GERAÇÃO
ALPHA

Matemática

8

Ensino Fundamental
Anos finais | 8º ano

Componente curricular: Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

Carlos N. C. de Oliveira
Felipe Fugita

Editora responsável:
Isabella Semaan

Organizadora: SM Educação
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação.

CÓDIGO DA COLEÇÃO
0102P24010002020
PNLD 2024 • OBJETO 1
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
Amostra da versão submetida à avaliação

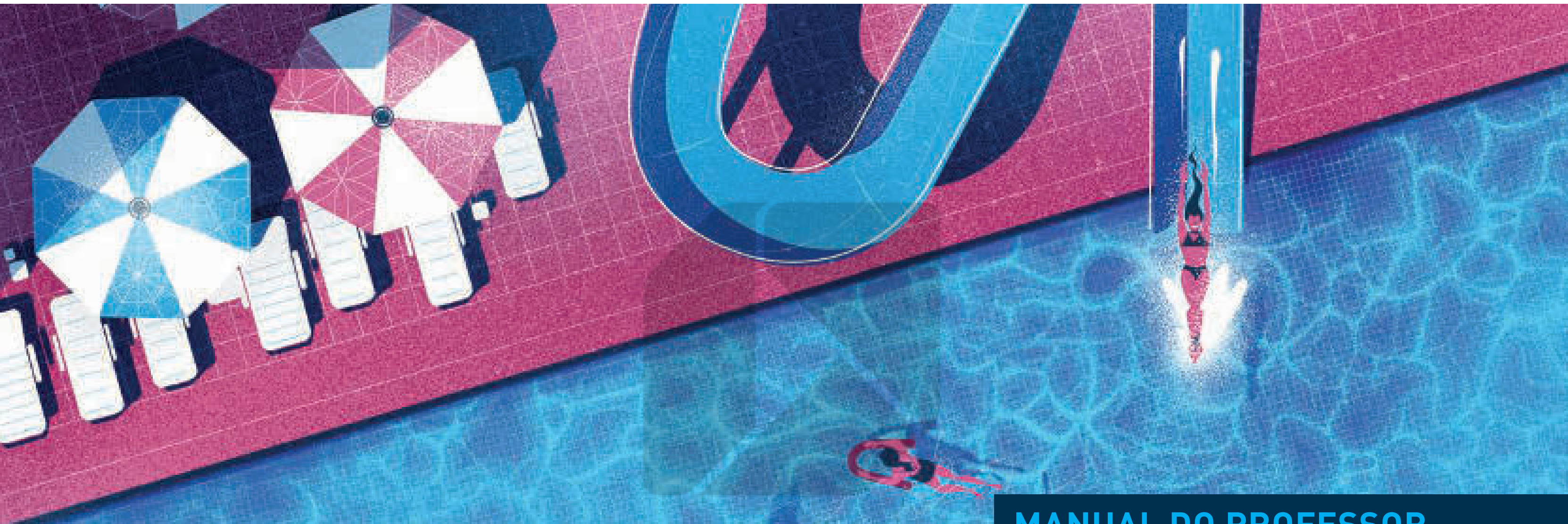
sm

sm

GERAÇÃO
ALPHA

Matemática 8

Ensino Fundamental | Anos finais | 8º ano
Componente curricular: Matemática



MANUAL DO PROFESSOR

Carlos N. C. de Oliveira
Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP).
Especialista em Educação Matemática pelo Centro Universitário Fundação Santo André (FSA).
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).
Professor e coordenador de ensino de Matemática.

Felipe Fugita
Licenciado em Matemática pelo IME-USP.
Professor de Matemática.

Editora responsável: Isabella Semaan
Bacharela em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal do ABC (UFABC).
Editora e elaboradora de conteúdo para materiais didáticos.

Organizadora: SM Educação
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação.

São Paulo, 4ª edição, 2022

Geração Alpha **Matemática 8**
© SM Educação
Todos os direitos reservados

Direção editorial Cláudia Carvalho Neves
Gerência editorial Lia Monguilhott Bezerra
Gerência de *design* e produção André Monteiro
Edição executiva Isabella Semaan
Edição: Cármen Matricardi, Carolina Maria Toledo, Cristiano Oliveira da Conceição, Diana Maia, Eduardo Chavante, Luana Fernandes de Souza
Suporte editorial: Fernanda de Araújo Fortunato
Coordenação de preparação e revisão Cláudia Rodrigues do Espírito Santo
Preparação: Ana Paula Perestrelo, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares
Revisão: Ana Paula Perestrelo, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares
Apoio de equipe: Camila Lamin Lessa, Maria Clara Loureiro
Coordenação de *design* Gilciane Munhoz
***Design*:** Carla Almeida Freire, Tiago Stéfano, Victor Malta (Interação)
Coordenação de arte Andressa Fiorio
Edição de arte: Vitor Trevelin
Assistência de arte: Viviane Ayumi Yonamine
Assistência de produção: Júlia Stacciarini Teixeira
Coordenação de iconografia Josiane Laurentino
Pesquisa iconográfica: Camila D'Angelo, Fabio Matsuura
Tratamento de imagem: Marcelo Casaro
Capa João Brito/Gilciane Munhoz
Ilustração da capa: Denis Freitas
Projeto gráfico Rafael Vianna Leal
Pré-impressão Américo Jesus
Fabricação Alexander Maeda
Impressão

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Oliveira, Carlos N. C. de
Geração alpha matemática : 8º ano : ensino fundamental : anos finais / Carlos N. C. de Oliveira, Felipe Fugita ; editora responsável Isabella Semaan ; organizadora SM Educação ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação. — 4. ed. — São Paulo : Edições SM, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-65-5744-751-2 (aluno)
ISBN 978-65-5744-752-9 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Fugita, Felipe. II. Semaan, Isabella. III. Título.

22-111782 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

4ª edição, 2022

SM Educação
Avenida Paulista, 1842 – 18º andar, cj. 185, 186 e 187 – Condomínio Cetenco Plaza
Bela Vista 01310-945 São Paulo SP Brasil
Tel. 11 2111-7400
atendimento@grupo-sm.com
www.grupo-sm.com/br

MANUAL DO PROFESSOR

Prezado professor,

O mundo contemporâneo apresenta muitos desafios para quem discute e pratica educação. Estamos cercados de informações e de situações que requerem estratégias e ferramentas diferentes das que eram usadas há algumas décadas. Como podemos olhar criticamente para a sociedade em que vivemos e ensinar nossos estudantes a enfrentar as demandas cotidianas, a solucionar problemas e a tomar decisões?

A reflexão sobre essas questões nos faz perceber que educar, nos dias de hoje, exige um empenho voltado para a formação de estudantes que não fique restrita ao consumo de informações do mundo contemporâneo, mas que os leve a serem capazes de interpretar a realidade, articulando os conhecimentos construídos às habilidades de investigação e aos valores de convivência com a diversidade, com o espaço e com a natureza.

Esperamos que esta coleção seja de grande apoio nessa tarefa e que, assim, possamos participar da construção de um mundo mais justo e solidário para todos.

Bom trabalho!

Equipe editorial

Sumário

A COLEÇÃO V

A escola no século XXI – Educação para competências V

A Base Nacional Comum Curricular VI

Temas Contemporâneos Transversais VII

As competências gerais da Educação Básica VIII

Competências específicas e habilidades de Matemática IX

ESTRATÉGIAS E ABORDAGENS XII

As interações disciplinares no ensino de Matemática XII

Metodologias ativas XIII

Argumentação XIV

Leitura inferencial XV

Pensamento computacional XVI

Investigação e práticas de pesquisa XVIII

Cultura juvenil XX

Educação com base em valores XXI

Saúde mental e *bullying* XXIII

Trabalho com grupos grandes e diversos de estudantes XXIV

Avaliação XXV

Instrumentos avaliativos XXVI

Preparação para exames de larga escala XXVII

ORGANIZAÇÃO DA COLEÇÃO XXXVI

Estrutura do Livro do Estudante XXXVI

SUGESTÃO DE CRONOGRAMA XLI

QUADROS DE CONTEÚDOS DA COLEÇÃO XLII

O MANUAL DO PROFESSOR LII

BIBLIOGRAFIA COMENTADA LV

RESOLUÇÕES LX

Unidade 1 – Potenciação e radiciação LX

Unidade 2 – Cálculo algébrico LXVI

Unidade 3 – Equações e sistemas LXXIV

Unidade 4 – Triângulos e quadriláteros LXXXVI

Unidade 5 – Sequências e proporcionalidade XCVIII

Unidade 6 – Construções e transformações geométricas CIV

Unidade 7 – Probabilidade e Estatística CXI

Unidade 8 – Grandezas e medidas CXXII

REPRODUÇÃO DO LIVRO DO ESTUDANTE 1

Unidade 1 – Potenciação e radiciação 8

Unidade 2 – Cálculo algébrico 32

Unidade 3 – Equações e sistemas 62

Unidade 4 – Triângulos e quadriláteros 94

Unidade 5 – Sequências e proporcionalidade 132

Unidade 6 – Construções e transformações geométricas 156

Unidade 7 – Probabilidade e Estatística 184

Unidade 8 – Grandezas e medidas 226

Interação – Escola sustentável 252

Lista de siglas e bibliografia 256

A ESCOLA NO SÉCULO XXI – EDUCAÇÃO PARA COMPETÊNCIAS

Já há algumas décadas, vêm perdendo espaço os modelos tradicionais de aprendizagem, nos quais o ensino é baseado na figura do professor como detentor do conhecimento e responsável por transmiti-lo aos estudantes, que, por sua vez, devem memorizá-lo. No decorrer do século XX, pesquisadores do campo da educação, fundamentando-se nos estudos da psicologia do desenvolvimento e da aprendizagem, passaram a defender outros modos de ensinar e de aprender, com base nas atitudes do estudante e no contexto em que está inserido. Essas novas ideias ganharam força não apenas porque propõem um ensino mais motivador, mas também porque defendem que, para haver aprendizagem real, é necessário que o estudante esteja envolvido no processo, estabelecendo relações que vão resultar no próprio conhecimento. Em suma, **o estudante deve ser o sujeito da aprendizagem**.

Esses pesquisadores colocaram aos profissionais da educação o desafio de mudar a maneira de ensinar, e de fato alguns avanços vêm ocorrendo desde então. No entanto, as transformações deste século impõem ações mais assertivas na busca por uma educação mais eficiente. O início do século XXI tem sido marcado por inovações em diferentes âmbitos, e as mudanças ocasionadas na tecnologia da informação e da comunicação têm alterado os modos de usufruir e de compartilhar conteúdos, já que uma parte expressiva do conhecimento produzido pelos seres humanos está atualmente disponível na internet. Essa facilidade de acesso a qualquer tipo de informação traz novos desafios à educação formal. O ensino do início do século passado, fundamentado na transmissão e na acumulação de conteúdos, não atende às demandas contemporâneas. A escola hoje deve auxiliar o estudante a desenvolver aprendizagens para usar de modo crítico e reflexivo seu conhecimento tecnológico e as informações a que tem acesso, para que se torne um cidadão pleno e atuante na sociedade do século XXI.

SÉCULO XX

Ensino fundamentado na transmissão e na acumulação de conteúdos

SÉCULO XXI

Desenvolvimento de aprendizagens para uso do conhecimento de modo crítico e reflexivo

↓

Cidadão pleno e atuante na sociedade

Nesse contexto, as noções de habilidade e de competência vêm sendo amplamente debatidas na educação. De acordo com Perrenoud (1999), podemos considerar que habilidade é a capacidade de se expressar verbalmente ou de realizar determinadas operações matemáticas, por exemplo. Competência, porém, é a faculdade de mobilizar um conjunto de saberes, de capacidades, de informações, etc. – ou seja, de habilidades – para solucionar com pertinência e eficácia uma série de situações. Assim, a habilidade de realizar operações matemáticas e a habilidade de se expressar verbalmente podem ser usadas em conjunto, por exemplo, para negociar com os colegas e solucionar um problema de orçamento.

COMPETÊNCIA

Faculdade de mobilizar habilidades para solucionar situações com pertinência e eficácia.

Capacidade de se expressar ou de realizar determinadas operações.

