

a) $a^2 - 1$ **$(a + 1)(a - 1)$**

b) $4x^2 - 9z^2$ **$(2x + 3z)(2x - 3z)$**

c) $a^4 - 16$

d) $16 - 25x^4y^6$ **$(4 + 5x^2y^3)(4 - 5x^2y^3)$**

17. c) $(a^2 + 4)(a + 2)(a - 2)$

18. Calcule o valor numérico das expressões.

a) $\frac{x^2 - y^2}{x + y}$, para $x = 1\,999$ e $y = 1\,998$. **1**

b) $\frac{x^6 - y^6}{x + y}$, para $x = 4$ e $y = 3$. **481**

19. Fatore as expressões a seguir.

a) $14xy - 21xz$ **$7x(2y - 3z)$**

b) $cy - y + cx - x$ **$(c - 1)(y + x)$**

c) $ax - 4a + 6x - 24$ **$(x - 4)(a + 6)$**

20. Escreva no caderno apenas os polinômios que estão na forma fatorada. **Itens b e c.**

a) $x^2y + 3y$

b) $(x + 5)(x - 3)(x^2 + 7)$

c) $(a + 2b)(a + 2b)$

d) $y(y + 1) - 5z + 4w$

21. Identifique o fator comum a todos os termos de cada polinômio.

a) $a^2x + a^2y - 5a^2$ **a^2**

b) $2b^2 - 6a + 8c$ **2**

c) $x^5y^5z^4 + x^7y^4z^3 - 4x^4y^6z^8$ **$x^4y^4z^3$**

22. Fatore os polinômios a seguir colocando o fator comum em evidência.

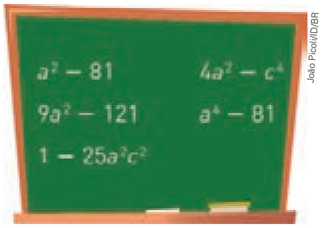
a) $xa^2 - xc^3 - 5x$ **$x(a^2 - c^3 - 5)$**

b) $8t^2 - 12u$ **$4(2t^2 - 3u)$**

c) $y^5 + 2y^3 - 7y^2z$ **$y^2(y^3 + 2y - 7z)$**

d) $4x^3 + 10x^2 - 16x$ **$2x(2x^2 + 5x - 8)$**

23. O professor Alexandre escreveu alguns polinômios na lousa e pediu aos estudantes que escolhessem apenas um, o copiassem no caderno e o fatorassem.



João Picoli/ID/BR

Veja o caderno de quatro estudantes.

Bárbara

$(3a + 11) \cdot (3a - 11)$

ID/BR

Fabrício

$(a + 9) \cdot (a - 9)$

ID/BR

Fernanda

$(a^2 + 9) \cdot (a^2 - 9)$

ID/BR

Júnior

$(a^2 + 9) \cdot (a + 3) \cdot (a - 3)$

ID/BR

Sabendo que Fernanda e Júnior escolheram o mesmo polinômio, responda:

a) Qual foi o polinômio escolhido por Bárbara? **$9a^2 - 121$**

b) Qual polinômio Fabrício escolheu? **$a^2 - 81$**

c) Qual foi o polinômio escolhido por Fernanda e Júnior? **$a^4 - 81$**

d) Por que Fernanda e Júnior obtiveram resultados diferentes? **Porque Júnior fatorou $(a^2 - 9)$ e Fernanda, não.**

- Nas atividades **16** e **18**, solicita-se aos estudantes que calculem o valor numérico de expressões. Caso eles não se recordem desse cálculo, explique-lhes que, ao substituir as variáveis de uma expressão algébrica por números e efetuar as operações indicadas na expressão, eles obtêm o valor numérico correspondente.
- Na atividade **16**, é preciso calcular o valor numérico das expressões e, para isso, recomenda-se fatorá-las. Mas, pelo menos em um dos itens, calcule o valor numérico da expressão sem fatorá-la e depois utilize a expressão fatorada. Assim, você ajuda os estudantes a compreender que pode ser mais rápido e eficiente utilizar expressões fatoradas. Para o item **a**, por exemplo, se substituir x por 99 e y por 101, é necessário fazer os seguintes cálculos:

$$99 \cdot 101 - 99 + 101 - 1$$

Com a expressão fatorada $(x + 1) \cdot (y - 1)$, é preciso fazer $(99 + 1) \cdot (101 - 1)$, isto é, $100 \cdot 100$.
- A atividade **21** possibilita pesquisar fatores em comum. Por exemplo, é preciso perceber que, no item **c**, os fatores x, y e z são comuns, mas os fatores x^4, y^4 e z^3 também são comuns e têm expoentes maiores.
- Na atividade **22**, o item **b** evidencia que nem sempre o fator em comum é um fator algébrico, isto é, que possui variáveis, mas sim um número, no caso, 4. No item **d**, o fator comum é $2x$, isto é, um termo com uma multiplicação entre uma variável e um número.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas envolvem a fatoração de polinômios e a identificação de fatores em comum e de polinômios fatorados, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

- Para estudar o trinômio quadrado perfeito, retome com os estudantes o quadrado da soma e da diferença de dois termos. Apresente-lhes alguns exemplos e pergunte quantos termos cada um tem. Sendo três termos, eles são chamados de trinômios. Também observe com os estudantes que todos são resultado de um quadrado de dois termos. Assim, eles são um quadrado perfeito, pois são a multiplicação de um mesmo fator.
- Discuta os exemplos dessa página do Livro do Estudante para que os estudantes possam analisar e chegar ao quadrado que originou os trinômios.
- Apresente aos estudantes alguns trinômios quadrados perfeitos e peça a eles que encontrem os fatores que foram multiplicados. Inicie com alguns exemplos bem simples de serem identificados. Vá aumentando a dificuldade a cada passo. Solicite-lhes que expliquem como são os termos desse trinômio. Como no exemplo **A**, espera-se que eles observem que há dois termos quadrados e um termo que é o dobro do produto das bases dos outros dois. Ajude-os a observar quando esse último termo é positivo ou negativo, para que identifiquem se estão diante de um produto de diferenças ou de somas.
- Se achar pertinente, retome também as figuras geométricas que geraram esses produtos notáveis, para que os estudantes as construam e observem a fatoração também geometricamente.

Trinômio quadrado perfeito

Vamos retomar dois produtos notáveis vistos anteriormente.

- Quadrado da soma de dois termos: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Quadrado da diferença de dois termos: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Dizemos que $(a + b)^2$ é a forma fatorada do trinômio $a^2 + 2ab + b^2$. Do mesmo modo, $(a - b)^2$ é a forma fatorada do trinômio $a^2 - 2ab + b^2$.

Cada um desses trinômios é denominado trinômio quadrado perfeito, pois a expressão apresenta dois termos que são quadrados perfeitos e o outro termo é o dobro do produto das raízes desses quadrados perfeitos.

quadrados perfeitos

$a^2 + 2ab + b^2$

dobro do produto das raízes desses quadrados perfeitos ($\sqrt{a^2} = a$ e $\sqrt{b^2} = b$)

quadrados perfeitos

$a^2 - 2ab + b^2$

dobro do produto das raízes desses quadrados perfeitos ($\sqrt{a^2} = a$ e $\sqrt{b^2} = b$)

Exemplos

A. Vamos verificar se o trinômio $x^2 + 6x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito.

quadrado perfeito ($x^2 = (x)^2$) quadrado perfeito ($9 = 3^2$)

$x^2 + 6x + 9$

raízes dos quadrados perfeitos: $\sqrt{x^2} = x$ e $\sqrt{9} = 3$
dobro das raízes dos quadrados perfeitos: $2 \cdot x \cdot 3 = 6x$

Então, $x^2 + 6x + 9$ é um trinômio quadrado perfeito.

B. Vamos verificar se o trinômio $y^4 - 8y^3 + 16y^2$ é um trinômio quadrado perfeito.

quadrado perfeito $\left(y^4 = (y^2)^2\right)$ quadrado perfeito $\left(16y^2 = (4y)^2\right)$

$y^4 - 8y^3 + 16y^2$

raízes dos quadrados perfeitos: $\sqrt{(y^2)^2} = y^2$ e $\sqrt{(4y)^2} = 4y$
dobro das raízes dos quadrados perfeitos: $2 \cdot y^2 \cdot 4y = 8y^3$

Portanto, $y^4 - 8y^3 + 16y^2$ é um trinômio quadrado perfeito.

C. Vamos verificar se o trinômio $a^8 + 4a^2b^3 + 4b^6$ é um trinômio quadrado perfeito.

quadrado perfeito $\left(a^8 = (a^4)^2\right)$ quadrado perfeito $\left(4b^6 = (2b^3)^2\right)$

$a^8 + 4a^2b^3 + 4b^6$

raízes dos quadrados perfeitos: $\sqrt{(a^4)^2} = a^4$ e $\sqrt{(2b^3)^2} = 2b^3$
dobro das raízes dos quadrados perfeitos: $2 \cdot a^4 \cdot 2b^3 = 4a^4b^3$

Como $4a^2b^3 \neq 4a^4b^3$, então o trinômio $a^8 + 4a^2b^3 + 4b^6$ não é um trinômio quadrado perfeito.

Soma e diferença de dois cubos

Dados a e b quaisquer, podemos fatorar $a^3 + b^3$ do seguinte modo:

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

De fato, observe que, ao desenvolver essa multiplicação, obtemos $a^3 + b^3$:

$$(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

Do mesmo modo, podemos fatorar $a^3 - b^3$ da seguinte maneira:

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

De fato, ao desenvolver essa multiplicação, obtemos $a^3 - b^3$:

$$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

Exemplos

A. Vamos fatorar $x^3 + 8y^3$.

Observe que essa expressão corresponde à soma de dois cubos, pois $x^3 = (x)^3$ e $8y^3 = (2y)^3$. Assim, podemos escrever:

o sinal é mantido

$$x^3 + 8y^3 = x^3 + (2y)^3 = (x + 2y) \cdot (x^2 - 2xy + 4y^2)$$

Portanto, $x^3 + 8y^3 = (x + 2y) \cdot (x^2 - 2xy + 4y^2)$.

B. Vamos fatorar $27m^6 + 1$.

Como $27m^6 = (3m^2)^3$ e $1 = 1^3$, podemos escrever:

$$27m^6 + 1 = (3m^2)^3 + 1^3 = (3m^2 + 1) \cdot (9m^4 - 3m^2 + 1)$$

Efetuando a multiplicação dos fatores obtidos, verificamos que a fatoração está correta.

$$(3m^2 + 1)(9m^4 - 3m^2 + 1) = 27m^6 - 9m^4 + 3m^2 + 9m^4 - 3m^2 + 1 = 27m^6 + 1$$

C. Vamos fatorar $p^3 - 64y^3$.

Essa expressão corresponde à diferença de dois cubos, pois $p^3 = (p)^3$ e $64y^3 = (4y)^3$.

o sinal é mantido

$$p^3 - 64y^3 = p^3 - (4y)^3 = (p - 4y) \cdot (p^2 + 4py + 16y^2)$$

Efetuando a multiplicação dos fatores obtidos, verificamos que a fatoração está correta.

$$(p - 4y)(p^2 + 4py + 16y^2) = p^3 + 4p^2y + 16py^2 - 4p^2y - 16py^2 - 64y^3 = p^3 - 64y^3$$

- Se julgar pertinente, use cubos para apresentar a soma de dois cubos. Eles devem identificar que $a^3 + b^3$ representa a medida de volume de dois cubos que são obtidos nos cortes de um cubo maior. Devem, também, entender que essa medida de volume é equivalente à diferença entre a medida de volume do cubo inicial e as medidas de volume dos outros blocos retangulares resultantes dos cortes.
- Explique aos estudantes, na lousa, o passo a passo do desenvolvimento da multiplicação $(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$, para que percebam que a fatoração é válida.
- O mesmo vale para a diferença de dois cubos. É importante que seja feito na lousa o passo a passo do desenvolvimento da multiplicação $(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$, para que os estudantes percebam que a fatoração é válida. Porém, se julgar conveniente, deixe-os fazer antes no caderno.

- Na atividade **25**, os termos que estão faltando no desenvolvimento de alguns produtos notáveis devem ser encontrados. Por exemplo, no item **a**, os estudantes devem compreender que falta o quadrado do segundo termo do trinômio quadrado perfeito. Já no item **b**, falta o dobro do produto dos dois termos.
  Nessa atividade, você também pode propor aos estudantes que escrevam os resultados na ordem não usual e deixar que eles descubram qual termo está faltando. Por exemplo, no item **c**, no qual temos $(2x + 3y)^2 = ■ + 12xy + 9y^2$, escreva $(2x + 3y)^2 = 12xy + 9y^2 + ■$, para não induzir os estudantes a perceber que o que falta nesse trinômio é o primeiro termo elevado ao quadrado.
- Na atividade **26**, sugira aos estudantes que pesquisem os trinômios quadrados perfeitos sem fazer a fatoração de todos os itens, mas, sim, buscando as características presentes em um trinômio desse tipo. Por exemplo, no item **a**, o termo central não é compatível com $(x + 4)^2$, pois ele representa o dobro de $2x$, e não de $4x$.
- Para a resolução da atividade **28**, os estudantes devem estar familiarizados com os cubos dos números 3, 4, 5 e 10, para identificar as somas ou as diferenças de dois cubos apresentados.

DE OLHO NA BASE

As atividades apresentadas nessa página envolvem o desenvolvimento algébrico de produtos notáveis, a fatoração de expressões algébricas e o cálculo de expressões numéricas, que representam produtos notáveis ou fatorações, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

28. a) $(m + 3)(m^2 - 3m + 9)$ b) $(p - 10)(p^2 + 10p + 100)$ c) $(4x + 1)(16x^2 - 4x + 1)$ d) $(5y - 6z)(25y^2 + 30yz + 36z^2)$

ATIVIDADES

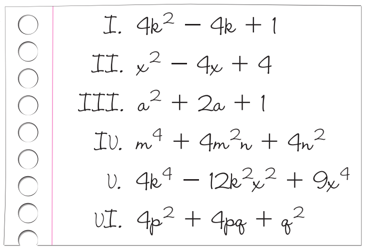
Responda sempre no caderno.

24. A professora Marcela pediu aos estudantes que efetuassem os seguintes produtos:

a) $(a + 1)^2$
b) $(2p + q)^2$
c) $(x - 2)^2$
d) $(2k - 1)^2$
e) $(m^2 + 2n)^2$
f) $(2k^2 - 3x^2)^2$

Eva deu as seguintes respostas:

ID/BR



Identifique qual é o produto correspondente a cada resposta dada por Eva.
I-d; II-c; III-a; IV-e; V-f; VI-b.

25. Copie os itens a seguir no caderno, substituindo cada símbolo ■ por um monômio, de modo a tornar as igualdades verdadeiras.

a) $(m + 3)^2 = m^2 + 6m + ■$ **9**
b) $(m - 4)^2 = m^2 - ■ + 16$ **8m**
c) $(2x + 3y)^2 = ■ + 12xy + 9y^2$ **$4x^2$**
d) $(3x - 2y)^2 = 9x^2 + ■ + 4y^2$ **$-12xy$**
e) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + ■ + \frac{y^2}{9}$ **$\frac{xy}{3}$**
f) $\left(\frac{3x}{5} - \frac{y^2}{2}\right)^2 = \frac{9x^2}{25} - \frac{3xy^2}{5} + ■$ **$\frac{y^4}{4}$**

26. Verifique quais dos trinômios a seguir são quadrados perfeitos. **Itens b e d.**

a) $x^2 + 4x + 16$
b) $y^2 - 6y + 9$
c) $4x^2 - 2x + 1$
d) $a^2 + 10a + 25$

27. Escreva os seguintes trinômios na forma fatorada:

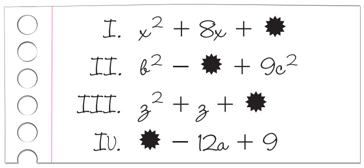
a) $x^2 + 8x + 16$ **$(x + 4)^2$**
b) $4z^2 - 4z + 1$ **$(2z - 1)^2$**
c) $9 + 6a^2b + a^4b^2$ **$(3 + a^2b)^2$**
d) $4x^4 - 28x^2y^3 + 49y^6$ **$(2x^2 - 7y^3)^2$**

28. Fatore os seguintes polinômios:

a) $m^3 + 27$
b) $p^3 - 1\,000$
c) $64x^3 + 1$
d) $125y^3 - 216z^3$

29. Ao escrever alguns trinômios quadrados perfeitos, um estudante deixou cair algumas gotas de tinta sobre sua folha.

ID/BR



Escreva no caderno os trinômios completos, ou seja, incluindo os termos encobertos pela tinta.

30. Veja como Renata determinou o resultado da seguinte expressão numérica:

$7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 3^2 = (7 + 3)^2 = 10^2 = 100$

Utilizando a mesma técnica de Renata, calcule o resultado de cada expressão numérica a seguir.

a) $14^2 + 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot + 6^2$ **400**
b) $34^2 + 2 \cdot 34 \cdot 16 + 16^2$ **2 500**
c) $77^2 + 2 \cdot 77 \cdot 23 + 23^2$ **10 000**
d) $18^2 - 2 \cdot 18 \cdot 8 + 8^2$ **100**
e) $37^2 - 2 \cdot 7 \cdot 37 + 7^2$ **900**
f) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ **1**

31. Associe os produtos do quadro **1** com as respectivas expressões do quadro **2**.

Quadro 1
A. $(x + 10)(x^2 - 10x + 100)$
B. $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
C. $(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$
D. $(3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$

Quadro 2	
I. $8x^3 + 27y^3$	**III.** $x^3 + 1\,000$
II. $27a^3 - 8b^3$	**IV.** $x^3 - 125$

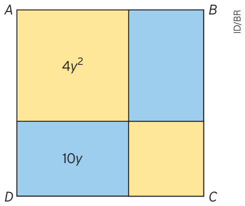
A-III; B-I; C-IV; D-II.

29. I: $x^2 + 8x + 16$; II: $b^2 - 6bc + 9c^2$; III: $z^2 + z + \frac{1}{4}$; IV: $4a^2 - 12a + 9$

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. O quadrado *ABCD* a seguir foi dividido em duas regiões quadradas amarelas e duas regiões retangulares azuis. As medidas das áreas de duas dessas regiões estão indicadas na figura.

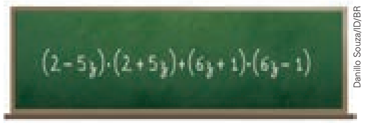


Determine:

a) a medida do lado do quadrado *ABCD*; $2y + 5$

b) a medida da área do quadrado *ABCD*. $4y^2 + 20y + 25$

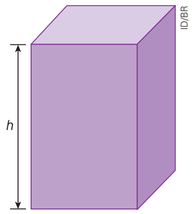
2. Observe a expressão algébrica da lousa e faça o que se pede.



a) Simplifique a expressão da lousa. $11z^2 + 3$

b) Determine um valor positivo para *z*, de modo que o valor numérico da expressão seja 179. 4

3. A figura a seguir representa uma caixa com formato de paralelepípedo reto-retângulo de altura medindo *h*, cuja base é um quadrado. O lado desse quadrado mede 4 unidades a menos que a medida da altura da caixa.



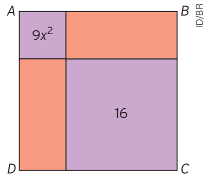
Determine:

a) o polinômio que representa a medida do lado da base da caixa; $h - 4$

b) a medida do volume da caixa; $h^3 - 8h^2 + 16h$

c) a soma das medidas das áreas de todas as faces da caixa. $6h^2 - 32h + 32$

4. O quadrado *ABCD* a seguir foi dividido em dois quadrados menores e dois retângulos. As medidas das áreas desses quadrados estão indicadas na figura.

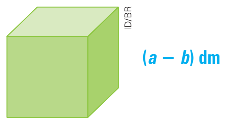


a) Quanto medem os lados dos quadrados menores? $3x$ e 4.

b) Qual é a medida da área de cada retângulo? $12x$

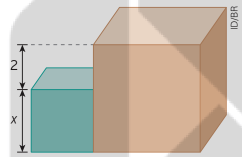
c) Qual polinômio representa a medida da área do quadrado *ABCD*? $9x^2 + 24x + 16$

5. Determine, em dm, a medida da aresta do cubo a seguir, dada a medida de seu volume.



Medida do volume = $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$ dm^3

6. Considere os cubos representados a seguir.



Escreva no caderno uma expressão algébrica que represente quanto a medida do volume do cubo marrom excede a medida do volume do cubo azul. $6x^2 + 12x + 8$

7. No bolso de uma pessoa havia *x* cédulas de *y* reais e *y* cédulas de *x* reais. Ela colocou no bolso mais *x* cédulas de *x* reais e *y* cédulas de *y* reais. Qual é o polinômio, na forma fatorada, que representa a quantidade total de reais no bolso dessa pessoa? $(x + y)^2$

8. Qual é o número natural que, adicionado ao polinômio $36x^2 - 60x + 7$, resulta em um trinômio quadrado perfeito? 18

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa página, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **1**, os estudantes devem decidir qual expressão representa as medidas dos lados do quadrado pequeno, do quadrado grande e dos retângulos que o compõem. Assim, eles podem observar que um dos lados do quadrado amarelo, cuja área mede $4y^2$ u.a., deve ser um termo com a variável *y*. Além disso, o retângulo azul de medida de área $10y$ u.a. tem um lado comum ao quadrado amarelo. Ao analisar ambas as medidas de áreas, é possível perceber que o quadrado amarelo deve ter lado medindo $2y$ u.c., o que resulta que o outro lado do retângulo azul deve medir 5 u.c.

  Com isso, a medida do lado do quadrado *ABCD* deve ser $(2y + 5)$ u.c. e a área dele mede $(2y + 5)^2$ u.a.
- Na atividade **2**, verifique se os estudantes reconhecem que é apresentada uma soma em que cada parcela é um produto da soma pela diferença de dois termos.
- Na atividade **6**, os estudantes devem observar que, como um cubo tem lado de medida *x* u.c. e o lado do outro mede $(x + 2)$ u.c., então a medida do volume do cubo marrom é igual a $(x + 2)^3$ u.v., e a do cubo azul é x^3 u.v.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas abrangem o desenvolvimento algébrico de produtos notáveis e a fatoração de expressões algébricas, bem como relacionam expressões algébricas a figuras geométricas, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para resolver as atividades propostas, é possível que os estudantes ainda tenham dificuldade em relacionar a medida de área de uma figura geométrica plana com as medidas dos lados dela.

Assim, discuta com os estudantes alguns exemplos, iniciando com quadrados de medida 1 u.a., passando por quadrados e retângulos com medidas de áreas que sejam resultado de uma multiplicação de números naturais, passando por fracionários, de forma que eles compreendam a relação entre as medidas da área e dos lados de cada figura.

Em seguida, passe para figuras cujas medidas dos lados envolvam variáveis. Converse com os estudantes sobre como representar essas medidas. A confecção, pelos estudantes, de retângulos com papel também pode ajudá-los a compreender essas relações. Dessa forma, eles terão mais segurança para trabalhar as atividades dessa seção.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Fração algébrica: valor numérico e simplificação.
- Operações com frações algébricas.

Objetivos

- Compreender as frações algébricas.
- Calcular o valor numérico de uma fração algébrica.
- Efetuar operações com frações algébricas.
- Simplificar frações algébricas.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes vão compreender o significado de frações algébricas e poderão efetuar operações e realizar simplificações. Além disso, eles terão a oportunidade de relacionar as frações algébricas com conteúdos vistos em outros momentos, como mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum e produtos notáveis.

FRAÇÃO ALGÉBRICA

- Antes de abordar as frações algébricas, discuta com os estudantes alguns conceitos envolvendo frações. Retome a ideia de simplificação pela equivalência de frações e discuta como eles podem encontrar frações equivalentes para efetuar a simplificação. Assim, ao trabalhar as frações algébricas, será possível fazer uma associação entre essas ideias e a simplificação de frações algébricas. Embora nesse tipo de fração a simplificação envolva fatoração, é importante que os estudantes percebam que se busca uma fração que seja equivalente.
- Apresente o texto e a imagem de abertura deste capítulo e pergunte aos estudantes se eles já ouviram falar em densidade.
- Se julgar oportuno, promova um trabalho em parceria com o professor de Ciências a fim de esclarecer o significado de densidade. É possível realizar esse trabalho a partir da pergunta inicial da abertura deste capítulo e complementar com experimentos simples, como colocar um ovo na água e depois colocá-lo em água com sal. No primeiro caso, o ovo afunda e no segundo, flutua.
- Os estudantes devem compreender que a densidade é dada pela razão entre a massa e o volume e que essas grandezas podem assumir quaisquer valores. Essa é uma fração algébrica simples, que pode ser compreendida por eles.

Capítulo

2 FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Para que o conteúdo deste capítulo seja desenvolvido e compreendido, é importante que os estudantes se recordem como calcular o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum. Além disso, é fundamental que eles tenham compreendido os conteúdos apresentados no capítulo anterior.

Fração algébrica

Você sabe o que acontece quando colocamos óleo de cozinha em um copo com água? Pode parecer mágica, mas esses dois líquidos não se misturam e o óleo fica na parte de cima. E isso acontece porque o óleo é menos denso que a água, ou seja, sua densidade é menor que a densidade da água.

A densidade de um elemento é uma grandeza dada pela razão entre sua medida de massa (m) e sua medida de volume (V) e pode ser representada pela expressão $\frac{m}{V}$, que é um exemplo de fração algébrica.

Frações algébricas são expressões escritas na forma de fração em que o denominador (não nulo) apresenta pelo menos uma variável.

Exemplos

A. $\frac{127}{a}$, para $a \neq 0$.

B. $\frac{x}{x^2 - 1}$, para $x^2 - 1 \neq 0$.

C. $\frac{-y + z}{w - 5}$, para $w - 5 \neq 0$.

Óleo sendo derramado em água.

MR.LIGHTMAN1975/Shutterstock.com/ID/BR

Como a divisão por zero é indefinida, o denominador de uma fração algébrica deve necessariamente ser diferente de zero. Caso contrário, ela não representa um número real. Assim, vamos considerar que todas as frações algébricas representadas apresentam denominador diferente de zero.

Valor numérico de uma fração algébrica

Quando substituímos as letras de uma expressão algébrica por números e efetuamos as operações indicadas, obtemos um resultado. Esse resultado é chamado de **valor numérico**.

Exemplos

Vamos calcular o valor numérico das seguintes expressões:

A. $\frac{127}{a}$, para $a = 1$:

$$\frac{127}{1} = 127$$

B. $\frac{x}{x^2 - 1}$, para $x = 2$:

$$\frac{2}{2^2 - 1} = \frac{2}{4 - 1} = \frac{2}{3}$$

C. $-\frac{y + 3z}{w - 5}$, para $y = 3$, $z = 2$ e $w = 0$:

$$-\frac{3 + 3 \cdot 2}{0 - 5} = -\frac{3 + 6}{-5} = -\frac{9}{-5} = \frac{9}{5}$$

Simplificação de frações algébricas

Simplificar uma fração numérica significa obter uma fração mais simples que seja equivalente à fração dada. Para isso, podemos decompor o numerador e o denominador em fatores primos e simplificar os fatores comuns.

Por exemplo, veja como podemos simplificar a fração $\frac{18}{42}$ dessa maneira:

$$\frac{18}{42} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 7} = \frac{3}{7}$$

Simplificar uma fração algébrica significa obter outra fração algébrica que tenha o mesmo valor numérico da fração algébrica original, sempre que ela estiver definida. Para isso, podemos agrupar termos semelhantes, fatorar o numerador e o denominador e simplificar os fatores comuns.

Exemplos

A. $\frac{4a^4b^2}{3a^3b^5c} = \frac{4 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{b}}{3 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{b} \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c} = \frac{4a}{3b^3c}$

B. $\frac{x^2 + x}{2x^3 - 3x} = \frac{\cancel{x}(x + 1)}{\cancel{x}(2x^2 - 3)} = \frac{x + 1}{2x^2 - 3}$

C. $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x + y)\cancel{(x - y)}}{\cancel{x - y}} = x + y$

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Solicite aos estudantes que simplifiquem a fração $\frac{18}{42}$. Depois, proponha frações algébricas similares a essa, como $\frac{18a}{42}$ e $\frac{18a^2}{42a}$, e aumente a dificuldade, apresentando-lhes frações como $\frac{18a^4b^3}{42a^6b^2}$.

Espera-se que os estudantes relacionem a simplificação de frações numéricas com a simplificação de frações algébricas.

- No capítulo anterior, os estudantes fizeram algumas atividades em que deveriam calcular o valor numérico de uma expressão algébrica. Veja se eles conseguem encontrar o valor numérico de uma fração algébrica e verifique se aplicam a ideia anterior nessa nova situação. Solicite aos estudantes que calculem o valor numérico de cada fração algébrica apresentada nos exemplos e confiram os resultados obtidos. Mostre outras frações algébricas a eles para que calculem o valor numérico.
- Para introduzir a simplificação de frações algébricas, apresente-lhes algumas frações algébricas que não foram simplificadas e peça que obtenham o valor numérico. Discuta com eles se há alguma outra forma de apresentar essas frações algébricas para que o cálculo do valor numérico fique mais simples. Parta das ideias deles para desenvolver a simplificação de frações algébricas.
- Aproveitando a discussão sobre meios de simplificar uma fração algébrica, faça uma associação entre a simplificação de frações numéricas e a de frações algébricas. Escolha frações similares, como a sugerida na atividade complementar desta página. Peça aos estudantes que busquem fatores em comum no numerador e no denominador e escrevam esses fatores separadamente.
- Ao trabalhar com a fração algébrica do exemplo **A**, depois de apresentar os fatores escritos separadamente, peça aos estudantes que organizem os fatores iguais da seguinte forma: $\frac{4a^3ab^2}{3a^3b^2b^3c}$, para que possam simplificar tais fatores.
- Diga aos estudantes que a fatoração de polinômios discutida no capítulo anterior será útil para a simplificação de outras frações algébricas, como as dos exemplos **B** e **C**. Peça aos estudantes que observem os termos e procurem meios de fatorar os polinômios presentes no numerador e no denominador. Sugira a eles que busquem fatores em comum no numerador e no denominador, de forma a simplificar as frações. Os estudantes devem ser acostumados a procurar padrões e regularidades nessas e em outras situações, pois é uma ferramenta eficaz para o entendimento da Matemática.

- No item **d** da atividade **1**, observe como os estudantes fazem a substituição de x por -3, em particular para x^2. Observe se representam essa substituição com parênteses, colocando $(-3)^2$, ou se não usam os parênteses. A falta deles pode acarretar erro de cálculo, pois os estudantes podem deixar o resultado negativo, fazendo -9 em vez de 9.
- O item **d** da atividade **2** apresenta um polinômio de grau 2 no denominador. Isso significa que os estudantes devem obter os valores de x para os quais $x^2 - 4x \neq 0$. Sugira que fatorem o polinômio; nesse caso, temos: $x \cdot (x - 4) \neq 0$. Verifique se eles lembram que, para uma multiplicação ser diferente de zero, nenhum dos fatores pode ser igual a zero. Assim, temos $x \neq 0$ ou $x \neq 4$.
- A atividade **4** envolve uma ideia de simplificação de frações algébricas. Aqui, deve-se esclarecer que a simplificação é feita quando há fatores iguais no numerador e no denominador, e não simplesmente um número. Assim, é preciso encontrar a fração algébrica que tenha o fator 5 tanto no numerador quanto no denominador, como é o caso do item **c**. Nele, pode-se colocar 5 em evidência no numerador e simplificar com o fator 5 do denominador, obtendo $\dfrac{x + y}{y}$.
- Na atividade **8**, os estudantes voltam a trabalhar com a relação entre medida de área e expressões algébricas. Para resolvê-la, é preciso entender que a medida da área é igual ao produto das medidas da base e da altura do retângulo.

DE OLHO NA BASE

As atividades apresentadas envolvem a busca de valor numérico de expressões algébricas, bem como a simplificação de frações algébricas e a relação entre elas e as figuras geométricas, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Encontre o valor numérico de cada expressão conforme os valores indicados.

a) $\dfrac{5p}{p+3}$, para $p = 2$. **2**

b) $\dfrac{a-b}{a+b}$, para $a = -3$ e $b = -1$. $\mathbf{\frac{1}{2}}$

c) $y + \dfrac{1}{y}$, para $y = \dfrac{1}{3}$. $\mathbf{\frac{10}{3}}$

d) $\dfrac{x^2 + x + 1}{2x + 3}$, para $x = -3$. $\mathbf{-\frac{7}{3}}$

2. Determine todos os valores reais de x para os quais o denominador de cada fração algébrica a seguir é diferente de zero.

a) $\dfrac{5x^2 + 1}{x}$ $\mathbf{x \neq 0}$

b) $\dfrac{5}{x - 3}$ $\mathbf{x \neq 3}$

c) $\dfrac{2x^3 + 7x^2 - 9x - 3}{6x + 4}$ $\mathbf{x \neq -\frac{2}{3}}$

d) $\dfrac{9x + 3}{x^2 - 4x}$ $\mathbf{x \neq 0}$ **e** $\mathbf{x \neq 4}$

3. Simplifique as seguintes frações algébricas:

a) $\dfrac{8a^3b^7c^5}{6a^8bc^5}$ $\mathbf{\dfrac{4b^6}{3a^5}}$

b) $\dfrac{y^3 - 2y}{y}$ $\mathbf{y^2 - 2}$

c) $\dfrac{y + 5}{y^2 - 25}$ $\mathbf{\dfrac{1}{y - 5}}$

d) $\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + t}$ $\mathbf{\dfrac{t - 1}{t}}$

e) $\dfrac{a^3b - a^2b^2 + ab^3}{a^4b}$ $\mathbf{\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^3}}$

f) $\dfrac{x^2 - 4xy + 4y^2}{x^2 - 2xy + 2x - 4y}$ $\mathbf{\dfrac{x - 2y}{x + 2}}$

g) $\dfrac{b^2 - 4b + 4}{ab - 2a}$ $\mathbf{\dfrac{b - 2}{a}}$

h) $\dfrac{2x^2 - 3xy - 6x + 9y}{4x^2 - 9y^2}$ $\mathbf{\dfrac{x - 3}{2x + 3y}}$

4. Escreva no caderno a alternativa em que o número 5 pode ser "eliminado", tanto no numerador quanto no denominador, sem alterar o valor da fração algébrica.

a) $\dfrac{x + 5}{y - 5}$

b) $\dfrac{5 + x}{5 + y}$

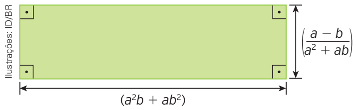
c) $\dfrac{5x + 5y}{5y}$

d) $\dfrac{5x - y}{5}$

Alternativa c.

5. Considere o retângulo a seguir.

Ilustrações: ID/BR



a) Escreva, na forma mais simplificada possível, uma expressão algébrica que represente a medida da área desse retângulo. $\mathbf{b(a - b)}$

b) Calcule a medida da área desse retângulo quando $a = 5$ e $b = 3$. **6**

6. Quando Patrícia simplificou a expressão algébrica $\dfrac{\dfrac{x^3 - 25x}{3x - 15} \cdot \dfrac{15y}{4x}}{\dfrac{xy + 5y}{4}}$, obteve um número primo. Qual foi o número encontrado por Patrícia? **5**

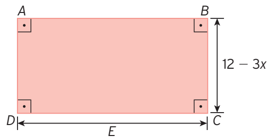
7. Pedro tem x filhos, e Celso tem um filho a mais que Pedro. Pedro vai dividir igualmente uma quantia de y reais entre seus filhos, e Celso vai dividir o dobro dessa quantia entre os seus filhos.

a) Escreva uma fração algébrica que represente quantos reais cada filho de Pedro vai receber e uma que represente quantos reais cada filho de Celso vai receber.

b) Para $x = 4$ e $y = 100$, calcule quantos reais cada filho de Celso vai receber a mais que cada filho de Pedro. **R$ 15,00**

c) Calcule o número de filhos, respectivamente, que Pedro e Celso deveriam ter para que seus filhos recebessem a mesma quantia. **Pedro: 1 filho; Celso: 2 filhos.**

8. O retângulo $ABCD$ tem medida de área $(96 - 6x^2)$ unidades de área, com $0 \leqslant x < 4$.



a) Escreva a expressão algébrica que está representada na figura pela letra E. $\mathbf{2(x + 4)}$

b) Calcule o valor de x, sabendo que a medida do perímetro da região retangular é 36 cm. **2 cm**

7. a) Cada filho de Pedro: $\mathbf{\dfrac{y}{x}}$**; cada filho de Celso:** $\mathbf{\dfrac{2y}{x + 1}}$**.**

Operações com frações algébricas

Os procedimentos para realizar operações com frações algébricas são parecidos aos utilizados para realizar operações com frações numéricas.

Antes, vamos retomar o cálculo do mínimo múltiplo comum e do máximo divisor comum de polinômios, para, assim, realizar operações com frações algébricas.

Cálculo do mmc de polinômios

O mínimo múltiplo comum (mmc) de polinômios é calculado da mesma maneira que o mmc dos números inteiros. Para calculá-lo, é preciso:

- escrever as expressões na forma fatorada;
- multiplicar os fatores comuns e os fatores não comuns, escolhendo, entre os comuns, os que são potências de maior expoente.

Exemplos

A. mmc$(7x^3, 14x^2, 4x)$

$7x^3 = 7 \cdot x^3$
$14x^2 = 2 \cdot 7 \cdot x^2$
$4x = 2^2 \cdot x$

$\rightarrow$ mmc$(7x^3, 14x^2, 4x) = 2^2 \cdot 7 \cdot x^3 = 28x^3$

B. mmc$(y^2 - 9, 2y - 6)$

$y^2 - 9 = (y + 3)(y - 3)$
$2y - 6 = 2(y - 3)$

$\rightarrow$ mmc$(y^2 - 9, 2y - 6) = 2(y - 3)(y + 3)$

C. mmc$(x^3 + 8, x^2 + 4x + 4)$

$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

$\rightarrow$ mmc$(x^3 + 8, x^2 + 4x + 4) = (x + 2)^2(x^2 - 2x + 4)$

Cálculo do mdc de polinômios

O máximo divisor comum (mdc) de polinômios é calculado da mesma maneira que o mdc dos números inteiros. Para calculá-lo, é preciso:

- escrever as expressões na forma fatorada;
- multiplicar os fatores comuns elevados aos menores expoentes.

Exemplos

A. mdc$(7x^3, 14x^2, 4x)$

$7x^3 = 7 \cdot x^3$
$14x^2 = 2 \cdot 7 \cdot x^2$
$4x = 2^2 \cdot x$

$\rightarrow$ mdc$(7x^3, 14x^2, 4x) = x$

B. mdc$(y^2 - 9, 2y - 6)$

$y^2 - 9 = (y + 3)(y - 3)$
$2y - 6 = 2(y - 3)$

$\rightarrow$ mdc$(y^2 - 9, 2y - 6) = y - 3$

C. mdc$(x^3 + 8, x^2 + 4x + 4)$

$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

$\rightarrow$ mdc$(x^3 + 8, x^2 + 4x + 4) = x + 2$

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES ALGÉBRICAS

- Inicie as operações com frações algébricas retomando as operações com frações numéricas. Discuta com os estudantes como eles fazem para adicionar, subtrair, multiplicar e dividir frações. É interessante sugerir a eles que apresentem diferentes exemplos de resolução na lousa, para que todos possam compartilhar suas ideias e, até mesmo, sanar dúvidas e dificuldades.
- Diga aos estudantes que eles devem associar as operações com frações numéricas e frações algébricas. Como eles utilizam o mínimo múltiplo comum (mmc) para adicionar e subtrair algumas frações numéricas, devem fazer o mesmo para as frações algébricas. O objetivo é que eles compreendam processos similares em operações com os dois tipos de fração.
- Para o cálculo do mmc de polinômios, retome, também, o mmc de números. As expressões algébricas devem estar na forma fatorada e os fatores comuns e não comuns devem ser multiplicados.
- Acompanhe com os estudantes os exemplos apresentados nessa página do Livro do Estudante e verifique se compreenderam como encontrar o mmc.
- O mesmo pode ser feito para o máximo divisor comum (mdc). Deixe que os estudantes relacionem o cálculo do mdc para números naturais com o cálculo que deve ser realizado com expressões algébricas.

- As operações com frações algébricas podem ser realizadas da mesma forma que operações com frações numéricas. Pergunte como os estudantes preferem adicionar ou subtrair frações numéricas quando os denominadores são diferentes; eles podem dizer que determinam frações equivalentes ou que calculam o mmc dos denominadores. Sugira a eles que usem o mesmo procedimento e apresente-lhes exemplos de frações algébricas para serem adicionadas ou subtraídas.
- Inicialmente, os estudantes podem decidir simplesmente multiplicar todos os fatores dos denominadores das frações algébricas e, depois, simplificar o resultado. Permita que eles usem os próprios métodos, pois, aos poucos, perceberão que é melhor determinar o menor dos múltiplos para ter cálculos mais simplificados.
- Converse com os estudantes sobre a simplificação das frações resultantes. É aconselhável deixá-las na forma simplificada. Isso não somente deixa a resposta mais elegante, mas também colabora para o aprendizado dos estudantes no que se refere à simplificação de expressões algébricas.

Adição e subtração de frações algébricas

Para adicionar e subtrair frações algébricas, procedemos da mesma maneira que fizemos para adicionar e subtrair frações numéricas.

Frações algébricas de denominadores iguais

Adicionamos ou subtraímos os numeradores e conservamos o denominador.

Exemplos

A. $\frac{5x}{a} + \frac{3x}{a} = \frac{5x + 3x}{a} = \frac{8x}{a}$

B. $\frac{7x}{6y} - \frac{2x - 3}{6y} = \frac{7x - (2x - 3)}{6y} = \frac{7x - 2x + 3}{6y} = \frac{5x + 3}{6y}$

C. $\frac{3m}{2n} + \frac{5m}{2n} - \frac{6m + 2}{2n} = \frac{3m + 5m - 6m - 2}{2n} = \frac{2m - 2}{2n} = \frac{\cancel{2}(m - 1)}{\cancel{2}n} =$

$= \frac{m - 1}{n}$

Frações algébricas de denominadores diferentes

Primeiro, determinamos frações algébricas equivalentes com denominador comum e, depois, adicionamos ou subtraímos o numerador, conservando o denominador comum.

Exemplos

A. $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1 \cdot p + 1 \cdot n}{np} = \frac{p + n}{np}$

$\text{mmc}(n, p) = np$

B. $\frac{3}{n} - \frac{5}{2n} = \frac{3 \cdot 2 - 5 \cdot 1}{2n} = \frac{6 - 5}{2n} = \frac{1}{2n}$

$\text{mmc}(n, 2n) = 2n$

C. $\frac{x}{x + 1} + \frac{3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x}{x + 1} + \frac{3x + 1}{(x + 1)(x - 1)} =$

$\text{mmc}(x + 1, x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$

$= \frac{x \cdot (x - 1) + 3x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x^2 - x + 3x + 1}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x + 1)(x - 1)} =$

$= \frac{(x + 1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x + 1)}(x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1}$

Ao efetuar adições algébricas com frações algébricas, convém simplificar o resultado sempre que possível.

Multiplicação de frações algébricas

Para efetuar multiplicações de frações algébricas, fatoramos os termos possíveis e, em seguida, simplificamos os termos comuns. Por último, multiplicamos os numeradores e, depois, os denominadores.

Exemplos

A. $$\frac{3ab^2}{8}\cdot\frac{4}{a^2b}=\frac{\overbrace{3ab^2}^{:ab}}{\underbrace{8}_{:4}}\cdot\frac{\overbrace{4}^{:4}}{\underbrace{a^2b}_{:ab}}=\frac{3b}{2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{3b}{2a}$$

B. $$\frac{4x^2-10x}{y}\cdot\frac{3y^3}{4x^2-25}=\frac{\overbrace{2x\cdot(2x-5)}^{:(2x-5)}}{\underbrace{y}_{:y}}\cdot\frac{\overbrace{3y^3}^{:y}}{\underbrace{(2x+5)\cdot(2x-5)}_{:(2x-5)}}=$$

$$=\frac{2x}{1}\cdot\frac{3y^2}{2x+5}=\frac{2x\cdot 3y^2}{(2x+5)\cdot 1}=\frac{6xy^2}{2x+5}$$

Divisão de frações algébricas

Para efetuar divisões de frações algébricas, multiplicamos a primeira fração algébrica pelo inverso da segunda fração.

FRAÇÕES ALGÉBRICAS INVERSAS

Duas frações algébricas são inversas uma da outra se o produto de uma pela outra for igual a 1.

Exemplos

A. $$\frac{2ab}{c^2}:\frac{2a}{3c}=\frac{2ab}{c^2}\cdot\frac{3c}{2a}=\frac{\overbrace{2ab}^{:2a}}{\underbrace{c^2}_{:c}}\cdot\frac{\overbrace{3c}^{:c}}{\underbrace{2a}_{:2a}}=\frac{b\cdot 3}{c\cdot 1}=\frac{3b}{c}$$

Multiplicamos a primeira fração algébrica pelo inverso da segunda.

B. $$\frac{\frac{4x^2}{y^3z}}{\frac{10xy}{z^2}}=\frac{4x^2}{y^3z}\cdot\frac{10xy}{z^2}=\frac{\overbrace{4x^2}^{:2x}\cdot\overbrace{z^2}^{:z}}{\underbrace{y^3z}_{:z}\cdot\underbrace{10xy}_{:2x}}=\frac{2x\cdot z}{y^3\cdot 5y}=\frac{2xz}{5y^4}$$

Multiplicamos a primeira fração algébrica pelo inverso da segunda.

- Solicite aos estudantes que retomem as operações que empregam frações numéricas para trabalhar com multiplicação e divisão de frações equivalentes.
- Aos poucos, os estudantes observarão que, se fizerem simplificações antes das multiplicações ou divisões, vão resolver as operações com mais facilidade.

153

- A atividade **9** proporciona uma volta aos produtos notáveis e à possibilidade de uso deles para fatoração e posterior simplificação de frações algébricas.
- A atividade **12** envolve diferentes meios de representar uma expressão. Explore os termos "inverso", "soma" e "dobro" e apresente outras situações para que os estudantes pratiquem a representação algébrica.
- A atividade **16** é interessante para que os estudantes observem que é conveniente simplificar a fração resultante da operação antes de substituir os valores das variáveis.

DE OLHO NA BASE

As atividades apresentadas envolvem operações com frações algébricas, determinação de valor numérico e simplificação de frações algébricas, com as quais os estudantes podem compreender melhor como efetuar essas operações, as relações entre frações numéricas e algébricas e a fatoração e a simplificação, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

9. Efetue as adições e as subtrações a seguir, simplificando-as quando possível.

a) $\frac{1}{x} - \frac{4}{x+2}$ $\mathbf{\frac{2-3x}{x(x+2)}}$

b) $\frac{t+1}{t+2} + \frac{t+3}{t^2-4}$ $\mathbf{\frac{t^2+1}{(t+2)(t-2)}}$

c) $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x^2-x} + \frac{1}{x}$ $\mathbf{\frac{3x^2+x+2}{x(x+1)(x-1)}}$

d) $\frac{2}{y-1} + \frac{4-y}{y^2-1} - \frac{1}{y+1}$ $\mathbf{\frac{7}{(y+1)(y-1)}}$

10. Sejam $A = \frac{2}{x+2}$ e $B = \frac{x}{x^2+x}$, determine:

a) $B - A$

b) $B + B$

c) $B + A$

d) $A - B$

10. a) $\mathbf{\frac{-x}{x^2+3x+2}}$ b) $\mathbf{\frac{2}{x+1}}$ c) $\mathbf{\frac{3x+4}{x^2+3x+2}}$ d) $\mathbf{\frac{x}{x^2+3x+2}}$

11. Efetue $\frac{2}{x+1} + \frac{x^2-25}{x^2+5x}$ e determine o valor numérico dessa expressão para $x = 3$.

11. $\mathbf{\frac{x^2-2x-5}{x(x+1)}; -\frac{1}{6}}$.

12. Represente as situações a seguir com uma única fração algébrica.

a) A soma do inverso de t com o dobro de t^2. $\mathbf{\frac{1+2t^3}{t}}$

b) A soma do inverso de um número x com o inverso de seu dobro. $\mathbf{\frac{3}{2x}}$

13. Considere $E = \frac{3}{x^2} + \frac{1-x}{x} + 5 - \frac{x+3}{x^2}$.

a) Para quais valores reais de x pode-se calcular o valor numérico de E?

b) Calcule o valor numérico de E para $x = 1$ e para $x = 2$. **4 para ambos os valores.**

c) Simplifique a expressão E. Depois, determine o valor numérico dessa expressão para todo $x \neq 0$. **4**

13. a) Para qualquer valor desde que $x \neq 0$.

14. Efetue as expressões a seguir e, quando possível, simplifique-as.

a) $\dfrac{a+3}{\frac{a^2+6a+9}{a}}$ $\mathbf{\frac{a}{a+3}}$

b) $\frac{b^2-8b+16}{a^3+a^2} \cdot \frac{a^2}{b-4}$ $\mathbf{\frac{b-4}{a+1}}$

c) $\frac{x^2-25}{x} \cdot \frac{2x^2-x}{x-5}$ $\mathbf{2x^2+9x-5}$

d) $(c+1) : \frac{c^2+2c+1}{c^2+1}$ $\mathbf{\frac{c^2+1}{c+1}}$

15. Considere a fração algébrica $F = \frac{x-3}{y^2}$ e calcule:

a) o triplo de F; $\mathbf{\frac{3x-9}{y^2}}$

b) o dobro de F; $\mathbf{\frac{2x-6}{y^2}}$

c) $F - 2$. $\mathbf{\frac{-2y^2+x-3}{y^2}}$

16. Calcule o produto de $\frac{(x+a)(x-a)}{ay-y}$ por $\frac{2a-3}{x^2-a^2}$. Em seguida, determine o valor numérico para $x = 3$, $y = 2$ e $a = 4$.

17. Calcule a medida do perímetro de um retângulo com comprimento medindo $\frac{2}{z-2}$ e largura medindo $\frac{4z}{z^2-4}$.

18. Considerando $m \neq n$ e $m \neq -n$, a forma mais simples de $\frac{(m+n)^3 - 2n(n+m)^2}{m^2-n^2}$ é:

a) $\frac{m^2+n^2}{m-n}$

b) $m - n$

c) $m + n$

d) $m - n - 2nm^2$

e) $\frac{(m+n)^2}{m-n}$

Alternativa c.

19. Calcule os seguintes produtos:

a) $\frac{49s^4}{y^3} \cdot \frac{2y^6}{14s^5}$ $\mathbf{\frac{7y^3}{s}}$

b) $\frac{a^2-b^2}{14xy} \cdot \frac{7y}{2a+2b}$ $\mathbf{\frac{a-b}{4x}}$

c) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-16} \cdot \frac{x^2-4x}{x^2-4x}$ $\mathbf{\frac{x-4}{x+4}}$

d) $\frac{8p^2}{9} \cdot \frac{27a}{64p^5} \cdot \frac{5a^3}{3a}$ $\mathbf{\frac{5a^3}{8p^3}}$

20. Calcule as operações a seguir e simplifique-as quando possível.

a) $\frac{2x}{2x-1} + \frac{25}{20x-10}$ $\mathbf{\frac{4x+5}{4x-2}}$

b) $3a - \frac{a+b}{a-b}$ $\mathbf{\frac{3a^2-3ab-a-b}{a-b}}$

c) $\dfrac{\frac{3x+x^2}{2y^4}}{\frac{5x}{y^6}}$ $\mathbf{\frac{3y^2+xy^2}{10}}$

d) $\frac{x^4+1}{x-1} \cdot \frac{x}{x^2-1}$ $\mathbf{\frac{x^5+x}{x^3-x^2-x+1}}$

e) $(x^2+6x) \cdot \frac{x^2+3}{x+6}$ $\mathbf{x^3+3x}$

f) $\frac{2a^3b^5}{c^4} \cdot \frac{bc^6}{16a^5b^4}$ $\mathbf{\frac{b^2c^2}{8a^2}}$

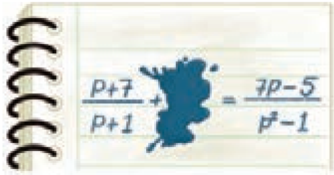
16. $\mathbf{\frac{2a-3}{y(a-1)}; \frac{5}{6}}$.

17. $\mathbf{\frac{12z+8}{(z-2)(z+2)}}$

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. Uma mancha de tinta escondeu parte do cálculo feito por Carlos. **1.** $\frac{-p^2 + p + 2}{(p + 1)(p - 1)}$

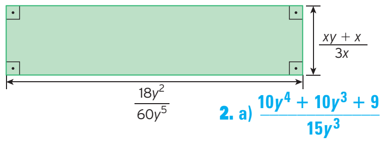


Danillo Souza/ID/BR

Que fração algébrica ficou escondida?

2. Paula quer colocar arame para cercar o jardim de sua casa na forma de um retângulo com comprimento medindo $\frac{18y^2}{60y^5}$ e altura medindo $\frac{xy + x}{3x}$.

ID/BR



2. a) $\frac{10y^4 + 10y^3 + 9}{15y^3}$

a) Encontre uma fração algébrica que represente quanto de arame é necessário para cercar o jardim.

b) Considerando $y = 1$, calcule o valor numérico da fração algébrica do item **a**. $\frac{29}{15}$

3. Escreva uma fração algébrica que, multiplicada por $\frac{2a^5}{7b^2}$, resulte em 3. $\frac{21b^2}{2a^5}$

4. Qual é a fração algébrica que representa a medida da área de um jardim na forma de um paralelogramo cuja base mede $x^2 + 4x + 4$ e cuja altura mede $\frac{1}{x^2 - 4}$? $A = \frac{x + 2}{x - 2}$

5. Que fração, na forma mais simples, você obtém ao dividir $4m^2 - 8mn + 4n^2$ por $4m^2 + 4n^2$?

6. Em uma Olimpíada de Matemática, quatro participantes tiveram de simplificar algumas frações algébricas. Veja os cálculos efetuados por eles.

Sérgio

$$\frac{\cancel{x^2} - \cancel{9}^3}{\cancel{x^2} - \cancel{3}_1} = x - 3$$

ID/BR

5. $\frac{(m - n)^2}{m^2 + n^2}$

Bia

$$\frac{2p + \cancel{9}}{\cancel{9}} = 2p$$

ID/BR

Carol

$$\frac{x^2 - 4x}{x} = \frac{\cancel{x}(x - 4)}{\cancel{x}} = x - 4$$

ID/BR

Luís

$$\frac{\cancel{x^4}^3\, \cancel{y^3}\, \cancel{z^2}}{\cancel{x}\, \cancel{y^3}\, \cancel{z^3}^1} = \frac{x^3}{z}$$

ID/BR

Quais participantes fizeram as simplificações corretamente? **Carol e Luís.**

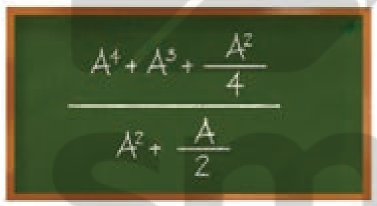
7. Considere as seguintes expressões algébricas:

$$M = \frac{\frac{a - b}{ab} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}}{\frac{3a + 3b}{a^2}}$$

$$N = \frac{a + b}{b} - \frac{a + b}{a} + \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

Que relação existe entre M e N? $M = \frac{N}{6}$

8. Calcule o valor numérico da fração algébrica a seguir para $A = 1{,}5$. Dica: Simplifique a fração algébrica antes de substituir A pelo valor dado. **3**



Danillo Souza/ID/BR

9. Elabore um problema envolvendo frações algébricas. Em seguida, troque-o com um colega. Você resolve o problema criado por ele e ele resolve o problema que você criou. **Resposta pessoal.**

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- A atividade **3** envolve a multiplicação de duas frações algébricas que resulta em um número. Vale a pena observar como os estudantes trabalharão com esse tipo de atividade e que conceitos utilizarão para resolvê-la. Eles podem analisar que basta calcular 3 dividido pela fração algébrica para obter o resultado, isto é:

$$\frac{3}{\frac{2a^5}{7b^2}} = 3 \cdot \frac{7b^2}{2a^5} = \frac{21b^2}{2a^5}$$

Por outro lado, eles podem buscar uma fração algébrica que, multiplicada por $\frac{2a^5}{7b^2}$, resulte em 3. Isso significa que a fração deveria ter um numerador que, dividido por $7b^2$, resultasse em 3, isto é, $21b^2$, e um denominador que, dividido por $2a^5$, resultasse em 1, isto é, nele mesmo. Assim, a fração deveria ser $\frac{21b^2}{2a^5}$.

- A atividade **6** sugere analisar o trabalho realizado por quatro estudantes ao simplificar frações algébricas. Entre elas estão os erros de Sérgio e Bia ao simplificar termos que não são fatores no numerador e no denominador. Esse é um erro recorrente em estudantes que iniciam o trabalho com álgebra. É interessante que você os coloque em situação de conflito, em que eles devem analisar uma expressão que acreditam estar correta, porém há erros. Eles devem observar que Sérgio simplificou 9 e 3, que não são fatores comuns ao numerador e ao denominador. O mesmo fez Bia, que simplificou 9 do denominador com 9 do numerador que não está em evidência, logo não é fator. Já os trabalhos de Carol e Luís apresentam a simplificação de fatores. Note que no trabalho de Carol foi necessário colocar x em evidência e simplificar esse fator do numerador com a variável no denominador.

DE OLHO NA BASE

As atividades dessa seção relacionam ideias da Álgebra e da Geometria, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Uma dificuldade que os estudantes podem ter nesse momento é simplificar fatores em frações algébricas. Às vezes, eles não observam que os termos a serem simplificados devem ser fatores do numerador e do denominador, como na atividade **6**.

Para que os estudantes observem claramente o problema, solicite-lhes que substituam os valores nas variáveis e verifiquem se há uma igualdade no trabalho de Sérgio e Bia. Para isso, pergunte: Se substituírem x por 1 na fração algébrica de Sérgio, as expressões no primeiro e no segundo membro resultarão no mesmo valor? Ao fazerem essa substituição, eles vão obter a expressão $4 = 2$, o que não é verdadeiro; então, as expressões não podem ser iguais; logo, a simplificação realizada não está correta. Resultado similar ocorrerá na simplificação realizada por Bia.

Colocar os estudantes diante de situações como esta permite-lhes refletir sobre o trabalho realizado e compreender o que realizaram incorretamente e, assim, corrigir o procedimento para obter a resposta correta.

CAPÍTULO 3

Conteúdos

- Equações do 2º grau com uma incógnita.
- Raízes de uma equação do 2º grau.
- Resolução de equações do 2º grau completas e incompletas.
- Análise do discriminante de uma equação do 2º grau.
- Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau: relações de Girard.
- Sistemas de equações do 2º grau.

Objetivos

- Identificar e compreender as equações do 2º grau.
- Resolver equações do 2º grau completas e incompletas.
- Utilizar o método de completar quadrados para resolver equações do 2º grau.
- Interpretar geometricamente equações do 2º grau.
- Utilizar a fórmula geral para resolução de equações do 2º grau.
- Relacionar raízes e coeficientes de uma equação do 2º grau.
- Resolver situações-problema que envolvem equações do 2º grau.
- Resolver sistemas de equações do 2º grau.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de atribuir significado algébrico e geométrico aos métodos de resolução de equações do 2º grau, auxiliando no desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento computacional deles.

EQUAÇÕES DO 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

- Incentive os estudantes a criar estratégias próprias e a utilizar diferentes métodos nas resoluções das equações do 2º grau.
- Oriente os estudantes a verificar se as soluções encontradas estão de acordo com a situação apresentada; por exemplo, no caso de um cálculo de medida de área, não é permitido um valor negativo como solução. Além disso, é importante que eles percebam que podem testar as raízes encontradas na equação como forma de verificar se essas soluções estão corretas.
- Na introdução do capítulo, apresenta-se uma situação de um paraquedista em queda livre, que é representada por uma equação do 2º grau. Comente com os estudantes sobre a velocidade em que o paraquedista cai do avião, sobre os cuidados que ele deve ter para garantir a abertura do paraquedas e, também, sobre as boas sensações que a prática desse esporte pode trazer. Considerando a equação apresentada, pergunte a eles o que a incógnita t representa.
- O contexto apresentado nesta página pode servir de ponto de partida para um trabalho que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF89EF20** [Identificar riscos, formular estratégias e observar normas de segurança para superar os desafios na realização de práticas corporais de aventura na natureza] do componente curricular Educação Física.

Capítulo 3

EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Para o trabalho com os conteúdos deste capítulo, retome com os estudantes as equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ e certifique-se de que eles compreenderam bem os conteúdos dos capítulos anteriores desta unidade.

Equações do 2º grau com uma incógnita

Imagine a seguinte situação: um paraquedista salta de um avião a 3 700 m e abre o paraquedas quando está a uma altura de 1 500 m em relação ao solo. Desse modo, ele se desloca 2 200 m em queda livre, partindo de uma velocidade inicial nula. Quanto tempo dura esse deslocamento de 2 200 m?

O físico, matemático e astrônomo italiano Galileu Galilei (1564-1642) desenvolveu um modelo matemático que pode ser utilizado para todo corpo em queda livre, ou seja, qualquer corpo abandonado no repouso, isto é, com velocidade inicial nula. De acordo com esse modelo, a situação do paraquedista pode ser descrita pela seguinte equação:

$$\frac{1}{2} \cdot 10t^2 = 2\,200$$

em que 2 200 é a medida da altura da queda (dada em m), 10 é a medida da aceleração da gravidade no local da queda (dada em m/s^2) e t é a medida do tempo de queda (dado em s).

O paraquedismo é um esporte radical, em que, geralmente, salta-se de um avião em voo horizontal. A velocidade atingida na queda livre costuma variar entre 200 km/h e 350 km/h. Santa Catarina. Foto de 2018.

Mauricio Graiki/Shutterstock.com/ID/BR

A equação $\frac{1}{2} \cdot 10t^2 = 2\,200$ é um exemplo de equação do 2º grau com uma incógnita. Vamos relembrar como resolver esse tipo de equação.

Para calcular a medida do tempo que o paraquedista leva até abrir o paraquedas, fazemos:

$$\frac{1}{2} \cdot 10t^2 = 2\,200$$

$$5t^2 = 2\,200$$

$$t^2 = \frac{2\,200}{5}$$

$$t^2 = 440$$

$$t = \pm\sqrt{440} \begin{cases} t_1 = 21 \\ t_2 = -21 \end{cases}$$

O símbolo ± é uma maneira simplificada de escrever $+\sqrt{440}$ ou $-\sqrt{440}$.

Como a grandeza tempo só pode ser expressa por um número positivo, o paraquedista abrirá o paraquedas 21 segundos após saltar do avião.

A equação que acabamos de resolver é uma equação do 2º grau. Agora, vamos aprender a reconhecer esse tipo de equação.

Uma **equação do 2º grau com uma incógnita** é qualquer equação que pode ser escrita na forma reduzida $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais denominados coeficientes, $a \neq 0$ e x é a incógnita.

TERMO INDEPENDENTE

Em uma equação do 2º grau, o coeficiente c é chamado de termo independente.

Equações do 2º grau completas

Quando a equação do 2º grau tem todos os termos diferentes de zero, ou seja, $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, dizemos que a equação do 2º grau é **completa**.

Exemplos

A. $-3x^2 + 7x - 5 = 0$, em que $a = -3$, $b = 7$ e $c = -5$.

B. $\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{3} + \sqrt{3} = 0$, em que $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{2}{3}$ e $c = \sqrt{3}$.

Equações do 2º grau incompletas

Quando pelo menos um dos coeficientes, b ou c, for igual a zero, dizemos que a equação do 2º grau é **incompleta**.

Exemplos

A. $2x^2 + 3x = 0$, em que $a = 2$, $b = 3$ e $c = 0$.

B. $-x^2 + 5 = 0$, em que $a = -1$, $b = 0$ e $c = 5$.

C. $-13x^2 = 0$, em que $a = -13$, $b = 0$ e $c = 0$.

PARE E REFLITA

Se uma equação tiver o coeficiente a nulo, ou seja, o coeficiente do termo x^2 igual a zero, ela pode ser considerada uma equação do 2º grau incompleta?

Não, pois, se *a* for igual a zero, ela não é uma equação do 2º grau.

- É importante fazer um levantamento prévio dos conhecimentos que os estudantes tiveram sobre equações do 2º grau no 8º ano com a finalidade de melhor planejar o ensino e conduzir o trabalho com o conteúdo deste capítulo. É previsto que eles tenham trabalhado com equações incompletas, do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$. Relembre com eles a resolução desse tipo de equação e como eles devem fazer para encontrar as raízes dela.
- Ao apresentar uma equação do 2º grau na forma $ax^2 + bx + c = 0$, discuta com os estudantes por que o coeficiente a não pode ser igual a zero. Comente, também, que, ao trabalhar com equações, a "letra" não é mais uma variável, que assume qualquer valor, mas, sim, uma incógnita, que, no caso das equações do 2º grau, assume no máximo dois valores. Converse também sobre os coeficientes de x e o termo independente. Quando os termos b e c não são iguais a zero, há uma equação completa. Se um desses dois termos for zero, então há uma equação incompleta.
- Apresente aos estudantes exemplos de equações completas e incompletas para que possam distingui-las e compreender melhor essa ideia. Discuta com eles a possibilidade de b e c serem ambos iguais a zero: O que isso significa? É possível a incógnita assumir algum valor diferente de zero independentemente do valor do coeficiente de x^2? Espera-se que os estudantes concluam que em uma equação do tipo $ax^2 = 0$, independentemente do valor do coeficiente a, o valor da incógnita sempre será zero.

- Apresente alguns números e solicite aos estudantes que verifiquem se eles são ou não raízes de uma equação do 2º grau. Assim, espera-se que eles compreendam o que significa ser raiz de uma equação e tenham um meio de verificar se os cálculos efetuados para resolver uma equação realmente resultaram nas raízes dela.
- Explore todos os exemplos desta página do Livro do Estudante para verificar se os estudantes estão compreendendo como determinar as soluções de uma equação do 2º grau. Os exemplos **B** e **C** são interessantes para que eles discutam possibilidades diferentes de valores para m, dependendo do valor escolhido para a raiz.

Raízes ou soluções de uma equação do 2º grau

Assim como nas demais equações algébricas já estudadas, também são determinadas soluções para as equações do 2º grau. As soluções encontradas são denominadas raízes da equação, que correspondem aos valores atribuídos à incógnita que tornam a sentença verdadeira.

Exemplos

A. Vamos verificar se os números 2, -4, 0, $-\frac{1}{2}$ e 5 são soluções da equação $x^2 + 2x - 8 = 0$.

- Para $x = 2$, temos:
$$2^2 + 2 \cdot 2 - 8 = 4 + 4 - 8 = 8 - 8 = 0$$
Logo, 2 é solução da equação.
- Para $x = -4$, temos:
$$(-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 8 = 16 - 8 - 8 = 8 - 8 = 0$$
Logo, -4 é solução da equação.
- Para $x = 0$, temos:
$$0^2 + 2 \cdot 0 - 8 = 0 + 0 - 8 = -8$$
Como $-8 \neq 0$, 0 não é solução da equação.
- Para $x = -\frac{1}{2}$, temos:
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 8 = \frac{1}{4} - 1 - 8 = \frac{1}{4} - 9 = \frac{1 - 36}{4} = -\frac{35}{4}$$
Como $-\frac{35}{4} \neq 0$, $-\frac{1}{2}$ não é solução da equação.
- Para $x = 5$, temos:
$5^2 + 2 \cdot 5 - 8 = 25 + 10 - 8 = 35 - 8 = 27$
Como $27 \neq 0$, 5 não é solução da equação.

B. Determine o valor de m para que 2 seja raiz da equação $x^2 - x - (m - 1) = 0$.

Substituímos a incógnita x por 2 e determinamos o valor de m:
$$2^2 - 2 - (m - 1) = 0$$
$$4 - 2 - m + 1 = 0$$
$$3 - m = 0$$
$$-m = -3$$
$$m = 3$$
Logo, o valor de m que torna 2 raiz dessa equação é 3.

C. Dada a equação $2x^2 + m = 0$, vamos determinar o valor de m para que 1 seja raiz dessa equação do 2º grau incompleta.

Substituímos a incógnita x por 1 e determinamos o valor de m:
$$2 \cdot 1^2 + m = 0$$
$$2 + m = 0$$
$$m = -2$$
Logo, o valor de m que torna 1 raiz dessa equação é -2.

OUTRAS FONTES

GARBI, G. G. *O romance das equações algébricas*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

Nesse livro, o autor descreve a história do desenvolvimento das equações algébricas, apresentando não somente a Matemática por trás de cada método, mas também os fatos históricos que ajudaram nesse desenvolvimento.

IMENES, L. M. P. *et al. Álgebra*. 6. ed. São Paulo: Atual, 1992.

De forma interessante e envolvente, esse livro apresenta diversas utilidades práticas de conteúdos de Álgebra. É uma importante ferramenta que pode ser usada para enriquecer o trabalho em sala de aula.

3. a) $-3x^2 + 12x - 13 = 0$; é uma equação do 2º grau.
b) $2x^2 - x = 0$; é uma equação do 2º grau.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Escreva no caderno apenas as equações que são do 2º grau. **Itens b, g e h.**

a) $x + 5 = 9$
b) $x^2 - 3x + 1 = 0$
c) $x^6 + 5 = 2$
d) $x^8 + 2x^2 = 3$
e) $x^3 + x^2 + 2 = 0$
f) $6x + 1 = 3$
g) $x + x^2 = 0$
h) $x^2 - 3 = 5x^2$

2. Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o com os valores dos coeficientes das equações indicadas. **Consulte a resposta neste manual.**

Equação	a	b	c
$2x^2 = 5$			
$2x^2 = 5x - 5$			
$x + 5x^2 = 5$			
$4x^2 = 5 - 5x$			
$3x^2 = 5x$			
$-5x^2 + 3 = 4x$			
$\frac{x^2}{5} - \frac{x}{3} + 4 = 0$			

3. Escreva as equações a seguir na forma reduzida e identifique quais são do 2º grau.

a) $(x + 6)(x - 2) + 4x = (2x - 1)^2$
b) $x(x + 1)(x - 1) + 2x^2 = x^3$
c) $x(2x^2 + 3) = (7 - x)^2$
d) $3x(x - 2) = 1 + 3x^2$

4. Classifique cada equação a seguir em completa ou incompleta. Depois, indique os valores dos coeficientes de cada uma.

a) $3x^2 + 6x = 0$ **Incompleta; $a = 3$, $b = 6$ e $c = 0$.**
b) $x^2 + 2x = 1$ **Completa; $a = 1$, $b = 2$ e $c = -1$.**
c) $x^2 + 7 = 5$ **Incompleta; $a = 1$, $b = 0$ e $c = 2$.**
d) $x(x - 5) = 1$ **Completa; $a = 1$, $b = -5$ e $c = -1$.**
e) $2x^2 + 7x + 6 = 0$ **Completa; $a = 2$, $b = 7$ e $c = 6$.**
f) $(2x + 3)^2 = 4 - 12x$ **Completa; $a = 4$, $b = 24$ e $c = 5$.**

5. Verifique qual ou quais números são soluções da equação dada.

Equação	Números	
$2x^2 + 7x - 4 = 5$	$-4, \frac{1}{2}, 2$ e 5	**Nenhum dos números.**
$-x^2 + x - 2 = 0$	$0, 1, \frac{1}{2}, 2$ e 3	**Nenhum dos números.**
$x^2 - 8x + 16 = 0$	$-3, -\frac{2}{3}, -1, 1$ e 4	**4**
$\frac{x^2}{6} + 2x + 6 = 0$	$-10, -8, -6, \frac{7}{4}$, e 0	**−6**

6. Reescreva as sentenças a seguir no caderno, de modo que elas se tornem verdadeiras.

a) O coeficiente a de uma equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser zero.
b) O maior expoente da incógnita em uma equação do 2º grau pode ser diferente de 2.
c) O número 3 é solução da equação $x^2 + 3x = 0$.
d) A equação $3x^2 + 5x = 0$ é completa.

6. Respostas possíveis:
a) O coeficiente a de uma equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ não pode ser zero.
b) O maior expoente da incógnita em uma equação do 2º grau não pode ser diferente de 2.

7. Verifique quais das equações a seguir têm 4 como solução. **Itens c e d.**

a) $x^2 + 16 = 0$
b) $x^2 + 4x = 0$
c) $x^2 - 16 = 0$
d) $x^2 - 4x = 0$
e) $x^2 + 2 = 0$
f) $x^2 - 2 = 0$
g) $x^2 + 6x + 8 = 0$
h) $x^2 - x - 20 = 0$

8. Considere a equação $4x^2 + \frac{2x}{5} = 0$.

a) Quais são os coeficientes dessa equação? **$a = 4$, $b = \frac{2}{5}$, $c = 0$.**
b) Essa equação é completa ou incompleta? **Incompleta.**
c) Entre os números $2, -\frac{1}{10}, 0, \frac{1}{10}$ e $\frac{2}{3}$, quais são soluções dessa equação? **c) $-\frac{1}{10}$ e 0.**

9. Determine o valor do coeficiente c da equação $x^2 - 7x - 2c = 0$, sabendo que -3 é uma de suas raízes. **$c = 15$**

3. c) $2x^3 - x^2 + 17x - 49 = 0$; não é uma equação do 2º grau.
d) $-6x - 1 = 0$; não é uma equação do 2º grau.

6. c) O número -3 é solução da equação $x^2 + 3x = 0$.
d) A equação $3x^2 + 5x = 0$ é incompleta.

- Na atividade **1**, os estudantes podem analisar as equações e determinar quais delas são quadráticas. Assim, os itens **b**, **g** e **h** contêm equações do 2º grau.
- Na atividade **3**, é necessário resolver as operações até obter a forma reduzida de cada equação. Por exemplo, no item **a**, as multiplicações a serem realizadas resultam em x^2, então a equação é do 2º grau. Já no item **c**, as multiplicações resultam em x^3, então ela é uma equação do 3º grau. É necessário, entretanto, chamar a atenção dos estudantes para a equação como um todo, pois no item **b** as multiplicações resultam em x^3, mas, ao efetuar as operações, observa-se que a forma reduzida da equação é $2x^2 - x = 0$, pois os termos com x^3 se anulam.
- Na atividade **7**, alguns itens podem ser descartados somente por uma avaliação prévia, sem a necessidade de efetuar todas as operações. Por exemplo, no item **a**, os estudantes podem pensar que 4 é uma solução, quando, na verdade, é solução da equação do item **c**. O item **d** pode ser lido como o quadrado de 4 subtraído de $4 \cdot 4$, que é o mesmo que o quadrado de 4, então 4 é raiz dessa equação. Outras discussões como esta podem ser feitas a partir dessa atividade.

RESPOSTA

2.

Equação	a	b	c
$2x^2 = 5$	2	0	−5
$2x^2 = 5x - 5$	2	−5	5
$x + 5x^2 = 5$	5	1	−5
$4x^2 = 5 - 5x$	4	5	−5
$3x^2 = 5x$	3	−5	0
$-5x^2 + 3 = 4x$	−5	−4	3
$\frac{x^2}{5} - \frac{x}{3} + 4 = 0$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	4

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. *Álgebra para a formação do professor*: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

Nesse livro, os autores apresentam as dificuldades dos estudantes ao aprenderem equações e funções, apoiadas em teorias de Educação Matemática, que podem colaborar para que os professores ajudem os estudantes a superá-las.

ROSA NETO, E. *As mil e uma equações*. 10. ed. São Paulo: Ática, 2002.

Nessa obra, dois príncipes do Oriente Médio usam a Matemática para disputar a mão de uma princesa. Divertido e interessante para as aulas de Matemática.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES INCOMPLETAS

- Ao trabalhar com equações do 2º grau incompletas, pode-se solicitar aos estudantes que analisem a equação e verifiquem se é possível encontrar as raízes dela sem que eles precisem utilizar a fórmula geral de resolução de equações do 2º grau para isso. Assim, as ideias de produtos notáveis e de fatoração, desenvolvidas nos capítulos anteriores, colaboram para que os estudantes possam compreender diferentes meios de resolver equações incompletas.
- No caso em que o coeficiente independente é igual a zero, a equação do 2º grau é da forma $ax^2 + bx = 0$ e contém um fator que pode ser colocado em evidência. Assim, pode-se escrever essa equação na forma $x(ax + b) = 0$. Uma multiplicação cujo produto é zero deve ter um dos fatores igual a zero. Assim, temos $x = 0$ ou $ax + b = 0$. Equações desse tipo sempre têm zero como raiz e a outra raiz é da forma $x = -\frac{b}{a}$. Não é necessário apresentar essa igualdade como uma fórmula aos estudantes; espera-se que eles percebam essa regularidade nas respostas à medida que forem resolvendo várias equações desse tipo.
- Discuta com os estudantes os exemplos apresentados. Um deles envolve a condição de existência de uma fração algébrica, cujo denominador é um polinômio do 2º grau. Exemplos como este são interessantes para os estudantes aprenderem a refletir sobre os resultados encontrados algebricamente. No exemplo **B**, a equação tem duas soluções, mas uma delas vai de encontro à condição de existência, o que resume a uma única solução.
- Oriente os estudantes sobre cuidados que devem tomar ao usar as relações de equivalências em equações, a fim de evitar falácias. Explique a eles que falácia é todo tipo de raciocínio equivocado que resulta em um argumento inválido. Apresente-lhes alguns exemplos, como:

  Sendo $b = a$, temos:
  - Multiplicando por a os dois membros dessa igualdade, obtemos $ab = a^2$.
  - Subtraindo b^2 dos dois membros, obtemos $ab - b^2 = a^2 - b^2$.
  - Fatorando os dois membros, obtemos $b(a - b) = (a + b)(a - b)$.
  - Dividindo os dois membros por $(a - b)$, obtemos $b = a + b$.
  - Como $b = a$, então $b = b + b$, ou seja, $b = 2b$.
  - Dividindo os dois membros da igualdade por b, temos $1 = 2$, que é falso.

  Diga aos estudantes que o erro foi cometido ao dividir os dois membros da igualdade por $(a - b)$, pois, sendo $b = a$, então $a - b = 0$. Evidencie que o boxe *Fração algébrica* chama a atenção para que eles tomem esse cuidado.

Resolução de equações incompletas

Vamos estudar como resolver as equações incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$ e $ax^2 = 0$.

Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$

Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, têm uma solução igual a zero e outra diferente de zero.

Exemplos

A. Vamos determinar as soluções da equação incompleta $x^2 - 6x = 0$.

Nessa equação, temos $a = 1$, $b = -6$ e $c = 0$.

Como a incógnita x aparece nos dois termos da equação, é possível colocá-la em evidência.

$$x^2 - 6x = 0$$
$$x \cdot (x - 6) = 0$$

Como o produto de x por $x - 6$ é igual a zero, pelo menos um dos fatores deve ser zero.

$$x \cdot (x - 6) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - 6 = 0 \Rightarrow x_2 = 6 \end{cases}$$

Portanto, as soluções dessa equação são 0 e 6.

B. Vamos verificar qual é a condição de existência da equação $\frac{x}{x^2 + x} = 4$ e, em seguida, determinar sua solução.

Como temos uma fração algébrica nessa equação, primeiro precisamos encontrar a condição de existência dessa fração, ou seja, a condição para que seu denominador não seja nulo.

$$x^2 + x \neq 0$$

$$x \cdot (x + 1) \neq 0 \begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_2 + 1 \neq 0 \Rightarrow x_2 \neq -1 \end{cases}$$

Agora, resolvemos a equação dada:

$$\frac{x}{x^2 + x} = 4$$
$$x = 4(x^2 + x)$$
$$x = 4x^2 + 4x$$
$$4x^2 + 4x - x = 0$$
$$4x^2 + 3x = 0$$

$$x \cdot (4x + 3) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 4x_2 + 3 = 0 \Rightarrow 4x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Mas, pela condição de existência, $x_1 \neq 0$; então, a solução da equação é $-\frac{3}{4}$.

RAÍZES OU SOLUÇÕES

Em uma equação do 2º grau, para diferenciarmos uma solução (ou raiz) de outra, podemos nomeá-las x_1 e x_2, por exemplo.

FRAÇÃO ALGÉBRICA

Como a fração algébrica é o quociente de dois polinômios, o denominador deve ser diferente de zero.

Equações do tipo $ax^2 + c = 0$

Equações do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, têm duas soluções reais opostas, quando $a > 0$ e $c < 0$ ou $a < 0$ e $c > 0$, e não têm soluções reais, quando $a > 0$ e $c > 0$ ou $a < 0$ e $c < 0$.

Exemplos

A. Vamos resolver a equação $x^2 - 16 = 0$.

Nessa equação, temos $a = 1$, $b = 0$ e $c = -16$.

Como $a > 0$ e $c < 0$, então essa equação tem duas soluções reais.

Vamos resolver essa equação de duas maneiras.

1ª maneira: isolando a incógnita no primeiro membro.

$$x^2 - 16 = 0$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \pm\sqrt{16} \begin{cases} x_1 = -\sqrt{16} \Rightarrow x_1 = -4 \\ x_2 = \sqrt{16} \Rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$$

Observe que:

- $(-4)^2 = 16$
- $4^2 = 16$

Logo, as soluções da equação são -4 e 4.

2ª maneira: usando a fatoração.

O primeiro membro dessa equação é uma diferença de quadrados. Assim, fatorando essa expressão, temos:

$$x^2 - 16 = 0$$
$$x^2 - 4^2 = 0$$
$$(x + 4)(x - 4) = 0 \begin{cases} x_1 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -4 \\ x_2 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$$

Logo, as soluções da equação são -4 e 4.

B. Vamos verificar se existe solução real para a equação $x^2 + 4 = 0$.

Nessa equação, $a = 1$, $b = 0$ e $c = 4$.

Como $a > 0$ e $c > 0$, então não existem soluções reais.

Vamos fazer a verificação da não existência de soluções reais.

Isolando x no primeiro membro da equação, temos:

$$x^2 + 4 = 0$$
$$x^2 = -4$$

O quadrado de qualquer número real nunca é negativo. Portanto, essa equação não tem soluções reais.

- As equações em que o coeficiente de x é nulo têm a forma $ax^2 + c = 0$. Primeiro, explique aos estudantes o que ocorre quando $a > 0$ e $c > 0$. Apresentando exemplos numéricos, eles podem verificar, por exemplo, que a equação $3x^2 + 12 = 0$ tem $a > 0$ e $c > 0$ e pode ser escrita como $3x^2 = -12$. Como um número elevado ao quadrado será sempre positivo e, multiplicado por outro número positivo, permanecerá positivo, então essa igualdade não é válida, pois um número positivo não pode ser igual a um número negativo. Assim, na situação em que a e c são positivos, a equação do 2º grau não tem raízes reais. O mesmo se dá para a e c negativos simultaneamente.
- Discuta com os estudantes cada exemplo apresentado no Livro do Estudante. No exemplo **A**, a equação $x^2 - 16 = 0$ pode ser representada como $x^2 = 16$. Verifique se eles entendem que os valores que x pode assumir são 4 e -4. Assim, eles compreenderão melhor a ideia de que as equações do 2º grau têm duas raízes. Em particular, eles entenderão também por que a fórmula geral de resolução de equações do 2º grau tem "±".
- Mostre aos estudantes que no exemplo **A** há mais uma maneira de trabalhar equações incompletas dessa forma, seja isolando a incógnita no primeiro membro, seja por fatoração.

DE OLHO NA BASE

Utilizar a fatoração das expressões algébricas para resolver equações do 2º grau favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

- Discuta com os estudantes o exemplo **C**, que solicita a análise da condição de existência de uma equação e, depois, a determinação de suas raízes, para que o denominador da fração algébrica seja diferente de zero, $x^2 - 2 \neq 0$. Essa equação tem duas raízes: $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Ao resolver a equação, é importante que os estudantes voltem à condição de existência e verifiquem se as raízes encontradas a satisfazem. No caso da equação desse exemplo, as soluções 5 e -5 satisfazem a condição de existência.
- Apresente aos estudantes outras equações dos exemplos dessa forma, para que se acostumem a refletir sobre a validade, ou não, das soluções encontradas para o problema.
- Reforce com os estudantes que nas equações do tipo $ax^2 = 0$ só existe uma raiz igual a zero. Isso sempre acontece, pois, para um produto ser igual a zero, implica um dos fatores também ser zero. Como $a \neq 0$, então x deve ser igual a zero. Com essa reflexão, não há a necessidade de os estudantes resolverem a equação, dividindo-a pelo coeficiente a.

C. Vamos verificar qual é a condição de existência da equação $\frac{23}{x^2 - 2} = 1$ para depois determinar as suas soluções.

Como temos uma fração algébrica nessa equação, primeiro precisamos encontrar a condição de existência dessa fração, ou seja, os valores que garantem que o denominador não seja nulo.

$$x^2 - 2 \neq 0$$
$$x^2 \neq 2$$
$$x \neq \pm\sqrt{2}$$

Agora, vamos resolver a equação dada:

$$\frac{23}{x^2 - 2} = 1$$
$$23 = 1(x^2 - 2)$$
$$x^2 - 2 = 23$$
$$x^2 - 2 - 23 = 0$$
$$x^2 - 25 = 0$$

Nessa equação, temos $a = 1$, $b = 0$ e $c = -25$. Como $a > 0$ e $c < 0$, existem duas soluções reais.

Então:

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm\sqrt{25} \quad \begin{cases} x_1 = -\sqrt{25} \Rightarrow x_1 = -5 \\ x_2 = +\sqrt{25} \Rightarrow x_2 = 5 \end{cases}$$

Como $x_1 = -5$ e $x_2 = 5$ satisfazem a condição de existência, então as soluções da equação são 5 e -5.

Equações do tipo $ax^2 = 0$

Equações do tipo $ax^2 = 0$, com $a \neq 0$, têm uma única solução, que é $x = 0$. É comum dizer, nesses casos, que a equação tem duas soluções reais iguais a zero.

Exemplos

A. Vamos verificar que a solução da equação $7x^2 = 0$ é zero.

Nessa equação, temos $a = 7$, $b = 0$ e $c = 0$.