A construção de uma competência é própria de cada indivíduo e se realiza nos momentos em que ele é capaz de mobilizar conhecimentos prévios e ajustá-los a determinada situação. Em síntese, "a competência é agir com eficiência, utilizando com propriedade conhecimentos e valores na ação que desenvolve e agindo com a mesma propriedade em situações diversas" (Cruz, 2001, p. 31). A educação do século XXI deve se voltar ao desafio de proporcionar ao estudante o desenvolvimento de certas habilidades e competências, ou seja, deve formar pessoas que:

- dominem a escrita e a leitura;
- consigam se comunicar com clareza;
- saibam buscar informações e consigam utilizá-las com propriedade para elaborar argumentos e tomar decisões;
- sejam capazes de trabalhar em equipe, de construir um olhar crítico sobre a sociedade, de criar soluções para os problemas e, principalmente, de avaliar a própria aprendizagem.

Ao professor, cabe uma mudança de metodologia para auxiliar os estudantes a desenvolver habilidades e competências. Na sociedade da informação, mais do que ensinar conceitos, a escola e o professor devem proporcionar situações que permitam ao estudante explorar diferentes universos e aplicar os saberes construídos para atuar com eficiência em sua vida pessoal, comunitária e, futuramente, profissional.

O professor converte-se, então, em facilitador ou mediador da aprendizagem, e não na fonte única e exclusiva de conhecimentos que devem ser memorizados. Nesse cenário, torna-se muito mais importante valorizar: a investigação como processo de aprendizagem, em vez da transmissão de conceitos; o estudante como protagonista de seu processo de aprendizagem, em vez do professor como figura central desse processo; e o desenvolvimento de diversas habilidades cognitivas, em vez da rápida memorização dos conteúdos.

É preciso, portanto, que o professor tenha consciência do papel que ocupa no processo de ensino-aprendizagem e assuma sua responsabilidade quanto a isso. Machado (2004) defende que, nesse ponto, não há simetria entre estudante e professor, e o profissional é o professor. Como participantes de um processo de mão dupla, ainda que não necessariamente simétrico, professores e estudantes ocupam, cada um a seu modo, o centro de um destes dois espaços privilegiados: o ensino e a aprendizagem, respectivamente.

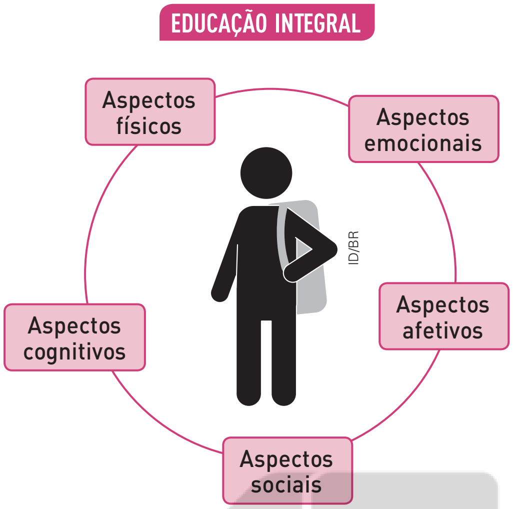
Dessa maneira, até mesmo professores especialistas podem diversificar as ferramentas de ensino de seu componente curricular para trabalhar habilidades e competências. Em atividades específicas, pode-se apresentar diferentes situações-problema ao estudante com o objetivo de trabalhar conjuntamente uma série de habilidades e competências. Assim, ele pode desempenhar um papel mais ativo na construção do próprio conhecimento, tornando-se capaz de realizar aprendizagens significativas. O estudante também pode ter mais oportunidades de refletir sobre o próprio aprendizado ao realizar uma constante autoavaliação de suas resoluções e procedimentos, de modo que esteja sempre os aprimorando. Consequentemente, ele pode situar-se criticamente e de forma autônoma na sociedade.

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) teve sua formulação coordenada pelo Ministério da Educação, com ampla consulta à comunidade educacional e à sociedade. Trata-se de um documento que define as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica, em conformidade com o Plano Nacional de Educação (PNE).

A BNCC está orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, conforme determinam as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN).

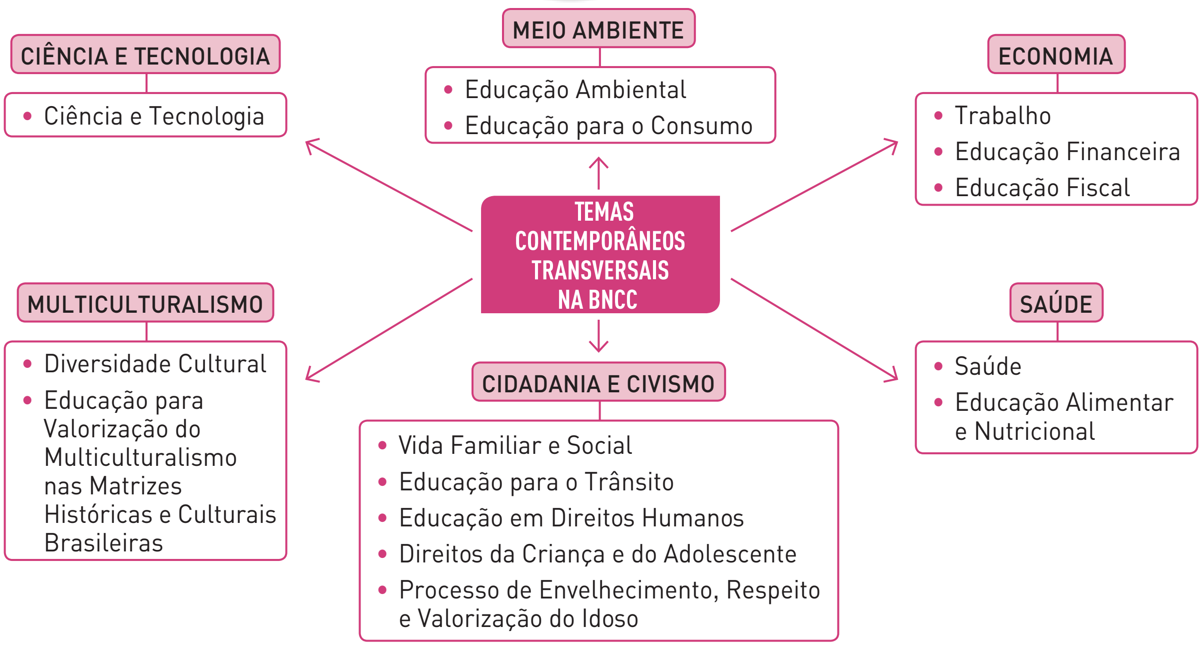
Denomina-se **educação integral** a formação voltada ao desenvolvimento humano global, integrando a dimensão intelectual cognitiva e a dimensão afetiva, segundo o processo complexo e não linear do desenvolvimento da criança, do adolescente e do jovem, em um ambiente de aprendizagem e de democracia inclusiva, afirmada nas práticas de não discriminação, de não preconceito e de respeito às diversidades.



TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS

Em consonância com o propósito de promover uma aprendizagem mais significativa aos estudantes e o engajamento deles com as situações de aprendizagem, vem se consolidando nas últimas décadas a necessidade da inclusão de questões sociais e de situações próprias da realidade dos discentes como objeto de reflexão e aprendizagem. Nessa perspectiva, cabe aos sistemas e às redes de ensino incluir em seus currículos "temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora" (Brasil, 2018a, p. 19), ou seja, os chamados Temas Contemporâneos Transversais (TCTs).

Os TCTs não fazem parte de uma área de conhecimento específica, mas perpassam todas elas, e estabelecem ligações entre diferentes componentes curriculares. A BNCC organiza esses temas em seis macroáreas: Meio Ambiente, Economia, Saúde, Cidadania e Civismo, Multiculturalismo, e Ciência e Tecnologia. Cada uma dessas áreas pode ser dividida nos temas indicados no esquema a seguir.



Nesta coleção, a abordagem de um Tema Contemporâneo Transversal baseia-se na problematização da realidade e das situações de aprendizagem, na integração das habilidades e competências curriculares em sua articulação com a resolução de problemas, e na visão do conhecimento como uma construção coletiva.

AS COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

A BNCC propõe que, ao longo da Educação Básica, o aprendizado deve concorrer para que o estudante desenvolva as dez competências gerais, a saber:

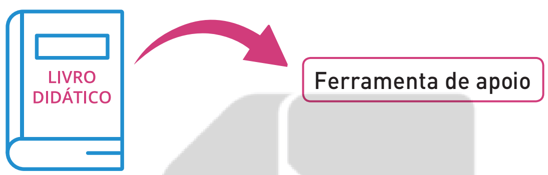
1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

(Brasil, 2018a, p. 9-10)

A determinação dessas competências pela BNCC, em consonância com o que foi apresentado anteriormente, evidencia a proposta de um ensino com foco na capacidade de aprender a aprender, de saber lidar com a disponibilidade cada vez maior de informações, de atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, de aplicar conhecimentos para resolver problemas, de ter autonomia para tomar decisões, de ser proativo para identificar os dados em uma situação e buscar soluções e de conviver em harmonia com as diversidades.

A BNCC explicita as aprendizagens essenciais a serem desenvolvidas em cada componente curricular sem fixar currículos, mas incentivando especialmente a contextualização do que se aprende e o protagonismo do estudante. Essa abordagem possibilita maior equidade educacional, pois busca assegurar que todos – sem distinção de raça, gênero ou condição socioeconômica – tenham acesso à educação.

O desafio atual é compreender o conjunto de propostas da BNCC e colocá-lo em prática na realidade de cada escola. Nesse sentido, o livro didático pode ser uma ferramenta de apoio às redes de ensino e aos professores, que devem ter em mente que esse material não impõe um currículo nem deve ser encarado como única fonte de informação e conhecimento.



João Picoli/ID/BR

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS E HABILIDADES DE MATEMÁTICA

A Matemática é fundamental em nossa sociedade, sobretudo como recurso para lidar com diversas situações do cotidiano. Trata-se de uma ferramenta básica para o desenvolvimento de várias habilidades e competências e para a compreensão e o aprendizado de outras áreas do conhecimento. É também parte integrante da cultura científica e da tecnológica, apresentando-se como uma ciência com características próprias de investigação e linguagem.

Desse modo, é necessário que, como componente curricular, a **Matemática seja percebida como um instrumento de análise e compreensão da realidade que favorece a tomada de decisão diante de situações-problema do dia a dia**. Se a realidade requer habilidades matemáticas, também é fato que a escola é um local privilegiado para que elas se desenvolvam, pois no ambiente escolar os indivíduos podem exercitar diferentes situações de análise, discussão e prática dos conhecimentos formais. Além de desenvolver as habilidades e o senso crítico, na atividade escolar os estudantes podem participar de diversas ações de cooperação, solidariedade e respeito às normas e às diferenças culturais e sociais, que são oportunidades para o exercício da ética e da cidadania consciente. O aprimoramento dessas habilidades pode ocorrer ainda pelo contato crítico dos estudantes com a realidade interpretada: por notícias de jornal, televisão e outras mídias; por filmes e séries de televisão; por textos de publicidade e propaganda; pelo uso da internet e pela participação em redes sociais; e pela leitura variada de textos, como receitas, histórias em quadrinhos, livros de literatura, etc.

Desde o início do contato formal dos estudantes com a Matemática, é importante levá-los a perceber que esse componente curricular, ensinado e aprendido em sala de aula, está presente nas mais diversas situações da vida social (por exemplo, nas relações comerciais cotidianas e no orçamento doméstico) e da cultura (como na arquitetura, nas artes plásticas, na literatura e nos esportes). Em geral, a simples aproximação do conhecimento a situações cotidianas não é suficiente para estabelecer conexões entre o conhecimento empírico – adquirido na prática – e o conhecimento científico. No entanto, apesar de tal contextualização não ser capaz de transformar propriamente o conhecimento empírico em científico, ela permite explorar certas contradições e limitações de ambos os saberes, de modo a incentivar os estudantes a refletir sobre seus conhecimentos prévios.

Não há exagero em afirmar que, durante o processo de ensino e aprendizagem, o professor e o estudante estabelecem uma relação de cumplicidade. O papel do educador é de fundamental importância, já que suas atitudes são sempre observadas e avaliadas pela turma.