Dividindo os dois membros da equação por a, ou seja, por 7, obtemos:

$$7x^2 = 0$$
$$\frac{7x^2}{7} = \frac{0}{7}$$
$$x^2 = 0$$

O único número que, elevado ao quadrado, é igual a zero é o próprio zero. Logo, temos duas raízes reais e iguais a 0.

B. Vamos resolver a equação $-15x^2 = 0$.

Nessa equação, temos $a = -15$, $b = 0$ e $c = 0$.

Dividindo os dois membros da equação por a, ou seja, por -15, obtemos:

$$-15x^2 = 0$$
$$-\frac{15x^2}{-15} = \frac{0}{-15}$$
$$x^2 = 0$$

O único número que, elevado ao quadrado, é igual a zero é o próprio zero. Logo, as raízes dessa equação são reais e iguais a 0.

13. Quadro laranja: -2 e 2; -3 e 3; $-\sqrt{10}$ e $\sqrt{10}$; quadro azul: não existe solução nos reais; não existe solução nos reais; não existe solução nos reais.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

10. Resolva as equações do 2º grau a seguir.

a) $2x^2 + 10x = 0$ **0 e -5.**

b) $3x^2 + 12 = 0$ **Não tem solução real.**

c) $2x^2 + x = 5x^2 - 2x$ **0 e 1.**

d) $x^2 - 25 = 0$ **-5 e 5.**

e) $36 - x^2 = 0$ **-6 e 6.**

11. As equações $x^2 - 9 = 40$ e $5x^2 = -35x$ têm uma solução em comum. Determine-a. **-7**

12. A soma do quadrado de um número positivo com o dobro dele é igual ao quíntuplo desse número. Que número é esse? **3**

13. Resolva as equações a seguir e, depois, faça o que se pede.

Quadro laranja	Quadro azul
• $x^2 - 4 = 0$	• $x^2 + 4 = 0$
• $x^2 - 9 = 0$	• $x^2 + 9 = 0$
• $x^2 - 10 = 0$	• $x^2 + 10 = 0$

a) O que as equações do quadro laranja têm em comum? E as do quadro azul?

b) Sem resolver as equações a seguir, identifique as que não têm soluções reais.

- $x^2 - 11 = 0$
- **X** $x^2 + 8 = 0$
- **X** $x^2 + 3 = 0$
- $2x^2 - 7 = 0$
- **X** $x^2 + 5 = 0$
- **X** $3x^2 + 25 = 0$

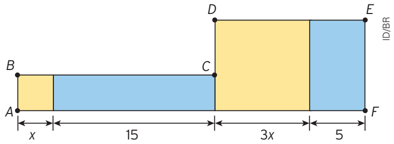
14. Considerando x e y as raízes da equação $10a^2 - 1\,000 = 0$, determine:

a) $x^2 + y^2$ **200**

b) $x^2 - y^2$ **0**

c) $\frac{x^2}{y^2}$ **1**

15. Na figura a seguir, a soma das medidas das áreas dos quadrados amarelos é igual à soma das medidas das áreas dos retângulos azuis.



a) Calcule o valor de x. **3**

b) Determine a medida do perímetro do polígono $ABCDEF$. **82**

16. Quais são os números reais cujos quadrados são iguais a seus triplos? **0 e 3.**

17. Adicionando o quadrado de dois números inteiros consecutivos, obtém-se o dobro do menor desses números mais 33 unidades. Determine esses números. **-4 e -3 ou 4 e 5.**

18. Para uma rede varejista, um dos principais motivos que influencia a demanda por determinado produto é o preço de venda. Uma pesquisa de mercado sugere que a demanda q, em unidades, de determinado produto relaciona-se com o preço p, em reais, do produto por meio da equação $q = 800 - 10p$. Sabendo-se que a receita bruta R obtida com a venda de q produtos é calculada por $R = p \cdot q$, podemos afirmar que a receita bruta será nula para que valor positivo de p? **Para $p = 80$.**

13. a) Quadro laranja: equações incompletas; suas soluções são reais e opostas. Quadro azul: equações incompletas; não têm soluções reais.

- Na atividade **13**, encoraje os estudantes a analisar as equações em vez de resolvê-las. Eles podem observar que as equações do quadro azul não têm raízes reais, por conter no primeiro membro a soma de dois números positivos diferentes de zero, resultando em zero. Isso tornará o trabalho deles mais fácil ao se depararem com o item **b**. Eles podem observar que somente a primeira e a quarta equações podem ter raízes reais.
- A atividade **16** proporciona dois desafios aos estudantes: o primeiro, de fazer a passagem da linguagem escrita para a linguagem algébrica, e o segundo, de pensar em números cujos quadrados são iguais aos próprios triplos, isto é $x^2 = 3x$.

DE OLHO NA BASE

As atividades apresentadas abrangem a resolução de equações do 2º grau incompletas, a análise de equações considerando a existência ou não de raízes e a tradução de sentenças para a linguagem algébrica, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COMPLETAS

- Para resolver equações polinomiais do 2º grau completas, pode-se pensar em alguns métodos, dependendo de cada equação. Inicialmente, trabalha-se com aquelas em que o primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito.
- Relembre com os estudantes os produtos notáveis aprendidos nos capítulos anteriores, pois eles serão muito úteis na resolução de equações completas. Observe se eles identificam nos exemplos analisados um trinômio quadrado perfeito. Ao identificá-lo, solicite a eles que escrevam, então, a equação na forma fatorada. Isso pode colaborar para que eles observem como resolver aquele tipo de equação polinomial do 2º grau.
- O mesmo acontece no exemplo **B**, em que a equação não está escrita na forma reduzida. Para uma melhor visualização, peça aos estudantes que a escrevam nessa forma. Assim, eles obterão um trinômio quadrado perfeito e poderão resolver a equação sem dificuldade.

Resolução de equações completas

Vamos estudar como resolver as equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c diferentes de zero, por meio dos seguintes métodos: trinômio quadrado perfeito, completar quadrados (algébrica e geometricamente) e fórmula geral.

Trinômio quadrado perfeito

Algumas equações do 2º grau completas podem ser fatoradas para obter um trinômio quadrado perfeito.

Exemplos

Vamos resolver as equações a seguir.

A. $x^2 + 2x + 1 = 0$

Nessa equação, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 1$.

Essa é uma equação do 2º grau completa, pois nenhum de seus coeficientes é nulo.

Além disso, temos um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da igualdade.

Fatorando o trinômio da equação, obtemos:

$$\underbrace{x^2}_{(x)^2} + \underbrace{2x}_{(2 \cdot x \cdot 1)} + \underbrace{1}_{(1)^2}$$

Assim, podemos escrever:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

Então:

$$(x + 1)^2 = 0$$

Como zero é o único número que, elevado ao quadrado, é igual a zero, podemos escrever:

$$x + 1 = 0$$
$$x = -1$$

Logo, essa equação tem duas raízes reais e iguais a -1.

B. $4x^2 = 20x - 25$

Escrevendo a equação na forma reduzida, obtemos:

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$
$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 0$$
$$(2x - 5)^2 = 0$$
$$2x - 5 = 0$$
$$2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2}$$

Logo, essa equação tem duas raízes reais e iguais a $\frac{5}{2}$.

164

Completar quadrados

Nem todas as equações do 2º grau completas podem ser manipuladas de modo a obter um trinômio quadrado perfeito.

Para resolvê-las, vamos utilizar o método de completar quadrados nas formas algébrica e geométrica.

Interpretação algébrica

Exemplo

Vamos considerar a equação $x^2 + 16x - 17 = 0$.

Essa é uma equação completa, com $a = 1$, $b = 16$ e $c = -17$, em que o primeiro membro não é um trinômio quadrado perfeito.

Então, vamos obter um trinômio quadrado perfeito para resolvê-la. Acompanhe as etapas a seguir.

I. Escrevemos a equação na forma $ax^2 + bx = -c$.

$$x^2 + 16x - 17 = 0$$
$$x^2 + 16x = 17$$

II. Para obter um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro, adicionamos m^2 aos dois membros da equação:

$$x^2 + 16x + m^2 = 17 + m^2$$

Para que o primeiro membro seja um trinômio quadrado perfeito, $2xm$ deve ser igual a $16x$. Então:

$$2xm = 16x$$
$$m = \frac{16x}{2x}$$
$$m = 8$$

Mas:

$$x^2 + 16x + m^2 = 17 + m^2$$
$$x^2 + 16x + 8^2 = 17 + 8^2$$
$$(x + 8)^2 = 17 + 64$$
$$(x + 8)^2 = 81$$

III. Em seguida, resolvemos a nova equação.

Como $(x + 8)^2$ representa um número real cujo quadrado é 81, temos duas possibilidades para esse número real:

$$x + 8 = \pm\sqrt{81}$$

$$x + 8 = \pm 9 \begin{cases} x_1 + 8 = 9 \Rightarrow x_1 = 9 - 8 \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 + 8 = -9 \Rightarrow x_2 = -9 - 8 \Rightarrow x_2 = -17 \end{cases}$$

Logo, as soluções da equação $x^2 + 16x - 17 = 0$ são -17 e 1.

- Comente com os estudantes o exemplo da página do Livro do Estudante e converse com eles sobre como transformar o primeiro membro em um quadrado perfeito. Uma possibilidade é o trabalho de adicionar o oposto do termo independente em ambos os membros da equação e depois adicionar m^2, de forma a calcular o valor de m e substituí-lo na equação.
- Outra possibilidade é discutir com os estudantes como fazer para que o primeiro membro da equação $x^2 + 16x - 17 = 0$ seja um trinômio quadrado perfeito. Pensando que é necessário um termo ao quadrado, o dobro do produto entre o primeiro e o segundo termo e, por fim, o quadrado do segundo, temos x^2 como o quadrado do primeiro termo, o que significa que ele é x. Ao buscar o dobro do primeiro termo multiplicado pelo segundo termo, temos $16x$ como $2 \cdot x \cdot 8$, o que leva à conclusão de que o segundo termo é 8; então, deve-se ter 64, o quadrado dele na equação. O que temos, porém, é -17. Assim, busca-se um número que, adicionado a -17, resulte em 64, e esse número é 81. Adicionando 81 a ambos os membros da equação inicial, temos $x^2 + 16x + 64 = 81$; assim, obtemos a equação $(x + 8)^2 = 81$. Para resolver essa equação, podemos extrair a raiz quadrada dos dois membros, obtendo $|x + 8| = 9$. Logo, $x = 1$ ou $x = -17$.

- Mostre aos estudantes que a mesma equação que foi apresentada no exemplo anterior, $x^2 + 16x - 17 = 0$, resolvida completando quadrados, pode ser interpretada geometricamente.
- Observe nas figuras do exemplo que o termo x^2 e o termo em x, no caso $16x$, foram expressos por uma figura geométrica: um quadrado e um retângulo, respectivamente. Dividir o retângulo em quatro partes iguais permite que cada uma delas seja colocada sobre um dos lados do quadrado, e, para completar o quadrado da figura, são necessários quatro quadrados de lados medindo 4 u.c. Eles resultam em uma área que mede 64 u.a., o mesmo número que foi acrescentado no desenvolvimento explicado anteriormente. Entretanto, nesse caso, a solução foi verificar que 1 é uma raiz da equação, e não encontrar as raízes da equação. Além disso, a raiz -17, localizada anteriormente, não pode ser encontrada por esse processo, pois ela representa uma medida de comprimento, que não pode ser negativa. Certifique-se de que os estudantes compreenderam essas relações.

Interpretação geométrica

Exemplo

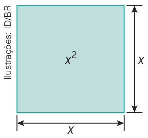
Vamos analisar a mesma equação do exemplo anterior, $x^2 + 16x - 17 = 0$, e verificar, geometricamente, que $x = 1$ é uma solução dessa equação. Acompanhe as etapas a seguir.

I. Escrevemos a equação na forma $ax^2 + bx = -c$.

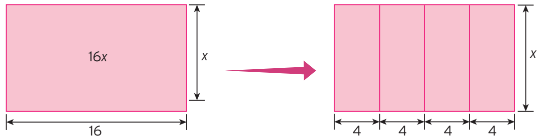
$$x^2 + 16x - 17 = 0 \Rightarrow x^2 + 16x = 17$$

II. Desenhamos um quadrado cuja medida da área representa o termo x^2.

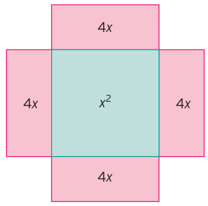
Ilustrações: ID/BR



III. Interpretamos o termo $16x$ como a medida da área de um retângulo de lados 16 e x e dividimos esse retângulo em quatro retângulos de medidas de áreas iguais entre si.



IV. Colocamos cada um desses novos retângulos sobre os lados do quadrado de medida de área x^2.

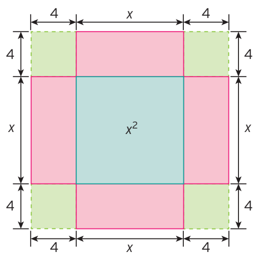


A medida da área dessa nova figura é igual a:

$$x^2 + 4 \cdot 4x = x^2 + 16x$$

Mas, pela etapa **I**, $x^2 + 16x = 17$, ou seja, a medida da área dessa nova figura é igual a 17.

V. Agora, completamos o quadrado com outros quatro quadrados de medida de lado igual a 4, como podemos observar na figura ao lado.



A medida da área desse novo quadrado é igual a:

$17 + 4 \cdot (4 \cdot 4) =$
$= 17 + 4 \cdot 16 =$
$= 17 + 64 = 81$

Portanto, a medida do lado desse quadrado é igual a:

$$\sqrt{81} = 9$$

VI. Da figura do item anterior, a medida do lado do novo quadrado é $4 + x + 4$ e a medida do lado é igual a 9. Então, podemos encontrar uma solução da equação:

$$4 + x + 4 = 9$$
$$8 + x = 9$$
$$x = 9 - 8$$
$$x = 1$$

Observe que, quando resolvemos uma equação do 2º grau pelo método geométrico, encontramos apenas as soluções positivas, pois soluções negativas não têm sentido geométrico. Enquanto o método geométrico permite a escrita da equação na forma fatorada conhecida, o método algébrico permite a determinação de todas as soluções reais da equação, quando existirem.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

19. a-VI; b-I; c-IV; d-V; e-II; f-III.

19. No caderno, associe cada equação escrita na forma reduzida com sua forma fatorada.

a)	$x^2 + 4x + 4 = 0$	I)	$(3x - 1)^2 = 0$
b)	$9x^2 - 6x + 1 = 0$	II)	$(x - 0{,}5)^2 = 0$
c)	$x^2 + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9} = 0$	III)	$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0$
d)	$4x^2 - 12x + 9 = 0$	IV)	$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = 0$
e)	$x^2 - x + 0{,}25 = 0$	V)	$(2x - 3)^2 = 0$
f)	$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = 0$	VI)	$(x + 2)^2 = 0$

20. Fatore as expressões a seguir.

a) $4x^4 - 4x^2 + 1$ **$(2x^2 - 1)^2$**

b) $x^2 + 5x + \frac{25}{4}$ **$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$**

21. Resolva as equações a seguir.

a) $x^2 = 10x - 25$ **5**

b) $x^2 + 9 = 6x$ **3**

c) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$ **$-\frac{3}{2}$**

d) $4x^2 = 32x - 64$ **4**

e) $\frac{x^2}{9} + \frac{4x}{3} = -4$ **-6**

f) $-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$ **1**

22. Copie as expressões no caderno e complete-as com o valor que torna cada igualdade verdadeira.

a) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + \blacksquare$ **4**

b) $(b - 5)^2 = b^2 - \blacksquare + 25$ **$10b$**

c) $(z - \blacksquare)^2 = z^2 - 20z + 100$ **10**

d) $(y - 6)^2 = y^2 - \blacksquare + 36$ **$12y$**

23. Determine os valores de x que satisfazem cada equação a seguir.

a) $(x - 4)^2 = 25$ **-1 e 9.**

b) $(x + 7)^2 = 9$ **-10 e -4.**

c) $(x - 2)^2 = 36$ **-4 e 8.**

d) $(x + 3)^2 = 16$ **-7 e 1.**

24. Resolva as equações a seguir, transformando o primeiro membro em um trinômio quadrado perfeito.

a) $x^2 - 14x = -45$ **5 e 9.**

b) $x^2 + 10x = 24$ **-12 e 2.**

c) $t^2 + 2t = 8$ **-4 e 2.**

d) $y^2 - 8y = 9$ **-1 e 9.**

e) $y^2 + 2y = 48$ **-8 e 6.**

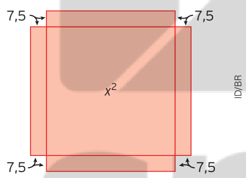
f) $x^2 - 8x = -7$ **1 e 7.**

g) $x^2 + 6x = -11$ **g) Não tem solução real.**

h) $x^2 - 4x = 1$ **$2 - \sqrt{5}$ e $2 + \sqrt{5}$.**

25. Observe a figura, escreva uma equação do 2º grau e resolva-a.

medida da área = 1 800



26. Daqui a 11 anos, a idade de Pedro será a metade do quadrado da idade que ele tinha há 13 anos. Quantos anos Pedro tem hoje? **21 anos.**

27. O quadrado do sucessor de um número inteiro é igual a 100. Qual é esse número? **-11 ou 9.**

25. $x^2 + 30x - 1800 = 0$; $x = 30$.

- Para a resolução da atividade **19**, os estudantes podem buscar elementos em cada equação e relacioná-las. Por exemplo, a equação **IV**, tem a fração $\frac{1}{3}$. Então, ela deve ser relacionada à equação **c**, pois é a única que apresenta $\frac{1}{9}$, o quadrado de $\frac{1}{3}$. Identificar esse tipo de padrão é importante em Matemática, pois auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento computacional. Os estudantes devem ser incentivados a observar padrões e similaridades em expressões algébricas, mas também a aprender a analisar uma questão, em vez de simplesmente efetuar cálculos complicados e desnecessários para encontrar a solução.
- Na atividade **21**, os estudantes devem observar as expressões que formam cada membro das equações apresentadas, para encontrar produtos notáveis que lhes são familiares, de modo a transformar a equação em uma expressão mais simples para resolvê-la. Por exemplo, a equação do item **a**, pode ser reconhecida como um trinômio quadrado perfeito e ser escrita como $(x - 5)^2 = 0$, o que possibilita que a equação seja facilmente resolvida. O mesmo se dá com o item **c**, pois o primeiro membro pode ser escrito como $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$.
- A atividade **22** colabora para que os estudantes desenvolvam habilidades para completar quadrados de maneira algébrica, para que, depois, possam aplicá-las em outras atividades, como a **24**.
- Para resolver a atividade **23**, em cada caso, os estudantes podem buscar números que satisfaçam a igualdade sem necessariamente resolvê-la. Isso possibilita que eles desenvolvam ainda mais suas habilidades de cálculo e de resolução de equações.

DE OLHO NA BASE

As atividades apresentadas relacionam Álgebra e Geometria, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

Também exploram a relação entre equações polinomiais de 2º grau na forma reduzida e na fatorada, a fatoração de expressões quadráticas e a resolução de equações polinomiais de 2º grau completas, bem como envolvem completar quadrados e representação algébrica de figuras geométricas planas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

- A fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau é conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara. Ela pode ser compreendida a partir da ideia de completar quadrados, que também pode ser realizada na equação completa.
- Apresente aos estudantes o desenvolvimento que gerou a fórmula geral, porém certifique-se de que isso será significativo para eles, isto é, mostre-lhes cada passo relacionando-o ao que eles fizeram em exemplos numéricos vistos neste capítulo ao completar quadrados. Explique-lhes que a equação é apresentada de modo genérico para que a fórmula possa ser usada para resolver qualquer equação do 2º grau.

Fórmula resolutiva de equação do 2º grau

Até o momento, estudamos que as equações do 2º grau podem ser resolvidas isolando a incógnita ou aplicando a fatoração. Agora, vamos apresentar uma fórmula geral para resolver equações do 2º grau, sejam elas completas ou incompletas.

No Brasil, a fórmula geral é conhecida pelo nome do matemático indiano Bhaskara, que viveu no século XII e contribuiu para o desenvolvimento da fórmula que conhecemos atualmente.

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, b e c números reais, e acompanhe o passo a passo da obtenção da fórmula resolutiva de equações do 2º grau.

1º passo: Isolamos o termo c, assim como foi feito no método de completar quadrados.

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^2 + bx = -c$$

2º passo: Para que o termo ax^2 represente um termo de um trinômio quadrado perfeito, multiplicamos os dois membros da igualdade por $4a$.

$$ax^2 + bx = -c$$
$$4a \cdot (ax^2 + bx) = 4a \cdot (-c)$$
$$\underbrace{4a^2x^2 + 4abx}_{} = -4ac$$

Reescrevemos a equação de modo que facilite visualizar um trinômio quadrado perfeito.

$$\overbrace{(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b}^{} = -4ac$$

3º passo: Adicionamos o termo b^2 aos dois membros da igualdade para que o primeiro membro represente um trinômio quadrado perfeito e, depois, o fatoramos.

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b = -4ac$$
$$\underbrace{(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = -4ac + b^2$$
$$(2ax + b)^2 = -4ac + b^2$$

4º passo: Por fim, isolamos a incógnita x.

$$(2ax + b)^2 = -4ac + b^2$$
$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac$ é chamado de **discriminante da equação do 2º grau** e é representado pela letra grega Δ (delta):
$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$

> Fórmula resolutiva de equações do 2º grau (fórmula de Bhaskara)
>
> $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

OUTRAS FONTES

Roque, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Nesse livro, a autora apresenta a história da Matemática com a intenção de esclarecer pontos obscuros que acabaram por criar mitos. Entre eles, o desenvolvimento da fórmula de Bhaskara.

Exemplos

A. Vamos determinar as raízes da equação $x^2 + 4x + 3 = 0$, usando a fórmula resolutiva de equações do 2º grau.

- Identificamos os coeficientes: $a = 1$, $b = 4$ e $c = 3$.
- Calculamos o valor do discriminante Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

- Utilizamos os valores do discriminante e dos coeficientes na fórmula resolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+2}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-4-2}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Logo, -3 e -1 são as soluções dessa equação.

B. Vamos determinar as raízes da equação $-x^2 + 12x + 64 = 0$, usando a fórmula resolutiva de equações do 2º grau.

- Identificamos os coeficientes: $a = -1$, $b = 12$ e $c = 64$.
- Calculamos o valor do discriminante Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 64 = 144 + 256 = 400$$

- Utilizamos os valores do discriminante e dos coeficientes na fórmula resolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{400}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-12 \pm 20}{-2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-12+20}{-2} = -4 \\ x_2 = \dfrac{-12-20}{-2} = \dfrac{-32}{-2} = 16 \end{cases}$$

Logo, -4 e 16 são as soluções dessa equação.

C. Vamos resolver a equação $2x^2 + 6x + 5 = 0$, usando a fórmula resolutiva de equações do 2º grau.

- Identificamos os coeficientes: $a = 2$, $b = 6$ e $c = 5$.
- Calculamos o valor do discriminante Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 36 - 40 = -4$$

- Utilizamos os valores do discriminante e dos coeficientes na fórmula resolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 2}$$

Como não existe número real que, elevado ao quadrado, resulte em um número negativo, então a equação não tem raiz real.

- Peça aos estudantes que resolvam os exemplos apresentados no Livro do Estudante utilizando a fórmula geral. Sugira a eles que, antes disso, analisem a equação e vejam se não é possível resolvê-la completando quadrados.
- Discuta os exemplos apresentados para que eles entendam como utilizar a fórmula geral para a resolução de equações polinomiais de 2º grau.
- Deixe claro aos estudantes que eles não precisam usá-la em detrimento dos outros métodos já estudados e sugira que sempre escolham o método observando a equação que têm em mãos para resolver. Cada equação tem suas peculiaridades que permitem resolvê-la com mais facilidade com um determinado método. Porém, vale ressaltar que a fórmula geral pode ser usada em qualquer equação do 2º grau.

ANÁLISE DO DISCRIMINANTE DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

- Discuta com os estudantes quais valores o discriminante pode assumir, isto é, ele pode ser zero, negativo ou positivo. Apresente-lhes equações em que cada uma dessas possibilidades acontece e peça a eles que as resolvam. Em grupos, sugira que discutam o que ocorre com as raízes da equação para cada uma dessas possibilidades do discriminante.
- Este estudo fará com que os estudantes reflitam sobre os números e as características deles, percebendo que, no conjunto dos números reais, não se pode extrair a raiz quadrada de um número negativo. Explique-lhes que isso acontece nos números reais e que eles ainda poderão estudar um conjunto numérico em que é possível extrair raízes quadradas de números negativos. É importante que os estudantes não tenham a percepção de que "não existem raízes quadradas de números negativos". Isso, além de não ser matematicamente correto, pode ser um obstáculo na aprendizagem dos números complexos mais tarde.

Análise do discriminante de uma equação do 2º grau

Existe uma relação entre o valor do discriminante e a existência ou não de raízes reais para a equação. Ao calcularmos o valor do discriminante, é possível identificar se a equação do 2º grau tem ou não raízes reais.

Duas raízes reais distintas

A equação do 2º grau tem duas raízes reais distintas quando o discriminante for um número positivo ($\Delta > 0$).

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Exemplo

Vamos resolver a equação $x^2 - 2x - 3 = 0$.

- Os coeficientes da equação são $a = 1$, $b = -2$ e $c = -3$.
- Calculamos o valor do discriminante Δ:

  $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

  Como $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{2 + 4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{2 - 4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Logo, -1 e 3 são as soluções dessa equação.

Duas raízes reais iguais

A equação do 2º grau terá duas raízes reais iguais quando o discriminante for igual a zero ($\Delta = 0$).

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm 0}{2a} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + 0}{2a} \Rightarrow x_1 = \dfrac{-b}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - 0}{2a} \Rightarrow x_2 = \dfrac{-b}{2a} \end{cases}$$

Exemplo

Vamos resolver a equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

- Os coeficientes são $a = 4$, $b = -4$ e $c = 1$.
- Calculamos o valor do discriminante Δ:

  $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$

  Como $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{8} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+0}{8} \Rightarrow x_1 = \dfrac{4}{8} \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2} \\[2ex] x_2 = \dfrac{4-0}{8} \Rightarrow x_2 = \dfrac{4}{8} \Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, essa equação tem duas raízes iguais a $\frac{1}{2}$.

Nenhuma raiz real

A equação do 2º grau não tem raiz real quando Δ é um número negativo ($\Delta < 0$).

Exemplos

A. Vamos resolver a equação $3x^2 - 5x + 3 = 0$.

- Os coeficientes são $a = 3$, $b = -5$ e $c = 3$.
- Calculamos o valor do discriminante Δ:

  $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 25 - 36 = -11$

  Como $\Delta < 0$, a equação não tem raiz real.

  Observe.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{-11}}{2 \cdot 3}$$

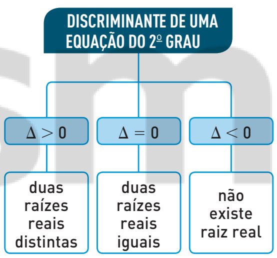
Como não existe número real que, elevado ao quadrado, seja um número negativo, essa equação não tem raiz real.

B. Vamos resolver a equação $6x^2 + x + 4 = 0$.

- Os coeficientes são $a = 6$, $b = 1$ e $c = 4$.
- Calculamos o valor do discriminante Δ:

  $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot 4 = 1 - 96 = -95$

  Como $\Delta < 0$, a equação não tem raiz real.



- Apresente os exemplos e discuta-os com a turma. Permita que os estudantes percebam que o discriminante positivo implica duas raízes reais distintas, enquanto discriminante nulo implica duas raízes reais iguais. Finalmente, o discriminante negativo implica que a equação não tem raízes reais.

RELAÇÕES ENTRE AS RAÍZES E OS COEFICIENTES DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

- A soma e o produto das raízes de uma equação do 2º grau podem ser relacionados a seus coeficientes. Essas relações são importantes para que possamos encontrar as raízes com mais facilidade. Tais relações são conhecidas como relações de Girard, por terem sido desenvolvidas pelo matemático francês Albert Girard (1595-1632).
- Discuta com os estudantes o desenvolvimento apresentado nesta página do Livro do Estudante. Mostre-lhes que a soma ou o produto das raízes pode ser escrito em função dos coeficientes da equação.
- Aproveite os exemplos apresentados não somente para encontrar a soma e o produto das raízes, mas também para determinar as próprias raízes, pois este pode ser um método mais interessante de resolução de equações do 2º grau.

Relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação do 2º grau

Sendo x_1 e x_2 as soluções reais da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, podemos relacionar a soma e o produto das raízes x_1 e x_2 com os coeficientes a, b e c.

Soma

Como $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, então: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. Adicionando x_1 e x_2, temos:

$$x_1 + x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

A soma das raízes x_1 e x_2 de uma equação do 2º grau é:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Produto

Sabendo que $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, multiplicando x_1 e x_2, temos: $x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b + \sqrt{\Delta}) \cdot (-b - \sqrt{\Delta})}{2a \cdot 2a} =$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

O produto das raízes x_1 e x_2 de uma equação do 2º grau é:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Essas relações são conhecidas como **relações de Girard**.

Exemplos

A. $x^2 + 2x - 16 = 0$

Os coeficientes são $a = 1$, $b = 2$ e $c = -16$. Então:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-16}{1} = -16$$

B. $4x^2 + 10x + 5 = 0$

Os coeficientes são $a = 4$, $b = 10$ e $c = 5$. Então:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

Determinação de uma equação do 2º grau por suas raízes

Nos casos em que são dadas as raízes de uma equação do 2º grau com uma incógnita, é possível determinar a equação aplicando-se as relações entre as raízes e os coeficientes.

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, cujas raízes são x_1 e x_2.

Dividindo os dois membros da equação pelo coeficiente a, obtemos:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

Sabemos que:

$$S = \frac{-b}{a} \text{ ou } -S = \frac{b}{a} \text{ e } P = \frac{c}{a}$$

Substituindo $\frac{b}{a}$ por $-S$ e $\frac{c}{a}$ por P na equação $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$, obtemos:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Exemplo

Vamos determinar a equação do 2º grau cujas raízes são 5 e 6.

- $S = 5 + 6 = 11$
- $P = 5 \cdot 6 = 30$

Então:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 11x + 30 = 0$$

Assim, a equação do 2º grau cujas raízes são 5 e 6 é $x^2 - 11x + 30$.

Fatoração por soma e por produto

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, cujas raízes são x_1 e x_2. Podemos escrever o polinômio $ax^2 + bx + c$ na forma fatorada. Veja.

$$ax^2 + bx + c = a \cdot \left[x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right]$$

$$ax^2 + bx + c = a \cdot [x^2 - Sx + P]$$

$$ax^2 + bx + c = a \cdot [x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + (x_1 \cdot x_2)]$$

$$ax^2 + bx + c = a \cdot [\underbrace{x^2 - x_1 \cdot x}_{} - \underbrace{x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2}_{}]$$

$$ax^2 + bx + c = a \cdot [x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1)]$$

$$ax^2 + bx + c = a \cdot [(x - x_1) \cdot (x - x_2)]$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a \cdot [(x - x_1) \cdot (x - x_2)]}$$

Exemplo

Para escrever o polinômio $x^2 - 7x + 12$ na forma fatorada, consideramos $x^2 - 7x + 12 = 0$ e determinamos suas raízes.

- $S = -\frac{b}{a} = -\frac{-7}{1} = 7$
- $P = \frac{c}{a} = \frac{12}{1} = 12$

Portanto, $x_1 = 4$ e $x_2 = 3$.

Desse modo, a forma fatorada do polinômio é:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 4) \cdot (x - 3)$$

DETERMINAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU POR SUAS RAÍZES

- As relações de Girard também possibilitam que seja encontrada a equação a partir das suas raízes. Para isso, basta analisar que, em uma equação em que o coeficiente de x^2 é 1, a soma das raízes é igual ao oposto do coeficiente b e o produto das raízes é igual ao coeficiente independente c.
- Discuta os exemplos apresentados nesta página com os estudantes. Apresente-lhes outros e solicite a eles que encontrem as equações a partir das raízes. Essa vivência lhes permitirá compreender melhor a relação entre coeficientes e raízes de equações do 2º grau.
- Além disso, a partir de uma equação, conhecendo a soma e o produto das raízes, é possível encontrar essas raízes e, a partir delas, escrever a equação na forma fatorada. Converse com os estudantes sobre esse desenvolvimento, para que eles compreendam esse uso.

- A atividade **29** é interessante, pois leva os estudantes a refletir sobre possibilidades para o coeficiente independente, para que o discriminante possa ser negativo. Assim, para que essa equação não tenha raízes reais, devemos ter:

$$\frac{b^2 - 4ac}{2a} < 0$$

$$\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p}{2 \cdot 1} < 0$$

Isso resulta em $p > 4$. Como p é um número inteiro, então o menor número que p pode assumir para que a equação não tenha raízes reais é 5. É importante que os estudantes percebam que a desigualdade não inclui 4.

- Para a resolução da atividade **34**, basta observar as relações entre coeficientes e raízes. Sendo a soma das raízes dada por $\frac{-b}{a}$ e o produto por $\frac{c}{a}$, podemos encontrar a soma e o produto das raízes de cada equação utilizando essas relações.
- A atividade **37** apresenta as raízes e solicita uma equação que as tenha como solução. Pensando nas relações de Girard, para o item **a**, uma equação pode ser $x^2 - 13x + 40 = 0$. Para o item **c**, $x^2 + 4x - 45 = 0$. Sugira aos estudantes que sejam criativos nas equações encontradas. Para isso, explique a eles que podem multiplicar ou dividir a equação por um número real não nulo, e isso não mudará as raízes dela. Além disso, eles podem escrever as equações obtidas em outra forma que não a reduzida; por exemplo, o item **a** pode ser escrito como $x^2 - 13x = -40$.

DE OLHO NA BASE

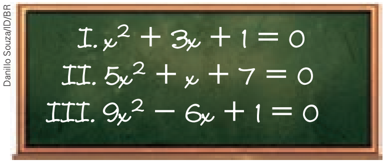
As atividades propostas possibilitam que os estudantes utilizem produtos notáveis e equações do 2º grau para a resolução de problemas, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

28. Observe as equações a seguir.

Danillo Souza/ID/BR



Identifique qual dessas equações tem:

a) duas soluções reais e distintas; **I**

b) duas soluções reais iguais; **III**

c) não tem raiz real. **II**

29. A equação do 2º grau $x^2 - 4x + p = 0$, com incógnita x, em que p é um número inteiro, não tem soluções reais. Qual é o menor valor que p pode assumir? **5**

30. Para quais valores de m a equação $2x^2 - (2m - 4)x + \frac{m}{2} = 0$, com incógnita x, tem duas soluções reais iguais? **1 e 4.**

31. Determine todos os valores reais de m para os quais a equação $mx^2 + 2x - 1 = 0$, com incógnita x, não tenha soluções reais. $\boldsymbol{m < -1}$

32. Determine o valor de k para cada uma das equações a seguir, conforme as situações propostas. **c)** $\boldsymbol{k = -8}$ ***ou*** $\boldsymbol{k = 8}$ **d)** $\boldsymbol{k > 9}$

a) $3x^2 - 6x + k = 0$ tem duas soluções reais iguais. $\boldsymbol{k = 3}$

b) $2x^2 + kx + 16 = 0$ tem duas soluções reais distintas. $\boldsymbol{k < -8\sqrt{2}}$ **ou** $\boldsymbol{k > 8\sqrt{2}}$

c) $4x^2 - kx + 4 = 0$ tem uma solução real.

d) $kx^2 + 6x + 1 = 0$ não tem solução real.

33. Para quais valores de c a equação $2x^2 + 4x + 5c = 0$ tem raízes distintas? $\boldsymbol{c < \frac{2}{5}}$

34. Calcule a soma e o produto das soluções das equações do 2º grau a seguir, usando as relações entre os coeficientes.

a) $3x^2 - 9x + 4 = 0$ $\boldsymbol{S = 3;\ P = \frac{4}{3}}$**.**

b) $(x + 3)^2 = 2x$ $\boldsymbol{S = -4;\ P = 9}$**.**

c) $-2x^2 - 3x + 2 = 0$ $\boldsymbol{S = -\frac{3}{2};\ P = -1}$**.**

d) $2x \cdot (x - 7) = (4 - x)^2$ $\boldsymbol{S = 6;\ P = -16}$**.**

e) $x^2 + 4x + 4 = 0$ $\boldsymbol{S = -4;\ P = 4}$**.**

f) $x^2 - 7x + 5 = 0$ $\boldsymbol{S = 7;\ P = 5}$**.**

35. As soluções da equação $3x^2 - 11x + 4 = 0$ são r e s. Sem resolver a equação, determine:

a) $r + s$ $\boldsymbol{\frac{11}{3}}$

b) $r \cdot s$ $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$

c) $\frac{1}{r} + \frac{1}{s}$ $\boldsymbol{\frac{11}{4}}$

d) $r^2s + rs^2$ $\boldsymbol{\frac{44}{9}}$

36. Determine as soluções das seguintes equações:

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$ **−1 e −1.**

b) $x^2 - 7x + 12 = 0$ **3 e 4.**

c) $x^2 + 3x - 28 = 0$ **−7 e 4.**

37. Escreva uma equação do 2º grau cujas soluções sejam os números indicados nos itens a seguir. **Respostas possíveis:**

a) 5 e 8 $\boldsymbol{x^2 - 13x + 40 = 0}$

b) 3 e 10 $\boldsymbol{x^2 - 13x + 30 = 0}$

c) 5 e −9 $\boldsymbol{x^2 + 4x - 45 = 0}$

d) $5 + \sqrt{11}$ e $5 - \sqrt{11}$ $\boldsymbol{x^2 - 10x + 14 = 0}$

38. Na equação $x^2 - 12x + k = 0$, com incógnita x, uma das soluções é o dobro da outra. Determine o valor real de k. **32**

39. Considere a equação a seguir.

$$\frac{x(x - 3)}{2} = \frac{-5}{8}$$

a) Escreva essa equação na forma reduzida. $\boldsymbol{4x^2 - 12x + 5 = 0}$

b) Verifique se −3 e $\frac{1}{2}$ são soluções.

c) Qual é o valor do discriminante? **64**

d) Quais são a soma e o produto das raízes? $\boldsymbol{S = 3;\ P = \frac{5}{4}}$**.**

40. Calcule o valor de r e de s na equação $x^2 - (3r - 3s)x + 2s - 6r = 0$, com incógnita x, de modo que a soma das soluções seja 6 e o produto seja −20. $\boldsymbol{r = 4;\ s = 2}$**.**

41. Fatore os polinômios a seguir.

a) $x^2 + 5x + 4$ $\boldsymbol{(x + 4)(x + 1)}$

b) $x^2 - 3x - 54$ $\boldsymbol{(x - 9)(x + 6)}$

c) $4x^2 - 9x + 2$ $\boldsymbol{4(x - 2)\left(x - \frac{1}{4}\right)}$

d) $2x^2 + 3x - 2$ $\boldsymbol{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2)}$

e) $x^3 - x^2 - 12x$ $\boldsymbol{x(x + 3)(x - 4)}$

f) $18x^3 - 48x^2 - 18x$ $\boldsymbol{18x\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 3)}$

39. b) Somente $\frac{1}{2}$ é solução.

Situações-problema que envolvem sistemas de equações

Para resolver algumas situações-problema, às vezes precisamos montar um sistema de equações. Na resolução do sistema, podemos obter uma equação do 2º grau e podemos resolvê-la utilizando qualquer um dos métodos estudados até aqui.

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Quais são as dimensões de um campo de futebol cuja medida da área é 7 140 m² e cuja medida do perímetro é 346 m?

Para resolver esse problema, vamos montar um sistema de equações com as incógnitas x e y, que representam as dimensões do campo.

$$\begin{cases} x \cdot y = 7\,140 \\ 2x + 2y = 346 \end{cases}$$

Isolando x na equação $2x + 2y = 346$, temos:

$$2x + 2y = 346$$
$$x + y = 173$$
$$x = 173 - y$$

Substituindo x por $173 - y$ na equação $x \cdot y = 7\,140$, encontramos:

$$x \cdot y = 7\,140$$
$$(173 - y) \cdot y = 7\,140$$
$$173y - y^2 = 7\,140$$
$$-y^2 + 173y - 7\,140 = 0$$

Como $a = -1$, $b = 173$ e $c = -7\,140$, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 173^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7\,140) = 29\,929 - 28\,560 = 1\,369$$

Então:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{-173 \pm \sqrt{1\,369}}{2 \cdot (-1)}$$

$$y = \frac{-173 \pm 37}{-2}$$

$$y_1 = \frac{-173 + 37}{-2} = \frac{-136}{-2} = 68$$

$$y_2 = \frac{-173 - 37}{-2} = \frac{-210}{-2} = 105$$

Para encontrar os valores de x, vamos substituir os valores de y encontrados na equação $x = 173 - y$:

- para $y_1 = 68$:
  $x_1 = 173 - 68$
  $x_1 = 105$
- para $y_2 = 105$:
  $x_2 = 173 - 105$
  $x_2 = 68$

Portanto, as dimensões do campo de futebol são 105 m por 68 m.

SITUAÇÕES-PROBLEMA QUE ENVOLVEM SISTEMAS DE EQUAÇÕES

- Retome com os estudantes o que já estudaram sobre sistemas. Discuta com eles como são as resoluções desses sistemas.
- Busque relacionar o que os estudantes sabem de sistemas lineares com o que é apresentado agora sobre sistemas de equações do 2º grau. Esses sistemas não envolvem grandes dificuldades, mas devem ser trabalhados com cuidado, para que os estudantes entendam o desenvolvimento deles.
- Apresente aos estudantes a situação **1**, sobre as dimensões do campo de futebol. Como são conhecidas as medidas da área e do perímetro desse campo, podem-se escrever duas equações que envolvem duas incógnitas. Utilizando o método da substituição já trabalhado com sistemas lineares, pode-se resolver esse problema, que recai em uma equação do 2º grau. Obtendo esses valores, encontram-se as dimensões do campo, que são 105 m e 68 m.
- Outra solução pode ser apresentada para esse sistema e, consequentemente, para o problema que o gerou. Sendo a medida da área do campo de futebol o produto das medidas do comprimento e da largura e o perímetro igual ao dobro da soma dessas duas dimensões, podemos utilizar esses resultados e interpretar as dimensões do campo como as raízes de uma equação. Sabendo que a soma dessas raízes é 173 (metade de 346) e que o produto é 7 140, podemos escrever a equação:

  $$x^2 - 173x + 7\,140 = 0$$

  Ao resolvê-la, obtêm-se as raízes 105 e 68.
- Sugira à metade da turma que resolva o exemplo apresentado nesta página utilizando o sistema e à outra metade que o faça usando a soma e o produto das raízes de uma equação do 2º grau. Discuta com os estudantes qual resolução parece mais interessante, mais fácil ou mais adequada para cada equação. Deixe claro a eles que não há uma resposta definitiva a essas perguntas. Cada estudante deve utilizar o método que lhe parecer mais interessante. Além disso, às vezes, a própria situação determina um método menos trabalhoso a ser empregado.

- Discuta com os estudantes a situação **3** e verifique se eles compreenderam o enunciado, em particular que a medida da área do piso do banheiro é menor que a da cozinha. Na resolução de problemas, é importante que eles compreendam o enunciado e suas informações, sejam elas úteis, ou não, para a resolução.
- Analise com os estudantes o que se pede no enunciado dessa situação-problema e discuta como eles podem iniciar a resolução. Uma informação importante é determinar qual incógnita representará cada informação do problema. Sugira a eles que o valor da medida do lado do piso da cozinha seja representado por y e que x seja o valor que representa a medida do lado do piso do banheiro.
- Represente as informações dadas no problema com expressões algébricas. Nesse caso, como a soma da medida dos perímetros dos pisos é igual a 32, então a equação $4x + 4y = 32$ foi apresentada. Em seguida, como a soma das medidas das áreas é 34 e os pisos têm forma de quadrados, obtemos $x^2 + y^2 = 34$.

Situação 2

Um número é maior que 10 e menor que 100. Sabendo que a soma de seus algarismos é 15 e o produto deles é 56, que número é esse?

Como o número está entre 10 e 100, ele tem dois algarismos. Chamando seus algarismos de x e y, podemos representar esse problema pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 56 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

Isolando y na equação $x + y = 15$, temos:

$$y = 15 - x$$

Substituindo y por $15 - x$ em $x \cdot y = 56$, obtemos:

$$x \cdot (15 - x) = 56 \Rightarrow 15x - x^2 = 56 \Rightarrow x^2 - 15x + 56 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau:

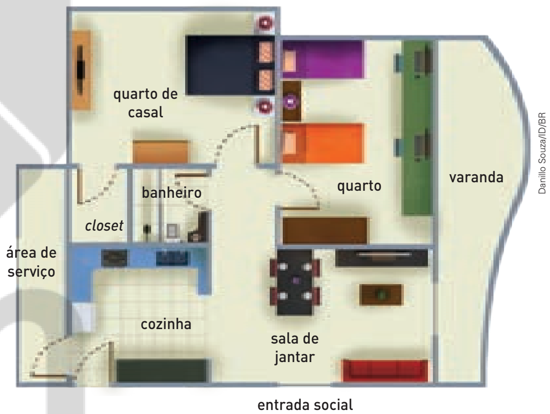
$$\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 56 = 225 - 224 = 1$$

$$x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{15 \pm 1}{2} \quad x_1 = \frac{15 + 1}{2} = \frac{16}{2} = 8 \quad x_2 = \frac{15 - 1}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Portanto, o número pode ser 78 ou 87.

Situação 3

O piso do banheiro e o piso da cozinha de um apartamento têm forma de regiões quadradas. A soma da medida dos perímetros dos pisos dos dois cômodos é 32 m, e a soma da medida de suas áreas é 34 m^2. Quais são as dimensões dos pisos do banheiro e da cozinha, sabendo que a medida da área do piso da cozinha é maior que a medida da área do piso do banheiro?



Vamos representar matematicamente os dados dessa situação, indicando por x, em metro, a medida de cada lado do piso do banheiro e por y, em metro, a medida de cada lado do piso da cozinha.

- Medida do perímetro, em metro: $4x + 4y = 32$

  Observe que $4x$ representa a medida do perímetro do piso do banheiro e que $4y$ representa a medida do perímetro do piso da cozinha.

- Medida da área, em metro quadrado: $x^2 + y^2 = 34$

  Note que x^2 representa a medida da área do piso do banheiro e que y^2 representa a medida da área do piso da cozinha.

Para determinar as dimensões dos pisos dos cômodos, precisamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 32 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$$

Podemos resolver esse sistema pelo método da substituição. Para isso, vamos isolar a variável y na equação $4x + 4y = 32$:

$$\begin{aligned} 4x + 4y &= 32 \\ x + y &= 8 \\ y &= 8 - x \end{aligned}$$

Substituindo y por $8 - x$ na equação $x^2 + y^2 = 34$, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 34 \\ x^2 + (8 - x)^2 &= 34 \\ x^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot x + x^2 &= 34 \\ x^2 + 64 - 16x + x^2 &= 34 \\ 2x^2 - 16x + 64 - 34 &= 0 \\ 2x^2 - 16x + 30 &= 0 \quad (:2) \\ x^2 - 8x + 15 &= 0 \end{aligned}$$

Como $a = 1$, $b = -8$ e $c = 15$, temos:

- $S = -\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{1} = 8$
- $P = \frac{c}{a} = \frac{15}{1} = 15$

Como o produto das raízes é positivo, elas têm o mesmo sinal.

Se o produto das raízes é 15, as raízes inteiras possíveis são: 1 e 15, -1 e -15, 3 e 5 ou -3 e -5.

No entanto, a soma das raízes é igual a 8. Então:

- $1 + 15 = 16$ (não satisfaz)
- $-1 + (-15) = -1 - 15 = -16$ (não satisfaz)
- $3 + 5 = 8$ (satisfaz)
- $-3 + (-5) = -3 - 5 = -8$ (não satisfaz)

As raízes dessa equação são $x_1 = 3$ e $x_2 = 5$.

Portanto, a medida de cada lado do piso do banheiro é 3 m e da cozinha é 5 m.

- As informações sobre as medidas do perímetro e da área podem ser representadas em um sistema. Verifique se os estudantes conhecem o método de resolução de sistemas lineares por substituição.
- Esse método também pode ser empregado no sistema resultante desse problema. Este é o próximo passo: determinar um método matemático que pode ser usado na resolução do problema com base nos dados obtidos.
- Na resolução apresentada na página do Livro do Estudante, usam-se a soma e o produto das raízes de uma equação polinomial do 2º grau para encontrar as raízes, buscando valores que satisfaçam as condições.

- Na atividade **42**, sugere-se uma solução para cada sistema e pede-se para verificar se o resultado obtido é mesmo a solução. As soluções são apresentadas na forma de pares ordenados, como vistos anteriormente. A substituição dos valores nas equações do sistema é suficiente para determinar se são, ou não, solução. Por exemplo, no item **a**, o par ordenado $(-2, 3)$ é solução do sistema, pois:

$$3 \cdot (-2)^2 - 3^2 = 3 \text{ e } -(-2) \cdot 3 = 6$$

DE OLHO NA BASE

As atividades desta página relacionam Geometria e Álgebra, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

Além disso, envolvem resolução de problemas com o uso de fatoração, produtos notáveis ou equações do 2º grau, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

Substituindo os valores das raízes obtidas na equação $y = 8 - x$, vamos encontrar os valores de y:

- para $x_1 = 3$:
  $y_1 = 8 - 3$
  $y_1 = 5$
- para $x_2 = 5$:
  $y_2 = 8 - 5$
  $y_2 = 3$

Logo, há dois pares ordenados que são soluções do sistema: (3, 5) e (5, 3).

Porém, como a medida da área do piso da cozinha é maior que a medida da área do piso do banheiro, as dimensões da cozinha são 5 m por 5 m e as dimensões do banheiro são 3 m por 3 m.

ATIVIDADES

44. $\frac{1}{2}$ **e** $\frac{1}{5}$ **ou** $\frac{3}{35}$ **e** $-\frac{3}{14}$.

Responda sempre no caderno.

42. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas e corrija as falsas.

a) O par ordenado $(-2, 3)$ é solução do sistema: **Verdadeira.**

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 3 \\ -x \cdot y = 6 \end{cases}$$

b) O par ordenado $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ é solução do sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x^2 - 4y = 1 \end{cases}$$

c) O par ordenado (3, 6) é solução do sistema: **Verdadeira.**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 45 \\ y = 2x \end{cases}$$

d) O par ordenado $(-10, 1)$ é solução do sistema:

Falsa; pares ordenados: $(-1, 10)$ e $(10, -1)$.

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x \cdot y = -10 \end{cases}$$

43. Resolva os sistemas de equações a seguir.

a) $\begin{cases} x^2 - y = 74 \\ 16x - y = 137 \end{cases}$ **(9, 7) e (7, −25).**

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ x \cdot y = 4 \end{cases}$ **(2, 2) e $\left(3, \frac{4}{3}\right)$.**

c) $\begin{cases} 4x^2 + 2xy + y^2 = 37 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ **(2, 3) e $\left(\frac{-3}{2}, -4\right)$.**

d) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 7 \\ x + y = 1 \end{cases}$ **(2, −1) e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.**

e) $\begin{cases} x = y \\ 4xy + \frac{x}{5} - \frac{5y}{2} = 0 \end{cases}$ **(0, 0) e $\left(\frac{23}{40}, \frac{23}{40}\right)$.**

f) $\begin{cases} x + y = 5 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}$ **(15, −10) e (2, 3).**

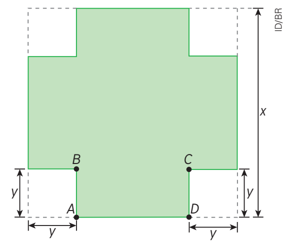
g) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{x+3}{y^2} = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ **(1, 2) e $\left(-\frac{3}{8}, -\frac{3}{4}\right)$.**

44. A soma dos inversos de dois números reais é igual a 7, e a diferença entre eles é igual a $\frac{3}{10}$. Que números são esses?

45. A soma das medidas das áreas de dois quadrados é 52 cm². Sabendo que a diferença entre suas dimensões é de 2 cm, quais são a medida da área e a medida do perímetro de cada um dos quadrados?

46. Para cercar completamente um terreno retangular cuja área mede 300 m², foram gastos 70 m de tela. Quais são as medidas de comprimento dos lados desse terreno? **15 m por 20 m.**

47. A figura a seguir, de 48 unidades de medida de área, foi obtida retirando-se 4 quadrados pequenos, de lado medindo y, de uma região quadrada maior, de lado medindo x.



Calcule os valores de x e de y, sabendo que a medida do perímetro do retângulo $ABCD$ é 12. **$x = 8$ e $y = 2$.**

42. b) Falsa; pares ordenados: $\left(-1 - \sqrt{6}, \frac{3 + \sqrt{6}}{2}\right)$ e $\left(-1 + \sqrt{6}, \frac{3 - \sqrt{6}}{2}\right)$.

45. Quadrado 1: $A = 36$ cm² e $P = 24$ cm; quadrado 2: $A = 16$ cm² e $P = 16$ cm.

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

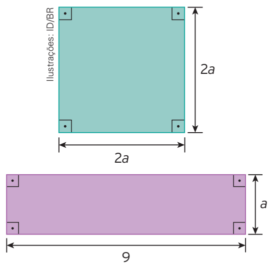
1. A expressão $(2x - 1)$ representa a medida do comprimento de um retângulo, e a expressão $(x + 3)$ representa a medida da sua largura. Determine a equação do 2º grau reduzida que permite calcular o valor de x para que a área desse retângulo meça 130 cm². **$2x^2 + 5x - 133 = 0$**

2. A medida do lado de um quadrado de lado x foi ampliada em 3 cm e a medida de sua área passou a ser 256 cm².

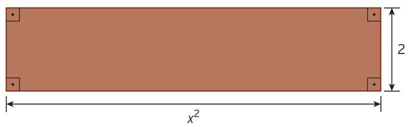
a) Escreva a equação de 2º grau que traduz esse problema. **$x^2 + 6x - 247 = 0$**

b) Determine qual era a medida da área do quadrado antes da ampliação. **169 cm²**

3. Calcule o valor de a, sabendo que as áreas das regiões a seguir têm medidas iguais. **$\frac{9}{4}$**



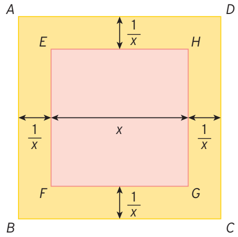
4. Calcule o valor de x, sabendo que a medida do perímetro do retângulo representado a seguir é 22. **3**



5. A diferença entre um número e seu inverso, nessa ordem, é 2. Que número é esse? **$1 + \sqrt{2}$ ou $1 - \sqrt{2}$.**

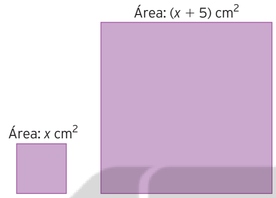
6. O número de diagonais de um polígono é 170. Sabendo que a fórmula para determinar a quantidade de diagonais d de um polígono de n lados é $d = \frac{n(n-3)}{2}$, que polígono é esse? **Icoságono.**

7. Na figura a seguir, $ABCD$ e $EFGH$ são quadrados. A medida da largura da região amarela é constante e seu valor é $\frac{1}{x}$. A medida da área da região amarela é igual a 5.



Sabendo que os lados do quadrado $EFGH$ medem x, calcule o valor de x. **2**

8. Um fio de arame de 20 cm de medida de comprimento foi cortado em duas partes. Com a primeira parte, montou-se um quadrado de área medindo x cm²; com a segunda, fez-se outro quadrado, de área medindo $(x + 5)$ cm², como mostram as figuras a seguir.

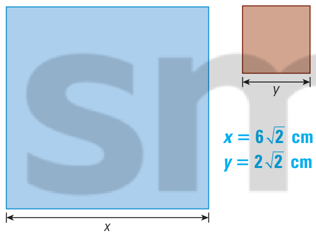


a) Escreva uma expressão algébrica que represente, em função de x, a medida do lado de cada quadrado. **$\sqrt{x}$ cm; $\sqrt{x+5}$ cm**

b) Escreva uma expressão algébrica que represente, em função de x, a medida do perímetro de cada quadrado. **$4\sqrt{x}$ cm; $4\sqrt{x+5}$ cm**

c) Calcule o valor de x. **4 cm**

9. Calcule a medida de cada lado das regiões quadradas a seguir, sabendo que a soma das medidas de suas áreas é 80 cm² e que a soma das medidas de seus perímetros é $32\sqrt{2}$ cm.



$x = 6\sqrt{2}$ cm
$y = 2\sqrt{2}$ cm

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- A atividade **2** colabora para o entendimento da resolução de problemas, já que solicita aos estudantes que escrevam uma expressão que represente o problema. Tal expressão é $(x + 3)^2 = 256$. Para encontrar a medida da área do quadrado antes da ampliação, é necessário determinar o valor de x. Resolvendo a equação, obtemos $x = 13$ ou $x = -19$. Como estamos trabalhando com medidas de comprimento, descartamos o valor negativo. Portanto, a área inicial media 169 cm².

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Os estudantes podem apresentar dificuldades para resolver problemas, especialmente porque a representação deles em linguagem algébrica ainda não lhes é familiar.

Para que sejam bem-sucedidos na resolução de problemas, converse com eles como deve fazer a leitura de um problema.

Solicite aos estudantes que pesquisem os dados apresentados no problema e os interpretem. Em seguida, peça a eles que determinem qual é a pergunta que se faz no problema.

Sabendo o que se tem e aonde se quer chegar, analise com eles como representar as informações extraídas do enunciado. Assim, a partir das equações obtidas, é possível determinar que tipo de resolução será realizada.

Apresente outros problemas aos estudantes para que tenham mais familiaridade com a resolução de problemas.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, o tema aborda os 5 Rs da sustentabilidade. Verifique se os estudantes compreenderam que, ao abordar esse tema, estamos tratando de questões socioambientais e de formação para a cidadania associadas direta ou indiretamente ao consumo e ao consumismo.
- Aproveite para conversar com os estudantes sobre a ideia dos 5 Rs da sustentabilidade. Comente que o conceito de sustentabilidade está em expansão. Inicialmente, foi associado ao tripé: prosperidade econômica, qualidade ambiental e justiça social, com base no enunciado clássico do Relatório Brundtland, segundo o qual a expressão trata do desenvolvimento que satisfaz as necessidades presentes sem comprometer a capacidade das gerações futuras de suprir suas próprias necessidades. Mas, com o passar do tempo, começou a ser tratado como algo mais amplo, incluindo aspectos políticos e culturais.
- Os significados dos 5 Rs da sustentabilidade giram em torno do consumo, da necessidade, do desperdício e do meio ambiente. É um convite à reflexão sobre atitudes que podem nos ajudar a repensar, reduzir, reutilizar, reciclar e recusar, olhando para as consequências socioambientais do nosso consumo.

DE OLHO NA BASE

Refletir sobre esse tema auxilia os estudantes a argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta, desenvolvendo, assim, a **competência geral 7**.

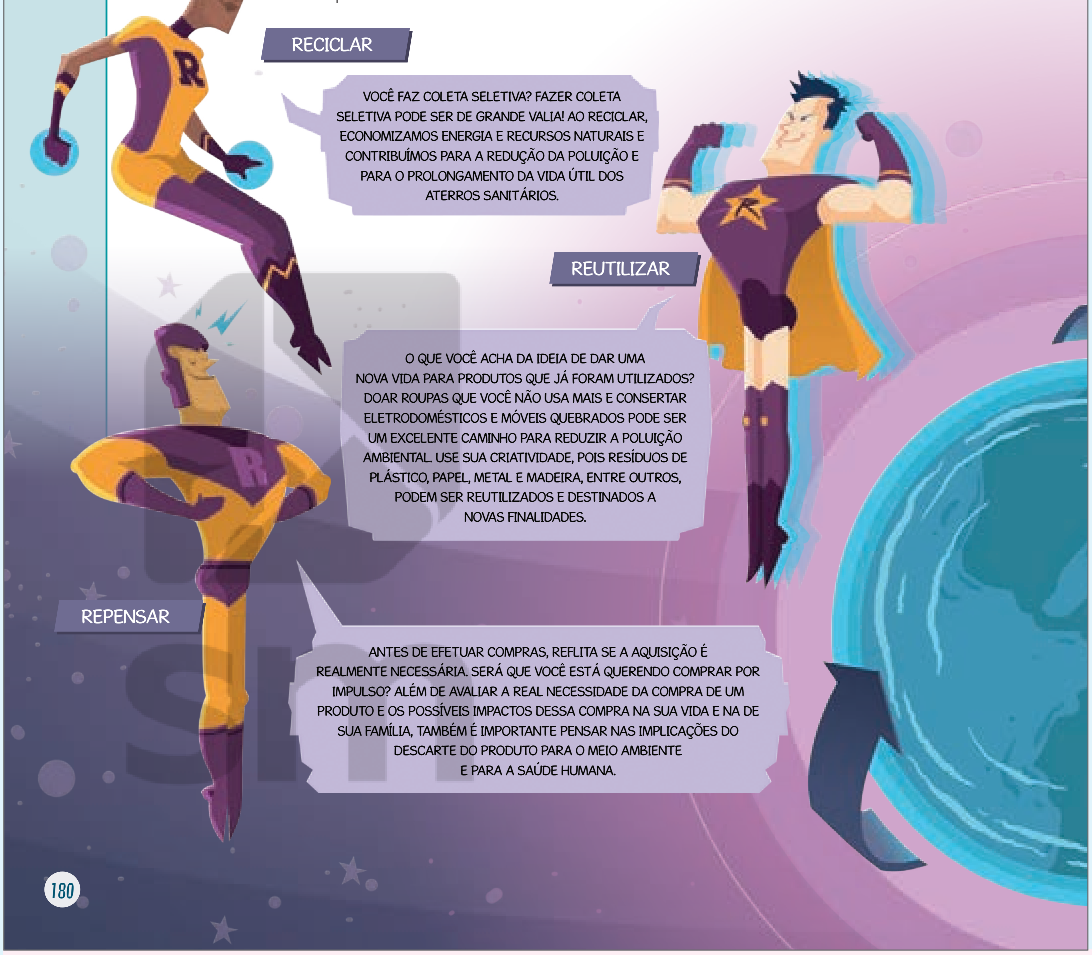
Responsabilidade

O assunto tratado nessa seção possibilita aos estudantes refletir sobre a melhoria nos hábitos de consumo e perceber que essas questões estão diretamente relacionadas ao valor responsabilidade, pois tendem a gerar a preocupação e, consequentemente, ações que visam ao bem comum da atual geração e das futuras gerações.

AMPLIANDO HORIZONTES

Os 5 Rs da sustentabilidade!

Com o crescente aumento do consumo e a percepção de seu impacto, tornou-se fundamental refletir sobre a necessidade de consumir, os ritmos de consumo e suas consequências para o ambiente. Dessa forma, ao fazer escolhas de consumo, devemos levar em conta determinados impactos do produto consumido na sociedade e no ambiente ao longo de seu ciclo de vida. Uma boa forma de analisar essas questões é considerar os 5 Rs, ações que, tomadas em conjunto, tendem a tornar a atitude de consumir e descartar algo mais racional, priorizando a qualidade de vida e a sustentabilidade. Os significados dos 5 Rs da sustentabilidade relacionam-se ao consumo, à necessidade, ao desperdício e ao meio ambiente. A seguir, vamos aprender o que cada um deles representa.



OUTRAS FONTES

Banco Central do Brasil. *Caderno de educação financeira*: gestão de finanças pessoais (conteúdo básico). Brasília: BCB, 2013. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/pre/pef/port/caderno_cidadania_financeira.pdf. Acesso em: 29 jun. 2022.

Caderno cujo objetivo é incentivar as pessoas a tomar decisões autônomas, referentes a consumo, poupança e investimento, prevenção e proteção, considerando seus desejos e suas necessidades atuais e futuras.

Filhos da mama. Série Eu e meu dinheiro. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=HQ2HZdJNhm8. Acesso em: 29 jun. 2022.

Esse vídeo discute como os hábitos e as reflexões cultivados na infância podem influenciar as atitudes de investimento, poupança e equilíbrio na vida adulta. Humor criativo com responsabilidade é a marca dessa produção.

Para refletir

Responda sempre no caderno.

Consulte as respostas neste manual.

Reúna-se com um colega e faça o que se pede a seguir.

1. Qual é o significado dos 5 Rs da sustentabilidade, apresentados nesta seção?
2. Leia as informações a seguir.

Empresas mostram que é possível reduzir uso de água sem impactar lucro

Camilla Freitas. *Ecoa UOL*, mar. 2022. Disponível em: https://www.uol.com.br/ecoa/ultimas-noticias/2022/03/22/empresas-mostram-que-e-possivel-reduzir-uso-de-agua-sem-impactar-lucro.htm. Acesso em: 5 maio 2022.

Confira se você economiza a "água invisível" do planeta

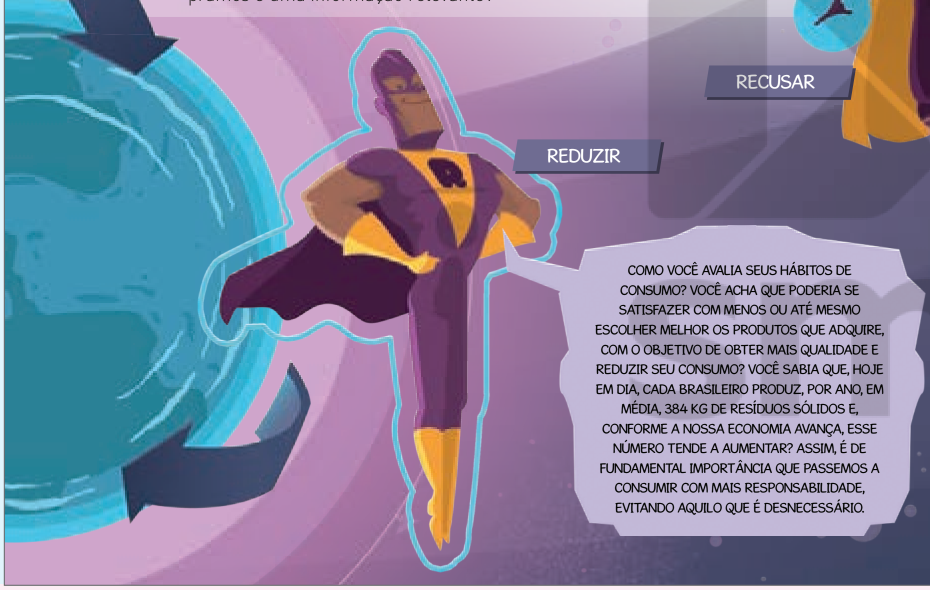
[...]

A irrigação para agricultura e pecuária consome 70% da água doce disponível no planeta. No Brasil, um pouco menos: 60%, segundo a Agência Nacional das Águas. Por dia, cada pessoa consome de 2 mil a 5 mil litros de "água invisível" contida nos alimentos que come, de acordo com a ONU. Uma inocente e saudável maçã, por exemplo, consome 125 litros de água para ser produzida, mais do que o recomendado pela ONU para o consumo direto residencial – tomar banho, cozinhar, lavar louça, escovar os dentes etc. – de uma pessoa por dia, que são 110 litros.

[...]

Confira se você economiza a "água invisível" do planeta. *Diário do Porto*, 21 mar. 2022. Disponível em: https://diariodoporto.com.br/confira-se-voce-economiza-a-agua-invisivel-do-planeta/. Acesso em: 5 maio 2022.

a) Em sua opinião, o que significa "água invisível"?
b) Considerando os dados apresentados, faça uma estimativa do consumo de água invisível da população brasileira em um ano.
c) Por que a quantidade de água utilizada na fabricação dos produtos que compramos é uma informação relevante?



Raphael Mortari/ID/BR

RESPOSTAS

1. O significado dos 5 Rs representam cinco palavras associadas à sustentabilidade: repensar, reduzir, reutilizar, reciclar e recusar. Essa questão é uma excelente oportunidade para mostrar aos estudantes que as decisões que tomamos têm consequências diretas e indiretas no meio ambiente.
2. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam que água invisível é a água gasta nos processos de fabricação dos produtos ou na geração deles. Por exemplo, a água necessária para produzir carne pela agropecuária, ou arroz pela agricultura, ou, ainda, roupas, sapatos, etc.
   b) Resposta pessoal. Estimativa possível: aproximadamente 157 bilhões de litros de água como valor inferior e 392 bilhões de litros de água como valor superior.
   c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que a água é um recurso renovável, entretanto não é ilimitado. É importante lembrar que toda a evolução dos seres vivos está associada e depende desse precioso recurso natural: a água.

DE OLHO NA BASE

Ao se reunir em duplas e discutir as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, desenvolvendo a **competência geral 9**.

INVESTIGAR

Personalidades da Matemática

Para começar

Você sabia que as descobertas matemáticas são essenciais para as transformações tecnológicas no mundo? E que não apenas os homens se dedicaram à Matemática como também várias mulheres registraram seu nome na história da Matemática? Nesta atividade, você e os colegas vão fazer uma pesquisa sobre algumas dessas personalidades da Matemática e, ao final, escrever a biografia delas, que será publicada em um blogue organizado pela turma.

O PROBLEMA

- Quem foram os homens e as mulheres que fazem parte da história da Matemática, quais foram suas contribuições e como suas descobertas foram importantes para o mundo como o conhecemos hoje?

A INVESTIGAÇÃO

- **Prática de pesquisa:** pesquisa bibliográfica.
- **Instrumentos de coleta:** levantamento de referências teóricas (revistas de divulgação científica, livros, *sites*).

MATERIAL

- livros, revistas e *sites*
- computador com acesso à internet

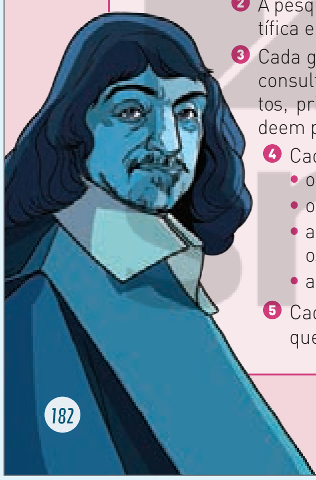
Procedimentos

Parte I – Planejamento

1. A turma será dividida em cinco grupos, e cada grupo ficará responsável por pesquisar matemáticos importantes de uma época da história:
   - Antiguidade (4000 a.C.-476 d.C.)
   - Idade Média (476-1453)
   - Idade Moderna (1453-1789)
   - Idade Contemporânea (1789 até hoje)

Parte II – Coleta dos dados

1. Os grupos vão realizar uma pesquisa bibliográfica, ou seja, o levantamento de referências teóricas já publicadas.
2. A pesquisa bibliográfica poderá ser realizada em revistas, em *sites* de divulgação científica e em livros.
3. Cada grupo deverá se organizar de modo que o maior número possível de fontes seja consultado. Mas atenção: as fontes pesquisadas devem ser confiáveis. Estejam atentos, principalmente, aos textos da internet. Verifiquem sempre a autoria do texto e deem preferência a *sites* de universidades e de instituições de pesquisa.
4. Cada estudante, ao realizar sua pesquisa, deverá anotar:
   - o nome do matemático ou da matemática, a época e o lugar em que viveu;
   - os principais aspectos de seus estudos e descobertas;
   - a aplicação prática de seus estudos e descobertas na época e, se possível, até os dias de hoje;
   - as referências das fontes da pesquisa (autor, nome da publicação, local, ano, etc.).
5. Cada estudante pode pesquisar a quantidade de matemáticos e matemáticas que desejar.



182

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, os estudantes realizarão uma pesquisa bibliográfica sobre personalidades matemáticas e produzirão biografias de algumas delas, que farão parte de um blogue da turma sobre o assunto.
- Pergunte aos estudantes se sabem em quais fontes devem pesquisar o conteúdo para as biografias. Comente que, além da internet, as bibliotecas são os maiores repositórios de conteúdo.
- Questione os estudantes se conhecem o gênero textual biografia e se já tiveram contato com esse tipo de texto no componente curricular Língua Portuguesa.

DE OLHO NA BASE

Nessa seção, os estudantes têm a oportunidade de interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e no desenvolvimento de pesquisas para responder às questões e na busca de soluções para problemas, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com elas, desenvolvendo a **competência específica de Matemática 8**.

Além disso, os estudantes poderão reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, o que favorece o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 1** e da **competência geral 1**.

PARA COMEÇAR

- Leia com os estudantes o texto inicial da seção. Ajude-os a perceber como a Matemática está presente no nosso cotidiano. Explique a eles que muito do que existe hoje é fruto de descobertas de homens e mulheres que se dedicaram ao estudo da Matemática em diversos momentos da nossa história.

PROCEDIMENTOS

- Na *Parte I*, organize a turma em cinco grupos com aproximadamente o mesmo número de integrantes. Explique a eles que, ao longo da história da humanidade, muitos matemáticos se destacaram. A divisão por periodização histórica os ajudará a comprovar isso.
- Ajude os grupos a se organizar de modo a não realizar a pesquisa em apenas um tipo de fonte. É importante que, mesmo que a maior parte do grupo prefira fazer a busca na internet, uma parte também deve ir à biblioteca da escola ou do bairro pesquisar em fontes impressas.
- Na *Parte II*, lembre aos estudantes a importância de realizar anotações e registrar as fontes, para o caso de ter de retomá-las em momento futuro. É essencial que façam anotações em vez de simplesmente fotocopiar ou imprimir os textos, pois esse processo os ensinará a selecionar as informações necessárias aos objetivos da pesquisa. Explique-lhes que, quanto maior o número de personalidades matemáticas pesquisadas, maior o leque de opções que terão no momento da escolha das três personalidades do período pesquisado.
- Na *Parte III*, supervisione o trabalho dos grupos durante a organização dos dados pesquisados individualmente. É importante que todos os estudantes compartilhem sua pesquisa bibliográfica e discutam e elaborem seus próprios critérios para a escolha das três personalidades.
- Se julgar necessário, para o início da *Parte IV*, traga para a sala de aula alguma biografia curta de alguém que os estudantes conheçam para que se familiarizem com o gênero textual. Também é possível pedir a eles que pesquisem e leiam algumas biografias antes de produzi-las. No entanto, é possível que já tenham estudado esse gênero em Língua Portuguesa, o que tornará mais tranquilo o trabalho. Caso não o tenham estudado, uma possibilidade é conversar com o professor de Língua Portuguesa e realizar a atividade interdisciplinarmente.
- Auxilie os estudantes em todas as etapas da criação do blogue. O ideal é que todo o processo seja feito na própria escola, na sala de informática. Procure trabalhar interdisciplinarmente com o professor de Informática, que poderá dar todas as diretrizes para a criação do blogue. A divulgação do blogue poderá ser feita por cartazes afixados na escola e também no *site* da escola e nas redes sociais.

Parte III – Organização e seleção dos dados

1. No dia combinado, o grupo deverá se reunir, e cada estudante trará suas anotações.
2. Compartilhe com o grupo as personalidades que foram pesquisadas e explique sua importância.
3. Cada grupo deverá escolher três personalidades do período pelo qual ficou responsável. Para isso, discutam e expliquem o que os motivou para tal escolha.

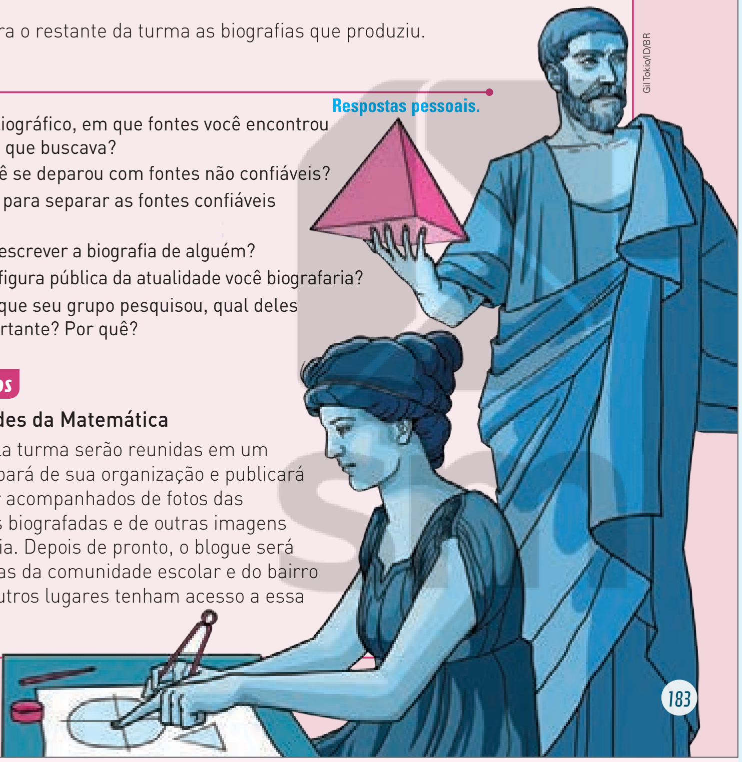
Parte IV – Elaboração da biografia

1. Cada grupo será organizado em três subgrupos, e cada subgrupo ficará responsável por escrever a biografia de uma das personalidades selecionadas pelo grupo.
2. As biografias:
   - têm sua origem nas palavras gregas ***bios*** (vida) e ***graphein*** (escrever);
   - narram a história de vida de alguém que tenha contribuído de alguma forma para a sociedade;
   - são escritas em terceira pessoa;
   - são textos que indicam o tempo e o local dos fatos;
   - podem apresentar imagens da pessoa e outras relacionadas a seu trabalho.
3. Agora que vocês já conhecem as características de uma biografia, escrevam a história da vida da personalidade pela qual seu subgrupo ficou responsável. Usem as anotações que fizeram durante o levantamento bibliográfico. Se mais de uma pessoa no grupo fez anotações sobre essa personalidade, reúnam essas informações.
4. Cada grupo deverá ler para o restante da turma as biografias que produziu.

Questões para discussão

Respostas pessoais.

1. Em seu levantamento bibliográfico, em que fontes você encontrou mais informações sobre o que buscava?
2. Ao longo da pesquisa, você se deparou com fontes não confiáveis?
3. Que critérios você utilizou para separar as fontes confiáveis das não confiáveis?
4. Como foi a experiência de escrever a biografia de alguém?
5. Se pudesse escolher, que figura pública da atualidade você biografaria?
6. De todos os matemáticos que seu grupo pesquisou, qual deles você considera mais importante? Por quê?



Gil Tokio/ID/BR

Comunicação dos resultados

Blogue sobre personalidades da Matemática

As biografias escritas pela turma serão reunidas em um blogue. Toda a turma participará de sua organização e publicará seus textos, que poderão ser acompanhados de fotos das personalidades matemáticas biografadas e de outras imagens relevantes para cada biografia. Depois de pronto, o blogue será divulgado para que as pessoas da comunidade escolar e do bairro e interessados de diversos outros lugares tenham acesso a essa galeria de personalidades.

183

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO

- Organize um bate-papo com os estudantes para discutir as experiências vivenciadas nesta pesquisa para posterior produção do blogue. Antes de explorar as perguntas, peça aos grupos que apresentem os resultados uns aos outros. Em seguida, aproveite para questioná-los em quais fontes pesquisaram os conteúdos das biografias: Foram às bibliotecas ou apenas pesquisaram na internet? Encontraram mais informações em livros ou artigos? Havia dados de autoria nesses textos? Depois dessa conversa inicial e da troca de ideias, faça as perguntas.
- Na questão **2**, espera-se que os estudantes comentem que na internet há todo tipo de informação e que em alguns casos não citam as referências que foram usadas para a construção do texto, o que os tornam fontes não confiáveis.
- Na questão **3**, espera-se que os estudantes apontem a busca da autoria e a pesquisa de sua credibilidade para falar sobre o assunto como um dos critérios de seleção de fontes confiáveis. Além disso, espera-se que eles tenham procurado páginas oficiais de universidades e de instituições de pesquisa confiáveis.

COMUNICAÇÃO DOS RESULTADOS

- Ao divulgar os resultados das pesquisas feitas pelos estudantes, combine com eles qual será a escolha da ordem das publicações no blogue. Pode ser por ordem alfabética, ordem cronológica, etc., mas deve ser obedecida uma lógica na publicação, para facilitar a compreensão dos leitores.
- Lembre os estudantes da responsabilidade de uma publicação na internet, já que esse conteúdo pode passar a ser uma fonte de pesquisa futura para outras pessoas que pesquisam o mesmo tema.
- Compartilhe o blogue construído pelos estudantes nas redes sociais, para que a comunidade escolar tenha o acesso facilitado.
- O trabalho de organização e análise de dados visando à comunicação dos resultados proporciona o desenvolvimento, do ponto de vista matemático e computacional, da análise crítica, criativa e propositiva da produção, circulação e recepção de textos de divulgação científica e de mídias sociais.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- A atividade **5** envolve equações do 2º grau e as relações de Girard. Como o coeficiente de x^2 é 2, o produto das raízes é igual a 30, isto é, metade do coeficiente independente. Isso significa que as raízes são 6 e 5. Logo, a soma das raízes é 11. Porém, como o coeficiente de x^2 é 2, o coeficiente de x na equação é 22, ou seja, a alternativa **e**.
- Explore problemas como os das atividades **13** e **14**, para que os estudantes se familiarizem mais com a resolução de problemas.
- Na atividade **13**, discuta que é preciso escrever a idade de Adriana como a idade de Ana mais 5: sendo a a idade de Ana, então a idade de Adriana é $a + 5$.

DE OLHO NA BASE

A atividade **23** possibilita aos estudantes elaborar um problema que pode ser representado por uma equação polinomial do 2º grau, favorecendo, assim, o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Simplifique as expressões algébricas a seguir. Depois, fatore o resultado obtido.

a) $(3 + 2x)(3 - 2x) - 8(x - 2) + 8x - 5x^2$ **$(5 - 3x)(5 + 3x)$**

b) $(x + 3)(1 - 2x) + 3x(x - 1) + 13$ **$(x - 4)^2$**

c) $(a + 3)^2 - 5(a + 1) + (a + 2)(a - 2)$ **$a(2a + 1)$**

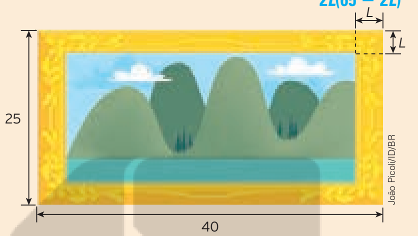
d) $x(2x - 1)^2 + 2x(2x - 1)$ **$x(2x - 1)(2x + 1)$**

2. Considere dois números, a e b, sabendo que $a^2 - b^2 = 39$ e $a - b = 3$, e responda aos itens a seguir.

a) Qual é o valor de $a + b$? **13**

b) Quais são os valores de a e de b? **$a = 8$ e $b = 5$.**

3. A moldura retangular a seguir tem a medida da largura constante, representada por L, e suas dimensões são 25 e 40. Escreva no caderno, na forma fatorada, a expressão que representa a medida da área dessa moldura. **$2L(65 - 2L)$**

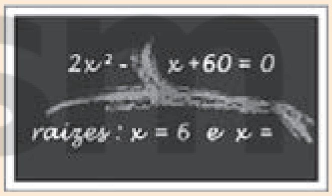


João Picoli/ID/BR

4. Aumentando a medida de um dos lados de um quadrado em 4 m e a do outro lado em 6 m, obtemos um retângulo cuja medida da área é o dobro da medida da área do quadrado inicial. Determine a medida dos lados do quadrado. **12 m**

5. Escreva no caderno a alternativa correta.

(Obmep) Mariana entrou na sala e viu no quadro-negro algumas anotações da aula anterior, parcialmente apagadas, conforme a figura.



Obmep. Fac-símile/ID/BR

Qual número foi apagado na linha de cima do quadro-negro? **Alternativa e.**

a) 11
b) 12
c) 13
d) 20
e) 22

6. Determine o valor de k na equação $x^2 - 7x + k = 0$, com incógnita x, para que as soluções sejam consecutivas. **12**

7. Faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Determine as soluções da equação $z^2 - pz = 0$, com incógnita z. **0 e p.**

b) Escreva uma equação do 2º grau que tenha 2 e −7 como soluções. **$x^2 + 5x - 14 = 0$**

c) Determine p para que 3 seja a solução da equação $8x^2 - 4x - p + 3 = 0$, com incógnita x. **$p = 63$**

d) O que se pode afirmar sobre as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e incógnita x, quando $b^2 - 4ac = 0$? **As raízes são iguais.**

8. Escreva no caderno a alternativa correta.

(PUC-Campinas-SP) Se v e w são as raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$, em que a e b são coeficientes reais, então $v^2 + w^2$ é igual a:

a) $a^2 - 2b$.
b) $a^2 + 2b$.
c) $a^2 - 2b^2$.
d) $a^2 + 2b^2$.
e) $a^2 - b^2$.

Alternativa a.

9. Escreva no caderno a alternativa correta.

(ESPM-SP) As raízes da equação $3x^2 + 7x - 18 = 0$ são α e β. O valor da expressão $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha - \beta$ é: **Alternativa b.**

a) $\frac{29}{3}$.
b) $\frac{49}{3}$.
c) $\frac{31}{3}$.
d) $\frac{53}{3}$.
e) $\frac{26}{3}$.

10. (OBM) Sejam x e y números reais positivos satisfazendo as equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^4 + y^4 = \frac{17}{18}$. Calcule o valor de $\frac{1}{xy}$. **6**

11. Escreva no caderno a alternativa correta.

(CMB-DF) A soma dos quadrados das raízes da equação $x^2 + 4x + m = 0$ é 40. A soma dos inversos das raízes é igual a: **Alternativa a.**

a) $\frac{1}{3}$.
b) $\frac{2}{3}$.
c) $\frac{1}{2}$.
d) $\frac{1}{4}$.
e) $\frac{1}{5}$.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Os estudantes ainda podem ter alguma dificuldade em reconhecer os produtos notáveis ou em elaborar expressões algébricas com base no enunciado dos problemas. No primeiro caso, apresente a eles expressões diferentes, para que possam buscar suas similaridades, que podem ser usadas para a fatoração, verificar se são produtos notáveis e como estes podem ser modificados para representar uma fatoração, etc. Por exemplo, use $3x + 6y^2$ e $3 \cdot (x + 2y^2)$ ou $9a^4 - 1$ e $(3a^2 - 1)(3a^2 + 1)$.

Se os estudantes tiverem dificuldade para escrever expressões algébricas a partir de enunciados, retome os problemas das seções de atividade deste capítulo e solicite a eles que apenas escrevam as sentenças matemáticas, não necessariamente resolvendo-as, para que eles possam compreender esse processo.

Responda sempre no caderno.

12. Marco precisa resolver a equação $x^2 + 5x = -4$ transformando o primeiro membro em um trinômio quadrado perfeito.

a) Copie no caderno a resolução de Marco e determine o valor de m. $\frac{5}{2}$

$$x^2 + 5x = -4$$
$$x^2 + 5x + m^2 = -4 + m^2$$
$$x^2 + 2mx + m^2 = -4 + m^2$$

b) Considerando o valor de m que você determinou, finalize a resolução da equação. $x_1 = -4$ e $x_2 = -1$.

c) Compare sua resolução com a de um colega. Se vocês não obtiveram a mesma solução, verifiquem e identifiquem em que elas diferem. **Resposta pessoal.**

13. O produto da idade de Adriana pela idade de Ana é igual a 374. Adriana é 5 anos mais velha que Ana. Quantos anos cada uma delas tem? **Adriana: 22 anos; Ana: 17 anos.**

14. Em um congresso, havia 50 pessoas, entre mulheres e homens. Descubra quantas mulheres e quantos homens estavam presentes, sabendo que o produto das quantidades dos dois grupos é igual a 621 e que a quantidade de mulheres é maior que a quantidade de homens. **27 mulheres e 23 homens.**

15. O cozinheiro Osmar tem duas ampulhetas diferentes: uma marca o tempo de 7 em 7 minutos, e a outra, de 11 em 11 minutos. Certo dia, ele cozinhou um ovo em exatamente 15 minutos.

Explique como Osmar fez para marcar esse tempo utilizando apenas suas duas ampulhetas.

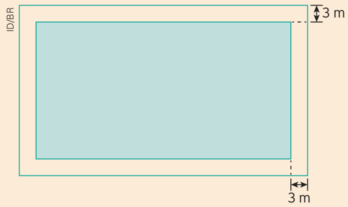
16. Júnior comprou várias garrafas de refrigerante, pagando no total R$ 24,00. Se ele recebesse um desconto de R$ 1,00 no preço de cada garrafa, poderia ter comprado 4 garrafas a mais do que comprou, gastando os mesmos R$ 24,00. Qual é o preço de cada garrafa? Quantas garrafas Júnior comprou no total? **R$ 3,00; 8 garrafas.**

17. A soma de dois números reais é $\frac{7}{3}$. Determine esses números, sabendo que a soma de seus inversos é $\frac{7}{2}$. **2 e $\frac{1}{3}$.**

18. A soma das idades de dois irmãos é 12 anos, e o produto é 35. Quantos anos tem cada um? **5 anos e 7 anos.**

19. A razão entre dois números inteiros e positivos é 2. Se o quadrado do maior diminuído do quíntuplo do menor é igual a 21, quais são os números? **3 e 6.**

20. Considere uma praça retangular, como a representada na figura a seguir. Calcule as dimensões dessa praça, sabendo que a medida da área central é 2 640 m² e que a medida da área total da praça é 3 300 m². **50 m por 66 m.**



21. Escreva no caderno a alternativa correta.

Uma agência de viagem orçou os custos do passeio pedagógico de uma escola e afirmou que o valor da viagem por estudante diminuiria à medida que mais estudantes adquirissem o pacote de viagem. Assim, se x estudantes comprassem o pacote, cada um pagaria o valor $P = 360 - 0{,}9x$. Sabendo que o valor $R(x)$ representa a receita obtida pela agência de viagem, podemos afirmar que $R(x)$ é igual a:

a) $360 - 0{,}9x^2$.
b) $360x - 0{,}9$.
c) $360x - 0{,}9x^2$.
d) $360x$.
e) $0{,}9x^2$.

Alternativa c.

22. O problema a seguir é um clássico matemático que ninguém sabe ao certo a origem. Leia-o e resolva-o. **16 ou 48 macacos.**

> Alegravam-se os macacos
> divididos em dois bandos:
> sua oitava parte ao quadrado
> no bosque brincava.
>
> Com alegres gritos, doze
> gritando no campo estão.
> Sabes quantos macacos há
> na macacada no total?

23. Elabore no caderno um problema que seja solucionado por meio de uma equação do 2º grau. Depois, troque de caderno com um colega e resolva o problema elaborado por ele. **Resposta pessoal.**

15. **Osmar utilizou duas vezes a ampulheta de 11 minutos e subtraiu uma vez a ampulheta de 7 minutos.**

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Entendi o que são produtos notáveis?
- Consigo relacionar os produtos notáveis à área de figuras geométricas?
- Entendi a fatoração e as frações algébricas?
- Aprendi a calcular o valor numérico de uma fração algébrica?
- Consigo realizar operações com frações algébricas?
- Aprendi a simplificar as frações algébricas?
- Sei identificar equações do 2º grau?
- Aprendi a resolver equações do 2º grau completas e incompletas?
- Consigo utilizar o método de completar quadrados para resolver equações do 2º grau?
- Consigo interpretar geometricamente equações do 2º grau?
- Sei aplicar a fórmula geral para a resolução de equações do 2º grau?
- Consigo relacionar raízes e coeficientes de uma equação do 2º grau?
- Consigo resolver situações-problema envolvendo equações do 2º grau?
- Aprendi a solucionar sistemas de equações do 2º grau?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
9 e 10.

Temas Contemporâneos Transversais
Multiculturalismo e Cidadania e Civismo.

Habilidades

(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.

(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*.

(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

UNIDADE 5

GEOMETRIA

SOBRE A UNIDADE

Nesta unidade, serão ampliados os conhecimentos dos estudantes sobre localização de pontos no plano cartesiano. Além disso, eles terão a oportunidade de determinar o ponto médio de um segmento de reta, bem como calcular a medida da distância entre dois pontos quaisquer a fim de calcular as medidas dos perímetros e das áreas de figuras planas no plano cartesiano.

Os conhecimentos sobre circunferência serão ampliados por meio do estabelecimento da relação entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência. Também serão trabalhadas as construções de polígonos regulares com régua e compasso e com o uso de *software* de geometria dinâmica.

Por fim, os estudantes terão contato com a representação de algumas vistas de figuras espaciais e também com a noção de perspectiva.

CAPÍTULO 1
Distâncias

CAPÍTULO 2
Circunferências e polígonos regulares

CAPÍTULO 3
Vistas

Francesca Volpi/Bloomberg/Getty Images

← Artista fazendo uma acrobacia em uma roda de Cyr na praça Duomo, em Milão, Itália. Foto de 2021.

PRIMEIRAS IDEIAS

Você já viu algum artista de rua fazendo uma apresentação na região onde você mora? Em muitas regiões, apresentações desse tipo são comuns.

A imagem mostra um artista de rua fazendo acrobacias em um grande anel de metal, chamado roda de Cyr.

Esse aparelho acrobático foi reinventado por Daniel Cyr em meados de 1996 e consiste em um grande anel feito de aço ou alumínio que é cerca de 10 cm mais alto que o artista.

Ao segurar o aro da roda, o artista faz com que ela gire enquanto ele executa movimentos acrobáticos dentro e ao redor dela.

1. Você já assistiu a uma apresentação que utiliza algum tipo de aparelho? E que utiliza a roda de Cyr?
2. A roda de Cyr lembra que figura geométrica plana?

PRIMEIRAS IDEIAS

- Discuta com os estudantes a diferença entre circunferência e círculo, ao observarem a foto da roda de Cyr. Leve-os a relacionar a circunferência com uma linha fechada, que tem a medida de seu comprimento expressa por unidades de medida lineares, como o metro. De maneira análoga, chame a atenção deles para o fato de que o círculo delimita uma região plana que inclui a circunferência e todos os pontos internos dela e, consequentemente, tem sua medida de área expressa em unidades de medida de área, como o metro quadrado.
- Solicite aos estudantes que procurem dar exemplos de objetos que se parecem com a circunferência ou com o círculo; por exemplo, o formato do anel lembra uma circunferência, enquanto o de uma moeda de dez centavos lembra um círculo.

RESPOSTAS

1. Respostas pessoais.
2. A roda de Cyr lembra uma circunferência.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Plano cartesiano.
- Distância entre dois pontos no plano cartesiano.
- Ponto médio de um segmento no plano cartesiano.
- Perímetro e área de figuras planas no plano cartesiano.

Objetivos

- Reconhecer o plano cartesiano como uma representação de pontos no plano.
- Localizar pontos e identificar suas coordenadas no plano cartesiano.
- Determinar a medida da distância entre dois pontos, a partir de suas coordenadas, no plano cartesiano.
- Identificar e determinar o ponto médio de um segmento no plano cartesiano.
- Determinar as medidas de perímetro e de área de figuras planas representadas no plano cartesiano.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de reconhecer o plano cartesiano e compreender cálculos envolvendo a distância entre dois pontos, identificando novas relações com o teorema de Pitágoras. Ao estudar o plano cartesiano, os estudantes terão a oportunidade de explorar a localização de pontos no espaço bidimensional, que é a base de estudo de diversas áreas da ciência, como cartografia e sensoriamento remoto.

PLANO CARTESIANO

- Relembre os estudantes de que o sistema de coordenadas cartesianas é um sistema de referência utilizado para localização de pontos no plano. Retome a nomenclatura referente a esse sistema: abscissa, ordenada, par ordenado, origem e quadrantes.

Capítulo 1

DISTÂNCIAS

Para o desenvolvimento deste capítulo, os estudantes devem saber localizar pontos no plano cartesiano, operar com números reais e calcular a medida da área e a medida do perímetro de figuras planas.

Plano cartesiano

O plano cartesiano, também conhecido como sistema de coordenadas cartesianas, recebe esse nome em homenagem ao matemático René Descartes, que fez várias contribuições para a Matemática.

Esse plano consiste em dois eixos (retas orientadas) perpendiculares. O eixo horizontal x é denominado **abscissa**, e o eixo vertical y recebe o nome de **ordenada**. O ponto de cruzamento desses eixos é denominado **origem**.

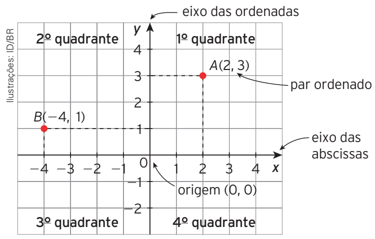
Para localizar um ponto qualquer em um plano cartesiano, utilizamos um **par ordenado** (x, y). O par ordenado $(0, 0)$, por exemplo, são as coordenadas da origem.

Os eixos x e y dividem o plano em quatro regiões, os chamados **quadrantes**, que por convenção são ordenados em sentido anti-horário.

Bridgeman Images/Easypix

Filósofo e matemático, o francês René Descartes (1596-1650) desenvolveu trabalhos em diversas áreas. *Descartes composing his world system*, c.1786-1792. Litogravura, 32 cm × 22,5 cm. Coleção particular.

Observe a representação de um plano cartesiano no qual estão localizados os pontos $A(2, 3)$ e $B(-4, 1)$.



Distância entre dois pontos no plano cartesiano

A medida da distância entre dois pontos é determinada pela medida do comprimento do segmento de reta com extremidades nesses pontos.

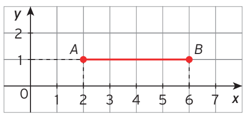
Indicamos a medida da distância entre A e B por: $d(A, B)$.

Medida da distância entre dois pontos de ordenadas ou abscissas iguais

Acompanhe os exemplos a seguir.

Exemplos

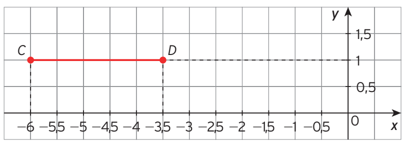
A. A medida da distância entre os pontos $A(2, 1)$ e $B(6, 1)$ é a medida do comprimento do segmento $\overline{AB}$.



Considerando o lado do quadradinho da malha como unidade de medida, a medida da distância entre os pontos A e B é igual a 4 unidades de comprimento (u.c.). Assim, a medida da distância entre os pontos A e B é:

$$d(A, B) = 4 \text{ u.c.}$$

B. A medida da distância entre os pontos $C(-6, 1)$ e $D(-3,5; 1)$ é a medida do comprimento do segmento $\overline{CD}$.



Para obter essa medida, podemos calcular o módulo da diferença entre as abscissas desses pontos.

$$d(C, D) = |-6 - (-3{,}5)| = |-6 + 3{,}5| = |-2{,}5| = 2{,}5$$

Portanto, a distância entre os pontos C e D mede 2,5 u.c.

PARA EXPLORAR

***Em busca das coordenadas*, de Ernesto Rosa. São Paulo: Ática (Coleção A Descoberta da Matemática).**

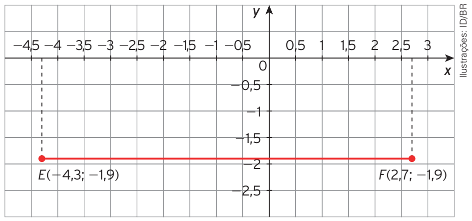
Nesse livro, o autor usa a ficção científica para mostrar ao leitor a importância de determinado conhecimento matemático. Três amigos, em visita a uma exposição de ciência e tecnologia, inesperadamente percebem que estão fazendo uma viagem espacial. E só conseguem encontrar o caminho de volta à Terra lançando mão do que aprenderam sobre coordenadas.

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NO PLANO CARTESIANO

- Se julgar oportuno, reproduza na lousa a figura do exemplo **A**. Chame a atenção dos estudantes para o fato de que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo x. Pergunte a eles como fariam para descobrir a medida do comprimento desse segmento. De acordo com as respostas obtidas, mostre a eles que podemos encontrar a medida da distância entre esses pontos de duas maneiras diferentes. Uma delas é considerar o lado do quadradinho da malha como unidade de medida e, depois, contar quantos lados de quadradinho existem entre os pontos A e B; nesse caso, são 4 lados de quadradinho. A outra maneira é calcular o módulo da diferença entre as abscissas desses pontos: $|6 - 2| = 4$. Portanto, a distância entre os pontos A e B mede 4 u.c.

- Use a mesma estratégia da página anterior para mostrar aos estudantes como calcular a medida da distância entre dois pontos quando o segmento construído por esses pontos é paralelo ao eixo *y*. Desenhe a figura do exemplo **D** na lousa e pergunte aos estudantes se é possível utilizar o lado do quadradinho para encontrar a medida da distância entre os pontos *C* e *D*. Espera-se que eles percebam que as medidas estão dadas como números na forma decimal; assim, é mais adequado utilizar o módulo da diferença entre as ordenadas.

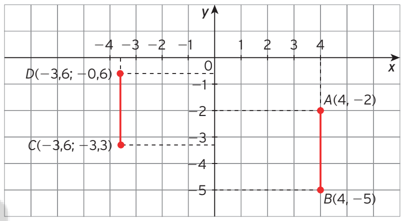
C. A medida da distância entre os pontos $E(-4{,}3; -1{,}9)$ e $F(2{,}7; -1{,}9)$ é a medida do comprimento do segmento $\overline{EF}$.



$$d(E, F) = |-4{,}3 - 2{,}7| = |-7{,}0| = 7{,}0$$

Portanto, a medida da distância entre os pontos *E* e *F* é 7,0 u.c.

D. A medida da distância entre os pontos $A(4, -2)$ e $B(4, -5)$ é a medida do comprimento do segmento $\overline{AB}$, e a medida da distância entre os pontos $C(-3{,}6; -3{,}3)$ e $D(-3{,}6; -0{,}6)$ é a medida do comprimento do segmento $\overline{CD}$.

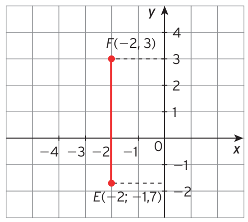


Para obter a medida da distância entre dois pontos de mesma abscissa, calculamos o módulo da diferença entre as ordenadas desses pontos.

- $d(A, B) = |-5 - (-2)| = |-5 + 2| = |-3| = 3$
- $d(C, D) = |-3{,}3 - (-0{,}6)| = |-3{,}3 + 0{,}6| = |-2{,}7| = 2{,}7$

Portanto, a medida da distância entre os pontos *A* e *B* é 3 u.c., e a medida da distância entre os pontos *C* e *D* é 2,7 u.c.

E. A medida da distância entre os pontos $E(-2; -1{,}7)$ e $F(-2, 3)$ é a medida do comprimento do segmento $\overline{EF}$.



$$d(E, F) = |-1{,}7 - 3| = |-4{,}7| = 4{,}7$$

Portanto, a distância entre os pontos *E* e *F* é 4,7 u.c.

Medida da distância entre dois pontos de ordenadas e abscissas diferentes

Quando dois pontos têm ordenadas e abscissas diferentes, a distância entre eles é representada por um segmento inclinado.

Observe os pontos *A*(2, 2) e *B*(5, 6) representados na figura 1. Para obter a medida da distância entre os pontos *A* e *B*, precisamos determinar a medida do comprimento do segmento $\overline{AB}$.

Repare que podemos obter um triângulo retângulo traçando uma reta paralela ao eixo *x* que passa pelo ponto *A* e uma reta paralela ao eixo *y* que passa pelo ponto *B*. O ponto *C* é a intersecção dessas duas retas (figura 2).

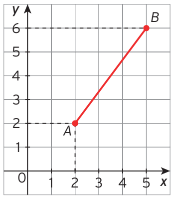


figura 1

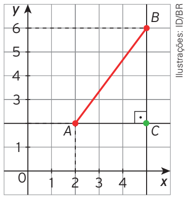


figura 2

Note que *d*(*A*, *C*) e *d*(*B*, *C*) correspondem às medidas dos catetos do triângulo retângulo *ABC* e que *d*(*A*, *B*) corresponde à medida da hipotenusa desse triângulo. Portanto, podemos utilizar o teorema de Pitágoras para calcular a medida da distância entre *A* e *B*.

$$(d(A, B))^2 = (d(A, C))^2 + (d(B, C))^2$$

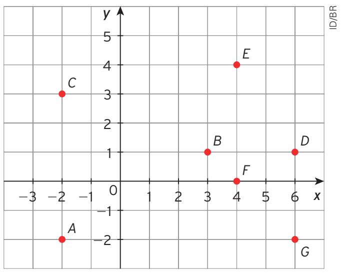
$$(d(A, B))^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Portanto, a medida da distância entre os pontos *A* e *B* é 5 u.c.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Observe este plano cartesiano.



a) Quais são as coordenadas de cada um dos pontos representados?

b) Determine a medida da distância entre os seguintes pontos:

- *A* e *C*;
- *E* e *F*;
- *B* e *D*;
- *A* e *G*.

1. a) *A*(−2, −2); *B*(3, 1); *C*(−2, 3); *D*(6, 1); *E*(4, 4); *F*(4, 0); *G*(6, −2)
b) *d*(*A*, *C*) = 5 u.c.; *d*(*B*, *D*) = 3 u.c.; *d*(*E*, *F*) = 4 u.c.; *d*(*A*, *G*) = 8 u.c.

2. Localize em um mesmo plano cartesiano: **Respostas pessoais.**

a) dois pontos no primeiro quadrante que tenham a mesma abscissa;

b) dois pontos no terceiro quadrante que tenham a mesma ordenada;

c) dois pontos que tenham a mesma abscissa, mas que um esteja no primeiro quadrante e o outro esteja no quarto quadrante.

3. Localize no plano cartesiano os pontos *A*(−3,5; −1,5) e *B*(2,5; 2,5). Depois, determine a medida da distância entre eles. **$d(A, B) = 2\sqrt{13}$ u.c.**

4. No plano cartesiano, determine a medida da distância entre os pontos indicados nos itens a seguir.

a) *B*(1,2; 5) e *C*(−3,1; 5) **4,3**

b) *E*(−5,4; 2,3) e *F*(−5,4; −1,5) **3,8**

c) *P*(5,2; −3,4) e *Q*(4,6; −4,2) **1**

d) $M(2\sqrt{3}, 1)$ e $N(4\sqrt{3}, 1)$ **$2\sqrt{3}$**

- Se considerar oportuno, desenhe a figura 2 desta página na lousa. Chame a atenção dos estudantes para o fato de que, nessa figura, os pontos têm ordenadas e abscissas diferentes. Pergunte se o segmento $\overline{AB}$ formado é paralelo ao eixo *x*, paralelo ao eixo *y* ou é um segmento inclinado. Em seguida, explique que, como o segmento é inclinado, para descobrir a medida da distância entre os pontos *A* e *B* podemos considerar um triângulo retângulo em que $\overline{AB}$ é a hipotenusa. Lembre os estudantes do teorema de Pitágoras e, depois disso, calcule com eles a medida da distância entre esses pontos.
- No item **b** da atividade **1**, chame a atenção dos estudantes para o fato de que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{EF}$ são paralelos ao eixo *y*, então as abscissas dos pontos que são extremidades de cada um desses segmentos são iguais. Já os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{AG}$ são paralelos ao eixo *x*, então as ordenadas dos pontos que são extremidades de cada um desses segmentos são iguais.
- Complemente a atividade **1** solicitando aos estudantes que calculem a medida da distância entre dois pontos de ordenadas e abscissas diferentes, por exemplo, a medida da distância entre *A* e *B*.

191

PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO NO PLANO CARTESIANO

- Retome com os estudantes o modo de encontrar a média aritmética de dois números quaisquer.
- Se julgar oportuno, reproduza na lousa a figura do exemplo **A** e, depois, pergunte aos estudantes:
  - O segmento $\overline{AB}$ é paralelo a um dos eixos? Espera-se que eles percebam que esse segmento é paralelo ao eixo *x*.
  - As coordenadas desses pontos são iguais? Espera-se que eles respondam que as ordenadas dos pontos *A*, *B* e *C* são iguais a 3.
  - Como vocês fariam para determinar a localização do ponto médio (*C*)? Espera-se que os estudantes percebam que para determinar a abscissa do ponto *C*, basta calcular a média aritmética das abscissas dos pontos *A* e *B*:
    $\frac{-6 + (-2)}{2} = \frac{-6 - 2}{2} = -\frac{8}{2} = -4$

Ponto médio de um segmento no plano cartesiano

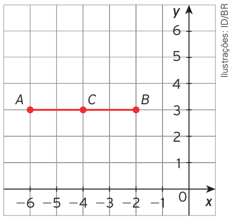
O ponto médio de um segmento de reta é aquele que divide o comprimento do segmento em duas partes de mesma medida.

Vamos determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta cujas coordenadas dos extremos são conhecidas.

Exemplos

A. Segmento paralelo ao eixo *x*

No plano cartesiano a seguir, temos o segmento $\overline{AB}$, cujas coordenadas dos extremos são $A(-6, 3)$ e $B(-2, 3)$.

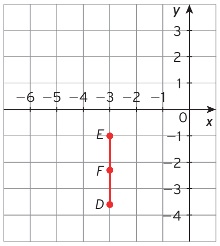


Note que o ponto *C* é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e que os pontos *A*, *B* e *C* têm a mesma ordenada.

Podemos indicar as coordenadas do ponto *C* observando o plano cartesiano: $C(-4, 3)$.

B. Segmento paralelo ao eixo *y*

No plano cartesiano a seguir, temos o segmento $\overline{DE}$, cujas coordenadas dos extremos são $D(-3; -3{,}6)$ e $E(-3, -1)$.



Note que o ponto *F* é o ponto médio do segmento $\overline{DE}$ e que os pontos *D*, *E* e *F* têm a mesma abscissa.

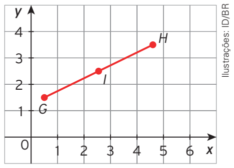
Para obter a ordenada do ponto *F*, podemos encontrar a média aritmética das ordenadas dos pontos *D* e *E*:

$$\frac{-1 + (-3{,}6)}{2} = \frac{-4{,}6}{2} = -2{,}3$$

Portanto, o ponto *F* tem coordenadas $(-3; -2{,}3)$.

C. Segmento inclinado

No plano cartesiano a seguir, temos o segmento $\overline{GH}$, cujas coordenadas dos extremos são $G(0,5; 1,5)$ e $H(4,6; 3,5)$.



Note que o ponto I é o ponto médio do segmento $\overline{GH}$.

- Para obter a abscissa do ponto I, podemos encontrar a média aritmética das abscissas dos pontos G e H:

$$\frac{0,5 + 4,6}{2} = \frac{5,1}{2} = 2,55$$

- Para obter a ordenada do ponto I, podemos encontrar a média aritmética das ordenadas dos pontos G e H:

$$\frac{1,5 + 3,5}{2} = \frac{5,0}{2} = 2,5$$

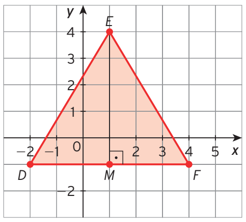
Portanto, o ponto I tem coordenadas $(2,55; 2,5)$.

Perímetro e área de figuras planas no plano cartesiano

Você já sabe como calcular a medida do perímetro e a medida da área de figuras planas. Agora, vamos determinar essas medidas quando as figuras planas estão construídas no plano cartesiano.

Exemplos

A. Um triângulo isósceles tem os vértices localizados nos pontos $D(-2, -1)$, $E(1, 4)$ e $F(4, -1)$. Vamos calcular a medida da área do triângulo DEF.



Para calcular a medida da área desse triângulo, é necessário determinar as medidas de um dos lados e da altura relativa a esse lado.

Por exemplo, vamos considerar o lado $\overline{DF}$ como base do triângulo DEF. Assim, o segmento $\overline{EM}$ é a altura relativa à base $\overline{DF}$. Desse modo, a medida da área do $\triangle DEF$ é:

$$\text{Área} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Logo, a medida da área do triângulo DEF é 15 u.a.

PARE E REFLITA

Qual é a medida do perímetro do triângulo DEF, no exemplo A?

$(6 + 2\sqrt{34})$ u.c.

- Se julgar oportuno, reproduza a figura do exemplo **C** na lousa e peça a um estudante que explique como se pode obter as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{GH}$, sabendo que as ordenadas e as abscissas dos pontos G e H são diferentes.

PERÍMETRO E ÁREA DE FIGURAS PLANAS NO PLANO CARTESIANO

- Caso julgue necessário, retome com os estudantes os conceitos de perímetro e área de figuras planas.
- Chame a atenção dos estudantes para o fato de que, quando uma figura plana estiver desenhada em um plano cartesiano, é necessário conhecer as coordenadas dos vértices dessa figura para determinar a medida de seus lados. Nesse caso, a medida de cada lado é a medida da distância entre os vértices. Desse modo, é possível obter tanto a medida do perímetro como a medida da área dessa figura.
- Para determinar a medida do perímetro do triângulo DEF, como solicitado no boxe *Pare e reflita*, podemos decompor esse triângulo em dois triângulos retângulos.
  - Considerando o triângulo DEM, $\overline{DE}$ é hipotenusa, então:
    $(d(E, D))^2 = (d(D, M))^2 + (d(E, M))^2$
    $(d(E, D))^2 = 3^2 + 5^2$
    $d(E, D) = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$
  - Considerando o triângulo FEM, $\overline{FE}$ é hipotenusa, então:
    $(d(E, F))^2 = (d(F, M))^2 + (d(E, M))^2$
    $(d(E, F))^2 = 3^2 + 5^2$
    $d(E, F) = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

  Como $DF = 6$ u.c., então a medida do perímetro, em u.c., é:

  $$6 + \sqrt{34} + \sqrt{34} = 6 + 2\sqrt{34}$$

OUTRAS FONTES

SILVA, S. R. da. Explorando distâncias e caminhos no plano cartesiano. *Nova Escola*. Disponível em: https://planosdeaula.novaescola.org.br/fundamental/9ano/matematica/explorando-distancias-e-caminhos-no-plano-cartesiano/1423#slide-1. Acesso em: 4 jul. 2022.

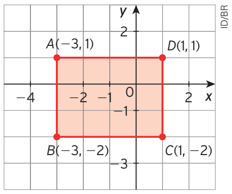
Esse plano de aula apresenta atividades para determinar a medida da distância entre dois pontos no plano cartesiano por meio de triângulos retângulos.

- Reproduza na lousa o retângulo *ABCD* do exemplo **B** e peça a um estudante que determine seus vértices e, em seguida, encontre a medida do perímetro e a medida da área dessa figura.
- Na atividade **9**, verifique se os estudantes percebem que, inicialmente, é preciso determinar as coordenadas dos vértices do trapézio para, em seguida, calcular a medida da área dessa figura. Depois, pergunte-lhes como eles podem encontrar a medida do perímetro do trapézio. Espera-se que eles respondam que é necessário encontrar a medida da distância entre os pontos.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas permitem aos estudantes aplicar os conhecimentos sobre ponto médio e medida da distância entre dois pontos quaisquer, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA16**.

B. Vamos determinar a medida do perímetro e a medida da área do retângulo *ABCD* a seguir.



Para calcular a medida do perímetro desse retângulo, precisamos determinar a medida de dois lados não paralelos — por exemplo, a medida do lado $\overline{AB}$ e a medida do lado $\overline{BC}$.

$$d(A, B) = 3 \text{ u.c.} \qquad \text{e} \qquad d(B, C) = 4 \text{ u.c.}$$

Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são congruentes, assim como os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$. Então, para calcular a medida do perímetro desse retângulo, fazemos:

$$3 + 3 + 4 + 4 = 14$$

Portanto, a medida do perímetro é igual a 14 u.c.

Para calcular a medida da área do retângulo, podemos fazer:

$$\text{Área} = 3 \cdot 4 = 12$$

Portanto, a área desse retângulo mede 12 unidades de área (ou 12 u.a.).

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

5. Determine as coordenadas do ponto médio *M* dos segmentos cujas extremidades estão indicadas a seguir.

a) $A(3, 1)$ e $B(8, 4)$ ***M*(5,5; 2,5)**

b) $P(-2, 2)$ e $Q(4, 2)$ ***M*(1, 2)**

6. Localize os pontos $R(0, 6)$, $S(-2, 3)$, $T(0, 0)$ e $U(2, 3)$ no plano cartesiano. Esses pontos são vértices de um quadrilátero.

a) Qual é o quadrilátero formado? **Losango.**

b) Determine a medida da área desse quadrilátero. **12 u.a.**

c) Determine a medida do perímetro desse quadrilátero. **$4\sqrt{13}$ u.c.**

7. Os pontos $A(-3, 1)$, $B(2, 1)$ e $C(2, -3)$ são vértices de um triângulo.

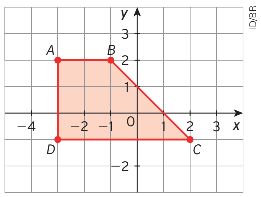
a) Qual é a medida do comprimento dos lados desse triângulo? **5 u.c., 4 u.c. e $\sqrt{41}$ u.c.**

b) Classifique esse triângulo, considerando a medida de seus ângulos. **Triângulo retângulo.**

c) Determine a medida da área e a medida do perímetro desse triângulo. **10 u.a.; $(9 + \sqrt{41})$ u.c.**

8. Um dos vértices de um quadrado que se localiza inteiramente no quarto quadrante tem coordenadas $(1, -1)$. Considerando que os lados desse quadrado são paralelos aos eixos e medem 3 u.c., determine as coordenadas dos outros vértices desse quadrado. **$(4, -1)$, $(1, -4)$ e $(4, -4)$.**

9. Calcule a medida da área e a medida do perímetro da figura em vermelho a seguir.



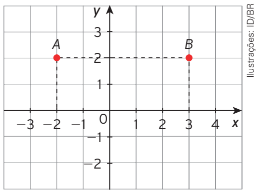
10,5 u.a.; $(10 + 3\sqrt{2})$ u.c.

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

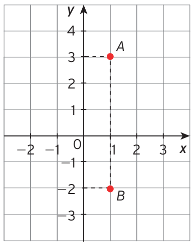
1. Determine a medida da distância entre os pontos A e B em cada caso.

a)



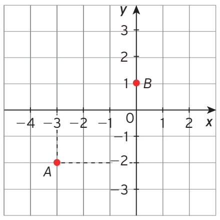
5 u.c.

b)



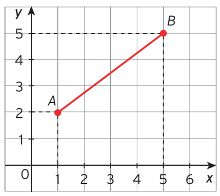
5 u.c.

c)



$3\sqrt{2}$ u.c.

2. Observe o plano cartesiano a seguir. Depois, responda às questões.



a) Quais são as coordenadas do ponto A? E do ponto B? **$A(1, 2)$; $B(5, 5)$.**

b) O segmento $\overline{AB}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo de lados paralelos aos eixos. Quais são as medidas dos catetos? **4 u.c. e 3 u.c.**

c) Qual é a medida do comprimento do segmento $\overline{AB}$? **5 u.c.**

3. Construa em uma malha quadriculada um sistema de coordenadas cartesianas. Depois, faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Localize os pontos $A(0, 2)$, $B(0, -1)$, $C(4, -1)$ e $D(2, 2)$. **Consulte a resposta neste manual.**

b) Trace os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Qual é o polígono formado? **Trapézio retângulo.**

c) Calcule a medida do perímetro e a medida da área desse polígono. **$(9 + \sqrt{13})$ u.c.; 9 u.a.**

4. Calcule as coordenadas do ponto M, ponto médio do segmento $\overline{AB}$ de cada item.

a) $A(-1, 4)$ e $B(5, -2)$ **$M(2, 1)$**

b) $A(1, -7)$ e $B(4, -6)$ **$M(2{,}5; -6{,}5)$**

5. Uma das extremidades do segmento $\overline{AB}$ é $A(3, 2)$. Sabendo que o ponto médio desse segmento é o ponto M de coordenadas $(-1, 3)$, determine as coordenadas do ponto B. **$B(-5, 4)$**

6. Utilize um *software* de geometria dinâmica e encontre as coordenadas da extremidade B de cada segmento $\overline{AB}$ a seguir, sabendo que M é seu ponto médio.

a) $A(-2, 4)$ e $M(1, 3)$ **$B(4, 2)$**

b) $A(-3, -2)$ e $M(0, 2)$ **$B(3, 6)$**

7. No plano cartesiano, sabendo que os pontos $A(-1, 1)$, $B(3, 1)$ e $C(3, 5)$ são vértices de um quadrado, determine:

a) as coordenadas do vértice D; **$D(-1, 5)$**

b) a medida das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ desse quadrado; **$4\sqrt{2}$ u.c.; $4\sqrt{2}$ u.c.**

c) as coordenadas do ponto de intersecção das diagonais desse quadrado. **$M(1, 3)$**

8. As coordenadas de dois vértices de um retângulo são (2, 0) e (3, 0). Os outros dois vértices pertencem ao primeiro quadrante.

Reúna-se com um colega para fazer o que se pede. **8. a) Consulte a construção neste manual.**

a) Sabendo que a área do retângulo mede 6 u.a., construam um sistema de coordenadas cartesianas em uma malha quadriculada, localizem os vértices desse retângulo e escrevam suas coordenadas. **(2, 0); (3, 0); (2, 6); (3, 6)**

b) Expliquem como vocês pensaram para construir o retângulo do item **a**. **Resposta pessoal.**

ESTRATÉGIA DE APOIO

Caso os estudantes ainda tenham dificuldade em localizar pontos no plano cartesiano e determinar a medida da distância entre dois pontos, retome a teoria apresentada no Livro do Estudante e peça a eles que resolvam as atividades em duplas. Ao escolher as duplas, reúna estudantes que estejam em diferentes níveis de aprendizagem, de modo que eles compartilhem seus conhecimentos. Se possível, proponha outras atividades como as desta página para que os estudantes as resolvam utilizando um *software* de geometria dinâmica.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

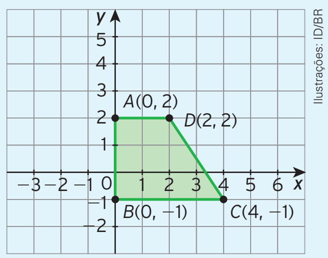
- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados neste capítulo.
- Explore o item **c** da atividade **7** solicitando aos estudantes que digam o que sabem a respeito das propriedades das diagonais de um quadrado. Espera-se que eles digam que elas têm a mesma medida (conclusão do item **b**) e se cruzam no ponto médio. Essa inferência é necessária para que eles obtenham as coordenadas do ponto de intersecção das diagonais.
- Na atividade **8**, item **a**, peça aos estudantes que construam um plano cartesiano e localizem os vértices (2, 0) e (3, 0). Em seguida, chame a atenção deles para as seguintes informações sobre o retângulo:
  - pertence ao primeiro quadrante;
  - tem 6 unidades de medida de área.

  Peça aos estudantes que observem o plano cartesiano que eles construíram e pergunte a eles:
  - Qual é a medida da distância entre os pontos (2, 0) e (3, 0)? Espera-se que eles digam que é 1 u.c.
  - Como se calcula a área de um retângulo? Espera-se que eles respondam que a área de um retângulo é dada pelo produto da medida da base pela medida da altura.
  - Sabendo que a base mede 1 u.c. e a medida da área do retângulo é igual a 6 u.a., quanto mede a altura? Espera-se que eles respondam 6 u.c.

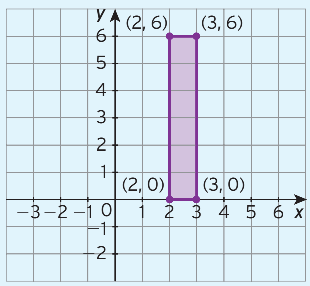
  Depois, solicite aos estudantes que retomem o plano cartesiano que construíram, encontrem os outros dois vértices do retângulo e construam-no, sabendo que ele deve ter 6 u.c. de medida de altura e que está localizado no primeiro quadrante.

RESPOSTAS

3. Construção dos itens **a** e **b**:



8. a)



CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Circunferência e arcos de circunferência.
- Ângulo central e ângulo inscrito em uma circunferência.
- Relação entre o ângulo inscrito e o arco da circunferência determinado por ele.
- Relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito.
- Polígonos regulares.
- Construção de polígonos regulares com régua e compasso e com *software* de geometria dinâmica.

Objetivos

- Definir circunferência.
- Relacionar as medidas do ângulo central e do ângulo inscrito em uma circunferência.
- Resolver situações-problema que envolvam os conceitos de ângulo central e ângulo inscrito em uma circunferência.
- Reconhecer os polígonos regulares.
- Construir polígonos regulares com o uso de régua e compasso e com *software* de geometria dinâmica.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de estudar ângulos construídos tendo como suporte uma circunferência. Além disso, poderão construir polígonos regulares utilizando régua e compasso e também um *software* de geometria dinâmica. Essas atividades de construções geométricas, além de ajudar a desenvolver a noção espacial dos estudantes, também desenvolve o raciocínio lógico deles, pois deverão determinar algoritmos para representar cada figura geométrica.

CIRCUNFERÊNCIAS

- Inicie o capítulo solicitando aos estudantes que expliquem o que é circunferência e verificando se eles a diferenciam de círculo.
- Peça aos estudantes que observem a imagem da obra de arte feita por Daniel Buren e Patrick Bouchain. Verifique se eles associam o formato de cada um dos anéis que compõem a obra de arte com uma circunferência. É importante ressaltar que não são circunferências, mas lembram-nas.
- Por meio de cada anel de sua obra, o artista convida o espectador a particularizar e a observar atentamente algum detalhe da cidade que, incidentalmente, passe despercebido pelas pessoas no dia a dia.

Capítulo 2 CIRCUNFERÊNCIAS E POLÍGONOS REGULARES

Para o desenvolvimento dos conceitos deste capítulo, é importante que os estudantes lembrem-se de como identificar alguns elementos da circunferência. Além disso, é necessário que eles tenham compreendido o conceito de ângulos e saibam manusear régua e compasso.

Circunferências

É comum encontrar imagens e objetos que lembram figuras geométricas planas e não planas em ilustrações e em obras de arte. Isso acontece porque as características dessas figuras podem proporcionar beleza e harmonia às obras de arte.

A obra mostrada a seguir pertence ao artista Daniel Buren, em colaboração com Patrick Bouchain. Ela é composta de 18 anéis de 4 metros de diâmetro, um atrás do outro. Esses anéis lembram circunferências.

Les Anneaux (2007), obra em exposição permanente do artista Daniel Buren, em colaboração com Patrick Bouchain, na doca da ilha de Nantes, França. Foto de 2019.

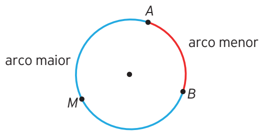
196

Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo nesse plano.

Arcos de circunferência

Dois pontos distintos, A e B, que pertençam a uma circunferência determinam dois arcos.

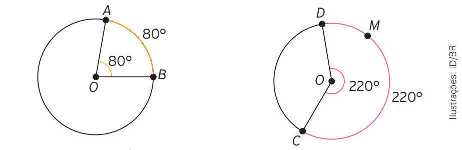
Como os extremos dos dois arcos determinados é o mesmo, podemos escolher um ponto em um dos arcos e representá-los como mostrado a seguir.



Nesse caso, representamos o arco maior por $\overset{\frown}{AMB}$ e o arco menor por $\overset{\frown}{AB}$.

Ângulo central

Dada uma circunferência qualquer, o **ângulo central** é qualquer ângulo cujo vértice seja o centro da circunferência e cujos lados contenham dois raios dela. Veja os exemplos.



$med(\overset{\frown}{AB}) = med(A\hat{O}B) = 80°$ $med(\overset{\frown}{CMD}) = med(C\hat{O}D) = 220°$

Cada ângulo central está associado a um arco de circunferência e vice-versa. Nas circunferências acima:

- o arco $\overset{\frown}{AB}$ está associado ao ângulo $A\hat{O}B$ de menor abertura;
- o arco $\overset{\frown}{CMD}$ está associado ao ângulo $C\hat{O}D$ de maior abertura.

A **medida angular** de um arco de circunferência é definida como a medida do ângulo central associado a ele.

SEMICIRCUNFERÊNCIA

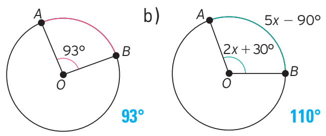
Quando dois pontos dividem a circunferência em dois arcos de mesma medida, chamamos cada um dos arcos de semicircunferência.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Determine a medida, em grau, do arco $\overset{\frown}{AB}$ nos casos a seguir.

a) b)

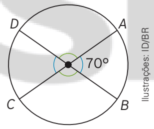


93° **110°**

2. As extremidades de um mesmo diâmetro de uma circunferência determinam dois arcos congruentes, conhecidos como semicircunferências. Qual é a medida, em grau, de cada um desses arcos? **180°**

3. Determine as medidas, em grau, dos arcos $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{DC}$ e $\overset{\frown}{CB}$, sabendo que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diâmetros da circunferência.

$med(\overset{\frown}{AD}) = 110°$; $med(\overset{\frown}{DC}) = 70°$; $med(\overset{\frown}{CB}) = 110°$.



- Informe os estudantes de que todo cidadão tem direito à cultura, pois ela incentiva a reflexão, o diálogo e o pensamento crítico sobre temas importantes para a sociedade contemporânea por meio de vários tipos de arte, incluindo a pintura e a escultura, revelando valores e tradições de vários povos em diferentes momentos históricos. Ressalte que o fato de o artista levar a sua arte para essa região da cidade tem o objetivo de transformar espaços públicos em museus a céu aberto e convidar todos a olhar a arte de uma maneira diferente, em que cada um pode ter uma visão diferente da do outro.
- Pergunte aos estudantes o que essa obra significa para eles e em qual região da cidade onde moram colocariam esses anéis, e peça que expliquem o motivo da escolha do bairro. Essa socialização desenvolve os **Temas Contemporâneos Transversais** Diversidade Cultural e Educação em Direitos Humanos, que pertencem, respectivamente, às macroáreas **Multiculturalismo** e **Cidadania e Civismo**.
- Converse com os estudantes sobre outros objetos que lembram a circunferência, entre eles, peças de automóvel (como rodas e anéis) e símbolos (como o da paz, o das olimpíadas e os de certos times de futebol).
- Aproveite para retomar os elementos de uma circunferência:
  - O raio de uma circunferência é qualquer segmento de reta cujas extremidades são o centro da circunferência e um ponto qualquer dela. Assim, é possível traçar infinitos raios em uma mesma circunferência e todos terão a mesma medida.
  - A corda de uma circunferência é qualquer segmento de reta cujas extremidades são dois pontos quaisquer distintos da circunferência.
  - O diâmetro mede duas vezes a medida do raio e é a maior corda da circunferência; essa corda passa pelo centro da circunferência.

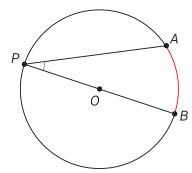
197

Ângulo inscrito

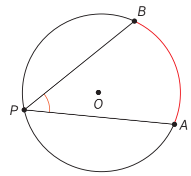
Um ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e cujos lados são secantes a ela é chamado de **ângulo inscrito**.

Existem três casos de ângulos inscritos.

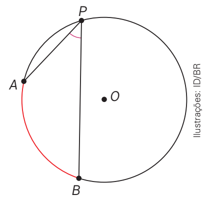
1º caso: Um dos lados do ângulo inscrito contém o diâmetro da circunferência.



2º caso: O centro da circunferência é interno ao ângulo inscrito.



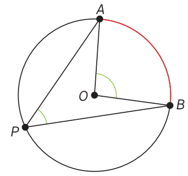
3º caso: O centro da circunferência é externo ao ângulo inscrito.



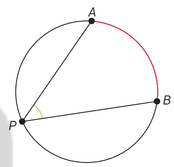
Note que, nos três casos, o ângulo $B\hat{P}A$ é um ângulo inscrito e determina o arco $\widehat{AB}$.

Relação entre o ângulo inscrito e o arco da circunferência determinado por ele

Observe, na figura a seguir, que o ângulo central $A\hat{O}B$ e o ângulo inscrito $A\hat{P}B$ determinam na circunferência o mesmo arco $\widehat{AB}$. Dizemos que esses ângulos estão associados ao mesmo arco.



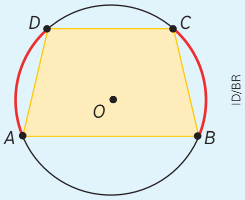
Podemos relacionar a medida do ângulo inscrito com a medida do arco da circunferência determinado por ele.

> A medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida angular (em grau) do arco que esse ângulo inscrito determina na circunferência.
>
> 
>
>
> $$\text{med}(A\hat{P}B) = \frac{\text{med}(\widehat{AB})}{2}$$

Demonstração

Vamos considerar o primeiro caso, em que um dos lados do ângulo inscrito contém o diâmetro da circunferência, ou seja, passa pelo centro da circunferência.

- Antes de apresentar aos estudantes a relação estabelecida entre o ângulo inscrito e o arco da circunferência determinado por ele, assim como sua demonstração, discuta com eles os três casos de ângulos inscritos mostrados nesta página. Depois, proponha que, com o auxílio de um compasso e de uma régua, eles desenhem outros exemplos de cada um dos casos. Se possível, leve-os à sala de informática e construa cada caso utilizando um *software* de geometria dinâmica.
- Se possível, reproduza a demonstração na lousa para que os estudantes compreendam melhor os passos descritos.
- Se julgar oportuno, comente com os estudantes que, se um trapézio isósceles está inscrito em uma circunferência, seus lados não paralelos determinam, nessa circunferência, arcos congruentes. Na figura abaixo, $ABCD$ é um trapézio isósceles. Portanto, os arcos destacados em vermelho são congruentes.



ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Solicite aos estudantes que marquem um ponto em uma folha de papel avulsa e o denominem ponto O. Esse ponto será o centro de uma circunferência que será construída com medida de raio aleatória.

Em seguida, peça-lhes que marquem três pontos distintos A, B e C sobre a circunferência e tracem os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Dessa forma, obtém-se o ângulo $B\hat{A}C$, inscrito na circunferência. Solicite que meçam com o transferidor a medida do ângulo $B\hat{A}C$ e registrem o resultado.

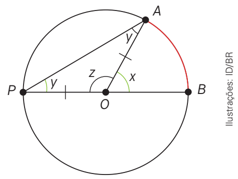
Depois, solicite aos estudantes que tracem os segmentos $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$, obtendo assim o ângulo $B\hat{O}C$, que é o ângulo central da circunferência que corresponde ao mesmo arco $\widehat{BC}$.

Então, peça aos estudantes que meçam com o transferidor o ângulo $B\hat{O}C$ e registrem o resultado. Comparando os resultados, eles devem concluir que $B\hat{O}C = 2 \cdot B\hat{A}C$.

Finalmente, eles devem registrar a conclusão: a medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente. Se julgar conveniente, repita a atividade, com circunferências de diferentes raios e com pontos A, B e C localizados de forma diversa sobre a circunferência.

Oriente os estudantes a realizar a construção com muito cuidado e precisão e a tomar as medidas dos ângulos de forma criteriosa para obter resultados satisfatórios.

med($A\hat{O}B$) = x
med($A\hat{P}B$) = y



O ângulo central $A\hat{O}B$, de medida x, e o ângulo inscrito $A\hat{P}B$, de medida y, estão associados ao mesmo arco $\overset{\frown}{AB}$.

Observe o triângulo $A\hat{O}P$. Como $\overline{OA}$ e $\overline{OP}$ são raios da circunferência, então $OA = OP$. Logo, podemos dizer que o triângulo AOP é isósceles. Assim, os ângulos $O\hat{P}A$ e $O\hat{A}P$ são congruentes.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então, no triângulo $A\hat{O}P$, temos:

$$2y + z = 180° \qquad \text{(I)}$$

Além disso, os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{z}$ são suplementares. Logo:

$$z + x = 180° \qquad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), temos:

$$2y + z = z + x$$

$$x = 2y$$

Como med($A\hat{O}B$) = x e med($A\hat{P}B$) = y, temos:

$$\underbrace{\text{med}(A\hat{O}B)}_{\text{medida do ângulo central}} = 2 \cdot \underbrace{\text{med}(A\hat{P}B)}_{\text{medida do ângulo inscrito}}$$

Sabemos que med($A\hat{O}B$) = med($\overset{\frown}{AB}$), assim:

$$\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 2 \cdot \text{med}(A\hat{P}B)$$

$$\text{med}(A\hat{P}B) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

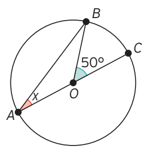
PARE E REFLITA

A relação demonstrada para o primeiro caso também vale para os outros dois casos. Demonstre a relação, no caderno, para cada um dos outros dois casos.

Consulte a resposta neste manual.

Exemplos

A. Vamos determinar a medida x em grau.



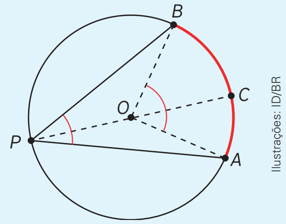
$$\text{med}(\overset{\frown}{BC}) = \text{med}(B\hat{O}C) = 50°$$

Como $\text{med}(B\hat{A}C) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2}$, temos que:

$$x = \frac{50°}{2} = 25°$$

RESPOSTA DO BOXE *PARE E REFLITA*

- Possível demonstração para o 2º caso:
  Na figura a seguir, $A\hat{P}B$ é um ângulo inscrito e $\overline{PC}$ é um diâmetro da circunferência. Observe que, ao traçar o diâmetro $\overline{PC}$, o ângulo $A\hat{P}B$ ficou dividido em dois ângulos inscritos, $B\hat{P}C$ e $C\hat{P}A$.



De acordo com o 1º caso, temos:

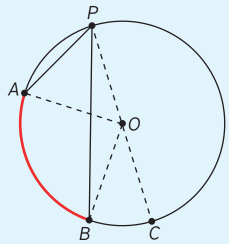
- $\text{med}(B\hat{P}C) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2} \qquad \text{(I)}$
- $\text{med}(C\hat{P}A) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{CA})}{2} \qquad \text{(II)}$

Adicionando (I) e (II), temos:

$$\text{med}(B\hat{P}C) + \text{med}(C\hat{P}A) = $$
$$= \frac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2} + \frac{\text{med}(\overset{\frown}{CA})}{2}$$

Como $\text{med}(B\hat{P}C) + \text{med}(C\hat{P}A) = \text{med}(A\hat{P}B)$ e $\frac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2} + \frac{\text{med}(\overset{\frown}{CA})}{2} = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$, então $\text{med}(A\hat{P}B) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$, como queríamos demonstrar.

- Possível demonstração para o 3º caso:
  Na figura a seguir, $A\hat{P}B$ é um ângulo inscrito e $\overline{PC}$ é um diâmetro da circunferência. Observe que, ao traçar o diâmetro $\overline{PC}$, foram determinados outros dois ângulos inscritos, $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}C$.



De acordo com o 1º caso, temos:

- $\text{med}(A\hat{P}C) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AC})}{2} \qquad \text{(I)}$
- $\text{med}(B\hat{P}C) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2} \qquad \text{(II)}$

Subtraindo (II) de (I), temos:

$$\text{med}(A\hat{P}C) - \text{med}(B\hat{P}C) = $$
$$= \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AC})}{2} - \frac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2}$$

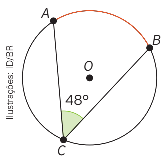
Como $\text{med}(A\hat{P}C) - \text{med}(B\hat{P}C) = \text{med}(A\hat{P}B)$ e $\frac{\text{med}(\overset{\frown}{AC})}{2} - \frac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2} = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$, então $\text{med}(A\hat{P}B) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$, como queríamos demonstrar.

- Leve os estudantes para a sala de informática, caso a escola disponha desse espaço, para que, utilizando um *software* de geometria dinâmica, possam reproduzir o passo a passo da construção e, assim, verificar a relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito.

DE OLHO NA BASE

Compreender a relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito na circunferência com o apoio de um *software* de geometria dinâmica favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA11**.

B. Vamos determinar a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ em grau.

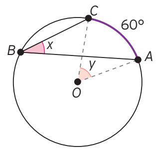


$$\text{med}(A\hat{C}B) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

$$48° = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

$$\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 96°$$

C. Vamos determinar as medidas x e y em grau.



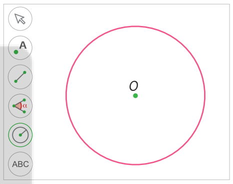
$$\text{med}(C\hat{O}A) = \text{med}(\overset{\frown}{CA}) \Rightarrow y = 60°$$

$$\text{med}(A\hat{B}C) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AC})}{2} \Rightarrow x = \frac{60°}{2} = 30°$$

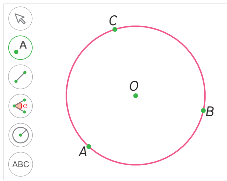
Relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito

Vamos verificar a relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito utilizando um *software* de geometria dinâmica.

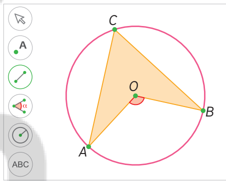
1º passo: Com a ferramenta , construa uma circunferência de medida de raio qualquer e centro *O*.



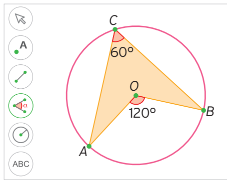
2º passo: Com a ferramenta , marque três pontos distintos *A*, *B* e *C* na circunferência.



3º passo: Com a ferramenta , trace os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$.



4º passo: Com a ferramenta , meça os ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{C}B$.



A medida do ângulo central é o dobro da medida do ângulo inscrito correspondente.

Com a ferramenta , movimente o ponto *C*. Em seguida, movimente o ponto *A* ou o ponto *B*. O que é possível observar?

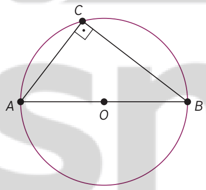
Espera-se que os estudantes observem que, ao movimentar o ponto *C*, a medida dos ângulos se mantém e que, ao movimentar o ponto *A* ou o ponto *B*, os ângulos aumentam ou diminuem, mas sempre respeitam a relação:

$$\text{med}(A\hat{C}B) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}.$$

PARE E REFLITA

Considere a afirmação:

Todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto, como mostra a figura.



Construa essa figura em um *software* de geometria dinâmica e, depois, justifique a afirmação.

Resposta pessoal.

OUTRAS FONTES

ALTOÉ, R. Relato: ângulo central e ângulo inscrito. Dia a Dia Educação. Disponível em: http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=154. Acesso em: 4 jul. 2022.

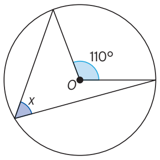
A autora propõe uma atividade que retoma alguns conceitos já estudados e apresenta um estudo relacionando a circunferência com outros elementos geométricos, como ângulos centrais, arcos, ângulos inscritos, suas propriedades e relações, por meio de *software* de geometria dinâmica.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

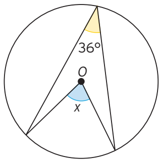
4. Em cada item a seguir, determine a medida de x em grau.

a)



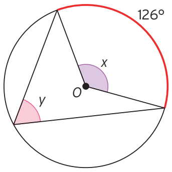
55°

b)



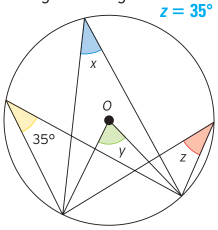
72°

5. Calcule as medidas, em grau, de x e de y na figura a seguir. **$x = 126°$; $y = 63°$**



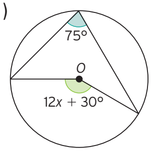
Ilustrações: ID/BR

6. Determine, em grau, as medidas de x, de y e de z na figura a seguir. **$x = 35°$; $y = 70°$; $z = 35°$**

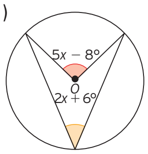


7. Em cada item, determine a medida de x, em grau, e a medida do(s) ângulo(s) representado(s) pela(s) expressão(ões) indicada(s) na figura.

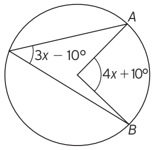
a)



b)

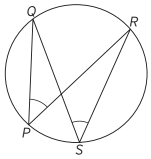


8. Determine a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ na figura a seguir.

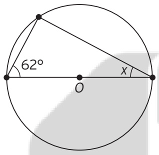


70°

9. Os pontos P, Q, R e S pertencem a uma circunferência. Sabe-se que med($Q\hat{P}R$) = $= 3x + 2°$ e que med($Q\hat{S}R$) = $110° - 6x$. Calcule o valor de x. **12°**



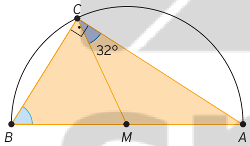
10. Considerando a figura a seguir, escreva no caderno a alternativa que indica a medida do ângulo x. **Alternativa b.**



a) 24°
b) 28°
c) 32°
d) 36°
e) 40°

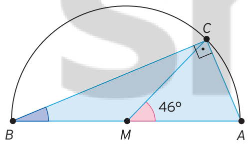
11. Sendo M o ponto médio do lado $\overline{AB}$ dos triângulos ABC a seguir, calcule a medida, em grau, do ângulo $A\hat{B}C$ em cada item.

a)



58°

b)



23°

7. a) $x = 10°$; ângulo central: 150°
b) $x = 20°$; ângulo central: 92°; ângulo inscrito: 46°

• Na atividade **10**, se necessário, relembre aos estudantes que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e que todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

DE OLHO NA BASE

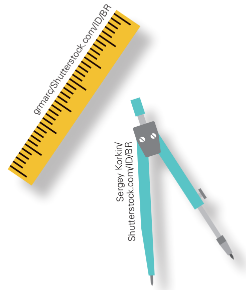
As atividades desta página permitem aos estudantes resolverem problemas que envolvem a relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito na circunferência, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA11**.

POLÍGONOS REGULARES

- Retome com os estudantes o conceito de que o polígono regular tem lados de mesma medida e ângulos congruentes. Desenhe na lousa alguns polígonos regulares e peça aos estudantes que os denominem, relacionando o nome ao número de lados e sempre observando as medidas dos lados e dos ângulos.
- Lembre-os de que já foram exploradas as construções desses polígonos, com o uso de régua, compasso e transferidor.
- É importante pedir antecipadamente aos estudantes que tragam os instrumentos de desenho adequados para que eles possam reproduzir as construções descritas nestas páginas e também resolver as atividades propostas mais adiante.
- Vale destacar que reproduzir o passo a passo das construções na lousa, explicando cada etapa e verificando se os estudantes têm alguma dúvida, auxilia na compreensão deste conteúdo.
- Chame a atenção dos estudantes para o fato de que o triângulo construído poderia ter sido o triângulo *ADB*.

DE OLHO NA BASE

Apresentar aos estudantes as noções de como descrever um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA15**.



gmarc/Shutterstock.com/ID/BR

Sergey Korkin/ Shutterstock.com/ID/BR

Polígonos regulares

Para construir polígonos regulares cuja medida do lado é conhecida, podemos proceder de várias maneiras. Vamos conhecer algumas delas.

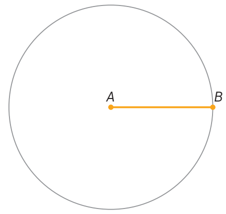
Construção de polígonos regulares com régua e compasso

Vimos nos anos anteriores como construir polígonos regulares utilizando instrumentos de desenho (régua, compasso e transferidor). Agora, vamos construir, com régua e compasso, alguns polígonos regulares a partir da medida de seu lado.

Triângulo equilátero

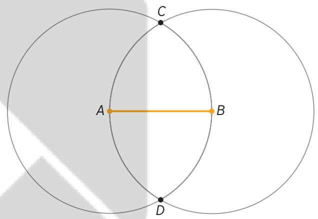
1º passo: Trace o segmento $\overline{AB}$ de medida qualquer.

2º passo: Com a ponta-seca do compasso em *A* e raio $\overline{AB}$, trace uma circunferência.

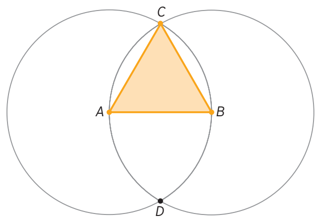


Ilustrações: ID/BR

3º passo: Com a ponta-seca do compasso em *B* e raio $\overline{AB}$, trace uma segunda circunferência que, ao cruzar com a primeira, define os pontos *C* e *D*.



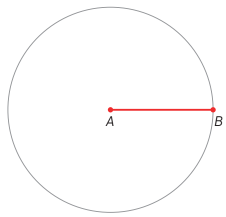
4º passo: Escolha um dos pontos. No caso, vamos escolher o ponto *C*. Em seguida, trace os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ para obter o triângulo equilátero *ABC*.



Hexágono regular

1º passo: Trace o segmento $\overline{AB}$ de medida qualquer.

2º passo: Com a ponta-seca do compasso em *A* e raio $\overline{AB}$, trace uma circunferência.



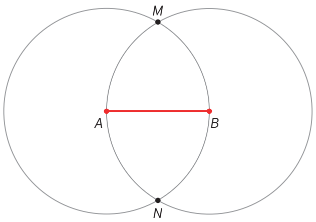
202

OUTRAS FONTES

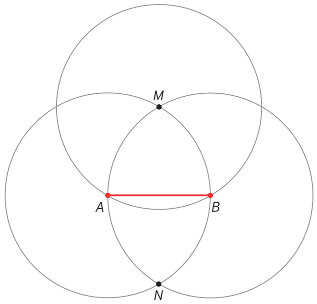
Carvalho, J. B. P. de. A construção, por Euclides, do pentágono regular. *In*: V Bienal da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática). Paraíba: Universidade Federal da Paraíba, 2010. Disponível em: http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Mini_Cursos_Completos/MC10Completo.pdf. Acesso em: 4 jul. 2022.

Esse artigo apresenta diversas considerações sobre a construção de polígonos regulares, além de uma construção moderna do pentágono regular e da construção do pentágono por Euclides.

3º passo: Com a ponta-seca do compasso em *B* e raio $\overline{AB}$, trace uma segunda circunferência que, ao cruzar a primeira, define os pontos *M* e *N*.

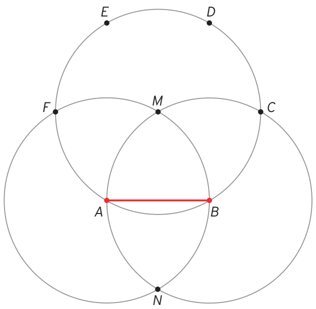


4º passo: Escolha um dos pontos. No caso, vamos escolher o ponto *M*. Em seguida, com a ponta-seca do compasso em *M* e raio $\overline{AB}$, trace uma circunferência.

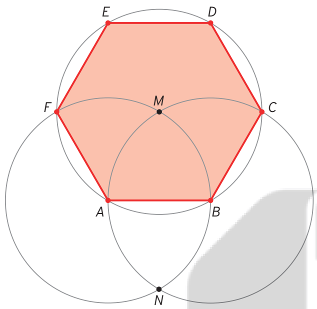


Ilustrações: ID/BR

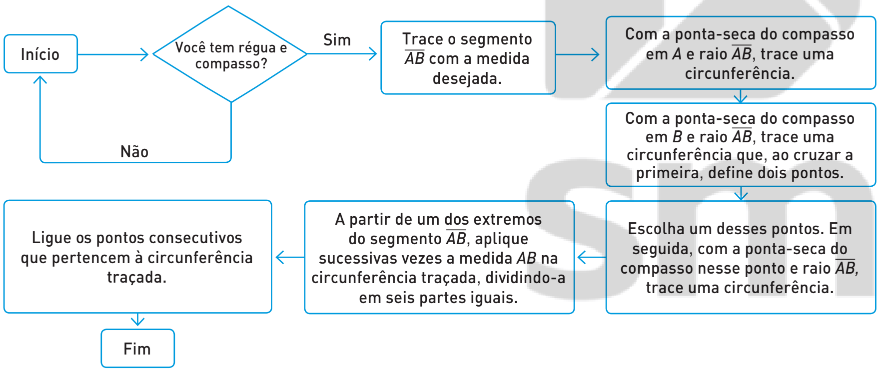
5º passo: A partir de um dos extremos do segmento $\overline{AB}$, aplique sucessivas vezes a medida *AB* na circunferência de centro *M*, dividindo-a em seis partes iguais.



6º passo: Ligue os pontos consecutivos que pertencem à circunferência de centro *M*, obtendo o hexágono regular *ABCDEF*.



O passo a passo para a construção de polígonos regulares pode ser representado em um fluxograma. Por exemplo, o fluxograma a seguir, indica como construir um hexágono regular.



- No 8º ano, os estudantes viram como construir um hexágono regular de qualquer área a partir da medida do ângulo central e com o uso de esquadro e compasso. Agora, será apresentada a construção de um hexágono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso. Se julgar oportuno, retome a primeira construção e compare-a com essa nova maneira de construir.
- Peça aos estudantes que leiam o fluxograma e sigam os passos descritos para construir um hexágono regular. Pergunte-lhes se fariam um fluxograma diferente e valide as respostas dadas. Além disso, você pode solicitar a eles que se reúnam em duplas e elaborem um fluxograma para a construção do triângulo equilátero. Depois, peça que o troquem com outras duplas para que cada uma delas verifique se o fluxograma está correto ou não.
- Proponha aos estudantes que construam o hexágono regular escolhendo, dessa vez, o ponto *N* no 4º passo.

DE OLHO NA BASE

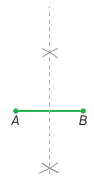
Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular cuja medida do lado é conhecida favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA15**.

- É importante reproduzir o passo a passo da construção do octógono regular na lousa, para que os estudantes a acompanhem e reproduzam a figura no caderno, a fim de que se apropriem das etapas de construção.
- Se julgar oportuno, solicite aos estudantes que façam uma pesquisa sobre a construção de outros polígonos regulares com o auxílio de régua e compasso. Organize-os em grupos e peça a cada grupo que seja responsável por apresentar a construção de um polígono regular diferente dos polígonos mostrados nestas páginas.
- Para a construção de polígonos regulares em um *software* de geometria dinâmica, leve os estudantes para a sala de informática, caso a escola disponha desse espaço, para que possam reproduzir as etapas de construção do quadrado.
- É importante que eles se familiarizem com as ferramentas que serão utilizadas. Peça a eles que construam outros polígonos regulares e que escrevam no caderno como procederam para realizar a construção. Incentive-os a fazer as figuras em posições não convencionais; por exemplo, começando com um segmento inclinado.

Octógono regular

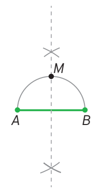
1º passo: Trace o segmento $\overline{AB}$ de medida qualquer.

2º passo: Trace a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

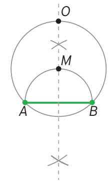


Ilustrações: ID/BR

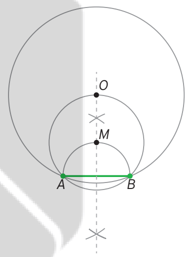
3º passo: Com a ponta-seca do compasso no ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e a abertura até uma de suas extremidades, trace o arco que intersecta a mediatriz em *M*.



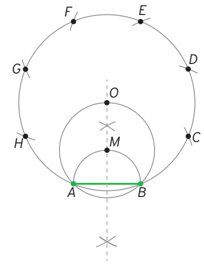
4º passo: Com a ponta-seca do compasso em *M* e raio $\overline{MA}$, trace uma circunferência que intersecta a mediatriz em *O*. Esse ponto é o centro da circunferência que circunscreve o octógono.



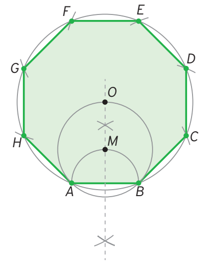
5º passo: Trace a circunferência de raio medindo $\overline{OA}$ com centro em *O*.



6º passo: A partir de um dos extremos do segmento $\overline{AB}$, aplique sucessivas vezes a medida *AB* na circunferência de centro *O*, dividindo-a em oito partes iguais.



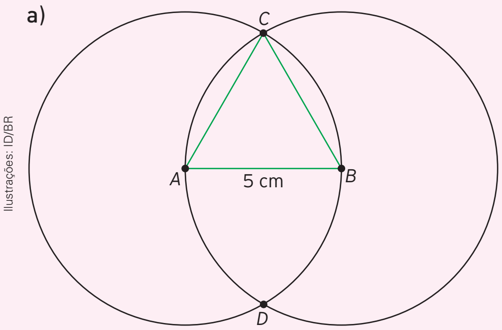
7º passo: Ligue os pontos consecutivos que pertencem à circunferência de centro *O*, obtendo o octógono regular *ABCDEFGH*.



RESPOSTAS

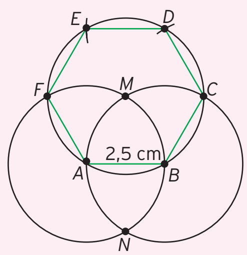
12. Construções possíveis:

a)

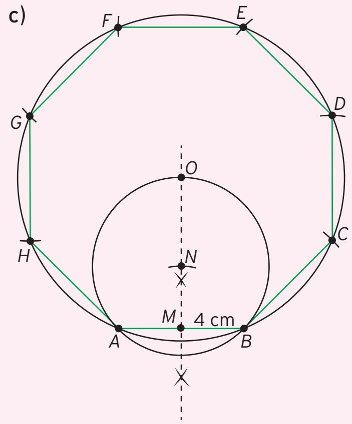


Ilustrações: ID/BR

b)



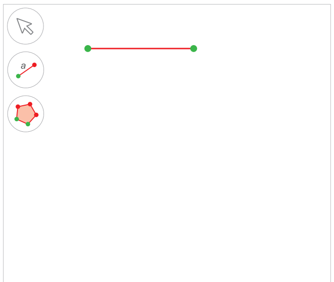
c)



Construção de polígonos regulares em um *software* de geometria dinâmica

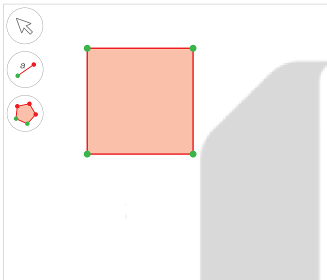
Vamos construir um quadrado com 4 cm de lado usando um *software* de geometria dinâmica. Acompanhe os passos a seguir.

1º passo: Selecione a ferramenta, clique na área de trabalho do *software*, digite 4 na caixa de diálogo aberta e clique em OK. Dessa forma, é possível construir um segmento com a medida desejada.



Ilustrações: ID/BR

2º passo: Selecione a ferramenta, clique em um dos extremos do segmento construído e, em seguida, no outro extremo. Depois, digite a quantidade de vértices – nesse caso, são 4 – na caixa de diálogo aberta e clique em OK.



ATIVIDADES

Consulte as respostas neste manual.

Responda sempre no caderno.

12. Construa, com régua e compasso, as figuras indicadas nos itens a seguir.

a) Triângulo equilátero cujo lado mede 5 cm.

b) Hexágono regular cujo lado mede 2,5 cm.

c) Octógono regular cujo lado mede 4 cm.

13. Descreva em um fluxograma os passos para construir um octógono regular com lado de medida qualquer.

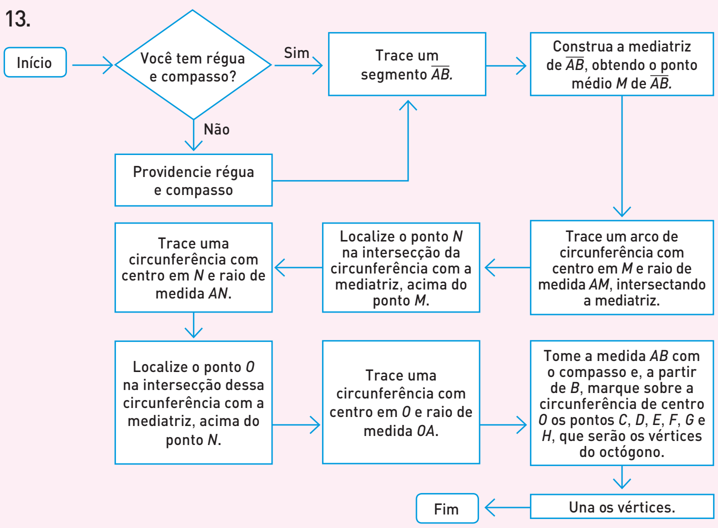
14. Em um *software* de geometria dinâmica, construa um eneágono regular com lados medindo 2 cm.

15. Descreva os passos para a construção de um polígono regular qualquer, conhecida a medida de seu lado, utilizando um *software* de geometria dinâmica.

DE OLHO NA BASE

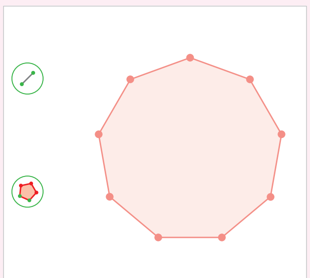
As atividades propostas permitem que os estudantes descrevam, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, assim como *softwares*, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA15**.

13.



14. Construção possível:

ID/BR



15. Descrição possível:

1º passo: Selecione a ferramenta “segmento com comprimento fixo”.

2º passo: Clique na área de trabalho do *software*, digite a medida desejada e clique em OK.

3º passo: Selecione a ferramenta “polígono regular”, clique em cada um dos extremos do segmento construído e digite a quantidade de lados desejada. Clique em OK.

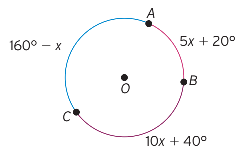
ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados neste capítulo.
- Para resolver o item **a** da atividade **9**, os estudantes podem considerar que, na circunferência circunscrita no dodecágono, as retas determinam um arco equivalente a $\frac{1}{12}$ da circunferência.

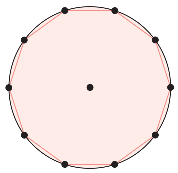
  Já no item **b**, é importante que os estudantes percebam que o ângulo que mede *y* graus é inscrito e seu arco é correspondente ao arco de um ângulo central que mede 30°.
- Na atividade **11**, retome com os estudantes o fato de que qualquer triângulo retângulo inscrito em uma circunferência tem sua hipotenusa coincidindo com o diâmetro da circunferência.

DIVERSIFICANDO

1. Quantos graus mede o arco $\overset{\frown}{ABC}$? **210°**

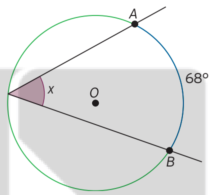


2. Copie o decágono regular a seguir no caderno. **Consulte a resposta neste manual.**



Trace ângulos centrais com as seguintes medidas: 18°, 36°, 54°, 72° e 90°.

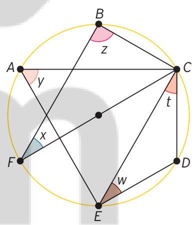
3. Determine a medida *x*, em grau, do ângulo indicado na figura a seguir. **34°**



4. Se a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é 43,5°, qual é a medida do arco de circunferência determinado por esse ângulo? **87°**

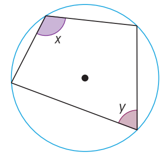
5. Os seis arcos determinados nesta circunferência são congruentes.

$\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \text{med}(\overset{\frown}{BC}) =$
$= \text{med}(\overset{\frown}{CD}) = \text{med}(\overset{\frown}{DE}) =$
$= \text{med}(\overset{\frown}{EF}) = \text{med}(\overset{\frown}{FA})$



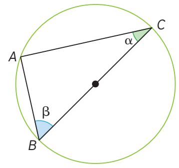
Determine as medidas *x*, *y*, *z*, *w* e *t* em grau.
x = 30°; y = 60°; z = 90°; w = 30°; t = 30°

6. Determine a soma, em grau, das medidas *x* e *y* mostradas na figura a seguir. **180°**



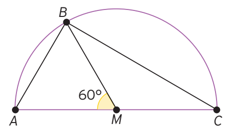
Ilustrações: ID/BR

7. Considere que $\alpha = x + 20°$ e $\beta = 7x - 10°$.



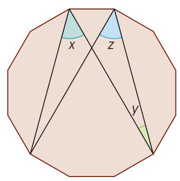
Qual é a medida do menor ângulo do triângulo *ABC*? **30°**

8. Na figura a seguir, sabe-se que $AC = 10$ cm, *M* é o ponto médio do segmento $\overline{AC}$ e o arco de circunferência $\overset{\frown}{AC}$ tem centro em *M*. Uma formiga que estava no ponto *A* fez o trajeto $A \rightarrow B \rightarrow M \rightarrow C$, sempre em linha reta.



Quantos centímetros a formiga andou nesse trajeto? **15 cm**

9. Considere um dodecágono regular.



a) Quanto mede o ângulo definido por duas semirretas que partem do centro do polígono e passam por dois vértices consecutivos? **30°**

b) Determine, em grau, as medidas de *x*, *y* e *z*. **x = 45°; y = 15°; z = 45°**

ESTRATÉGIAS DE APOIO

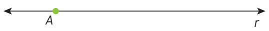
Se os estudantes tiverem dificuldade em identificar o ângulo central na circunferência, providencie discos de fração para que eles possam observar as partes. Por exemplo, utilize um disco dividido em 8 partes iguais. Peça a eles que observem uma das partes desse disco e que localizem a ponta. Nessa ponta, peça que identifiquem um ângulo e notem que, juntando todas as partes, obtemos o círculo novamente.

Em seguida, faça as seguintes perguntas: Se temos o círculo novamente, adicionando os ângulos de cada parte do disco, qual será a medida desse ângulo? Espera-se que os estudantes respondam 360°. E se esses pedaços são todos iguais, como podemos saber a medida de cada ângulo? Espera-se que os estudantes digam que cada ângulo mede 45°, pois $\frac{360°}{8} = 45°$.

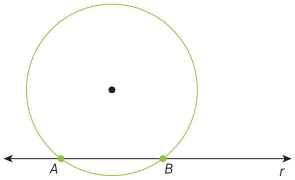
Por fim, retome a definição de ângulo central como aquele cujo vértice é o centro da circunferência e que é composto de duas semirretas, as quais, portanto, atravessam a circunferência em dois pontos distintos. Lembre-os também de que o ângulo central determina um arco entre esses dois pontos cuja medida é igual à medida do próprio ângulo central.

10. As figuras a seguir ilustram as etapas de construção de uma reta *s*, que é perpendicular a uma reta *r* no ponto *A*.

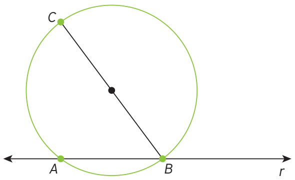
I. Traçar a reta *r* e nela marcar um ponto *A* qualquer.



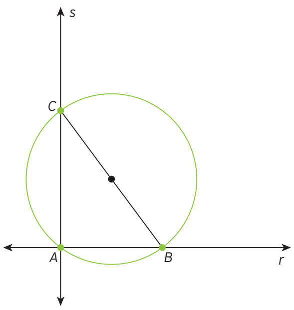
II. Traçar uma circunferência com centro qualquer e que passe por *A*. Essa circunferência determina o ponto *B* em *r*.



III. Traçar o diâmetro com extremidade em *B*, que determina na circunferência o ponto *C*.



IV. A reta *s*, que passa por *C* e por *A*, é a perpendicular procurada.

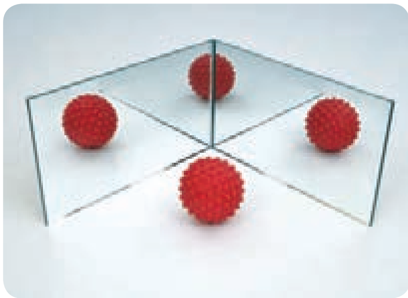


Ilustrações: ID/BR

Explique por que essa construção é válida.
Consulte a resposta neste manual.

11. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 20 cm. Quanto mede o raio da circunferência que passa pelos vértices desse triângulo? **10 cm**

12. A fotografia a seguir apresenta dois espelhos colocados perpendicularmente entre si com um objeto entre eles.



Carlos Luvizari/ID/BR

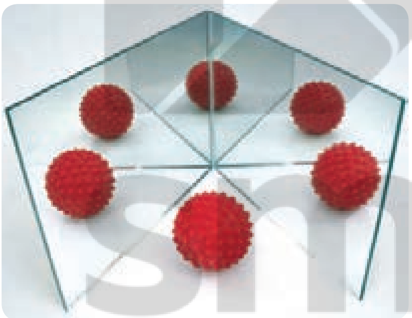
Note que foram produzidas três imagens do objeto.

A quantidade *N* de imagens formadas depende do ângulo α entre os espelhos e é dada pela relação:

$$N = \frac{360°}{\alpha} - 1$$

Observe que, para $\alpha = 90°$, como na fotografia apresentada, obtemos $N = 3$.

Já na fotografia a seguir, dois espelhos dispostos em determinada posição fornecem cinco imagens da bolinha que foi colocada entre eles.

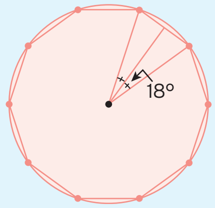


Carlos Luvizari/ID/BR

Calcule o ângulo entre os espelhos. **60°**

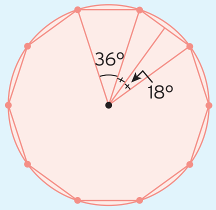
RESPOSTA

2. • Ângulo de 18°

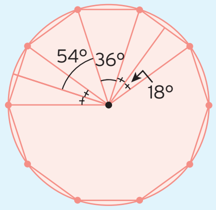


Ilustrações: ID/BR

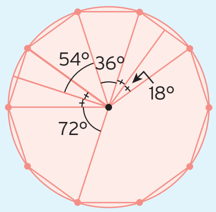
• Ângulo de 36°



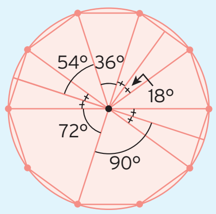
• Ângulo de 54°



• Ângulo de 72°



• Ângulo de 90°



10. A construção é válida porque o ângulo $C\hat{A}B$ é um ângulo inscrito em uma circunferência e está associado a um arco que é uma semicircunferência, ou seja, o arco tem medida igual a 180°. Portanto, $C\hat{A}B$ mede 90° (180° : 2 = 90°). Assim, a reta *s*, que contém o segmento $\overline{CA}$, é perpendicular à reta *r*, que contém o segmento $\overline{AB}$.

CAPÍTULO 3

Conteúdos

- Representação de vistas.
- Noções de perspectiva.

Objetivos

- Identificar e desenhar diferentes vistas de uma mesma figura geométrica não plana.
- Reconhecer desenhos em perspectiva.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de reconhecer diferentes vistas de uma figura geométrica não plana e de compreender a noção de desenhos em perspectiva, identificando e construindo essas representações geométricas. Essa é uma oportunidade para que eles desenvolvam ainda mais as noções de visão espacial, relacionando objetos do mundo real a suas representações planas e em perspectiva.

REPRESENTAÇÃO DE VISTAS

- Diga aos estudantes que o estudo das representações de vistas é empregado em diversas áreas, como na engenharia e na arquitetura, além de ser muitas vezes utilizado por artistas.
- Se julgar oportuno, traga para a sala de aula objetos tridimensionais e proponha aos estudantes que se reúnam em grupos para observar esses objetos de diferentes posições. Proponha a eles que representem no caderno a vista que eles obtêm do objeto ao observá-lo de diferentes posições.

Capítulo 3 VISTAS

Neste capítulo, os estudantes terão contato com os conceitos de vista e perspectiva.

Representação de vistas

Você já observou um objeto em diferentes posições? Em caso afirmativo, o que você viu ao observá-lo dessas posições?

Imagine, por exemplo, que dois colegas estejam na mesma sala vendo o mesmo objeto, mas em posições diferentes. Um deles pode estar vendo uma figura com formato parecido com um quadrado, e o outro, uma figura com formato parecido com um triângulo. Cada um deles tem uma **vista** do objeto.

Agora, observe a imagem a seguir. Nela, foram projetadas duas sombras de um objeto que lembra um cilindro. Note que, em uma das projeções, vemos uma imagem que lembra um retângulo e, na outra, vemos uma imagem que lembra um círculo. Cada uma dessas projeções é chamada de vista.

Vista é a representação de uma figura tridimensional de acordo com a posição do observador em relação a essa figura.

Sombras de um objeto com formato cilíndrico projetadas em diferentes superfícies.

Evan Ishida/ID/BR

Ao observar um objeto, podemos representar a vista que temos dele de determinada posição. Acompanhe as situações a seguir.