Ao estabelecer conexões entre o conhecimento prévio dos estudantes e o novo conhecimento, é possível desenvolver uma aprendizagem significativa e duradoura, capaz de permitir aos estudantes que apliquem seus conhecimentos nas mais diversas situações da vida escolar e cotidiana.

> [...]
>
> A vinda da criança para a instituição tem um objetivo claro e determinado: aprender determinados conhecimentos e, para tanto, dominar instrumentos específicos que lhe possibilitem esta aprendizagem.
>
> A relação da criança com o adulto, na escola, é mediada, então, pelo conhecimento formal. O professor detém o conhecimento formal que o educando deverá adquirir e a interação entre ambos deve ser tal que permita e promova a aprendizagem deste conhecimento. Desta forma, podemos dizer que a ação do professor é uma ação específica e apresenta, portanto, características que a distinguem da ação dos outros adultos com quem a criança convive.
>
> A ação pedagógica implica, portanto, numa relação especial em que o conhecimento é construído. Para tanto, exige do adulto uma ação adequada às possibilidades de desenvolvimento e aprendizagem de seus educandos. Esta relação não pode ser reduzida a uma atitude autoritária de quem detém o conhecimento e o transmite. Deve ser, antes, a atitude criativa de quem detém o conhecimento formal e possibilita a formulação deste conhecimento pelo aluno.
>
> (Lima, 2003, p. 21)

Corroborando essas ideias, a BNCC dá ênfase ao letramento e aos processos matemáticos, como podemos ver a seguir.

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**[1], definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição).
>
> [...] Os **processos matemáticos** de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional.
>
> (Brasil, 2018a, p. 266)

[1] Segundo a Matriz do Pisa 2012, o "letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.". Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 9 jun. 2022.

Com isso, deve-se garantir que os estudantes desenvolvam as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

(Brasil, 2018a, p. 267)

Em síntese, realizar descobertas, elaborar conhecimentos e aprimorar e ampliar estratégias são atividades que incentivam no estudante o desenvolvimento de competências cognitivas e a autonomia, bem como o aprimoramento de suas maneiras de expressão e comunicação, o que, em geral, contribui para um melhor relacionamento interpessoal.

AS INTERAÇÕES DISCIPLINARES NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Uma das características marcantes de nosso sistema de ensino é a fragmentação do conhecimento. Transferimos para as salas de aula uma divisão do saber em componentes curriculares, característica do modo de trabalho acadêmico. Para Lopes (2008, p. 54):

> O entendimento do que vem a ser uma disciplina é particularmente calcado na compreensão epistemológica de uma disciplina científica: uma forma específica de organizar e delimitar um território de pesquisa, que redunda em um conjunto específico de conhecimentos com características comuns – tanto do ponto de vista de sua produção teórico-metodológica quanto do ponto de vista de sua transmissão no ensino e na divulgação.

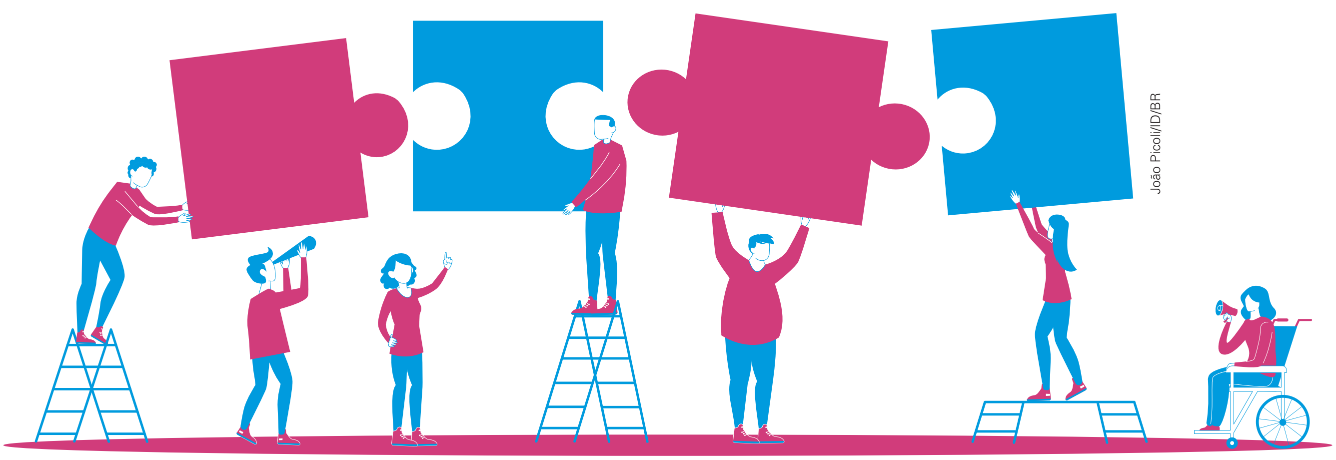
Os críticos à compartimentalização do conhecimento argumentam que o espelhamento entre os componentes curriculares acadêmicos e os componentes curriculares escolares não são compatíveis com os objetivos da educação atual, para a qual uma das grandes metas é que o estudante adquira uma visão global e torne-se um cidadão capaz de avaliar e resolver problemas, atuando criticamente na sociedade.

Vemo-nos, então, em um dilema. Se acreditamos que a Matemática tem uma maneira própria de abordar questões e de construir conhecimento sobre o mundo, reconhecemos o caráter único desse componente curricular e focamos em colaborar para que os estudantes compreendam seus eixos estruturantes.

Ainda assim, devemos perceber que apresentar aos estudantes essa visão fragmentada do conhecimento não contribui para uma visão de mundo global, para o reconhecimento de problemas e sua análise crítica. Desse modo, a aprendizagem de Matemática se reduziria a fragmentos ou detalhes, cada vez mais específicos, descontextualizados, que tenderiam, portanto, a não apresentar um significado para os estudantes.

Sem ter a visão do todo ou sem estar ao menos ciente de que há um todo, fica praticamente impossível a um aprendiz unir as peças e remontar, pelo menos em parte, o quebra-cabeça que as diversas ciências vêm compondo sobre o mundo. É óbvio, portanto, que a visão fragmentada do mundo e, em especial, a fragmentação no processo de ensino e aprendizagem precisam ser superadas. No entanto, como fazê-lo?

É certo que não temos respostas simples e que revolucionem a tradição do ensino compartimentado. Porém, o trabalho interdisciplinar e transdisciplinar, a inclusão de Temas Contemporâneos Transversais e a realização de projetos interáreas e intra-áreas do conhecimento nos fazem avançar nesse sentido.


João Picoli/ID/BR

Tais estratégias são válidas e permitem ganhos expressivos em eficácia na aprendizagem. Há em Matemática, por exemplo, noções e conceitos-chave que permeiam os muitos componentes curriculares. A seleção e a eleição dessas noções ou conceitos centrais como foco de trabalho interdisciplinar podem ser muito instigantes.

As ideias de operações numéricas e de transformação entre as unidades de medida, por exemplo, estão presentes e são relevantes em diversas áreas científicas, da Física à História, da Geologia à Geografia, passando pela Química e pela Biologia. Essas noções de natureza interdisciplinar podem, portanto, ser uma motivação especial para a abordagem da Matemática.

Os Temas Contemporâneos Transversais, por sua vez, representam o viés social que também se deseja no ensino. O trabalho com os temas propostos na BNCC, por exemplo, contribui de maneira significativa para a compreensão de questões consideradas de urgência social e de interesse da sociedade, de modo geral, ou que representem interesses locais vinculados diretamente à realidade ou a aspectos da vida social.

Vale lembrar que, quando se trata de relações entre componentes, o objetivo principal é combinar análise e síntese. A análise é necessária como procedimento e como habilidade cognitiva a ser desenvolvida pelos estudantes. A síntese reunifica os fatos e permite uma visão mais abrangente da situação que está sendo estudada. Assim, o trabalho conjunto e a aproximação com outros componentes curriculares, como História, Ciências e Arte, também devem ser vistos como estratégias que potencializam a aprendizagem da Matemática.

RELAÇÕES ENTRE COMPONENTES CURRICULARES

ANÁLISE		SÍNTESE		
Procedimento e habilidade cognitiva a ser desenvolvida pelos estudantes.	+	Reunifica os fatos e possibilita uma visão mais abrangente da situação estudada.	=	ESTRATÉGIAS QUE POTENCIALIZAM A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA.

METODOLOGIAS ATIVAS

As demandas da sociedade atual exigem que a escola altere o modo como orienta a construção de conhecimentos, já que os estudantes hoje são rodeados de tecnologias e ferramentas digitais que lhes permitem acessar informações de forma rápida – não cabendo, portanto, que sejam meros receptores de conteúdo.

Nesse sentido, a expressão “metodologias ativas” vem sendo bastante usada no meio educacional, tanto para tratar de abordagens que tornem as aulas experiências significativas de aprendizagem quanto para se referir a estratégias de ensino que privilegiam o estudante como autor do próprio aprendizado, em oposição ao uso exclusivo de abordagens tradicionais, que se valem somente da exposição de conteúdo.

O contexto contemporâneo propicia o uso dessas metodologias, pois vivemos um momento em que se combinam a disponibilidade das tecnologias de informação e de comunicação com as demandas de transformação da sociedade.

> A metodologia ativa se caracteriza pela inter-relação entre educação, cultura, sociedade, política e escola, sendo desenvolvida por meio de métodos ativos e criativos, centrados na atividade do aluno com a intenção de propiciar a aprendizagem.

(Almeida *in* Bacich; Moran, 2018, p. XI)

As metodologias ativas são estratégias de ensino que indicam novos caminhos para as práticas pedagógicas. Visam deixar as aulas mais interessantes e dinâmicas e possibilitar maior autonomia aos estudantes, valorizando suas opiniões, reflexões, conhecimentos prévios e experiências, de modo a torná-los mais preparados para atuar na vida em sociedade.

Ao se engajarem nas propostas de aprendizagem, os estudantes passam a ocupar o centro desse processo e, assim, podem ter iniciativa, debater, tomar decisões, resolver problemas, realizar experimentos, questionar e testar, colaborar em equipe, gerenciar projetos e coordenar tempos pessoais e coletivos, adquirindo habilidades e competências que transbordam os limites da vida escolar, o que lhes propicia experiências significativas e geradoras de novas práticas em direção ao conhecimento.

METODOLOGIAS ATIVAS →

- Participação efetiva dos estudantes na construção da aprendizagem
- Aulas mais interessantes e dinâmicas
- Maior autonomia dos estudantes
- Valorização de opiniões, reflexões, conhecimentos prévios e experiências
- Preparação para atuar na vida em sociedade

Como sugere Moran (2018), a aprendizagem por meio de questionamento e experimentação é mais desafiadora e, por sua vez, motivadora para os estudantes, pois torna o conhecimento mais prático, flexível, interligado e híbrido.

> [...] envolve pesquisar, avaliar situações e pontos de vista diferentes, fazer escolhas, assumir riscos, aprender pela descoberta e caminhar do simples para o complexo. Os desafios bem planejados contribuem para mobilizar as competências desejadas, sejam intelectuais, emocionais, pessoais e comunicacionais.
>
> (Moran, 2018, p. 15)

Logo, é fundamental incentivar as potencialidades individuais, como a criatividade, o foco e a sensibilidade, contribuindo para que os estudantes desenvolvam seu potencial. Diante disso, esta coleção propicia a utilização de metodologias ativas, com as seguintes propostas:

- atividades desafiadoras;
- produções que combinam percursos pessoais com participação significativa dos grupos;
- trabalhos colaborativos, com foco em pesquisa e investigação a partir de uma situação-problema;
- criação de eventos;
- utilização de tecnologias adequadas para a realização dessas práticas.

Para viabilizar a condução dessas propostas, a obra oferece uma variedade de estratégias didáticas, como discussão em grupo, trabalho em equipe com distribuição de tarefas, debate sobre temas atuais e execução de projetos.