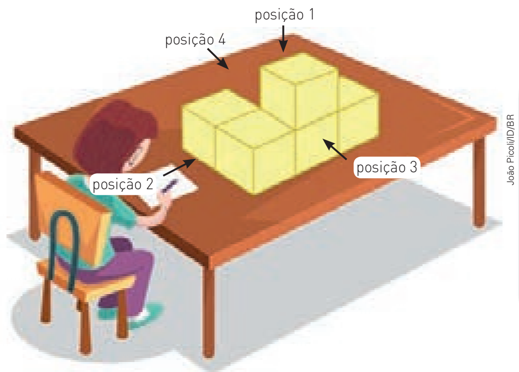
Situação 1

Cada criança observa o objeto de determinada posição.

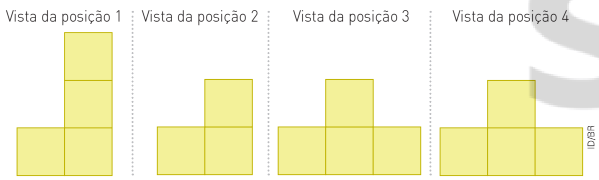
Perceba que, dependendo da posição de cada criança, as vistas do objeto são diferentes.

Situação 2

Adriana desenhou as vistas de uma pilha de blocos de acordo com as diferentes posições em que ela ficou em relação à pilha.



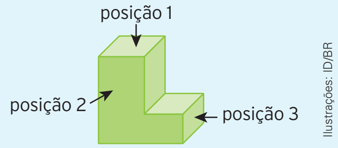
Veja como ficaram os desenhos que ela fez de cada vista.

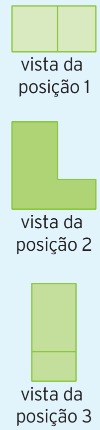


PARA EXPLORAR

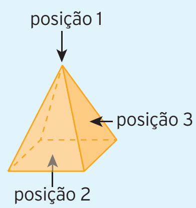
Com um responsável, dê uma volta pela região onde você mora e escolha um objeto ou uma construção. Observe-o de duas posições diferentes e desenhe as vistas obtidas. Depois, mostre os desenhos aos colegas da turma e conte como foi sua experiência.

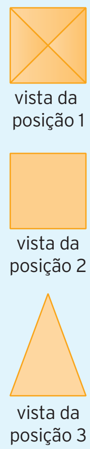
- Mostre aos estudantes que dependendo da posição em que o observador está, é possível obter uma vista diferente. Por exemplo, ao observar um objeto como este a seguir, as vistas são diferentes.





- Providencie um modelo de pirâmide de base quadrada e coloque-o sobre a mesa. Depois, peça aos estudantes que o observem em posições diferentes e façam um desenho que represente as vistas que observaram. Algumas vistas que eles podem desenhar são:





Criatividade

Se julgar pertinente, apresente aos estudantes outros tipos de arte que envolvam vistas, como a arte anamórfica , que consiste em distorcer um desenho ou uma pintura a partir de um ponto de vista definido pelo artista. De outros ângulos, não é possível ver a arte 3-D, mas um borrão. Trata-se de uma ilusão de óptica em que o observador tem a impressão de que a imagem é tridimensional, por causa da perspectiva que o artista utiliza na elaboração do desenho, fazendo-o convergir para o mesmo ponto que os demais elementos da paisagem (árvores, construções, etc.).

RESPOSTA

2. b)

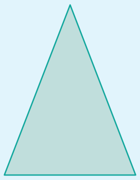


figura A

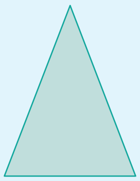


figura B

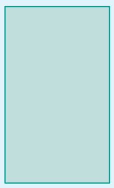


figura C

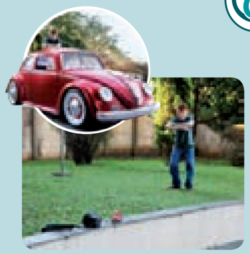
Ilustrações: ID/BR

CRIATIVIDADE NAS FOTOGRAFIAS

Você já viu fotografias tiradas com a intenção de brincar com o ponto de vista do observador? São fotografias que registram uma imagem diferente da realidade. Veja, por exemplo, as imagens ao lado, que mostram duas vistas de um registro fotográfico desse tipo.

Para conseguir essas imagens, a câmera precisa estar posicionada em um local exato; caso contrário, a fotografia não terá o efeito desejado.

Se você vir alguém tentando tirar fotos desse tipo e não estiver na posição da câmera, será difícil imaginar o resultado da foto e a imagem criada.



Sérgio Dotta Jr./ID/BR

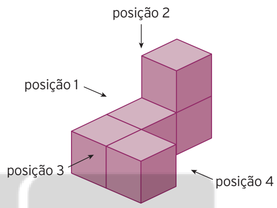
- **Com os colegas e com o auxílio de uma câmera, tente fazer algumas fotografias nas quais a posição do fotógrafo ou da câmera seja essencial para o sentido da imagem.**

ATIVIDADES

2. a) Vista I: figura B; vista II: figura C; vista III: figura A.

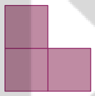
Responda sempre no caderno.

1. Observe a pilha de blocos a seguir e faça o que se pede.

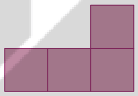


No caderno, relacione a que vista cada figura se refere. **a) III; b) IV; c) II; d) I**

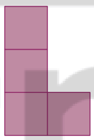
a)



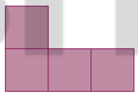
b)



c)



d)



I. Vista da posição 1.

II. Vista da posição 2.

III. Vista da posição 3.

IV. Vista da posição 4.

2. Considerando as figuras não planas a seguir, responda ao que se pede em cada item.

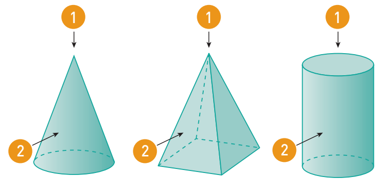
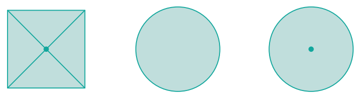


figura A figura B figura C

Ilustrações: ID/BR

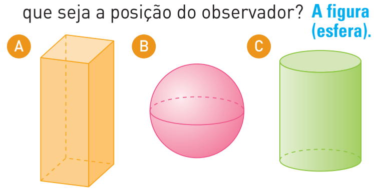
a) As vistas a seguir foram obtidas da posição 1. Relacione-as com as respectivas figuras.



vista I vista II vista III

b) Desenhe no caderno como seriam as vistas das figuras se você as estivesse observando na posição 2. **Consulte a resposta neste manual.**

3. Qual das figuras geométricas não planas a seguir tem a mesma vista, qualquer que seja a posição do observador? **A figura B (esfera).**



OUTRAS FONTES

HILBERT, D. *Fundamentos da geometria*. Lisboa: Gradiva, 2003.

Esse livro não é apenas um texto sobre geometria elementar, mas um cuidadoso estudo de vários problemas relacionados a esse tema, o que contribui para que os professores percebam que a dificuldade de ensinar geometria nas escolas não se deve apenas a deficiências de ordem pedagógica, mas também à falta de contato com os problemas reais da matéria e do indispensável treino para a investigação dessas questões.

Noções de perspectiva

Você já parou para pensar em como podemos representar, em uma folha de papel, o espaço ocupado por um objeto? Representar a realidade tridimensional em um plano bidimensional não é uma tarefa fácil. Para transmitir a noção de profundidade ao observador, podem ser usadas algumas técnicas.

A **perspectiva** é uma das técnicas que podemos usar para representar figuras com três dimensões, ou seja, que tenham altura, comprimento e largura, em um desenho com duas dimensões.

Observe as imagens a seguir.

João Picoli/ID/BR

As duas imagens representam uma casa. Você consegue perceber o que as diferencia? Note que, na primeira, a frente e a lateral da casa não estão alinhadas, o que faz com que os elementos da imagem apresentem volume, ou seja, aparentam ser tridimensionais. Já na segunda imagem, os elementos estão alinhados.

Essa diferença de percepção deve-se às técnicas utilizadas para representar a casa. Ao utilizar técnicas que dão ideia de profundidade e de sombra, a imagem da casa passa a ter aspecto tridimensional, mesmo sendo representada em duas dimensões, no plano da página deste livro.

+INTERESSANTE

Edgar Müller

Edgar Müller nasceu em Mülheim, na Alemanha, em 1968. Seu fascínio pela pintura começou na infância, com pinturas de cenas rurais da cidade onde cresceu.

Müller estudou na cidade de Geldern, em uma escola onde foi realizada uma competição internacional de pintores de rua. Inspirado pelas obras de arte que encontrou em seu caminho para a escola, decidiu entrar na competição. Sua primeira participação foi aos 16 anos de idade; aos 19 anos, ganhou a competição pela primeira vez.

Atualmente, seu estilo é denominado pintura realista ou pintura 3-D. A maioria de suas obras é realizada em grandes áreas públicas, desafiando a percepção das pessoas que por ali passam.

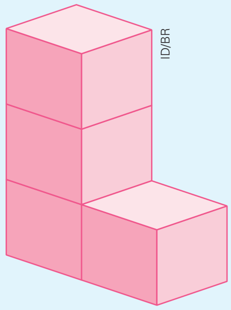
Muitas pessoas interagem com as obras de arte de Edgar Müller, tirando fotos do novo cenário proposto por elas.

PEDRO SANCHEZ MUÑOZ/NOTIMEX/Notimex/AFP

Pintura de rua em 3-D, *Amor eterno*, do artista Edgar Müller, no Monumento à Revolução, Cidade do México, México. Foto de 2017.

NOÇÕES DE PERSPECTIVA

- Segundo o *Dicionário eletrônico Houaiss* (Rio de Janeiro: Objetiva, 2009), o termo perspectiva significa "técnica de representação tridimensional que possibilita a ilusão de espessura e profundidade das figuras". Assim, se uma figura geométrica não plana estiver representada de forma a nos dar ideia de profundidade, dizemos que ela está em perspectiva.
- A perspectiva é uma técnica de desenho utilizada para representar três dimensões em uma superfície plana.
- Observe que a representação da pilha de blocos em perspectiva, como na figura a seguir, aproxima a imagem da construção real da pilha, dando a ideia de profundidade e de sombra, apresentando volume e tridimensionalidade, mesmo que a imagem esteja representada em duas dimensões.



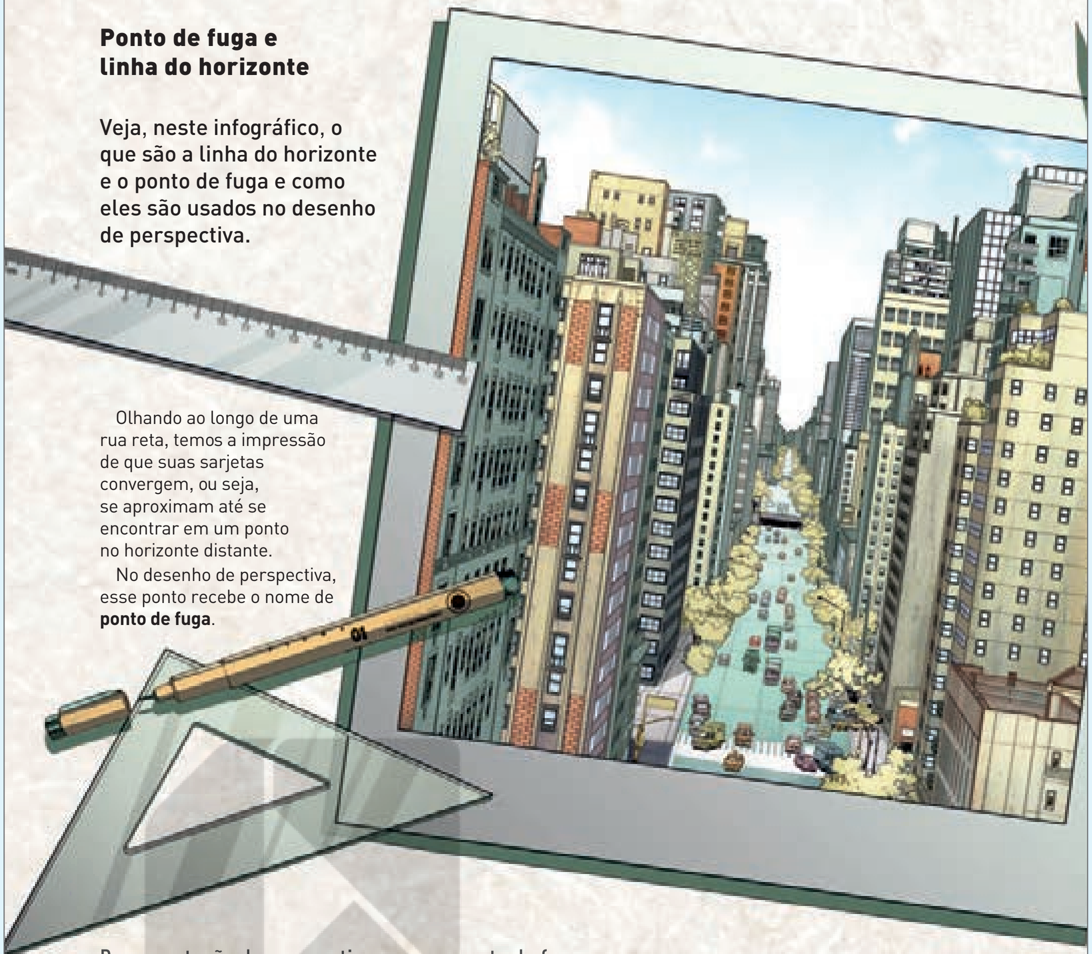
ID/BR

211

- Para criar efeitos por meio da perspectiva, recorre-se a linhas, e essa técnica possibilita produzir uma sensação de realidade. Para compreender a perspectiva, é necessário observar alguns elementos: linha do horizonte, ponto de fuga e linhas de fuga.
- O conteúdo de perspectivas e a construção de ponto de fuga e linha do horizonte podem contribuir para o desenvolvimento da habilidade **EF69AR04** [Analisar os elementos constitutivos das artes visuais (ponto, linha, forma, direção, cor, tom, escala, dimensão, espaço, movimento etc.) na apreciação de diferentes produções artísticas], do componente curricular Arte.

Ponto de fuga e linha do horizonte

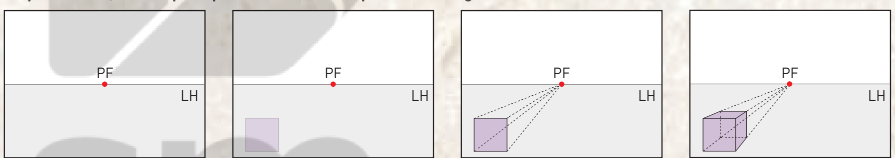
Veja, neste infográfico, o que são a linha do horizonte e o ponto de fuga e como eles são usados no desenho de perspectiva.



Olhando ao longo de uma rua reta, temos a impressão de que suas sarjetas convergem, ou seja, se aproximam até se encontrar em um ponto no horizonte distante.

No desenho de perspectiva, esse ponto recebe o nome de **ponto de fuga**.

Representação de perspectiva com um ponto de fuga



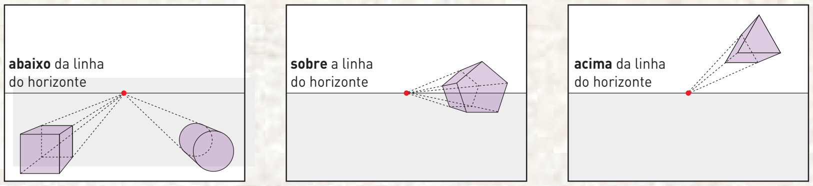
1 Representamos a **linha do horizonte** (LH), uma linha no plano dos olhos do observador, e, sobre ela, indicamos o **ponto de fuga** (PF).

2 Para desenhar um bloco retangular, podemos começar traçando o polígono que corresponde à sua face frontal.

3 A seguir, traçamos linhas retas ligando o PF aos vértices do polígono.

4 Por fim, traçamos segmentos de reta paralelos aos lados da face frontal e reforçamos as linhas que formaram o bloco retangular.

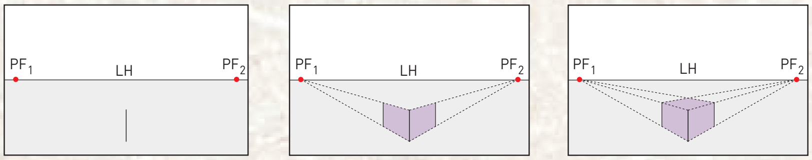
A seguir, mostramos figuras geométricas não planas que foram desenhadas por meio da projeção de suas faces frontais. Observe como a perspectiva permite representar não só a profundidade, mas também a posição dos objetos em relação à linha do horizonte e ao ponto de fuga.



Ilustrações: Eduardo Francisco/ID/BR

Representação de perspectiva com dois pontos de fuga

É possível representar um corpo tridimensional em perspectiva utilizando mais de um ponto de fuga. Nesse caso, podemos iniciar a representação com a aresta frontal da figura geométrica não plana que desejamos desenhar. Veja como representar um bloco retangular.



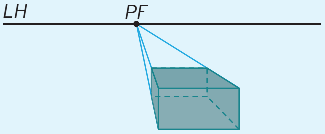
1 Representamos a linha do horizonte (LH) e, sobre ela, os dois pontos de fuga (PF_1 e PF_2). Em seguida, desenhamos a aresta frontal do bloco retangular.

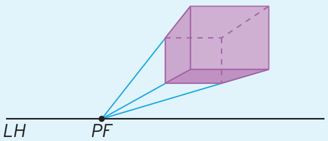
2 Traçamos linhas retas ligando as pontas da aresta aos pontos de fuga (PF_1 e PF_2). Depois, traçamos segmentos paralelos à aresta, obtendo, assim, dois lados do bloco retangular.

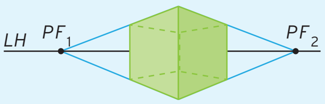
3 Traçamos linhas retas entre os extremos dos novos segmentos e os pontos de fuga (PF_1 e PF_2), de modo que formem o restante do bloco retangular.

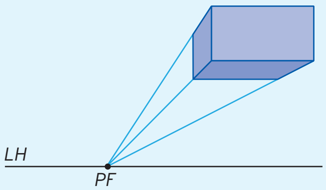
- Antes de apresentar o infográfico aos estudantes, pergunte se eles sabem o que é um desenho em perspectiva e se já tentaram desenhar objetos de três dimensões. Verifique se eles já fizeram algum desenho usando uma linha do horizonte e um ou mais pontos de fuga. Caso algum estudante já tenha usado essa técnica, peça a ele que mostre na lousa um pouco do que sabe aos colegas.

RESPOSTAS

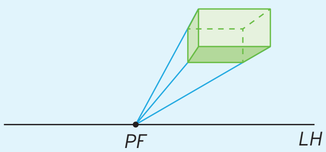
6. a) 

b) 

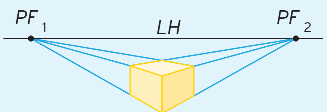
c) 

8. 

10. a) Construção possível:



b) Construção possível:



DE OLHO NA BASE

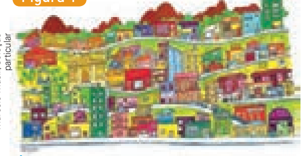
As atividades apresentadas possibilitam aos estudantes reconhecerem vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esses conteúdos para construir objetos em perspectiva, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA17**.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

4. Em duas das pinturas a seguir, é possível perceber a ideia de perspectiva. Indique-as. **Figuras 2 e 3.**

Figura 1



Marcelo Masili/Coleção particular

Marcelo Masili. *Casinhas*, 2007. Grafite e guache.

Figura 2

Museu de Belas Artes de Boston, Boston, Estados Unidos. Fotografia: ID/BR

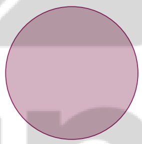
Claude Monet. *Rua de la Bavolle, Honfleur*, cerca de 1864. Óleo sobre tela.

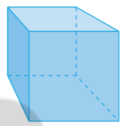
Figura 3

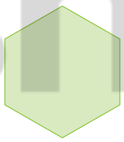
Galleria Nazionale delle Marche, Urbino, Itália. Fotografia: ID/BR

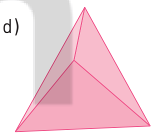
Piero della Francesca. *A cidade ideal*, cerca de 1470. Óleo sobre painel.

5. Considere que as imagens a seguir são representações de figuras geométricas não planas. Em quais delas é possível perceber o uso de luz e sombra e de técnicas de perspectiva? **Nas figuras dos itens c e d.**

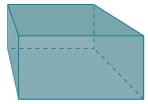
a) 

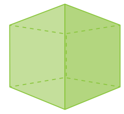
c) 

b) 

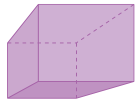
d) 

6. Copie no caderno os poliedros a seguir e determine seus pontos de fuga.

a) 

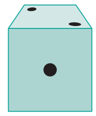
c) 

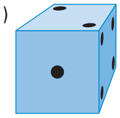
Ilustrações: ID/BR

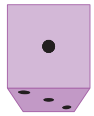
b) 

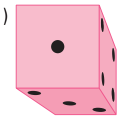
Consulte as respostas neste manual.

7. Verifique se os objetos representados nas imagens a seguir estão acima ou abaixo da linha do horizonte.

a) 

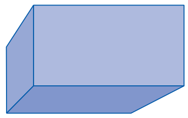
c) 

b) 

d) 

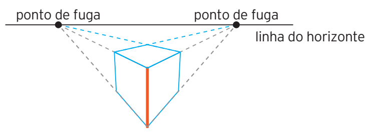
7. a) Abaixo da linha do horizonte.
b) Acima da linha do horizonte.
c) Abaixo da linha do horizonte.
d) Acima da linha do horizonte.

8. O desenho a seguir mostra um bloco retangular em perspectiva.



Reproduza-o no caderno e determine o ponto de fuga e a linha do horizonte. **Consulte a resposta neste manual.**

9. Reproduza o esquema a seguir no caderno e, a partir dele, construa um paralelepípedo em perspectiva com os dois pontos de fuga representados nesse esquema.



10. Reúna-se com um colega para construir, no caderno, um prisma de base retangular em perspectiva com: **Consulte a resposta neste manual.**

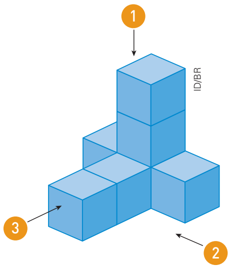
a) um ponto de fuga;

b) dois pontos de fuga.

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. Sete cubos foram organizados de acordo com esta figura.



Em uma folha de papel quadriculado, desenhe as vistas de acordo com as posições de observação indicadas. **Consulte a resposta neste manual.**

2. A soma dos valores indicados nas faces opostas de um dado é igual a sete. Um estudante empilhou dois dados sobre uma mesa, como mostra a figura.

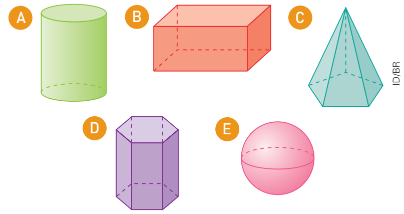
Observe a posição dos dados e responda às questões a seguir.

a) Qual é a soma dos valores das faces opostas às faces que estão na frente? **7**

b) Qual é a soma dos valores das faces opostas às faces que estão na lateral direita? **11**

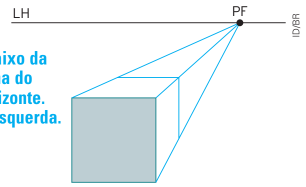
c) Qual é a soma dos valores das faces que estão uma sobre a outra, sabendo que a face apoiada na mesa não tem o número 5? **11**

3. Indique em quais das figuras geométricas não planas a seguir se vê um retângulo em pelo menos uma de suas vistas. **Nas figuras A, B e D.**



4. Copie o esquema a seguir no caderno e faça o que se pede em cada item.

4. b) Abaixo da linha do horizonte.
c) À esquerda.



a) Complete o esquema formando um cubo de acordo com a linha do horizonte (LH) e o ponto de fuga (PF) indicados.

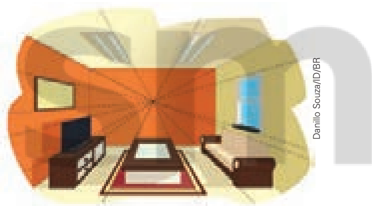
b) O cubo que você desenhou está acima da linha do horizonte ou abaixo dela?

c) O cubo é visto à esquerda ou à direita do ponto de fuga?

d) Quais arestas da face frontal do cubo são paralelas à linha do horizonte? E quais são paralelas entre si?

5. No caderno, desenhe um bloco retangular em perspectiva. Troque de caderno com um colega e determine a linha do horizonte e o ponto de fuga no desenho dele. **Resposta pessoal.**

6. No caderno, desenhe um cômodo de sua casa em perspectiva, inspirando-se na figura a seguir. A imagem deve ser desenhada com o ponto de fuga no meio da parede do fundo do cômodo, como mostra o modelo. **Resposta pessoal.**



4. d) As arestas horizontais da face frontal são paralelas à linha do horizonte e paralelas entre si. As arestas verticais da face frontal também são paralelas entre si.

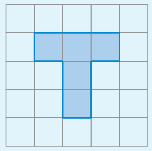
ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados neste capítulo.

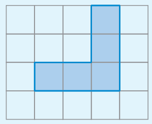
RESPOSTA

1. As três vistas da pilha de cubos podem ser representadas da seguinte maneira:

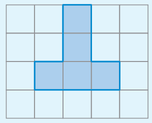
Vista 1:



Vista 2:



Vista 3:



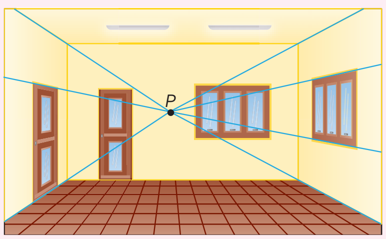
DE OLHO NA BASE

As atividades propostas permitem aos estudantes reconhecerem vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA17**.

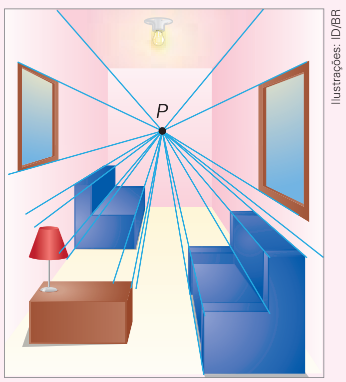
ESTRATÉGIA DE APOIO

Caso os estudantes tenham dificuldade em responder à atividade **6**, mostre-lhes alguns exemplos de ambientes que foram desenhados em perspectiva, com o ponto de fuga no meio da parede do fundo do cômodo.

Inicie apresentando um ambiente sem mobília.



Sugira um ambiente em que os móveis e os objetos sejam básicos e retilíneos, para depois desafiá-los a desenhar o cômodo que escolheram.



ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, o tema abordado é investimento, introduzindo as ideias básicas sobre esse assunto. Verifique se os estudantes compreenderam que, apesar de serem jovens, é importante, desde já, terem contato com alguns tipos de informação sobre investimento. Entender o funcionamento dos mecanismos financeiros contemporâneos faz parte de uma formação crítica.
- A ideia é incentivar a criação de ambientes de educação financeira escolar que convidem os estudantes à reflexão, contribuindo para que entendam e analisem possibilidades, avaliem opções e limitações, reflitam sobre as consequências de suas atitudes, incluindo a de se proteger das armadilhas do mercado.
- Estudar e saber um pouco de investimentos é importante tanto para entender como o mercado funciona como para abordar a educação financeira nas aulas de Matemática.
- Proponha uma roda de conversa para os estudantes refletirem e compartilharem suas práticas com os colegas. Incentive a troca de ideias perguntando-lhes, por exemplo, quem tem o hábito de gerenciar os gastos do dia a dia, de economizar para futuros imprevistos ou de fazer investimentos que possibilitem a realização de um projeto. É importante que eles percebam que o planejamento financeiro e a gestão de orçamento possibilitam conquistar objetivos e são importantes para evitar o endividamento.

DE OLHO NA BASE

Refletir sobre esse tema auxilia os estudantes a agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 10**.

Responsabilidade

O assunto tratado nessa seção possibilita aos estudantes refletir sobre como poupar dinheiro e investi-lo com sabedoria, compreendendo as diversas formas possíveis de fazer isso, o que contribui para um planejamento responsável em relação ao futuro.

AMPLIANDO HORIZONTES

O valor no amanhã

As pessoas costumam fazer investimentos financeiros com os mais diversos objetivos: ter uma reserva financeira para alguma eventualidade, realizar um projeto especial, pagar a faculdade dos filhos no futuro, ajudar uma ONG, trocar de carro, viajar nas férias, comprar uma casa, etc.

O investimento financeiro mais comum no Brasil é a poupança, um tipo de conta bancária em que o investidor deixa seu dinheiro aplicado e, a cada mês, recebe os juros dessa aplicação, ou seja, recebe um percentual adicional ao valor que deixou aplicado.

Por exemplo, se uma pessoa fez uma aplicação de R$ 1 000,00 na poupança a uma taxa de juros de 0,6% ao mês, após um mês ela terá R$ 1 006,00. Se ela não resgatar os juros ou parte do dinheiro, no mês seguinte ela terá R$ 1 012,03. Se ela mantiver o dinheiro aplicado, no terceiro mês terá R$ 1 018,10. Esse processo se repete a cada mês enquanto não houver resgate de alguma quantia.

A taxa de juros sempre incide sobre o valor aplicado no mês. A princípio, o rendimento pode parecer pequeno, mas, com o tempo, a quantia disponível na conta aumenta e pode fazer uma grande diferença.

No entanto, a poupança não é o único investimento financeiro disponível nem costuma ser o mais rentável. Há muitos outros tipos de investimento, alguns mais seguros e outros mais arriscados. Revistas, jornais e *sites* de bancos e de outras instituições financeiras apresentam alternativas de investimento que podem ser tão seguras quanto a poupança e até render um pouco mais. Mas é preciso cuidado, pois alguns investimentos geram custos como imposto de renda e taxas administrativas, que podem diminuir o ganho.

216

OUTRAS FONTES

Banco Central do Brasil. *Caderno de educação financeira*: gestão de finanças pessoais. Brasília: BCB, 2013. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/pre/pef/port/caderno_cidadania_financeira.pdf. Acesso em: 4 jul. 2022.

Esse caderno tem o objetivo de incentivar as pessoas a tomar decisões autônomas referentes a consumo, poupança e investimento, prevenção e proteção, considerando seus desejos e suas necessidades atuais e futuras.

Filhos da mama. Série Eu e meu dinheiro. Banco Central do Brasil. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=HQ2HZdJNhm8. Acesso em: 4 jul. 2022.

Nesse episódio, da série “Eu e meu dinheiro”, publicada pelo Banco Central do Brasil, discute-se como os hábitos e as reflexões cultivados na infância podem influenciar as atitudes de investimento, poupança e equilíbrio na vida adulta.

Para refletir

Responda sempre no caderno.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir. **Consulte as respostas neste manual.**

1. Na opinião de vocês, qual é a ideia principal desta seção? Como podemos utilizar os investimentos para atingir objetivos?
2. Como funciona a aplicação na poupança? Por que vocês acham que esse tem sido o investimento que as pessoas mais fazem quando sobra dinheiro?
3. Juliana ganhou R$ 1 000,00 de presente de seus avós e agora precisa decidir o que fazer com o dinheiro. Como ganhou outros presentes, ela está avaliando se não seria interessante aplicar esse dinheiro em algum investimento. Após uma conversa com sua mãe, Juliana separou quatro opções de investimento, apresentadas a seguir.

Investimento	Taxa mensal esperada	Impostos e taxas
Poupança	0,6%	Isento (não é cobrado)
CDB X	0,9%	25% (sobre o ganho)
CDB Y	0,8%	25% (sobre o ganho)
Fundo Z	0,9%	25% (sobre o ganho)

a) Entre esses investimentos, qual é a melhor opção do ponto de vista financeiro?

b) Que outros aspectos, além do financeiro, vocês levariam em consideração para tomar essa decisão?

c) Considerem agora a informação de que, se o banco falir, o governo garante o seu dinheiro de volta caso ele esteja aplicado na poupança ou no CDB, mas não se estiver no Fundo Z. Qual dos investimentos vocês fariam?

d) Pesquisando mais um pouco, Juliana e sua mãe descobriram outro investimento: o Tesouro Direto. Ele é tão seguro quanto a poupança e espera-se que renda 1% ao mês, mas tem custos de aproximadamente 25% sobre os ganhos. Dos cinco investimentos apresentados, qual vocês fariam? Justifiquem.

João Picoli/ID/BR

217

DE OLHO NA BASE

Ao se reunirem em duplas e discutirem as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 9**.

RESPOSTAS

1. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes percebam que os investimentos podem trazer benefícios, possibilitando que sonhos sejam realizados para o bem das pessoas e da sociedade, ampliando o conforto e a qualidade de vida.
2. A poupança é considerada um investimento seguro e de fácil entendimento e aplicação, por isso é o investimento mais procurado. Tem liquidez maior que a de outros investimentos, ou seja, possibilita a retirada de dinheiro investido (ou parte dele), quando necessário, acarretando a perda dos juros somente se o mês do depósito não estiver completo. Resposta pessoal.
3. **a)** As melhores opções são o CDB X e o Fundo Z.

   b) Resposta pessoal. Os aspectos financeiros podem estar associados ao risco, ainda que pequeno; ao desconhecimento que gera insegurança; a questões culturais; à aversão às perdas em outros investimentos; à tranquilidade mesmo ganhando menos; entre outros aspectos.

   c) Resposta pessoal. Verifique se os estudantes levaram em conta que a poupança e o CDB parecem apresentar mais segurança, mas que outros fatores também devem ser considerados, como a estabilidade da economia e da instituição bancária, no caso do CDB.

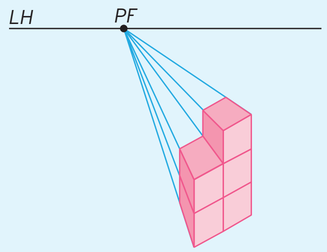
   d) Resposta pessoal. Os estudantes podem preferir o Tesouro Direto, por possibilitar maior rentabilidade. Essa é uma escolha provável, mas está longe de ser a única ou consensual.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nestas páginas, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados nesta unidade.
- Para responder aos itens da atividade **1**, é necessário que os estudantes percebam que o relógio lembra um círculo e que está dividido em 12 partes iguais, cada uma representando uma hora. Assim, para saber o ângulo central correspondente a uma hora, dividimos 360° por 12, obtendo 30°.
- Na atividade **7**, peça aos estudantes que, em primeiro lugar, desenhem no caderno o plano cartesiano com os pontos *ABC* e, em seguida, resolvam a atividade.

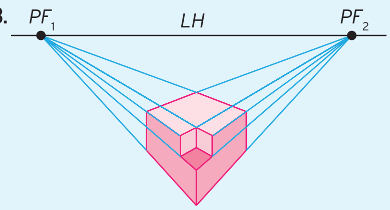
RESPOSTAS

12. Desenho possível:



Ilustrações: ID/BR

13.



ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Observe as figuras e responda às questões.

1. b) 270°, pois 360° − 90° = 270°.
c) 150°, pois a cada 1 hora o ponteiro anda 30°. Portanto, em 5 horas, o ponteiro andará 5 · 30° = 150°.

Dimedrol68/Shutterstock.com/ID/BR

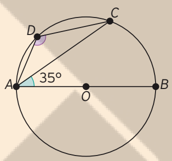
a) Quanto mede o menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio às 9 horas? **90°**

b) Quanto mede o maior ângulo formado pelos ponteiros do relógio às 9 horas? Justifique.

c) Qual é a medida do menor ângulo entre os ponteiros quando o relógio marca 5 horas? Justifique.

2. Escreva no caderno a alternativa correta.

Qual é a medida do ângulo $A\hat{D}C$ inscrito na circunferência de centro *O*? **Alternativa a.**

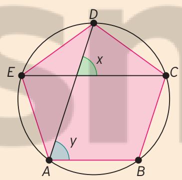


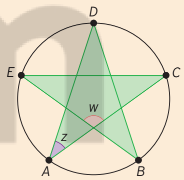
ID/BR

a) 125° c) 120° e) 135°
b) 110° d) 100°

3. Nas figuras a seguir, os pontos sobre as circunferências dividem-nas em partes iguais.

ID/BR

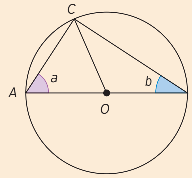




a) Calcule, em grau, as medidas indicadas por *x*, *y*, *z* e *w*. **x = 72°; y = 72°; z = 36°; w = 108°**

b) O que é possível concluir sobre os segmentos $\overline{EC}$ e $\overline{AB}$ da primeira figura? **São segmentos paralelos.**

4. Nesta figura, $\overline{AB}$ é um diâmetro.



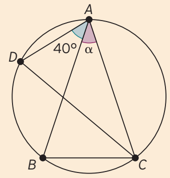
ID/BR

a) Classifique os triângulos *OAC* e *OBC* quanto aos lados. **Ambos são triângulos isósceles.**

b) Quanto medem os ângulos $O\hat{C}A$ e $O\hat{C}B$ em função de *a* e de *b*? **med($O\hat{C}A$) = a; med($O\hat{C}B$) = b**

5. Escreva no caderno a alternativa correta.

(Ufes) Na figura, *A*, *B*, *C* e *D* são pontos de uma circunferência, a corda $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ têm o mesmo comprimento.



Ufes. Fac-símile/ID/BR

Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede 40°, a medida α do ângulo $B\hat{A}C$ é: **Alternativa c.**

a) 10°. c) 20°. e) 30°.
b) 15°. d) 25°.

6. Escreva no caderno a alternativa correta.

(Cesgranrio-RJ) A área do triângulo cujos vértices são (1, 2), (3, 4) e (4, −1) é igual a:

a) 6. b) 8. c) 9. d) 10. e) 12.
Alternativa a.

7. Os pontos *A*(1, 1), *B*(4, 1) e *C*(2,5; 4) formam um triângulo isósceles no plano cartesiano.

a) Determine a medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$. **3 u.c.**

b) Determine a medida do perímetro desse triângulo. **$3 + 2\sqrt{11{,}25}$ u.c.**

c) Qual é a medida da área desse triângulo? **4,5 u.a.**

ESTRATÉGIAS DE APOIO

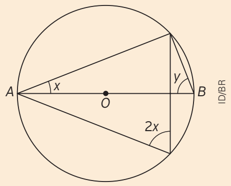
Se os estudantes tiverem dificuldade para resolver a atividade **6**, sugira a eles que sigam estes passos:

- Construam um plano cartesiano em uma malha quadriculada.
- Localizem os vértices do triângulo nesse plano.
- Tracem os lados desse triângulo.
- Classifiquem o triângulo obtido.
- Determinem a medida da base e a da altura desse triângulo.
- Calculem a medida da área desse triângulo.

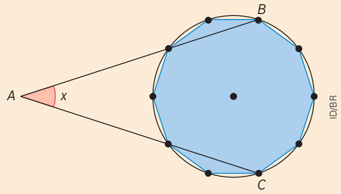
Eles devem observar que a figura obtida é um triângulo retângulo em *A* e, para calcular a medida da área, é necessário obter as medidas dos catetos por meio da medida da distância entre os pontos *A* e *B* e entre os pontos *A* e *C*.

Se for possível, os estudantes podem construir o triângulo utilizando um *software* de geometria dinâmica.

8. Na figura a seguir, $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência. Qual é o valor de y em grau? **60°**

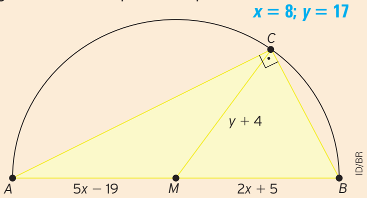


9. Observe a representação a seguir.



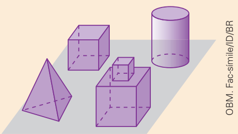
Calcule x, em grau, sabendo que os pontos sobre a circunferência dividem-na em partes iguais. **36°**

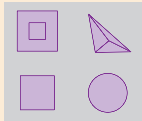
10. Determine o valor de cada incógnita indicada na figura, sabendo que M é o ponto médio de $\overline{AB}$. **$x = 8$; $y = 17$**

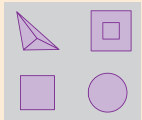


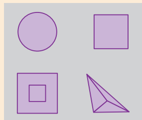
11. Escreva no caderno a alternativa correta.

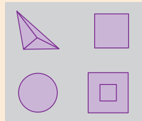
(OBM) Sobre uma mesa retangular de uma sala foram colocados quatro sólidos, mostrados no desenho. Uma câmera no teto da sala, bem acima da mesa, fotografou o conjunto. Qual dos esboços a seguir representa melhor essa fotografia? **Alternativa e.**

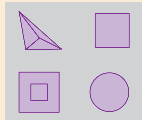


a) 

b) 

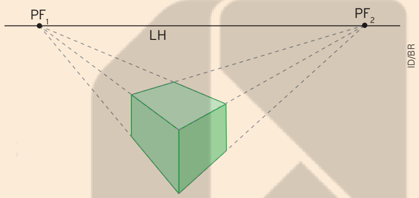
c) 

d) 

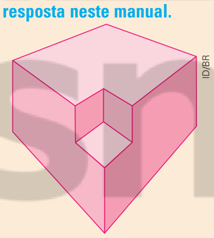
e) 

12. Desenhe no caderno uma pilha de cubos em perspectiva, identificando o ponto de fuga e a linha do horizonte. **Consulte a resposta neste manual.**

13. Uma figura geométrica não plana foi representada em perspectiva com dois pontos de fuga. Veja a seguir.



Agora, reproduza no caderno a figura mostrada a seguir. Depois, trace as linhas de convergência e determine os dois pontos de fuga e a linha do horizonte.
Consulte a resposta neste manual.



AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as seguintes questões para que façam a autoavaliação:

- Reconheci o plano cartesiano como uma representação de pontos no plano?
- Sei localizar pontos e identificar suas coordenadas no plano cartesiano?
- Aprendi a determinar a medida da distância entre dois pontos a partir de suas coordenadas no plano cartesiano?
- Aprendi a determinar o ponto médio de um segmento no plano cartesiano?
- Sei determinar a medida do perímetro e a medida da área de figuras planas representadas no plano cartesiano?
- Aprendi a definir e a identificar elementos de uma circunferência?
- Sei relacionar as medidas do ângulo central e do ângulo inscrito em uma circunferência?
- Sei solucionar situações-problema que envolvem os conceitos de ângulo central e ângulo inscrito em uma circunferência?
- Sei construir polígonos regulares com o uso de régua e compasso e de *software* de geometria dinâmica?
- Sei distinguir diferentes pontos de vista de uma mesma figura geométrica não plana?
- Reconheci desenhos em perspectiva?
- Procurei solucionar minhas dúvidas com os colegas e o professor?

NESTA UNIDADE...

Competência geral
8

Competências específicas de Matemática
3, 6 e 8.

Habilidades

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

UNIDADE 6

FUNÇÕES

SOBRE A UNIDADE

O estudo das funções nessa etapa do ensino é importante para que os estudantes atribuam significado ao conceito de variável e ampliem seus conhecimentos, identificando e conhecendo as características das funções.

Um conceito-chave da unidade é a dependência entre variáveis. Vários exemplos simples podem ser utilizados para os estudantes refletirem sobre a dependência entre duas grandezas, que pode ser estendida para a relação entre variáveis. Um exemplo é a relação de dependência entre a distância percorrida por um automóvel e o tempo de viagem (considerando uma velocidade constante). Amplie esse conceito para outras relações de dependência entre variáveis observadas no cotidiano e em outras áreas de conhecimento.

Não é recomendado que se faça agora um estudo sistemático demasiadamente formal sobre funções, devendo-se abordar o tema como uma introdução ao assunto. Esse estudo é desenvolvido mais profundamente no Ensino Médio.

É importante os estudantes se depararem com problemas que necessitam de representação gráfica de uma dada função e com problemas em que, dada a representação gráfica, seja necessário obter a lei de formação da função. Pode parecer difícil que essas habilidades sejam adquiridas pelos estudantes, mas, se eles atribuírem significado aos coeficientes, certamente a tarefa de ensino e aprendizagem será facilitada.

CAPÍTULO 1
Introdução às funções

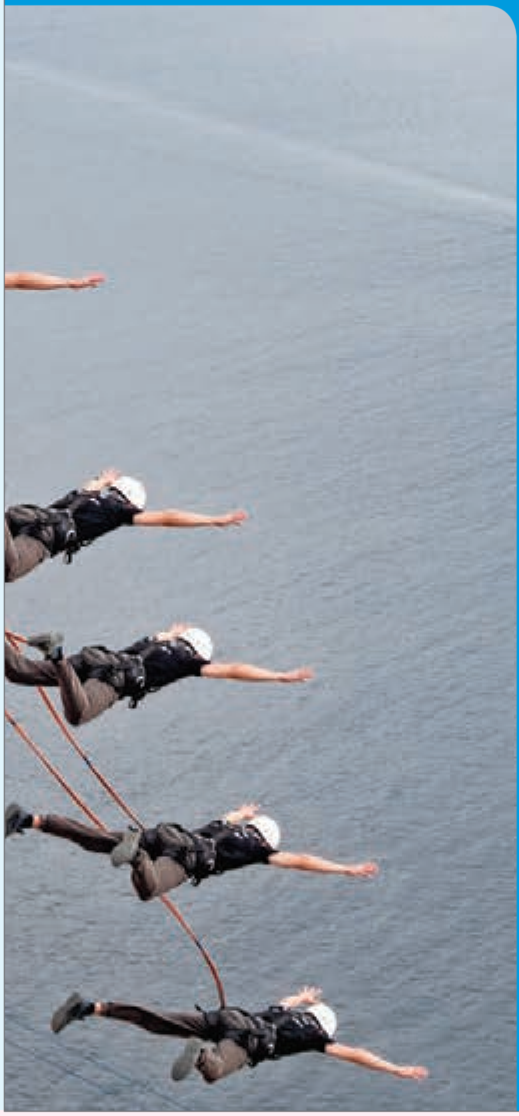
CAPÍTULO 2
Função afim

PRIMEIRAS IDEIAS

O *bungee-jump* é uma modalidade de esporte radical na qual o praticante salta de um lugar alto, como um prédio ou uma ponte, pendurado por uma corda elástica presa a sua cintura ou a seus tornozelos. Durante a queda livre, estão envolvidas três grandezas: a distância percorrida durante a queda livre, o tempo de queda livre e a velocidade. Quanto maior a distância percorrida, maiores serão o tempo de queda e a velocidade final.

Além disso, a velocidade de um corpo em queda livre depende do passar do tempo. Nesta unidade, vamos estudar como uma grandeza pode depender de outra.

1. Você já viu alguém praticando *bungee-jump*?
2. Na queda livre, a velocidade depende do tempo. Cite outro exemplo de dependência de duas grandezas.



Lilkin/iStock/Getty Images

← *Bungee-jump* em penhasco. Sebastopol, Crimeia, região contestada pela Rússia e pela Ucrânia. Foto de 2021.

É preciso cuidar para que o ensino de funções não se resuma à memorização de procedimentos mecanizados. Os estudantes devem atribuir significado ao conceito de função e entender as diferentes maneiras de representar esses entes matemáticos: a representação algébrica, a numérica e a gráfica.

No estudo da função linear, estabeleça conexões com o conceito de proporcionalidade já estudado.

PRIMEIRAS IDEIAS

- Peça aos estudantes que observem a foto e digam a que imaginam que ela se refere. Deixe que eles exponham suas ideias e, então, comente que a imagem de abertura mostra uma pessoa saltando de *bungee-jump*.
- Inicie uma conversa com os estudantes sobre esportes radicais, perguntando se eles teriam coragem de praticá-los se tivessem a idade mínima requerida.
- Se julgar oportuno, para demonstrar o *bungee-jump*, de modo que os estudantes possam perceber as grandezas envolvidas nessa modalidade de salto livre, apresente a eles um vídeo que mostre pessoas praticando essa atividade. Ao selecionar o vídeo, certifique-se de que os praticantes estejam com os equipamentos adequados.
- Depois de assistirem ao vídeo, comente com os estudantes sobre a relação de dependência entre as grandezas envolvidas em um salto de *bungee-jump*.
- Evidencie aos estudantes a legenda da imagem. Nela, uma expressão indica que a Crimeia era uma região contestada pela Rússia e pela Ucrânia. Em 2022, a Rússia iniciou um ataque à Ucrânia ao bombardear e invadir com tropas o país vizinho, elevando a sensação de insegurança no mundo a um dos níveis mais altos desde o fim da Guerra Fria (1991). Sugira que leiam mais sobre esse tema no texto disponível em https://www.nexojornal.com.br/expresso/2022/02/24/A-invas%C3%A3o-militar-da-R%C3%BAssia-%C3%A0-Ucr%C3%A2nia-explicada-em-5-mapas (acesso em: 5 jul. 2022) e permita um momento de discussão para troca de ideias.

RESPOSTAS

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes citem grandezas dependentes, por exemplo, o valor de um produto e o respectivo custo de produção; o valor a ser pago para abastecer um automóvel e o valor do litro do combustível; o salário e a quantidade de dias (ou horas) trabalhados(as).

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Noção de função.
- Lei de formação de uma função.
- Valor de uma função.
- Representação gráfica de uma função.

Objetivos

- Compreender o conceito de variável.
- Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.
- Determinar valores que uma função pode assumir.
- Representar funções graficamente.
- Analisar representações gráficas de funções.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de compreender as ideias iniciais sobre função, identificando regularidades em diversas situações e representando algébrica e geometricamente essas relações. Com esses estudos, pretende-se aprimorar a investigação e o pensamento proporcional dos estudantes, levando-os a fazer conjecturas por meio de diferentes estratégias e experimentações, contribuindo para a autonomia na resolução de problemas.

NOÇÃO DE FUNÇÃO

- Converse com os estudantes sobre o quadro apresentado e verifique se eles percebem que as grandezas "quantidade de entregas" e "intervalo de tempo" se relacionam.
- Chame a atenção dos estudantes para que percebam que cada quantidade e de entregas determina um único valor t (em semanas) de intervalo de tempo.
- Reforce que a grandeza "quantidade de entregas" está em função da grandeza "intervalo de tempo", pois para cada intervalo de tempo, existe um único valor referente à quantidade de entregas.

Capítulo 1 INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES

Para melhor compreensão deste capítulo, os estudantes devem dominar os conteúdos de proporção, de expressões algébricas e de equações.

Noção de função

Leia a notícia a seguir.

Entrega de cestas de produtos orgânicos e agroecológicos cresce 136% na pandemia

As entregas de cestas ou encomendas de produtos orgânicos e agroecológicos na Grande Vitória cresceram em 136% em meio à pandemia do novo Coronavírus (Covid-19). Antes, a porcentagem de produtores de feiras livres e pontos de comercialização que realizavam entregas semanais era de 24%. Com o isolamento social imposto, 57% dos produtores passaram a realizar *delivery*, aumentando em mais de quatro vezes o número de entregas, de 312 para 1 354 por semana.

O resultado foi revelado pela pesquisa "Comercialização direta de alimentos orgânicos e agroecológicos na Grande Vitória mediante pandemia do Covid-19" coordenada pelos extensionistas do Instituto Capixaba de Pesquisa, Assistência Técnica e Extensão Rural (Incaper) [...].

[...]

A pesquisa teve a participação de 103 agricultores de diferentes municípios do Espírito Santo, que correspondem a 87% dos produtores cadastrados nas feiras agroecológicas e pontos de comercialização direta na Grande Vitória. São diversos os produtos orgânicos disponibilizados aos consumidores *in natura* como frutas, verduras e hortaliças. Também são comercializados produtos da agroindústria familiar tais como mel, panificados, fubá, café, conservas vegetais e outros.

Andreia Ferreira. Entrega de cestas de produtos orgânicos e agroecológicos cresce 136% na pandemia. Incaper, 15 set. 2020. Disponível em: https://incaper.es.gov.br/Not%C3%ADcia/entrega-de-cestas-de-produtos-organicos-e-agroecologicos-cresce-136-na-pandemia. Acesso em: 6 maio 2022.

O quadro a seguir relaciona o intervalo de tempo, em semanas, com a quantidade de entregas de produtos orgânicos agroecológicos.

Intervalo de tempo (em semanas)	1	2	3	...	10
Quantidade de entregas	1 354	2 708	4 062	...	13 540

Cesta com produtos orgânicos da feira de produtores rurais vinculados ao Incaper, em Vila Velha (ES). Foto de 2022.

Vinicius Moraes/Fotoarena

222

(IN)FORMAÇÃO

TEXTO 1

De acordo com a Organização Pan-Americana da Saúde (OPAS), em 31 de dezembro de 2019, a Organização Mundial da Saúde (OMS) recebeu uma notificação sobre diversos casos de pneumonia na cidade de Wuhan, na China. Logo em seguida, na primeira semana de janeiro de 2020, as autoridades chinesas confirmaram que haviam identificado um novo tipo de coronavírus, o SARS-CoV-2, até então não identificado em seres humanos.

No fim de janeiro de 2020, a OMS declarou que o surto do novo coronavírus se enquadrava como uma Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional (ESPII), que configura o mais alto nível de alerta da Organização. Até então, esse alerta havia sido emitido em apenas cinco ocasiões:

- 25 de abril de 2009: pandemia de H1N1.
- 5 de maio de 2014: disseminação internacional de poliovírus.
- 8 agosto de 2014: surto de ebola na África Ocidental.
- 1º de fevereiro de 2016: vírus zika e aumento de casos de microcefalia e outras malformações congênitas.
- 18 de maio de 2018: surto de ebola na República Democrática do Congo.

Em 11 de março de 2020, a covid-19, doença causada pelo SARS-CoV-2, foi caracterizada como pandemia. Vale ressaltar que o termo "pandemia" não está relacionado com a gravidade da doença, mas sim com uma questão geográfica.

No Brasil, assim como na maior parte do mundo, para conter o avanço da doença e amenizar o impacto no sistema de saúde, em um primeiro momento, foram adotadas medidas de isolamento social. Estabelecimentos que prestavam serviços caracterizados como não essenciais (estádios de futebol, cinemas, escolas, teatros, igrejas, lojas, entre outros) foram fechados e os hábitos tiveram de ser rapidamente modificados para que as pessoas trabalhassem (no caso de serviços considerados não essenciais) e estudassem de maneira remota. Depois, também foi adotado o uso obrigatório de máscaras individuais para reduzir o contágio. Muitos eventos importantes, como as Olimpíadas de Tóquio, foram adiados, cancelados ou transformados em eventos virtuais.

Observe que nessa situação há uma relação entre duas grandezas: intervalo de tempo e quantidade de entregas. Além disso, perceba que para cada intervalo de tempo há apenas uma quantidade correspondente de entregas.

Quando entre duas grandezas A e B quaisquer existe uma correspondência e para cada medida de A ocorre uma **única** medida correspondente de B, dizemos que **B está em função de A** ou que temos uma **função de A em B**.

Assim, no exemplo apresentado, dizemos que a quantidade de entregas está em função do intervalo de tempo.

Em uma função, as grandezas que se relacionam são chamadas de **variáveis**. Essas variáveis podem ser classificadas em **dependentes** e **independentes**.

AS VARIÁVEIS DE UMA FUNÇÃO PODEM SER CLASSIFICADAS EM:

independente | dependente

Agora, veja outras situações que trabalham com a noção de função.

Situação 1

O valor pago pelo combustível, em reais, é dado em função da quantidade de litros abastecidos. Nesse caso, a variável independente é a quantidade de litros, e a variável dependente é o valor pago.

Situação 2

Uma empresa de aluguel de carros anunciou em seu *site* uma oferta no aluguel de carros econômicos. A diária é R$ 35,00 mais R$ 0,50 por quilômetro percorrido.

O valor gasto com o aluguel depende do período de tempo, em dias, pelo qual se aluga o carro e da distância percorrida, em quilômetros, durante esse período.

No quadro a seguir é possível ver algumas simulações.

Diária	Distância (em quilômetro)	Custo (em real)
1	100	$35 \cdot 1 + 0{,}50 \cdot 100 = 35 + 50 = 85$
1	500	$35 \cdot 1 + 0{,}50 \cdot 500 = 35 + 250 = 285$
2	750	$35 \cdot 2 + 0{,}50 \cdot 750 = 70 + 375 = 445$
2	1 000	$35 \cdot 2 + 0{,}50 \cdot 1000 = 70 + 500 = 570$

Perceba que não existe nenhuma dependência entre o tempo, em dias, de aluguel e a distância, em quilômetro, percorrida com o carro. Portanto, ambas as variáveis são independentes. Já o custo do aluguel depende do tempo e da distância. Então, o custo é uma variável dependente.

Como a quantidade de entregas depende do intervalo de tempo, a quantidade de entregas é a variável dependente e o intervalo de tempo é a variável independente.

PARE E REFLITA

Na primeira situação apresentada, que relaciona o intervalo de tempo e a quantidade de entregas, qual é a variável dependente? E a independente?

- Explique aos estudantes que, em uma função, o valor de uma grandeza (variável dependente) varia de acordo com o valor atribuído a outra grandeza (variável independente).
- É importante garantir que eles compreendam essa relação para que o desenvolvimento dos demais conteúdos da unidade não fique comprometido.
- Muitas grandezas presentes no nosso dia a dia se relacionam, como a “quantidade de questões corretas” em um teste e a “nota recebida”. Dizemos que a nota é função do número de questões corretas, pois para cada quantidade de questões corretas existe uma única nota.
- Peça aos estudantes que relatem alguns exemplos que envolvam grandezas dependentes e independentes e, em seguida, leia os exemplos dados no texto e discuta com eles as relações de dependência entre as variáveis.
- Leia com os estudantes a situação **2**, mas evite fazer uma formalização algébrica, pois isso será visto em seguida. Entretanto, é importante instigá-los a perceber que a expressão utilizada para obter o custo total segue um padrão. Além disso, certifique-se de que eles compreenderam que as variáveis independentes são o tempo e a distância e que a variável dependente é o custo total.

Em 2021, após o desenvolvimento de algumas vacinas, teve início o processo de vacinação. No Brasil, até 24 de maio de 2022, mais de 667 mil pessoas haviam morrido de covid-19, e o número de casos confirmados já passava dos 31 milhões.

Fontes de pesquisa: WHO. Disponível em: https://www.who.int/pt; Opas. Disponível em: https://www.paho.org/pt/brasil. Acessos em: 31 maio 2022.

TEXTO 2

O conceito de função

Para tecer considerações sobre a introdução do conceito de função na história da Matemática, temos que, primeiramente, esclarecer o que estamos entendendo como função. Se pensarmos nas definições que hoje aparecem em livros didáticos do ensino fundamental ou médio, ou mesmo nas obras estudadas em disciplinas matemáticas de cursos superiores, temos sua origem localizada pelo menos no século XIX. Se, no entanto, pensarmos em representações para a ideia de função, como tabelas ou gráficos, mesmo que a palavra “função” não tenha sido empregada, podemos retroceder até a época dos babilônios, em que suas tabelas foram a base para desenvolvimentos subsequentes sobre Astronomia.

Desde a chamada “Matemática pré-helênica”, desenvolvida nas civilizações do Egito, Mesopotâmia, China e Índia, pode-se considerar que há algumas manifestações que contêm implicitamente a noção de função (...).

Mas o que hoje se aceita como a noção de função foi, efetivamente, criado por Newton (1642-1727) e Leibinitz (1646-1716), que desenvolveram, independentemente, o cálculo diferencial e integral.

Ribeiro, A. J.; Cury, H. N. *Álgebra para a formação do professor*: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. p. 41-43 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

LEI DE FORMAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

- Enfatize a diferença entre equação e função, pois, embora os modelos matemáticos sejam parecidos, expressam conceitos diferentes.
- Enfatize que função é uma relação entre dois conjuntos, de modo que cada elemento de um conjunto é associado a um único elemento do outro.
- Comente com os estudantes que esses conjuntos podem não ser numéricos; assim, nem toda lei de formação de uma função pode ser representada por uma fórmula. Por exemplo:
  - A função que associa cada estudante de uma classe à sua idade.
  - A função que associa cada dia à medida de temperatura mais alta registrada.
  - A função que associa cada número natural à sua quantidade de divisores.
- Explicite a linguagem simbólica da notação da função. Em geral, os estudantes não perguntam o seu significado e, caso não a compreendam, os procedimentos de resolução de exercícios que envolvem essa linguagem acabam sendo feitos de maneira mecanizada.
- Represente na lousa um diagrama, explicando que uma função f de A em B relaciona valores de um conjunto A (representados por x) a valores de um conjunto B (representados por y).
- Enfatize que para cada quantidade de lados (n) de um polígono há uma única quantidade de diagonais (d) associada a esse polígono. Além disso, uma quantidade depende da outra, ou seja, a todo valor de n associamos um único valor de d.
- Oriente os estudantes a utilizarem a fórmula para obter o número de diagonais de um triângulo. Verifique se eles percebem que o valor encontrado (zero) está de acordo com o fato de que não é possível observar vértices não consecutivos nesse polígono.
- O estudo de função e de sua lei de formação proporcionam aos estudantes situações de aprendizagem que desenvolvem noções de pensamento computacional (identificação de padrões), mobilizando diferentes processos cognitivos, na medida em que reconhecem regularidades e as representam algébrica e geometricamente.

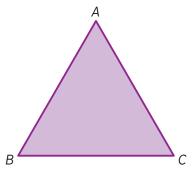
Lei de formação de uma função

A diagonal de um polígono convexo é todo segmento de reta que une dois vértices não consecutivos desse polígono.

A quantidade de diagonais de um polígono convexo pode ser determinada conhecendo-se a quantidade de lados desse polígono.

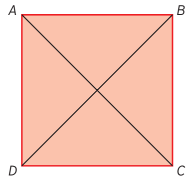
Veja alguns polígonos e suas diagonais.

Triângulo



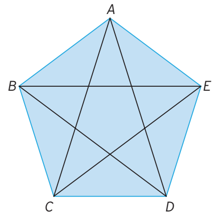
3 lados e 0 diagonal

Quadrado



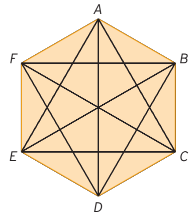
4 lados e 2 diagonais

Pentágono



5 lados e 5 diagonais

Hexágono



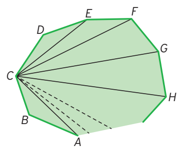
6 lados e 9 diagonais

Ilustrações: ID/BR

Observe que, para cada quantidade de lados de um polígono convexo, há uma única quantidade de diagonais associada a esse polígono.

Podemos relacionar essas duas grandezas (quantidade de lados do polígono e quantidade de diagonais) por meio de uma sentença matemática. Sendo d a quantidade de diagonais de um polígono convexo e n o número de lados desse polígono, temos:

Polígono convexo de n lados



$$d = \frac{n(n-3)}{2}, n \in \mathbf{N} \text{ e } n > 2$$

Dizemos que a sentença matemática que relaciona a quantidade de diagonais d de um polígono convexo em função da quantidade n de seus lados é a **lei de formação** dessa função.

> Quando a função que relaciona duas grandezas pode ser descrita por uma sentença matemática, denominamos essa sentença **lei de formação da função** ou apenas **lei da função**.

224

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Proponha a seguinte atividade aos estudantes.

Em uma loja de preço único, todos os produtos custam R$ 6,99.

a) Na compra de 2 produtos, qual será o preço a pagar? R$ 13,98

b) E na compra de 10 produtos? R$ 69,90

c) Para cada quantidade de produtos comprados, o preço a ser pago é único? Sim.

d) O preço a ser pago depende da quantidade de produtos comprados? Sim.

e) A relação entre a quantidade de produtos comprados e o preço a ser pago é uma função? Sim. Dizemos que o preço a pagar (y) é função da quantidade de produtos comprados (x), pois para cada quantidade x de produtos existe um único preço y a pagar.

f) Escreva uma expressão que relacione o preço a pagar y em função da quantidade de produtos comprados x. $y = 6{,}99 \cdot x$

De maneira geral, dada uma função f e indicando as variáveis envolvidas por x e y, a lei de formação de f pode ser representada por:

$$y = f(x)$$

Lemos: "y é igual a f de x", em que y indica os valores da variável dependente e x indica os valores que a variável independente pode assumir.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Uma pessoa faz caminhadas todos os dias pela manhã. Considerando que ela caminha sempre à velocidade de 90 metros por minuto, que D é a distância percorrida, em metro, e que t é o tempo de caminhada, em minuto, temos a seguinte relação: $D = 90 \cdot t$.

a) Quais são as variáveis envolvidas nessa relação? **Distância D e tempo t.**

b) Qual é a variável dependente? **D**

c) Qual é a variável independente? **t**

2. Considere P a medida do perímetro, em centímetro, de um triângulo equilátero.

a) Calcule o valor de P para triângulos equiláteros de lados medindo:

- 2 cm; **6 cm**
- 3,5 cm; **10,5 cm**
- x cm. **$(3x)$ cm**

b) A medida do perímetro P de um triângulo equilátero é uma função da medida x de seus lados, em que x é um número real positivo. Dê uma lei que descreva essa função.

Lembre-se: A medida do perímetro de um polígono é obtida pela soma das medidas de seus lados. **$P(x) = 3x$, $x \in \mathbb{R}_+^*$**

3. Em cada caso foi dada a lei de formação de uma função. Identifique a variável dependente e a variável independente de cada função.

a) $b = 5a + 3$ **a) Variável dependente: b; variável independente: a.**

b) $g = 4 - 2h$ **b) Variável dependente: g; variável independente: h.**

c) $t = 10x$ **c) Variável dependente: t; variável independente: x.**

4. Encontre uma lei da função $f(n)$, em que n é um número natural não nulo, que pode gerar a sequência: 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... **Resposta possível: $f(n) = 3n - 1$, sendo n um número natural não nulo.**

5. As figuras a seguir representam mesas e cadeiras em algumas configurações.

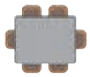


Figura A

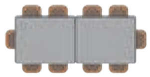


Figura B

Danilo Souza/ID/BR

5. a) $c = 4m + 2$, com m natural não nulo.

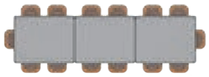


Figura C

Suponha que a sequência representada mantenha a mesma relação entre duas figuras consecutivas.

a) Determine a lei da função que relaciona a quantidade m de mesas com a quantidade c de cadeiras.

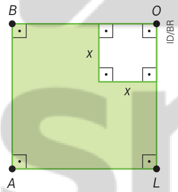
b) Quantas dessas mesas enfileiradas são necessárias para acomodar 50 pessoas? **12 mesas.**

6. Uma função g é dada pela lei de formação $m = 3n + 2$ (sendo n um número real).

a) Identifique a variável dependente e a variável independente envolvidas nessa função. **m é a variável dependente e n é a variável independente.**

b) Determine a lei dessa função usando a notação $g(n)$. **$g(n) = 3n + 2$**

7. O lado do quadrado $ABOL$ mede 30 cm.



ID/BR

Se o lado do quadrado branco mede x centímetro, qual é a lei da função que determina a medida da área A da região verde? **$A(x) = 900 - x^2$**

- Caminhe pela sala de aula enquanto os estudantes realizam as atividades e observe se eles apresentam dificuldades. Se julgar pertinente, retome as principais ideias vistas até o momento.
- Na atividade **1**, para que os estudantes respondam às questões, é necessário que tenham compreendido a relação de dependência entre as variáveis. Por meio da expressão apresentada no enunciado, é possível perceber que t é uma variável independente e que D depende do valor atribuído a t.
- Observe se os estudantes apresentam dificuldade em resolver a atividade **2**. Caso considere necessário, retome o conceito de perímetro usando a representação de um polígono. Além disso, verifique se eles recordam que um triângulo equilátero tem todos os lados com a mesma medida.
- Na atividade **5**, deve-se determinar uma expressão que represente o padrão observado nas figuras e, utilizando essa expressão, determinar a quantidade de mesas para acomodar 50 pessoas.

  No item **a**, os estudantes devem perceber que para uma mesa são colocadas 6 cadeiras; para duas mesas, são colocadas 10 cadeiras; para três mesas, são colocadas 14 cadeiras. Em seguida, devem escrever a lei da função que relaciona a quantidade de mesas com a quantidade de cadeiras.

  Oriente os estudantes a compartilharem as leis de formação obtidas e, se for o caso, estabeleça uma relação de equivalência entre as diferentes fórmulas apresentadas por eles.

DE OLHO NA BASE

Realizar as atividades propostas possibilita aos estudantes compreenderem as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica e algébrica e utilizarem esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA06**.

VALOR DE UMA FUNÇÃO

- Explique aos estudantes que *a* representa um dado valor de *x*. É importante relacionar os dados de cada exemplo com o valor da função *f* para $x = a$, dado por $f(a)$.
- Discuta com os estudantes os exemplos apresentados nesta página e observe se eles compreendem cada um deles. Caso eles demonstrem dificuldade, faça o passo a passo na lousa: primeiro, identifique as grandezas envolvidas, depois estabeleça a relação de dependência entre elas, construa a lei de formação da função e, por fim, mostre como obter o valor da função para os valores indicados.
- Na atividade **9**, oriente os estudantes a fazer os cálculos de cada função separadamente, antes de aplicar as operações entre os valores das funções.

Valor de uma função

Considerando uma função *f* cuja lei de formação é $y = f(x)$, o **valor da função** *f* para $x = a$ é dado por $f(a)$. Para determinar esse valor, basta substituir *x* por *a* na lei da função e efetuar os cálculos.

Exemplos

A. Em determinada cidade, a corrida de táxi é cobrada de acordo com uma taxa inicial de R$ 5,25 (conhecida como bandeirada), adicionada a uma parcela variável de R$ 3,50 por quilômetro rodado. A função *f* que relaciona o valor *y* a ser pago pela corrida, em reais, com a quantidade *x* de quilômetros rodados é dada pela lei:

$$y = f(x) = 5{,}25 + 3{,}5x$$

Para calcular o preço da corrida caso sejam percorridos 25 quilômetros, precisamos determinar o valor da função *f* quando $x = 25$, ou seja, basta substituir *x* por 25 na lei da função e obter o valor de *y* correspondente:

$$f(25) = 5{,}25 + 3{,}5 \cdot 25 = 5{,}25 + 87{,}5 = 92{,}75$$

Logo, o preço dessa corrida será R$ 92,75.

B. Em uma sorveteria, cada bola de sorvete custa R$ 2,00. Caso o cliente queira levar o sorvete para casa, são cobrados mais R$ 5,00 pela embalagem de isopor.

A lei que determina o preço *p* em função da quantidade *x* de bolas de sorvete compradas para viagem deve ser formada pela adição do preço da embalagem ao produto da quantidade de bolas de sorvete compradas pelo preço de cada bola (R$ 2,00). Essa função é dada pela lei:

$$p(x) = 5 + 2x$$

Para saber quanto um cliente pagará ao comprar 15 bolas de sorvete para viagem, devemos calcular $p(15)$, obtendo *p* quando $x = 15$:

$$p(15) = 5 + 2 \cdot 15 = 5 + 30 = 35$$

Logo, o cliente vai pagar R$ 35,00 por 15 bolas de sorvete para viagem.

10. a) Resposta possível: a medida do perímetro é o quádruplo da medida do lado.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

8. Considere a função *f* dada pela lei de formação $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$. Calcule o valor de $f(0)$, $f(2)$ e $f(-3)$.
$f(0) = -4$; $f(2) = 10$; $f(-3) = 5$

9. Sendo *f* a função dada pela lei $f(x) = 4x + 1$, calcule:

a) $f(-2) \cdot f(1)$ **−35**

b) $2 \cdot f(3) + f(0)$ **27**

10. O quadro a seguir mostra a relação entre a medida do perímetro de um quadrado e a medida do lado desse quadrado.

Medida do lado (cm)	1	1,5	2	2,5	3
Medida do perímetro (cm)	4	6	8	10	12

a) Qual é a relação entre a medida do lado e a medida do perímetro do quadrado?

b) Dê a lei da função *p* que fornece a medida do perímetro do quadrado em função da medida (ℓ) de seu lado.

c) Qual é o valor da função *p* quando o lado do quadrado mede 3,5 cm? **14 cm**

10. b) $p(\ell) = 4\ell$, **em que ℓ é um número real positivo.**

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Observe a sequência de triângulos formada por palitos de fósforo.

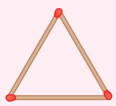


figura 1

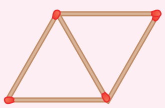


figura 2

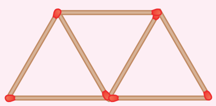


figura 3

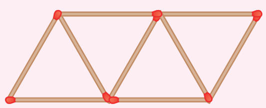


figura 4

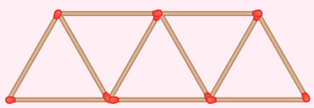


figura 5

Ilustrações: ID/BR

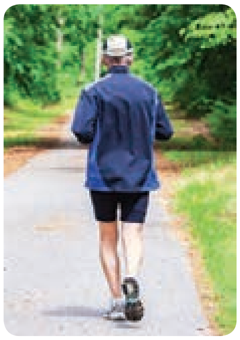
a) Você percebeu uma regra de formação? Para se obterem mais triângulos, quantos palitos devem-se acrescentar para cada novo triângulo? Espera-se que os estudantes digam que sim. Devem-se acrescentar 2 palitos para cada novo triângulo.

Representação gráfica de uma função

Acompanhe a situação a seguir.

Um homem sedentário, preocupado com sua saúde, começou a caminhar em um parque próximo à sua casa. Ele tem caminhado diariamente cerca de 500 metros em 5 minutos. Considerando esse ritmo, podemos representar a distância d, em metro, percorrida por ele em função do tempo t, em minuto, da seguinte maneira:

$$d = \frac{t}{0{,}01}, \text{ com } t > 0$$


nnattalli/Shutterstock.com/ID/BR

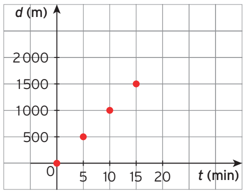
↑ **Praticar exercício físico em todas as idades é muito importante para prevenir doenças.**

Desse modo, podemos obter pares ordenados (t, d) que informam o tempo de caminhada e a correspondente distância percorrida a cada momento. Veja alguns desses valores no quadro a seguir.

t (em minuto)	0	5	10	15
d (em metro)	$d(0) = \frac{0}{0{,}01} = 0$	$d(5) = \frac{5}{0{,}01} = 500$	$d(10) = \frac{10}{0{,}01} = 1\,000$	$d(15) = \frac{15}{0{,}01} = 1\,500$
(t, d)	(0, 0)	(5, 500)	(10, 1 000)	(15, 1 500)

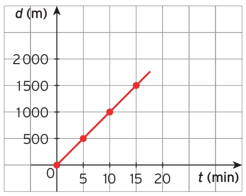
Cada par ordenado (t, d), determinado por essa função, pode ser associado a um ponto do plano cartesiano.

Os valores da variável independente (t) são marcados no eixo horizontal – no eixo das abscissas –, e os valores da variável dependente (d) são indicados no eixo vertical – no eixo das ordenadas.



Os pares ordenados representados nesse plano cartesiano determinam alguns pontos do gráfico da função d. Representando todos os pontos de coordenadas (t, d), obtemos o **gráfico da função** d.

Como a variável "tempo" é contínua (cada instante pode ser associado a uma distância), podemos traçar a linha que contém os pontos marcados. Essa linha é o gráfico da função d, que, no caso, tem origem no ponto (0, 0) e poderá continuar infinitamente.



Ilustrações: ID/BR

227

b) Construa um quadro e relacione a quantidade p de palitos e a quantidade t de triângulos de cada figura.

t	1	2	3	4
p	3	5	7	9

c) Considerando p a quantidade de palitos e t a quantidade de triângulos, identifique qual é a variável dependente e qual é a variável independente dessa função.
A variável independente é t e a variável dependente é p.

d) Qual é a lei de formação da função que permite obter a quantidade p de palitos necessários para construir t triângulos? $p(t) = 2 \cdot t + 1$

e) Quantos palitos são necessários para construir uma figura com 12 triângulos?
$p(12) = 2 \cdot 12 + 1 = 25$

Adaptada de: Guimarães, R. S. *Atividades para aprendizagem do conceito matemático de função*. 2010. 202 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – UFSCar, São Carlos, 2010.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO

- Deixe claro para os estudantes que, com base na lei da função, como para todo valor de x existe um único valor de y, podem-se obter pares ordenados (x, y), e cada par ordenado determinado por uma função pode ser associado a um ponto do plano cartesiano.
- É importante que os estudantes consigam identificar de forma correta o par ordenado e que relacionem corretamente os eixos com as respectivas variáveis.
- O sistema de coordenadas cartesianas é considerado uma ferramenta muito importante na Matemática, pois facilita a observação do comportamento de funções.
- Retome com os estudantes o sistema de coordenadas cartesianas e os elementos que o compõem: dois eixos perpendiculares, sendo um horizontal (abscissa) e outro vertical (ordenada). No eixo das abscissas se assinalam os valores da variável independente (x), e no eixo das ordenadas são assinalados os valores da variável dependente (y).
- No exemplo proposto, chame a atenção dos estudantes para o fato de que as grandezas dos eixos no plano cartesiano são diferentes e por esse motivo eles têm escalas diferentes. Depois, verifique se os estudantes compreenderam a razão de ser possível traçar a linha que contém todos os pontos marcados. Ressalte que isso não ocorre pelo simples fato de os pontos estarem alinhados, mas por se tratar de uma variável contínua, que admite valores intermediários entre os pontos determinados.
- A situação apresentada contribui para o desenvolvimento da **competência geral 8**, para que os estudantes conheçam, apreciem e cuidem de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas. O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes deve ser preservada. Para isso, valorize situações em que os estudantes se sintam acolhidos, incentivando o desenvolvimento da empatia e da solidariedade.

"Além de melhorar a aptidão física, o exercício físico regular também pode melhorar a capacidade cognitiva e reduzir os níveis de ansiedade e estresse em geral. Os exercícios ajudam a melhorar a autoestima, a imagem corporal, a cognição e a função social de pacientes em risco de saúde mental."

Fonte: Governo do Estado de São Paulo. *Benefícios do esporte para a saúde mental*. Disponível em: https://www.desenvolvimentosocial.sp.gov.br/beneficios-do-esporte-para-a-saude-mental/. Acesso em: 20 abr. 2022.

Consideremos agora outra situação. Observe a sequência de figuras:

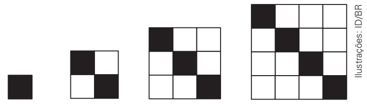


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Perceba que todas as figuras são quadrados formados por quadradinhos (pretos e brancos).

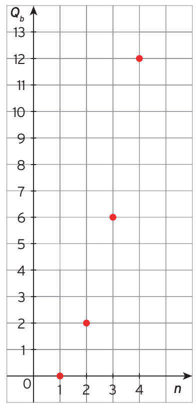
- A figura 1 é um quadrado 1 por 1 (composto de 1 quadradinho), com 1 quadradinho preto e 0 quadradinho branco.
- A figura 2 é um quadrado 2 por 2 (composto de 4 quadradinhos), com 2 quadradinhos pretos e 2 quadradinhos brancos.
- A figura 3 é um quadrado 3 por 3 (composto de 9 quadradinhos), com 3 quadradinhos pretos e 6 quadradinhos brancos.
- A figura 4 é um quadrado 4 por 4 (composto de 16 quadradinhos), com 4 quadradinhos pretos e 12 quadradinhos brancos.

A quantidade de quadradinhos brancos (Q_b) de uma figura (n) qualquer pode ser obtida pela diferença entre o total de quadradinhos que a compõem, que é n^2, e a quantidade de quadradinhos pretos da figura, que é n (número de quadradinhos de uma diagonal). Assim, temos:

$$Q_b(n) = n^2 - n$$

Agora, vamos representar graficamente essa função.

Observe que, nesse caso, não podemos unir os pontos por uma linha contínua, pois não há uma quantidade de quadradinhos brancos que seja intermediária entre a quantidade de quadradinhos brancos da figura 1 e a quantidade de quadradinhos brancos da figura 2, assim como entre as demais. O número n de cada figura é um número natural não nulo, por isso o gráfico dessa função é o conjunto de pontos (n, Q_b) determinados por $Q_b(n) = n^2 - n$, em que n é natural não nulo.



228

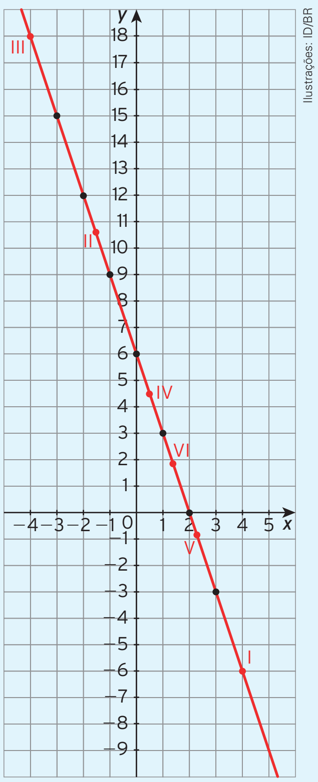
- Nesta página, apresentamos uma sequência de figuras que obedece a um padrão. Esse padrão pode ser descrito por meio de uma função.
- Observe se os estudantes percebem que, sendo n a posição da figura na sequência, podemos determinar o total de quadradinhos de cada figura por n^2 (são n quadradinhos em cada coluna e n linhas).
- Se julgar conveniente, proponha aos estudantes que determinem, por exemplo, a quantidade de quadradinhos brancos da figura que ocupa a 7ª posição.
  $Q_b(n) = n^2 - n$
  $Q_b(7) = 7^2 - 7 = 49 - 7 = 42$
- Outra possibilidade de explorar a situação é solicitar aos estudantes que determinem a posição da figura que tem 90 quadradinhos brancos, por exemplo.
  $Q_b(n) = n^2 - n$
  $90 = n^2 - n$
  $n^2 - n - 90 = 0$
  $n = -9$ ou $n = 10$
  Mas, como se trata de posição, consideramos apenas o valor positivo de n.

RESPOSTAS

11. a)

x	$f(x) = 6 - 3x$	(x, y)
−3	15	(−3, 15)
−2	12	(−2, 12)
−1	9	(−1, 9)
0	6	(0, 6)
1	3	(1, 3)
2	0	(2, 0)
3	−3	(3, −3)

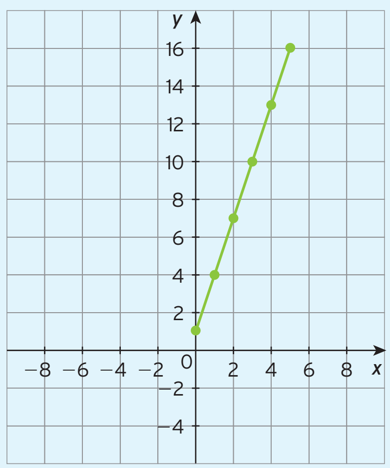
b) e **c)**



- **I.** $f(4) = -6$
  II. $f(-1,6) = 10,8$
  III. $f(-4) = 18$
  IV. $f(0,5) = 4,5$
  V. $f(2,3) = -0,9$
  VI. $f(\sqrt{2}) \simeq 1,8$

Espera-se que os pontos calculados fiquem próximos dos que foram marcados.

12.



ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

11. Consulte as respostas neste manual.

11. Considere a função de variáveis reais dada por $f(x) = 6 - 3x$, com $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

a) Copie no caderno e complete o quadro a seguir.

x	$f(x) = 6 - 3x$	(x, y)
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

b) Construa em um plano cartesiano um gráfico para essa função e marque todos os pontos do quadro.

c) No gráfico do item anterior, localize de maneira aproximada os pontos que têm os seguintes valores de x:

I. 4 III. -4 V. 2,3

II. $-1{,}6$ IV. 0,5 VI. $\sqrt{2}$

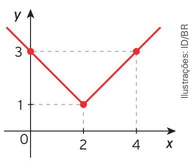
- Agora, substitua esses valores de x em $f(x) = 6 - 3x$ e verifique se esses pontos ficam próximos dos que foram marcados.

12. Veja o quadro a seguir.

x	$f(x) = 3x + 1$
0	1
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16

Considerando x e $f(x)$ números reais, com $0 \leqslant x \leqslant 5$, represente os pares ordenados determinados pelos dados do quadro em um plano cartesiano. **Consulte a resposta neste manual.**

13. Veja o gráfico que representa a função h.



Ilustrações: ID/BR

Com base nesse gráfico, determine:

a) o valor da função h para $x = 2$; **1**

b) o valor de $h(0)$. **3**

14. Observe a seguir os gráficos das funções f e g.

Gráfico de f

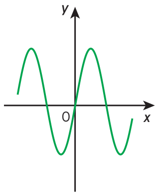
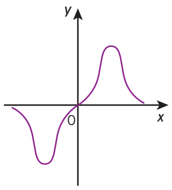


Gráfico de g



De acordo com esses gráficos, classifique cada afirmação a seguir, a respeito das funções f e g, em verdadeira ou falsa.

a) As duas funções, f e g, assumem valores negativos. **Verdadeira.**

b) Para $x = 0$, as duas funções têm valores iguais. **Verdadeira.**

c) A função f assume valor zero ($f(x) = 0$) apenas para $x = 0$. **Falsa.**

d) Para $x > 0$, as duas funções, f e g, sempre assumem valores positivos. **Falsa.**

e) Para $x < 0$, o valor da função f pode ser positivo, negativo ou zero. **Verdadeira.**

f) Se $x \neq 0$, o valor de g é negativo ou positivo. **Verdadeira.**

15. Considere x e $f(x)$ números reais e faça o que se pede em cada item. **Consulte as respostas neste manual.**

a) Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o.

x	$f(x) = -2x + 3$	$(x, f(x))$
-2		
-1		
0		
1		
2		

b) Construa em um plano cartesiano o gráfico da função f.

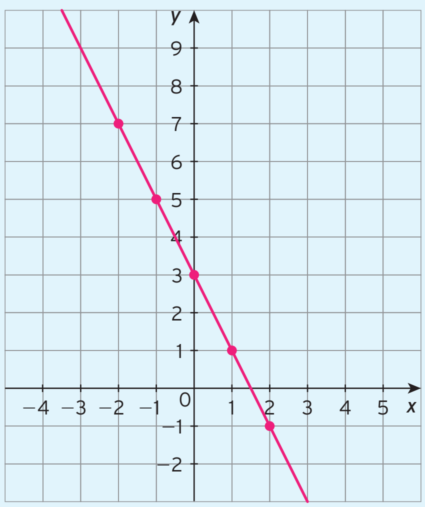
DE OLHO NA BASE

Realizar as atividades propostas possibilita aos estudantes compreenderem as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizarem esses conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis, desenvolvendo a habilidade **EF09MA06**.