Na seção *Investigar* há exemplos mais evidentes de como as metodologias ativas são aplicadas na obra, pois os estudantes partem de uma situação a ser investigada por eles com base em procedimentos de coleta, organização e análise de dados. Os resultados obtidos são, então, divulgados à comunidade escolar, de acordo com o propósito da pesquisa. Neste volume, após a unidade 4, a proposta dessa seção é investigar como escolher a melhor amostra, e, após a unidade 8, a seção propõe um estudo relacionado à vida saudável. Outro exemplo evidente de trabalho com metodologias ativas ocorre na seção *Interação*, em que os estudantes são convidados a desenvolver um projeto de pesquisa sobre escola sustentável.

ARGUMENTAÇÃO


João Picoli/ID/BR

Uma educação voltada à formação de sujeitos críticos, conscientes, questionadores e que agem orientados por princípios éticos e democráticos propicia o desenvolvimento da **competência argumentativa** dos estudantes. Essa competência lhes possibilita reconhecer sensos comuns, separar fatos de opiniões, analisar premissas e pressupostos e avaliar argumentos de autoridades para formar opiniões próprias com base em critérios objetivos. Além disso, favorece a participação atuante na sociedade ao oferecer subsídios para que os estudantes exponham suas ideias e seus conhecimentos com clareza, organização e respeito aos direitos humanos. Como explica Fiorin (2016), a vida em sociedade

> […] trouxe para os seres humanos um aprendizado extremamente importante: não se poderiam resolver todas as questões pela força, era preciso usar a palavra para persuadir os outros a fazer alguma coisa. Por isso, o aparecimento da argumentação está ligado à vida em sociedade e, principalmente, ao surgimento das primeiras democracias. No contexto em que os cidadãos eram chamados a resolver as questões da cidade é que surgem também os primeiros tratados de argumentação. Eles ensinam a arte da persuasão.
>
> Todo discurso tem uma dimensão argumentativa. Alguns se apresentam como explicitamente argumentativos (por exemplo, o discurso político, o discurso publicitário), enquanto outros não se apresentam como tal (por exemplo, o discurso didático, o discurso romanesco, o discurso lírico). No entanto, todos são argumentativos: de um lado, porque o modo de funcionamento real do discurso é o dialogismo; de outro, porque sempre o enunciador pretende que suas posições sejam acolhidas, que ele mesmo seja aceito, que o enunciatário faça dele uma boa imagem. Se, como ensinava Bakhtin, o dialogismo preside à construção de todo discurso, então um discurso será uma voz nesse diálogo discursivo incessante que é a história. Um discurso pode concordar com outro ou discordar de outro. Se a sociedade é dividida em grupos sociais, com interesses divergentes, então os discursos são sempre o espaço privilegiado de luta entre vozes sociais, o que significa que são precipuamente o lugar da contradição, ou seja, da argumentação, pois a base de toda a dialética é a exposição de uma tese e sua refutação.
>
> (Fiorin, 2016, p. 9)

É fundamental, portanto, que os estudantes desenvolvam o raciocínio lógico e construam argumentos bem embasados, de modo que estejam aptos a defender seus posicionamentos e a negociar com seus interlocutores para, junto a eles, tomar as melhores decisões. Por essa razão, nesta obra, além do trabalho com foco no reconhecimento, na apreensão e no uso de estratégias argumentativas por meio da análise e da produção de textos dessa natureza, há diversas oportunidades em que se incentivam discussões sobre temas relevantes. Por exemplo, antes e depois da realização de atividades propostas, os estudantes são convidados a expor suas opiniões, seus conhecimentos prévios e suas impressões gerais sobre as estratégias utilizadas na resolução de um problema. A argumentação se apresenta por meio de atividades discursivas orais ou escritas. Em algumas atividades há momentos reservados à discussão e ao posicionamento sobre um tema. Já nas atividades propostas nas seções especiais há o incentivo à pesquisa e à análise de dados, o que, por conseguinte, requer discussão em grupo para avaliação das fontes e dos dados obtidos.

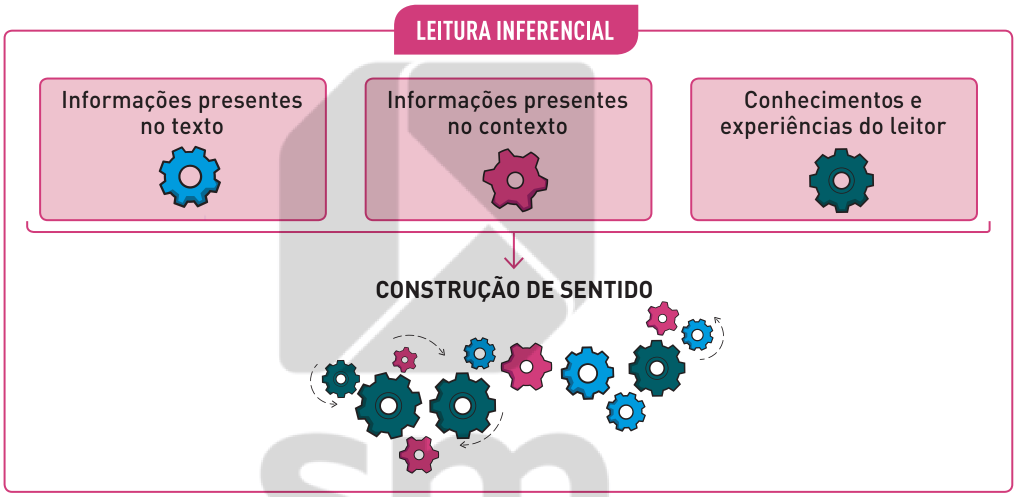
Assim, esta coleção contribui para que os estudantes desenvolvam a competência argumentativa de forma sistemática e orgânica, garantindo respeito à pluralidade de ideias e ao lugar de fala dos jovens e favorecendo, sobretudo, o desenvolvimento da competência geral 7 da BNCC.

LEITURA INFERENCIAL

O processo inferencial permite a organização dos sentidos elaborados pelo leitor em sua interação com o texto. A capacidade de realizar uma leitura em níveis inferenciais é uma característica essencial para a compreensão da linguagem, pois, da mesma maneira que o leitor memoriza as informações óbvias no texto, ele absorve as informações inferidas. Desse modo, compreender a linguagem é entender as relações entre o que está explícito no texto e aquilo que o leitor pensa, conclui e infere por conta própria, com base em seu conhecimento de mundo e em suas experiências de vida. Fazer inferências possibilita ao leitor, com base em informações presentes no texto, refletir e gerar novos conhecimentos, os quais passam então a fazer parte do conjunto de saberes desse leitor.

A inferência é um processo cognitivo que vai além da leitura e passa pelo entendimento ou pela suposição de algo desconhecido, fundamentado na observação e no repertório cultural do leitor. Trata-se, então, da conclusão de um raciocínio ou do levantamento de um indício com base no estabelecimento de relações.

A compreensão de um texto depende da qualidade e da quantidade de inferências geradas durante a leitura, visto que os textos contêm informações explícitas e implícitas, deixando lacunas a serem preenchidas pelo leitor. Ao associar informações explícitas a seus conhecimentos prévios, o estudante dá sentido ao conteúdo do texto e apreende detalhes e sequências, bem como as relações de causa e efeito. Portanto, a inferência ocorre com a interação do leitor com o texto, ou seja, por meio da leitura. As capacidades de concluir, deduzir, levantar hipóteses, ressignificar informações e formular novos sentidos são essenciais para a atuação consciente e responsável do estudante na sociedade, pois assim ele estará preparado para entender contextos históricos, compreender disputas políticas ou mesmo projetar soluções para problemas reais e cotidianos. Ao gerar uma nova informação partindo de uma anterior, já dada, o estudante desenvolve sua capacidade de reconhecer os diversos pontos de uma situação e de propor resoluções factíveis que beneficiem a maioria dos envolvidos.



João Picoli/ID/BR

Nesta coleção, o exercício da leitura inferencial é realizado de diversas formas, tanto na abordagem dos conteúdos como na execução das atividades. Por exemplo, em muitos momentos há perguntas que motivam o estudante a antecipar informações e a verificar se suas hipóteses são plausíveis, instigando-o a acessar seus conhecimentos prévios nesse processo. Com isso, pode-se levar o estudante a explicar o que está implícito em um texto, a preencher lacunas de informação com base em dados já fornecidos e a excluir ou confirmar hipóteses levantadas durante a leitura.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Costuma-se imaginar que o pensamento computacional diz respeito a saber navegar na internet, utilizar as redes sociais, enviar *e-mails* ou usar ferramentas digitais para elaborar um texto ou resolver uma equação, porém o conceito de pensamento computacional está relacionado, na verdade, a estratégias voltadas a solucionar problemas de maneira eficaz.

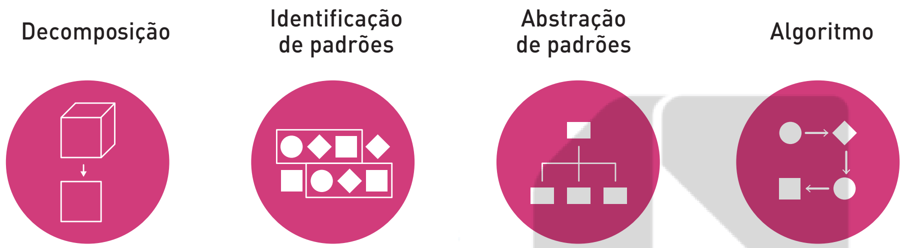
> O Pensamento Computacional é uma distinta capacidade criativa, crítica e estratégica humana de saber utilizar os fundamentos da Computação, nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de identificar e resolver problemas, de maneira individual ou colaborativa, através de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente.

(Kurshan, 2016 *apud* Brackmann, 2017, p. 29)

Essa estratégia de ensino e aprendizagem está próxima do pensamento analítico, que – assim como a Matemática, a Engenharia e a Ciência – busca, entre outras questões, aprimorar a proposição de soluções para problemas. De acordo com a BNCC, o pensamento computacional:

> [...] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos.
>
> (Brasil, 2018a, p. 474)

Em síntese, o pensamento computacional pode ser entendido como uma habilidade para identificar e resolver problemas em que a solução proposta pode ser executada por meio de um computador. Para que isso aconteça, podem-se utilizar conceitos e práticas comuns à computação, mas não restritos a ela, como a simplificação de situações-problema com base na identificação de seus elementos essenciais e na similaridade com contextos anteriores (também definida como abstração), a decomposição de problemas em partes menores e a definição de sequências de ações para a realização e a automação de tarefas (Grover; Pea, 2013).



João Picoli/ID/BR

De maneira geral, o pensamento computacional pode ser organizado em quatro etapas: decomposição, identificação de padrões, abstração de padrões e algoritmo.

Atividades direcionadas podem desenvolver algumas formas de pensar próprias, marcadas pelo pensamento algorítmico, como a linguagem específica da tecnologia computacional para descrever processos regrados por etapas bem definidas. Entre esses recursos de linguagem estão os fluxogramas e os algoritmos destacados nas habilidades da BNCC para descrever o processo de resolução de problemas.

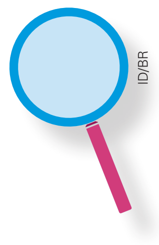
Nesse sentido, a problematização favorece diferentes maneiras de pensar, compreender e analisar um mesmo problema, colaborando para o desenvolvimento das seguintes habilidades que compõem o pensamento computacional:

- formulação de problemas;
- análise de dados de forma lógica e organizada;
- representação da realidade por meio de abstrações;
- proposição de soluções por meio de identificação e análise crítica dos problemas;
- transferência da solução encontrada para resolver problemas análogos.

Compreendendo a lógica que aproxima a resolução de problemas ao pensamento computacional, as atividades propostas aos estudantes nesta coleção podem contribuir para o desenvolvimento de competências fundamentais no século XXI, como produzir algo por meio da abstração, raciocinar sobre a resolução de um problema e correlacionar estratégias utilizadas na computação com a Matemática e com outras áreas de conhecimento, permitindo que os estudantes trabalhem a criatividade e elaborem novas ideias.

Esta coleção propõe experiências didáticas para que o pensamento computacional possa integrar a formação dos estudantes, tornando-os aptos a intervir de forma cidadã no meio em que vivem. Como exemplo dessas práticas, temos as situações-problema em que os estudantes devem reconhecer padrões, identificando as características de problemas apresentados na seção *Resolvendo problemas* e definindo estratégias de resolução por meio das seguintes etapas: *Compreensão do problema*, *Resolução do problema* e *Reflexão sobre o problema*. Além disso, há o encadeamento de processos, como o de construção de gráficos estatísticos.

INVESTIGAÇÃO E PRÁTICAS DE PESQUISA



ID/BR

A proposição de questões ou problemas deve servir ao processo típico do pensar e do fazer científicos, que envolve a admiração e o questionamento dos estudantes diante de algo, a ponto de formularem hipóteses ou suposições e sentirem-se motivados a empreender uma investigação.

Portanto, a proposição de uma questão ou de um problema inicial é fundamental. Ela é o estopim do processo de pensar e agir cientificamente. Mas, tão importante quanto a problematização ou a geração de um conflito inicial é possibilitar meios para que os estudantes percorram o caminho investigativo que os levará à solução do problema e à aprendizagem de fato.

O que chamamos aqui de investigação ou de estratégias investigativas envolve grande variedade de atividades, como a realização de experimentos, as entrevistas e as pesquisas em livros e em multimeios. Assim, nas aulas de Matemática, investigação envolve todo o tipo de atividade acompanhada de situações problematizadoras que levem à busca ativa de dados ou informações – que, uma vez analisados e discutidos, conduzam à solução de um problema ou à geração de informações que evidenciem ou contradigam uma ou mais hipóteses ou suposições formuladas.

Na realidade, o que faz com que uma atividade seja considerada de investigação é a forma como ela é apresentada e conduzida pelo professor e o caráter que ela assume nesse processo de ensino e aprendizagem.

A atividade investigativa é aquela que possibilita, sobretudo, a reflexão crítica e o engajamento ativo. Esse tipo de atividade exige que os estudantes mobilizem várias habilidades (reflexão, discussão, pesquisa, relatório, explicação, construção, etc.), demanda a tomada de atitudes e a expressão de valores (colaboração, respeito, organização, criatividade, etc.) e requer da parte deles o conhecimento de variados conteúdos de natureza conceitual (informações, fatos, dados, conceitos, vocabulário específico, teorias já estabelecidas, etc.).

Para resolver um problema, os estudantes deverão mobilizar diferentes habilidades cognitivas e processuais. Entre essas habilidades estão aquelas relacionadas ao pensamento científico: a observação, a formulação de hipóteses, o planejamento e a construção de modelos, a realização de testes e experimentos, a coleta, a sistematização e a análise de dados e informações, o estabelecimento de sínteses e relações e a comunicação de conclusões, entre outras.

Além disso, as atividades investigativas oferecem aos estudantes oportunidades de desenvolver habilidades relacionadas à linguagem na modalidade oral – como a construção de um discurso oral coerente para apresentar uma explicação, argumentar ou relatar um experimento – e na modalidade escrita – como nas situações de comunicação de resultados, seja em um relatório ou em um cartaz, por exemplo. Inclusive, deve ser incentivado o uso de outras linguagens, como a linguagem típica da Geografia na produção e leitura de mapas.

Percebe-se, desse modo, que a escolha e o planejamento de atividades investigativas são fundamentais em uma proposta de ensino de Matemática que vise ao desenvolvimento do pensar e do agir de maneira científica, sem no entanto negligenciar a aquisição de conteúdos conceituais.

Ademais, se conduzidas de maneira colaborativa e solidária, atividades investigativas favorecem a consolidação de valores e atitudes e exemplificam a construção do conhecimento científico. Ou seja, elas possibilitam também vivenciar e debater o caráter coletivo, social e cultural do conhecimento científico.

Os estudantes devem aprender a pesquisar durante a Educação Básica, e para isso se faz necessário ensinar o **comportamento do pesquisador**. Esse comportamento, por sua vez, está intimamente relacionado ao desenvolvimento da intelectualidade, que envolve as capacidades de analisar, comparar, refletir, levantar hipóteses, estabelecer relações e sintetizar, entre outras.

Assim, é preciso um planejamento para que a aprendizagem do **ato de pesquisar** seja desenvolvida, trazendo aos estudantes habilidades inerentes a esse processo. São elas:

- localizar, selecionar e compartilhar informações;
- ler, compreender e interpretar textos;
- consultar, de forma crítica, fontes de informações diferentes e confiáveis;
- formar e defender opiniões;
- argumentar de forma respeitosa;
- sintetizar;
- expor oralmente o aprendizado, apoiando-se em diferentes recursos;
- generalizar conhecimentos;
- produzir gêneros acadêmicos.

A própria história da Matemática é um recurso para tal aprendizado. De acordo com a BNCC:

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, é importante incluir a **história da Matemática** como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar **integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos**.
>
> (Brasil, 2018a, p. 298, grifos nossos)

De acordo com Oliveira V., Oliveira C. e Vaz (2014), a história da Matemática é considerada um instrumento de investigação das origens e descobertas, das notações matemáticas e dos métodos desenvolvidos ao longo do tempo. Além disso, esses autores destacam que a base

> […] do que hoje conhecemos como Matemática foi desenvolvida ao longo de muitos anos, desde os primórdios da sociedade organizada até a contemporaneidade. Reconhecer esse processo histórico é fundamental para compreender as origens das ideias que deram forma à cultura, e também observar os aspectos humanos de seu desenvolvimento, enxergar os homens que contribuíram nesse processo evolutivo da ciência, bem como as circunstâncias que as desenvolveram.
>
> (Oliveira; Oliveira; Vaz, 2014, p. 459)

Ao propor aos estudantes a realização de uma pesquisa, é fundamental compartilhar com eles por que a pesquisa está sendo realizada e a relação dessa proposta com os conteúdos desenvolvidos, além de outras informações que contextualizem e problematizem a atividade.

O trabalho com atividades investigativas e práticas de pesquisa também tem papel fundamental no combate às *fake news*. Nos últimos anos, a expressão "*fake news*" ganhou notoriedade e se tornou pauta em rodas de conversa na rua, nas redes sociais, em casa e, principalmente, na escola. Aqui, estamos considerando *fake news* as informações falsas e caluniosas cujo objetivo é prejudicar ou descredibilizar instituições ou pessoas que não estão de acordo com o pensamento ideológico, político ou social de seus divulgadores. A dificuldade em identificar notícias falsas afeta até mesmo a população de países com altos índices de escolaridade.

Nesse sentido, ao propor de maneira sistemática atividades de investigação e pesquisa, estamos contribuindo para a criação de uma cultura de questionamento. Sempre que possível, essas atividades estão acompanhadas de orientações que incentivam os estudantes a construir seu repertório crítico.

CULTURA DE QUESTIONAMENTO →

- As informações do título se confirmam na leitura do material?
- Quem é o autor/a autora?
- Em que veículo de comunicação o material está publicado?
- Qual é a data de publicação?
- As informações estão contextualizadas?
- Existem outras fontes que abordam esse tema? As informações convergem?

CULTURA JUVENIL

Até o início do século XX, as noções de adolescência e de juventude sequer existiam. Foi o psicólogo e educador G. Stanley Hall (1844-1924) que, em 1904, explorou esses conceitos. Antes, a infância findava quando a vida adulta começava – o que, em geral, se dava aos 18 anos de idade. O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA, 1990), principal documento brasileiro que descreve os direitos e os deveres de crianças e jovens, em seu art. 2º, considera criança “a pessoa até doze anos de idade incompletos, e adolescente aquela entre doze e dezoito anos de idade” (ECA, p. 15).

Ainda existem divergências quando o assunto é definir quando começa ou finda a infância, a adolescência e a juventude, mas acreditamos ser consenso que os anos finais do Ensino Fundamental são a fase latente de transição da infância para a adolescência.

Com foco no desenvolvimento do protagonismo intelectual dos jovens e da capacidade deles em situar-se como cidadãos do/no mundo em suas dimensões emocional, intelectual, social e cultural, a BNCC apresenta a seguinte concepção de juventude, com base no Parecer CNE/CEB n. 5/2011:

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

(Brasil, 2018a, p. 463)

A realidade de um jovem atualmente é muito diferente daquela de um jovem de vinte ou dez anos atrás. Uma diferença importante é que as crianças e os jovens do século XXI estão utilizando diversos modos de interação multimidiáticas e multimodais, em aplicativos educativos ou de entretenimento, por exemplo, e especialmente em sua atuação nas redes sociais.

O manejo consciente das tecnologias digitais é fundamental para a participação plena dos jovens no mundo contemporâneo. Embora no Brasil o acesso à internet não seja realidade para grande parcela da população, fomentar o debate sobre as responsabilidades e as potencialidades da rede dentro da escola amplia as possibilidades de uso dessas ferramentas, que transformam a cada dia o modo como são realizadas as atividades cotidianas.

Em contrapartida, é importante ressaltar que cultura digital não é sinônimo de cultura juvenil:

> O conceito de **cultura juvenil** está associado à forma como os jovens “tornam sua” ou reinterpretam essa cultura mais ampla na qual vivem, para ir definindo certos estilos de vida e traços de identidade – muitos deles relacionados com o seu tempo livre e lazer –, uma certa linguagem e estéticas com os seus códigos próprios, bem como outras formas de expressão, inclusive de criatividade artística ou científica próprios.
>
> Com **cultura digital**, estamos nos referindo a todas as formas de comunicação, expressão (individual e coletiva), consumo e participação cívica e institucional que são realizadas mediante a utilização de tecnologias digitais. Desde as vanguardas artísticas e científicas até a gestão burocrática (impostos, sanções administrativas etc.); desde a comunicação com amigos e familiares através de tecnologias digitais [...] até o acesso e uso de todo o tipo de informação e conteúdos audiovisuais existentes na internet [...].

(Ruiz, 2017)

Assim, a cultura digital não é definidora da juventude, mas as ferramentas digitais potencializam as formas de expressão dos jovens. Essa perspectiva retoma as posturas de empoderamento e protagonismo que devem ser fomentadas.

Se já não podíamos antes dizer que existe uma juventude, no singular, e padronizar nossa abordagem com os estudantes, depois da publicação da BNCC e de tantos estudos nas áreas de educação, psicologia e sociologia, é inadmissível que olhemos hoje para as individualidades e não enxerguemos que um jovem de periferia de uma grande metrópole não tem as mesmas necessidades que um jovem residente em um pequeno município rural, por exemplo. Há grande diversidade de jovens e de juventudes no Brasil e no mundo; a fim de exemplificar, basta mencionar alguns fatores que evidentemente impactam a forma de vivenciar o mundo e ser jovem, como gênero, local de residência, etnia e cultura da comunidade em que se está inserido.

Equidade, como a própria BNCC explicita, significa, na prática, reconhecer que as necessidades dos estudantes são diferentes. Ao fazer as escolhas curriculares, é papel de cada rede considerar a comunidade que a integra, de maneira ampla, assim como ficam a cargo das escolas e dos professores as escolhas necessárias para que esse currículo dialogue com a realidade de seus estudantes e engaje-os no desejo de aprendizagem. Logo, a equidade se explicita a cada escolha feita pelos atores que compõem cada rede estadual e municipal de ensino, por cada escolha feita pelos atores que compõem cada comunidade escolar, e essas decisões devem, necessariamente, dialogar com os diferentes perfis culturais e socioeconômicos que cada sala de aula acolhe.

Sabemos que não é uma tarefa fácil. Por isso, sob essa perspectiva, é preciso engajamento, colaboração e respeito mútuo, para que possamos garantir um melhor índice nas aprendizagens e uma cultura de paz em todo nosso amplo território brasileiro. Nesse sentido, apresentamos, em momentos estratégicos, como na seção *Ampliando horizontes* das páginas 28 e 29, orientações que servem de apoio a uma prática pedagógica que faça com que os estudantes se sintam acolhidos, ouvidos e que se percebam pertencentes ao grupo como agentes do desenvolvimento de suas habilidades e de suas competências.

Outra maneira de engajar os jovens é propor a eles a elaboração de soluções criativas para questões comunitárias. Tal postura favorece a percepção sobre a responsabilidade cidadã quanto aos anseios de melhorias sociais, fortalece a autoestima dos jovens e os empodera em relação a seus papéis como cidadãos atuantes.