15. a)

x	$f(x) = -2x + 3$	$(x, f(x))$
-2	7	$(-2, 7)$
-1	5	$(-1, 5)$
0	3	$(0, 3)$
1	1	$(1, 1)$
2	-1	$(2, -1)$

b)



ID/BR

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo. Aproveite esse momento para verificar se os estudantes compreenderam as ideias apresentadas.
- Na atividade **8**, deve-se calcular a medida do volume máximo de água que o tanque comporta, a medida da altura, ao ser retirada parte da água, e a medida do volume, ao ser reduzida a medida da altura da água. Depois, deve-se escrever uma lei que represente a medida do nível da água em função da medida do volume retirado.
  No item **b**, espera-se que os estudantes percebam que, retirando-se 3 m^3 de água do tanque, restarão outros 3 m^3. Oriente os estudantes a compartilhar a lei obtida no item **d**. Além disso, peça-lhes que comentem a estratégia que utilizaram para obter essa lei.
- No item **c** da atividade **9**, verifique se os estudantes se deram conta de que o gráfico da função B_n não é representado por uma reta, por não admitir valores intermediários, visto que n é um número natural.
- Na atividade **11**, os estudantes devem calcular o salário de um vendedor, conforme comissão de 8% adicionada ao salário fixo; calcular o quanto ele deve vender para receber determinado salário; determinar a lei de formação da função dos dados apresentados.

DIVERSIFICANDO

3. Variável independente: tempo *t* que Eva levará para tomar todo o remédio; variável dependente: quantidade *q* de remédio que ainda há no frasco. Eva levará 2 dias para tomar todo o remédio do frasco.

1. Reúna-se com um colega. Citem exemplos de situações que apresentem uma correspondência entre duas grandezas que determine uma função. **Resposta pessoal.**

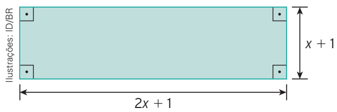
2. Uma motocicleta se desloca em uma estrada com velocidade constante de 60 km/h.

a) Qual é a medida da distância percorrida pela motocicleta em 2 horas? **120 km**

b) Em quanto tempo essa motocicleta percorrerá 210 km? **Em 3,5 horas.**

3. Eva toma 5 mL de um medicamento a cada 4 horas. Ainda restam 60 mL no frasco. Identifique as variáveis envolvidas nessa situação e determine quantos dias Eva levará para tomar todo o remédio do frasco.

4. Observe o retângulo representado a seguir, em que x é um número real positivo.



a) $f(x) = 6x + 4$

a) Determine a lei da função f que fornece a medida do perímetro desse retângulo.

b) Determine a lei da função g que fornece a medida da área desse retângulo.
$g(x) = 2x^2 + 3x + 1$

5. Pedro e Júlia saíram do sítio onde moram para fazer um passeio a cavalo até uma fazenda na região. O gráfico a seguir descreve a distância percorrida por eles nesse passeio.

Dados obtidos por Pedro e Júlia.

Analise o gráfico e responda.

a) Quanto tempo durou o passeio? **80 minutos.**

b) Quanto tempo Pedro e Júlia ficaram parados para o cavalo descansar? **20 minutos.**

c) Quantos quilômetros eles percorreram nos primeiros 40 minutos? **4 quilômetros.**

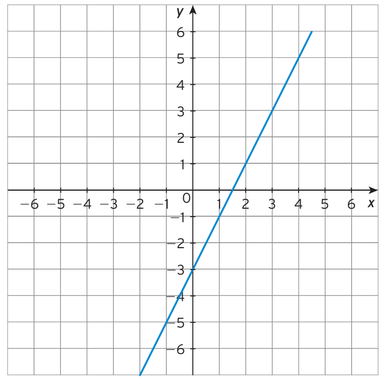
d) Quantos quilômetros eles percorreram durante o passeio? **5 quilômetros.**

6. Considere f a função dada pela lei $f(x) = 2x$. Calcule o valor da expressão do quadro: **-6**

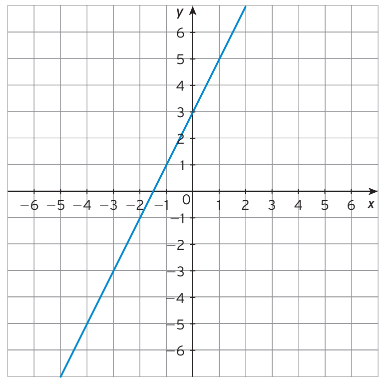
$$2 \cdot f(-2) + f(1)$$

7. Identifique qual destes gráficos pode representar a função f dada por $f(x) = 2x - 3$. Justifique sua resposta. **Gráfico do item a. Resposta pessoal.**

a)



b)



ESTRATÉGIAS DE APOIO

Caso perceba que os estudantes ainda apresentem dificuldade nos conceitos que envolvem funções, proponha a atividade a seguir.

Carlos é vendedor e está procurando emprego. Atualmente ele tem duas propostas de trabalho. A empresa *A* oferece um salário fixo de R$ 1400,00 mais uma comissão de 3% sobre o valor de suas vendas. A empresa *B* oferece um salário fixo de R$ 2000,00 mais uma comissão de 2% sobre o valor de suas vendas.

Qual proposta ele deve aceitar, considerando o salário?

Essa atividade proporciona inúmeras possibilidades de exploração e análise. Uma delas é pela resolução gráfica para a análise da situação, outra possibilidade é igualar as duas funções para descobrir para qual valor de x Carlos receberá o mesmo salário, sendo x o valor total das vendas de Carlos. Primeiro, vamos escrever matematicamente os salários propostos para Carlos nas empresas *A* e *B*, utilizando a notação de função:

Empresa *A*: $f_a(x) = 0{,}03 \cdot x + 1\,400$

Empresa *B*: $f_b(x) = 0{,}02 \cdot x + 2\,000$

Considera-se que $f(x)$ representa o salário total de Carlos, e x o valor de suas vendas no mês.

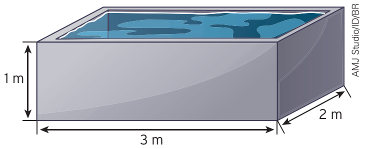
Nesse momento, vamos optar por analisar a situação igualando as duas funções. Assim:

$$0{,}03 \cdot x + 1\,400 = 0{,}02 \cdot x + 2\,000$$
$$0{,}03x - 0{,}02x = 2\,000 - 1\,400$$
$$0{,}01x = 600$$
$$x = \frac{600}{0{,}01}$$
$$x = 60\,000$$

Responda sempre no caderno.

8. d) Resposta possível: $N = \frac{6 - V_R}{6}$, sendo V_R um número real não nulo.

8. A figura mostra um tanque totalmente cheio de água cuja altura mede 1 m. A base do tanque é um retângulo cujos lados medem 3 m e 2 m. Despreze a espessura da caixa.



Reúna-se com um colega para resolver as questões a seguir.

a) Qual é a medida do volume, em metro cúbico, de água contido nesse tanque? **6 m^3**

b) Se forem retirados 3 m^3 de água, qual será a medida do nível atingido pela água que restar no tanque? **0,5 m**

c) Quando a água atinge uma medida de altura de 0,25 m, qual é a medida do volume de água contido no tanque? **1,5 m^3**

d) Dê uma lei que represente o nível N de água, em metro, que resta no tanque após a retirada de um volume V_R de água, em metro cúbico.

9. Observe a sequência de figuras e faça o que se pede. **9. b) $T_n = (n + 2)^2$; $B_n = 4n$; $P_n = n^2 + 4$, com $n \in \mathbb{N}^*$.**

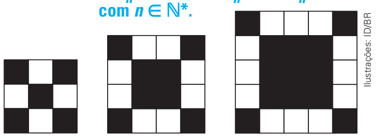


Figura 1 Figura 2 Figura 3

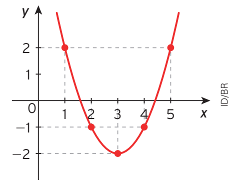
a) Desenhe no caderno as próximas duas figuras dessa sequência. **Consulte a resposta neste manual.**

b) Determine uma lei que permita calcular a quantidade total de quadradinhos (T_n) de cada figura, outra lei para a quantidade de quadradinhos brancos (B_n) e outra para a quantidade de quadradinhos pretos (P_n), todas em função da posição n da figura na sequência.

c) Represente graficamente os pares ordenados (n, B_n) determinados pela quantidade de quadradinhos brancos (B_n) em função da posição n da figura, relativos às cinco primeiras figuras dessa sequência. **Consulte a resposta neste manual.**

10. a) $f(2) = -1$; $f(5) = 2$.

10. Considere a função f dada pelo gráfico a seguir. Depois, determine o que se pede.



a) O valor da função f para $x = 2$ e $x = 5$.

b) O valor de x para o qual se tem $f(x) = -2$. **3**

c) Os valores de x quando $y = 2$. **1 e 5.**

d) A quantidade de valores de x para os quais a função se anula, ou seja, obtemos $f(x) = 0$. **Para dois valores de x.**

e) Um intervalo do eixo das abscissas com extremos inteiros consecutivos que contém x tal que $f(x) = 1$. **Resposta possível: Entre 1 e 2.**

11. O funcionário de uma loja tem o salário mensal composto de um valor fixo de R$ 1 500,00 e uma comissão de 8% sobre o total de suas vendas mensais.

a) Se ele vender R$ 60 000,00 em um mês, quanto receberá nesse mês? **R$ 6 300,00**

b) Para receber um salário de R$ 7 800,00, quanto ele precisa vender em um mês? **R$ 78 750,00**

c) Considere t o total vendido pelo funcionário em um mês e S o salário mensal. Escreva uma lei que represente S em função de t. **$S(t) = 1\,500 + 0{,}08t$**

12. Para alugar um carro, uma locadora cobra uma taxa de R$ 50,00 por dia mais R$ 0,80 por quilômetro rodado.

a) Se um cliente percorrer 100 quilômetros em um dia, quanto deverá pagar pelo aluguel do carro? **R$ 130,00**

b) Qual é a distância máxima que o cliente pode percorrer em um dia se pretende gastar no máximo R$ 150,00 com o aluguel do carro? **125 quilômetros.**

c) Considerando x a distância em quilômetro percorrida nesse dia, escreva a lei que representa o total pago $p(x)$ pelo aluguel do carro em função da distância x. **$p(x) = 0{,}8x + 50$**

Depois de igualar as funções, é preciso interpretar o resultado obtido. Nesse caso, auxilie os estudantes a perceberem que:

- Se Carlos espera conseguir um valor de vendas maior do que 60 000 reais, então a empresa A é mais vantajosa.
- Se Carlos espera conseguir em vendas um valor igual a 60 000 reais, então não há diferença entre escolher a empresa A ou a B.
- Se Carlos espera conseguir um valor em vendas menor do que 60 000 reais, a empresa B é a mais vantajosa.

RESPOSTAS

9. a)

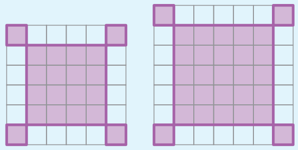
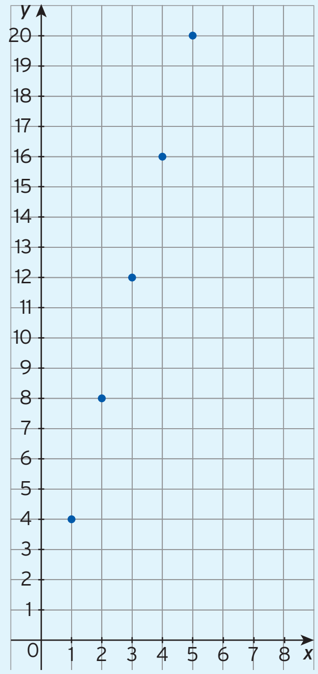


Figura 4 Figura 5

c) Utilizando a fórmula do item **b**, para B_n, obtemos:



DE OLHO NA BASE

Realizar as atividades propostas possibilita aos estudantes compreenderem as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizarem esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis, desenvolvendo a habilidade **EF09MA06**.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Função afim.
- Casos de função afim.
- Gráfico de uma função afim.
- Zero de uma função afim.
- Variação de uma função afim.
- Estudo do sinal da função afim.
- Função linear e proporcionalidade.

Objetivos

- Identificar uma função afim.
- Determinar o zero de uma função afim.
- Compreender os casos de função afim: função constante, função identidade, função linear.
- Construir gráficos de função afim em um plano cartesiano.
- Estabelecer relações entre os coeficientes e as representações gráficas de funções.
- Identificar a natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a em um plano cartesiano.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de reconhecer situações que podem ser representadas por uma função afim, associando representações algébricas e geométricas, tendo como suporte a construção de retas no plano cartesiano. Com esses estudos, espera-se contribuir para o aprimoramento das técnicas de resolução de problemas dos estudantes.

FUNÇÃO AFIM

- O estudo da função afim proporciona aos estudantes situações de aprendizagem que desenvolvem noções de pensamento computacional (identificação de padrões), mobilizando diferentes processos cognitivos, à medida que reconhecem regularidades e as representam algébrica e geometricamente.
- Leia o texto com os estudantes e explique a eles a tabela apresentada. Alguns podem apresentar dificuldade em compreender os dados associados à linha "temperatura mínima prevista". Observe se eles notam que os valores indicados em cada linha tratam da mesma informação, porém em unidades de medida diferentes.
- Explique aos estudantes que termologia é a parte da física que estuda os fenômenos relativos ao calor, como aquecimento, resfriamento, mudanças de estado físico, mudanças de temperatura, etc. Termometria é a parte da termologia voltada para o estudo da temperatura, dos termômetros e das escalas termométricas.

Capítulo

2 FUNÇÃO AFIM

Para desenvolver os conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes tenham compreendido as ideias apresentadas no capítulo anterior. Além disso, é preciso que eles tenham consolidado os conteúdos relacionados a números reais e plano cartesiano.

Função afim

Algumas modalidades esportivas são praticadas no gelo ou na neve, como é o caso da patinação no gelo, do *snowboard* e do esqui.

A tabela a seguir apresenta possíveis medidas de temperaturas mínimas em uma estação de esqui.

Temperaturas mínimas				
Dia	1	2	3	4
Temperatura mínima prevista	32 °F	36 °F	39 °F	28 °F
	0 °C	2,2 °C	3,9 °C	−2,2 °C

Dados fictícios.

Observe que as medidas das temperaturas apresentadas na tabela foram expressas em duas unidades de medida: grau Fahrenheit (°F) e grau Celsius (°C). Analisando a tabela, podemos perceber, por exemplo, que 36 °F correspondem a 2,2 °C, assim como −2,2 °C correspondem a 28 °F. Mas como ocorre essa correspondência?

Há uma relação entre essas duas escalas termométricas determinada por uma função.

Grupo de esquiadores na pista Croix, Haute-Savoie, França. Foto de 2022.

LANSARD Gilles/Hemis/AFP

232

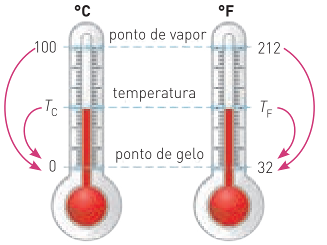
OUTRAS FONTES

HELLMEISTER, A. C. P. Funções interessantes. *Revista do Professor de Matemática*, n. 63. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/63/7.html. Acesso em: 6 jul. 2022.

Nesse artigo, a autora apresenta, por meio de situações-problema, dois casos de aplicação de funções bastante simples que modelam situações reais do dia a dia.

Uma temperatura expressa em grau Celsius (T_C) desloca a mesma altura de líquido no termômetro quando expressa em grau Fahrenheit (T_F). Por isso, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{(T_C - 0)}{(100 - 0)} = \frac{(T_F - 32)}{(212 - 32)}$$



Danilo Souza/ID/BR

Agora, vamos ajustar essa igualdade de modo a obter uma expressão do tipo $y = ax + b$, em que a e b são constantes reais e x pode ser qualquer número real.

$$\frac{T_C}{100} = \frac{T_F - 32}{180}$$

$$180 \cdot \frac{T_C}{100} = T_F - 32$$

$$\frac{9}{5} T_C + 32 = T_F$$

$$T_F = 1{,}8 \cdot T_C + 32$$

Observe que:

$$\begin{array}{ccccccc} T_F & = & 1{,}8 & \cdot & T_C & + & 32 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y & = & a & \cdot & x & + & b \end{array}$$

Funções do tipo $y = ax + b$ são chamadas de funções afins.

Função afim é toda função f cuja lei de formação pode ser escrita na forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais e x pode ser qualquer número real.

As constantes a e b são chamadas de **coeficientes** da função afim. Observe que em $T_F = 1{,}8 \cdot T_C + 32$, temos $a = 1{,}8$ e $b = 32$.

Exemplos

A. A função $S(V) = 0{,}04V + 2\,100$, com $V \geqslant 0$, é uma função afim, pois sua lei pode ser escrita na forma $f(x) = ax + b$, em que os coeficientes são $a = 0{,}04$ e $b = 2\,100$.

B. A função g é afim e sabe-se que $g(0) = 2$ e $g(1) = 0$. Vamos determinar a lei de g. Para isso, utilizamos o fato de g ser afim, ou seja, a lei de g é da forma $g(x) = ax + b$. Assim:

- $g(0) = a \cdot 0 + b = 2$, ou seja, $b = 2$;
- $g(1) = a \cdot 1 + 2 = 0$, ou seja, $a + 2 = 0$ ou, ainda, $a = -2$.

Logo, a função g é determinada pela lei: $g(x) = -2x + 2$.

- Comente com os estudantes que o Brasil e a maioria dos países do mundo utilizam a escala Celsius (°C) para representar a temperatura. Já a escala Fahrenheit (°F) é adotada em países de língua inglesa, como os Estados Unidos.
- Peça aos estudantes que observem os termômetros da figura e comente que, para comparar as temperaturas, eles devem saber que na escala Celsius o ponto de gelo é 0 e o ponto de vapor é 100. Na escala Fahrenheit, o ponto de gelo é 32 e o ponto de vapor é 212. Por isso, é possível fazer uma relação entre a escala Celsius e a Fahrenheit.
- Enfatize que essa comparação possibilitou a lei de formação de uma função T_F em função de T_C.
- Explique os exemplos dados e compare cada um deles com a lei de formação de uma função afim, do tipo $f(x) = ax + b$, destacando os coeficientes de cada uma das funções apresentadas.
- Deixe claro para os estudantes que, na função $f(x) = ax + b$, os números representados por a e b são chamados de coeficientes.

DE OLHO NA BASE

O estudo de funções de maneira integrada à termometria possibilita que os estudantes compreendam as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento, o que contribui para desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

- Enfatize aos estudantes que uma função polinomial do 1º grau é toda função cuja lei de formação é $f(x) = ax + b$, com a e b sendo números reais e $a \neq 0$, em que o coeficiente b pode ser zero ou não. No entanto, existem alguns casos específicos de função afim que recebem nomes especiais.
- Mostre aos estudantes as características desses casos específicos de função afim.
  - As funções cuja formação é do tipo $y = f(x) = a \cdot x$, quando $b = 0$ e $a \neq 0$, são chamadas de funções lineares.
  - Os casos em que $a = 1$ e $b = 0$, sendo $y = f(x) = x$, são chamados de funções identidades.
  - As funções cuja formação é do tipo $y = f(x) = b$ são chamadas de funções constantes.
- Na atividade **4**, oriente os estudantes a calcular o valor cada função separadamente.

Casos de função afim

Veja no organizador a seguir como podemos classificar uma função afim.

CASOS DE FUNÇÃO AFIM $y = ax + b$

- Polinomial do 1º grau: $a \neq 0$
  - Casos particulares
    - Função linear: $b = 0$
    - Função identidade: $a = 1$ e $b = 0$
- Constante: $a = 0$

Vamos analisar a situação a seguir.

Um carro percorre uma estrada mantendo sempre a velocidade de 80 km/h. Ou seja, conforme o tempo passa, a velocidade não se altera. A função que relaciona a velocidade v (em km/h) desenvolvida em cada instante t (em h) nesse movimento é dada por:

$$v(t) = 80$$

Observe que essa função é uma função afim cuja lei tem coeficientes $a = 0$ e $b = 80$, ou seja, ela é uma função constante.

Agora, retome o exemplo A da página anterior, em que vimos a função $S(V) = 0{,}04V + 2\,100$, com $V \geqslant 0$. Nessa função, verificamos que $a \neq 0$, ou seja, ela é uma função polinomial do 1º grau. Nesse caso, o coeficiente b pode ser zero ou não.

Exemplos

A. $g(x) = \frac{x}{2} - 5$, com x real, é uma função polinomial do 1º grau.

B. $y = 9$ é uma função constante.

C. $f(x) = x$ é uma função identidade.

1. São funções afins: a, c, d, e; funções polinomiais do 1º grau: a, c, d; função constante: e.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Identifique quais das funções a seguir são funções afins e classifique-as como função polinomial do 1º grau ou constante.

a) $f(x) = 5x + 1$
b) $f(x) = x^2 - 3$
c) $f(x) = -13 + x$
d) $f(x) = -2x$
e) $f(x) = 1$
f) $f(x) = 2x^3 + 11$

2. Dada uma função cuja lei é $f(x) = -5x + 8$, calcule o valor de:

a) $f(2)$; **-2**
b) $f(0)$; **8**
c) $f(-3)$; **23**
d) $f(1{,}6)$. **0**

3. Uma pizzaria vende *calzones* por R$ 25,00 cada um e ainda cobra uma taxa fixa de R$ 6,00 pelo frete.

a) Determine a lei da função que relaciona o preço p a ser pago por uma encomenda de n *calzones*. **$p(n) = 25n + 6$**

b) Essa função é afim? Se for, de que tipo ela é? **Sim; função polinomial do 1º grau.**

c) Calcule o valor pago na compra de 3 *calzones*. **R$ 81,00**

d) Se o valor pago foi R$ 181,00, qual é a quantidade de *calzones* comprados? ***7 calzones.***

4. Dadas as funções f e g determinadas pelas leis $f(x) = x - 3$ e $g(x) = 21x$, calcule:

a) $f(5) - g(1)$; **-19**
b) $g(0) \cdot f(-1)$. **0**

(IN)FORMAÇÃO

Integrando Geometria e funções: gráficos dinâmicos

Introdução

Nos últimos anos, os chamados ambientes de geometria dinâmica têm se popularizado muito no ensino de Matemática. Em linhas gerais, esses ambientes são *softwares* munidos de ferramentas que permitem reproduzir na tela do computador as construções geométricas com instrumentos euclidianos (régua não graduada e compasso). A grande vantagem apontada em relação às construções geométricas com papel e lápis está justamente no aspecto dinâmico do ambiente: uma vez concluída uma construção no computador, é possível alterar um de seus elementos (em geral, por meio do arrastar do *mouse*) e observar as alterações consequentes nos demais elementos. Assim, uma figura construída em geometria dinâmica representa, de forma mais efetiva, uma classe de objetos geométricos definida por propriedades e relações comuns – que se preservam quando esses objetos são arrastados na tela. Como muitos autores têm apontado, esse aspecto permite ao aluno investigar um grande número de exemplos e explorar conjecturas, constituindo uma preparação para o exercício de argumentação matemática.

Além disso, a maior parte dos ambientes de geometria dinâmica oferece outros recursos, tais como calculadora com operações aritméticas elementares e ferramentas de geometria analítica. Dentre esses ambientes, o *Geogebra* tem a proposta de integrar ferramentas geométricas e algébricas (daí o nome do *software*). Assim, é possível, em um mesmo ambiente, realizar construções dinâmicas em geometria sintética e traçar,

Gráfico de uma função afim

O gráfico de uma função afim f dada por $f(x) = ax + b$, em que x assume qualquer valor real, é uma **reta** não paralela ao eixo y (ou seja, não vertical).

Você já sabe que dois pontos distintos determinam uma única reta. Por isso, para construir o gráfico de uma função afim f, basta obter dois pontos distintos que pertençam ao gráfico de f.

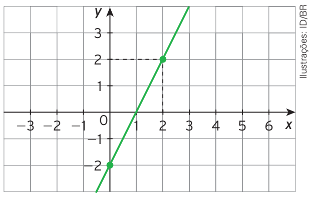
Exemplos

A. Vamos construir o gráfico da função f dada por $f(x) = 2x - 2$, com x real.

Escolhemos dois valores distintos e arbitrários para x e calculamos os valores de $y = f(x)$ correspondentes.

x	$y = f(x) = 2x - 2$	Coordenadas (x, y)
0	$y = 2 \cdot 0 - 2 = -2$	$(0, -2)$
2	$y = 2 \cdot 2 - 2 = 2$	$(2, 2)$

Representamos os pares ordenados obtidos no plano cartesiano e traçamos a reta que passa por eles.



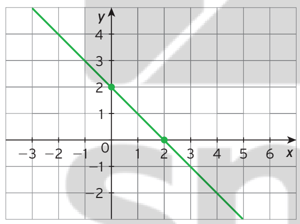
Ilustrações: ID/BR

Observe que o gráfico dessa função polinomial do 1º grau:

- é uma reta inclinada e corta os dois eixos: x e y;
- corta o eixo y no ponto $(0, -2)$, isto é, em $(0, b)$;
- corta o eixo x no ponto $(1, 0)$, isto é, para $x = 1$ a função se anula, ou seja, ela assume valor zero.

B. Vamos construir o gráfico da função g dada por $g(x) = -x + 2$, com x real.

x	$y = g(x) = -x + 2$	Coordenadas (x, y)
0	$y = -0 + 2 = 2$	$(0, 2)$
2	$y = -2 + 2 = 0$	$(2, 0)$



Observe que esse gráfico:

- é uma reta inclinada e corta os dois eixos x e y;
- corta o eixo y no ponto $(0, 2)$, isto é, em $(0, b)$;
- corta o eixo x no ponto $(2, 0)$, isto é, para $x = 2$ a função se anula, ou seja, ela assume valor zero.

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO AFIM

- Deixe claro para os estudantes que o gráfico de uma função afim será sempre uma reta. Os fatores que vão determinar a sua posição no plano são os coeficientes (a e b).
- Faça com os estudantes, na lousa, o gráfico das funções apresentadas nos exemplos. Se considerar pertinente, oriente os estudantes a construir gráficos da mesma função, mas utilizando pontos diferentes. Depois, oriente-os a comparar os gráficos obtidos. Espera-se que eles percebam que, independentemente dos pontos escolhidos, os gráficos são os mesmos.

em um sistema de eixos cartesianos, gráficos das principais funções reais elementares estudadas no ensino médio.

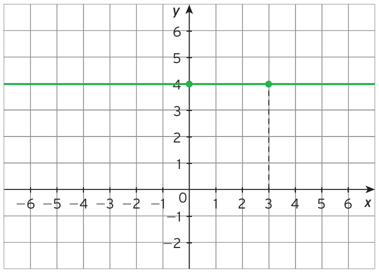
Para traçar gráficos de funções no *Geogebra*, basta digitar a fórmula da função desejada no campo **Entrada**, situado na parte inferior da interface do *software*. Entretanto, a tarefa de traçar gráficos de funções simplesmente pode ser realizada em *softwares* bem mais elementares. O interessante aqui é incorporar os recursos específicos dos ambientes de geometria dinâmica na análise do comportamento de funções. Há muitas formas de se fazer isso no *Geogebra*, que procuraremos explorar neste artigo e em edições futuras desta seção.

Giraldo, V. Computador na sala de aula. *Revista do Professor de Matemática*, n. 79. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/79/10.html. Acesso em: 6 jul. 2022.

- Verifique se os estudantes compreenderam que a posição da reta do gráfico de uma função afim depende do valor dos coeficientes dessa função.
- Ao apresentar o gráfico do exemplo **C**, alguns estudantes podem questionar qual é o tipo de função cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo *y*. Nesse caso, explique que isso nunca ocorre, pois uma reta paralela ao eixo *y* não representaria o gráfico de uma função (leve-os a observar que para o mesmo valor de *x* teríamos diferentes valores de *y*).
- No exemplo **D**, incentive os estudantes a construir o gráfico da função $f(x) = -x$. Depois, pergunte a eles se essa função pode ser considerada uma função identidade. Caso eles tenham dificuldade em responder, peça que observem o valor do coeficiente *a* na função (nesse caso, $a = -1$).

C. Vamos construir o gráfico da função h dada por $h(x) = 4$, com x real.
Observe que, independentemente do valor atribuído a x, o valor de y sempre será 4.

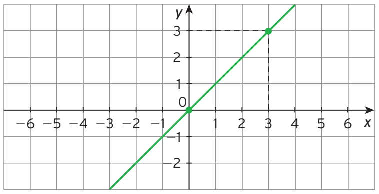
x	*y*
0	4
3	4


ID/BR

A função h é constante. Seu gráfico é uma reta paralela ao eixo *x* (horizontal), que corta o eixo *y* em (0, 4).
Note que na função h dada por $y = 4$ não existe valor de *x* real que anule a função.

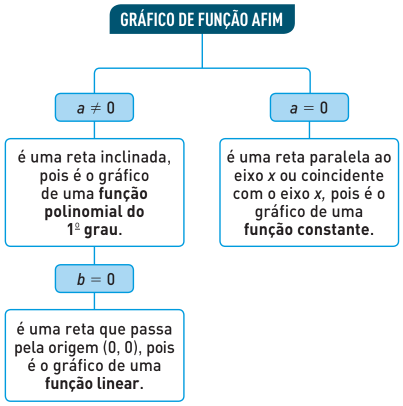
D. Vamos construir o gráfico da função p dada por $p(x) = x$, com x real.

x	*y*
0	0
3	3


ID/BR

A função p é linear. Seu gráfico é uma reta inclinada que passa pela origem (0, 0), e corta os eixos *x* e *y* em (0, 0). Nesse caso, p é a função identidade (pois $a = 1$).

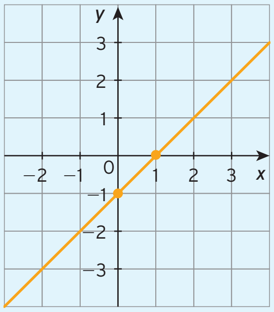

João Picoli/ID/BR



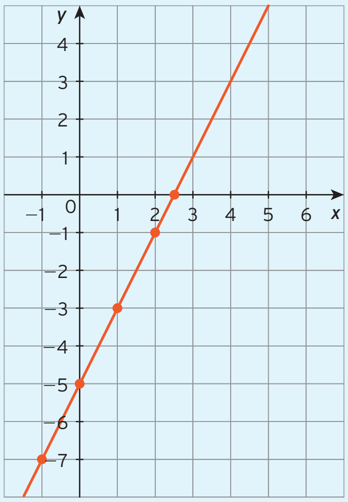
236

RESPOSTAS

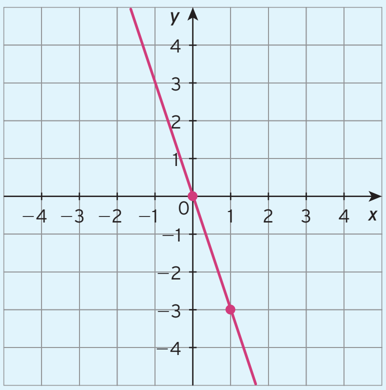
5.


Ilustrações: ID/BR

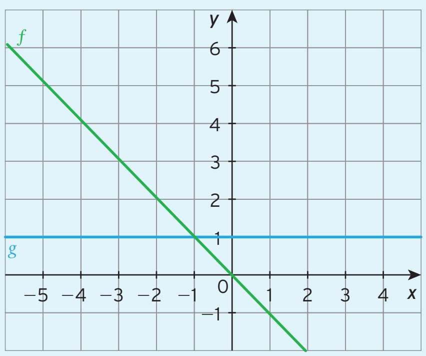
7. b)



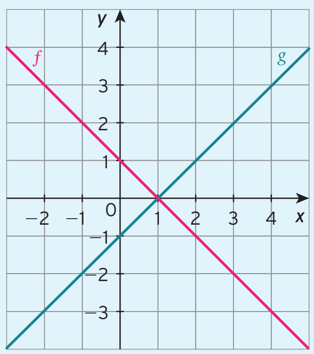
8.



9. a)



b)



10. a) Consulte a resposta neste manual.
c) O gráfico seria uma reta paralela ao eixo x ou coincidente com o eixo x.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

5. Construa no caderno o gráfico da função dada pela lei $f(x) = x - 1$, com x real, e determine: **Consulte a construção neste manual.**

a) os pontos em que o gráfico corta os eixos x e y; **Eixo x: (1, 0); eixo y: (0, −1).**

b) a abscissa do ponto em que o gráfico corta o eixo x. **1**

6. Classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação dada a seguir.

a) O gráfico de uma função linear sempre passa pela origem (0, 0) do sistema de coordenadas cartesianas. **Verdadeira.**

b) O gráfico de uma função constante é uma reta inclinada em relação aos eixos x e y. **Falsa.**

c) Qualquer reta pode ser o gráfico de uma função afim. **Falsa.**

7. Observe o quadro com alguns valores relativos a uma função afim.

b) Consulte a resposta neste manual.
c) Não, porque seu gráfico não é uma reta paralela ou coincidente ao eixo x (ou porque $a \neq 0$).

x	y
−1	−7
0	−5
1	−3
2	−1
2,5	0

a) Determine a lei dessa função, para todo x real. **$y = 2x - 5$**

b) Construa o gráfico dessa função.

c) Essa função é constante? Por quê?

d) Essa função é linear? Por quê?
Não, porque seu gráfico não passa pela origem.

8. Construa o gráfico da função dada pela lei $f(x) = -3x$, com x real.
Consulte a resposta neste manual.

9. Construa em um mesmo plano cartesiano o gráfico das funções f e g em cada caso (com x real) e determine o ponto em que esses gráficos se intersectam, caso exista. **Consulte as construções neste manual.**

a) $f(x) = -x$ e $g(x) = 1$ **(−1, 1)**

b) $f(x) = -x + 1$ e $g(x) = x - 1$ **(1, 0)**

c) $f(x) = -x$ e $g(x) = x$ **(0, 0)**

d) $f(x) = -2$ e $g(x) = 1$ **Não há ponto de intersecção nesses gráficos.**

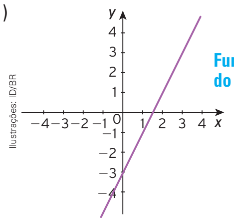
10. O ponto (2, 4) pertence ao gráfico de uma função g.

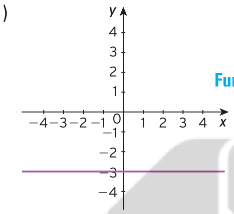
a) Construa o gráfico da função g, sabendo que ela é uma função linear.

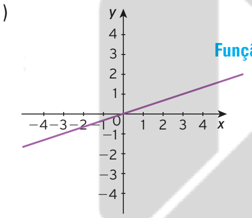
b) Obtenha $g(-2)$. **−4**

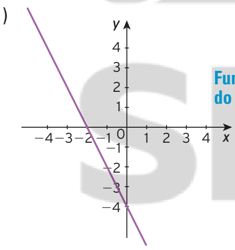
c) Como seria o gráfico da função g se ela fosse uma função constante?

11. Identifique cada gráfico com o tipo de função afim que ele pode representar: constante, linear ou polinomial do 1º grau.

a)

Função polinomial do 1º grau.

b)

Função constante.

c)

Função linear.

d)

Função polinomial do 1º grau.

Ilustrações: ID/BR

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

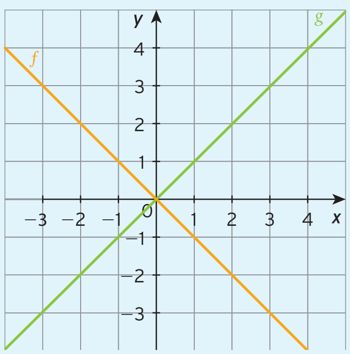
Proponha aos estudantes que resolvam a atividade a seguir.

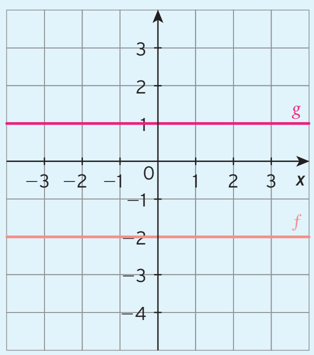
Imaginem que a reta que representa uma função constante coincida com o eixo x. Como escreveriam a lei de formação dessa função? Qual seria o valor de b? Desenhem o gráfico da função.

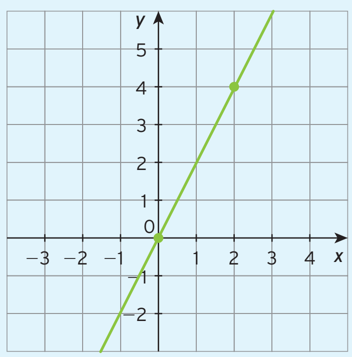
Para realizar essa atividade, solicite aos estudantes que elaborem um esboço do gráfico e, então, façam o que é pedido.

Resposta esperada: A lei de formação dessa função é $f(x) = 0$, ou seja, $a = 0$ e $b = 0$.

Comente que, nesse caso, essa função pode ser chamada de função nula.

c)


d)


10. a)


Ilustrações: ID/BR

ZERO DE UMA FUNÇÃO AFIM

- Explique aos estudantes que determinar o zero de uma função afim é o mesmo que determinar o valor em que, na representação gráfica, a reta que representa a função intercepta o eixo x; para tanto, deve-se calcular o valor de x que anula a função.
- A função polinomial do 1º grau, ou função afim, possui um único zero da função. Sendo assim, a reta referente à função intercepta o eixo x uma única vez.
- Verifique se eles percebem que a função linear obrigatoriamente passa pelo par ordenado (0, 0) e, consequentemente, toda função linear tem $x = 0$ como zero da função.
- Os pontos onde a reta intercepta os eixos x e y são importantes, pois facilitam a construção do gráfico das funções. A reta intercepta o eixo x quando $y = 0$, e o eixo y, quando $x = 0$.

Zero de uma função afim

Vimos que o valor de uma função dada por $y = f(x)$ é o valor de y que a função f assume quando atribuímos a x determinado valor. Ou seja, o valor da função f para $x = m$ é $y = f(m)$, que é obtido substituindo x por m na lei da função. Quando $f(m) = 0$, dizemos que a função f se anula para $x = m$. Nesse caso, $x = m$ é denominado **zero da função** f.

Zero de uma função afim f é o valor de x que anula a função.

Assim, para obter o zero de uma função afim f dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, basta resolver a equação do 1º grau $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \underbrace{-\frac{b}{a}}_{\text{zero da função polinomial do 1º grau}}$$

Toda função polinomial do 1º grau, com x real, tem um único zero. Particularmente, toda função linear tem $x = 0$ como zero da função.

Exemplos

A. Dada a função $f(x) = -x + 2$, com x real, o valor de x que anula a função f é dado por:

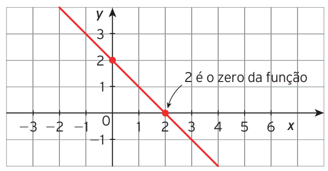
$$f(x) = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow 2 = x$$

Logo, o zero da função $f(x) = -x + 2$ é 2.

Podemos representar essa situação graficamente. Veja.

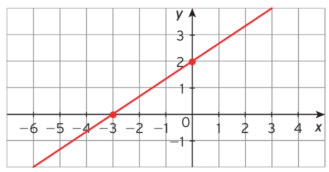
x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
2	0	(2, 0)

O zero da função é o 2.



No gráfico da função, podemos verificar que o zero da função é a abscissa (valor de x) do ponto em que o gráfico corta o eixo x.

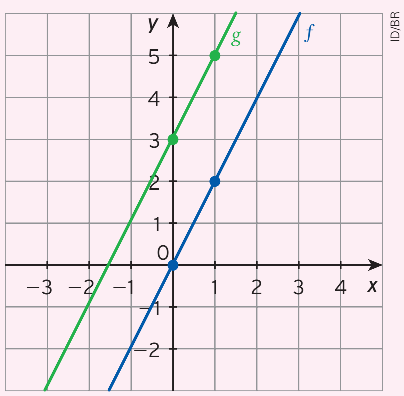
B. Considerando o gráfico a seguir, vamos determinar o zero da função que ele representa.



O zero dessa função é a abscissa do ponto em que o gráfico corta o eixo x. Observando o gráfico, verificamos que ele corta o eixo x apenas no ponto $(-3, 0)$, cuja abscissa é -3. Logo, o zero dessa função é -3.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Solicite aos estudantes que elaborem, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções que possuem as leis de formação $f(x) = 2x$ e $g(x) = 2x + 3$ e, depois, peça a eles que analisem os dois gráficos. Resposta esperada:



ATIVIDADES

12. Considere f tal que $f(x) = 2x - 4$. Determine:

a) $f(-1)$; **-6**

b) o valor de x quando $f(x) = 0$; **$x = 2$**

c) o zero da função f. **2**

13. Determine o zero da:

a) função identidade; **0**

b) função afim dada por $f(x) = -7$; **Não tem.**

c) função polinomial do 1º grau dada por $g(x) = -x - 100$; **-100**

d) função linear dada por $h(x) = 40x$. **0**

14. Considere a função definida por:

$$g(x) = -0{,}5x$$

a) Determine o valor de y_1 correspondente a $x_1 = -1$ pela função g. **$y_1 = 0{,}5$**

b) Obtenha $g(y_1)$. **$g(0{,}5) = -0{,}25$**

c) Podemos dizer que y_1 é o zero da função g? Por quê? **Não, pois $g(0{,}5) \neq 0$.**

15. O zero de uma função afim f é $\frac{3}{2}$ e $f(1) = 5$.

a) Determine o valor dos coeficientes da função f. **$a = -10$ e $b = 15$.**

b) Calcule o valor de $f(-3)$. **45**

c) Obtenha o valor de x, tal que $f(x) = 25$. **$x = -1$**

16. Determine o valor de k em $h(x) = x - 4 + k$ para que a função h tenha como zero $x = 2$. **$k = 2$**

17. Faça o que se pede em cada item.

a) Escreva no caderno a lei de formação de algumas funções afins.

b) Determine o zero dessas funções.

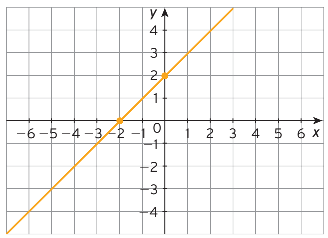
c) Construa o gráfico dessas funções e destaque neles o ponto em que o gráfico corta o eixo x.

d) Identifique as coordenadas desse ponto (intersecção do gráfico com o eixo x).

e) Qual é a relação entre o zero da função e o ponto no qual o gráfico corta o eixo x?

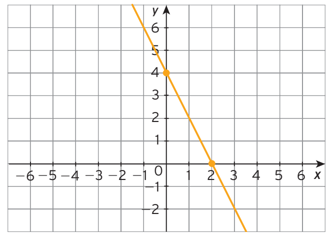
18. Dados os gráficos a seguir, determine o zero das funções que eles representam.

a) **-2**

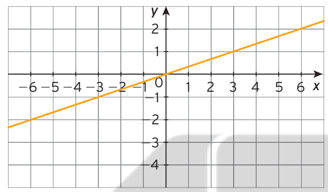


Ilustrações: ID/BR

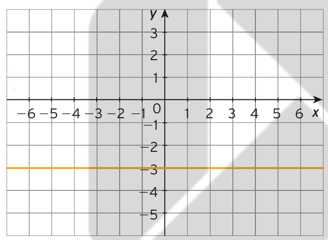
b) **2**



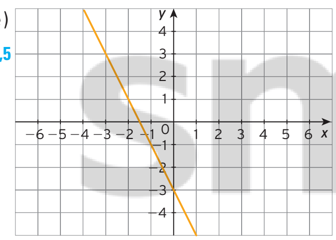
c) **0**



d) **A função não tem zero.**



e) **$-1{,}5$**



17. Os itens a a d dependem das funções escritas pelos estudantes.
e) A abscissa do ponto de intersecção do gráfico com o eixo x é o zero da função.

- A atividade **13** é uma boa oportunidade para verificar se os estudantes compreenderam o conceito do zero da função afim.

  No item **b**, a função afim dada por $f(x) = -7$ é uma função constante. Recorde com os estudantes que a função constante é toda função afim f dada por $f(x) = ax + b$, em que o coeficiente a é zero e o coeficiente b pode ser zero ou não; nesse caso, $b = -7$.
- Chame a atenção dos estudantes para o fato de que, na atividade **15**, se a função considerada é uma função afim, ela pode ser escrita como $f(x) = ax + b$. Além disso, se o zero da função é $\frac{3}{2}$, então $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Verifique se os estudantes percebem que, dessa maneira, eles já conhecem dois pontos: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e $(1, 5)$.

  E, que apartir desses pontos, pode-se escrever um sistema com duas equações, substituindo os dois pontos conhecidos em $f(x) = ax + b$:

$$\begin{cases} 5 = a \cdot 1 + b \\ 0 = a \cdot \frac{3}{2} + b \end{cases}$$

- Na atividade **18**, espera-se que os estudantes percebam que o zero da função é o valor que x assume quando o gráfico intercepta o eixo x.

No gráfico, as duas retas são paralelas.

A função $f(x) = 2x$ passa pelo ponto (0, 0).

A função $g(x) = 2x + 3$ passa pelo ponto (0, 3).

Espera-se que os estudantes percebam que, na função $g(x) = 2x + 3$, sabe-se que $b = 3$, ou seja, o gráfico deslocou-se 3 unidades para cima.

Pode-se concluir que o gráfico da função afim $y = a \cdot x + b$ é o deslocamento vertical do gráfico da função linear $y = a \cdot x$ em b unidades, que pode ser para cima (se $b > 0$) ou para baixo (se $b < 0$).

VARIAÇÃO DE UMA FUNÇÃO AFIM

- Verifique se os estudantes compreenderam que uma função afim pode ser crescente ou decrescente, de acordo com o valor que o coeficiente *a* assume. Essa informação será útil para o estudo do sinal de uma função afim.
- Reforce com os estudantes que para verificar se a função é crescente ou decrescente é preciso observar o gráfico da esquerda para a direita.

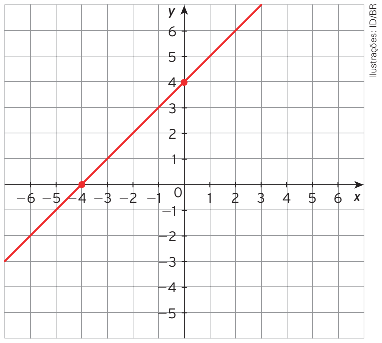
Variação de uma função afim

Quando uma função afim é uma função polinomial do 1º grau, caso em que é dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, ela pode ser classificada como crescente ou decrescente.

Uma função afim em que o coeficiente *a* é não nulo:
- é crescente quando $a > 0$;
- é decrescente quando $a < 0$.

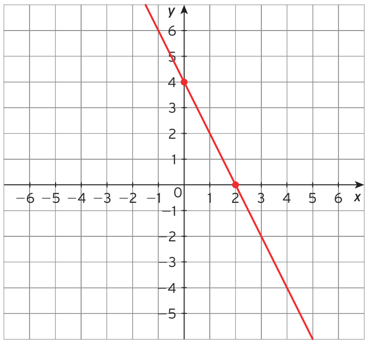
Exemplos

A. A função dada por $g(x) = x + 4$, com x real, tem $a = 1$, ou seja, $a > 0$.



Podemos observar que, aumentando os valores de x, os valores correspondentes de y também aumentam. Nesse caso, dizemos que a função g é **crescente**, e seu gráfico é uma reta ascendente, quando observada da esquerda para a direita.

B. A função dada por $h(x) = -2x + 4$, com x real, tem $a = -2$, ou seja, $a < 0$.



Nesse caso, verificamos que, aumentando os valores de x, os valores correspondentes de y diminuem. Então, dizemos que a função h é **decrescente**, e seu gráfico é uma reta descendente, quando observada da esquerda para a direita.

OUTRAS FONTES

ALVARENGA, K.; BARBOSA, C. V.; FERREIRA, G. M. O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a.C. até o século XX. *Revemat*, Florianópolis (SC), v. 9, n. 1, p. 159-178, 2014. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2014v9n1p159/27629. Acesso em: 6 jul. 2022.

O artigo baseia-se em uma pesquisa bibliográfica e documental de 43 trabalhos, que tratam do desenvolvimento do conceito de função apresentado em uma linha do tempo. Possivelmente por ser a ferramenta matemática mais usada para modelar fenômenos naturais, reais e abstratos, esse conceito deve ser tratado de forma contextualizada, dando-lhe o significado original: modelar fenômenos.

Estudo do sinal da função afim

Uma função afim dada por $f(x) = ax + b$ pode assumir valores positivos, negativos ou nulos, dependendo dos valores atribuídos à variável independente x.

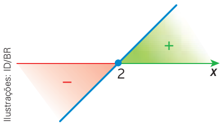
Exemplos

A. Vamos fazer o estudo do sinal da função h dada por $h(x) = 2x - 4$.
A função é crescente, pois $a > 0$.
Calculamos o zero da função h:

$$h(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

Fazemos o esboço do gráfico:

Ilustrações: ID/BR

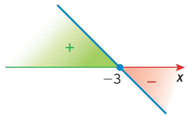


- $h(x) = 0$ para $x = 2$.
- $h(x) > 0$ para $x > 2$.
- $h(x) < 0$ para $x < 2$.

B. Vamos fazer o estudo do sinal da função i dada por $i(x) = -3x - 9$.
A função é decrescente, pois $a < 0$.
Calculamos o zero da função i:

$$i(x) = 0 \Rightarrow -3x - 9 = 0 \Rightarrow -3x = 9 \Rightarrow x = -3$$

Fazemos o esboço do gráfico:



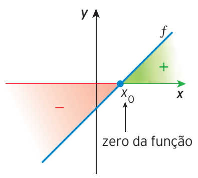
- $i(x) = 0$, para $x = -3$.
- $i(x) > 0$, para $x < -3$.
- $i(x) < 0$, para $x > -3$.

C. Vamos fazer o estudo do sinal da função j dada por $j(x) = -2$.
Trata-se de uma função afim constante.
Como $j(x) = -2$, para todo x real, a função j é sempre negativa.
Fazemos o esboço do gráfico:

- $j(x) = 0$, para nenhum x real.
- $j(x) > 0$, para nenhum x real.
- $j(x) < 0$, para todo x real.

Observe que $x_0 = -\frac{b}{a}$ é o zero da função afim f quando $a \neq 0$. Assim, o estudo do sinal dessa função pode ser resumido em dois casos, conforme o sinal do coeficiente a.

1º caso: f é crescente ($a > 0$).



- Para $x = x_0 = -\frac{b}{a}$, temos:
  $f(x) = 0$ (f se anula)
- Para $x > -\frac{b}{a}$, temos:
  $f(x) > 0$ (f é positiva)
- Para $x < -\frac{b}{a}$, temos:
  $f(x) < 0$ (f é negativa).

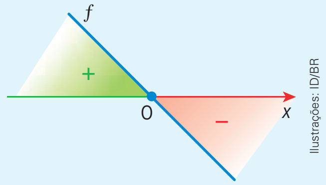
ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO AFIM

- Comente com os estudantes que estudar o sinal de uma função afim consiste em determinar os intervalos nos quais:
  - a função se anule ($y = 0$);
  - a função seja positiva ($y > 0$);
  - a função seja negativa ($y < 0$).
- Leia com os estudantes os exemplos apresentados. Se perceber que eles estão com dificuldade na compreensão do estudo de sinal, solicite que realizem, em duplas, o estudo do sinal das funções exemplificadas na página.
- Para estudar o sinal de uma função afim é preciso seguir algumas etapas. Primeiro, identificamos o sinal do coeficiente a. Em seguida, encontramos o zero da função. Por fim, fazemos o esboço do gráfico.

241

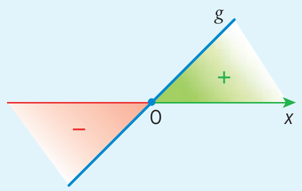
RESPOSTAS

21. a)



$f(x) = 0$, para $x = 0$.
$f(x) > 0$, para $x < 0$.
$f(x) < 0$, para $x > 0$.

b)

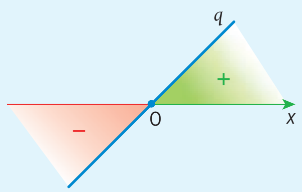


$g(x) = 0$, para $x = 0$.
$g(x) > 0$, para $x > 0$.
$g(x) < 0$, para $x < 0$.

c)

$p(x) = 0$, para todo x real.
$p(x) > 0$, para nenhum x real.
$p(x) < 0$, para nenhum x real.

d)



$q(x) = 0$, para $x = 0$.
$q(x) > 0$, para $x > 0$.
$q(x) < 0$, para $x < 0$.

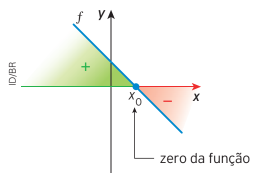
23. a) h é positiva para nenhum x real e negativa para todo x real.

b) h é positiva para $x < 0$ e negativa para $x > 0$.

c) h é positiva para $x > -1$ e negativa para $x < -1$.

d) h é positiva para $x < -1$ e negativa para $x > -1$.

2º caso: f é decrescente ($a < 0$)

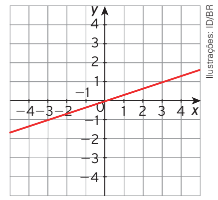


- Para $x = x_0 = -\frac{b}{a}$, temos: $f(x) = 0$
- Para $x > -\frac{b}{a}$, temos: $f(x) < 0$
- Para $x < -\frac{b}{a}$, temos: $f(x) > 0$

ATIVIDADES

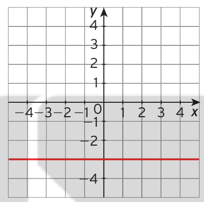
19. Identifique cada gráfico de acordo com o tipo de função que ele pode representar: constante, crescente ou decrescente.

a)



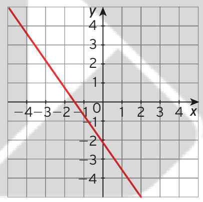
Crescente.

b)



Constante.

c)



Decrescente.

20. Classifique cada função polinomial do 1º grau, cuja lei é dada a seguir, como crescente ou decrescente.

a) f, tal que $f(x) = -5x + 2$ **Decrescente.**

b) t, dada por $t(m) = \frac{1}{3}m - 5$ **Crescente.**

c) h, tal que $h(x) = -\frac{x}{4}$ **Decrescente.**

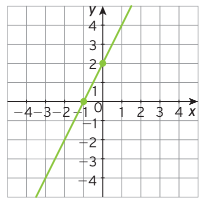
d) g, tal que $g(x) = x + 3$ **Crescente.**

e) p, dada por $p(x) = 2x - 7$ **Crescente.**

21. Estude o sinal das funções f, g, p e q cujas leis são dadas a seguir: **Consulte as respostas neste manual.**

a) $f(x) = -2x$;
c) $p(x) = 0$;
b) $g(x) = 2x$;
d) $q(x) = x$.

22. Veja o gráfico de uma função f.



Determine os valores de x para:

a) $f(x) = 0$; $x = -1$
c) $f(x) < 0$; $x < -1$
b) $f(x) > 0$; $x > -1$
d) $f(x) = 2$. $x = 0$

23. Para cada função h dada a seguir, determine os valores de x para os quais tem-se h positiva e h negativa. **Consulte as respostas neste manual.**

a) $h(x) = -0{,}5$
c) $h(x) = x + 1$
b) $h(x) = -0{,}5x$
d) $h(x) = -1 - x$

24. Determine o valor de m de modo que f seja positiva para $x > 0$, sendo $f(x) = mx$. $m > 0$

25. Considere a função g cuja lei é dada por $g(x) = 8x - 3$.

a) Classifique g como função crescente ou decrescente. **Crescente.**

b) Faça um estudo do sinal dessa função.

c) Responda: $g(423)$ é maior que zero? **Sim.**

26. Dada a função h cuja lei é $h(x) = px + q$, determine os valores de p e q de modo que h seja sempre negativa, para todo x real. $p = 0$ e $q < 0$.

25. b) $g(x) = 0$, para $x = \frac{3}{8}$; $g(x) > 0$, para $x > \frac{3}{8}$; $g(x) < 0$, para $x < \frac{3}{8}$.

Função linear e proporcionalidade

Consideremos uma função linear f dada por $f(x) = ax$, com x real. Podemos verificar, para todo x real não nulo, que:

$$f(x) = ax \ (a \neq 0)$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{ax}{x} = a$$

Como a razão entre $f(x)$ e x é constante, ao multiplicar x por um certo número, a função $f(x)$ será multiplicada por esse mesmo número. Portanto, x e $f(x)$ representam grandezas que são **diretamente proporcionais**.

GRANDEZAS PROPORCIONAIS

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, ao multiplicar o valor de uma delas por um número não nulo, o valor correspondente da outra fica multiplicado por esse mesmo número.

Exemplo A

Uma lanchonete vende suco natural de uva por R$ 3,00.

A relação entre a quantidade de sucos e o valor total do pedido pode ser vista no quadro a seguir.

Quantidade de suco	1	2	3	4	5	6
Valor total do pedido (em real)	3,00	6,00	9,00	12,00	15,00	18,00

Observe que, duplicando a quantidade de sucos, o valor total do pedido também é duplicado; triplicando a quantidade de sucos, o valor total do pedido também é triplicado; e assim sucessivamente.

Isso significa que essas grandezas são diretamente proporcionais.

Representando o valor total do pedido por $f(x)$ e a quantidade de sucos por x, verificamos que a relação entre essas grandezas é uma função cuja lei de formação é $f(x) = 3x$, sendo x um número natural não nulo.

Agora, veja no quadro a seguir a razão entre o valor total do pedido e a quantidade de sucos.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	6	9	12	15	18
$\frac{f(x)}{x}$	$\frac{3}{1} = 3$	$\frac{6}{2} = 3$	$\frac{9}{3} = 3$	$\frac{12}{4} = 3$	$\frac{15}{5} = 3$	$\frac{18}{6} = 3$

A razão entre o valor total do pedido e a quantidade de sucos é sempre a mesma: 3.

Note que a razão entre o valor total $f(x)$ e a quantidade de sucos x é igual ao valor do coeficiente a da lei de formação de f, ou seja: $\frac{f(x)}{x} = a$.

FUNÇÃO LINEAR E PROPORCIONALIDADE

- Chame a atenção dos estudantes para o fato de ser comum a aplicação do conteúdo de funções em várias áreas do conhecimento e também em diversas situações do cotidiano.
- É importante que os estudantes compreendam que, nas funções lineares, existe uma relação de proporcionalidade entre x e $f(x)$. Dessa maneira, a razão entre $f(x)$ e x é constante e igual ao coeficiente a. Assim, uma grandeza y é diretamente proporcional a uma grandeza x, se existir um número $a \neq 0$, de modo que $y = a \cdot x$. Dizemos que a é chamado constante de proporcionalidade.
- Certifique-se de que os estudantes estão conseguindo acompanhar, pela análise dos exemplos propostos, a relação entre função linear e proporcionalidade.

OUTRAS FONTES

COSTA, M. dos S.; ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade e função afim: uma possível conexão através da resolução de problemas. *In:* SCOTT, P.; RUÍZ, Á. (ed.). *Educación Matemática en las Américas 2015*. Chiapas, México: Ciaem, 2015. v. 15. p. 141-152. Disponível em: https://ciaem-iacme.org/memorias-ciaem/xiv/pdf/Vol15Prob.pdf. Acesso em: 6 jul. 2022.

O objetivo desse estudo é apresentar uma possível forma de conexão entre os conteúdos matemáticos "proporcionalidade" e "função afim". Para isso, foi utilizada a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação por meio da resolução de problemas.

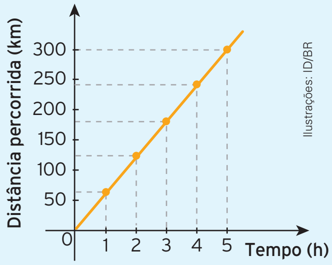
ARAUJO, E. A. de. Ensino de álgebra e formação de professores. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1740/1130. Acesso em: 6 jul. 2022.

Esse artigo discute direcionamentos que contribuem para a melhoria do ensino de Álgebra, apresentando um breve histórico que busca compreender o cenário atual do seu ensino, examinar a problemática das diversas concepções de Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico, além de contribuir com reflexões direcionadas à formação inicial e continuada de professores de Matemática.

- Observe como os estudantes resolvem o item **d** da atividade **28**. Eles podem encontrar dificuldade em representar os eixos em diferentes escalas. Assim, tente resolver esse item de maneira coletiva e na lousa.

RESPOSTA

28. d)



DE OLHO NA BASE

Resolver problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta entre duas ou mais grandezas, inclusive taxa de variação, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA08**.

Linha de montagem de automóveis.

Exemplo B

Uma fábrica produz 600 automóveis por dia.

Podemos verificar que a quantidade y de automóveis produzidos em função da quantidade x de dias, com x natural não nulo, é dada por:

$$y = g(x) = 600x$$

A função g é uma função linear em que a é 600.

Veja o quadro a seguir com alguns valores de x e $g(x)$.

Quantidade de dias (x)	Quantidade de automóveis produzidos (y)
1	600
2	1 200
3	1 800
4	2 400
5	3 000

Observe que, dobrando a quantidade de dias, a produção de automóveis é dobrada; triplicando a quantidade de dias, a produção de automóveis é triplicada; e assim por diante.

Portanto, quantidade de dias e quantidade de automóveis produzidos são grandezas diretamente proporcionais, ou seja, a razão entre $g(x)$ e x (com x não nulo) é constante e igual a 600 (valor do coeficiente a):

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{600}{1} = \frac{1\,200}{2} = \frac{1\,800}{3} = \frac{2\,400}{4} = \ldots = \frac{600x}{x} = 600$$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

27. Analise a função f representada pelos valores indicados em cada quadro e identifique em quais dela $f(x)$ é diretamente proporcional a x. **Itens b e c.**

a)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	15	20	25	30	35

b)

x	3	5	7	9	11
$f(x)$	21	35	49	63	77

c)

x	5	8	11	14	17
$f(x)$	45	72	99	126	153

28. Certo automóvel percorre 60 km a cada hora, com velocidade constante. **c) $f(x) = 60x$**

a) Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o.

Tempo (h)	1	2	3	4	5
Distância percorrida (km)	60	120	180	240	300

b) O tempo e a distância percorrida são grandezas diretamente proporcionais? **Sim.**

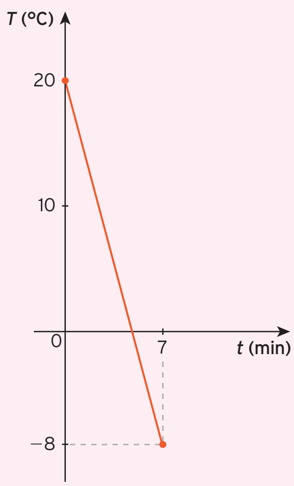
c) Escreva a lei de f que representa a distância percorrida $f(x)$, em quilômetro, em função do tempo x, em hora.

d) Esboce o gráfico de f para x real e $x \geqslant 0$. **Consulte a resposta neste manual.**

ESTRATÉGIA DE APOIO

O conceito de função é fundamental para a compreensão de outros conteúdos da própria área da Matemática e para outras áreas do conhecimento. Assim, caso perceba que os estudantes ainda apresentam dificuldade, proponha a seguinte atividade.

O gráfico a seguir mostra a variação da medida de temperatura (T), em grau Celsius, de uma chapa de metal em função da medida de tempo (t), em minuto.



Com base no gráfico, responda às perguntas.

a) Quando $t = 0$, qual é a medida da temperatura da chapa de metal? 20 °C

b) Quando $t = 7$, qual é a medida da temperatura da chapa de metal? −8 °C

c) Durante o decorrer do tempo a chapa de metal foi aquecida ou resfriada?

Resfriada, pois, conforme o tempo aumenta, a medida de temperatura diminui. Essa função é decrescente.

d) Qual é a menor medida de temperatura atingida pela chapa de metal? −8 °C

e) A medida de temperatura da chapa de metal esteve por mais tempo positiva ou negativa? Positiva.

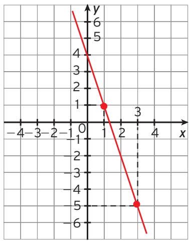
f) Essas grandezas variam linearmente?

Sim.

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. Veja a seguir como um estudante do 9º ano determinou a lei de formação da função afim cujo gráfico está representado a seguir.



ID/BR

O gráfico contém os pontos (1, 1) e (3, −5).
Como a função é afim, sua lei de formação pode ser escrita na forma $y = ax + b$.
Como o gráfico contém o ponto (1, 1), sabe-se que para $x = 1$, tem-se $y = 1$. Substituindo na lei da função, obtém-se: $1 = a \cdot 1 + b \Rightarrow a + b = 1$.
Essa reta também contém o ponto (3, −5).
Assim: $-5 = a \cdot 3 + b \Rightarrow 3a + b = -5$
Monta-se um sistema com as duas equações obtidas: $\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + b = -5 \end{cases}$
Da primeira equação: $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a$.
Substituindo na segunda equação:
$3a + b = -5 \Rightarrow 3a + 1 - a = -5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$
Substituindo o valor de a na primeira equação:
$b = 1 - a \Rightarrow b = 1 - (-3) \Rightarrow b = 4$
Como $a = -3$ e $b = 4$, a lei da função é:
$y = -3x + 4$

Considere agora uma função afim tal que os pontos (1, 0) e (2, 1) pertençam ao gráfico.
Determine a lei dessa função e classifique-a em crescente ou decrescente. **$y = x - 1$; crescente.**

2. A lei $L(x) = 3x + 3$, com $x > 0$, descreve o lucro L, em real, de uma empresa em função da quantidade x vendida.

a) Faça no caderno um quadro com alguns valores de x e $L(x)$. **Resposta pessoal.**

b) O lucro L é crescente ou decrescente? Por quê? **Crescente, pois quando os valores de x aumentam, os valores de $L(x)$ também aumentam.**

3. Laura é costureira e compra vários tecidos. Uma peça de tecido tem medida de largura constante, variando apenas a medida do comprimento. Laura paga um preço p pelo tecido dependendo da medida de comprimento c adquirido. O metro de tecido que ela escolheu custa R$ 150,00.

a) Copie o quadro *a* seguir no caderno e complete-o.

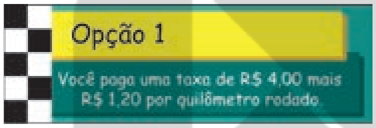
c (m)	1	2	3	4
p (reais)	150	300	450	600

b) Agora, responda:
- Ao duplicar o valor de c, o valor de p duplicou? **Sim.**
- E ao triplicar o valor de c? **O valor de p triplicou.**
- Que tipo de relação existe entre c e p?

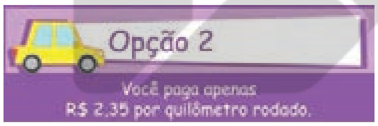
Eles representam grandezas diretamente proporcionais.

4. Reúna-se com um colega para resolver a questão a seguir.

Uma empresária precisa visitar dois clientes. O escritório do cliente A fica a 12 quilômetros de distância de onde ela trabalha, e o escritório do cliente B fica a 3,3 quilômetros. Ela planeja utilizar um carro de uma empresa de transporte de passageiros e tem duas opções. Veja.



AMj Studio/ID/BR



AMj Studio/ID/BR

a) Escrevam a lei de formação da função que representa o valor pago pelo aluguel do carro em cada opção em função de uma medida de distância d percorrida em quilômetro.

b) Qual é a opção mais barata para ir até o escritório do cliente A? **A opção 1.**

c) Qual é a opção mais barata para ir até o escritório do cliente B? **A opção 2.**

4. a) Opção 1: $f(d) = 1{,}2d + 4$; opção 2: $g(d) = 2{,}35d$.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **1**, o objetivo é determinar a lei de formação de uma função afim e classificá-la em crescente ou decrescente, com base na resolução proposta por um estudante do 9º ano.
- Na atividade **4**, o intuito é escrever as leis de formação dos valores pagos em função de uma medida de distância percorrida em duas diferentes situações para, então, determinar a opção mais barata. Verifique se os estudantes perceberam que, para encontrar a opção mais barata para visitar cada cliente, deve-se calcular o valor que f e g assumem quando $d = 12$ e $d = 3{,}3$ e comparar os valores obtidos.

DE OLHO NA BASE

Ao realizar a atividade **4** em duplas, os estudantes podem interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles, desenvolvendo a **competência específica de Matemática 8**.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Resolver um problema usando a estratégia "organização de informações" permite aos estudantes analisar as informações do problema e organizá-las de maneira a obter a resposta do problema. Para isso, no caso dos problemas dessa seção, eles podem elaborar tabelas e gráficos para visualizar a variação das informações e tomar decisões.

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

- As questões apresentadas nesse tópico permitem que os estudantes localizem os dados fornecidos pelo enunciado e façam inferências sobre a situação.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

- Para resolver o problema, os estudantes precisam compreender que o salário de Joaquim é composto por uma parte fixa e outra parte variável, que depende da quantidade de geladeiras vendidas.

REFLEXÃO SOBRE O PROBLEMA

- Refletir sobre o problema é importante para que você saiba se o tipo de problema apresentado foi interessante para os estudantes e se pode ser utilizado em outro momento. Também é importante não só que os estudantes se conscientizem das dificuldades que enfrentaram ao resolvê-lo, mas que você possa avaliar o grau de dificuldade encontrado, visto que, se foi muito fácil para eles, isso pode desmotivá-los a resolver problemas do mesmo tipo.
- A observação da própria estratégia de resolução é importante para os estudantes, pois permite que eles a compreendam melhor e a utilizem em outros momentos da vida escolar. Além disso, deparar-se com diferentes estratégias de resolução amplia a visão e o repertório deles quanto à resolução de problemas e à compreensão de que um problema, em Matemática, pode ter mais de uma estratégia de resolução.

DE OLHO NA BASE

Os problemas propostos auxiliam os estudantes a enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo situações imaginadas, a expressar suas respostas e a sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens, desenvolvendo a **competência específica de Matemática 6**.

RESOLVENDO PROBLEMAS

O problema

Joaquim foi contratado como vendedor em um fábrica de geladeiras. Seu salário é composto de um valor fixo de R$ 1 700,00 por mês mais uma comissão de R$ 80,00 por geladeira vendida. No primeiro mês, Joaquim vendeu 15 geladeiras. No segundo mês, vendeu 18. Com a prática, a cada mês, ele consegue vender mais geladeiras.

Daniel Wu/ID/BR

Compreensão do problema

1. Qual é o salário fixo de Joaquim? **R$ 1 700,00**
2. Quanto ele ganha por geladeira vendida? **R$ 80,00**
3. Do que depende o salário de Joaquim? **Da quantidade de geladeiras vendidas no mês.**
4. O salário de Joaquim foi maior ou menor no segundo mês de trabalho? Por quê?
5. Qual foi a variação do salário de Joaquim do primeiro para o segundo mês? **R$ 240,00**

4. Maior, pois no segundo mês ele vendeu mais geladeiras.

Resolução do problema

Consulte as respostas neste manual.

1. Quanto Joaquim ganhou no primeiro mês de trabalho? E no segundo?
2. Construa um quadro para anotar o salário de Joaquim de acordo com a quantidade de geladeiras vendidas.
3. Como podemos calcular o salário de Joaquim para qualquer mês?
4. Quantas geladeiras Joaquim deve vender para ter um salário de pelo menos R$ 4 000,00?

Reflexão sobre o problema

Respostas pessoais.

1. Você gostou de resolver esse problema? Por quê?
2. Você encontrou dificuldades para resolver esse problema? Se encontrou, quais foram?
3. Você fez anotações dos dados do problema que o ajudaram a compreendê-lo?
4. Que estratégia você usou para resolver esse problema?
5. Os colegas utilizaram estratégias diferentes da sua? Se utilizaram, quais foram?
6. Você pode apresentar outra maneira de resolver esse mesmo problema? Qual?

Mais problemas

Consulte as respostas neste manual.

1. O valor cobrado na corrida de táxi em uma cidade é igual a um valor fixo de R$ 7,50 mais R$ 4,75 por quilômetro rodado. Certo dia, pela manhã, Carlos contratou um táxi para levá-lo de casa para o trabalho, que fica a uma distância de 9 quilômetros. À tarde, Carlos pediu ao taxista que o levasse ao aeroporto, que fica a uma distância de 4 quilômetros do trabalho, para buscar um visitante. Do aeroporto, Carlos passou pelo trabalho para deixar o visitante e, depois, foi para casa.

a) Quantos reais Carlos gastou com táxi nesse dia?

b) No dia seguinte, Carlos encontrou um motorista particular que estava cobrando um valor diferenciado: R$ 8,00 de bandeirada mais R$ 4,50 por quilômetro rodado. Para qual das viagens que Carlos fez no dia anterior seria mais interessante contratar o motorista particular? Justifique sua resposta.

2. Paulo quer dar um jantar e está pensando em contratar um bufê. Ele já tem duas propostas de bufês diferentes. O JantaBem cobra R$ 300,00 de taxa mais R$ 20,00 por convidado. Já o Delícia cobra R$ 150,00 de taxa mais R$ 30,00 por convidado. Paulo está em dúvida sobre qual deles contratar, especialmente porque a quantidade de convidados ainda não foi definida. Ele está pensando em convidar entre 15 e 25 pessoas. Qual bufê ele deve contratar para gastar a menor quantia?

Ilustrações: Daniel Wu/ID/BR

3. Camila conseguiu um novo emprego e está muito feliz. Agora, quer se organizar para ter certeza de que conseguirá pagar todas as contas do mês. Para isso, ela precisa fazer uma planilha e colocar nela as fórmulas para calcular gastos com estacionamento, por exemplo. Ao lado do trabalho dela há um estacionamento que cobra R$ 8,00 a primeira hora e mais R$ 2,00 por hora adicional. Assim, Camila tem de elaborar a fórmula para gasto diário com estacionamento, mas ela está em dúvida. Vamos ajudá-la a elaborar essa fórmula?

a) Organize alguns valores em um quadro para ajudar você a entender a cobrança do estacionamento. Por exemplo, quanto Camila paga se ficar 8 horas no estacionamento? E se ficar somente 5 horas?

b) Qual é a fórmula que Camila procura?

RESPOSTAS

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

1. No primeiro mês de trabalho, Joaquim ganhou R$ 2 900,00. E no segundo mês, R$ 3 140,00.

2. Resposta possível:

Quantidade de geladeiras vendidas	Valor recebido pelas geladeiras vendidas (em real)	Salário total de Joaquim (em real) (valor fixo de 1 700 reais + valor recebido pelas geladeiras vendidas)
15	1 200	2 900
18	1 440	3 140
19	1 520	3 220
21	1 680	3 380
25	2 000	3 700
27	2 160	3 860
28	2 240	3 940
29	2 320	4 020

3. $S = 1\,700 + 80 \cdot g$, em que S representa o salário de Joaquim (em real) e g, a quantidade de geladeiras vendidas no mês.

4. Para Joaquim ter um salário de pelo menos R$ 4 000,00, ele deve vender, no mínimo, 29 geladeiras no mês.

MAIS PROBLEMAS

1. a) Carlos gastou R$ 138,50 com táxi naquele dia.

b) Seria mais interessante contratar o motorista particular para as duas viagens que Carlos fez no dia anterior. Justificativa pessoal.

2. Até 14 convidados, o bufê Delícia é mais vantajoso; para 15 convidados, o valor a pagar é o mesmo; e, para mais de 15 convidados, o bufê JantaBem tem o melhor valor.

3. a) Organizando alguns valores em um quadro:

Quantidade de horas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Valor pago (em real)	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30

Quando Camila fica 8 horas no estacionamento, ela paga R$ 22,00, e quando fica 5 horas, paga R$ 16,00.

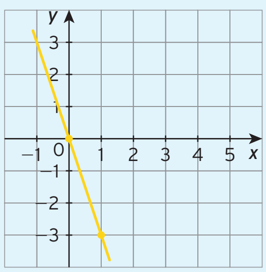
b) $V(h) = 8 + 2(h - 1)$, em que V é o valor a pagar (em real) e h é a quantidade de horas que o carro fica no estacionamento.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Verifique se, na atividade **1**, os estudantes representam o valor cobrado por cada empresa por meio de uma função. Na 1ª empresa, eles podem representar o valor cobrado pela função $100\,000 \cdot n + 350\,000$ e, na 2ª empresa, pela função $120\,000 \cdot n + 150\,000$.
- Na atividade **10**, o objetivo é perceber as relações existentes entre os coeficientes e a representação gráfica, bem como sobre a relação entre o zero da função e sua representação gráfica.
- Na atividade **12**, o intuito é relacionar as leis de formação apresentadas às suas representações gráficas. Verifique se os estudantes identificam, a partir da observação dos gráficos, que nos itens **a** e **d** estão sendo representadas funções decrescentes e, nos itens **b** e **c**, funções crescentes.

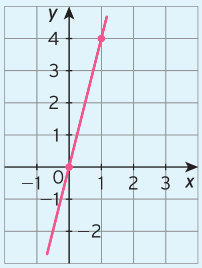
RESPOSTAS

7. c)



Ilustrações: ID/BR

9. d)



ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Leia a questão a seguir e escreva no caderno a alternativa correta.

(Enem) O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R\$ 100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R\$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R\$ 120 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R\$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas? **Alternativa a.**

a) $100n + 350 = 120n + 150$

b) $100n + 150 = 120n + 350$

c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$

d) $100(n + 350\,000) = 120(n + 150\,000)$

e) $350(n + 100\,000) = 150(n + 120\,000)$

2. Considere f uma função dada pela lei $f(x) = 3^x$. Calcule o valor da expressão $2 \cdot f(-1) + f(1)$. $\frac{11}{3}$

3. Considere as funções a seguir:

- $f(x) = -\frac{x}{3} + 4$
- $g(x) = -6 + 5x$
- $h(x) = 13 + \sqrt{2}x$

Agora, identifique:

a) as funções crescentes; **$g(x)$ e $h(x)$.**

b) as funções decrescentes; **$f(x)$**

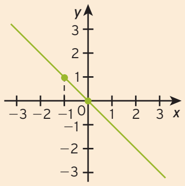
c) a função cujo zero é 12; **$f(x)$**

d) a função em que um dos coeficientes é um número irracional. **$h(x)$**

4. Elabore um problema que seja solucionado por meio de uma função. Depois, troque de caderno com um colega e resolva o problema elaborado por ele. **Resposta pessoal.**

5. Em cada item, determine o zero da função e classifique-a em crescente ou decrescente.

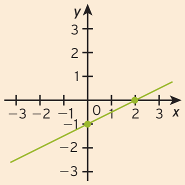
a)



0; decrescente.

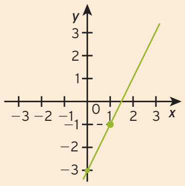
Ilustrações: ID/BR

b)



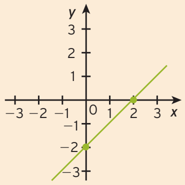
2; crescente.

c)



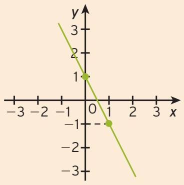
1,5; crescente.

d)



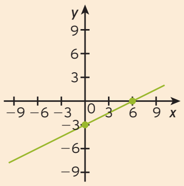
2; crescente.

e)



0,5; decrescente.

f)



6; crescente.

248

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Caso verifique que os estudantes apresentam dificuldades com relação ao estudo de funções afim, apresente a seguinte atividade.

Analise a função representada pelos pontos dados em cada quadro e identifique em quais delas $f(x)$ é proporcional a x. Escreva a lei da função f em cada caso.

a)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	15	20	25	30	35

b)

x	3	5	7	9	11
$f(x)$	21	35	49	63	77

Os estudantes devem identificar quais funções representadas são diretamente proporcionais e escrever a lei de formação dessas funções.

a) $f(x)$ não é proporcional a x, pois:

$$\frac{15}{1} \neq \frac{20}{2} \neq \frac{25}{3} \neq \frac{30}{4} \neq \frac{5}{35}$$

Utilizando os dados do quadro, escrevemos a lei de formação da função f.

$f(1) = 15 \Rightarrow a \cdot 1 + b = 15 \Rightarrow a + b = 15$

$f(2) = 20 \Rightarrow a \cdot 2 + b = 20 \Rightarrow 2a + b = 20$

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b = 15 \\ 2a + b = 20 \end{cases}$$

Da primeira igualdade, temos: $a = 15 - b$.

Substituindo esse valor na segunda igualdade, temos:

$2 \cdot (15 - b) + b = 20 \Rightarrow b = 10$

Logo, $a = 15 - b = 15 - 10 = 5$.

E, portanto, $f(x) = 5x + 10$.

b) $f(x)$ é proporcional a x, pois:

$$\frac{21}{3} = \frac{35}{5} = \frac{49}{7} = \frac{63}{9} = \frac{77}{11} = 7$$

Utilizando os dados do quadro, escrevemos a lei de formação da função f.

$f(3) = 21 \Rightarrow a \cdot 3 + b = 21 \Rightarrow 3a + b = 21$

$f(5) = 35 \Rightarrow a \cdot 5 + b = 35 \Rightarrow 5a + b = 35$

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3a + b = 21 \\ 5a + b = 35 \end{cases}$$

Da primeira igualdade, temos $b = 21 - 3a$.

Substituindo esse valor na segunda igualdade, temos:

$5a + (21 - 3a) = 35 \Rightarrow a = 7$

Logo, $b = 21 - 3a = 21 - 3 \cdot 7 = 0$.

Portanto, $f(x) = 7x$.

Responda sempre no caderno.

9. d) Consulte a resposta neste manual.

6. Reúna-se com um colega para resolver a questão a seguir.

Determine os valores de a e b na lei $f(x) = ax + b$ de uma função constante, em que $f(1) = 2$, e obtenha o zero dessa função, caso exista. **$a = 0$; $b = 2$; a função não tem zero.**

7. Considere a função $f(x) = px^2 - 3x + p$.

a) Determine o valor de p, sabendo que f é uma função afim. **$p = 0$**

b) Determine o zero de f. **0**

c) Construa o gráfico de f. **Consulte a resposta neste manual.**

8. O zero de uma função afim g é 1,5 e o valor dessa função para $x = 1$ é 5.

a) Determine a lei de g e seus coeficientes.

b) Calcule $g(-3)$. **45**

c) Obtenha o valor de x tal que $g(x) = 20$. **−0,5**

d) Classifique essa função em constante, crescente ou decrescente. **Decrescente.**

8. a) $g(x) = -10x + 15$; $a = -10$ e $b = 15$.

9. Considere a função h dada pela lei:

$$h(x) = (x + 1)^2 - (x - 1)^2$$

a) Determine o valor da função h para $x = 0$ e $x = 1$. **0; 4**

9. c) $a = 4$; $b = 0$.

b) Desenvolva a lei de h e verifique se ela é uma função afim. **$h(x) = 4x$. É uma função afim.**

c) Determine os valores dos coeficientes de h.

d) Construa o gráfico da função h.

e) A função h é crescente, decrescente ou constante? Por quê? **Crescente, pois $a > 0$.**

10. Considere uma função afim f dada por $f(x) = ax + b$. **a) O ponto de intersecção do gráfico com o eixo y.**

a) Conhecendo o valor de b, o que é possível determinar na representação gráfica de f?

b) Conhecendo o valor de a, o que é possível afirmar sobre a função f?

c) Conhecendo o zero de f, o que é possível determinar em seu gráfico?

11. Considere as seguintes leis:

$f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = x + 12$

Determine as coordenadas do ponto do plano cartesiano em que as representações gráficas das funções f e g se intersectam.

Dica: Represente as duas funções no mesmo plano cartesiano ou resolva a equação $f(x) = g(x)$. **(15, 27)**

12. Relacione as leis de funções lineares dadas a seguir com seus gráficos e estude o sinal de cada uma delas.

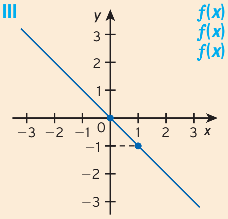
I. $f(x) = \frac{1}{2}x$

II. $f(x) = -3x$

III. $f(x) = -x$

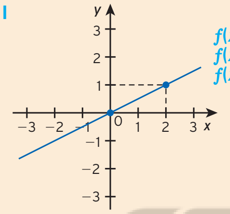
IV. $f(x) = 5x$

a) **III**



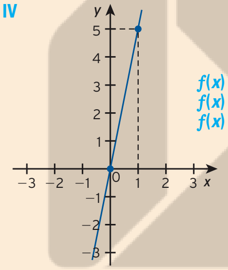
$f(x) = 0$, para $x = 0$
$f(x) > 0$, para $x < 0$
$f(x) < 0$, para $x > 0$

b) **I**



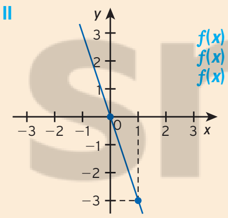
$f(x) = 0$, para $x = 0$
$f(x) > 0$, para $x > 0$
$f(x) < 0$, para $x < 0$

c) **IV**



$f(x) = 0$, para $x = 0$
$f(x) > 0$, para $x > 0$
$f(x) < 0$, para $x < 0$

d) **II**



$f(x) = 0$, para $x = 0$
$f(x) > 0$, para $x < 0$
$f(x) < 0$, para $x > 0$

10. b) Se a função é crescente ($a > 0$), decrescente ($a < 0$), ou constante ($a = 0$).
c) O ponto de intersecção do gráfico com o eixo x.

249

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Aprendi a observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis?
- Consigo determinar valores que uma função pode assumir?
- Consigo analisar representações gráficas de funções?
- Aprendi a representar funções graficamente e analisar o gráfico de uma função?
- Sei determinar quais são os coeficientes de uma função afim?
- Consigo determinar a lei de formação de uma função afim, a partir de um gráfico?
- Consigo diferenciar os casos específicos de função afim, como função linear, função identidade e função constante?
- Compreendi o significado e sei determinar o valor do zero de uma função afim?
- Consigo diferenciar uma função crescente de uma função decrescente?
- Aprendi a fazer estudo de sinal de uma função afim?
- Compreendi a relação entre a proporcionalidade e a função afim?
- Procurei esclarecer minhas dúvidas com os colegas e o professor?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
1 e 9.