Por isso, nesta coleção, as culturas juvenis estão presentes nas propostas de discussão sobre problemas que atingem a sociedade global e a comunidade local, mostrando que os interesses e os anseios dos jovens são valorizados e que suas ações são importantes elementos de transformação social e, consequentemente, do espaço.

EDUCAÇÃO COM BASE EM VALORES

A formação consciente do indivíduo como membro atuante da sociedade, que analisa as situações do cotidiano e atua nelas de maneira crítica, é condição para a **construção de um mundo mais justo**. Portanto, assim como o desenvolvimento de habilidades e competências, a formação de valores deve permear todo o trabalho escolar, dentro e fora da sala de aula. O intuito é contribuir para a formação de um indivíduo capaz de interagir com a natureza e com outros indivíduos, fazendo a mediação entre os próprios interesses e as necessidades da sociedade.

O trabalho com valores na escola não apenas trata de como viver em sociedade, mas também propõe a reflexão acerca das melhores maneiras de fazê-lo, ou seja, estimula a escolha consciente dos valores que devem orientar nossos comportamentos nos diferentes contextos sociais. Dessa forma, o trabalho com a educação em valores oferece bases para que o estudante possa tomar decisões visando à ponderação entre o que deseja e o que é social e ambientalmente mais justo.

Um modo de a escola trabalhar valores é incentivando diálogos, discussões e reflexões. O ideal é que essas práticas estejam presentes não só nas aulas, mas em toda a dinâmica escolar, com políticas claras de mediação de conflitos e valorização do respeito, da empatia, da responsabilidade e da honestidade nas situações cotidianas. Ao tratar dos valores como algo a ser desenvolvido também na escola, criam-se situações de assimilação desse conhecimento.

Pressupõe-se que a produção do conhecimento é um processo ativo, que envolve não só a assimilação e a apropriação, mas também a significação e a ressignificação, como lembra Jerome Bruner (1973) e, posteriormente, César Coll (2000). Ou seja, não basta listar os valores para que os estudantes os decorem: **os valores devem fazer parte de seu cotidiano**.

Nesse sentido, a educação em valores determina, ainda, atitudes e funções do educador. Durante o processo de aprendizagem, cabe ao professor incentivar o desenvolvimento da responsabilidade e da liberdade de pensamento dos estudantes. Não se trata, portanto, de doutrinação, e sim da construção de um discurso e de uma prática que leve o estudante a conquistar cada vez mais autonomia e, sobretudo, a se imbuir de noções de responsabilidade social, tornando gradualmente mais coletiva a visão que, no início, estava voltada para si. É por meio do trabalho intencional durante a vida escolar que os valores passarão a ter significado para o estudante, consolidando-se de fato como aprendizados que poderão ser levados para a vida adulta.

Nesta coleção, os valores estão divididos em seis grandes pilares, apresentados a seguir.

JUSTIÇA →
- Direito à igualdade.
- Direito à alimentação.
- Direito à saúde.
- Direito à educação.
- Direito à paz.

RESPEITO →
- A nós mesmos: autoestima, dignidade, autopreservação, autoentendimento.
- Aos outros: empatia, escuta ativa, diálogo, resolução de conflitos.
- Às culturas: ideologias, línguas, costumes, patrimônios, crenças, etnias.
- À natureza: conservação, estima pela diversidade biológica e por todas as formas de vida.

SOLIDARIEDADE →
- Com as pessoas próximas que se sentem frágeis e indefesas em seu dia a dia.
- Com as pessoas que têm doenças graves ou algum tipo de limitação.
- Com imigrantes, refugiados e deslocados.
- Com as vítimas de desastres naturais.

RESPONSABILIDADE →
- Diante das tarefas pessoais e de grupo: esforço, compromisso e cooperação.
- Diante das regras sociais: civismo e cidadania.
- Diante dos conflitos e dos dilemas morais: informações confiáveis, senso crítico e posicionamento.
- Diante do consumo: consumo responsável e racional dos produtos.
- Diante das próximas gerações: desenvolvimento sustentável e ética global a longo prazo.

HONESTIDADE →
- Apreço pela verdade e sinceridade, para si e para os outros.
- Repúdio ao uso de atalhos para obtenção de vantagens.
- Recusa à fraude, à omissão, à corrupção e ao engano intencional.

CRIATIVIDADE →
- Impulso de buscar e de criar soluções para diferentes problemas materiais e sociais.
- Iniciativa, proatividade, confiança, visão de futuro, inovação, reaproveitamento de recursos, imaginação, curiosidade e desejo de saber.

Por meio do trabalho com cada um desses pilares, abordam-se empatia, reconhecimento de direitos, responsabilidade de consumo, recusa a vantagens ilícitas ou a atalhos para conseguir o que se deseja, respeito às diferentes culturas e individualidades e busca ativa de solução de problemas, entre outras questões.

SAÚDE MENTAL E *BULLYING*

Promover uma cultura de paz sistemática na educação vai além de criar leis ou de estudar as que já existem, buscando garantir os direitos constitucionais de cada cidadão. Essa importante missão requer ainda o engajamento e a colaboração de cada agente das comunidades escolares, para que, com sua humanidade, acolha as individualidades, promovendo um ambiente de real valorização da diversidade naquele contexto específico, e prepare os estudantes para viver outros contextos, mais amplos.

O fator convivência pode ter um impacto engajador na comunidade escolar, na mesma medida em que pode dificultar a aprendizagem e conduzir ao desinteresse e à alienação. E, quando falamos de convivência e engajamento, estamos incluindo as relações entre os diferentes membros da equipe escolar, em todas as instâncias, assim como entre estudantes, ou entre professores e estudantes, e entre escola e família. Sabemos que é pelo exemplo que as crianças e os jovens aprendem; assim, ao observar empatia, cooperação e respeito e experienciar um ambiente pacífico, eles poderão efetivamente desenvolver a competência geral 9:

> **9.** Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
>
> (Brasil, 2018a, p. 10)

Nesse sentido, a escola, ao exercer seu compromisso de formar cidadãos atentos aos direitos humanos e aos princípios democráticos, deve envolver as famílias de maneira direta e intencional. Ou seja, é necessária a presença das famílias em encontros formativos nos quais sejam discutidos temas para que toda a comunidade escolar pactue valores e práticas que visem à cooperação e à resolução de conflitos de forma não violenta. Dessa maneira, a cultura de paz pode ser construída, potencializando a capacidade de aprendizagem das crianças e dos jovens, para citar apenas um dos inúmeros benefícios sociais que esse diálogo pode gerar.

Um cuidado importante ao falarmos de cultura de paz é trazer a atenção das crianças e dos jovens para o modo como se expressam tanto em situações presenciais quanto nas interações virtuais, proporcionando situações de aprendizagem que mobilizem algumas competências, como empatia, respeito, responsabilidade, comunicação, colaboração, entre outras. Nesse sentido, temos de desnaturalizar qualquer forma de violência.

É importante frisar aqui a obrigatoriedade de combatermos o *bullying* no ambiente escolar. Sobre esse tema, citamos um artigo que vale a pena ser lido na íntegra, pois colabora com a prática docente, trazendo sugestões valiosas.

> *Bullying* é uma situação que se caracteriza por agressões intencionais, verbais ou físicas, feitas de maneira repetitiva, por um ou mais alunos contra um ou mais colegas. O termo *bullying* tem origem na palavra inglesa *bully*, que significa valentão, brigão. Mesmo sem uma denominação em português, é entendido como ameaça, tirania, opressão, intimidação, humilhação e maltrato. [...]
>
> **10.** O que fazer em sala de aula quando se identifica um caso de *bullying*?
>
> Ao surgir uma situação em sala, a intervenção deve ser imediata. "Se algo ocorre e o professor se omite ou até mesmo dá uma risadinha por causa de uma piada ou de um comentário, vai pelo caminho errado. Ele deve ser o primeiro a mostrar respeito e dar o exemplo", diz Aramis Lopes Neto, presidente do Departamento Científico de Segurança da Criança e do Adolescente da

Sociedade Brasileira de Pediatria. O professor pode identificar os atores do *bullying*: autores, espectadores e alvos. Claro que existem as brincadeiras entre colegas no ambiente escolar. Mas é necessário distinguir o limiar entre uma piada aceitável e uma agressão. “Isso não é tão difícil como parece. Basta que o professor se coloque no lugar da vítima. O apelido é engraçado? Mas como eu me sentiria se fosse chamado assim?”, orienta o pediatra Lauro Monteiro Filho.

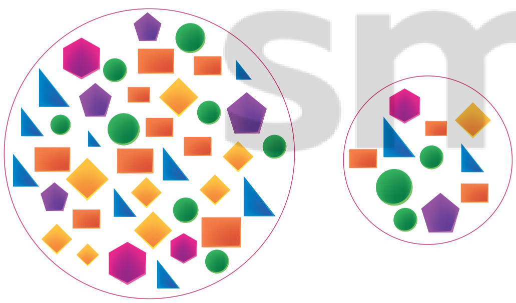
21 PERGUNTAS e respostas sobre *bullying*. *Nova Escola*, 1º ago. 2009. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/336/bullying-escola. Acesso em: 16 maio 2022.

Além dessas sugestões, nesta coleção contribuímos com o combate a qualquer tipo de violência, principalmente o *bullying*, ressaltando momentos em que esse tema pode ser abordado e sugerindo uma maneira de conduzir conversas e trocas de experiência que objetivam uma educação equitativa e a cultura de paz.

Por fim, não poderíamos deixar de mencionar uma estratégia que pode colaborar muito na promoção da paz, que é a Comunicação Não Violenta (CNV), sistematizada por Marshall Rosenberg. A CNV propõe caminhos para se estabelecer uma conexão consciente por meio da empatia e da compaixão entre interlocutores e é usada até mesmo pela Organização das Nações Unidas (ONU) na mediação de situações de conflito em todo o mundo. Para saber mais sobre a CNV, sugerimos assistir ao vídeo disponível em: https://ecoativos.org.br/biblioteca/comunicacao-nao-violenta-parte-1-marshall-rosenberg/ (acesso em: 7 jul. 2022).

TRABALHO COM GRUPOS GRANDES E DIVERSOS DE ESTUDANTES

Embora uma turma numerosa implique desafios ao professor no que se refere ao cotidiano de sala de aula e ao acompanhamento das aprendizagens individuais, há pontos positivos nessa realidade: em um grupo grande, amplifica-se a heterogeneidade de histórias de vida, pensamentos, potencialidades e valores. Tal diversidade, se recebida e tratada com atenção e respeito por todos os envolvidos, pode enriquecer as propostas e as dinâmicas – sobretudo se forem sugeridas atividades colaborativas entre os estudantes.



João Picoli/ID/BR

Há diversos prós e contras em trabalhar com grupos grandes e com grupos pequenos em sala de aula. Elencar os itens que compõem essas listas é fundamental para uma boa condução das aulas.

Trabalhar, portanto, com grupos grandes e diversos exige estratégias didáticas específicas. No início do ano letivo, recomenda-se investir tempo no estabelecimento de vínculos saudáveis com os estudantes. Isso permitirá, posteriormente, reconhecer e mapear as necessidades, dificuldades e potencialidades de cada um. Com esse levantamento, será possível privilegiar trabalhos em grupo, propondo atividades mais significativas com base nas especificidades de cada estudante e beneficiando-se da troca entre os pares.

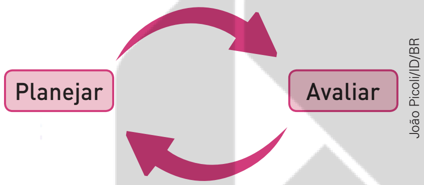
Nesta coleção há diversos momentos em que se ressalta o trabalho colaborativo. Pode-se, por exemplo, organizar duplas ou trios com estudantes de diferentes níveis de aprendizagem para a resolução de problemas, considerando que a dificuldade de um pode ser superada com o auxílio de outro. Em outro viés, pode-se sugerir que se formem parcerias para compartilhar as estratégias utilizadas e a correção de resoluções, de modo que os estudantes proponham ajustes e melhorias nas soluções propostas pelos colegas. Essas dinâmicas promovem a troca de conhecimentos e contribuem para o amadurecimento e o fortalecimento da turma como grupo.

Outra questão relevante diz respeito à condução de atividades mais elaboradas, que envolvem pesquisa, desenvolvimento de projetos ou produção de sínteses e conclusões. Pensando no trabalho com grupos grandes, para solucionar o problema da má distribuição de tarefas nos grupos – quando há sobrecarga de um ou dois estudantes e os demais ficam sem espaço e oportunidade para participar ou colaborar com alguma etapa do trabalho –, convém ajudá-los a estabelecer um papel para cada integrante com base no perfil, nas habilidades e nos interesses de cada um. Essa divisão auxilia os estudantes a reconhecer sua importância e suas contribuições para o grupo, permitindo que atuem com mais responsabilidade e iniciativa.

Vale lembrar que lidar com diferentes perfis vai impeli-los a buscar novas perspectivas, o que eventualmente pode resultar em conflitos. Nesse sentido, as atividades poderão, também, servir de espaço para o exercício da escuta atenta, da empatia, de habilidades deliberativas e da comunicação não violenta voltada à resolução de conflitos, favorecendo o diálogo e as práticas da cultura de paz na escola.

AVALIAÇÃO

Planejar e avaliar são processos indissociáveis. A avaliação é, sem dúvida, um dos aspectos mais sensíveis e complexos de qualquer planejamento.



Na perspectiva da formação integral, a avaliação passa a ser um instrumento de comunicação com o estudante, com os demais professores, com as equipes da escola responsáveis pela formação do estudante e até mesmo com as famílias.

Quando a avaliação é entendida como parte da formação integral dos estudantes, ela não pode mais estar relacionada apenas à nota atribuída ao final de um período de ensino, como um bimestre ou um trimestre, quando os estudantes recebem um número ou um conceito que certifica ou não sua aprendizagem. A nota em si exclui muitos dos fatores determinantes do processo de aprender. A história do estudante, o momento das avaliações, os recursos e o tempo para o estudo individual e até mesmo o instrumento de avaliação utilizado podem ser elementos decisivos para uma nota, que não corresponde necessariamente ao que o estudante aprendeu de fato.

Além disso, um currículo alinhado com a BNCC, pautado pelo desenvolvimento de competências e habilidades, visando ao aprofundamento e à consolidação das aprendizagens, não pode se sustentar em processos de avaliação pontuais e meramente numéricos. A avaliação, ainda que venha a gerar uma nota, deve corresponder ao projeto da escola no sentido da formação do estudante. Quando há um projeto de educação e a escola assume seu papel de formadora, a avaliação deve sinalizar se o estudante está ou não na direção do projeto traçado para ele. Nesse sentido, é preciso que a avaliação corresponda ao papel da escola na formação do estudante.

A avaliação em uma perspectiva formativa é composta de três grandes etapas: o diagnóstico, a análise e a intervenção. Um efetivo processo avaliativo da aprendizagem se inicia com a coleta de dados, ou seja, com um diagnóstico, proveniente da observação e do registro do professor com base nas mais diversas produções dos estudantes. De posse desses dados, antes da nota ou de qualquer parecer sobre o que o estudante aprendeu ou não, a avaliação formativa pressupõe a análise das informações coletadas, pautada pela reflexão sobre as aprendizagens esperadas, a atividade proposta e seu desenvolvimento. Essa análise precede a terceira etapa da avaliação, que corresponde à tomada de decisão sobre o que retomar e como agir em face das aprendizagens dos estudantes. É a fase da intervenção. Completa-se, assim, o ciclo avaliativo.

Nos casos em que se identifica algo que os estudantes deveriam saber e cuja deficiência pode impedir a continuidade de seu percurso de aprendizagem, a intervenção pode ser imediata. Outras vezes, a análise e o planejamento idealizado permitem antever que o conhecimento ausente nesse momento pode ser retomado mais adiante em outro tema, outro momento ou outra situação. Desse modo, a intervenção é pensada e planejada, sem ser imediata.

Como forma de organizar esse processo contínuo, há três etapas importantes de avaliação.

ETAPAS DA AVALIAÇÃO

Avaliação inicial ou diagnóstica	Permite ao professor realizar uma investigação no sentido de levantar os conhecimentos prévios dos estudantes. Ela servirá de subsídio para que o professor organize sua proposta hipotética de intervenção.
Avaliação formativa ou processual	Pode ser vista com o objetivo de replanejamento por parte do professor, ocorrendo em momentos variados ao longo do processo de ensino e aprendizagem, tornando possível aos estudantes tomar consciência de suas dúvidas e dificuldades e de seus avanços.
Avaliação final ou somativa	Espera-se, sobretudo, identificar se os objetivos propostos inicialmente foram atingidos, se houve de fato aprendizagem, se é possível dar prosseguimento ao processo ou se há necessidade de revisão e complementação do que foi trabalhado.

Outro aspecto importante para a formação dos estudantes é o incentivo à autoavaliação, que colabora para que eles se tornem responsáveis pelo próprio processo de aprendizagem, já que subsidia estratégias de autoconhecimento.

Portanto, a autoavaliação pode levar a ótimos resultados no trabalho em sala de aula, na medida em que os estudantes se tornam conscientes do próprio processo de aprendizagem, além de desenvolverem a capacidade de monitorar a realização das tarefas propostas, obtendo assim maior controle sobre suas ações. Ao requerer a participação ativa dos estudantes, essa estratégia geralmente permite a evolução deles no desempenho das tarefas realizadas.

Os estudantes devem estar cientes de que a autoavaliação não recebe nota, mas revela a qualidade da autocrítica. Por essa razão, não se deve superestimar a autoavaliação se ela não estiver de acordo com os resultados observados no dia a dia.

INSTRUMENTOS AVALIATIVOS

Não existe processo de avaliação sem a reunião de dados a serem analisados; daí a importância dos instrumentos de avaliação, sua escolha e seus critérios de uso.

A seleção e a elaboração de um instrumento de avaliação têm início ainda durante o planejamento, quando o professor questiona: “O que ensino?”; “Por que ensino?”; “Os estudantes podem aprender isso?”. Tais questionamentos já apontam para a necessidade de refletir sobre as ações didáticas a fim de garantir o aprendizado dos estudantes.

O foco da avaliação deve ser fornecer dados que possibilitem ao professor compreender o que foi aprendido ou não e fazer intervenções que levem o estudante a avançar no aprendizado. Os instrumentos de avaliação podem guiar o olhar do professor nesse sentido.

A variedade de instrumentos avaliativos favorece a individualização do processo de ensino e aprendizagem, tornando-o uma experiência que, embora se realize no coletivo, seja única para cada estudante.

Há instrumentos que estão mais diretamente relacionados à obtenção de dados pelo professor. Neles, embora o estudante seja chamado a colaborar, é o professor que centraliza as ações de reunião e análise de dados. É o caso da observação e do registro, da análise da produção dos estudantes e das avaliações e da análise de erros, que podem ser usados em vários momentos.

Na correção de uma tarefa ou de um trabalho em grupo, por exemplo, é possível observar e registrar o que os estudantes aprenderam e permitir que eles apresentem à turma suas resoluções, dúvidas ou imprecisões de linguagem. Essa dinâmica pode ser um bom contexto para fazer uma intervenção ou acompanhar esses estudantes nas próximas atividades.

Há situações propostas nesta coleção que podem ser utilizadas com finalidade de avaliação formativa ou processual, não necessariamente para dar uma nota, mas para obter dados e planejar intervenções. Por exemplo: quando é solicitado ao estudante que organize o que aprendeu, que elabore problemas, que produza textos após as atividades e analise problemas com erros na resolução e também nas atividades propostas na seção *Atividades integradas*. Nessa análise, a oralidade, os desenhos, os gráficos, os esquemas e as escritas pessoais são importantes para acompanhar as percepções e os avanços de cada um. Relembramos que o letramento matemático é uma meta na Educação Básica: avaliar a leitura, a escrita e a utilização da linguagem em diferentes contextos é tão importante quanto assegurar os objetos de conhecimento específicos.

Por fim, vale ressaltar que a avaliação não é mera “tarefa burocrática” ou instrumento de julgamento dos estudantes. Na realidade, o que está em jogo, quando se planeja e executa a avaliação, é a possibilidade de aferir, por meio de uma coleta sistemática de dados, os ganhos e as perdas do processo educativo. Com base nessa aferição, a prática de ensino e aprendizagem é pensada para contemplar diferentes dimensões ou tipos de conteúdo.

PREPARAÇÃO PARA EXAMES DE LARGA ESCALA

Apresentamos a seguir algumas atividades com o formato das que compõem avaliações externas, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa). As matrizes de referência para cada uma dessas avaliações podem ser encontradas nos *links* indicados (acessos em: 7 jul. 2022).

- Enem: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf
- Saeb: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/matrizes-e-escalas
- Pisa: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa/matrizes-de-referencia

As atividades propostas foram elaboradas com o intuito de preparar os estudantes para exames de larga escala. Além delas, você pode utilizar as próprias atividades de exames dessa natureza realizados em anos anteriores, pois há muitos que se encontram disponíveis na internet, ou ainda criar novas atividades com base nas matrizes de referência desses exames.

Ao trabalhar esse material com os estudantes, os registros deles podem ser utilizados como instrumento de avaliação de caráter preparatório para as avaliações externas. A abordagem pode ser complementada com avaliações organizadas por você, para que os estudantes estejam preparados não apenas em termos de conceito, mas possam vivenciar o ambiente em que essas avaliações acontecem.

Questão 1

Na bandeira do estado de Minas Gerais há uma sobreposição de figuras geométricas: um triângulo vermelho, cujos lados têm a mesma medida, sobrepõe-se a um retângulo branco. Contornando o triângulo, aparece a expressão em latim *Libertas quæ sera tamen*, cuja tradução mais comum é “liberdade, ainda que tardia”.

Maxim Studio/Shutterstock.com/ID/BR

Ao reproduzir essa bandeira utilizando um *software* de geometria dinâmica, que procedimento pode ser utilizado para construir o triângulo?

a) Traçar um segmento e, a partir dele, dois outros segmentos de qualquer medida de comprimento.

b) Traçar um segmento $\overline{AB}$ e construir um ângulo de 60° nos vértices A e B, obtendo o vértice C no encontro dos lados dos ângulos.

c) Traçar um triângulo retângulo no centro do retângulo branco.

d) Construir um triângulo ABC que tenha dois lados de mesma medida de comprimento e ângulos de base medindo 45°.

e) Construir um segmento $\overline{AB}$ e traçar sua bissetriz para obter o vértice C.

Questão 2

Moradores de grandes cidades costumam enfrentar escassez hídrica com certa frequência em virtude do alto consumo e da diminuição no volume de chuva. Para que não haja racionamento de água, os moradores de um condomínio optaram por construir um reservatório, de formato cúbico, com capacidade para 8 000 litros de água. A profundidade desse reservatório, em metro, deverá medir:

a) 1,5.

b) 1,8.

c) 2,0.

d) 2,5.

e) 3,0.

Questão 3

A padronização das medidas de tempo usadas pela humanidade foi fundamental para a organização da rotina do dia a dia. Entre as medidas de tempo padronizadas, temos: o dia, dividido em 24 horas; a hora, dividida em 60 minutos; e o minuto, dividido em 60 segundos. Com base nessas informações, é correto afirmar que uma hora tem:

a) 60 segundos.

b) 60^2 segundos.

c) 60^3 segundos.

d) 60^2 minutos.

e) 60^3 minutos.

Questão 4

Localizado em Petrópolis, cidade serrana do estado do Rio de Janeiro, o Museu Imperial é um museu histórico que abriga o principal acervo nacional sobre o Segundo Reinado. Nesse local estão expostos objetos significativos desse período, como as coroas de dom Pedro I e de dom Pedro II e a caneta usada pela Princesa Isabel para assinar a Lei Áurea, em 13 de maio de 1888.

Em 2022, a visita ao museu estava condicionada à compra de um ingresso de R$ 10,00 para o público em geral e R$ 5,00 (meia-entrada) para crianças com mais de 5 anos de idade, idosos (entre 60 e 80 anos de idade), estudantes e pessoas com deficiência.