Competências específicas de Matemática
2, 5 e 6.

Habilidades

(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

(EF09MA21) Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.

(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.

(EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

UNIDADE 7

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

SOBRE A UNIDADE

Nesta unidade, serão desenvolvidas as habilidades referentes à unidade temática Probabilidade e Estatística. O trabalho com essas habilidades visa tornar os estudantes aptos a coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em contextos diversos e, também, torná-los capazes de se posicionar criticamente, fazer previsões e tomar decisões adequadas a cada situação.

O principal objetivo do primeiro capítulo é ampliar e aprofundar o pensamento probabilístico trabalhado em anos anteriores e que, por meio de atividades, os estudantes possam confrontar os resultados obtidos em seus experimentos com a probabilidade teórica.

É importante que esse estudo não se baseie na memorização e na aplicação de fórmulas. Os estudantes devem compreender os dados da situação-problema e atribuir significado aos conteúdos.

No segundo capítulo, amplia-se e aprofunda-se o estudo com medidas de tendência central e medidas de dispersão. São desenvolvidas também atividades para que os estudantes escolham o gráfico mais adequado para apresentar um conjunto de dados, bem como planejar pesquisas estatísticas e analisá-las utilizando as medidas de tendência central e produzir relatórios que apresentem tabelas e gráficos construídos com ou sem auxílio de planilha eletrônica. É feito um trabalho que visa ajudar os estudantes a identificar e analisar gráficos divulgados pela mídia, a fim de apontar elementos que possam induzir a interpretações equivocadas.

CAPÍTULO 1
Probabilidade

CAPÍTULO 2
Estatística

Abramova Elena/Shutterstock.com/ID/BR

← Representação artística dos continentes utilizando alimentos.

PRIMEIRAS IDEIAS

Segundo os dados da Organização das Nações Unidas para a Alimentação e a Agricultura (FAO), o número de pessoas que passam fome no Brasil havia se estagnado de 2008 a 2017, correspondendo a menos de 2,5% da população total. Em 2018, a fome no mundo esteve em ascensão novamente. Então, a FAO lançou a campanha "Um mundo #fomezero para 2030 é possível". Ainda assim, em 2020, a fome mundial passou por mais um agravamento dramático, provavelmente em consequência da covid-19. Naquele ano, mais de 30% da população global não tinha acesso à alimentação adequada.

1. Como você imagina que esses dados foram obtidos? Converse com os colegas e o professor.
2. Pesquise gráficos que representem a evolução da fome no mundo e no Brasil. Faça uma comparação entre eles.
3. Como podemos ser solidários com as pessoas que passam fome para ajudar a reduzir esses índices?

PRIMEIRAS IDEIAS

- Explore com os estudantes a imagem de abertura e, em seguida, leia o texto promovendo as discussões em torno das perguntas.
- Verifique se os estudantes já ouviram falar da FAO. Caso não tenham conhecimento, explique a eles que a FAO é a Organização das Nações Unidas para a Alimentação e a Agricultura, que trabalha no combate à fome e à pobreza por meio da melhoria da segurança alimentar e do desenvolvimento agrícola.
- Explique que a campanha "Um mundo #fomezero para 2030 é possível" foi lançada para sensibilizar a sociedade sobre a importância de ações de combate à fome e ao desperdício de alimentos e para a necessidade de desenvolvimento de uma agricultura mais sustentável.
- Explore o texto fazendo algumas perguntas: Qual a importância de organizações desse tipo? Qual a importância dos dados que o texto traz? Você já participou de alguma campanha de combate à fome ou de conscientização em relação ao desperdício de alimentos?
- O contexto apresentado nessas páginas pode servir de ponto de partida para um trabalho que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09GE14** [Elaborar e interpretar gráficos de barras e de setores, mapas temáticos e esquemáticos (croquis) e anamorfoses geográficas para analisar, sintetizar e apresentar dados e informações sobre diversidade, diferenças e desigualdades sociopolíticas e geopolíticas mundiais.] do componente curricular Geografia.

RESPOSTAS

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que as informações foram obtidas por meio de pesquisas. Explore a ideia que os estudantes têm de como é feita uma pesquisa. Pergunte a eles se essa pesquisa foi feita em algum lugar específico. Informe-os de que a fonte de pesquisa dos dados do texto foi o *site* oficial da FAO, disponível em: https://www.fao.org/brasil/noticias/detail-events/pt/c/1415747/ (acesso em: 4 ago. 2022).
2. Resposta pessoal. Traga também gráficos para a sala de aula e explore os que os estudantes trouxeram, ajudando-os na comparação dos dados entre diferentes países.
3. Resposta pessoal. Explore as respostas dos estudantes frisando a importância de campanhas como a mencionada no texto e o que eles poderiam fazer para participar de alguma iniciativa parecida.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Experimento aleatório, espaço amostral e eventos.
- Probabilidade condicional.
- Eventos dependentes e independentes.

Objetivos

- Determinar o número de elementos de um espaço amostral e de um evento.
- Calcular a probabilidade de um evento acontecer.
- Calcular probabilidade condicional.
- Identificar eventos independentes e eventos dependentes, bem como calcular a probabilidade de ocorrência desses eventos.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo de probabilidade, avançando para analisar a ideia de probabilidade condicional, o que amplia o raciocínio probabilístico e a capacidade de realizar inferências de fenômenos e resolver problemas reais do cotidiano.

EXPERIMENTO ALEATÓRIO, ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTOS

- Se julgar oportuno, retome com os estudantes os conceitos de experimento aleatório, evento, espaço amostral, espaço amostral equiprovável, evento impossível e evento certo.
  - Situações em que os resultados não podem ser previstos são chamadas de experimentos aleatórios.
  - Evento é um acontecimento relacionado a um experimento aleatório.
  - O conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado espaço amostral.
  - Um espaço amostral em que cada um de seus elementos tem a mesma chance de ocorrer é chamado espaço amostral equiprovável.
  - Em um experimento aleatório, um evento que não tem a possibilidade de ocorrer é denominado evento impossível, e um evento em que se tem total certeza de sua ocorrência é chamado evento certo.

Capítulo 1

PROBABILIDADE

Para compreender os conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes tenham noção do conceito de experimento aleatório, espaço amostral, eventos e probabilidade.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

Uma livraria organizou um concurso de poesias com intuito de descobrir novos escritores. As composições dos participantes serão publicadas no *site* da livraria e as duas mais votadas serão as vencedoras.

Como prêmio, o 1º colocado ganhará uma viagem de uma semana com tudo pago. O destino da viagem será decidido por sorteio.

Em uma urna contendo 20 cartões com nomes de cidades diferentes no Brasil, o 1º colocado vai retirar um cartão. O nome da cidade que sair no cartão será o destino da viagem.

Qual será a cidade sorteada pelo ganhador do concurso?

Situações como essa são chamadas de **experimentos aleatórios**, pois não é possível determinar, com exatidão, qual será o resultado desse sorteio.

↓ O uso de papéis para realizar sorteios é bastante comum, por exemplo, em sorteios de amigo-secreto.

Westend61 GmbH/Alamy/Fotoarena

252

OUTRAS FONTES

Woodward, E.; Hoehn, L. Probabilidade na geometria no segundo grau. *In*: Lindquist, M. M.; Shulte, A. P. (org.). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual, 1994. p. 214-215.

Esse artigo aborda a aplicação da probabilidade no estudo da Geometria, por meio de problemas.

Apesar de não sabermos com exatidão qual será o resultado desse sorteio, podemos calcular a probabilidade de sortear o nome de uma cidade.

Imagine que, na situação do sorteio, foram colocados na urna os seguintes cartões:

Fortaleza (CE)	Maceió (AL)	Jaciara (MT)	Mateiros (TO)
Olinda (PE)	Morretes (PR)	Parnaíba (PI)	São Luís (MA)
Ouro Preto (MG)	Holambra (SP)	Rio das Flores (RJ)	Vitória (ES)
Itacaré (BA)	João Pessoa (PB)	Porto Velho (RO)	Itajaí (SC)
Gramado (RS)	Bonito (MS)	Rio Branco (AC)	Parintins (AM)

João Picoli/ID/BR

Esses cartões com os nomes das cidades são todas as possibilidades de escolha, ou seja, eles representam o **espaço amostral** do sorteio.

Usualmente, utilizamos a letra S para representar o espaço amostral. Então, nessa situação, temos:

S = {Fortaleza, Maceió, Jaciara, Mateiros, Olinda, Morretes, Parnaíba, São Luís, Ouro Preto, Holambra, Rio das Flores, Vitória, Itacaré, João Pessoa, Porto Velho, Itajaí, Gramado, Bonito, Rio Branco, Parintins}

Vamos imaginar que Sarah tenha sido a vencedora do concurso e gostaria de viajar para uma cidade do Norte. Sortear o nome de uma cidade da Região Norte é um **evento** relacionado a esse experimento aleatório.

Usando a letra E para representar o evento "sortear o nome de uma cidade da Região Norte", podemos descrever os elementos desse evento da seguinte maneira:

E = {Mateiros, Porto Velho, Rio Branco, Parintins}

Como todos os resultados têm a mesma chance de serem sorteados, podemos calcular a chance de ocorrência desse evento escrevendo uma razão entre o número de resultados favoráveis ao evento e o número de resultados possíveis. Essa razão é chamada de **probabilidade**.

$$\text{Probabilidade } (E) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Assim, a probabilidade de Sarah sortear uma cidade da Região Norte é $\frac{4}{20}$ ou $\frac{1}{5}$, que corresponde a 20%.

Rubens Chaves/Pulsar Imagens

Vitórias-régias em lago no Parque Zoobotânico do Museu Paraense Emílio Goeldi, Belém (PA). Foto de 2019.

- Explore mais a situação apresentada nesta dupla de páginas, pedindo aos estudantes que calculem outras probabilidades relacionadas ao espaço amostral do sorteio. Por exemplo, pode-se perguntar qual é a probabilidade de ser sorteada uma cidade cujo nome comece com a letra M. Nesse caso, usando a letra M para representar o evento "sortear o nome de uma cidade que começa com a letra M", podemos escrever os elementos desse evento:

  M = {Maceió, Mateiros, Morretes}

  Assim, a probabilidade de ocorrência desse evento é dada por:

  $$P(M) = \frac{3}{20}$$

  Então, a probabilidade de sortear o nome de uma cidade com a letra M é $\frac{3}{20}$ ou 15%.

  Outra pergunta que pode ser feita é: Qual é a probabilidade de ser sorteada uma cidade que não seja da Região Norte nem da Região Nordeste? Nesse caso, os elementos desse evento são: {Jaciara, Morretes, Ouro Preto, Holambra, Rio das Flores, Vitória, Itajaí, Gramado, Bonito}. A probabilidade de ocorrência desse evento é dada por: $\frac{9}{20}$. Então, a probabilidade de sortear uma cidade que não seja da Região Norte nem da Região Nordeste é $\frac{9}{20}$ ou 45%.

PROBABILIDADE CONDICIONAL

- Antes de iniciar o trabalho com os conceitos propostos nesta página, pergunte aos estudantes o que eles entendem por probabilidade condicional.
  Espera-se que eles percebam que a probabilidade condicional é a probabilidade de ocorrer um evento condicionado à ocorrência de outro evento.
- Acompanhe com os estudantes as situações dadas, certificando-se de que eles compreenderam o que é proposto em cada caso e qual é a condição.
- Por ser o primeiro contato dos estudantes com probabilidade condicional, optamos por fazer um trabalho sem o uso de fórmulas, somente com a restrição do espaço amostral.

João Picoli/ID/BR

Probabilidade condicional

Observe no quadro a seguir a quantidade de estudantes matriculados em cada modalidade esportiva em uma escola. Cada estudante está matriculado em somente uma modalidade.

	Natação	Futebol	Atletismo	Total
Sexo feminino	15	10	15	**40**
Sexo masculino	5	30	25	**60**
Total	**20**	**40**	**40**	**100**

Agora, considerando esse quadro, vamos estudar dois casos.

- **1º caso:** Sorteando-se ao acaso um estudante desse grupo, qual é a probabilidade de ele praticar atletismo, sabendo que é do sexo feminino?
  Para responder a essa questão, precisamos verificar, entre os estudantes do sexo feminino, quantos praticam atletismo. Dessa forma, temos os eventos:

  A: Ser do sexo feminino e B: Praticar atletismo

  Logo, a probabilidade de sortear um estudante que pratica atletismo, sabendo que ele é do sexo feminino, é dada por:

  número de resultados favoráveis

  $$P(B \mid A) = \frac{15}{40}$$

  Lemos: "Probabilidade de B sabendo que ocorreu A".

  número de resultados possíveis

- **2º caso:** Sorteando-se, ao acaso, um estudante desse grupo, qual é a probabilidade de ele ser do sexo masculino, sabendo que ele pratica natação?
  Precisamos verificar quantos estudantes, entre os que praticam natação, são do sexo masculino. Dessa forma, temos os eventos:

  C: Praticar natação e D: Ser do sexo masculino

  Logo, a probabilidade de sortear um estudante do sexo masculino, sabendo que ele pratica natação, é dada por:

  $$P(D \mid C) = \frac{5}{20}$$

Eventos independentes e eventos dependentes

Eventos diferentes podem estar relacionados ao mesmo experimento aleatório. Como veremos a seguir, dois eventos podem ser classificados como independentes ou dependentes.

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Camila estava brincando com dois dados: um azul e um vermelho. Primeiro, ela lançou o dado azul e, depois, o vermelho.

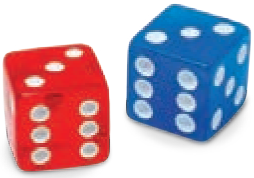
Sabendo que Camila obteve 2 pontos no dado azul, qual é a probabilidade de ela ter obtido 6 pontos no dado vermelho?

Vamos considerar os eventos:

A: Obter 2 no dado azul e B: Obter 6 no dado vermelho

O quadro a seguir apresenta os possíveis resultados para o lançamento de dois dados. Observe.

		Dado azul					
		1	2	3	4	5	6
Dado vermelho	1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
	2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
	3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
	4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
	5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
	6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)



Tim Grist Photography/Moment/Getty Images

Desses resultados, os favoráveis ao evento B estão na última linha do quadro.

Assim, dos 36 possíveis resultados, 6 são favoráveis ao evento B. Portanto, a probabilidade da ocorrência do evento B é:

$$P(B) = \frac{6}{36} \simeq 0{,}167 = 16{,}7\%$$

Agora, vamos calcular a probabilidade de ocorrer o evento B, sabendo que ocorreu o evento A.

Considerando que o evento A (obter 2 no dado azul) já aconteceu, temos as seguintes possibilidades para a ocorrência do evento B: (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5) e (2, 6). Desses resultados, o único resultado favorável ao evento B é (2, 6).

Assim, dos 6 resultados possíveis, 1 é favorável ao evento B. Portanto, a probabilidade da ocorrência do evento B, dado que o evento A ocorreu, é:

$$P(B|A) = \frac{1}{6} \simeq 0{,}167 = 16{,}7\%$$

Observe que, nesse caso, $P(B) = P(B|A)$.

Considerando dois eventos A e B, se a ocorrência de um deles não influencia na chance de ocorrência do outro, eles são ditos **eventos independentes**.

Sejam A e B dois eventos de um mesmo experimento aleatório, temos que A e B são eventos independentes se e somente se:

$$P(B) = P(B|A)$$

OBSERVAÇÃO

Considerando dois eventos A e B relacionados ao mesmo experimento aleatório, se A é independente de B, então B também é independente de A.

Situação 2

Jéssica e Tiago estão brincando de jogar dados. Cada um deve lançar dois dados, um amarelo e outro verde, e adicionar os pontos obtidos. Aquele que obtiver a maior soma de pontos ganha a rodada.

- Observe se os estudantes compreenderam que, considerando dois eventos A e B, se a ocorrência de um deles não influencia a chance de ocorrência do outro, dizemos que os eventos A e B são independentes. Assim, A e B são eventos independentes de um mesmo experimento aleatório se e somente se:

$$P(B) = P(B | A)$$

- Comente com os estudantes que a igualdade $P(A) = P(A | B)$ também comprova que os eventos A e B são independentes.

- Observe se os estudantes compreenderam que, considerando dois eventos A e B, se a ocorrência de um deles influencia na chance de ocorrência do outro, dizemos que os eventos A e B são dependentes.
- Explore mais a atividade **1** com os estudantes, perguntando, depois de eles resolverem o item **a**, qual seria a probabilidade de o número sorteado ser ímpar. Espera-se que eles percebam que a probabilidade é a mesma de se sortear um número par, pois há a mesma quantidade de números pares e ímpares entre 1 e 30.

  Observe se os estudantes utilizam o número de elementos dos espaços amostrais dos itens **a** e **c** para calcular a probabilidade pedida no item **d**.
- Na atividade **2**, se julgar oportuno peça aos estudantes que elaborem um quadro para organizar os dados do problema. Uma possibilidade é a mostrada a seguir:

	Meninas	Meninos	Total
Manhã	300	200	500
Tarde	50	50	100
Noite	100	100	200
Total	450	350	800

Observe se os estudantes percebem a diferença entre o cálculo da probabilidade dos itens **a** e **b**, já que ambos pedem o cálculo da probabilidade de o estudante estudar no período da tarde. Espera-se que eles percebam que no item **b** há a condição de que o estudante seja uma menina e que, portanto, trata-se do cálculo de uma probabilidade condicional.


de-n-i-s/Shutterstock.com/ID/BR

Após lançar os dois dados, Jéssica obteve a soma 8. Sabendo que Tiago obteve 5 pontos no lançamento do dado amarelo, qual é a probabilidade de ele ganhar a rodada?

Vamos considerar os eventos:

A: Obter 5 no dado amarelo e B: Obter soma de pontos maior que 8

O espaço amostral desses eventos, considerando que o dado amarelo foi lançado antes do dado verde, é:

S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

Desses resultados, os favoráveis ao evento B são: (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5) e (6, 6).

Assim, dos 36 possíveis resultados, 10 são favoráveis ao evento B. Portanto, a probabilidade da ocorrência do evento B é:

$$P(B) = \frac{10}{36} \simeq 0{,}278 = 27{,}8\%$$

Agora, vamos calcular a probabilidade de ocorrer o evento B, sabendo que ocorreu o evento A.

Considerando que o evento A (obter 5 no dado amarelo) já aconteceu, temos as seguintes possibilidades para a ocorrência do evento B: (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5) e (5, 6).

Desses resultados, os favoráveis ao evento B são: (5, 4), (5, 5) e (5, 6).

Assim, dos 6 resultados possíveis, 3 são favoráveis ao evento B. Portanto, a probabilidade da ocorrência do evento B, dado que o evento A ocorreu, é:

$$P(B\,|\,A) = \frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%$$

Como $P(B) \neq P(B\,|\,A)$, dizemos que A e B não são eventos independentes.

Considerando dois eventos A e B, se a ocorrência de um deles influencia a chance de ocorrência do outro, eles são ditos **eventos dependentes**.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Sorteando um número natural de 1 a 30:

a) qual é a probabilidade de o número sorteado ser par? **$\frac{15}{30}$ ou 50%**

b) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 3?

c) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 6?

d) qual é a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 6, sabendo que ele é um número par?

2. Uma escola tem 800 estudantes: 200 estudam à noite, 500 estudam de manhã e o restante à tarde. Sabe-se que 200 estudantes da manhã são meninos, metade dos estudantes da tarde são meninos e metade dos estudantes da noite são meninas.

Se escolhermos um estudante dessa escola ao acaso, qual é a probabilidade de:

a) ele ser do período da tarde? **$\frac{100}{800}$ ou 0,125%.**

b) ele estudar à tarde, sabendo que é uma menina? **$\frac{50}{450}$ ou, aproximadamente, 11%.**

1. b) **$\frac{10}{30}$ ou, aproximadamente, 33,3%.** **c)** **$\frac{5}{30}$ ou, aproximadamente, 16,6%.** **d)** **$\frac{5}{15}$ ou, aproximadamente, 33,3%.**

ESTRATÉGIAS DE APOIO – *DIVERSIFICANDO*

É importante que os estudantes entendam o conceito de probabilidade, evitando-se cálculos mecânicos, desprovidos de significado. A atividade proposta a seguir pode ajudar nesse sentido.

Organize a classe em grupos de 4 ou 5 estudantes e proponha uma simulação de uma corrida de cavalos. A corrida será disputada por 12 cavalos numerados de 1 a 12. Cada grupo deve escolher um dos cavalos para apostar nele. A simulação é realizada pelo lançamento de dois dados, cujos valores das faces devem ser adicionados, indicando o cavalo sorteado que "dará um passo à frente dos outros". Esses resultados podem ser registrados em um quadro construído na lousa. O cavalo vencedor precisa dar 30 passos.

Realize a atividade algumas vezes, permitindo aos grupos trocar de aposta a cada páreo. Após algumas rodadas, os estudantes vão perceber que o cavalo 7 é uma boa opção, seguido dos cavalos 6 e 8. Entretanto, o cavalo 1 nunca sai do lugar e os cavalos 2 e 12 provavelmente ficam para trás. É importante incentivar os estudantes a tentar descobrir por que isso acontece.

Veja no quadro a seguir as possibilidades de soma com os números das faces dos dados:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

2. a) $\frac{15}{90}$ **ou, aproximadamente, 16,7%.** **b)** $\frac{75}{90}$ **ou, aproximadamente, 83,3%.**

5. a) $\frac{15}{45}$ **ou, aproximadamente, 33,3%.**

1. Uma caixa contém 10 bolas do mesmo material e tamanho e com a mesma medida de massa, sendo 1 azul, 5 amarelas, 1 preta e 3 vermelhas. Uma bola é retirada dessa caixa ao acaso e observa-se sua cor.

a) Dos resultados possíveis, quantos são favoráveis ao evento "sair uma bola vermelha"? **3 resultados favoráveis.**

b) Qual é a probabilidade de sair uma bola vermelha? $\frac{3}{10}$ **ou 30%**

c) Qual é a probabilidade de sair uma bola amarela? $\frac{5}{10}$ **ou 50%**

d) Qual é a probabilidade de não sair uma bola vermelha? $\frac{7}{10}$ **ou 70%**

2. Para compor cada cartela de um bingo beneficente, foram escolhidos 15 números distintos de 1 a 90. João recebeu uma dessas cartelas.

De uma urna com 90 bolas numeradas de 1 a 90, é sorteada uma bola.

a) Qual é a probabilidade de o número dessa bola estar na cartela de João?

b) Qual é a probabilidade de o número da bola sorteada não estar na cartela de João?

3. Uma urna contém 3 bolas idênticas numeradas de 1 a 3 e outra urna contém 5 bolas idênticas numeradas de 1 a 5. Ao retirar aleatoriamente uma bola de cada urna, qual é a probabilidade de a soma dos pontos ser:

Consulte as respostas neste manual.

a) maior que 4?

b) zero?

c) menor ou igual a 2?

d) de 2 a 8?

4. Considere o experimento: lançamento de duas moedas simultaneamente e observação das faces voltadas para cima.

a) Quais são os resultados possíveis?

b) Quantos são os resultados possíveis?

c) Quais são os resultados favoráveis à ocorrência do evento *A* "sair pelo menos 1 cara"?

d) Quais são os resultados favoráveis à ocorrência do evento *B* "saírem faces iguais nas duas moedas"?

e) Qual é a probabilidade de ocorrer o evento *B*, sabendo que o evento *A* ocorreu?

f) Os eventos *A* e *B* são dependentes ou independentes?

Consulte as respostas neste manual.

5. Em um depósito, existem ao todo 100 máquinas de duas marcas: Max e Nox. Algumas delas são novas e outras, usadas. Observe a distribuição das máquinas no quadro a seguir.

Máquinas no depósito

Marca	Nova	Usada
Max	20	15
Nox	35	30

Dados fornecidos pelo dono da empresa.

a) Se um funcionário pegar uma das máquinas usadas, qual é a probabilidade de essa máquina ser da marca Max?

b) Verifique se os eventos "escolher uma máquina usada" e "escolher uma máquina da marca Max" são independentes. **Não.**

6. Jogando dois dados comuns de cores diferentes e observando as faces voltadas para cima, qual é a probabilidade de:

a) saírem dois números cuja soma é par, sabendo que os dois dados apresentaram o mesmo número? **1 ou 100%.**

b) saírem dois números cuja soma é ímpar, sabendo que em um dos dados a face voltada para cima é a de número 3? $\frac{3}{6}$ **ou 50%.**

7. Em uma urna, há 3 bolas azuis e 2 bolas pretas, todas do mesmo material e tamanho e com a mesma medida de massa. Retira-se uma bola da urna e observa-se sua cor. Depois, essa bola é devolvida para a urna, misturando-a com as outras bolas e é feita uma segunda retirada, observando a cor dessa bola.

a) Quantas são as possibilidades de obter uma bola preta na primeira retirada? E na segunda retirada? **2 possibilidades; 2 possibilidades.**

b) Qual é a probabilidade de sair uma bola azul na primeira retirada? $\frac{3}{5}$ **ou 60%.**

c) Qual é a probabilidade de sair uma bola preta na segunda retirada? $\frac{2}{5}$ **ou 40%.**

d) Sabendo que na primeira retirada saiu uma bola azul, qual é a probabilidade de sair uma bola preta na segunda retirada? $\frac{2}{5}$ **ou 40%.**

e) Os eventos "sair uma bola azul na primeira retirada" e "sair uma bola preta na segunda retirada" são independentes? **Sim.**

Por esse quadro de possibilidades é possível observar, por exemplo, que o cavalo 1 nunca será sorteado e que a probabilidade de o cavalo 7 ser sorteado é $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, que é a maior entre todos os outros possíveis valores.

Feita a atividade, comente de maneira geral com a turma sobre jogos de azar, como é o caso das apostas no turfe (corrida de cavalos), em que se pode ganhar ou perder dinheiro. Uma boa maneira de não perder dinheiro em jogos de azar é simplesmente não jogar; assim, é certo que se deixa de perder o dinheiro que seria apostado. O turfe chegou ao Brasil em meados do século XX; a lei federal que dispõe sobre essa atividade é de dezembro de 1984.

Caso os estudantes tenham dificuldade em calcular probabilidades condicionais, peça-lhes que escrevam o número de elementos de cada evento e o número de elementos do espaço amostral antes de calcular as probabilidades. Em alguns casos, pode-se até escrever quais são os elementos do evento e do espaço amostral.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- No item **d** da atividade **1**, espera-se que os estudantes percebam que o evento "não sair uma bola vermelha" abrange o sorteio de uma bola de qualquer outra cor.
- No item **a** da atividade **6**, observe se os estudantes perceberam que esse evento é um evento certo, ou seja, tem 100% de chance de acontecer.

RESPOSTAS

3. a) $\frac{9}{15}$ ou 60%

b) 0 ou 0%

Verifique se os estudantes percebem que esse é um evento impossível, ou seja, não tem a probabilidade de ocorrer.

c) $\frac{1}{15}$ ou, aproximadamente, 6,7%.

d) 1 ou 100%

Verifique se os estudantes percebem que este é um evento certo.

4. a) *S* = {(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa)}

b) 4 resultados possíveis.

c) *A* = {(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara)}

Verifique se os estudantes entenderam que "sair pelo menos uma cara" é a mesma coisa que "sair no mínimo uma cara", ou seja, que pode sair uma ou duas caras.

d) *B* = {(cara, cara); (coroa, coroa)}

e) $\frac{1}{3}$ ou, aproximadamente, 33,3%.

f) *A* e *B* são eventos dependentes.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas permitem que os estudantes reconheçam eventos dependentes e independentes em experimentos aleatórios e calculem a probabilidade da ocorrência desses eventos, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA20**.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Medidas de tendência central: média, moda e mediana.
- Medidas de dispersão: amplitude, desvio, variância e desvio-padrão.
- Análise de tabelas e gráficos estatísticos.
- Etapas e elementos de uma pesquisa estatística.

Objetivos

- Calcular e interpretar as medidas de tendência central: média, moda e mediana.
- Calcular e interpretar as medidas de dispersão: amplitude, desvio, variância e desvio-padrão.
- Utilizar planilhas eletrônicas para calcular as medidas de tendência central e de dispersão.
- Analisar tabelas e gráficos estatísticos utilizando as medidas de tendência central e de dispersão.
- Construir tabelas e gráficos com o auxílio de planilha eletrônica.
- Analisar gráficos apresentados pela mídia, verificando possíveis erros de construção ou de interpretação.
- Compreender e aplicar as etapas de uma pesquisa estatística.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo de medidas de tendência central e de dispersão, determinando esses valores também com o suporte de planilhas eletrônicas, analisando ainda gráficos divulgados pela mídia. Essa oportunidade é fundamental para que eles tenham subsídios para compreender e utilizar tecnologias digitais para modelar e resolver problemas, validando estratégias e resultados, contribuindo, assim, para a formação de cidadãos críticos e autônomos.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

- A fotografia apresentada nessa página mostra um grupo musical em um festival. Aproveite a oportunidade para conhecer as preferências musicais dos estudantes, compreendendo as influências artísticas que eles recebem, de que maneira consomem esse conteúdo e se produzem também suas próprias composições. Com a utilização cada vez mais presente das mídias sociais e de tecnologias digitais, os adolescentes e jovens podem não apenas receber esse tipo de conteúdo, mas também produzir, criar e compartilhar pelas redes sociais, mostrando seus talentos, sentimentos e opiniões.
- Incentive os estudantes a observar atentamente na imagem de abertura a estrutura de uma comunidade retratada de maneira lúdica em um *show* de *rock*, as vestimentas, os passos de dança, os instrumentos, a pipa, etc. Espera-se que eles remetam esses elementos aos de uma comunidade e tentem socializar a finalidade de expressar a arte dessa maneira, ou seja, a mensagem a ser passada à sociedade. Informe à turma que esse projeto tem a função social de ensinar as diversas

Capítulo

2 ESTATÍSTICA

Para que os estudantes compreendam os conteúdos deste capítulo, é importante que eles saibam o que são e como obter as medidas de tendência central e de dispersão. Além disso, é importante que eles tenham familiaridade com diversos tipos de gráfico.

Medidas de tendência central

Você já sabe que em Estatística é comum estudar e analisar dados que são apresentados por meio de gráficos e de tabelas.

Nessas situações, muitas vezes encontramos diversos números que representam e caracterizam determinado conjunto de dados. Entre todos os dados podemos obter valores que representam, de algum modo, todo o conjunto. Esses valores são chamados de **medidas de tendência central**.

Neste capítulo, vamos retomar e aprofundar os conhecimentos sobre as principais medidas de tendência central: média, moda e mediana.

Para começar, considere a situação a seguir.

No primeiro semestre do ano passado, para incentivar a cultura em uma cidade, uma empresa quis patrocinar os grupos teatrais que menos se apresentaram em um período de dois meses. Os grupos que tivessem menos que a média do número de apresentações dos 10 grupos avaliados receberiam o patrocínio.

↓ Apresentação do grupo Nós do Morro no Espaço Favela durante o último dia do Rock in Rio 2019, no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2019.

Fernanda Balster/Fotoarena

258

OUTRAS FONTES

Equipe COM-OBMEP. Medidas de tendência central – Passando a limpo as ideias. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/tratamento-da-informacao-medidas-de-tendencia-central/medidas-de-tendencia-central-passando-a-limpo-as-ideias/. Acesso em: 4 ago. 2022.

Esse artigo apresenta um texto simples para tratar das medidas de tendência central, além de indicar um vídeo que mostra como essas medidas auxiliam no resumo de informações e na tomada de decisões com base em dados amostrais.

Na tabela a seguir, é possível observar a quantidade de apresentações que cada um desses grupos realizou nos dois meses considerados.

Quantidade de apresentações de cada grupo teatral em dois meses										
Grupo teatral	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Quantidade de apresentações	6	6	6	5	4	7	11	10	9	6

Dados fornecidos pela organização do concurso.

Agora, vamos estudar a média desse conjunto de dados para verificar quais grupos receberam patrocínio.

- **Média aritmética (*MA*)**

  A média aritmética de um conjunto de dados corresponde ao quociente da adição de todos os números do grupo pela quantidade de números do grupo. Assim, temos:

$$MA = \frac{6 + 6 + 6 + 5 + 4 + 7 + 11 + 10 + 9 + 6}{10} = \frac{70}{10} = 7$$

  Logo, os grupos fizeram, em média, 7 apresentações no período considerado.

  Como os grupos teatrais A, B, C, D, E e J fizeram menos apresentações que a média, eles receberam patrocínio da empresa.

Ainda recorrendo a essa situação, vamos estudar como podem ser determinadas a moda e a mediana de um conjunto de dados.

- **Moda (*Mo*)**

  A moda de um conjunto de dados corresponde ao valor mais frequente nesse conjunto de dados. Assim, temos:

$$Mo = 6$$

  Portanto, podemos concluir que boa parte dos grupos fez 6 apresentações no período considerado.

- **Mediana (*Md*)**

  A mediana é o valor que ocupa a posição central de uma amostra, quando os dados são organizados em ordem crescente ou decrescente. Colocando os dados em ordem crescente e identificando a posição central, temos:

$$\underbrace{4 \quad 5 \quad 6 \quad 6}_{\text{4 termos}} \quad \underbrace{6}_{\text{5ª posição}} \quad \underbrace{6}_{\text{6ª posição}} \quad \underbrace{7 \quad 9 \quad 10 \quad 11}_{\text{4 termos}}$$

  Como há 10 termos, os termos centrais são os que ocupam a 5ª e a 6ª posições. Logo, nesse caso, a mediana é a média aritmética de 6 e 6.

$$Md = \frac{6 + 6}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

  Portanto, podemos concluir que, no período considerado, o conjunto dos grupos teatrais pode ser dividido em duas partes iguais, ou seja, o número de grupos que fez 6 ou menos apresentações é igual ao número de grupos que fez 6 ou mais apresentações.

manifestações artísticas a pessoas que não têm acesso a elas ou que foram impedidas em virtude de uma estrutura geográfica ou social imposta durante séculos de exclusão e, assim, revelar novos talentos em diversos segmentos artísticos. Essa conversa promove positivamente a imagem de afrodescendentes em diferentes trabalhos, profissões e espaços de poder, valorizando sua visibilidade e seu protagonismo social.

- Peça aos estudantes que expliquem os significados de média, moda e mediana de um conjunto de dados. Essa sondagem é importante para verificar os conhecimentos prévios deles e, se necessário, retomar alguns desses conceitos. Pergunte também se eles sabem explicar qual é a necessidade de calcular essas medidas.
- É fundamental que, ao final deste capítulo, os estudantes tenham compreendido que a média é uma medida importante porque incorpora o valor de cada elemento do conjunto de dados. Em alguns casos, porém, ela pode dar uma imagem distorcida dos dados, pois é afetada por valores discrepantes (altos ou baixos).
- Além disso, os estudantes devem compreender que a mediana difere da média porque se refere ao valor numérico cuja posição situa-se na metade da distribuição de todos os dados organizados em ordem crescente ou decrescente e que a moda é o valor que ocorre com maior frequência.
- Aproveite a situação proposta e pergunte aos estudantes: Todos os grupos fizeram 7 apresentações? O que significa a expressão “fazer, em média, 7 apresentações”?
- Questione os estudantes se o valor da média sempre tem de ser um número inteiro e se ele sempre tem de pertencer ao conjunto de dados. Por exemplo, se o grupo A tivesse feito 7 apresentações, qual seria a nova média de apresentações?
- É importante que os estudantes percebam que a moda indica o dado mais frequente no conjunto de dados e que, diferentemente da média, a moda sempre pertence ao conjunto de dados.

  Ainda sobre a moda, pergunte aos estudantes se todas as distribuições precisam ter moda e se pode existir alguma distribuição que tenha mais de uma moda. Se julgar oportuno, comente com eles que a distribuição que não tem moda é chamada amodal; a que tem uma moda, unimodal; a que tem duas, bimodal; e a que tem várias modas, multimodal.
- Ao calcular a mediana, relembre com os estudantes que os dados precisam estar ordenados em ordem crescente ou em ordem decrescente. A mediana é o valor que divide a distribuição ao meio, ou seja, metade da distribuição terá valores menores que a mediana e a outra metade terá valores maiores que a mediana.

- Leia a situação proposta nesta página e, antes do cálculo das medidas de tendência central, pergunte aos estudantes: Qual é a importância de calcular as medidas de tendência central? Será que é necessário sempre calcular as três medidas? Em sua opinião, qual dessas medidas é a mais importante? Por quê?
- Após os questionamentos, explique os cálculos da média, moda e mediana referentes à situação dos salários. Dessa forma, os estudantes poderão perceber que calcular somente a média não é suficiente para analisar a situação, pois ela não representa adequadamente o conjunto de dados.
- Se julgar oportuno, no cálculo da mediana, ordene os valores dos salários na lousa, para que os estudantes consigam compreender como ela foi encontrada. Por exemplo:

		Salário (em R$)
	1ª	2 000
	2ª	3 600
	3ª	3 600
	4ª	3 600
	5ª	3 600
	6ª	3 600
	7ª	3 600
posição central →	8ª	3 600
	9ª	3 600
	10ª	3 600
	11ª	3 600
	12ª	3 600
	13ª	3 600
	14ª	6 000
	15ª	70 000

DE OLHO NA BASE

Compreender quando e como usar as medidas de tendência central para interpretar um conjunto de dados contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA22**.

Agora, vamos analisar outra situação.

Flávio fez um levantamento sobre os salários dos profissionais de uma equipe de basquete. Ele constatou que:

- 12 atletas ganham R$ 3 600,00 cada um;
- o técnico ganha R$ 6 000,00;
- o diretor, R$ 70 000,00;
- e o preparador físico, R$ 2 000,00.

Depois, Flávio estudou a média (*MA*), a moda (*Mo*) e a mediana (*Md*) dos salários desses profissionais.

- Média

$$MA = \frac{12 \cdot 3\,600 + 6\,000 + 70\,000 + 2\,000}{12 + 1 + 1 + 1} = \frac{121\,200}{15} = 8\,080$$

- Moda

  Observando o conjunto de dados, Flávio verificou que o salário mais frequente é R$ 3 600,00, ou seja:

$$Mo = \text{R\$ } 3\,600{,}00$$

- Mediana

  Flávio organizou os dados em ordem crescente e, em seguida, localizou o valor que ocupa a posição central. Como existem 15 posições, o valor central é o que ocupa a 8ª posição, isto é, R$ 3 600,00.

Perceba que a média não representa adequadamente o conjunto dos salários desses funcionários, pois a maioria dos funcionários ganha um salário abaixo da média (R$ 8 080,00). Isso ocorre porque a média é afetada por valores extremos. Já a moda e a mediana funcionaram como bons indicadores para o conjunto de dados considerado.

OBSERVAÇÃO

Há amostras das quais não podemos determinar a moda por não apresentarem valores que se repetem. Há também amostras que apresentam mais de uma moda por terem mais de um valor com a mesma frequência.

Assim, como acabamos de ver, nem sempre é apropriado utilizar apenas uma medida de tendência central para analisar um grupo de dados.

OUTRAS FONTES

SALLA, F. Moda, média e mediana. Quando usar e como interpretar os resultados? *Nova Escola*, 1º dez. 2012. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/3543/moda-media-e-mediana-quando-usar-e-como-interpretar-os-resultados. Acesso em: 4 ago. 2022.

Esse artigo apresenta uma situação em que é possível discutir sobre o cálculo da moda, da média e da mediana mostrando que essas medidas são relevantes, mas não o suficiente.

260

Medidas de dispersão

Além das medidas de tendência central, também podemos estudar um conjunto de dados observando as **medidas de dispersão**. Essas medidas são utilizadas para analisar a variação de um conjunto de dados.

Vamos estudar as medidas de dispersão utilizadas com mais frequência: amplitude, desvio, variância e desvio-padrão.

Acompanhe a situação a seguir.

Tássia precisa decidir entre viajar para a cidade A ou para a cidade B. Ela quer ir para a cidade que apresentar as temperaturas mais regulares.

Veja no quadro a seguir a previsão das temperaturas das duas cidades no período em que Tássia viajará.

	1º dia	2º dia	3º dia	4º dia	5º dia
Cidade A	12 °C	22 °C	13 °C	30 °C	28 °C
Cidade B	18 °C	21 °C	21 °C	23 °C	22 °C

Para saber qual das cidades apresenta as temperaturas mais regulares nesse período, vamos calcular algumas medidas de dispersão.

- **Amplitude** (*A*)

  Para calcular a amplitude de um conjunto de dados, subtraímos seu menor valor de seu maior valor.

  Cidade A:
  $A = 30 - 12 = 18$

  Cidade B:
  $A = 23 - 18 = 5$

  Quanto maior for a amplitude de um conjunto de dados, maior será a dispersão dos dados. Nesse caso, a cidade A apresenta maior variação nas temperaturas, uma vez que 18 °C é maior que 5 °C.

- **Desvio** (*D*)

  Para calcular os desvios, determinamos a diferença entre cada valor do conjunto de dados e a média do conjunto de dados.

  A média das temperaturas na cidade A é dada por:

$$MA = \frac{12 + 22 + 13 + 30 + 28}{5} = \frac{105}{5} = 21$$

  A média das temperaturas na cidade B é dada por:

$$MA = \frac{18 + 21 + 21 + 23 + 22}{5} = \frac{105}{5} = 21$$

  Agora, calculamos os desvios para cada uma das cidades.

  Cidade A:
  $D(12) = 12 - 21 = -9$
  $D(13) = 13 - 21 = -8$
  $D(22) = 22 - 21 = 1$
  $D(28) = 28 - 21 = 7$
  $D(30) = 30 - 21 = 9$

  Cidade B:
  $D(18) = 18 - 21 = -3$
  $D(21) = 21 - 21 = 0$
  $D(21) = 21 - 21 = 0$
  $D(22) = 22 - 21 = 1$
  $D(23) = 23 - 21 = 2$

MEDIDAS DE DISPERSÃO

- Converse com os estudantes sobre o que eles entendem por medidas de dispersão.
- Observe se eles compreenderam que as medidas de dispersão são usadas para estudar a dispersão de um conjunto de dados. São elas: amplitude, desvio, variância e desvio-padrão.
- Acompanhe e analise com os estudantes a situação proposta. Verifique se ficou claro para eles que quanto maior a amplitude de um conjunto de dados, maior será a dispersão dos dados.
- Chame a atenção dos estudantes para o fato de que o desvio mede a diferença entre um dos números de um conjunto e a média aritmética desse conjunto. Portanto, cada um dos números de um conjunto tem um desvio, e esse resultado pode ser diferente para cada um desses elementos.

  Incentive-os a perceber que, quando os valores absolutos dos desvios são grandes, isso indica que os dados são bastante dispersos. Já se os valores absolutos dos desvios forem menores, isso indica pouca dispersão entre os dados.

- Incentive os estudantes a compreender que quanto maior for a variância em um conjunto de dados, mais dispersos eles estarão.
- Ao interpretar o desvio-padrão, é importante ter em conta que ele assume a mesma medida da unidade amostral, ou seja, na situação apresentada seria grau Celsius. Sendo assim, o desvio-padrão da temperatura da cidade A é 7,43 °C e da cidade B, 1,67 °C.
- Um desvio-padrão grande significa que os valores amostrais estão bem distribuídos em torno da média, enquanto que um desvio-padrão pequeno indica que eles estão condensados próximos da média. Em poucas palavras, quanto menor o desvio-padrão, menos disperso será o conjunto de dados e, consequentemente, mais homogêneo.
- Sempre que possível permita que os estudantes utilizem calculadora para realizar os cálculos da variância e do desvio-padrão.

RESPOSTA

1. a) $MA = 161$ cm

$Mo = 161$ cm

$Md = 161$ cm

b) $A = 20$ cm

$V = 27,35$

$DP \simeq 5,23$ cm

c) Resposta pessoal. Espera-se que o texto dos estudantes apresente algumas das ideias a seguir:

A média, a moda e a mediana são iguais a 161 cm, e cada uma delas tem um significado diferente. A média significa que, se todos os estudantes tivessem a mesma medida de altura, ela seria 161 cm. Já a moda ser 161 cm significa que 161 cm é a medida de altura que aparece com maior frequência entre os estudantes. A mediana corresponde ao valor central de um grupo de dados. Nesse caso, significa que metade dos estudantes tem a medida da altura maior ou igual a 161 cm e a outra metade tem medida menor ou igual a 161 cm.

DE OLHO NA BASE

Escrever um texto para descrever a análise dos dados de uma situação como a proposta no item **c** da atividade **1** contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 6**.

Em relação às temperaturas da cidade A, observe que, em valores absolutos, os desvios, em grau Celsius, são grandes (9, 8, 1 ,7 e 9). Isso indica que os dados são bastante dispersos. Já em relação às temperaturas da cidade B, em valores absolutos, os desvios são menores (3, 0, 0 ,1 e 2), o que indica pouca dispersão entre os dados.

- **Variância (V)**

Para determinar a variância de um conjunto de dados, elevamos ao quadrado cada desvio e, depois, calculamos a média aritmética.

Cidade A:

$$\underbrace{(-9)^2}_{81} \quad \underbrace{(-8)^2}_{64} \quad \underbrace{1^2}_{1} \quad \underbrace{7^2}_{49} \quad \underbrace{9^2}_{81}$$

$$V = \frac{81 + 64 + 1 + 49 + 81}{5} = \frac{276}{5} = 55,2$$

Cidade B:

$$\underbrace{(-3)^2}_{9} \quad \underbrace{0^2}_{0} \quad \underbrace{0^2}_{0} \quad \underbrace{1^2}_{1} \quad \underbrace{2^2}_{4}$$

$$V = \frac{9 + 0 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{14}{5} = 2,8$$

Assim como em relação aos desvios, quanto maior for a variância de um conjunto de dados, mais dispersos eles estarão.

- **Desvio-padrão (DP)**

O desvio-padrão de um conjunto de dados corresponde à raiz quadrada da variância desse conjunto de dados.

Cidade A:

$DP = \sqrt{55,2} \simeq 7,43$

Cidade B:

$DP = \sqrt{2,8} \simeq 1,67$

Quanto menor for o desvio-padrão, menos disperso será o conjunto de dados e, consequentemente, mais homogêneo.

Agora, observando os cálculos feitos, para qual das duas cidades Tássia deveria viajar? Converse com os colegas e o professor. **Espera-se que os estudantes respondam que Tássia deveria viajar para a cidade B.**

ATIVIDADE

Responda sempre no caderno.

Consulte as respostas neste manual.

1. A professora de Educação Física dos 9º anos de uma escola fez um levantamento das medidas de altura, em centímetro, de seus estudantes e as registrou no quadro a seguir.

150	161	165	156	162	157	155	161	169	155	164	161	164	165	151	167	156	161	160	170
160	164	161	155	160	170	167	169	170	161	161	155	164	157	162	156	161	167	155	155

Com base nos dados do quadro, faça o que se pede em cada item.

a) Calcule a média, a moda e a mediana desse conjunto de dados.

b) Calcule a amplitude, a variância e o desvio-padrão desse conjunto de dados.

c) Escreva um pequeno texto sobre os resultados que você obteve no item **a**.

Medidas de tendência central e de dispersão na planilha eletrônica

Cristiano é o professor de Matemática de todas as turmas do 9º ano. Ele fez um levantamento das notas que os estudantes obtiveram na última avaliação do 3º bimestre e registrou em uma planilha eletrônica. Veja.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	3,0	5,0	6,0	10,0	7,0	9,5				
2	4,5	5,5	6,5	8,0	7,5	6,5				
3	5,0	6,0	5,0	6,0	8,0	9,0				
4	6,0	6,0	6,5	5,0	9,5	8,5				
5	6,0	7,0	6,5	3,0	10,0	5,5				
6	7,0	6,5	7,5	3,5	7,0	9,0				
7	7,0	8,0	7,5	5,0	6,0	4,5				
8	8,0	7,5	7,5	5,5	7,0	4,5				
9	9,0	9,0	9,0	6,5	6,0	3,0				
10	4,0	6,0	9,5	6,5	8,5	10,0				
11										
12										

Ilustrações: ID/BR

Cristiano queria verificar se a nota média dos estudantes foi menor ou maior que 5,0. Para calcular a média das notas utilizando a planilha eletrônica, ele digitou em uma célula vazia o seguinte comando:

=MÉDIA(A1:F10)

CONT. NÚM — $\mathcal{F}x$ — =MÉDIA(A1:F10)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	3,0	5,0	6,0	10,0	7,0	9,5				
2	4,5	5,5	6,5	8,0	7,5	6,5			**Média**	=MÉDIA(A1:F10)
3	5,0	6,0	5,0	6,0	8,0	9,0				
4	6,0	6,0	6,5	5,0	9,5	8,5				
5	6,0	7,0	6,5	3,0	10,0	5,5				
6	7,0	6,5	7,5	3,5	7,0	9,0				
7	7,0	8,0	7,5	5,0	6,0	4,5				
8	8,0	7,5	7,5	5,5	7,0	4,5				
9	9,0	9,0	9,0	6,5	6,0	3,0				
10	4,0	6,0	9,5	6,5	8,5	10,0				
11										
12										

Depois, ele apertou a tecla *enter*. Veja o resultado que ele obteve.

J2 — $\mathcal{F}x$ — =MÉDIA(A1:F10)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	3,0	5,0	6,0	10,0	7,0	9,5				
2	4,5	5,5	6,5	8,0	7,5	6,5			**Média**	6,7
3	5,0	6,0	5,0	6,0	8,0	9,0				
4	6,0	6,0	6,5	5,0	9,5	8,5				
5	6,0	7,0	6,5	3,0	10,0	5,5				
6	7,0	6,5	7,5	3,5	7,0	9,0				
7	7,0	8,0	7,5	5,0	6,0	4,5				
8	8,0	7,5	7,5	5,5	7,0	4,5				
9	9,0	9,0	9,0	6,5	6,0	3,0				
10	4,0	6,0	9,5	6,5	8,5	10,0				
11										
12										

- Neste tópico, é apresentado o cálculo das medidas de tendência central e das medidas de dispersão em uma planilha eletrônica.
- Estudos mostram que a utilização de planilhas eletrônicas nas aulas de estatística possibilita aprendizagem significativa, pois, além de complementar o estudo da Estatística, possibilita aos estudantes obter as medidas estatísticas de maneira mais dinâmica, propiciando um processo de aprendizagem mais interativo.
- Além de tornar o conteúdo mais significativo, essa ferramenta possibilita que ele seja trabalhado de modo mais interessante, pois as tabelas e os gráficos podem ser construídos com maior facilidade.

- Se houver possibilidade, leve os estudantes para a sala de informática e peça a eles que sigam os passos realizados pelo professor Cristiano na situação apresentada nesta dupla de páginas. É importante que você execute todo o processo proposto no Livro do Estudante com antecedência, pois as instruções apresentadas são genéricas, podendo haver divergências em relação ao *software* disponibilizado pela escola. Assim, organize-se e planeje-se.

DE OLHO NA BASE

Saber como calcular as medidas estatísticas com o auxílio de uma planilha eletrônica contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA22**.

Além disso, saber utilizar planilhas eletrônicas para modelar e resolver problemas do cotidiano favorece o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 5**.

Após obter o valor da média, Cristiano decidiu verificar também o valor da moda e da mediana.

- Para verificar o valor da moda, ele escolheu uma célula vazia, digitou **=MODO(A1:F10)** e, em seguida, apertou a tecla *enter*.
- Para verificar o valor da mediana, ele escolheu outra célula vazia, digitou **=MED(A1:F10)** e, depois, apertou a tecla *enter*.

Observe os resultados obtidos por ele.

J4 ▾ ⋮ × ✓ $\mathcal{F}x$ =MED(A1:F10)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	3,0	5,0	6,0	10,0	7,0	9,5				
2	4,5	5,5	6,5	8,0	7,5	6,5			**Média**	6,7
3	5,0	6,0	5,0	6,0	8,0	9,0			**Moda**	6,0
4	6,0	6,0	6,5	5,0	9,5	8,5			**Mediana**	6,5
5	6,0	7,0	6,5	3,0	10,0	5,5				
6	7,0	6,5	7,5	3,5	7,0	9,0				
7	7,0	8,0	7,5	5,0	6,0	4,5				
8	8,0	7,5	7,5	5,5	7,0	4,5				
9	9,0	9,0	9,0	6,5	6,0	3,0				
10	4,0	6,0	9,5	6,5	8,5	10,0				
11										
12										

Ilustrações: ID/BR

Cristiano concluiu que, se todos os estudantes tivessem tirado a mesma nota nessa prova, ela seria 6,7. Além disso, ele percebeu que metade dos estudantes tirou uma nota menor ou igual a 6,5 e que a nota que os estudantes mais tiraram foi 6,0.

Aproveitando que já estava trabalhando com a planilha eletrônica, Cristiano decidiu verificar algumas medidas de dispersão.

- Para verificar o valor da variância, ele escolheu uma célula vazia, digitou **=VAR(A1:F10)** e, em seguida, apertou a tecla *enter*.
- Para verificar o valor do desvio-padrão, ele escolheu outra célula vazia, digitou **=DESVPAD.P(A1:F10)** e, depois, apertou a tecla *enter*.

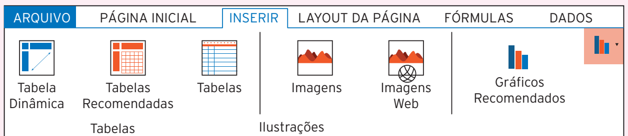
Observe os resultados obtidos por ele.

J4 ▾ ⋮ × ✓ $\mathcal{F}x$ =DESVPAD.P(A1:F10)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	3,0	5,0	6,0	10,0	7,0	9,5				
2	4,5	5,5	6,5	8,0	7,5	6,5			**Média**	6,7
3	5,0	6,0	5,0	6,0	8,0	9,0			**Moda**	6,0
4	6,0	6,0	6,5	5,0	9,5	8,5			**Mediana**	6,5
5	6,0	7,0	6,5	3,0	10,0	5,5			**Variância**	3,33
6	7,0	6,5	7,5	3,5	7,0	9,0			**Desvio-padrão**	1,80
7	7,0	8,0	7,5	5,0	6,0	4,5				
8	8,0	7,5	7,5	5,5	7,0	4,5				
9	9,0	9,0	9,0	6,5	6,0	3,0				
10	4,0	6,0	9,5	6,5	8,5	10,0				
11										
12										

RESPOSTAS

2. a)

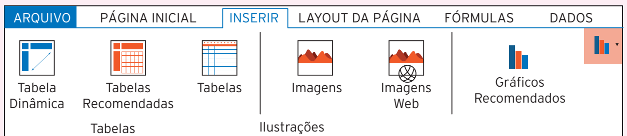


E3 ▾ ⋮ × ✓ $\mathcal{F}x$

	A	B	C	D	E	F	G
1	24	25	23	24			
2	20	22	24	27			
3	21	24	31	21			
4	21	22	31	29			
5	22	27	26	21			
6	30	22	22	26			
7	32	22	24	28			
8	28	28	23	20			
9	27	30	28	21			
10	26	32	20	22			
11							

Ilustrações: ID/BR

b)



E3 ▾ ⋮ × ✓ $\mathcal{F}x$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	24	25	23	24		**Média**	24,9	
2	20	22	24	27		**Moda**	22	
3	21	24	31	21		**Mediana**	24	
4	21	22	31	29				
5	22	27	26	21				
6	30	22	22	26				
7	32	22	24	28				
8	28	28	23	20				
9	27	30	28	21				
10	26	32	20	22				
11								

ATIVIDADE Consulte as respostas neste manual. Responda sempre no caderno.

2. Os dados a seguir correspondem às idades dos estudantes que foram matriculados em um curso de informática.

24	30	25	22	23	22	24	26
20	32	22	22	24	24	27	28
21	28	24	28	31	23	21	20
21	27	22	30	31	28	29	21
22	26	27	32	26	20	21	22

Usando uma planilha eletrônica, faça o que se pede.

a) Digite os dados.

b) Calcule a média, a moda e a mediana.

c) Calcule a variância e o desvio-padrão

d) Agora, escreva um pequeno texto relacionando as medidas que você obteve no item **b** ao contexto da situação.

Tabelas e gráficos

Já vimos em anos anteriores como ler, interpretar e construir tabelas e gráficos. Agora, vamos ampliar esse estudo.

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

A tabela a seguir apresenta os dez nomes mais comuns entre as pessoas nascidas no Brasil em 2021.

Nomes mais frequentes entre os brasileiros nascidos em 2021	
Nome	**Quantidade de pessoas**
Miguel	28301
Arthur	26655
Gael	23973
Heitor	22368
Helena	21890
Alice	20381
Theo	19863
Laura	18448
Davi	18304
Gabriel	17159

Fonte de pesquisa: Camila Boehm. Miguel e Helena lideram *ranking* de nomes mais comuns no Brasil em 2021. *Agência Brasil*, 19 dez. 2021. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2021-12/miguel-e-helena-lideram-ranking-de-nomes-mais-comuns-no-brasil-em-2021. Acesso em: 7 maio 2022.


Mr. James Kelley/Shutterstock.com/ID/BR

↑ **Helena foi o nome mais frequente entre as meninas nascidas em 2021.**

Qual é o nome mais frequente entre os brasileiros nascidos em 2021? Para responder a essa pergunta, podemos utilizar o conceito de moda.

Sabemos que a moda de um conjunto de dados é o elemento que aparece com maior frequência. Observando a segunda coluna da tabela, percebemos que a maior quantidade é 28301 e que o nome correspondente a essa quantidade é Miguel. Ou seja, Miguel é a moda desse conjunto de dados.

PARE E REFLITA

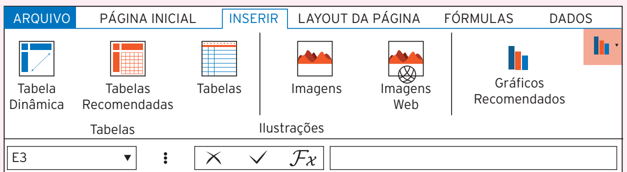
Considerando os dados da situação 1, reflita e responda: É possível calcular a média e a mediana desse conjunto de dados? Justifique.

Não. Espera-se que os estudantes percebam que a variável estudada é qualitativa.

TABELAS E GRÁFICOS

- Converse um pouco com os estudantes sobre a situação proposta. Comente com eles que, de acordo com o censo demográfico de 2010, existem cerca de 200 milhões de habitantes com mais de 130 mil nomes diferentes.
- Se achar conveniente, leia para os estudantes o texto do *site* do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), que traz um pouco da história do censo demográfico no Brasil, disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/22827-censo-2020-censo4.html (acesso em: 4 ago. 2022). Além desse texto, é possível apresentar o vídeo de Cimar Azeredo Pereira, diretor de Pesquisas do IBGE, que apresenta um panorama do censo de 2022, disponível em https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/32077-ibge-inicia-mobilizacaonacional-para-o-censo-com-testes-nas-27-unidades-estaduais (acesso em: 4 ago. 2022).
- Até o momento da elaboração deste material, o censo mais recente do IBGE era o de 2010, pois, em 2020, a coleta foi adiada para 2022 por causa da pandemia de covid-19.
- Se julgar oportuno, proponha aos estudantes que consultem o *site* indicado na fonte da tabela da situação **1**. Nesse *site*, eles também podem realizar a consulta dos nomes mais populares por sexo.
- É importante que os estudantes observem que não é possível calcular a média e a mediana desse conjunto de dados, pois a variável estudada é qualitativa.

c)



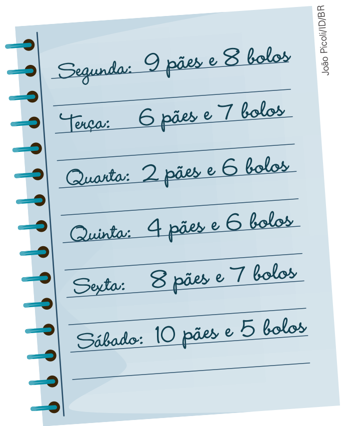
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	24	25	23	24		**Média**	24,9	
2	20	22	24	27		**Moda**	22	
3	21	24	31	21		**Mediana**	24	
4	21	22	31	29		**Variância**	13,27	
5	22	27	26	21		**Desvio-padrão**	3,60	
6	30	22	22	26				
7	32	22	24	28				
8	28	28	23	20				
9	27	30	28	21				
10	26	32	20	22				
11								

ID/BR

d) Resposta pessoal. Espera-se que o texto dos estudantes apresente algumas das ideias a seguir.

A média significa que, se todos os estudantes tivessem a mesma idade, ela seria 24,9 anos ou aproximadamente 25 anos. Já a moda ser 22 anos significa que 22 é a idade que aparece com maior frequência entre os estudantes. A mediana, nesse caso, significa que metade dos estudantes tem idade maior ou igual a 24 anos e a outra metade tem idade menor ou igual a 24 anos.

- Na situação **2**, peça aos estudantes que comparem as anotações feitas por Vera e a tabela construída por Suzana. Pergunte sobre a organização dos dois registros e as vantagens de usar um ou outro.
- Explore os gráficos de colunas perguntando sobre o dia em que se vende menos pães ou em que se vende menos bolos. Ou questione sobre o dia em que se vende mais pães ou mais bolos. Será que existe um motivo para esses fatos?
- Analise como os estudantes fizeram a estimativa para a média de pães vendidos e para a média de bolos vendidos durante a semana. Peça a eles que calculem a média de venda dos pães e dos bolos. Verifique se eles chegaram à conclusão de que a média de vendas é igual para os dois produtos e que, apesar de as médias serem iguais, observando as colunas dos dois gráficos é possível concluir que os valores referentes à venda de pães são mais dispersos do que os valores referentes à venda de bolos.



João Picoli/ID/BR

Situação 2

Vera abriu uma pequena loja de pães e de bolos. Ela fez anotações de quanto vendeu durante a primeira semana. Observe os registros dela na ilustração ao lado.

Vera pediu ajuda à sua filha, Suzana, para organizar os registros que havia feito em uma tabela. Veja como ficou.

Vendas de pães e de bolos durante uma semana

Dia da semana / Produto	Pães	Bolos
Segunda-feira	9	8
Terça-feira	6	7
Quarta-feira	2	6
Quinta-feira	4	6
Sexta-feira	8	7
Sábado	10	5

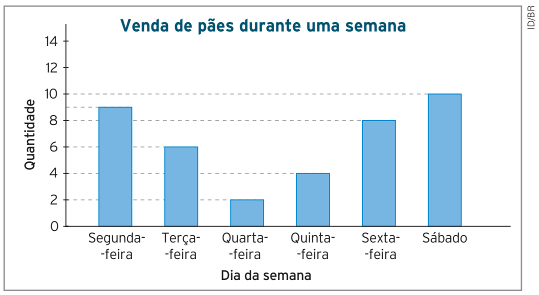
Dados fornecidos por Vera.

OBSERVAÇÃO

Os gráficos de barras podem ser construídos com barras verticais ou horizontais. Nesta coleção, vamos chamar os gráficos de barras verticais de **gráficos de colunas** e os gráficos de barras horizontais simplesmente de **gráficos de barras.**

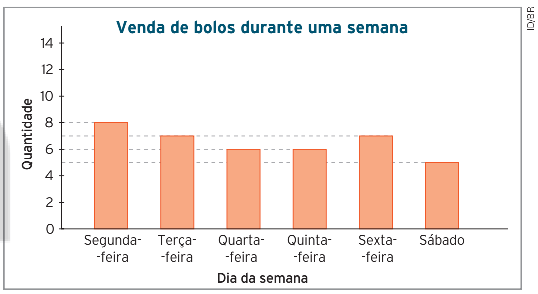
Depois, Suzana construiu dois gráficos de colunas: um para que a mãe observasse a venda de pães e outro para que ela observasse a venda de bolos.

- Venda de pães



Dados fornecidos por Vera.

- Venda de bolos



Dados fornecidos por Vera.

PARE E REFLITA

Observando cada um dos gráficos, faça uma estimativa de qual seria a média de pães vendidos nessa semana. Depois, estime a média da quantidade de bolos vendidos durante essa semana. Converse com os colegas e o professor para explicar como você pensou para realizar essas estimativas.

A estimativa é pessoal. Espera-se que os estudantes tentem "equilibrar" as alturas de cada um dos gráficos e verifiquem qual seria a altura aproximada das barras depois do equilíbrio.

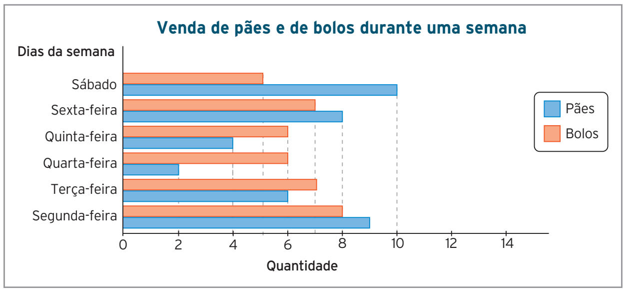
Suzana também ajudou a mãe dela a calcular as médias das vendas de pães e de bolos nessa semana.

- Pães: $MA = \frac{9 + 6 + 2 + 4 + 8 + 10}{6} = \frac{39}{6} = 6,5$
- Bolos: $MA = \frac{8 + 7 + 6 + 6 + 7 + 5}{6} = \frac{39}{6} = 6,5$

Agora, observe novamente os gráficos construídos e as médias obtidas por Suzana. Repare que, apesar de as médias serem iguais, ao analisar as alturas das colunas de cada um dos gráficos, podemos ver que a distribuição das vendas dos pães é mais dispersa que a das vendas de bolos.

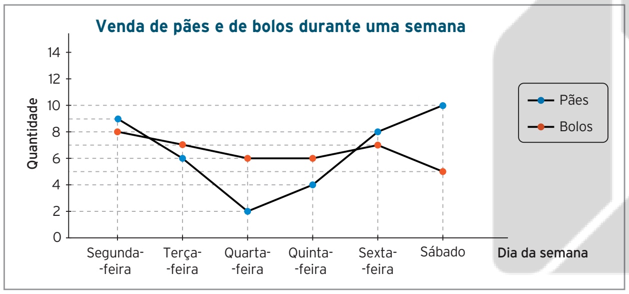
Outra maneira de representar os dados da tabela feita por Suzana seria utilizar um gráfico de barras duplas ou um gráfico de linhas.

- Gráfico de barras duplas



Dados fornecidos por Vera.

- Gráfico de linhas



Dados fornecidos por Vera.

Note que, nesses gráficos, é possível comparar simultaneamente as vendas dos dois itens (pães e bolos).

No gráfico de barras duplas, por exemplo, podemos perceber com mais facilidade em quais dias a venda de pães foi maior que a venda de bolos. Já o gráfico de linha permite que Vera observe a evolução das vendas ao longo da semana com mais facilidade.

Você percebeu que cada tipo de gráfico nos permite um tipo de observação sobre a situação? **Resposta pessoal.**

- O gráfico de barras duplas é apropriado para efetuarmos uma comparação entre as variáveis – no caso dessa situação, comparar a venda de pães e a venda de bolos na semana analisada.
- No gráfico de barras duplas, explore a comparação entre os pares de barras, ou seja, se na segunda-feira são vendidos mais pães ou mais bolos. Associe a altura das colunas dos gráficos anteriores ao comprimento das barras do gráfico desta página. Por exemplo: quanto mais alta a coluna ou mais comprida a barra, mais produtos foram vendidos.
- Converse sobre a diferença em apresentar os dados em dois gráficos de barras (ou colunas) e em apenas um gráfico de barras (ou colunas) duplas. Pergunte em qual dos dois as comparações podem ser feitas com maior rapidez.
- Depois, converse com os estudantes sobre a diferença de apresentar os dados em um gráfico de barras duplas e em um gráfico de linhas. Peça a eles que expliquem que tipo de observações é possível fazer em relação às vendas dos pães e dos bolos. Verifique se eles percebem que o gráfico de linhas é comumente utilizado quando queremos mostrar uma tendência nos dados ao longo do tempo.

DE OLHO NA BASE

Realizar uma análise como a apresentada nestas páginas permite aos estudantes refletir sobre a escolha e a construção do gráfico mais adequado, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA22**.

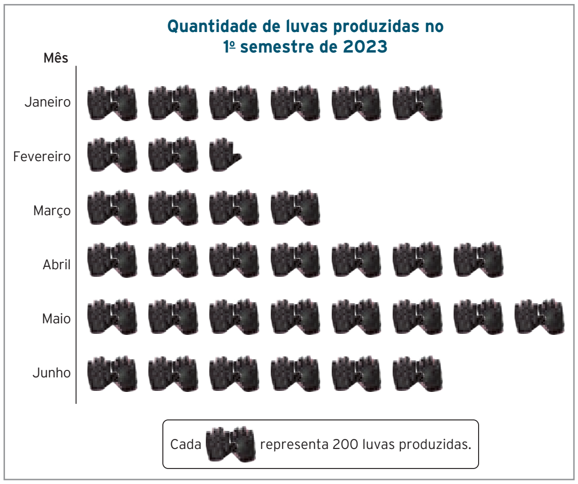
Além disso, aprimora o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos estatísticos e favorecendo o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 2**.

- Na situação **3**, comente com os estudantes que os gráficos pictóricos são aqueles em que se utilizam imagens para representar os dados. São muito usados em pesquisas na área de *marketing* para fazer propaganda, pois chamam bastante atenção para o assunto tratado.
- Evidencie a representação utilizada neste gráfico, ou seja, o par de luvas. Nesse caso, a ideia é que cada par de luvas equivale a 200 luvas, ou seja, quando no gráfico aparecer apenas 1 luva, isso significa que apenas 100 luvas foram produzidas. Pergunte aos estudantes como ficaria a representação da produção de 500 luvas. Espera-se que eles respondam que essas luvas seriam representadas por 2 pares de luvas mais 1 luva.
- Amplie a discussão perguntando como ficaria a representação neste gráfico se no mês de julho fossem produzidas 850 luvas. Verifique se eles percebem que a representação poderia ser quatro pares de luvas mais metade de uma luva, porém essa representação poderia dificultar a leitura.
- Em gráficos como esse, é possível constatar mais facilmente a moda do conjunto de dados.

Situação 3

Sabrina elaborou um gráfico pictórico para mostrar a produção de luvas de ciclismo de certa fábrica no 1º semestre de 2023.

Para elaborar o gráfico, ela considerou que cada par de luvas representa 200 luvas.



ID/BR

Dados fornecidos pela administração da fábrica.

PARE E REFLITA

No mês de fevereiro, estão representados dois pares de luva mais uma luva. O que isso significa?

Significa que nesse mês foram produzidas 500 luvas (200 + 200 + 100).

Note que maio foi o mês em que mais luvas foram produzidas, enquanto fevereiro foi o mês com menor produção. Também é possível perceber que no 2º trimestre foram produzidas mais luvas que no 1º trimestre.

A observação do gráfico também nos permite constatar que a moda desse conjuntos de dados é 1200 luvas.

Situação 4

Sílvio fez um levantamento das medidas de altura de todos os adolescentes do condomínio onde mora e organizou os dados obtidos em uma tabela de distribuição de frequências.

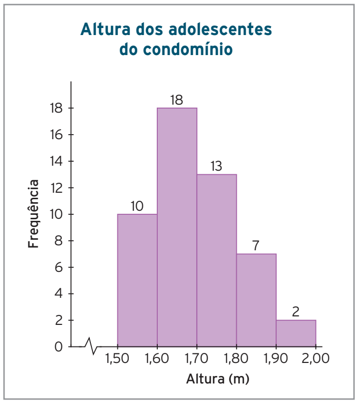
Altura dos adolescentes do condomínio

Altura (em metro)	Frequência
1,50 ⊢ 1,60	10
1,60 ⊢ 1,70	18
1,70 ⊢ 1,80	13
1,80 ⊢ 1,90	7
1,90 ⊢ 2,00	2
Total	**50**

Dados obtidos por Sílvio.

Depois, Sílvio decidiu organizar os dados em um gráfico. Quando temos dados agrupados em intervalos de classe, como nesse caso, o gráfico mais indicado é o histograma.

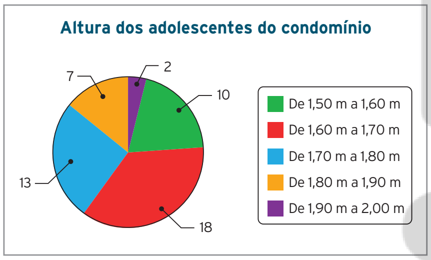
O histograma é um gráfico composto de colunas justapostas. A largura de cada coluna é proporcional à amplitude do intervalo que ela representa. Geralmente, os intervalos têm amplitudes iguais e, consequentemente, as colunas têm larguras iguais.



Dados fornecidos por Sílvio.

Repare que o intervalo de 1,60 a 1,70 é a moda da distribuição por intervalos, mas não necessariamente a moda da distribuição original está nesse intervalo. É possível, por exemplo, que todos os adolescentes no intervalo de 1,70 a 1,80 tenham a mesma medida de altura, mas os que estão no intervalo de 1,60 a 1,70 se distribuam em medidas de altura diferentes.

As informações obtidas por Sílvio também poderiam ter sido representadas em um gráfico de setores. Observe.



Dados fornecidos por Sílvio.

Perceba que nesse caso faz sentido utilizar um gráfico de setores para representar essa situação, pois Sílvio fez o levantamento com todos os adolescentes do prédio. Desse modo, é possível comparar as partes em relação ao todo.

- Na situação **4**, peça aos estudantes que expliquem a tabela de distribuição de frequências. Verifique se eles compreendem que, por exemplo, há 10 adolescentes no condomínio com altura medindo de 1,50 m a 1,60 m, porém nessa contagem não são considerados adolescentes com altura igual a 1,60 m, pois entram na contagem do próximo intervalo.
- Mostre aos estudantes que a utilização de um histograma para a representação de dados em intervalos de classe é mais aconselhável do que um gráfico de colunas simples, pois nesse gráfico cada coluna indica um dado (retome a situação **2** se necessário), enquanto no histograma a largura da coluna indica um intervalo. Esse tipo de gráfico geralmente é utilizado para variáveis contínuas como medidas de altura e de massa.
- Já o gráfico de setores é utilizado quando estamos interessados em observar a relação parte-todo no conjunto de dados.
- Se julgar oportuno, retome a construção do gráfico de setores.

- No item **a** da atividade **3**, pergunte aos estudantes como eles fizeram para obter o total de estudantes entrevistados. Espera-se que eles adicionem os valores que estão acima de cada coluna, obtendo 472 estudantes. No item **b**, pergunte como eles fizeram para calcular a mediana. Uma estratégia é observar que há um total de 472 estudantes, o que significa que, depois de colocados em ordem por tempo de estudo, os estudantes nas posições 236 e 237 são os que devem ser analisados para o cálculo da mediana. Note que esses estudantes são os que estudam 2 horas por semana. Logo, a mediana é igual a 2 horas.
- O item **b** da atividade **4** pode ser calculado de duas maneiras, utilizando o quadro do enunciado ou o quadro do item **a**.

  No item **c**, verifique se os estudantes percebem que o conjunto de dados apresenta duas modas, ou seja, é bimodal.
- Peça aos estudantes que justifiquem o item **b** da atividade **6**. Uma justificativa possível é calcular a porcentagem de motoristas que respeitaram o limite de velocidade e mostrar que ela corresponde a mais da metade do total de motoristas.
- Retome com os estudantes os itens necessários para a construção de gráficos e a importância de cada um deles. Por exemplo, o título do gráfico deve traduzir claramente as informações que serão apresentadas – se houver eixos, eles devem ser identificados com títulos para que possamos compreender do que se trata os dados analisados, entre outros. A não preocupação com esses detalhes pode levar a interpretações erradas.

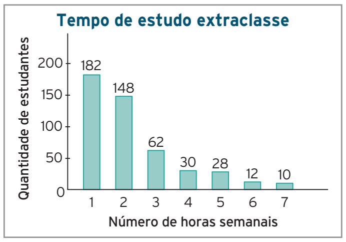
3. a) 472 estudantes.
b) $MA \simeq 2{,}26$ horas; $Mo = 1$ hora; $Md = 2$ horas.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

3. Veja, no gráfico a seguir, a organização dos dados de uma pesquisa sobre a quantidade de horas semanais dedicadas ao estudo fora da escola por estudantes com baixo desempenho escolar.

Ilustrações: ID/BR



Dados fictícios.

a) Quantos estudantes foram entrevistados?
b) Determine a média de horas semanais estudadas, a moda e a mediana.
c) Qual é a porcentagem de estudantes que estudam menos que a média? **Aproximadamente 70%.**

4. A enfermaria de uma escola anotou em um quadro a quantidade de estudantes que procurou atendimento com alguma queixa de saúde nos dias úteis da primeira quinzena de agosto.

Dia	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14
Quantidade de estudantes	2	3	2	5	4	5	5	3	1	2

a) Copie e complete o quadro a seguir no caderno.

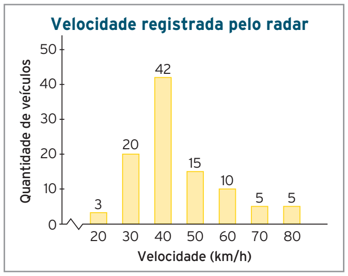
Quantidade de estudantes na enfermaria	1	2	3	4	5
Quantidade de dias no período	1	3	2	1	3

b) Calcule o número médio de estudantes que procurou a enfermaria por dia. **b) 3,2 estudantes.**
c) Qual é a mediana e a moda do número de estudantes que procurou a enfermaria por dia? ***Md*: 3 estudantes; *Mo*: 2 estudantes e 5 estudantes.**

5. Uma empresa tem ao todo 17 funcionários que recebem R$ 2 000,00, 7 que recebem R$ 3 600,00, 4 que recebem R$ 4 000,00 e 2 que recebem R$ 6 000,00.

a) Qual é a média salarial do total de funcionários? Nesse caso, a média é representativa? **Aproximadamente R$ 2 906,67; não.**
b) No mínimo, quantos funcionários que recebem R$ 2 000,00 devem ser promovidos para a faixa salarial seguinte, de modo que a mediana dos salários pagos por essa empresa corresponda a R$ 3 600,00? **3 funcionários.**

6. Um sistema de radar registra a velocidade dos veículos em uma avenida onde trafegam, em média, 100 veículos por hora, sendo 45 km/h a velocidade máxima permitida. Veja, no gráfico a seguir, os dados obtidos pelo sistema de radar durante uma hora.



Dados fornecidos pelo sistema de radar.

a) Qual é a média e a mediana das velocidades dos veículos que trafegam nessa avenida? **$MA = 44{,}4$ km/h; $Md = 40$ km/h**
b) A maioria dos motoristas respeitou o limite de velocidade? **Sim.**

7. Para controlar a presença dos estudantes em um curso, o diretor fez um levantamento diário da quantidade de faltas durante um mês.

Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira
3 faltas	5 faltas	2 faltas	4 faltas	8 faltas
6 faltas	2 faltas	0 falta	16 faltas	feriado
14 faltas	6 faltas	2 faltas	5 faltas	11 faltas
7 faltas	4 faltas	4 faltas	6 faltas	10 faltas
8 faltas	5 faltas	5 faltas	—	—

a) Quais são a média e a moda das faltas desse mês? **$MA \simeq 6$; $Mo = 5$.**
b) Elabore um quadro que associe os dias da semana à quantidade de estudantes que faltaram. Depois, calcule a média do número de faltas por dia da semana. **Consulte a resposta neste manual.**

RESPOSTA

7. b)

Dia da semana	Quantidade de estudantes faltantes
Segunda-feira	38
Terça-feira	22
Quarta-feira	13
Quinta-feira	31
Sexta-feira	29

Segunda-feira: $MA = 7{,}6$
Terça-feira: $MA = 4{,}4$
Quarta-feira: $MA = 2{,}6$
Quinta-feira: $MA = 7{,}75$
Sexta-feira: $MA \simeq 9{,}67$

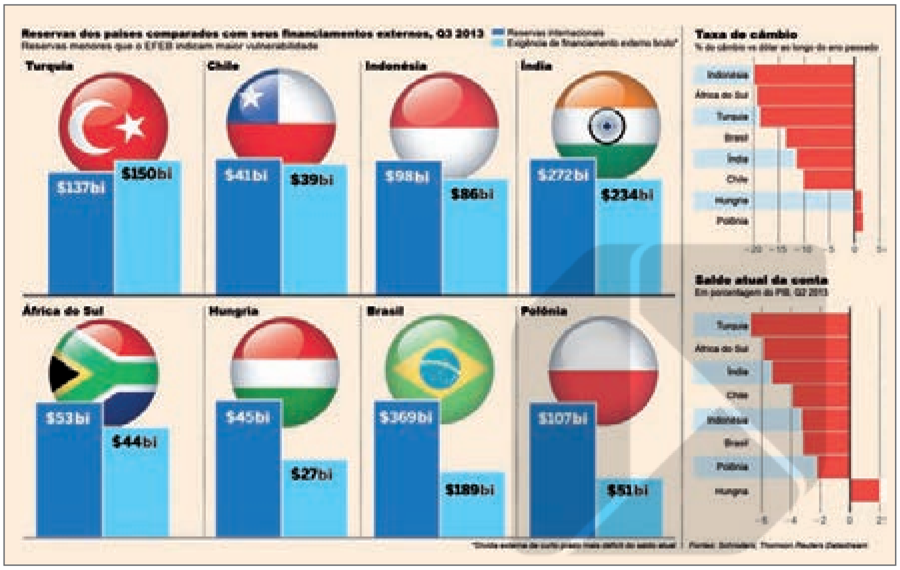
Gráficos divulgados pela mídia

Ao construir um gráfico, é preciso ter bastante cuidado. Por exemplo, o título deve ter coerência com os dados apresentados; a escala dos eixos precisa estar proporcional aos valores para não levar o leitor à interpretação errônea dos dados; a soma das porcentagens em gráficos de setores deve ser 100%; entre outros.

Alguns gráficos apresentados em meios de comunicação, por não respeitarem algum dos aspectos mencionados anteriormente, podem levar a interpretações equivocadas por parte do leitor. Acompanhe alguns exemplos.

Exemplo A

O jornal britânico *Financial Times* apresentou dados sobre 8 países emergentes em um infográfico que apresenta gráficos de colunas duplas. Nesse infográfico, as colunas azul-escuras representam as reservas financeiras do país, e as colunas azul-claras, a necessidade de financiamento externo. Veja.



James Kynge/Financial Times Limited

Fonte: Twitter do *Financial Times*, 16 jan. 2014. Disponível em: https://twitter.com/ft/status/423787829974802432. Acesso em: 9 maio 2022.

Agora, observe novamente e com mais atenção as colunas de cores azuis. Você percebeu, por exemplo, que todas as colunas azul-escuras têm praticamente a mesma altura, mas representam valores diferentes? Observe também a necessidade de investimento externo do Chile e a do Brasil, representadas pelas colunas azul-claras. A coluna do Brasil é menor que a do Chile, mas representa uma quantia muito superior. O mesmo acontecerá se compararmos a necessidade de financiamento externo na Índia e na Turquia.

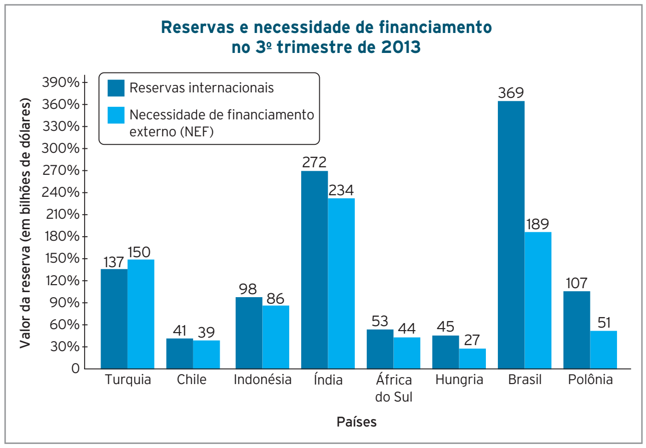
- Reúna os estudantes em duplas e peça que observem apenas as colunas azuis do infográfico e discutam as seguintes questões, fazendo anotações no caderno: Há diferenças entre as reservas nos oito países? Qual país necessita de mais financiamento externo? Se considerarmos só as colunas, sem observar os valores indicados, o que se pode concluir?

  É importante que eles percebam que, apesar de as colunas terem praticamente a mesma medida de altura, elas estão representando valores diferentes.
- O trabalho com o tópico "Gráficos divulgados pela mídia" tem um papel importante na formação dos estudantes como cidadãos críticos. Assim, sugerimos que você organize uma roda de conversa para abordar esse tema. Comente que há situações em que os gráficos são divulgados de maneira incorreta sem intencionalidade; entretanto, há situações em que os gráficos são divulgados desse modo a fim de levar o leitor a uma interpretação errônea dos dados apresentados.

  A manipulação de gráficos divulgados pela mídia acontece há bastante tempo. Atualmente, com a ampliação do acesso à informação, a população está mais atenta e, com isso, a frequência de gráficos divulgados pela mídia apresentados de modo incorreto reduziu consideravelmente. No entanto, mesmo que os gráficos estejam corretos, é fundamental verificar alguns aspectos, como a credibilidade da fonte e a adequação do método utilizado para coletar os dados que o originaram, afinal, os dados precisam ser comparáveis para estar no mesmo gráfico.
- Para complementar e ampliar o trabalho desse assunto, organize os estudantes em pequenos grupos (duplas ou trios) e solicite a cada um que pesquise gráficos que podem induzir a erros de interpretação e que foram publicados em redes sociais, jornais, revistas ou em outros veículos de comunicação. Depois, peça a eles que identifiquem os problemas relacionados ao gráfico e que construam novos gráficos, a fim de corrigi-los. Ao final dessa atividade, solicite aos grupos que compartilhem as estratégias e as conclusões com os colegas.
- O trabalho de análise de gráficos divulgados pela mídia proporciona o desenvolvimento, do ponto de vista matemático e computacional, da análise crítica, criativa e propositiva da produção, circulação e recepção de textos de divulgação científica e de mídias sociais.

- Peça aos estudantes que comparem o gráfico da página anterior com o gráfico de colunas duplas desta página. Solicite-lhes que analisem apenas as colunas, e não os valores.
- É importante que os estudantes percebam que no gráfico da página anterior as colunas estão quase todas da mesma altura, ou seja, não estão proporcionais aos valores que apresentam. Desse modo, há a impressão de que todos os países estão na mesma situação em relação aos valores das reservas. Já no gráfico desta página, é possível perceber que o Brasil tem reserva internacional bem maior que a dos outros países.
- Outro ponto a destacar é que o gráfico utilizado pelo jornal é colorido e chama a atenção do leitor. Em relação aos dados, porém, essa representação não favoreceu as informações, dando margem a interpretações errôneas, como a consideração de que todos os países estão na mesma situação. No primeiro gráfico desta página, é possível ver que os países estão em situações diferentes. Um erro desse tipo pode fazer com que investidores não queiram empreender no país, e isso traria consequências para a economia.
- No gráfico do exemplo **B**, faça um trabalho parecido com o que foi sugerido para o exemplo **A**. Pergunte aos estudantes se eles observam algum detalhe que possa levar a uma interpretação errônea.

Veja como esses dados ficariam se as colunas tivessem sido representadas com alturas proporcionais aos valores que indicam.



Fonte de pesquisa: Twitter do *Financial Times*, 16 jan. 2014. Disponível em: https://twitter.com/ft/status/423787829974802432. Acesso em: 9 maio 2022.

Exemplo B

Em muitos noticiários, é frequente a utilização de gráficos e de tabelas como recursos para comunicar e complementar informações. Em 2014, a *Globo News* apresentou em um vídeo este gráfico sobre a inflação do Brasil. Veja.

Ravi Parikh. Como são feitos os gráficos enganosos – e como não ser enganado por eles. Gizmodo Brasil, 17 abr. 2014. Disponível em: https://gizmodo.uol.com.br/mentir-visualizacao-dados/#:~:text=Uma%20das%20maneiras%20mais%20f%C3%A1ceis%20de%20deturpar%20seus%20dados%20%C3%A9,para%20destacar%20melhor%20as%20diferen%C3%A7as. Acesso em: 9 maio 2022.

Agora, observe atentamente as alturas e as respectivas porcentagens das colunas do gráfico. Você notou algo errado?

O eixo vertical desse gráfico está implícito. Assim, pela observação de todas as alturas das colunas, podemos supor que ele inicia em 4%, mas não podemos afirmar.
Além disso, observe as colunas relativas aos anos de 2011 e de 2013. Note que a coluna de 2011 corresponde a 6,50% e que a coluna relativa a 2013 corresponde a 5,91%. Entretanto, a altura da coluna de 2013 é maior que a de 2011, levando-nos a ter uma interpretação incorreta da informação.
Agora, observe o gráfico que a *Globo News* apresentou após constatar os erros.

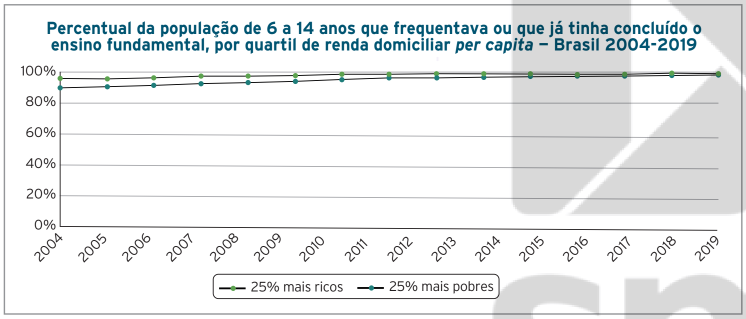
Editoria de Arte/G1

Ravi Parikh. Como são feitos os gráficos enganosos – e como não ser enganado por eles. Gizmodo Brasil, 17 abr. 2014. Disponível em: https://gizmodo.uol.com.br/mentir-visualizacao-dados/#:~:text=Uma%20das%20maneiras%20mais%20f%C3%A1ceis%20de%20deturpar%20seus%20dados%20%C3%A9,para%20destacar%20melhor%20as%20diferen%C3%A7as. Acesso em: 9 maio 2022.

ATIVIDADE

Responda sempre no caderno.

8. Este gráfico foi extraído do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) e ilustra uma pesquisa sobre a população brasileira de 6 a 14 anos que frequentava ou que já tinha concluído o Ensino Fundamental entre 2004 e 2019.



ID/BR

Fonte: Inepdata – Painel de monitoramento do PNE. Disponível em: https://inepdata.inep.gov.br/analytics/saw.dll?Dashboard&PortalPath=%2Fshared%2FIntegra%C3%A7%C3%A3o%20-%20PNE%2FMeta%2002%2FPain%C3%A9is%2FPNE%20-%20Meta%2002&Page=Indicador%202A. Acesso em: 7 maio 2022.

Agora, responda ao que se pede em cada item.

a) O que indica o eixo horizontal? E o eixo vertical?

b) As escalas dos eixos estão corretas? Justifique.

8. a) O ano. A porcentagem da população brasileira de 6 a 14 anos que frequentava ou que já tinha concluído o Ensino Fundamental.

8. b) Não, pois o eixo horizontal não começa no zero, ou seja, nele está faltando o símbolo de supressão (⁄\⁄).

- Destaque a importância da utilização das escalas adequadas nos eixos, pois uma escala errada pode acarretar em interpretação errônea e mostrar uma situação que não é verdadeira.
- Comente com os estudantes que, além de gráficos e tabelas com erros que podem nos levar a interpretações equivocadas, textos e outras informações falsas, popularmente conhecidos como *fake news*, podem ser veiculados em mídias digitais e impressas. Essa é uma prática inadequada e que pode ter consequências graves dependendo do tipo de informação veiculada e da quantidade de pessoas que acreditam nessa informação. Nesse sentido, antes de publicar qualquer informação, é importante verificar a fonte e a validade do que se pretende compartilhar.

DE OLHO NA BASE

Os exemplos apresentados neste tópico e a atividade **8** permitem que os estudantes analisem e identifiquem, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir a erros de leitura, como escalas inapropriadas, omissão de informações importantes, entre outros, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA21**.

- Se julgar oportuno, peça aos estudantes que pesquisem notícias falsas publicadas em mídias sociais que tiveram consequências negativas por serem compartilhadas com grande quantidade de pessoas. Peça a eles que pesquisem para saber o que era falso nessas notícias. Depois, eles podem apresentar suas conclusões aos colegas.

OUTRAS FONTES

ALTARES, G. A longa história das notícias falsas. *El país*, 18 jun. 2018. Disponível em: https://brasil.elpais.com/brasil/2018/06/08/cultura/1528467298_389944.html. Acesso em: 4 ago. 2022.

O conteúdo desse artigo aborda a história das notícias falsas e pode contribuir para o enriquecimento das conversas com relação aos gráficos enganosos.

PLANEJAMENTO DE PESQUISA

- Converse com os estudantes sobre as concepções que eles trazem das etapas de uma pesquisa.
- Leia com eles o conteúdo referente às etapas de uma pesquisa estatística e faça possíveis intervenções para garantir que tenham compreendido o que deve ser feito em cada uma delas.
- É importante que eles percebam ser necessário respeitar a ordem das etapas e que elas não podem ser trocadas ou eliminadas.

Planejamento de pesquisa

Vimos em anos anteriores que precisamos seguir algumas etapas para realizar uma pesquisa estatística.

Depois que o tema da pesquisa for definido, é necessário formular um problema e levantar hipóteses. Por exemplo, se o tema for alimentação, o problema poderá ser: "Que alimentos são mais consumidos pelos estudantes do 9º ano?". Uma hipótese seria que o alimento mais consumido seja arroz ou feijão.

Em seguida, é necessário definir a população, o tipo de pesquisa e as variáveis. Para o tema sugerido anteriormente, quais seriam suas escolhas para cada um desses itens? **Resposta pessoal.**

A próxima etapa consiste em definir o instrumento de pesquisa. Pode ser um questionário com perguntas de múltipla escolha sobre a alimentação. Esse questionário poderá ser aplicado, por exemplo, por meio de entrevistas, dependendo do tipo de pesquisa que você escolheu.

Após a coleta de dados, é necessário organizar os dados obtidos. Isso poderá ser feito usando uma ou mais tabelas, por exemplo, dependendo do questionário elaborado.

Por fim, devemos analisar as tabelas e escolher o gráfico mais adequado para representar os dados de cada uma delas, calcular as medidas de tendência central (média, moda e mediana), além da amplitude dos dados, que auxiliam na obtenção de conclusões mais assertivas. Lembramos que a construção tanto de tabelas como de gráficos pode ser feita com o auxílio de uma planilha eletrônica. De posse de todo esse material, produzimos um relatório.

Veja a seguir um possível esquema com as etapas de uma pesquisa e o que deve ser feito em cada uma delas.

ETAPAS DA PESQUISA	O QUE DEVE SER FEITO
Definição do problema	Escolher um tema. Formular o problema. Levantar hipóteses.
Planejamento da pesquisa	Definir a população. Escolher entre pesquisa amostral ou censitária. Definir as variáveis.
Coleta de dados	Definir o instrumento de pesquisa. Definir como será a coleta de dados. Coletar os dados.
Organização de dados	Tabular os dados. Construir tabelas.
Resultados e análises	Analisar e interpretar os dados. Construir gráficos. Elaborar uma conclusão.

João Picoli/ID/BR

274

OUTRAS FONTES

Cazorla, I. *et al.* (org.). *Estatística para os anos iniciais do ensino fundamental*. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2017. Livro eletrônico. (Biblioteca do Educador – Coleção SBEM). Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ebook_sbem.pdf. Acesso em: 4 ago. 2022.

Esse livro aborda, com exemplos aplicados, os conceitos estatísticos fundamentais, desde a coleta e o tratamento dos dados até a interpretação dos resultados. Além de sugestões de leitura, são apresentados diversos anexos relacionados ao tema, que podem ampliar e enriquecer o estudo da Estatística no Ensino Fundamental.

Silva, M. N. P. População e amostras. *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/populacao-amostras.htm. Acesso em: 4 ago. 2022.

Esse artigo discute a diferença entre população finita e infinita, destacando a relevância da escolha da amostra.

DESCUBRA MAIS

Pesquisa estatística amostral

Agora é com vocês! Reúna-se com alguns colegas para realizar uma pesquisa amostral sobre algum tema da realidade social de vocês. Depois, vocês vão elaborar um relatório contendo a análise dos dados com base nas medidas de tendência central e de dispersão, além de construir tabelas e gráficos com o auxílio de uma planilha eletrônica.

Materiais

- caderno para anotações
- lápis ou caneta
- computador com um *software* de planilha eletrônica instalado

(Representações sem proporção de tamanho entre si)

7th Son Studio/Shutterstock.com/ID/BR

Goran Bogicevic/Shutterstock.com/ID/BR

Como fazer

1. Com a orientação do professor, reúnam-se em grupos.
2. Cada grupo deverá escolher um tema relevante para a comunidade local e formular um problema a ser pesquisado.
3. Definam a amostra a ser pesquisada e as variáveis. Lembrem-se: a amostra deve representar a população estudada.
4. Criem um questionário para as entrevistas que serão feitas. Tenham em mente que as perguntas devem ser pensadas de modo que permitam atingir o objetivo inicial da pesquisa, ou seja, encontrar uma resposta para o problema.
5. Ao abordar os entrevistados, sejam gentis e educados e expliquem o objetivo da pesquisa. Sejam cautelosos ao fazer as perguntas, tomando cuidado para não influenciar as pessoas em suas respostas.
6. Elaborem uma tabela e escolham o gráfico que melhor represente os dados coletados. Para isso, vocês devem utilizar uma planilha eletrônica.
7. Ainda com o auxílio da planilha eletrônica, determinem as medidas de tendência central e de dispersão, se for o caso. Em seguida, analisem-nas.
8. Por fim, elaborem um relatório contendo a tabela, o gráfico e as conclusões que vocês obtiveram com a pesquisa.

Para concluir

Responda sempre no caderno.

Respostas pessoais.

1. Explique o motivo que levou o grupo a escolher o tema da pesquisa.
2. Por que o grupo escolheu determinado tipo de gráfico para apresentar os resultados obtidos?
3. Explique como as medidas de tendência central e de dispersão dos dados coletados auxiliaram na análise.

DESCUBRA MAIS

O objetivo desse boxe é permitir que os estudantes sejam protagonistas na elaboração e no desenvolvimento de uma pesquisa em todas suas etapas.

Leia com eles o texto inicial e as etapas do item *Como fazer*.

Verifique se entenderam a proposta. Se apresentarem dúvidas, certifique-se de saná-las antes de iniciar o desenvolvimento da pesquisa.

Retome com os estudantes as etapas do planejamento de pesquisa.

Oriente-os a elaborar um cronograma simples e a dividir as tarefas entre os integrantes do grupo.

Apresente a pesquisa e as respostas das atividades para que todos possam ver os trabalhos.

DE OLHO NA BASE

Propor aos estudantes atividades para praticar o planejamento e a execução de pesquisa amostral, envolvendo tema da realidade social, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e de amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas, favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA23**. O boxe também contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**, para que os estudantes exercitem a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, para que respeitem e promovam o respeito ao outro e aos direitos humanos.

- Promova, de maneira recorrente, rodas de conversa que possibilitem aos estudantes sentir que o ambiente escolar é um espaço livre de quaisquer atos violentos (verbais ou não verbais), em que o respeito a diferentes opiniões e posicionamentos sejam constantemente desenvolvidos. Aproveite esses momentos para buscar soluções coletivas e democráticas de maneira que seja possível identificar, prevenir e reverter situações de conflito no ambiente escolar. Desse modo, os estudantes podem ter sentimentos de pertencimento à escola e reconhecê-la como um espaço saudável de convivência.

"Para a efetivação dos Direitos Humanos e da Cultura de Paz, é imprescindível a sua prática cotidiana, na qual a educação é um fator essencial, capaz de incentivar a reflexão crítica e a transformação de realidades violentas, excludentes e preconceituosas."

Fonte: *Convivência escolar e cultura de paz*. Brasília: SEEDF/Subeb, 2020. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 4 ago. 2022.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

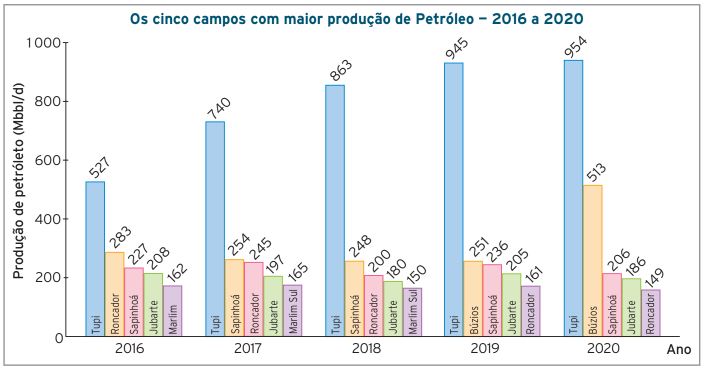
- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- A atividade **1** exige dos estudantes a análise de um gráfico para a comparação de produção de petróleo dos cinco maiores campos produtores no Brasil. Espera-se que eles consigam perceber que o crescimento do campo Tupi é o mais significativo, variando de um valor próximo a 530 milhões de barris por dia para mais de 950 milhões de barris por dia, enquanto os demais apresentaram um crescimento menor, ou decrescimento em alguns períodos apresentados no gráfico.
- Na atividade **2**, verifique a necessidade de retomar o conceito das medidas de tendência central.

  Para determinar a média, no item **a**, incentive os estudantes a usar a calculadora.
- Na atividade **3**, se julgar necessário, primeiro leia e interprete com os estudantes a notícia. Peça a eles que destaquem, escrevendo no caderno, as informações mais importantes.

DIVERSIFICANDO

2. b) ***Mo* = 60 anos; *Md* = 65 anos.**

1. O gráfico a seguir mostra a relação dos cinco maiores campos produtores de petróleo no Brasil, de 2016 a 2020, em mil barris por dia (Mbbl/d).



Fonte de pesquisa: ANP. *Encarte de consolidação da produção 2020*. Disponível em: https://www.gov.br/anp/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/boletins-anp/boletins/arquivos-bmppgn/2020/2020-12-boletim.pdf. Acesso em: 6 maio 2022.

a) Qual desses campos teve crescimento mais significativo na produção de petróleo? **Tupi.**

b) Houve grandes mudanças na produção de petróleo do campo Sapinhoá?
Não, pois ficou sempre em torno de 200 mil barris por dia.

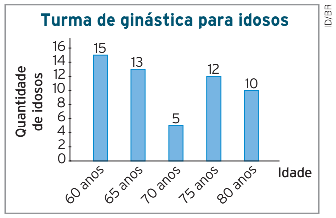
2. O gráfico ao lado apresenta a quantidade de idosos matriculados em uma academia de ginástica e suas respectivas idades. Observe.

Agora, responda ao que se pede em cada item

a) Qual a idade média dos idosos matriculados na turma de ginástica dessa academia? **69 anos**

b) Quais são a moda e a mediana dessa distribuição?

c) Quantos idosos estão acima da idade média? E abaixo? **27 idosos; 28 idosos.**



Dados fictícios.

3. Leia a notícia a seguir.

> O Brasil perdeu, nos últimos quatro anos, mais de 4,6 milhões de leitores, segundo dados da pesquisa Retratos da Leitura no Brasil. [...]
>
> [...]
>
> O brasileiro lê, em média, cinco livros por ano, sendo aproximadamente 2,4 livros lidos apenas em parte e 2,5, inteiros. [...]
>
> Mariana Tokarnia. Brasil perde 4,6 milhões de leitores em quatro anos. *Agência Brasil*, 11 set. 2020. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2020-09/brasil-perde-46-milhoes-de-leitores-em-quatro-anos. Acesso em: 17 fev. 2022.

GoodStudio/Shutterstock.com/ID/BR

Um adolescente de 17 anos, intrigado com essa notícia, fez uma pesquisa em sua casa e comparou-a com os dados divulgados na notícia. Supondo que ele tenha começado a ler com 7 anos e que tinha lido 72 livros completos até o momento, responda ao que se pede.

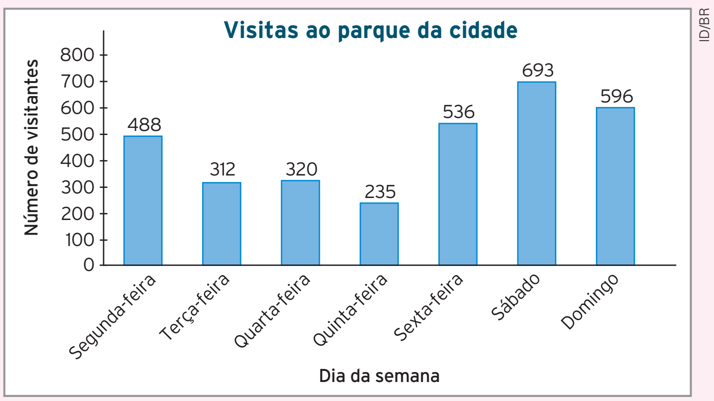
a) Podemos dizer que esse adolescente está na média informada por essa notícia? **Ele está acima da média.**

b) Qual é a média de leitura por ano desse adolescente? **7,2 livros por ano.**

c) Qual é a diferença entre a média dele e a média do brasileiro informada na pesquisa? **2,2 livros.**

RESPOSTA

6. a) Um gráfico possível é o apresentado a seguir.



Dados fornecidos pela administração do parque.

Responda sempre no caderno.

4. c) $D(2,5) = -0,16$; $D(3,2) = 0,54$; $D(1,7) = -0,96$; $D(2,8) = 0,14$; $D(3,1) = 0,44$.

4. Um pescador conseguiu pescar cinco peixes da mesma espécie. Os dados a seguir representam as medidas de massa dos peixes pescados, em quilograma.

2,5 3,2 1,7 2,8 3,1

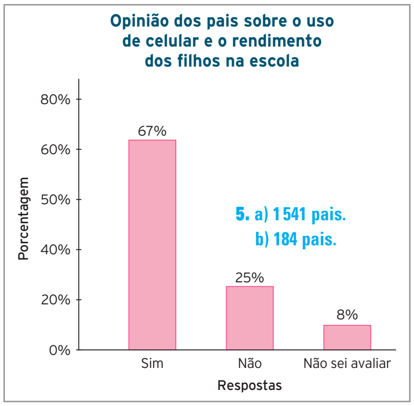
a) Qual é a medida de massa média dos peixes pescados? **2,66 kg**

b) Determine a amplitude desse conjunto de dados. **1,5 kg**

c) Qual é o desvio de cada valor?

d) Calcule o desvio-padrão dessas medidas. **Aproximadamente 0,54 kg.**

5. Foi realizada uma pesquisa com 2 300 pais de filhos em idade escolar. A pergunta feita foi: "Você acha que o uso do celular na escola atrapalha o rendimento escolar de seu filho?". As respostas foram apresentadas no gráfico a seguir. Veja.



5. a) 1 541 pais.
b) 184 pais.

Dados fornecidos pela administração do colégio.

a) Quantos pais responderam "sim" à pergunta?

b) Quantos pais responderam "não sei avaliar"?

c) Sabendo que os pais poderiam dar apenas uma resposta, que outro gráfico você utilizaria para representar os dados dessa pesquisa? Justifique. **Respostas pessoais.**

d) Em sua opinião, o uso do celular na escola atrapalha o rendimento escolar? Converse com os colegas e o professor sobre essa questão. **Resposta pessoal.**

7. a) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes respondam que faltam o título do gráfico e a escala no eixo vertical.

7. c) Não, pois nesse semestre foram vendidos 175 *notebooks*.

6. Observe a tabela a seguir. Nela, estão os dados de uma pesquisa sobre a frequência de visitantes no parque da cidade.

Visitas ao parque da cidade	
Dia da semana	**Número de visitantes**
Segunda-feira	488
Terça-feira	312
Quarta-feira	320
Quinta-feira	235
Sexta-feira	536
Sábado	693
Domingo	596

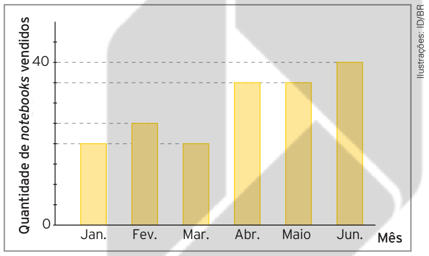
Dados fornecidos pela administração do parque.

a) Reúna-se com um colega para construir um gráfico para esses dados, utilizando uma planilha eletrônica. **Consulte a resposta neste manual.**

b) Calcule o número médio de visitas por dia durante essa semana. **$MA \simeq 454,29$**

c) Quais dias da semana têm a frequência abaixo da média? **Terça-feira, quarta-feira e quinta-feira.**

7. Observe o gráfico a seguir. Nele, estão representadas as vendas de *notebooks* em uma loja no primeiro semestre de 2023.



Dados fictícios.

a) Em sua opinião, falta alguma informação para que o gráfico seja mais bem compreendido? Se falta, qual seria?

b) É possível descobrir a escala do eixo vertical?

c) Se a meta da loja para esse primeiro semestre fosse vender 210 *notebooks*, você diria que essa meta foi alcançada? Justifique.

d) Qual é a média mensal de vendas de *notebooks* nessa loja? **Aproximadamente 29,17 *notebooks*.**

7. b) Sim, pois o eixo vertical, a partir do 0, foi dividido igualmente em 8 partes, ou seja, cada parte representa 5 *notebooks* vendidos.

- Na atividade **5**, inicialmente, analise com os estudantes o enunciado. Depois, verifique as concepções deles em relação ao tema abordado, já que o uso de celular, de certa forma, diz respeito a eles e a seu comportamento. Após a conclusão da atividade, promova um debate sobre os resultados apresentados.

  No item **c**, a resposta é pessoal, porém, para esse tipo de dado, o gráfico frequentemente utilizado é o de setores.

- Na atividade **7**, item **a**, procure conversar com os estudantes a respeito da falta do título e da escala do eixo vertical, que deve ser determinada no item **b**. Aproveite esse momento para discutir como eles podem determinar a escala do eixo vertical. Espera-se que eles percebam que a escala deve ser de 5 em 5, pois o número 40 está na oitava indicação do eixo e o eixo está dividido em oito partes iguais.

  No item **c**, os estudantes devem determinar, por meio do gráfico, a quantidade de *notebooks* vendidos por mês, para então adicionar os valores, chegando ao resultado de 175 unidades, o que leva à conclusão de que a meta do primeiro semestre não foi alcançada. Esse valor será usado para calcular a média, que é aproximadamente 29,17 *notebooks* vendidos por mês.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Se os estudantes apresentarem dificuldade na análise e interpretação das informações apresentadas em tabelas e gráficos, mostre-lhes alguns gráficos e tabelas publicados em jornais e revistas, impressos ou digitais.

Traga temas atuais que despertem a curiosidade deles acerca dos resultados das pesquisas retratadas nos gráficos e nas tabelas.

Se tiver oportunidade, disponibilize alguns momentos das aulas para construir diferentes e variados gráficos, utilizando um *software* de planilha eletrônica.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, o tema abordado é a inflação e seu efeito no poder de compra. Observe se os estudantes compreenderam que a inflação é o aumento generalizado e sustentado dos preços em uma economia e que isso impacta diretamente nosso poder de compra.
- Ante de iniciar o trabalho com o tema dessa seção, verifique o que os estudantes entendem sobre os significados da palavra “inflação”. Atente para o que eles afirmam sobre o assunto e incentive-os a compartilhar com os colegas.

DE OLHO NA BASE

Refletir sobre esse tema auxilia os estudantes a valorizar e utilizar os conhecimentos construídos sobre o mundo físico e social, para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 1**.

Justiça

O assunto tratado nessa seção possibilita aos estudantes refletir sobre como a inflação afeta nosso poder de compra e impacta a vida de várias pessoas, de empregados a empregadores, desenvolvendo atributos relacionados ao valor justiça e formando-os para a cidadania. Por isso, é tão importante uma inflação em níveis que permitam que o crescimento dos salários seja maior que o aumento generalizado e consistente dos preços.

AMPLIANDO HORIZONTES

O dragão invisível

Dragões costumam fazer muito sucesso quando estão nas telas do cinema. No mundo real, eles não existem, mas a figura do dragão foi usada durante muitos anos no Brasil como símbolo para a **inflação**. E é sobre a inflação e seu impacto no poder de compra do nosso dinheiro que vamos tratar nesta seção. Você sabe o que é inflação? Onde esse dragão vive? Como se comporta no Brasil? Como afeta a sua vida e a de sua família hoje? Você tem ideia de como a inflação pode mudar drasticamente seu futuro?

Segundo o economista Alexandre Schwartsman, a inflação é o aumento geral e persistente dos preços. O economista caracteriza esse aumento como geral, pois abrange diversos produtos e serviços, e como persistente, pois não ocorre de maneira ocasional, e sim frequente. Dessa forma, se apenas alguns preços sobem e todos os demais são mantidos, não há, de fato, uma inflação. Além disso, se há aumento dos preços em um mês específico e no outro os preços ficam estáveis, a situação também não caracteriza inflação. De maneira simplificada, a inflação é uma média do crescimento dos preços de um conjunto de bens e serviços em determinado período. Os preços aumentam por vários motivos; entre eles, podemos mencionar o aumento da demanda (quanto maior o número de compradores, maior o preço) e o aumento dos custos (se um produtor gasta mais para fabricar e comercializar uma mercadoria, o preço de venda tende a aumentar).

Se em um país a inflação está alta, significa que os preços estão subindo de modo generalizado. Quando o nosso dinheiro, ou seja, o valor que recebemos por meio de salários ou de outras rendas, não

Ilustrações: Bernardo França/ID/BR; João Picoli/ID/BR

278

OUTRAS FONTES

Leitão, M. *Saga brasileira*: a longa luta de um povo por sua moeda. Rio de Janeiro: Record, 2008.

Esse livro conta em detalhes a história política e econômica da inflação brasileira nos últimos quarenta anos.

aumenta no mesmo ritmo que a inflação, nosso poder de compra diminui, ou seja, nossa capacidade de comprar fica menor. Se essa situação perdurar, ao longo do tempo, o valor do dinheiro vai diminuindo. Por outro lado, em uma economia com inflação baixa, isto é, com baixo crescimento dos preços, ou até estabilidade dos preços (quando eles praticamente não aumentam), há conservação do valor do dinheiro.

Historicamente, o Brasil é marcado por períodos de altas taxas inflacionárias. Na década de 1980, por exemplo, os brasileiros passaram por momentos muito difíceis, em que a inflação foi tão alta que chegou a 80% ao mês. Isso mesmo! Imagine o aumento mensal de 80% no preço do arroz, do feijão, da carne, do leite, do pão, de passagens de ônibus e de mensalidades! Imagine que um livro que custava 100 reais em um mês passou a custar 180 reais no mês seguinte. Já pensou? Assustador, não? Felizmente, de 1994 a 2014, a inflação brasileira foi controlada, e esse período ficou marcado pela estabilidade inflacionária do país.

Todavia, os anos de 2015, 2016 e 2021 não foram fáceis, e o dragão invisível da inflação, que estava adormecido, acordou, criando dificuldades para muitas pessoas. O maior problema é que a inflação alta destrói quase que invisivelmente o poder de compra do nosso dinheiro. Ela gera uma série de problemas, afetando a vida de todas as pessoas, dos empregados aos empregadores. Impacta cruelmente a vida da população de menor poder aquisitivo. Suas consequências são produtos mais caros, menos dinheiro poupado e menos sonhos realizados. Por isso, é importante garantir uma inflação que permita o crescimento consistente dos salários e a estabilidade dos preços.

Para refletir

Responda sempre no caderno.

Consulte as respostas neste manual.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir.

1. O salário de Luciana é R$ 2000,00 por mês. Considerando uma inflação de 10% ao ano e um produto que custe R$ 10,00 o quilograma, analisem o percentual do poder de compra desse produto, com o salário de Luciana, em cada um dos cenários a seguir.
   a) Cenário 1: o salário de Luciana não aumentou nesse ano.
   b) Cenário 2: o salário de Luciana aumentou apenas 5% nesse ano.
   c) Cenário 3: o salário de Luciana aumentou 15% no ano.
2. Leiam atentamente o título de notícia apresentado a seguir.

Alta na inflação de agosto afetou mais população de baixa renda, aponta Ipea

Mylena Guedes. Alta na inflação de agosto afetou mais população de baixa renda, aponta Ipea. *CNN Brasil*, 15 set. 2021. Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/business/alta-na-inflacao-de-agosto-afetou-mais-populacao-de-baixa-renda-aponta-ipea/. Acesso em: 9 maio 2022.

Escrevam um texto que explique por que a inflação impacta mais as pessoas de baixa renda.

RESPOSTAS

DE OLHO NA BASE

Ao se reunirem com um colega e discutirem as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 9**.

1. **a)** Redução de 9,1% no poder de compra.
   b) Redução de 4,54% no poder de compra.
   c) Aumento de 4,55% no poder de compra.
   Converse com os estudantes sobre a importância da correção dos salários de acordo com a inflação. Quando isso não é feito, geram-se defasagens que dificilmente serão repostas no futuro, em decorrência do acúmulo da desvalorização ao longo do tempo.
2. Resposta pessoal. Deixe que os estudantes registrem suas impressões e produzam significados e conhecimentos. Explore não apenas os aspectos matemáticos, mas as questões sociais e econômicas decorrentes da inflação.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta dupla de páginas, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Na atividade **1**, se considerar necessário, relembre com os estudantes o conceito de probabilidade e probabilidade condicional. O número de jogadas não garante a vitória, pois se trata de um evento aleatório. Logo, a resposta correta é a alternativa **e**.
- Na atividade **2**, se julgar necessário, diga aos estudantes que escrevam no caderno as possíveis combinações que cada jogador, Andrea, Bruno e Carlos, pode fazer para ganhar o jogo.

  As combinações de cada jogador são:

  Andrea: (1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6). Ou seja, Andrea tem 5 combinações possíveis para ganhar.

  Bruno: (2, 20), (3, 19), (4, 18), (5, 17), (6, 16), (7, 15), (8, 14), (9, 13), (10, 12). Ou seja, Bruno tem 9 combinações possíveis para ganhar.

  Carlos: (8, 20), (9, 19), (10, 18), (11, 17), (12, 16), (13, 15). Ou seja, Carlos tem 6 combinações possíveis para ganhar.
- No item **d** da atividade **5**, aproveite para reforçar o significado de média e de amplitude de uma distribuição.
- No item **c** da atividade **6**, verifique se os estudantes concluem que o atleta que teve o desempenho mais homogêneo é aquele que apresenta o menor desvio-padrão. E no item **d**, o atleta que teve o desempenho menos homogêneo é aquele que apresenta o maior desvio-padrão.
- Na atividade **7**, os estudantes devem interpretar o gráfico de linhas e verificar o mês em que as duas linhas se cruzam. Isso ocorre no mês de agosto. Então, a alternativa correta é a **b**.
- Na atividade **8**, para determinar o gráfico de barras (ou de colunas) que melhor representa o gráfico de setores apresentado, os estudantes devem calcular a quantidade de pessoas que corresponde a cada setor do gráfico e verificar em qual item esses dados estão representados.

  Aproveite a oportunidade e propicie um momento de compartilhamento de ideias sobre os hábitos que favorecem a longevidade na vida das pessoas, incentivando os estudantes a ter um estilo de vida saudável.

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Indique no caderno a alternativa correta.

Ao participarem de uma partida de um jogo *on-line*, dois jogadores precisavam conquistar um território para ganhar o jogo. A chance de conquistar esse território era de 73%. Um dos jogadores sugeriu que, se eles jogassem 73 vezes o mesmo jogo, garantiriam que o território fosse conquistado. Já o outro sugeriu que, para a conquista, deveriam jogar 100 vezes o mesmo jogo.

Ambas as propostas estão erradas, pois a chance de conquistar o território: **Alternativa e.**

a) depende, no mínimo, de 101 jogadas.

b) depende, no mínimo, de 173 jogadas.

c) depende, no mínimo, de 10 000 jogadas.

d) é nula.

e) independe da quantidade de jogadas, pois é um evento aleatório.

2. Registre no caderno a alternativa que responde corretamente à atividade a seguir.

Andrea, Bruno e Carlos disputaram um jogo em que há 20 cartas numeradas de 1 a 20. As cartas são embaralhadas e colocadas na mesa com a face numerada virada para baixo. Cada participante escolhe duas cartas, cujos valores serão somados e deverão resultar em um valor. Porém, antes de escolher as duas cartas, eles devem escrever em um papel o número que eles acham que será a soma dos números das cartas escolhidas. Ganha o jogo aquele que conseguir acertar a previsão da soma das cartas escolhidas.

Sabendo que Andrea, Bruno e Carlos escreveram os valores 11, 22 e 28 como suas respectivas somas, quem tem a maior probabilidade de ganhar a disputa é: **Alternativa d.**

a) Andrea, pois a soma que escolheu é a menor.

b) Carlos, pois a soma que escolheu é a maior.

c) Bruno, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Andrea e 7 possibilidades para a escolha de Carlos.

d) Bruno, pois há 9 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Andrea e 6 possibilidades para a escolha de Carlos.

e) Carlos, pois há 13 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 10 possibilidades para a escolha de Bruno e 5 possibilidades para a escolha de Andrea.

3. Em uma escola de dança há 120 alunos, dos quais 30 dançam bolero, 40 dançam samba, 20 dançam tango e o restante dança forró. Metade dos alunos de bolero e de forró são mulheres. No tango há 13 homens e no samba há 30 mulheres.

a) Construa um quadro que descreva os dados dessa situação. **Consulte a resposta neste manual.**

b) Sorteando-se ao acaso um aluno dessa escola, qual é a probabilidade de ele ser uma mulher, sabendo que dança tango? $\frac{7}{20}$

c) Sorteando-se ao acaso um aluno dessa escola, qual é a probabilidade de ele dançar samba, sabendo que é um homem? $\frac{10}{53}$

4. Roberto realizou uma pesquisa com os estudantes de sua escola sobre a prática de esportes no centro esportivo. A tabela a seguir mostra o resultado da pesquisa.

Participação dos estudantes nas atividades esportivas

Participação \ Segmento de ensino	Fundamental I	Fundamental II	Ensino Médio
Não participaram	115	36	87
Participaram	89	187	100

Dados obtidos por Roberto.

a) Quantos estudantes ao todo responderam à pesquisa? **614 estudantes.**

b) Qual é a probabilidade de Roberto sortear um estudante do Ensino Fundamental I para uma excursão, sabendo que ele participa das atividades esportivas? $\frac{89}{376}$

c) Qual é a probabilidade de Roberto sortear um estudante que não participa das atividades esportivas, sabendo que ele é do Ensino Médio? $\frac{87}{187}$

RESPOSTA

3. a) Resposta possível:

Tipo de dança	Mulheres	Homens	Total
Bolero	15	15	30
Samba	30	10	40
Tango	7	13	20
Forró	15	15	30
Total	67	53	120

6. a) $MA_A = 2{,}65$; $MA_B = 2{,}875$; $MA_C = 2{,}875$; $MA_D = 3{,}025$; $MA_E = 2{,}875$

Responda sempre no caderno.

b) $DP_A \simeq 0{,}335$; $DP_B \simeq 0{,}259$; $DP_C \simeq 0{,}083$; $DP_D \simeq 0{,}192$; $DP_E \simeq 0{,}497$

5. Imagine que, durante o Carnaval 2023, um dos juízes tenha atribuído as seguintes notas para as 7 escolas do Grupo Especial em um dos quesitos avaliados:

Escola	A	B	C	D	E	F	G
Nota	9	8	8	7	9	8	10

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir.

a) Qual é a nota média que esse jurado atribuiu às escolas de samba? **Aproximadamente 8,4.**

b) Quais escolas ficaram abaixo da média? **B, C, D e F.**

c) Qual é a amplitude das notas? **3**

d) Se a escola D não tivesse desfilado, a amplitude e a média se alterariam? Por quê?

6. Cinco atletas (A, B, C, D, E) participaram de uma prova de salto em distância, em que cada um saltou 4 vezes. Veja, a seguir, a distância, em metro, obtida nos saltos de cada atleta.

- Atleta A: 2,8 2,2 3,1 2,5
- Atleta B: 3,2 2,5 2,8 3,0
- Atleta C: 2,9 2,8 3,0 2,8
- Atleta D: 3,1 3,2 3,1 2,7
- Atleta E: 2,8 3,2 3,4 2,1

a) Qual foi a distância média de cada atleta?

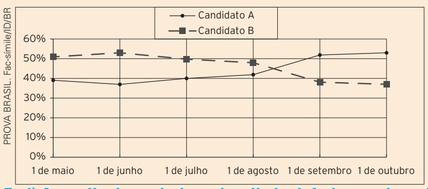
b) Qual é o desvio-padrão de cada grupo de dados?

c) Que atleta teve o desempenho mais homogêneo? **O atleta C.**

d) Que atleta teve o desempenho menos homogêneo? **O atleta E.**

7. Leia a questão a seguir e indique a alternativa correta no caderno.

(Prova Brasil) A evolução da intenção de votos dos eleitores por dois candidatos a prefeito de um município é apresentada pelo gráfico seguinte.



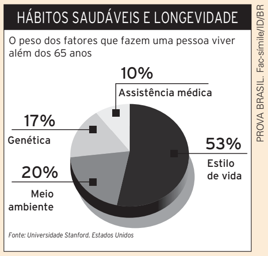
5. d) **A amplitude mudaria, pois o limite inferior se alteraria. Além disso, a média mudaria, pois considera todos os valores.**

Em que mês o candidato A alcançou, na intenção de votos dos eleitores, o candidato B? **Alternativa b.**

a) Julho.
b) Agosto.
c) Setembro.
d) Outubro.

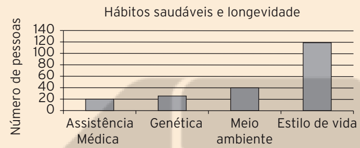
8. Indique a alternativa correta no caderno.

(Prova Brasil) Os alunos de uma turma do 9º Ano fizeram uma estimativa para 200 pessoas com base no estudo seguinte.

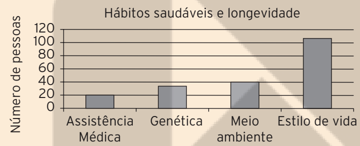


Que gráfico de barras melhor representa o estudo? **Alternativa b.**

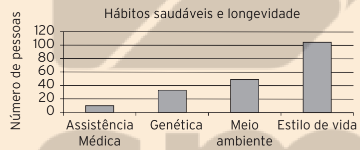
a)



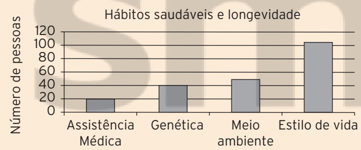
b)



c)



d)



AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Compreendi os conceitos de probabilidade (experimento aleatório, espaço amostral e evento)?
- Aprendi a calcular a probabilidade de ocorrência de um evento?
- Sei verificar e calcular a probabilidade condicional?
- Consigo diferenciar evento dependente de evento independente e calcular suas probabilidades?
- Consigo calcular e interpretar as medidas de tendência central (moda, média e mediana)?
- Consigo calcular e interpretar as medidas de dispersão (amplitude, desvio, variância e desvio-padrão)?
- Aprendi a analisar e interpretar gráficos estatísticos?
- Aprendi a utilizar a planilha eletrônica para calcular as medidas de tendência central e construir gráficos?
- Sei analisar gráficos apresentados na mídia verificando se eles apresentam possíveis erros que podem levar a interpretações errôneas?
- Aprendi a coletar, organizar e registrar dados?
- Procurei conversar com os colegas ou o professor para esclarecer minhas dúvidas?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Observe como os estudantes realizam as atividades propostas nesta dupla de páginas e, se necessário, retome os principais conceitos desenvolvidos na unidade. Proponha outras atividades que trabalhem com o cálculo de probabilidade e de probabilidade condicional.

Se algum estudante apresentar dificuldade na atividade **2**, aplique o mesmo jogo em sala de aula. Depois de algumas rodadas, peça a eles que escrevam as possibilidades de combinações para ganhar o jogo, analisando quais são os estudantes que escreveram os melhores números, ou seja, aqueles que tinham mais combinações possíveis para ganhar.

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
7 e 9.

Competências específicas de Matemática
3, 4, 7 e 8.

Habilidades

(EF09MA18) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.

(EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

UNIDADE 8

GRANDEZAS E MEDIDAS

SOBRE A UNIDADE

Nesta unidade, os estudantes vão ampliar seus conhecimentos sobre unidades de medida para distâncias muito grandes e distâncias muito pequenas e para medir massas muito pequenas. Para isso, serão utilizadas as potências de 10, a notação científica e os prefixos do Sistema Internacional (SI).

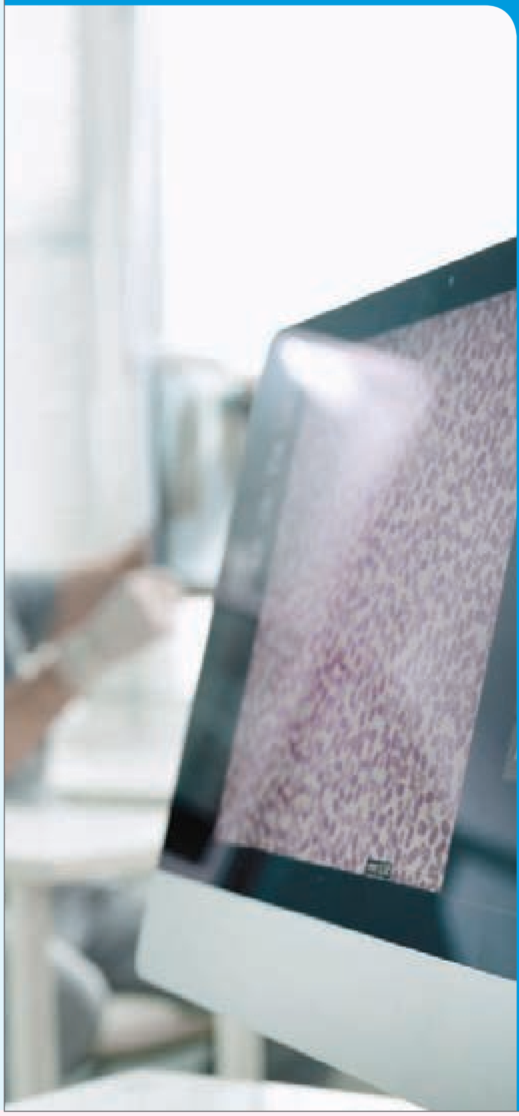
Além disso, as unidades de medida utilizadas na informática também serão apresentadas. Nesse caso, é importante destacar que, apesar de os prefixos serem os mesmos utilizados no SI, as potências são de base 2.

As situações apresentadas mostram a importância dessas unidades de medida em outras áreas do conhecimento, como Tecnologia e Ciências da Natureza.

Ainda nesta unidade, serão abordadas as expressões de cálculo de medidas de volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones por meio de situações-problema. Os estudantes terão, também, a oportunidade de observar uma experiência que compara a medida do volume da pirâmide com a medida do volume do prisma e de realizar uma experiência que compara a medida do volume do cone com a medida do volume do cilindro.

CAPÍTULO 1
Algumas grandezas

CAPÍTULO 2
Volume



Pressmaster/Shutterstock.com/ID/BR

PRIMEIRAS IDEIAS

Você já ouviu falar de microbiologia?

A microbiologia é a ciência que estuda os organismos extremamente pequenos, que não podem ser observados a olho nu. É o caso de bactérias, vírus, fungos, entre outros.

Os seres vivos estudados pela microbiologia são chamados de microrganismos. Eles apresentam diversos tamanhos e formas. Por exemplo, as bactérias têm dimensões médias de $1 \cdot 10^{-6}$ m a $5 \cdot 10^{-6}$ m, enquanto os vírus têm dimensões que variam de $2 \cdot 10^{-8}$ m a $3 \cdot 10^{-7}$ m.

Para o estudo desses microrganismos, é comum o uso de instrumentos como o microscópio.

1. Você sabe como funciona um microscópio?
2. Você já teve a oportunidade de observar um microrganismo?
3. Quais são as dimensões médias, em milímetro, de uma bactéria?
4. De modo geral, qual microrganismo é maior: a bactéria ou o vírus?

← Os microscópios são instrumentos utilizados para observar e analisar microrganismos. Na imagem, pesquisadora observa no microscópio uma amostra em uma lâmina. Foto de 2020.

PRIMEIRAS IDEIAS

- Chame a atenção dos estudantes para a imagem, que retrata um laboratório onde uma cientista faz observações em um microscópio. Peça a eles que observem que o monitor do computador está projetando a imagem do que está sendo observado pelo microscópio.
- Esclareça aos estudantes que, em um laboratório de microbiologia, identificam-se e estudam-se os microrganismos quanto à capacidade infectante, ao crescimento e à reprodução deles. Enfatize a importância de investimentos públicos na ciência e na divulgação científica para erradicar determinadas doenças graves e raras que ceifam a vida de várias pessoas e famílias.
- Promova algumas práticas orais com base em dados científicos para ajudar a turma a perceber a importância da ciência em prol da sociedade, como vacinas, tratamentos para câncer, para a produção de alimentos, etc.

RESPOSTAS

1. Resposta pessoal. Se julgar oportuno, proponha aos estudantes que façam uma pesquisa sobre o funcionamento de um microscópio e, se necessário, peça auxílio ao professor de Ciências. Na página 287 do Livro do Estudante, no boxe *+Interessante*, os estudantes terão a oportunidade de conhecer mais sobre os microscópios.
2. Resposta pessoal. Se julgar oportuno, combine com o professor de Ciências a ida ao laboratório da escola, para proporcionar aos estudantes a observação de um microrganismo.
3. As dimensões médias de uma bactéria vão de 0,001 mm a 0,005 mm. Essa questão permite verificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre notação científica e conversões de unidades. Peça a eles que expliquem os procedimentos utilizados para responder à pergunta. Uma estratégia é escrever as medidas com um número decimal sem a potência de 10 e, depois, converter metro em milímetro.
4. A bactéria. Essa questão permite avaliar como os estudantes fazem a comparação de números escritos em notação científica. Solicite a eles que expliquem os procedimentos adotados para responder à pergunta. Uma estratégia é comparar os expoentes das potências de base 10.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Medidas muito grandes ou muito pequenas.
- Prefixos do Sistema Internacional (SI) de unidades.
- Unidades de medida de comprimento.
- Unidades de medida de massa.
- Unidades de medida de informática.

Objetivos

- Ampliar e construir significado sobre as medidas muito grandes ou muito pequenas.
- Conhecer os prefixos utilizados no Sistema Internacional (SI) de unidades.
- Utilizar a notação científica ou as potências de 10 para expressar uma medida muito grande ou uma medida muito pequena.
- Reconhecer unidades de medida utilizadas na informática.
- Realizar a conversão entre unidades de medida.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo das grandezas comprimento e massa para representar medidas muito grandes ou muito pequenas, compreendendo ainda as unidades de medida utilizadas na informática.

  Os conhecimentos abordados neste capítulo, bem como no próximo, são de fundamental relevância para que os estudantes compreendam o mundo que os cerca e sejam capazes de resolver problemas do cotidiano deles.

MEDIDAS MUITO GRANDES OU MUITO PEQUENAS

- Neste capítulo, é importante que os estudantes saibam multiplicar números com potência de base 10 e representá-los em notação científica.
- Peça a eles que tentem ler a medida que representa a distância entre a Terra e a estrela Alpha Centauri C para que percebam a dificuldade de expressar números dessa ordem de grandeza e a necessidade de criar uma unidade de medida mais conveniente.
- Converse com os estudantes sobre a importância da Matemática no desenvolvimento de outras ciências, como a Astronomia, a Química e a Física.

Capítulo 1

ALGUMAS GRANDEZAS

Para o desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes tenham se familiarizado com os conceitos relacionados a grandezas e medidas estudados em anos anteriores e saibam operar com números em notação científica.

Medidas muito grandes ou muito pequenas

Ao olhar para o céu à noite, podemos observar vários corpos celestes, como estrelas, planetas e a Lua. Sabemos que existem milhares de estrelas visíveis que parecem estar perto da Terra, mas que, na verdade, estão tão distantes que é praticamente impossível para o olho humano estimar essa distância e diferenciar quais estão mais próximas e quais estão mais distantes.

Essas distâncias são tão grandes que medi-las em quilômetros se torna inconveniente. Por exemplo, a medida da distância entre a Terra e a estrela Alpha Centauri C, a mais próxima depois do Sol, é de aproximadamente 41 320 000 000 000 km. Mas será que existe uma unidade de medida mais conveniente para indicar distâncias como essa?

O **ano-luz** é a distância percorrida pela luz em um ano e equivale a aproximadamente 9 461 000 000 000 km. Podemos dizer, então, que a estrela Alpha Centauri C está a aproximadamente 4,37 anos-luz de distância da Terra.

Também podemos usar outras unidades de medida além do ano-luz, como a **unidade astronômica** (UA), que é a distância média da Terra ao Sol e equivale a aproximadamente 150 000 000 km, ou o **parsec** (pc), que equivale a cerca de 3,26 anos-luz.

Homem observa o cometa Neowise em Los Angeles, Estados Unidos. Foto de 2020.

284

OUTRAS FONTES

Ávila, G. Aristarco e a distância do Sol. *Revista do Professor de Matemática*, n. 55. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/55/1.htm. Acesso em: 4 ago. 2022.

O autor desse artigo faz uma proposta que visa incentivar os estudantes a explicar as razões por que o Sol está mais longe da Terra do que a Lua. E, também, discorre sobre o modo como Aristarco comparou as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua.

Prefixos do Sistema Internacional (SI) de unidades

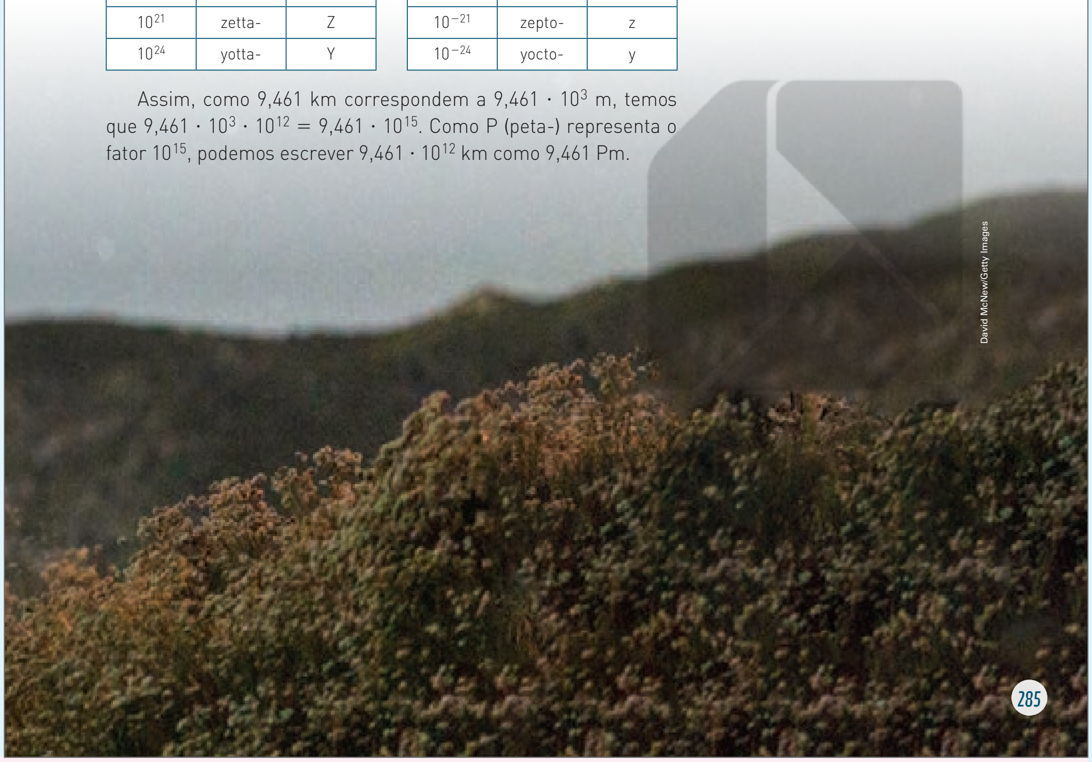
Assim como é inviável usar o quilômetro para medir distâncias astronômicas, medir as dimensões de um vírus em milímetro também pode não ser conveniente. Uma maneira de escrever medidas representadas por números muito grandes ou muito pequenos é o emprego da notação científica.

Por exemplo, um ano-luz equivale a 9 461 000 000 000 km e podemos representá-lo por $9{,}461 \cdot 10^{12}$ km em notação científica. Podemos simplificar ainda mais essa escrita utilizando outras unidades de medida. Para isso, substituímos o fator de potência 10 por um dos prefixos do quadro a seguir.

Fator	Nome	Símbolo
10^1	deca-	da
10^2	hecto-	h
10^3	quilo-	k
10^6	mega-	M
10^9	giga-	G
10^{12}	tera-	T
10^{15}	peta-	P
10^{18}	exa-	E
10^{21}	zetta-	Z
10^{24}	yotta-	Y

Fator	Nome	Símbolo
10^{-1}	deci-	d
10^{-2}	centi-	c
10^{-3}	mili-	m
10^{-6}	micro-	μ
10^{-9}	nano-	n
10^{-12}	pico-	p
10^{-15}	femto-	f
10^{-18}	atto-	a
10^{-21}	zepto-	z
10^{-24}	yocto-	y

Assim, como 9,461 km correspondem a $9{,}461 \cdot 10^3$ m, temos que $9{,}461 \cdot 10^3 \cdot 10^{12} = 9{,}461 \cdot 10^{15}$. Como P (peta-) representa o fator 10^{15}, podemos escrever $9{,}461 \cdot 10^{12}$ km como 9,461 Pm.



David McNew/Getty Images

PARA EXPLORAR

Era virtual

No *site* Era Virtual, é possível encontrar museus do Brasil que permitem uma visita virtual. Entre eles está o Museu do Universo, que divulga a astronomia e outras ciências afins, localizado no Rio de Janeiro.

Disponível em: https://www.eravirtual.org. Acesso em: 9 maio 2022.

PREFIXOS DO SISTEMA INTERNACIONAL (SI) DE UNIDADES

- Retome com os estudantes os múltiplos e submúltiplos das unidades do Sistema Internacional (SI) e destaque os prefixos conhecidos, por exemplo, o k em kg ou em km. Depois, comente que os quadros da página apresentam um conjunto de prefixos adotado para o uso das unidades do Sistema Internacional, com o objetivo de expressar valores de grandezas muito maiores ou muito menores do que a unidade utilizada sem o prefixo no SI.
- Se julgar oportuno, proponha aos estudantes que visitem o *site* do Inmetro, disponível em: https://www.gov.br/inmetro/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/documentos-tecnicos-em-metrologia/quadro-geral-de-unidades-de-medida-no-brasil.pdf/view (acesso em: 4 ago. 2022), para compreender melhor e escrever corretamente as unidades de medidas adotadas no Brasil.
- Explique que a notação científica permite escrever um número utilizando potências de 10 em vez de escrever todos os algarismos. Além disso, é possível usar os prefixos do SI, que, em alguns casos, é mais conveniente, pois evita a necessidade de empregar potências de 10 para expressar valores muito grandes ou muito pequenos de uma grandeza.
- Se julgar necessário, retome a escrita de um número em notação científica. Pergunte aos estudantes se eles sabem para que serve a notação científica e qual é a sua relação com as medidas, se já conheciam essa maneira de representar as grandezas e se acham que o registro feito dessa forma é mais simples.

DE OLHO NA BASE

Compreender que o uso da notação científica e dos prefixos do SI são recursos para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA18**.

Além disso, ao lidarem com esse conceito em situações de leitura e escrita das medidas em outras áreas do conhecimento, os estudantes estarão desenvolvendo também a **competência específica de Matemática 3**.

- Incentive os estudantes a fazer uma visita virtual ao Museu do Universo, sugerida no boxe *Para explorar*. Depois, solicite a eles que relatem o que observaram. Caso não seja possível acessar virtualmente alguns dos museus disponíveis no *link* https://www.eravirtual.org/como-instalar-o-adobe-flash-player/ (acesso em: 4 ago. 2022), é possível encontrar orientações para a configuração do navegador.

UNIDADES DE MEDIDA DE COMPRIMENTO

- Comente com os estudantes que a nanotecnologia é uma ciência associada a diversas áreas de pesquisa. Ela é amplamente utilizada em medicina diagnóstica, na produção de remédios e cosméticos, em componentes de processadores eletrônicos, na engenharia, entre outros usos, como nos nanotubos da foto apresentada nesta página. Informe aos estudantes que os nanotubos de carbono têm grande resistência mecânica, excelente condutividade térmica e razoável condutividade elétrica e estão presentes em raquetes de tênis, bicicletas, navios, etc.
- Se considerar oportuno, proponha aos estudantes que realizem uma pesquisa sobre nanotecnologia seguindo este roteiro:
  - Cite duas aplicações da nanotecnologia.
  - Quais seriam os benefícios das aplicações da nanotecnologia?
  - Quais riscos a utilização de componentes produzidos pela nanotecnologia podem apresentar?
- O trabalho com as unidades de medida de comprimento que expressam números muito pequenos pode ser o ponto de partida para uma abordagem interdisciplinar que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09CI03** [Identificar modelos que descrevem a estrutura da matéria (constituição do átomo e composição de moléculas simples) e reconhecer sua evolução histórica] do componente curricular Ciências.

DE OLHO NA BASE

Com os exemplos desta dupla de páginas, os estudantes têm a oportunidade de reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA18**.

Além disso, essa abordagem pretende dar maior significado ao conteúdo, possibilitando aos estudantes refletir sobre a importância da Matemática como suporte para a leitura e a escrita de unidades de medidas em outras áreas do conhecimento, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

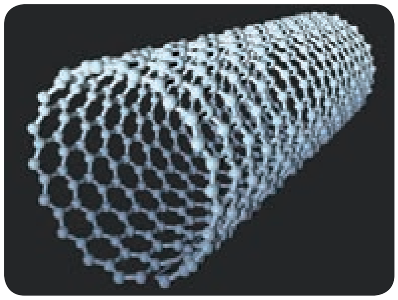
Unidades de medida de comprimento

Com o avanço da ciência e da tecnologia e o uso de instrumentos como o telescópio e o microscópio, foi possível analisar e dimensionar distâncias e corpos muito grandes, como astros do Universo, e também analisar e criar objetos muito pequenos, invisíveis a olho nu.

Para expressar medidas de comprimento muito grandes ou muito pequenas, podemos utilizar potências de 10.

Exemplo A

A nanotecnologia é uma técnica utilizada para desenvolver produtos e processos tecnológicos por meio da transformação da matéria em partículas minúsculas. Um exemplo de sua utilização são os nanotubos, que são estruturas cilíndricas formadas por átomos de carbono. O diâmetro dessas estruturas mede de 1 a 3 nanômetros, e seu comprimento, 1 000 nanômetros.



Promotive/Shutterstock.com/ID/BR

↑ Representação gráfica computadorizada de nanotubos de carbono.

O **nanômetro** (nm) é uma unidade de medida que corresponde a um bilionésimo do metro. Usando os valores do quadro da página anterior, observamos que o prefixo nano corresponde a 10^{-9} e, portanto, podemos escrever:

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} = 0{,}000000001 \text{ m}$$

Agora, acompanhe como podemos converter 3 nanômetros em milímetros utilizando potências de 10.

Primeiro, convertemos nanômetro em metro:

$$3 \text{ nm} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Depois, como 1 m equivale a 1 000 mm ou 10^3 mm, fazemos:

$$3 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 3 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{3} \text{ mm} =$$
$$= 3 \cdot 10^{-9+3} \text{ mm} =$$
$$= 3 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$$

Portanto, 3 nm equivalem a $3 \cdot 10^{-6}$ mm.

Exemplo B

Outra unidade de medida de comprimento muito utilizada é o micrômetro. Ele é utilizado, por exemplo, para medir diâmetros de determinados fios. O **micrômetro** corresponde a um milionésimo do metro e pode ser representado da seguinte maneira:

$$1\ \mu m = 10^{-6}\ m = 0{,}000001\ m$$

O diâmetro médio de um fio de teia de aranha mede 0,00000015 m. Qual é a medida desse diâmetro em micrômetro?

Para converter metro em micrômetro, podemos proceder da seguinte maneira:

$$0{,}00000015\ m = 0{,}15 \cdot 10^{-6}\ m = 0{,}15\ \mu m$$

Portanto, 0,00000015 m equivale a 0,15 µm.

+ INTERESSANTE

Você sabe a diferença entre o microscópio óptico e o microscópio eletrônico?

O microscópio é um aparelho que permite obter imagens ampliadas de estruturas, revelando detalhes que não conseguiríamos ver a olho nu.

A capacidade de observar detalhes se deve ao limite de resolução, que é a menor distância entre dois pontos que permite que, ao serem observados, eles sejam vistos como dois pontos distintos.

O limite de resolução do olho humano é da ordem de 0,2 mm. Isso significa que, se dois pontos estão a uma distância inferior a 0,2 mm, eles serão vistos a olho nu como um único ponto. Já o limite de resolução do microscópio óptico é 0,2 µm e o do microscópio eletrônico é 0,2 nm.

O que determina o limite de resolução nos microscópios é a lente utilizada, que no microscópio óptico é de vidro e no eletrônico é eletromagnética.

Fonte de pesquisa: Plataforma de Microscopia Eletrônica da Universidade Federal Fluminense. Disponível em: http://www.meib.uff.br/?q=content/qual-diferen%C3%A7a-entre-microsc%C3%B3pio-%C3%B3tico-e-eletr%C3%B4nico. Acesso em: 9 maio 2022.

Prasolov Alexei/Shutterstock.com/ID/BR

↑ Microscópio eletrônico.

underworld/Shutterstock.com/ID/BR

↑ Microscópio óptico.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Vírus são estruturas simples com diâmetro que, em geral, mede de 0,00000002 m a 0,0000003 m. Eles só podem ser vistos com o auxílio de microscópios eletrônicos.

   Considerando esse texto, faça o que se pede em cada item.

   a) Você acha a unidade de medida utilizada para expressar o diâmetro do vírus adequada? **Resposta pessoal.**

   b) Que unidade de medida você utilizaria? **Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes utilizem o nanômetro.**

   c) Reescreva o texto no caderno, utilizando a unidade de medida que você indicou no item **b**. **Resposta de acordo com a unidade indicada no item b: 20 nm e 300 nm.**

2. Copie as sentenças a seguir no caderno, substituindo o ■ por um número em notação científica.

   a) 150 000 000 km = ■ km **$1{,}5 \cdot 10^{8}$**

   b) 23 000 000 000 000 000 000 m = ■ km **$2{,}3 \cdot 10^{16}$**

   c) 0,000000000027 m = ■ m **$2{,}7 \cdot 10^{-11}$**

   d) 0,0000000000000000000587 mm = ■ m **$5{,}87 \cdot 10^{-24}$**

+ INTERESSANTE

Comente com os estudantes que o físico alemão Ernst Ruska (1906-1988), no dia 9 de março de 1931, apresentou o primeiro microscópio eletrônico de transmissão. Devido à importância desse aparelho, em 1986 Ruska recebeu o Prêmio Nobel de Física. Antes dele, os microscópios ópticos, que utilizam lentes de cristal e luz visível, conseguiam aumentar cerca de 30 mil vezes um objeto, o suficiente para que bactérias e vírus fossem analisados. Ruska conseguiu, com seu aparelho, ampliar 1 milhão de vezes os objetos e alguns tipos de vírus, permitindo que eles fossem observados nas telas do equipamento.

- Na atividade **1**, é esperado que os estudantes percebam a inconveniência de utilizar o metro, pois a leitura das medidas pode ser dificultada pela quantidade de dígitos dos números utilizados nelas.

DE OLHO NA BASE

A atividade **1** permite aos estudantes reconhecerem e empregar unidades usadas para expressar medidas muito pequenas, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA18**.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Proponha aos estudantes a realização de uma pesquisa. Peça a eles que busquem, em jornais, em revistas ou na internet, duas notícias que envolvam a ciência ou a tecnologia. Em uma das notícias, eles deverão encontrar um exemplo de número muito grande e, em outra, de número muito pequeno. Solicite-lhes que escrevam um resumo das notícias e que expressem os números encontrados em notação científica.

UNIDADES DE MEDIDA DE MASSA

- Leia o texto e analise com os estudantes o gráfico que apresenta dados sobre a concentração do $MP_{2,5}$ (partículas inaláveis de poeira, metais e componentes tóxicos) coletados entre 2015 a 2020, em alguns locais do estado de São Paulo. Evidencie que a unidade de medida utilizada no gráfico é micrograma por metro cúbico.
- Comente com os estudantes que, principalmente nas grandes cidades, a poluição do ar tem sido associada ao agravamento de doenças respiratórias, neurológicas e cardiovasculares, especialmente em crianças e idosos.
- Se considerar oportuno, reúna os estudantes em duplas ou em trios para que proponham ações que possam contribuir com a boa qualidade do ar. Solicite a eles que compartilhem as propostas com os demais grupos.
- Na atividade **4**, oriente os estudantes a buscar a informação da concentração média de $MP_{2,5}$ recomendada pela OMS no texto que introduz o tópico sobre unidades de medida de massa.

DE OLHO NA BASE

Ao discutir o diagnóstico da qualidade do ar nos quatro pontos da região Metropolitana de São Paulo, os estudantes observam aspectos quantitativos e qualitativos presentes no cotidiano, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes e contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 4**.

Além disso, a reflexão sobre esse tema possibilita aos estudantes argumentarem com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável, contribuindo também para o desenvolvimento da **competência geral 7**.

Unidades de medida de massa

Da mesma forma que existem comprimentos muito grandes ou muito pequenos, também temos elementos cujas massas são muito pequenas ou muito grandes e, desse modo, podemos utilizar as potências de 10 para expressar suas medidas.

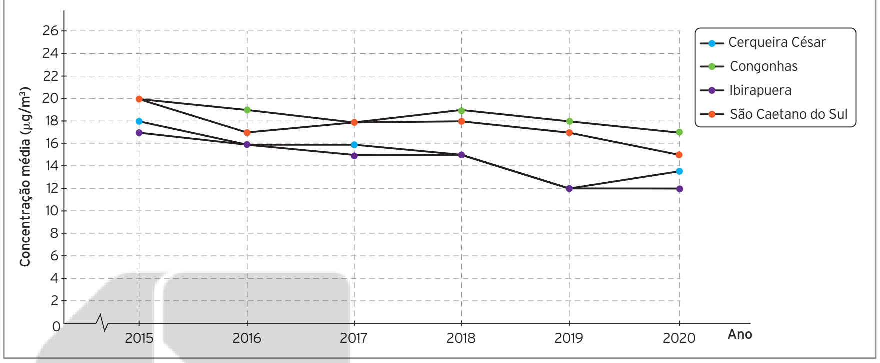
Vamos analisar a situação a seguir.

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), um local tem ar limpo se apresentar uma média anual de, no máximo, 0,00001 grama de material particulado fino ($MP_{2,5}$) por metro cúbico.

$MP_{2,5}$: são partículas inaláveis de poeira, metais e componentes tóxicos com medida do diâmetro menor que ou igual a $2,5 \cdot 10^{-6}$ m.

O gráfico a seguir apresenta dados de 2015 a 2020 sobre a concentração média anual de $MP_{2,5}$ em alguns locais do estado de São Paulo.

Concentração média anual de $MP_{2,5}$ de acordo com algumas estações de monitoramento da região Metropolitana de São Paulo (2015 a 2020)



Fonte de pesquisa: Qualidade do ar. Cetesb. Disponível em: https://cetesb.sp.gov.br/ar/publicacoes-relatorios/. Acesso em: 9 maio 2022.

Observe que em todas as estações de monitoramento apresentadas no gráfico, a quantidade de $MP_{2,5}$ ultrapassa a recomendação da OMS, pois 0,00001 grama por metro cúbico é o mesmo que 10 microgramas por metro cúbico.

$$0{,}00001\ \text{g} = 10 \cdot 10^{-6}\ \text{g} = 10\ \mu\text{g}$$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

3. Escreva as medidas a seguir em microgramas.

a) 0,0000725 g **72,5 µg** b) 0,0032 g **3 200 µg** c) 0,04 mg **40 µg** d) 0,008 mg **8 µg**

4. De acordo com a Companhia Ambiental do Estado de São Paulo (Cetesb), a concentração média de $MP_{2,5}$ na cidade de São José do Rio Preto foi de 0,000085 grama por metro cúbico no dia 8/10/2020. Quantas vezes ela é maior que a concentração recomendada pela OMS? **8,5 vezes maior.**

Unidades de medida de informática

Imagine que você precise usar um computador. Para isso, entra em um amplo salão onde há grandes máquinas, com inúmeros botões e fios em toda a sua extensão. Sem saber o que fazer, pede ajuda a um dos técnicos que estão no salão. Estranho, não é?

Atualmente, para usar um computador, nada mais disso é necessário. No entanto, esse era o procedimento para operar o primeiro computador eletrônico, o Eniac, criado em 1946.

Bettmann Archive/Getty Images

↑ **Salão onde ficava o Eniac, primeiro computador eletrônico, na década de 1940, na Filadélfia, Estados Unidos.**

O Eniac era imenso, pesava cerca de 30 toneladas, ocupava uma área que media cerca de 180 m^2 e consumia muita energia elétrica, pois era formado por milhares de válvulas, que eram grandes e esquentavam muito.

Em pouco tempo, o Eniac foi substituído por computadores que usavam transistores em vez de válvulas. Quando um transistor era ligado, o computador registrava essa informação com o dígito 1; quando era desligado, ele registrava com o dígito 0. Desse modo, o computador formava números com a combinação desses dois dígitos.

Esse mecanismo básico de registro de informações existe até hoje. Toda informação armazenada e processada em computadores é representada por uma sequência numérica formada apenas pelos dígitos 0 e 1. Cada um desses dígitos equivale a um ***bit*** (b), do inglês *binary digit*, dígito binário.

> *Bit* é a menor quantidade de informação que um computador pode processar, ou seja, é a menor unidade de medida de informática.

Os *bits* são agrupados em conjuntos de 8, formando um ***byte*** (B). Ou seja, um *byte* pode ser a combinação de 8 *bits*; por exemplo, 00011001.

Cada *byte* corresponde a um **caractere**. Um caractere é qualquer letra do alfabeto, algarismo, sinal de pontuação, espaço em branco, etc., que pode ser representado em um computador.

SISTEMA BINÁRIO

O sistema numérico que utiliza somente os algarismos 0 e 1 é denominado sistema binário.

PARA EXPLORAR

***Bits* e *bytes* – que mundo é esse? – Os números e a invenção do computador**

Esse vídeo mostra como surgiu e como funciona o computador. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=WtjRa_W6EwQ. Acesso em: 9 maio 2022.

UNIDADES DE MEDIDA DE INFORMÁTICA

- Converse com os estudantes sobre os primeiros computadores que surgiram. Chame a atenção deles sobre a foto desta página, que mostra o salão onde ficava o Eniac, o primeiro computador eletrônico, na década de 1940, na Filadélfia, Estados Unidos.
- Alguns estudantes costumam confundir o sistema de numeração decimal e binário. Deixe claro que o sistema binário possui apenas 2 algarismos (1 e 0) e o decimal, 10 algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9).
- O vídeo sugerido no boxe *Para explorar* faz parte de uma série da TV Escola e aborda uma das maiores invenções da humanidade, o computador, equipamento comum e importante no dia a dia. O primeiro episódio da série *Bits e bytes* mostra seu surgimento e como ele é, capaz de realizar com precisão tarefas que compreendem desde cálculos simples até os mais complexos, como aqueles para projetar prédios.

DE OLHO NA BASE

Entrando em contato com o sistema binário, os estudantes poderão reconhecer as unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como capacidade de armazenamento de computadores, entre outras, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA18**.

OUTRAS FONTES

PEREIRA, L. M.; LIMA, L. F. Uma proposta de ensino do sistema binário na educação básica. *In*: *Anais do Encontro de Educação Matemática*, n. 2, 2017, Universidade Estadual de Goiás, *Campus* Cora Coralina. Disponível em: https://www.anais.ueg.br/index.php/eem/article/view/9861. Acesso em: 4 ago. 2022.

Esse artigo propõe uma metodologia para o ensino do sistema binário na educação básica, levando em conta desde o contexto histórico do tema até um plano de uma atividade dialógica investigativa.

- É importante orientar os estudantes que, apesar de os prefixos do SI e de os prefixos utilizados na informática serem os mesmos, podemos notar algumas diferenças. Verifique se eles perceberam que o símbolo que representa o prefixo quilo é representado no SI com letra minúscula (k) e na informática, com letra maiúscula (K). Além disso, no SI, o símbolo k representa o fator 1 000 e, na informática, o fator 1 024, pois a base utilizada é diferente – enquanto no primeiro caso trabalhamos com o sistema decimal (de base 10), no segundo caso, o sistema é binário (de base 2).

Honestidade

Inicie uma conversa com os estudantes sobre o uso da internet. Faça algumas perguntas: O que vocês costumam acessar na internet?; Quais são os serviços oferecidos pela internet?; Quais são os benefícios que a internet oferece?; Vocês consideram a internet um ambiente seguro?

Em seguida, leia o texto com os estudantes e converse sobre a diferença entre *hackers* e *crackers*. Se julgar necessário, apresente-lhes um glossário de termos e expressões comuns nesse ambiente, disponível em: https://www.safernet.org.br/site/prevencao/glossarios/internet (acesso em: 4 ago. 2022.)

Questione-os: Vocês sabem o que é crime virtual? Conhecem alguém que tenha sido vítima de crime virtual? Finalize a conversa orientando os estudantes sobre o uso adequado e seguro da internet.

DE OLHO NA BASE

O conteúdo do boxe *Honestidade na internet* também contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**, para que os estudantes exercitem a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, acolhendo e valorizando a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

HONESTIDADE NA INTERNET

Hoje em dia, é muito comum o uso da internet. Por meio dela, podemos acessar redes sociais, trocar mensagens com amigos e familiares, fazer compras, ler notícias e livros, assistir a vídeos, jogar *games*, entre outras atividades.

Mas você já parou para pensar nos perigos que a internet traz? Você já ouviu falar em *hackers* e *crackers*?

Ambos são pessoas que entendem muito de *software* e *hardware*. A diferença é que o *hacker*, com esse conhecimento, trabalha para melhorar a segurança dos sistemas, enquanto o *cracker* usa suas técnicas para benefício próprio e comete crimes virtuais.

- **Com os colegas, pesquise alguns casos em que *crackers* foram presos com a ajuda de *hackers*.**

Resposta pessoal.

Por exemplo, a letra *b* ocupa o espaço de 1 *byte* no computador. Assim, se você digita a palavra “bola”, aparece na tela a palavra como você a conhece, mas na memória do computador fica armazenado um conjunto de 4 *bytes*, ou 32 *bits*:

$$\text{bola} \longrightarrow \underbrace{01100010}_{\text{b}}\,\underbrace{01101111}_{\text{o}}\,\underbrace{01101100}_{\text{l}}\,\underbrace{01100001}_{\text{a}}$$

Como são necessários muitos *bytes* para guardar informações, é preciso ter bastante espaço de armazenamento e, para representar esse espaço, existem outras unidades de medida. Veja o quadro a seguir.

Unidade de medida	Símbolo	Valor equivalente	Quantidade de caracteres (*bytes*)
byte	B	8 *bits*	$2^0 = 1$
quilobyte	KB	1 024 *bytes*	$2^{10} = 1\,024$
megabyte	MB	1 024 KB	$2^{20} = 1\,048\,576$
gigabyte	GB	1 024 MB	$2^{30} = 1\,073\,741\,824$
terabyte	TB	1 024 GB	$2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$

No sistema binário, 1 KB equivale a 2^{10} *bytes*, ou seja, 1 024 *bytes*. Isso significa que a capacidade de armazenamento de 1 KB é 1 024 caracteres. Da mesma maneira, 1 MB tem capacidade de armazenar 1 048 576 caracteres, e assim por diante.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

5. As informações a seguir são referentes a um computador.

Processador[1]: 3,2 GHz Memória RAM[2]: 8 GB HD[3]: 2 TB *Drive*[4]: unidade de DVD-RW	Monitor: 27,0 (pol.) LED HD antirreflexo Teclado: padrão brasileiro Mouse: Óptico

1. Efetua o processamento dos dados.
2. É a memória do computador; executa programas.
3. Abreviatura de *hard disk*, que significa “disco rígido”; armazena dados.
4. Dispositivo que lê e/ou grava dados em DVD.

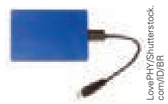
a) Qual é a capacidade de armazenamento da memória RAM desse dispositivo? E do HD?

b) Quantos caracteres é possível armazenar no HD desse computador?

c) Em sua opinião, o HD desse computador tem uma boa capacidade de memória?

6. Além do HD do computador, existem outros dispositivos que são utilizados para armazenar dados. Observe alguns deles e suas possíveis capacidades de armazenamento.

DVD-R: 4,7 GB.



HD externo: 1 TB.

Pen-drive: 256 GB.

Considerando as capacidades mostradas nos exemplos, responda aos itens a seguir.

a) Dos dispositivos apresentados, qual tem a maior capacidade de armazenamento? E a menor?

b) Quantos *pen-drives* são necessários para armazenar a mesma quantidade de informações que um HD externo? **4 *pen-drives*.**

5. a) 8 GB e 2 TB.
b) 2 199 023 255 552 caracteres.
c) Resposta pessoal.

6. a) O dispositivo que tem a maior capacidade de armazenamento de dados é o HD externo, e o que tem a menor capacidade é o DVD-R.

290

- Promova, de maneira recorrente, rodas de conversa que possibilitem aos estudantes sentirem que o ambiente escolar é um espaço livre de quaisquer atos violentos (verbais ou não verbais), no qual o respeito a diferentes opiniões e posicionamentos devem ser constantemente desenvolvidos. Aproveite esses momentos para buscar soluções coletivas e democráticas, de modo que seja possível identificar, prevenir e reverter situações de conflito no ambiente escolar. Assim, os estudantes podem ter sentimentos de pertencimento em relação à escola e reconhecê-la como um espaço saudável de convivência.

Nesse sentido, esteja atento a possíveis práticas de *bullying* para intervir e mediar qualquer manifestação de violência física ou psicológica, intencional e repetitiva praticada por algum estudante ou grupo, promovendo reflexões e acompanhando os envolvidos em um processo de mediação e de reflexão, de modo a contribuir para o processo de aprendizagem e o gerenciamento das emoções deles.

“É importante destacar que *bullying* é um fenômeno de violência bem específico que se caracteriza pela intimidação e humilhação sistemática e contínua entre pares, assim, quando um caso é identificado, é necessário atenção às pessoas envolvidas: à vítima que passou por um período de violência e sofrimento, ao/à agressor/a que, de alguma forma vê a violência como um recurso, e às pessoas que acompanharam como espectadoras as situações de *bullying* sem fazer interferências.”

Fonte: *Convivência escolar e cultura de paz*. Brasília: SEEDF/Subeb, 2020. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 4 ago. 2022.

- Para obter mais informações sobre como prevenir e mediar o *bullying* na escola e evitar ações de violência autoprovocada, os educadores e gestores educacionais podem ter acesso a cartilhas elaboradas pelas instituições a seguir: Organização Mundial da Saúde (OMS); Ministério da Saúde; Ministério Público do Estado de São Paulo; Ordem dos Advogados do Brasil (OAB) e Centro de Valorização da Vida (CVV).

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. Os plânctons são todos os organismos, principalmente os microscópicos, que vivem em suspensão na água salgada ou doce. Eles são encontrados em maior quantidade até o limite de aproximadamente 200 metros de profundidade. Observe a tabela a seguir com a classificação dos plânctons.

Classificação usual dos plânctons		
Classe	**Medida de comprimento**	**Exemplo**
Femtoplâncton	0,02 a 0,2 μm	vírus
Picoplâncton	0,2 a 2 μm	bactérias
Nanoplâncton	2 a 20 μm	fitoflagelados
Microplâncton	20 a 200 μm	diatomáceas
Mesoplâncton	0,2 a 20 mm	copépodes
Macroplâncton	2 a 20 cm	água-viva
Megaloplâncton	20 a 200 cm	colônias de tunicados

Fonte de pesquisa: Plâncton. Enciclopédia Química.ES. Disponível em: http://www.quimica.es/enciclopedia/Plancton.html. Acesso em: 9 maio 2022.

1. b) 1,99999998 m

a) Escreva, em milímetro, a medida de comprimento de um femtoplâncton. **0,00002 mm a 0,0002 mm.**

b) Qual é a diferença entre a maior e a menor medida de comprimento que aparecem na tabela? Indique a resposta em metro.

c) Um mesoplâncton pode ser até 100 vezes maior que um microplâncton? **Sim.**

2. A medida da distância da Terra até Marte é de cerca de 75 milhões de quilômetros. Escreva essa medida em metro, utilizando a notação científica. **$7,5 \cdot 10^{10}$ m**

3. Complete cada item com o valor correto. Se necessário, utilize uma calculadora.

a) Capacidade de armazenamento da memória interna de um celular: **131 072**

128 GB = ■ MB

b) Capacidade de armazenamento temporário de um pente de memória RAM de um computador comum: **8; 8 388 608**

8 192 MB = ■ GB = ■ KB

c) Capacidade de armazenamento de um HD externo: **2 048**

2 TB = ■ GB

d) Capacidade de armazenamento da memória da placa de vídeo de um computador:

2 048 MB = ■ KB = ■ GB

2 097 152; 2.

4. Sofia quer instalar um aplicativo de 365 MB em seu celular. O espaço de armazenamento interno de seu celular é de 64 GB, mas já estão sendo utilizados 63,7 GB. Há espaço suficiente para instalar o aplicativo? Qual é o espaço disponível no celular? **Não. 307,2 MB.**

5. Tomas tem vários arquivos de vídeos em seu computador que ocupam, em média, 300 MB cada um. Quantos vídeos ele consegue armazenar, no máximo, em um DVD com capacidade de 4,7 GB? **No máximo 16 vídeos.**

6. Pesquise o que é armazenamento na nuvem e qual o armazenamento disponível. Depois, converse com os colegas e o professor sobre as informações obtidas.

Vadim Almiev/Shutterstock.com/ID/BR

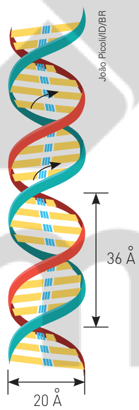
Consulte a resposta neste manual.

7. O quadro a seguir apresenta outras unidades de medida de armazenamento de dados. Copie-o no caderno e preencha a coluna *Quantidade de caracteres* com a potência de 2 correspondente.

Unidade de medida	Símbolo	Valor equivalente	Quantidade de caracteres
petabyte	PB	1 024 TB	▒▒▒▒ **2^{50}**
exabyte	EB	1 024 PB	▒▒▒▒ **2^{60}**
zettabyte	ZB	1 024 EB	▒▒▒▒ **2^{70}**

8. O ångström (Å) é uma unidade de medida utilizada pelos cientistas para expressar medidas muito pequenas, por exemplo, a medida do diâmetro externo do modelo de dupla-hélice do DNA e a volta completa da hélice do DNA, conforme indicado na imagem.

Sabendo que 1 ångström equivale a 10^{-10} m, escreva as medidas que aparecem na imagem em nanômetro (nm). **2 nm; 3,6 nm**



João Picoli/ID/BR

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **1**, peça aos estudantes que pesquisem imagens de plânctons. O objetivo da atividade é possibilitar aos estudantes relacionarem as unidades de medidas com a classificação usual dos plânctons.
- Na atividade **2**, peça aos estudantes que compartilhem as estratégias utilizadas por eles para escrever a medida em notação científica. Uma delas é escrever o número que expressa a medida com todos os algarismos, realizar a conversão para metros e, por fim, transformar em notação científica.
- Depois de os estudantes realizarem a pesquisa sugerida na atividade **6**, peça a eles que escrevam um texto curto com a conclusão e a discutam com os colegas.
- Na atividade **7**, sugira aos estudantes que observem o quadro da página 290 do Livro do Estudante e analisem se há alguma regularidade na coluna da quantidade de caracteres. Espera-se que eles observem que o expoente da potência de base 2 aumenta de 10 em 10.

RESPOSTA

6. Resposta possível: O armazenamento de dados na nuvem é um modelo de computação que permite aos usuários acesso remoto a programas, arquivos e serviços por meio da internet. Existem diversas possibilidades de utilização do armazenamento na nuvem, e a quantidade de espaço para armazenamento também é variável: 1 GB, 2 GB, 1 TB.

DE OLHO NA BASE

As atividades desta página possibilitam aos estudantes refletir sobre a importância da Matemática como suporte para as outras áreas do conhecimento, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Caso os estudantes tenham dificuldade em converter as unidades de medida de informática, retome o quadro da página 290 do Livro do Estudante e sugira que escrevam alguns valores com a unidade de medida em questão, utilizando uma calculadora para conferir os resultados. Por exemplo, para converter 32 GB em MB, eles podem escrever e resolver a seguinte proporção:

$$\frac{1}{32} = \frac{1\,024}{x}$$

$$x = 32 \cdot 1\,024$$

$$x = 32\,768$$

Logo, 32 GB equivalem a 32 768 MB.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Volume de algumas figuras não planas.
- Volume de um prisma.
- Volume de uma pirâmide.
- Volume de um cilindro.
- Volume de um cone.

Objetivos

- Determinar a medida do volume de um prisma.
- Determinar a medida do volume de uma pirâmide.
- Determinar a medida do volume de um cilindro.
- Determinar a medida do volume de um cone.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo da grandeza volume para determinar as medidas em figuras geométricas não planas, como prisma, pirâmide, cilindro e cone. Com esse estudo, espera-se aprimorar as técnicas de resolução de problema e o repertório matemático dos estudantes.

VOLUME DE ALGUMAS FIGURAS NÃO PLANAS

- Pergunte aos estudantes se eles reconhecem o contexto da imagem de abertura e se já viram uma empilhadeira. Converse com eles sobre o texto e explique que logística é um ramo da administração cujas atividades estão voltadas para o planejamento da armazenagem, circulação (por terra, ar e mar) e distribuição de produtos.
- Questione os estudantes sobre o que eles entendem a respeito de volume. É importante que já tenham compreendido que essa grandeza está associada ao espaço ocupado por um objeto.
- Chame a atenção dos estudantes para que percebam que os empilhamentos tratados no texto e na imagem têm a forma de blocos retangulares.
- Deixe clara aos estudantes a importância de expressar corretamente as unidades de medida ao calcular volumes.

Capítulo 2 VOLUME

Para o desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes saibam calcular a medida da área de figuras planas, ter noção de volume e de transformações de unidades de medida e reconhecer figuras não planas.

Volume de algumas figuras não planas

Você já viu uma estrutura porta-*pallet*? Sabe o que é um *pallet*?

Pallet é um tipo de estrado de madeira considerado um dos itens mais importantes para a logística. Ele pode ser utilizado para juntar diversos tipos de produto e facilitar o transporte, o manuseio e o armazenamento deles.

O uso de *pallets* possibilita um melhor aproveitamento do espaço disponível para o armazenamento de mercadorias, pois com eles é possível empilhá-las. Em outras palavras, os *pallets* permitem que, em uma mesma área, sejam colocados mais produtos.

Observe que, nas duas ilustrações a seguir, há a mesma quantidade de caixas; entretanto, elas estão distribuídas de maneiras diferentes. Na representação da direita, a área ocupada é menor.

Mas como podemos saber o espaço ocupado pelas caixas armazenadas, ou seja, seu volume?

Com base na área útil e na altura do empilhamento, é possível calcular o volume total do produto que está armazenado.

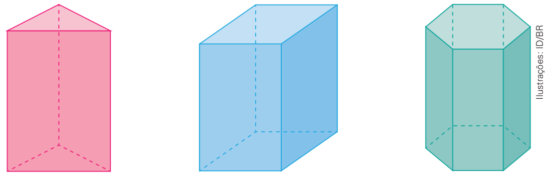
ID/BR

Empilhadeira transportando produtos sobre um *pallet* em um armazém.

devilmaya/Alamy/Fotoarena

Volume de um prisma

Os prismas são figuras não planas delimitadas por faces planas, em que duas delas, chamadas de bases, são polígonos congruentes situados em planos paralelos, e as demais, chamadas de faces laterais, são paralelogramos. Veja alguns exemplos.



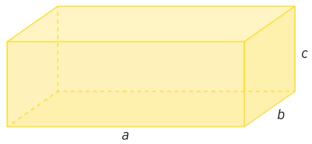
prisma triangular — bloco retangular — prisma hexagonal

Volume de um bloco retangular

Vamos retomar o cálculo do volume de um bloco retangular para podermos ampliar o estudo do volume dos prismas.

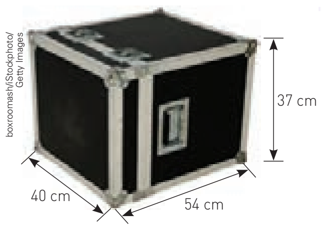
A medida do volume de um bloco retangular de dimensões *a*, *b* e *c* é calculada da seguinte maneira:

$$V_{\text{bloco retangular}} = a \cdot b \cdot c$$



Exemplo

Na caixa a seguir são mostradas as medidas externas da largura, do comprimento e da altura. Vamos calcular a medida do volume dessa caixa.



Como essa caixa lembra um bloco retangular, podemos obter a medida *V* do seu volume utilizando a seguinte expressão:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Substituindo os valores da figura na expressão anterior, obtemos:

$$V = a \cdot b \cdot c = 54 \cdot 40 \cdot 37 = 79\,920$$

Portanto, a medida do volume dessa caixa é 79 920 cm^3.

PARE E REFLITA

O cubo pode ser considerado um prisma? Como se calcula a medida *V* do volume de um cubo com aresta medindo *a*?

Sim. $V = a^3$

VOLUME DE UM PRISMA

- Comente com os estudantes que os prismas podem ser notados em muitos objetos presentes em nosso cotidiano, por exemplo, nas embalagens, em obras de arte e nas construções.
- Peça aos estudantes que observem as figuras dos prismas ilustrados e as descrevam. Pergunte-lhes sobre quantas e quais figuras formam as faces dos prismas. É importante que eles observem as características dos prismas para que possam diferenciá-los das pirâmides.
- Converse sobre os nomes dados aos prismas. Comente que, geralmente, eles recebem o nome de acordo com o polígono das bases. Explique, por exemplo, que o bloco retangular poderia ser chamado prisma quadrangular.
- Recorde com os estudantes que, para medir volume, uma das unidades de medida utilizada é o metro cúbico, que corresponde ao espaço ocupado por um cubo cujas arestas medem 1 m.
- Avalie a necessidade de retomar o conceito de múltiplos e submúltiplos do metro cúbico, uma vez que ele é considerado como a unidade de medida-padrão para a grandeza volume no Sistema Internacional de Unidades.
- É possível compreender o cálculo do volume de um prisma imaginando que ele é formado por um número infinito de camadas, tão finas quanto pensarmos, congruentes à base do prisma. A pilha formada por essas camadas terá a altura do prisma e, dessa forma, podemos obter a medida de seu volume:

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Proponha aos estudantes que realizem uma investigação sobre como seria possível calcular a medida do volume interno do porta-malas de um automóvel. Depois, promova uma conversa com a turma sobre as ideias que tiveram.

No *link* da revista *Quatro rodas*, disponível em https://quatrorodas.abril.com.br/auto-servico/como-e-calculado-o-volume-de-um-porta-malas/ (acesso em: 4 ago. 2022), há um artigo que pode ser apresentado aos estudantes no final das discussões, para que eles verifiquem como a medida do volume interno do porta-malas de um automóvel é calculado.

- No exemplo **A**, solicite aos estudantes que observem o objeto e veja se eles percebem que ele lembra um prisma de base triangular. Em seguida, peça que identifiquem as dimensões dadas verificando se compreendem que 13 cm se refere à medida da altura do prisma, 12 cm é a medida da base do triângulo, que é o polígono da base do prisma, e que 8 cm corresponde à medida da altura desse triângulo.
- No exemplo **B**, verifique se os estudantes compreenderam que um hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros. Retome, se necessário, o cálculo da altura de um triângulo equilátero aplicando o teorema de Pitágoras.

Volume de um prisma qualquer

É possível comprovar que a medida V do volume de um prisma é igual ao produto da medida da área da base A_{base} pela medida da altura H.

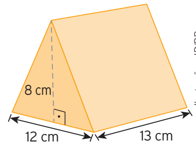
$$\boxed{V_{prisma} = A_{base} \cdot H}$$

Perceba que a medida da área da base depende do polígono que a determina.

Exemplos

A. Observe o objeto representado a seguir. Ao lado dele temos um esquema com suas dimensões. Qual é a medida do volume desse objeto?

Objeto utilizado na localização de veículos em estabelecimentos.



Ilustrações: ID/BR

Repare que esse objeto lembra um prisma de base triangular. Para calcular a medida V do seu volume, podemos utilizar a seguinte expressão:

$$V = A_{base} \cdot H$$

Inicialmente, calculamos a medida da área da base. A base desse prisma é um triângulo cuja medida do lado é 12 cm e cuja medida da altura correspondente a esse lado é 8 cm. Assim:

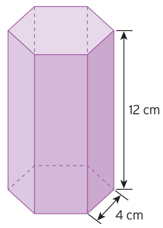
$$A_{base} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$$

Em seguida, calculamos a medida do volume:

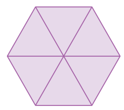
$$V = A_{base} \cdot H = 48 \cdot 13 = 624$$

Portanto, o volume desse objeto mede 624 cm^3.

B. Vamos calcular a medida do volume do prisma roxo, sabendo que suas bases são hexágonos regulares.

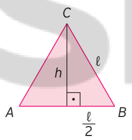


Primeiro, temos de calcular a medida da área da base desse prisma. Para calcular a área da base de um hexágono regular, podemos dividi-lo em 6 triângulos equiláteros.



MEDIDA DA ALTURA DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Podemos calcular a medida da altura de um triângulo equilátero por meio da seguinte expressão:



$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

294

Agora, para obter a medida da área do hexágono regular, calculamos a medida da área de um triângulo equilátero e multiplicamos o resultado por 6:

$$A_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2} = 4 \cdot \frac{\frac{4\sqrt{3}}{2}}{2} = 4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot A_{\triangle} = 6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

Logo, a medida da área do hexágono é $24\sqrt{3}$ cm^2.

Para calcular a medida do volume do prisma, fazemos:

$$V = A_{\text{base}} \cdot H = 24 \cdot \sqrt{3} \cdot 12 = 288\sqrt{3}$$

Portanto, a medida do volume desse prisma é $288\sqrt{3}$ cm^3.

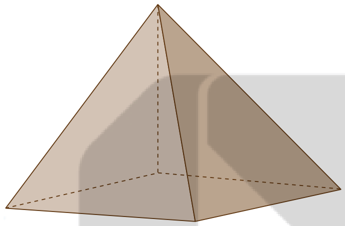
Volume de uma pirâmide

As pirâmides são figuras não planas delimitadas por faces planas, em que uma delas, chamada de base, é um polígono. Além disso, elas têm um ponto fora dessa base, chamado de vértice. As demais faces, chamadas de faces laterais, são triângulos.

As pirâmides são conhecidas desde a Antiguidade. Entre as mais famosas está a pirâmide de Quéops, no Egito, cuja forma lembra uma pirâmide de base quadrada.


Peacefool/Stock/Getty Images

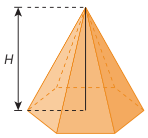
↑ **Pirâmide de Quéops, no Egito. Foto de 2020.**


pirâmide de base quadrada

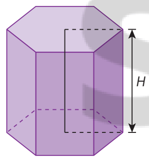
Ilustrações: ID/BR

Agora, acompanhe a experiência que a professora de Luciana fez para determinar a medida do volume de uma pirâmide.

Primeiro, ela confeccionou dois recipientes: um cuja forma lembra uma pirâmide de base hexagonal e outro cuja forma lembra um prisma de base hexagonal. Os hexágonos, base desses dois recipientes, são congruentes e regulares, e as alturas dos recipientes têm medidas iguais.



pirâmide de base hexagonal



prisma de base hexagonal

VOLUME DE UMA PIRÂMIDE

- Peça aos estudantes que observem a pirâmide e o prisma que aparecem lado a lado e solicite a eles que falem sobre as diferenças e as características comuns entre as duas figuras. Espera-se que eles observem que a quantidade de bases é diferente e também o formato das faces laterais. Quanto às características comuns, neste caso, ambas têm o mesmo polígono na base e a mesma medida da altura.
- Após a leitura do texto, converse com os estudantes sobre a importância do povo egípcio para a humanidade, desde as noções da Matemática até a agricultura e as edificações construídas naquele período. Incentive-os a localizar, em um mapa, esse país no continente africano. Em seguida, questione-os sobre como esse povo foi retratado ao longo dos séculos pela arte, de acordo com uma visão eurocentrista, como a questão da cor da pele, retratada como sendo de cor branca pelos europeus em suas diversas manifestações artísticas. Se julgar interessante aprofundar a discussão, leia o trecho a seguir para a turma e converse com eles sobre temas como preconceito e valorização da história africana:

> "[...] a base da população egípcia no período pré-dinástico era negra. Assim, todas elas [conclusões] são incompatíveis com a teoria de que o elemento negro se infiltrou no Egito em período tardio. Pelo contrário, os fatos provam que o elemento negro era preponderante do princípio ao fim da história egípcia [...]."

Diop, Cheikh A. Origem dos antigos egípcios. *In*: Mokhtar, G. (coord.). *História geral da África*, v. 2: A África antiga. 2. ed. Brasília: Unesco, 2010. p. 41.

Esse debate tem o objetivo de salientar as diferenças sociais, históricas, políticas, e culturais do povo africano para desvelar a existência de múltiplas realidades em suas diferenças e antagonismos ao branquear a população em uma perspectiva histórica.

DE OLHO NA BASE

Esse debate também contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**, para que os estudantes respeitem e promovam o respeito ao outro e aos direitos humanos, acolham e valorizem a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

OUTRAS FONTES

Flores, R. A. M. N.; Santulo Jr., E. A. Uso de materiais manipuláveis no ensino de geometria espacial: cálculo do volume de sólidos geométricos. *In*: *O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense*. Cadernos PDE, v. 1. Governo do Estado do Paraná, Secretaria da Educação. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2009_uem_matematica_artigo_rosa_angela_maria_niero_flores.pdf. Acesso em: 4 ago. 2022.

Esse artigo apresenta um processo de ensino e de aprendizagem que, por meio da utilização de materiais manipuláveis, permite aos estudantes compreender as fórmulas de volume de sólidos geométricos.

- Se possível, realize o experimento descrito nesta página para que os estudantes vivenciem a situação.
- Resolva, na lousa, o exemplo apresentado na página para que os estudantes compreendam melhor como aplicar a expressão do cálculo do volume.
- Destaque que a área da base de uma pirâmide também depende do polígono da base, da mesma maneira que nos prismas.
- Nas atividades, oriente os estudantes a fazer um esboço do prisma ou da pirâmide. Essa representação poderá auxiliá-los na compreensão e na aplicação da expressão de maneira correta.

DE OLHO NA BASE

Ao resolver as atividades propostas, os estudantes utilizarão as expressões de cálculo de volume, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA19**.

A professora encheu completamente de areia o recipiente com a forma de uma pirâmide e despejou o conteúdo no outro recipiente. Ela verificou que $\frac{1}{3}$ do recipiente com a forma do prisma ficou completamente cheio (Figura 1).

Então, a professora repetiu o procedimento mais duas vezes para que o recipiente com a forma de um prisma ficasse completamente cheio de areia (Figura 2).


Figura 1


Figura 2

João Picoli/ID/BR

A professora verificou que o volume da pirâmide correspondia a $\frac{1}{3}$ do volume do prisma de mesma base e de mesma altura.

O resultado da experiência feita pela professora de Luciana pode ser demonstrado e vale para qualquer prisma e qualquer pirâmide com bases congruentes e alturas de medidas iguais, mas não faremos a demonstração nesse momento.

A medida V do volume de uma pirâmide qualquer é obtida pela expressão:

$$\boxed{V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H}$$

em que A_{base} corresponde à medida da área da base da pirâmide e H corresponde à medida da altura da pirâmide. Note que, assim como no cálculo do volume dos prismas, a área da base de uma pirâmide também depende do polígono que a determina.

Exemplo

Vamos determinar a medida do volume de uma pirâmide cuja base tem área medindo 6 cm^2 e cuja altura mede 11 cm.

Para encontrar a medida V do volume desejado, vamos utilizar a expressão a seguir.

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H$$

Substituindo nessa expressão os valores dados no enunciado, obtemos:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 11 = 2 \cdot 11 = 22$$

Portanto, o volume dessa pirâmide mede 22 cm^3.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Calcule a medida do volume de um prisma cuja base é um triângulo equilátero com 18 cm de medida de lado e cuja altura mede 30 cm. **$2\,430\sqrt{3}$ cm^3**

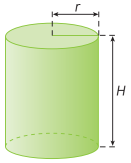
2. Uma pirâmide tem como base um quadrado com lados medindo $3\sqrt{2}$ cm. Sabendo que a altura dessa pirâmide mede 15 cm, calcule a medida do seu volume. **90 cm^3**

Volume de um cilindro

Você já viu que um cilindro circular reto tem a lateral arredondada. Como fizemos com os prismas, a medida do seu volume pode ser calculada multiplicando a medida da área da base pela medida da altura.

Assim, dado um cilindro de raio de medida r e altura de medida H, a medida da área da base circular é πr^2. Então, a medida V do seu volume pode ser calculada por:

$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot H$$
$$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot H$$



Ilustrações: ID/BR

OBSERVAÇÃO

Neste livro, quando nos referirmos a cilindro, consideraremos um cilindro circular reto.

Exemplos

A. Vamos calcular a medida V do volume de um cilindro que tem 6 cm de medida de altura e raio da base medindo 2,5 cm. (Use $\pi = 3{,}14$.)

Substituindo os valores dados no enunciado na expressão do volume de um cilindro, obtemos:

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot H = 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 \cdot 6 = 3{,}14 \cdot 6{,}25 \cdot 6 = 117{,}75$

Portanto, a medida do volume desse cilindro é 117,75 cm^3.

B. Sabendo que um cilindro tem 125π cm^3 de medida de volume e que o diâmetro de sua base mede 10 cm, vamos determinar a medida de sua altura.

A medida r do raio corresponde à metade da medida d do diâmetro. Assim, temos que o raio da base é:

$$d = 2r \Rightarrow 10 = 2r \Rightarrow r = \frac{10}{2} \Rightarrow r = 5$$

Para obter o valor da altura desse cilindro, vamos utilizar a expressão do volume de um cilindro.

$V = \pi r^2 \cdot H \Rightarrow 125\pi = \pi \cdot 5^2 \cdot H \Rightarrow 125\pi = 25\pi H \Rightarrow$

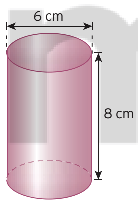
$\Rightarrow H = \frac{125\pi}{25\pi} \Rightarrow H = 5$

Portanto, a altura desse cilindro mede 5 cm.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

3. Considerando $\pi = 3$, determine a medida do volume de um cilindro cujas dimensões estão indicadas na figura ao lado. **216 cm^3**



4. Sabendo que o volume de um cilindro mede 3 000 cm^3 e que sua altura mede 5 cm, calcule o que se pede a seguir. (Use $\pi = 3$.)

a) A medida da área da base do cilindro. **600 cm^2**

b) A medida do raio da base do cilindro. **$10\sqrt{2}$ cm**

VOLUME DE UM CILINDRO

- Converse com os estudantes sobre os cilindros e questione-os sobre onde essa forma pode ser observada. Proponha a eles que procurem objetos que se pareçam com cilindros.
- Comente com os estudantes que, diferentemente dos prismas, o cilindro e o cone têm formas arredondadas, suas bases são círculos e a superfície lateral é curva. No entanto, para calcular a medida do volume de um cilindro, podemos fazer como no cálculo do volume de um prisma: multiplicar a medida da área da base do cilindro (círculo) pela medida de sua altura.
- Resolva na lousa os exemplos propostos nesta página, e comente com os estudantes a importância de saber os conceitos de raio, diâmetro e área de um círculo para o cálculo do volume de um cilindro.

DESCUBRA MAIS

Nessa atividade, os estudantes farão um experimento para verificar a relação que há entre a medida do volume de um cilindro e a medida do volume de um cone.

O primeiro passo é construir modelos de cilindros e cones. Verifique se os trios escolheram diferentes medidas para a altura do cone e a do cilindro.

Com esse experimento, os estudantes devem observar que a medida do volume de um cone é, aproximadamente, um terço da medida do volume de um cilindro, desde que o cilindro e o cone tenham a mesma altura e o mesmo raio de base.

Além disso, ao responderem às questões propostas, os estudantes podem identificar padrões, levantar hipóteses e fazer conjecturas, o que contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático.

Verifique se eles compreendem que a medida do volume do cone e da pirâmide são calculados de modo parecido, pois correspondem à terça parte do produto da medida da área da base pela medida da altura.

DESCUBRA MAIS

Volume do cilindro e do cone

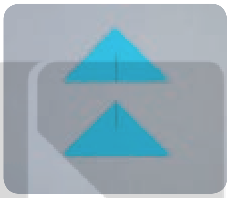
Você já sabe calcular a medida do volume de um cilindro. Mas será que existe alguma relação entre a medida do volume de um cilindro e a medida do volume de um cone? Vamos fazer um experimento para responder a essa pergunta.

Materiais

- recipiente cilíndrico transparente
- massa de modelar
- régua
- tesoura com pontas arredondadas
- caneta hidrográfica
- água
- papel-cartão

Como fazer

1. Seguindo as orientações do professor, organizem-se em trios.
2. Antes de iniciar a montagem dos moldes, conversem e combinem diferentes medidas da altura (h) dos modelos de cilindro e cone para cada grupo. Essa variação auxiliará na análise dos resultados do experimento. Atenção: A medida do diâmetro da base ($2h$) deve ser menor que a do recipiente transparente usado pelo grupo.
3. Para montar o modelo de cone, desenhem, no papel-cartão, dois triângulos isósceles de altura de medida h e base de medida $2h$ e, em seguida, recortem-nos. Conforme as instruções dos esquemas a seguir, construam o modelo de cone.

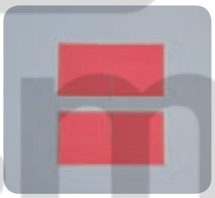

Esquema para fazer o molde para o modelo de cone.

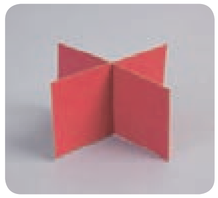

Molde para o modelo de cone.

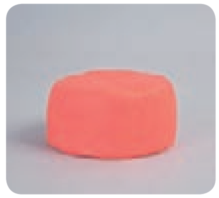

Construção do modelo de cone usando o molde e a massa de modelar.

Fotografias: Sérgio Dotta Jr./ID/BR

4. Para montar o modelo de cilindro, desenhem, no papel-cartão, dois retângulos de altura de medida h e de comprimento de medida $2h$ e, em seguida, recortem-nos. Siga as instruções dos esquemas a seguir e construam o modelo de cilindro.


Esquema para fazer o molde para o modelo de cilindro.


Molde para o modelo de cilindro.


Construção do modelo de cilindro usando o molde e a massa de modelar.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Peça aos estudantes que tragam para a aula embalagens que lembrem prismas, pirâmides, cilindros e cones.

Certifique-se de que eles tenham diferentes tipos de embalagem.

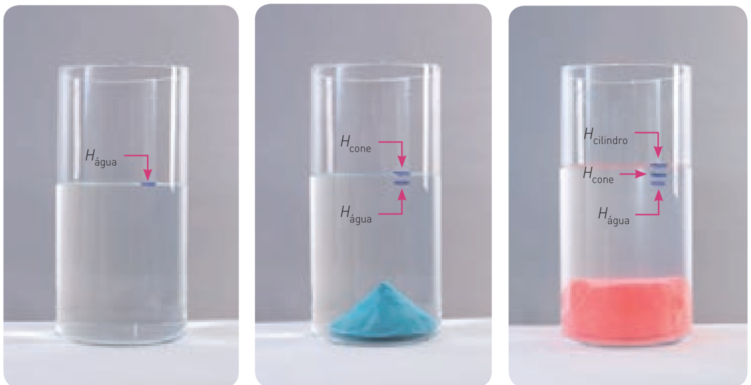
Organize-os em trios e divida as embalagens entre eles. Peça a cada grupo que realize medições das dimensões das embalagens, calcule e anote em um quadro a medida do volume de cada uma.

O objetivo dessa atividade é verificar se eles compreenderam quais cálculos devem realizar para obter a medida do volume e se certificar se aplicam corretamente as expressões de cálculo de volume.

❺ Encham o recipiente até a metade com água e marquem com a caneta hidrográfica o nível de água $H_{\text{água}}$.

❻ Coloquem o modelo de cone dentro do recipiente e marquem com a caneta hidrográfica o nível de água H_{cone}.

❼ Retirem o modelo de cone da água e verifiquem que o nível de água voltou à marca inicial. Em seguida, coloquem o modelo de cilindro e marquem com a caneta hidrográfica o nível de água H_{cilindro}.



Nível de água no recipiente. **Nível de água no recipiente com o modelo de cone.** **Nível de água no recipiente com o modelo de cilindro.**

Fotografias: Sérgio Dotta Jr./ID/BR

❽ Com o auxílio de uma régua, meçam as alturas da base do recipiente transparente até as marcações feitas com a caneta e anotem-nas no caderno.

Fonte de pesquisa: Geometria e medidas: cilindro = cone + esfera ÷ 2. Matemática Multimídia. Unicamp. Disponível em: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1000. Acesso em: 9 maio 2022.

Para concluir

Responda sempre no caderno.

Consulte as respostas neste manual.

1. O volume de água deslocada ao colocar cada um dos modelos corresponde ao volume do próprio modelo? Determinem a razão $\frac{H_{\text{cone}}}{H_{\text{cilindro}}}$ e a razão entre a medida do volume do modelo de cone e a medida do volume do modelo de cilindro. A razão entre as medidas das alturas da água deslocada no recipiente é igual à razão entre as medidas dos volumes dos modelos?
2. Se as medidas do raio da base e as da altura fossem diferentes de um modelo para o outro, o resultado seria diferente? Explique.
3. Esse experimento pode ser feito com outros modelos de figuras não planas? Em caso afirmativo, com quais?
4. Organizem os dados obtidos por todos os trios em um quadro. Conversem sobre os resultados obtidos e formalizem uma relação para o volume do modelo de cone e o volume do modelo de cilindro quando ambos apresentam medidas iguais para o raio da base e para a altura.

PARA CONCLUIR

1. Sim. A razão entre as medidas das alturas alcançadas pela água no recipiente e a razão entre as medidas dos volumes dos modelos são, aproximadamente, $\frac{1}{3}$.
   Sim. A razão entre as medidas das alturas e das medidas dos volumes é igual.
2. Sim. A razão a razão entre as medidas das alturas dos recipientes não seria equivalente à razão entre as medidas dos volumes dos modelos.
3. Sim. O experimento pode ser feito com um prisma e com uma pirâmide de mesma base e mesma altura.
4. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam a seguinte relação:

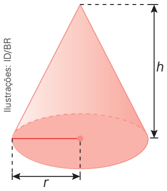
$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} V_{\text{cilindro}}$$

VOLUME DE UM CONE

- Resolva, na lousa, os exemplos apresentados nesta página para que os estudantes possam acompanhar a resolução e compreender os conceitos estudados sobre o volume de um cone.
- Peça aos estudantes que esbocem os cones das atividades propostas. Essa representação pode auxiliá-los na compreensão e na aplicação da expressão de maneira correta.

Volume de um cone

A medida V do volume de um cone qualquer é igual a um terço do produto da medida da área da base (πr^2) pela medida da altura (H).



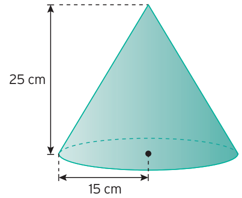
Ilustrações: ID/BR

$$V_{cone} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot H$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \pi r^2 H$$

Exemplos

A. Vamos determinar a medida do volume de um cone cuja medida da altura é 25 cm e cuja medida do raio da base é 15 cm.



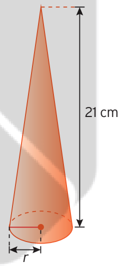
$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 15^2 \cdot 25$$

$$V = \frac{1}{\cancel{3}_1} \pi \cdot \cancel{225}^{75} \cdot 25$$

$$V = 1\,875\pi$$

Portanto, a medida do volume desse cone é $1\,875\pi$ cm^3.

B. A figura a seguir representa um cone cujo volume mede 63π cm^3. Sabendo que sua altura mede 21 cm, vamos determinar a medida do raio da base.



$$V_{cone} = \frac{1}{3} \pi r^2 H$$

$$63\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 21$$

$$63\pi = 7\pi r^2$$

$$r^2 = \frac{63\pi^1}{7\pi^1}$$

$r^2 = 9 \Rightarrow r = \sqrt{9} \Rightarrow r = 3$ (pois se trata de uma medida)

Portanto, o raio da base desse cone mede 9 cm.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

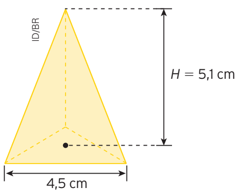
5. Um cone tem medidas iguais a 7 cm de altura e 5 cm de raio da base. Usando $\pi = 3$, calcule:
a) a medida da área da base do cone; **75 cm²**
b) a medida do volume do cone. **175 cm³**

6. Determine as medidas da área e do raio da base de um cone que mede 12 cm de altura e cujo volume mede $1\,600\pi$ cm^3. **Área da base: 400π cm²; raio: 20 cm.**

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. Uma fábrica produz peças maciças de alumínio com formato de pirâmide de base triangular, como representado na figura.

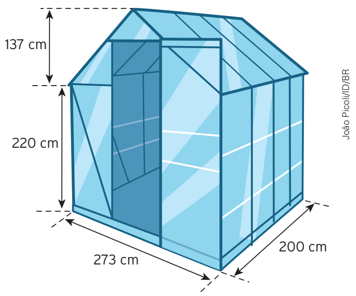


Sabendo que a altura do triângulo da base dessa pirâmide, relativa ao lado de 4,5 cm, mede 3 cm, calcule a medida do volume de alumínio necessário para produzir 250 peças iguais a essa. **2 868,75 cm³**

2. Para a feira cultural da escola, a professora Cristina precisa fazer várias pirâmides de base quadrada. O lado do quadrado mede 6 cm, e a altura da pirâmide, 4 cm. Qual é a medida do volume, em centímetro cúbico, que cada pirâmide terá? **48 cm³**

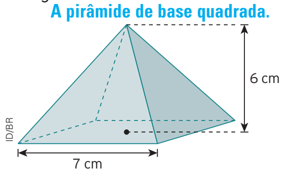
3. Para ajudar a resolver o problema de abastecimento de água, os moradores de um condomínio decidiram em reunião que seria necessário construir uma nova cisterna. De acordo com o consumo, concluíram que a nova cisterna deveria comportar 81 m³ de água. Sabendo que a cisterna deve ter a forma cilíndrica e 3 m de medida de altura, qual deve ser a medida do diâmetro da nova cisterna? Considere $\pi = 3$. **6 m**

4. Para controlar a temperatura de uma estufa, é necessário medir o volume de ar presente em seu interior. Sabendo que a estufa tem a forma de um prisma de base pentagonal, calcule a medida do seu volume em metro cúbico. Se necessário, utilize uma calculadora. **15,7521 m³**

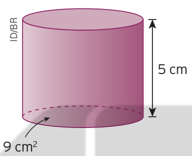


5. A professora de Sofia levou para a sala diversas peças em acrílico que lembram figuras geométricas não planas. Ela propôs a cada estudante que escolhesse uma peça para calcular a medida do seu volume. Sofia escolheu uma peça em formato de pirâmide regular de base triangular. Sabendo que cada aresta da base dessa pirâmide mede 6 cm e que a altura da pirâmide mede 5 cm, calcule a medida do volume da peça que Sofia escolheu. **$15\sqrt{3}$ cm³**

6. Observe as figuras a seguir e responda: Qual das duas figuras tem maior volume?
A pirâmide de base quadrada.

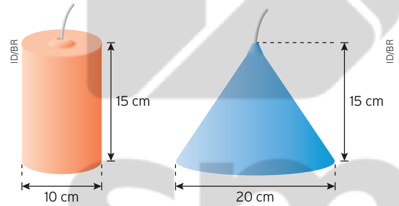


pirâmide de base quadrada



cilindro

7. Lucas fabrica velas de dois tipos: um em formato de cilindro e outro em formato de cone. Considerando que o preço das velas é diretamente proporcional à quantidade de parafina utilizada, responda: Qual das velas é mais cara?
A vela em formato de cone.



8. Elabore um problema que envolva a comparação entre a medida do volume de um cilindro e a de um prisma. Depois, troque de caderno com um colega para que ele resolva o seu problema e você resolva o dele. **Resposta pessoal.**

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **1**, os estudantes devem calcular a medida do volume de uma peça com formato de pirâmide de base triangular e, depois, multiplicar essa medida por 250 para que seja possível encontrar a medida do volume de alumínio necessário para produzir 250 peças iguais.
- Na atividade **4**, podemos considerar que o formato da estufa lembra a composição de dois prismas, um com base retangular e outro com base triangular. Como a resposta deve ser dada em metro cúbico, é recomendável converter as medidas dadas em centímetro para metro.
- Após os estudantes terem realizado a elaboração de um problema na atividade **8**, socialize cada um deles para que a turma perceba as diferentes possibilidades de comparação.

DE OLHO NA BASE

Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas, como proposto nesta seção, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA19**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Se os estudantes tiverem dificuldade em resolver as atividades **2**, **3** e **5**, peça a eles que façam um esboço para representar cada uma das situações. Esse procedimento pode auxiliá-los a visualizar os dados fornecidos e a compreender o que está sendo solicitado. Esclareça que os esboços não precisam ter as medidas corretas. O importante é indicar as medidas no local correto.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, o tema abordado são os investimentos. Incentive os estudantes a refletir a respeito de atitudes e ações sobre aquisição, uso e distribuição do dinheiro e suas possíveis consequências e sobre a importância de investir.
- Observe se os estudantes entenderam que há diferentes visões sobre investimentos, bem como diferentes opções de investimento.
- Se julgar oportuno, explique aos estudantes que as criptomoedas são investimentos mais complexos, recentes e extremamente voláteis. Especialistas têm recomendado alocar pouco dinheiro, de modo que as perdas sejam pequenas e os ganhos possam ser consideráveis.

Responsabilidade e Criatividade

O assunto tratado nesta seção possibilita aos estudantes refletir sobre como a criatividade pode ser um valor importante no momento de decidir como, quando, quanto e em que investir. Além disso, antes de investir, deve-se analisar, com responsabilidade, em qual investimento se deseja aplicar determinada quantia, como é o rendimento dele, entre outras coisas.

AMPLIANDO HORIZONTES

Pensando em investimentos na juventude

Na adolescência, a gente quer curtir o momento, a vida e tudo de bom que ela oferece. O otimismo e a impulsividade costumam fazer parte dessa fase da vida, em que a perspectiva de ter muito tempo pela frente e a força da juventude reforçam a confiança no futuro. Mas o que podemos fazer para tentar melhorar ainda mais esse futuro?

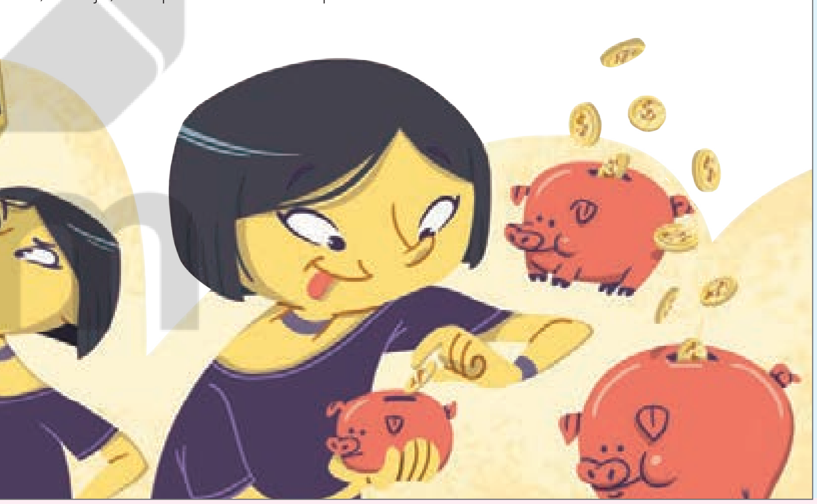
Bem, vamos conversar sobre investimentos. Ou melhor, sobre atitudes, hábitos e até sacrifícios que podemos fazer hoje para colher benefícios e realizações mais adiante.

Uma primeira ideia de investimento é a de poupar. Mas investir é mais que guardar dinheiro, é semear pequenas sementes que, se bem cuidadas, podem gerar muitos frutos.

Um investimento muito comum no Brasil é a poupança. Muita gente coloca o dinheiro na poupança por hábito, praticidade e segurança, apesar de o rendimento dela ser pequeno. Na verdade, quanto menor o risco, menor o retorno. Se você for chamar alguém para fazer algo importante, porém arriscado, ele precisará de uma grande motivação. Com investimentos financeiros também é assim.

Uma alternativa de investimento no Brasil é o tesouro direto. Funciona assim: você empresta dinheiro para o governo e ele paga um valor maior dentro de um prazo predeterminado. Há várias maneiras de investir no tesouro direto, e todas elas costumam apresentar rendimentos maiores que a poupança.

Outro investimento interessante é em ações. De forma simplificada, ao comprar ações de uma empresa, passa-se a ser um dos sócios dela. Se a empresa crescer, o valor da ação aumenta, e o dinheiro investido rende; se a empresa apresentar problemas, o valor da ação diminui, e o investidor pode ter prejuízo. De todo modo, transações de compra e venda de ações podem ser realizadas a qualquer hora, ou seja, sem prazo ou datas estipulados.



302

OUTRAS FONTES

Longo, L. Bitcoin vai ao céu em novembro, mas sofre com realização de lucros e ensaia recuperação. *Valor Investe*. Disponível em: https://valorinveste.globo.com/mercados/cripto/noticia/2021/11/30/bitcoin-vai-ao-ceu-em-novembro-mas-sofre-com-realizacao-de-lucros-e-ensaia-recuperacao.ghtml. Acesso em: 4 ago. 2022.

Notícia que possibilita uma discussão com os estudantes sobre o crescimento explosivo das criptomoedas, analisando as vantagens e as desvantagens desse tipo de investimento.

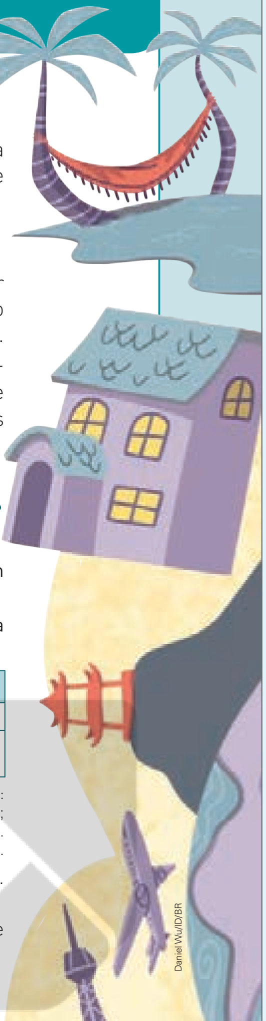
Elias, J. Classe média deixa 70% do dinheiro na poupança; ricos deixam 0,4%. *CNN Brasil*. Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/business/classe-media-deixa-70-do-dinheiro-da-poupanca-ricos-deixam-0-4/. Acesso em: 4 ago. 2022.

Reportagem que trata das diferenças entre os perfis de investidores (renda baixa, média e alta) e alguns motivos de o brasileiro ainda colocar dinheiro na poupança. Discuta com os estudantes o tema: Por que o brasileiro ainda prefere investir seu dinheiro na poupança?

Existem outros tipos de investimento mais arriscados. Um deles, popular desde 2017, são as criptomoedas, ou moedas virtuais. A mais famosa delas é a *bitcoin*. Só para você ter uma ideia, de outubro de 2017 para novembro de 2021, o valor de 1 *bitcoin* passou de 6 400 dólares para mais de 68 000 dólares. Difícil de acreditar, mas aconteceu.

Você pode estar pensando: “Mas isso tudo não é coisa de adulto?”. Antigamente era. Quanto mais cedo você conversar sobre isso com seus pais e tentar investir pequenas quantias, maior poderá ser o seu retorno para poder realizar alguns sonhos que precisam de dinheiro para se concretizar, como fazer cursos, abrir um pequeno negócio, viajar, comprar uma casa, casar, etc.

Aproveite as oportunidades, lembrando sempre que ter dinheiro, ao mesmo tempo que traz conforto e algumas coisas boas, exige responsabilidade e cabeça no lugar. Invista com sabedoria, responsabilidade e criatividade, mas não resuma sua vida a ganhar dinheiro. A vida é mais que isso.



Para refletir

Responda sempre no caderno.

Consulte as respostas neste manual.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir.

1. Vocês já tinham ouvido falar de investimentos? Se sim, sobre que tipos? Quem conversou sobre isso com vocês?
2. Observem atentamente os dados apresentados no quadro a seguir, que mostra a rentabilidade da poupança e de um dos títulos disponíveis no tesouro direto.

	Out.	Nov.	Dez.
Poupança	0,36%	0,44%	0,49%
Tesouro direto (Tesouro Selic 2017 – Rentabilidade bruta)	0,56%	0,63%	0,73%

Fontes de pesquisa: Balanço do Tesouro Direto. Tesouro Nacional Transparente. Disponível em: https://www.tesourotransparente.gov.br/publicacoes/balanco-do-tesouro-direto-btd/2021/12; Sistema Gerenciador de Séries Temporais. Banco Central do Brasil. Disponível em: https://www3.bcb.gov.br/sgspub/. Acessos em: 9 maio 2022.

Imaginem que vocês tivessem 10 000 reais aplicados na poupança em setembro. No final desse mês, um amigo dá o conselho de mudar para o tesouro direto.

a) Quantos reais vocês acumulariam nos três últimos meses do ano investindo de acordo com o conselho do amigo? E mantendo o dinheiro na poupança?

b) Qual é a diferença de rentabilidade entre um tipo de investimento e outro? Em qual deles vale mais a pena investir?

Daniel Wu/ID/BR

PARA REFLETIR

- Na atividade **1**, deixe os estudantes registrarem suas impressões e produzirem seus significados e conhecimentos. Os pais geralmente são os responsáveis pelas primeiras conversas, e é provável que a poupança seja o investimento mais conhecido por eles.
- Na atividade **2**, chame a atenção dos estudantes para o fato de que existem algumas taxas que podem ser cobradas pelas instituições financeiras e pelo governo para a manutenção de alguns investimentos e para o resgate do valor futuro. Por isso, diga aos estudantes que, ao contratar qualquer serviço de investimento financeiro, o cliente deve ser bem informado a respeito dessas taxas e valores.

DE OLHO NA BASE

Ao se reunir em duplas e discutir as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades sem preconceito de qualquer natureza, desenvolvendo a **competência geral 9**.

RESPOSTAS

1. Respostas pessoais.
2. **a)** O valor acumulado no tesouro direto, nos três meses, seria R$ 10 193,22. Já o valor acumulado na poupança, nos três meses, seria R$ 10 129,55.

   b) A diferença é de R$ 63,67. Portanto, vale mais a pena investir no tesouro direto.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Nesta seção, os estudantes vão realizar uma pesquisa documental. Ela é muito semelhante à pesquisa bibliográfica, confundindo-se em alguns casos. A diferença é que, enquanto a pesquisa bibliográfica acontece em referências teóricas já analisadas e publicadas, como livros e artigos, a pesquisa documental conta com fontes mais variadas e diversas, como tabelas, relatórios, gráficos, fotografias, filmes, etc.

PARA COMEÇAR

- Leia com os estudantes o texto inicial da seção e compartilhe o problema levantado. Questione-os sobre o que eles pensam a respeito do problema e peça que anotem suas hipóteses para que, depois da pesquisa, possam confrontá-las.

PROCEDIMENTOS

- Na *Parte I*, organize a turma em cinco grupos com aproximadamente o mesmo número de integrantes. Explique aos estudantes que cada grupo vai pesquisar sobre uma década. A divisão por periodização histórica os ajudará a comprovar se a taxa de natalidade no Brasil aumentou ou diminuiu nos 50 anos anteriores ao ano de 2020.

DE OLHO NA BASE

Ao se reunir com os colegas, os estudantes estão contribuindo para a troca e a pluralidade de ideias, o levantamento de hipóteses, a criatividade e a divisão de tarefas. Verifique se, no momento do planejamento da pesquisa, as opiniões estão sendo respeitadas e se eles conseguem argumentar com o colega, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 9**.

- Na *Parte II*, ajude os grupos a se organizar de modo que eles não realizem a pesquisa em apenas um tipo de fonte. É importante que, mesmo que a maior parte do grupo prefira fazer a busca na internet, alguns integrantes possam ir à biblioteca da escola ou do bairro pesquisar em fontes impressas. É essencial que façam anotações, em vez de simplesmente fotocopiar ou imprimir os textos, pois esse processo os ensinará a selecionar as informações necessárias aos objetivos da pesquisa.
- Explique aos estudantes que a Taxa de Natalidade (TN) é o número de nascimentos anuais ocorridos em uma determinada região em relação à população local. Esse dado não inclui os chamados "natimortos", aqueles que nascem mortos ou morrem logo após o parto. Geralmente, essa relação é representada em porcentagem (a cada 100 habitantes) ou por mil (a cada 1 000 habitantes), sendo essa última a forma mais comum.

INVESTIGAR

Mais pessoas ou menos pessoas?

Para começar

Será que com o passar do tempo nascem mais pessoas ou menos pessoas no Brasil? Quem teve mais filhos: seus pais e tios ou seus avós e bisavós?

Nesta atividade, você vai realizar uma pesquisa documental para descobrir a taxa de natalidade no Brasil nos 50 anos anteriores a 2020. Depois, toda a turma vai discutir os resultados e elaborar, com eles, uma tabela e um gráfico, que serão expostos a toda a comunidade escolar, além de fotos de famílias antigas e da atualidade.

O PROBLEMA

- A taxa de natalidade no Brasil aumentou ou diminuiu nos 50 anos anteriores a 2020?

A INVESTIGAÇÃO

- **Prática de pesquisa:** pesquisa documental.
- **Instrumentos de coleta:** levantamento de registros institucionais (relatórios, documentos oficiais, tabelas, gráficos).

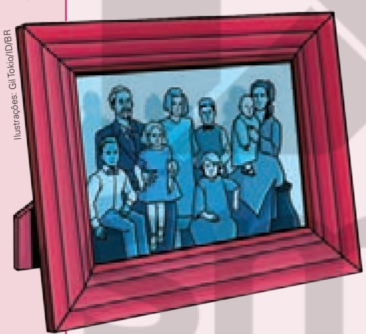
MATERIAL

- computador com acesso à internet
- canetas hidrográficas
- cartolina ou papel pardo

Procedimentos

Parte I – Planejamento

- A turma será organizada em cinco grupos.
- Cada grupo ficará responsável por pesquisar as taxas de natalidade no Brasil em uma década: 1970, 1980, 1990, 2000 e 2010.



Ilustrações: Gil Tokio/ID/BR

Parte II – Coleta e seleção dos dados

1. Procurem *sites* de instituições e de profissionais que realizem pesquisas sobre o tema e que tenham credibilidade para falar sobre o assunto.
2. Organizem e separem os documentos que acharem mais relevantes, lembrando de anotar o nome do autor, o título da publicação e do *site* (além do *link*) e as datas de publicação e do acesso.
3. No dia combinado, reúnam tudo o que foi pesquisado pelo grupo e selecionem as informações relativas à taxa de natalidade na década pela qual o grupo ficou responsável.

Parte III – Elaboração e análise da tabela e do gráfico

1. Com base nas informações selecionadas pelos grupos, toda a turma deve elaborar uma tabela que mostre a taxa de natalidade ao longo das décadas pesquisadas.

304

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO

Organize um debate com a turma sobre as experiências vivenciadas nessa pesquisa para a posterior produção dos cartazes. Pergunte aos estudantes que tipo de reflexão a pesquisa lhes proporcionou e quais são os impactos do aumento ou da diminuição da taxa de natalidade. Após a troca de ideias, solicite a eles que respondam às perguntas.

1. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes respondam que os resultados encontrados na pesquisa de campo não apresentariam os mesmos resultados da pesquisa documental, pois a amostra não seria representativa.
2. Respostas pessoais. Peça aos estudantes que compartilhem as dificuldades que tiveram com os colegas e que contem como fizeram para solucioná-las.
3. Respostas pessoais. No caso de os estudantes terem encontrado informações divergentes, espera-se que tenham optado pelas fontes mais confiáveis.
4. Incentive os estudantes a compartilhar suas respostas e observe como eles argumentam para justificar a escolha que fizeram.
5. Resposta pessoal.

❷ Com base na tabela, toda a turma também vai elaborar um gráfico, que poderá ser feito manualmente ou em planilha eletrônica. Lembrem-se de dar um título à tabela e ao gráfico e de anotar as fontes da pesquisa.

❸ Coletivamente, observem a tabela e o gráfico construídos e discutam as seguintes questões, anotando os pontos de vista apresentados e os consensos, se houver:

- Em que período nasceram mais pessoas? E em que período nasceram menos pessoas?
- As taxas de natalidade mais recentes refletem o que você vivencia em sua família e percebe nas famílias com as quais convive?
- De que modo a diferença entre as taxas de natalidade ao longo do tempo pode interferir em setores como educação e saúde pública?
- Que mudança(s) houve na sociedade para que as taxas de natalidade venham se alterando?

Parte IV – Confecção dos cartazes e coleta das fotos

❶ Confeccionem um cartaz com a tabela elaborada pela turma. Fiquem atentos para que as informações sejam apresentadas de maneira clara, escrevendo com letras grandes, caligrafia legível e usando cores que não dificultem a leitura.

❷ Em outro cartaz, reproduzam o gráfico que elaboraram. Se desejarem, podem utilizar papel quadriculado. Usem canetas hidrográficas coloridas para tornar o gráfico mais atraente.

❸ Tragam para a sala de aula fotos da família de vocês que reflitam as informações apresentadas na tabela e no gráfico:

- fotos antigas, da época em que seus pais eram crianças, com tios, avós, bisavós, etc.;
- fotos atuais de sua família, com você, seus pais e irmãos (se tiver).

Gil Tokio/ID/BR

Questões para discussão

Respostas pessoais.

1. Se, em vez de uma pesquisa documental, vocês tivessem realizado uma pesquisa de campo com entrevistas, teria sido possível encontrar os mesmos resultados? Por quê?
2. Nos *sites* visitados, vocês conseguiram encontrar rapidamente os dados que procuravam ou tiveram alguma dificuldade? Se sim, qual (ou quais)?
3. Enquanto realizavam a pesquisa, vocês se depararam com informações divergentes sobre um mesmo assunto? Se sim, como decidiram qual selecionar?
4. De que forma consideram mais fácil visualizar os resultados da pesquisa: na tabela ou no gráfico? Justifiquem sua resposta.
5. Foi fácil encontrar fotos de família que correspondessem aos dados encontrados na pesquisa?

Comunicação dos resultados

Exposição dos cartazes e das fotos

Com a orientação do professor, organizem uma exposição com os cartazes que confeccionaram e as fotos que coletaram. Os visitantes serão os estudantes de outras turmas, além dos funcionários da escola e dos pais.

No dia da abertura da exposição, alguns estudantes podem fazer uma breve apresentação, contando como a pesquisa foi realizada e explicando a relação entre os cartazes e as fotos expostas.

305

- Na *Parte III*, se achar oportuno, após a elaboração da tabela e do gráfico por toda a turma, reúna os estudantes em roda para que discutam as questões do item **3**. O importante é que eles consigam analisar e extrair conclusões variadas, com base nos elementos da tabela e do gráfico, e estabelecer relações entre dados estatísticos e a própria realidade.
- Na *Parte IV*, auxilie os estudantes na confecção dos cartazes para que todas as informações necessárias estejam presentes e legíveis.

DE OLHO NA BASE

Discutir com os estudantes sobre a importância do controle de natalidade como solução para o crescimento populacional, de modo que se estabeleçam políticas públicas para diminuir o número de nascimentos no país e que isso pode ser feito de diversas maneiras, favorece o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 7**.

Além disso, interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e no desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos, de modo a identificar aspectos consensuais, ou não, na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 8**.

COMUNICAÇÃO DOS RESULTADOS

- Combine um dia para que a comunidade escolar se reúna na escola para ver a exposição dos cartazes e das fotos.
- Prepare, com os estudantes, o espaço onde vai acontecer a exposição.
- Os cartazes e as fotos podem ficar em um local de destaque para que todos possam ver e ler as informações obtidas na pesquisa.
- No momento oportuno, os grupos podem fazer a exposição oral. Durante a apresentação, se possível, os estudantes podem explicar os gráficos e/ou as tabelas que elaboraram. Após a apresentação de cada grupo, pode-se abrir um momento para que os participantes do evento façam perguntas sobre a pesquisa.
- Auxilie os grupos na preparação da exposição oral. Provavelmente, não é possível que todos os integrantes falem, mas os que não tiverem a oportunidade de participar podem auxiliar de outras maneiras, como na elaboração do roteiro e na exibição dos cartazes e das fotos. Antes do dia da apresentação, reserve um tempo para que os estudantes possam ensaiar e se preparar para o evento.

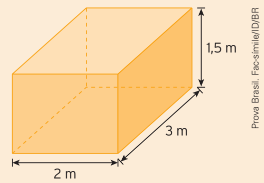
ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Na atividade **2**, verifique se os estudantes percebem que é necessário encontrar a medida da aresta do cubo usando a informação sobre a medida da área total.
- Para resolver a atividade **8**, os estudantes devem calcular a medida do volume de sorvete de chocolate após passar o tempo no congelador. Depois, calcular a medida do volume de sorvete que restará na embalagem.
- Na atividade **11,** os estudantes precisam encontrar uma fórmula geral para o cálculo da medida do volume de um prisma regular de base hexagonal. Inicialmente eles podem escrever a fórmula da medida da área do hexágono regular multiplicando por 6 a medida da área do triângulo equilátero. Em seguida, deverão multiplicar esse resultado por *h*, obtendo assim a fórmula para calcular a medida do volume desse prisma.
- Na atividade **13**, os estudantes devem perceber que, para determinar a lata economicamente mais vantajosa, é preciso comparar a razão entre a medida do volume e o preço de cada uma delas.
- Na atividade **14,** verifique se os estudantes adicionam a medida do volume do cilindro com a medida do volume do cone para calcular a medida da capacidade do recipiente.

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Escreva no caderno a alternativa correta.

(Prova Brasil) Uma caixa-d'água, com a forma de um paralelepípedo, mede 2 m de comprimento por 3 m de largura e 1,5 m de altura. A figura abaixo ilustra essa caixa. **Alternativa c.**

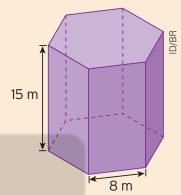


O volume da caixa-d'água, em m^3, é:

a) 6,5 b) 6,0 c) 9,0 d) 7,5

2. (PUC-RJ) Um cubo tem 96 m^2 de área total. Em quantos metros deve ser aumentada a sua aresta para que o seu volume se torne igual a 125 m^3? **Deve ser aumentada em 1 m.**

3. Calcule a medida do volume deste prisma, sabendo que a figura representa um prisma cujas bases são hexágonos regulares. **$1\,440\sqrt{3}$ cm^3**

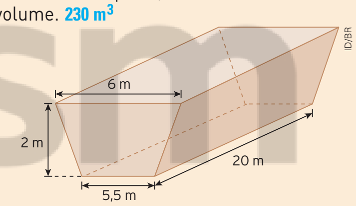


4. Escreva no caderno a alternativa correta.

(PUC-MG) Uma piscina tem 25 m de largura, 50 m de comprimento, 1,5 m de profundidade na parte mais rasa e 2,5 m na outra extremidade. Seu fundo é um plano inclinado. A partir desses dados, é correto afirmar que o volume dessa piscina, em metros cúbicos, é igual a: **Alternativa c.**

a) 2 000 c) 2 500
b) 2 300 d) 2 800

5. Sabendo que o prisma a seguir tem bases em formato de trapézio, calcule a medida do seu volume. **230 m^3**



6. Qual é a medida do volume de uma pirâmide regular hexagonal medindo 2 cm de altura e 5 cm de aresta da base? **$25\sqrt{3}$ cm^3**

7. Escreva no caderno a alternativa correta.

(FMU-SP) Se triplicarmos a medida do raio da base de um cilindro mantendo a medida da altura, o volume do cilindro fica multiplicado por:

a) 3 c) 9 e) 15
b) 6 d) 12 **Alternativa c.**

8. Escreva no caderno a alternativa correta.

(Enem) Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é: **Alternativa c.**

a) 450 c) 600 e) 1 000
b) 500 d) 750

9. Escreva no caderno a alternativa correta.

(UFRN) Como parte da decoração de sua sala de trabalho, José colocou sobre uma mesa um aquário de acrílico em forma de paralelepípedo retângulo, com dimensões medindo 20 cm × 30 cm × 40 cm. Com o aquário apoiado sobre a face de dimensões 40 cm × 20 cm, o nível de água ficou a 25 cm de altura.

Se o aquário fosse apoiado sobre a face de dimensões 20 cm × 30 cm, a altura da água, mantendo-se o mesmo volume, seria de, aproximadamente: **Alternativa c.**

a) 16 cm c) 33 cm
b) 17 cm d) 35 cm

306

ESTRATÉGIAS DE APOIO

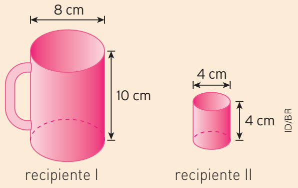
Se os estudantes tiverem dificuldade em resolver a atividade **4**, peça a eles que façam um desenho para representar a piscina e verifiquem que podem dividi-la em dois prismas: um bloco retangular e um prisma de base triangular.

Eles deverão obter um bloco retangular de dimensões 25 m por 50 m por 1,5 m, e um prisma de base triangular, cuja base é um triângulo retângulo de catetos com medidas 1,0 m e 50 m, e a altura desse prisma mede 25 m.

Responda sempre no caderno.

10. Escreva no caderno a alternativa correta.

Considere os dois recipientes cilíndricos representados a seguir.



Vanessa quer encher pela metade 10 recipientes iguais ao recipiente II. Para isso, ela quer colocar a quantidade mínima de água no recipiente I, de modo que ela consiga encher, sem desperdício, todos os 10 recipientes menores pela metade. Para que isso ocorra, Vanessa deverá: **Alternativa a.**

a) encher o recipiente I até a metade, pois ele tem um volume 10 vezes maior que o volume do recipiente II.

b) encher o recipiente I de água, pois ele tem um volume 10 vezes maior que o volume do recipiente II.

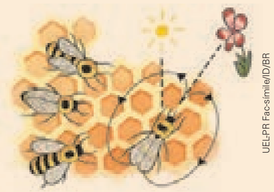
c) encher o recipiente I, pois ele tem um volume 5 vezes menor que o volume do recipiente II.

d) encher o recipiente I de água, pois ele tem um volume 5 vezes maior que o volume do recipiente II.

e) encher 5 vezes o recipiente I, pois ele tem um volume 10 vezes maior que o volume do recipiente II.

11. Escreva no caderno a alternativa correta.

(UEL-PR) Observe a figura.



Sobre o armazenamento de mel em colmeias, tem-se que o volume V de cada alvéolo, considerado como prisma regular hexagonal reto de altura h e arestas da base igual a ℓ, é dado por: **Alternativa e.**

a) $V = (2 + \sqrt{3})\,\dfrac{h\ell^2}{2}$

b) $V = (1 + \sqrt{3})\,\dfrac{h\ell^2}{2}$

c) $V = (1 + 2\sqrt{3})\,h^2\ell$

d) $V = 3\sqrt{3}\,\ell^2 h$

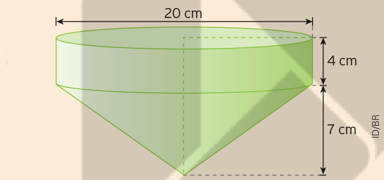
e) $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,\ell^2 h$

12. Uma doceira tem um pedido de 200 cones de chocolate para o Natal. Esses doces têm a forma de cone, em que o diâmetro da base mede 5 cm, e a altura, 7 cm. Determine a quantidade de chocolate, em centímetro cúbico, necessária para atender esse pedido. (Use $\pi = 3$.) **8 750 cm³**

13. Considere duas latas de leite em pó em forma de cilindro de alturas iguais. Em uma delas, o raio da base mede 5 cm; em outra, o raio da base mede 8 cm. A primeira custa R$ 16,85, e a segunda, R$ 17,29.

Qual dessas embalagens é economicamente mais vantajosa para o consumidor, considerando que todo o volume delas é preenchido com leite em pó? Para realizar os cálculos, despreze a espessura da lata. **A segunda embalagem.**

14. Para guardar a ração de seus gatos, Cristiano construiu um recipiente que acoplava um cilindro e um cone, como mostra a figura.



Calcule, em centímetro cúbico, a medida da capacidade desse recipiente. Considere $\pi = 3$. **1 900 cm³**

15. Reúna-se com dois colegas. Imaginem que vocês sejam projetistas de uma empresa que fabrica embalagens, com a função de desenvolver uma embalagem que seja atraente, funcional e com capacidade para 1 litro. A embalagem pode ter a forma de um prisma, de um cilindro, de um cone ou de uma pirâmide. Vocês devem construir uma réplica da embalagem utilizando uma cartolina. **Resposta pessoal.**

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Compreendi como representar medidas de comprimento muito grandes ou muito pequenas?
- Sei como representar medidas de massa muito pequenas?
- Consigo reconhecer e empregar unidades que expressam as medidas de informática, como a capacidade de armazenamento de computadores?
- Consigo resolver situações-problema que envolvem medidas de volumes de prismas e de pirâmides?
- Consigo resolver situações-problema que envolvem medidas de volumes de cilindros e de cones?
- Procurei conversar com os colegas ou o professor para sanar minhas possíveis dúvidas?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

307

INTERAÇÃO

Objetivos

- Promover o debate e a reflexão acerca do tema imigração e refúgio.
- Realizar pesquisa em diversas fontes.
- Elaborar um relatório.
- Planejar uma exposição.

Conteúdos

- Análise de dados.
- Construção de tabelas e/ou gráficos.

Justificativa

- Nesse projeto, os estudantes terão a oportunidade de experienciar um momento de trocas de ideias com o debate e a reflexão acerca do tema imigração e refúgio. Em grupos, eles deverão realizar uma pesquisa, apresentar o resultado dela, planejar e realizar uma exposição. Assim, estarão praticando autonomia, empatia, trabalho em equipe, além de compreenderem, de modo significativo, os temas matemáticos explorados nesse contexto.

Sugestão de cronograma

- Propomos que esse projeto seja desenvolvido ao longo de um semestre, em 16 aulas, que não precisam ser consecutivas.
  - 1 aula – organização dos grupos, se possível, de acordo com o local de moradia de cada estudante (estudantes que residem em uma mesma região devem estar no mesmo grupo); coleta de informações sobre o estado ou país de origem da família de cada um deles; debate sobre o que eles entendem por imigração, refúgio e xenofobia.
  - 3 aulas – pesquisa de dados históricos e estatísticos que mostrem a realidade brasileira sobre imigração e refúgio no estado onde moram; elaboração de relatório que aponte os dados encontrados.
  - 2 aulas – apresentação dos dados encontrados e relatório elaborado; debate a respeito da pesquisa realizada.
  - 2 aulas – organização dos grupos para que cada estudante pesquise moradores de um local específico; elaboração das perguntas que serão feitas à comunidade; realização da pesquisa.
  - 3 aulas – apresentação e elaboração do relatório com dados encontrados durante a pesquisa; debate a respeito dos dados coletados e dos elementos culturais que mais chamaram a atenção dos grupos.
  - 3 aulas – utilização dos dados levantados para definir uma cultura imigrante/de refugiados para cada grupo; definição do que será apresentado (cada grupo deverá expor, pelo menos, dois elementos – música, moda, gastronomia, dança, costumes, etc.); preparação dos elementos que serão expostos.
  - 2 aulas – exposição e roda de conversa sobre o tema.

INTERAÇÃO

IMIGRANTES E REFUGIADOS

No decorrer do século XIX, o Brasil foi considerado um país de oportunidades: muitas pessoas deixaram seu país natal com o desejo de construir, aqui, uma vida melhor. De fato, o país recebe imigrantes desde 1530, a princípio portugueses, depois italianos, japoneses, alemães, suíços, estadunidenses, entre outras nacionalidades.

O processo de imigração acontece, na maioria dos casos, porque uma pessoa ou um grupo de pessoas busca melhores oportunidades de qualidade de vida.

Mas há também o caso dos refugiados. Em 2022, por exemplo, o surgimento de conflitos entre Rússia e Ucrânia acabou acarretando uma guerra neste país, o que fez com que milhões de ucranianos o deixassem em busca de sobrevivência.

Nos últimos anos, o Brasil tem recebido muitos refugiados e imigrantes. Em sua opinião, quais são as principais dificuldades encontradas por alguém que deixa seu país e se dirige para um lugar diferente? Você ou algum parente deixou seu local de origem parar viver onde mora hoje? Você conhece alguém que imigrou para o Brasil?

Ucranianos fugindo de trem para o oeste do país e para a Polônia devido ao conflito com a Rússia. Foto de 2022.

Vladimir Shtanko/Anadolu Agency/AFP

308

Interdisciplinaridade

- Nesse projeto, a interdisciplinaridade se dará, mais especificamente, com os componentes curriculares Geografia e História.

  Em Geografia, o projeto contribui para o desenvolvimento das seguintes habilidades:
  - EF09GE11
  - EF09GE12

  Em História, o projeto contribui para o desenvolvimento das seguintes habilidades:
  - EF09HI01
  - EF09HI05
  - EF09HI02
  - EF09HI06
- O texto de cada uma dessas habilidades pode ser encontrado na BNCC, disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf (acesso em: 30 jul. 2022).

DE OLHO NA BASE

O trabalho proposto nesse projeto contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**, na medida em que os estudantes são incentivados a acolher e a valorizar, sem preconceitos de qualquer natureza, a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades.

Neste projeto, será feita uma pesquisa sobre os contextos de imigração no Brasil e na comunidade local. Depois, você e os colegas vão organizar uma exposição com os resultados da pesquisa e com dados da cultura dos moradores da comunidade que vieram de outros lugares.

Objetivos

- Pesquisar os contextos de imigração no Brasil.
- Fazer um levantamento dos históricos familiares de imigração (locais, motivos, etc.).
- Pesquisar o histórico de imigração dos moradores.
- Elaborar relatório com dados obtidos na pesquisa.
- Planejar, organizar e divulgar uma exposição que mostre a cultura (costumes, alimentação, moda, etc.) das regiões de origem dos moradores da comunidade que imigraram.

Planejamento

- Com a orientação do professor, organizem-se em quatro grupos com o mesmo número de integrantes (se necessário, um grupo poderá ter um integrante a mais ou a menos), preferencialmente de acordo com o local de moradia de cada estudante.
- O projeto será realizado em seis partes:

Parte I – Conversa inicial
Parte II – Levantamento de dados
Parte III – Apresentação dos dados e roda de conversa
Parte IV – Pesquisa de campo
Parte V – Apresentação e elaboração de relatório
Parte VI – Exposição

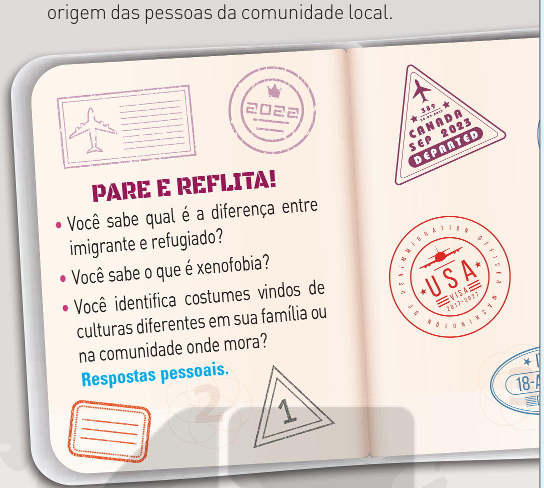
Materiais

- Papel, lápis e caneta
- Mapa do bairro ou da cidade onde moram
- Computador com acesso à internet
- Jornais, revistas e livros
- Cola, fita adesiva, etc. (o que for necessário para a organização da exposição)

Procedimentos

Parte I – Conversa inicial

1. Conversem sobre quais são os locais de origem da família de cada integrante do grupo.
2. Levantem hipóteses sobre os locais de origem das pessoas da comunidade local.



PARE E REFLITA!

- Você sabe qual é a diferença entre imigrante e refugiado?
- Você sabe o que é xenofobia?
- Você identifica costumes vindos de culturas diferentes em sua família ou na comunidade onde mora?

Respostas pessoais.

Vectorios2016/iStock/Getty Images; Yevhenii Dubinko/iStock/Getty Images; Nomad_Soul/iStock/Getty Images

Parte II – Levantamento de dados

1. Pesquisem conceitos, dados históricos e estatísticas sobre imigração ou acolhimento a refugiados no estado onde moram. Utilizem fontes confiáveis, como *sites* oficiais de órgãos governamentais.
2. Façam um levantamento da nacionalidade ou região de origem dos imigrantes ou refugiados no Brasil.
3. Elaborem um relatório da pesquisa.

Parte III – Apresentação dos dados e roda de conversa

1. Apresentem, em sala de aula, os dados obtidos e o relatório elaborado.
2. Verifiquem se os dados obtidos confirmaram as hipóteses levantadas na primeira parte do projeto.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Este projeto apresenta uma situação real e incentiva os estudantes a aprender de forma autônoma e participativa. Propostas como essa podem ser realizadas com a metodologia de aprendizagem baseada em projetos.

  A aprendizagem com base em projetos é uma metodologia ativa que propõe a atividade prática como instrumento para a aprendizagem.
- Promova, de maneira recorrente, rodas de conversa que possibilitem aos estudantes sentirem que o ambiente escolar é um espaço livre de quaisquer atos violentos (verbais ou não verbais), no qual o respeito a diferentes opiniões e posicionamentos sejam constantemente desenvolvidos.
- Nos dias atuais, é de suma importância conscientizar os estudantes sobre o combate à violência contra negros, povos indígenas, imigrantes e refugiados, e a qualquer atitude racista presente em diversas áreas da sociedade. É importante garantir que todos os estudantes se sintam pertencentes à comunidade escolar, de modo que sejam igualmente acolhidos e possam estabelecer vínculos sociais e gerenciar emoções de maneira intra e interpessoal.
- Organize os estudantes em quatro grupos, se possível, de acordo com o local de moradia de cada um deles, de modo que os que moram próximos uns dos outros fiquem no mesmo grupo.

PROCEDIMENTOS

- Na *Parte I*, incentive os estudantes a comentar o que conhecem a respeito de imigração, refúgio e xenofobia, bem como quais são os estados e países de origem da família deles. Fique atento aos conhecimentos prévios dos estudantes e complemente com informações de seu conhecimento. Anote as hipóteses deles, para serem retomadas posteriormente, quando tiverem dados numéricos em mãos.
- Explique aos estudantes que imigrantes são pessoas que se dirigem a uma cidade, região ou país para morar, em busca de melhores condições de vida, de proximidade de familiares, etc. Refugiados são indivíduos que deixam o país de origem devido a situações que ameaçam suas vidas, como perseguições políticas, guerras e catástrofes naturais. Além disso, explique a eles que xenofobia é toda forma de discriminação contra estrangeiros.

DE OLHO NA BASE

Incentive os estudantes a discutir as questões do boxe *Pare e reflita!*. Nesse momento, os estudantes podem compartilhar suas respostas e opiniões, exercitando a empatia e o diálogo. Tarefas como essa contribuem para o desenvolvimento da **competência geral 9**.

Além disso, os estudantes estarão aprendendo e colaborando para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como estabelece a **competência geral 1**.

- Na *Parte II*, peça a cada grupo que pesquise um dos temas: imigração ou refúgio no estado em que moram. Essa tarefa permite explorar as habilidades **EF09GE11**, **EF09GE12**, **EF09HI01**, **EF09HI02**, **EF09HI05** e **EF09HI06**. Solicite a eles que enfoquem, na pesquisa, o contexto do estado ou da cidade onde vivem. Comente que o *site* do IBGE tem informações que podem auxiliá-los nessa pesquisa. Os estudantes devem elaborar um relatório que descreva os dados encontrados.
- Na *Parte III*, os grupos deverão apresentar os dados encontrados e o relatório elaborado. Se possível, para incentivar o debate, mostre aos estudantes um vídeo que trata de imigração e estereótipos.
- Na *Parte IV*, com o auxílio de um mapa do bairro ou da cidade, nos quais a pesquisa será realizada, determine, com os estudantes, os locais de realização da atividade (de preferência, na rua em que residem). Cada estudante deverá entrevistar, no mínimo, cinco pessoas.

- Ajude os estudantes a elaborar as perguntas do questionário de pesquisa. As questões devem ser as mesmas para toda a turma. Explique a eles a necessidade de perguntas "fechadas" para o levantamento de dados estatísticos e de perguntas "abertas" para dados específicos, como dança típica regional.
- Todos os estudantes deverão trazer para a sala de aula suas pesquisas para, então, elaborar um relatório com os dados coletados.
- Na *Parte V*, com a pesquisa realizada na etapa anterior, os estudantes deverão elaborar um relatório com os dados estatísticos (organizados em tabela) e também com as curiosidades encontradas na pesquisa, por exemplo, comida típica de determinada região, etc. Os dados estatísticos podem ser utilizados para a construção de gráficos que mostrem, por exemplo, o resultado amostral da quantidade de pessoas imigrantes/refugiadas na localidade, de onde elas vieram e os motivos para a mudança.

DE OLHO NA BASE

Na construção da tabela e/ou do gráfico, incentive o uso de programas processadores de texto e de planilhas eletrônicas. Dessa maneira, ao utilizar tecnologias digitais de informação para comunicar, acessar e disseminar informações, os estudantes desenvolvem a **competência geral 5**.

- Na *Parte VI*, de acordo com os dados levantados, entregue a cada grupo um subtema para apresentar (por exemplo, determinado aspecto cultural ou local de origem). Na exposição, cada um dos quatro grupos deverá apresentar, pelo menos, dois elementos culturais (música, dança, gastronomia, costumes, moda, etc.).

COMPARTILHAMENTO

- Auxilie os estudantes na preparação da exposição. Ao final, durante a roda de conversa com a comunidade, permita que os estudantes falem sobre os dados encontrados e incentive o público presente a comentar sobre algum costume de outra região.

Route55/iStock/Getty Images

Parte IV – Pesquisa de campo

1. Com a ajuda do professor, definam os locais para fazer uma pesquisa de campo, de acordo com os lugares onde moram.
2. Elaborem, ainda com a ajuda do professor, um questionário com perguntas a respeito do tema para serem feitas a pessoas da comunidade em uma entrevista. As perguntas devem abordar o local de origem, seus costumes e sua cultura. Acrescentem outras perguntas de acordo com o decorrer da entrevista. Cada grupo deverá entrevistar pelo menos cinco pessoas.

Parte V – Apresentação e elaboração de relatório

1. Apresentem, em sala de aula, os dados obtidos nas entrevistas, ressaltando pontos que consideraram mais interessantes.
2. Elaborem um relatório do trabalho de campo. Esse documento deve conter uma análise das respostas organizada em tabelas e gráficos que auxiliem na interpretação dos dados coletados.

Parte VI – Exposição

1. Discutam e decidam sobre os dados a serem apresentados na exposição.
2. Cada grupo ficará responsável por apresentar aspectos culturais (música, moda, dança, costumes, gastronomia, língua e outros que julgarem interessantes) da região de origem das pessoas entrevistadas. Podem também ser apresentadas duas curiosidades da região. Sigam as orientações do professor.
3. Preparem a exposição, que pode incluir cartazes, símbolos, trajes típicos, pratos locais, bandeiras e outros itens que singularizem a região de origem das pessoas entrevistadas na pesquisa de campo.

Compartilhamento

Organizem a sala de aula de acordo com o que será exposto. Na entrada, exponham algum objeto, frase ou imagem que sintetize o trabalho.

A exposição poderá servir como introdução para uma roda de conversa com a comunidade escolar sobre imigração, acolhimento a refugiados e xenofobia. Nesse momento, disponibilizem o relatório elaborado sobre a pesquisa de campo.

Avaliação Respostas pessoais.

1. Como foram realizadas as pesquisas?
2. Você se surpreendeu com algum dado encontrado? Se sim, qual? Se sim ou se não, por quê?
3. Seu grupo conseguiu realizar a exposição conforme o planejado?
4. Como foi trabalhar em grupo? Houve cooperação durante o desenvolvimento do trabalho?
5. Foi interessante planejar, organizar, divulgar e realizar a exposição? De quais partes você mais gostou e quais partes você gostaria de melhorar em um próximo trabalho?
6. O que você aprendeu com a realização deste projeto?

OUTRAS FONTES

ACNUR. Agência da ONU para Refugiados. *Dados sobre refúgio no Brasil*. Disponível em: https://www.acnur.org/portugues/dados-sobre-refugio/dados-sobre-refugio-no-brasil/. Acesso em: 24 mar. 2022.

Reportagem que traz dados divulgados pelo Comitê Nacional para os Refugiados (Conare), na 7ª edição do relatório *Refúgio em Números*.

JUNGER, G.; CAVALCANTI, L.; OLIVEIRA, T. de; SILVA, B. G. *Refúgio em números*. 7. ed. Série Migrações. Observatório das Migrações Internacionais; Ministério da Justiça e Segurança Pública/Conselho Nacional de Imigração e Coordenação Geral de Imigração Laboral. Brasília, DF: OBMigra, 2022. Disponível em: https://portaldeimigracao.mj.gov.br/images/Obmigra_2020/OBMigra_2022/REF%C3%9AGIO_EM_N%C3%9AMEROS/Refu%CC%81gio_em_Nu%CC%81meros_-_27-06.pdf. Acesso em: 27 jul. 2022.

Relatório que apresenta dados sobre refugiados.

YOON, N. *O Sol também é uma estrela*. São Paulo: Arqueiro, 2017.

Esse livro infantojuvenil trata dos imigrantes nos Estados Unidos.

Lista de siglas e bibliografia

Lista de siglas

Cesgranrio-RJ	Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio
CMB-DF	Colégio Militar de Brasília
CMRJ	Colégio Militar do Rio de Janeiro
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
ESPM-SP	Escola Superior de Propaganda e Marketing
Etec-SP	Escola Técnica Estadual
FGV-SP	Fundação Getúlio Vargas
FMU-SP	Centro Universitário das Faculdades Metropolitanas Unidas
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
Obmep	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
Prova Brasil	Avaliação Nacional do Rendimento Escolar
PUC-Campinas-SP	Pontifícia Universidade Católica de Campinas
PUC-MG	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-RJ	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Ufes	Universidade Federal do Espírito Santo
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Unifor-CE	Universidade de Fortaleza

Bibliografia comentada

Bacich, L.; Holanda, L. *STEAM em sala de aula*: a aprendizagem baseada em projetos integrando conhecimentos na educação básica. Porto Alegre: Penso, 2020.

Os estudos na área da educação convergem para a adoção de propostas que coloquem o estudante em um papel investigativo. Nesse sentido, a abordagem STEAM (sigla em inglês para Ciência, Tecnologia, Engenharia, Arte e Matemática) é uma ferramenta valiosa que serve de inspiração para a elaboração de diversas propostas pedagógicas.

Bendick, J. *Pesos e medidas*. Tradução: Djalmir Ferreira de Mello. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1960 (Coleção O Mundo e Nós).

Nesse livro estão presentes ideias e conceitos acerca de pesos e medidas.

Boaler, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Tradução: Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2018.

Nesse livro, a autora apresenta técnicas e atividades que mostram como tornar a aprendizagem da Matemática mais agradável e acessível a todos os estudantes.

Boyer, C. B.; Merzbach, U. C. *História da Matemática*. Tradução: Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

Esse livro trata da história da relação da humanidade com o desenvolvimento da Matemática.

Brasil. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). *Matrizes de referência do Saeb*. Brasília: MEC/Inep, 1999. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/matrizes-e-escalas. Acesso em: 23 mar. 2022.

O Saeb é um conjunto de avaliações que permite ao Inep diagnosticar a educação básica brasileira e os fatores que podem estar relacionados ao desempenho dos estudantes. Essas avaliações são elaboradas com base em matrizes de referência.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Alfabetização. *PNA*: Política Nacional de Alfabetização. Brasília: MEC/Sealf, 2019. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/images/banners/caderno_pna.pdf. Acesso em: 23 mar. 2022.

A Política Nacional de Alfabetização (PNA) foi instituída com o objetivo de melhorar a qualidade da alfabetização no Brasil e combater o analfabetismo no país. O documento aborda conceitos como alfabetização, literacia e numeracia.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 23 mar. 2022.

Elaborada pelo Ministério da Educação de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, de 1996, a Base Nacional Comum Curricular é um documento normativo que estabelece os conhecimentos, as competências e as habilidades que se espera que os estudantes desenvolvam ao longo da Educação Básica.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Competências socioemocionais como fator de proteção à saúde mental e ao* bullying. Brasília: MEC/SEB, 2020. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/195-competencias-socioemocionais-como-fator-de-protecao-a-saude-mental-e-ao-bullying. Acesso em: 23 mar. 2022.

Nesse material é possível compreender como as competências socioemocionais estão presentes nas dez competências gerais descritas pela BNCC. Esse documento serviu como base para a elaboração de diversas propostas desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. *Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica*. Brasília: MEC/SEB/Dicei, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file. Acesso em: 23 mar. 2022.

Esse documento traz as diretrizes que estabelecem uma base nacional comum, responsável por orientar a organização, a articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas de todas as redes de ensino brasileiras.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Ensino Fundamental de nove anos*: orientações para a inclusão da criança de seis anos de idade. Brasília: MEC/SEB, 2007. Disponível em: portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Ensfund/ensifund9anobasefinal.pdf. Acesso em: 23 mar. 2022.

Esse documento foi elaborado com base no diálogo com gestores dos sistemas de ensino e tem como propósito desenvolver uma metodologia de trabalho voltada à ampliação do programa do Ensino Fundamental de oito para nove anos.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 23 mar. 2022.

O trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) possibilita que os estudantes concluam sua educação formal reconhecendo e aprendendo os temas que são relevantes para sua atuação na sociedade. Esse documento apresenta os TCTs e traz propostas de práticas de implementação.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística básica*. São Paulo: Saraiva, 2017.

O livro é divido em três partes. A primeira trata da análise de dados uni e bidimensionais. A segunda traz conceitos básicos de probabilidade e variáveis aleatórias. E, por fim, a terceira trata dos principais tópicos da inferência estatística.

EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2011.

Essa obra narra a história da Matemática desde a Antiguidade até os dias atuais por meio da observação da cultura de cada época retratada.

IEZZI, G. *et al*. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 2013. v. 1 a 11.

Os livros dessa coleção foram utilizados como referenciais teóricos para a apresentação de diversos temas e conteúdos.

JANUÁRIO, A. J. *Desenho geométrico*. 4. ed. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2019.

Esse livro aborda de maneira simples conteúdos de desenho geométrico, possibilitando uma aprendizagem imediata. Muitas das propostas apresentadas nele inspiraram os autores na elaboração dos conteúdos de desenho geométrico desta coleção.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. *Noções de probabilidade e estatística*. São Paulo: Edusp, 2015.

O livro apresenta uma introdução à probabilidade e à estatística. Os conceitos de estatística descritiva são tratados em paralelo com outras teorias, possibilitando estabelecer uma relação entre estatística descritiva, probabilidade e variáveis aleatórias.

MEYER, P. L. *Probabilidade*: aplicações à estatística. Tradução: Ruy C. B. Lourenço Filho. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Os conceitos, os teoremas e os comentários sobre probabilidade e estatística apresentados nesse material serviram de inspiração para a elaboração das unidades referentes ao eixo temático Probabilidade e Estatística.

MILIES, C. P.; COELHO, S. P. *Números*: uma introdução à matemática. 3. ed. São Paulo: Edusp, 2013.

Esse livro apresenta a teoria dos números inteiros e mostra como o conjunto dos números racionais se constrói com base nos números inteiros. Além disso, trabalha com uma apresentação axiomática de Peano para os números naturais.

MORAES, C. A. P. *Avaliação em Matemática*: pontos de vista dos sujeitos envolvidos na Educação Básica. Jundiaí: Paco Editorial, 2012.

Esse livro investiga as concepções da avaliação em Matemática na Educação Básica. A leitura da obra permite um amplo aprofundamento nas teorias da avaliação e a compreensão dos processos utilizados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e pelo Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp).

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

A resolução de problemas possibilita que os estudantes desenvolvam o pensamento matemático de maneira ativa. Nesse livro, é possível encontrar diversas contribuições acerca desse tema, que serviram de inspiração para o projeto e a elaboração das situações abordadas na seção *Resolvendo problemas*.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. 2. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2008.

Esse livro contribui para a descoberta e a compreensão da Geometria associada às demais áreas do conhecimento, além de contribuir para a organização do raciocínio lógico.

SKOVSMOSE, O. *Um convite à educação matemática crítica*. Tradução: Orlando de Andrade Figueiredo. Campinas: Papirus, 2014.

O autor aborda conceitos cruciais na área de educação matemática crítica e apresenta diferentes cenários para a investigação e a Matemática em ação.

STEWART, I. *Almanaque das curiosidades matemáticas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Esse material é uma coletânea de casos curiosos da Matemática e serviu como inspiração para a elaboração de algumas informações apresentadas nesta coleção.

SURENDRA, V. *Ideias geniais*: os principais teoremas, teorias, leis e princípios científicos de todos os tempos. Tradução: Carlos Irineu da Costa. Belo Horizonte: Gutenberg, 2011.

A obra traz princípios, equações, teorias, teoremas e afins que formam os fundamentos da ciência.

312

2 1 1 8 1 5
ISBN 978-65-5744-749-9
2 900002 118155