Supondo que, em um dia, a bilheteria tenha vendido x ingressos para o público em geral e y para o público com direito à meia-entrada, a expressão algébrica que representa o faturamento do museu nesse dia é:

a) $10x - 5y$

b) $5x + 10y$

c) $10x + 10y$

d) $10x + 5y$

e) $15xy$

Questão 5

Em algumas famílias, as crianças recebem um valor mensal, conhecido por “mesada”, como forma de educá-las financeiramente, mostrando-lhes a importância do consumo consciente e a necessidade de ter um fundo de reserva. Há também crianças que recebem um valor semanal, conhecido por “semanada”.

Murilo tem 8 anos de idade e ganha um valor semanal de seus avós. Em determinado mês, ele percebeu que já tinha economizado R$ 120,00 e decidiu começar a guardar, desde então, 60% do valor que recebia toda semana.

Após 10 semanas, Murilo contabilizou R$ 150,00. Sabendo que ele sempre recebe a mesma quantia, qual é o valor que Murilo recebe toda semana?

a) R$ 5,00

b) R$ 6,00

c) R$ 10,00

d) R$ 25,00

e) R$ 30,00

Questão 6

O alvará de funcionamento é uma licença concedida pelas prefeituras que autoriza uma empresa a exercer suas atividades em determinado local. Para ter direto a ele, o estabelecimento deve cumprir algumas exigências, como a presença de extintores de incêndio e placas de sinalização emergenciais.

Para atender às exigências da prefeitura, uma empresa que tem duas lojas comprou 12 extintores e 24 placas de sinalização para uma delas e gastou R$ 708,00 com essa compra. Para a outra, foram necessários 15 extintores e 25 placas de sinalização, totalizando R$ 825,00. Qual é o valor unitário do extintor e da placa de sinalização, respectivamente?

a) R$ 35,00 e R$ 12,00.

b) R$ 25,00 e R$ 12,00.

c) R$ 25,00 e R$ 10,00.

d) R$ 10,00 e R$ 25,00.

e) R$ 12,00 e R$ 35,00.

Questão 7

A quadra poliesportiva de um condomínio tem 16 metros de medida de largura por 27 metros de medida de comprimento. Para trocar o piso dessa quadra poliesportiva, o material que será adquirido custa R$ 62,50 o metro quadrado. Qual será o valor gasto, em real, nessa reforma?

a) R$ 27000,00

b) R$ 28000,00

c) R$ 30000,00

d) R$ 32000,00

e) R$ 43000,00

Questão 8

Quando estamos diante de um espelho, nossa imagem é reproduzida em posição oposta à nossa. Por exemplo, se levantarmos o braço esquerdo, teremos a impressão de ter levantado o braço direito. Isso acontece com qualquer imagem observada em um espelho plano.

Dmytro Zinkevych/Shutterstock.com/ID/BR

Pessoa se vendo no espelho.

Denominamos essa transformação geométrica de:

a) reflexão.

b) translação.

c) rotação.

d) mediatriz.

e) bissetriz.

Questão 9

O handebol é um esporte coletivo de quadra jogado com as mãos. Cada equipe é formada por 7 jogadores. Os jogos de handebol são disputados entre dois times, e vence a equipe que marcar mais gols.

Jörg Schüler/Stringer/Getty Images

↑ **Gustavo Rodrigues, da seleção brasileira, arremessando no gol da seleção espanhola. 26º Campeonato Mundial Masculino de Handebol, Colônia (Alemanha). Foto de 2019.**

Em um torneio quadrangular de handebol disputado pelas equipes A, B, C e D, a equipe A foi a campeã da disputa. Se essa equipe marcou 23 gols no primeiro jogo, 18 gols no segundo e 19 gols no terceiro e último jogo, a média de gols por partida, marcados pela equipe A, foi de:

a) 19 gols.

b) 20 gols.

c) 21 gols.

d) 22 gols.

e) 23 gols.

Questão 10

Uma empresa levantou dados sobre a quantidade de funcionários demitidos nos últimos anos de acordo com a faixa salarial. Os resultados podem ser observados na tabela a seguir.

Faixa salarial dos funcionários demitidos

Salário	Demissões
R$ 1 200,00	7
R$ 1 800,00	6
R$ 2 500,00	9
R$ 6 200,00	4

Dados obtidos pela empresa.

A moda dos salários dos funcionários demitidos dessa empresa é:

a) R$ 1200,00.

b) R$ 1800,00.

c) R$ 2150,00.

d) R$ 2 500,00.

e) R$ 6 200,00.

Respostas e comentários das atividades de preparação para exames de larga escala

A seguir, para cada uma das questões, apresentamos o conteúdo trabalhado, a habilidade da BNCC que pode ser associada à questão proposta, os indicadores das matrizes de referência de alguns exames de larga escala que podem ser trabalhados e, por fim, a resolução. As matrizes de referência indicadas são do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa).

Questão 1

- **Conteúdo**
  Triângulos

- **Habilidade da BNCC**
  EF08MA15

- **Matriz do Enem**
  Competência de área 2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
  Habilidade 7: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

- **Matriz do Saeb**
  Eixo do conhecimento: Geometria.
  Eixo cognitivo: Compreender e aplicar conceitos e procedimentos.
  Habilidade 9G1.5: Identificar propriedades e relações existentes entre os elementos de um triângulo (condição de existência, relações de ordem entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos internos, soma dos ângulos internos, determinar medida de um ângulo interno ou externo).

- **Matriz do Pisa**
  Capacidade fundamental da Matemática: Representação.
  Processo matemático: Formular situações matematicamente.
  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**
  Alternativa **b**.
  Vamos analisar cada uma das alternativas.
  a) Falsa, pois o triângulo deve ser equilátero e, por isso, as medidas dos comprimentos dos segmentos não podem ser aleatórias.
  b) Verdadeira, pois todo triângulo equilátero tem ângulos internos com medidas iguais. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, se um triângulo for construído com dois ângulos de 60°, então o terceiro ângulo também medirá 60°:
  $180° - (60° + 60°) = 180° - 120° = 60°$
  c) Falsa, pois o triângulo deve ser equilátero, e não existe um triângulo retângulo que seja equilátero.
  d) Falsa, pois o triângulo deve ser equilátero e, para isso, os três ângulos internos devem ter medidas iguais, isto é, 60°.
  e) Falsa, pois a bissetriz é uma semirreta que divide um ângulo em dois de medidas iguais. Assim, não é possível traçar a bissetriz de um segmento.

Questão 2

- **Conteúdos**
  Volume e capacidade

- **Habilidades da BNCC**
  EF08MA20 e EF08MA21.

- **Matriz do Enem**
  Competência de área 2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
  Habilidade 8: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

- **Matriz do Saeb**
  Eixo do conhecimento: Grandezas e medidas.
  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.
  Habilidade 9M2.4: Resolver problemas que envolvam volume de prismas retos ou cilindros retos.

- **Matriz do Pisa**
  Capacidade fundamental da Matemática: “Matematizar”.
  Processo matemático: Formular situações matematicamente.
  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

Alternativa **c**.

Como 1 L equivale a 1 dm^3, então 8 000 L equivalem a 8 000 dm^3. Como 1000 dm^3 equivalem a 1 m^3, então 8 000 dm^3 equivalem a 8 m^3. Assim, o volume desse reservatório cúbico mede 8 m^3.

Como a medida do volume V de um cubo de aresta a corresponde a a^3, então:

$$V = 8$$
$$V = a^3$$
$$a^3 = 8$$
$$a = \sqrt[3]{8}$$
$$a = \sqrt[3]{2^3}$$
$$a = 2$$

Portanto, a profundidade desse reservatório deverá medir 2,0 m.

Questão 3

- **Conteúdo**

Potenciação

- **Habilidade da BNCC**

EF08MA06

- **Matriz do Enem**

Competência de área 5: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade 19: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

- **Matriz do Saeb**

Eixo do conhecimento: Grandezas e medidas.

Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

Habilidade 9M2.1: Resolver problemas que envolvam medidas de grandezas (comprimento, massa, tempo, temperatura, capacidade ou volume) em que haja conversões entre unidades mais usuais.

- **Matriz do Pisa**

Capacidade fundamental da Matemática: Uso de linguagem simbólica, formal e técnica, e operações.

Processo matemático: Empregar conceitos, fatos, procedimentos e raciocínio matemáticos.

Contexto e situações: Científico.

- **Resolução**

Alternativa **b**.

Como 1 hora tem 60 minutos e 1 minuto tem 60 segundos, então 1 hora tem 60^2 segundos, pois:

$$60 \cdot 60 = 60^2$$

Questão 4

- **Conteúdo**

Expressão algébrica

- **Habilidade da BNCC**

EF08MA06

- **Matriz do Enem**

Competência de área 5: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade 19: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

- **Matriz do Saeb**

Eixo do conhecimento: Álgebra.

Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

Habilidade 9A2.1: Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta ou inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisões proporcionais e taxa de variação.

- **Matriz do Pisa**

Capacidade fundamental da Matemática: “Matematizar”.

Processo matemático: Formular situações matematicamente.

Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

Alternativa **d**.

De acordo com o enunciado, há x pessoas que pagaram R$ 10,00 e y pessoas que pagaram R$ 5,00. Logo, a expressão algébrica que representa o faturamento do museu nesse dia é dada por:

$$10x + 5y$$

Questão 5

- **Conteúdo**

Equação

- **Habilidade da BNCC**

EF08MA06

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 5: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

  Habilidade 21: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Álgebra.

  Eixo cognitivo: Compreender e aplicar conceitos e procedimentos.

  Habilidade 9A1.1: Resolver uma equação polinomial de 1º grau.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: "Matematizar".

  Processo matemático: Formular situações matematicamente.

  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

  Alternativa **a**.

  Indicando por x o valor recebido em uma semana e sabendo que após 10 semanas Murilo contabilizou R$ 150,00, podemos representar a situação descrita por:

$$\begin{aligned} 120 + 10 \cdot (0{,}6x) &= 150 \\ 10 \cdot (0{,}6x) &= 150 - 120 \\ 6x &= 30 \\ x &= \frac{30}{6} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

  Portanto, Murilo recebe R$ 5,00 toda semana.

Questão 6

- **Conteúdo**

  Sistema de equações

- **Habilidade da BNCC**

  EF08MA08

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 5: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

  Habilidade 21: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Álgebra.

  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

  Habilidade 9A2.3: Resolver problemas que possam ser representados por sistema de equações de 1º grau com duas incógnitas.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: "Matematizar".

  Processo matemático: Formular situações matematicamente.

  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

  Alternativa **a**.

  Indicando por e o valor de cada extintor e por p o valor de cada placa de sinalização, podemos representar a situação por meio de um sistema de equações:

$$\begin{cases} 12e + 24p = 708 \\ 15e + 25p = 825 \end{cases}$$

  Vamos resolver esse sistema pelo método da adição. Dividindo a primeira equação por -4 e a segunda equação por 5, obtemos:

$$\begin{cases} \cancel{-3e} - 6p = -177 \\ \cancel{3e} + 5p = 165 \end{cases} +$$

$$\begin{aligned} -p &= -12 \\ p &= 12 \end{aligned}$$

  Substituindo o valor de p por 12 na equação $3e + 5p = 165$, temos:

$$\begin{aligned} 3e + 5 \cdot 12 &= 165 \\ 3e + 60 &= 165 \\ 3e &= 165 - 60 \\ 3e &= 105 \\ e &= 105 : 3 \\ e &= 35 \end{aligned}$$

  Portanto, o valor unitário do extintor é R$ 35,00 e o da placa de sinalização é R$ 12,00.

Questão 7

- **Conteúdo**

  Medida de área

- **Habilidade da BNCC**

  EF08MA19

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 3: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

  Habilidade 12: Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Grandezas e medidas.

  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

  Habilidade 9M2.3: Resolver problemas que envolvam área de figuras planas.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: "Matematizar".

  Processo matemático: Empregar conceitos, fatos, procedimentos e raciocínio matemáticos.

  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

  Alternativa **a**.

  Como a quadra poliesportiva tem o formato de um retângulo com 16 m de medida de largura e 27 m de medida de comprimento, sua área mede 432 m^2, pois:

  $$16 \cdot 27 = 432$$

  Como o piso novo custa R$ 62,50 o metro quadrado, o valor gasto na reforma do piso da quadra será R$ 27 000,00, pois:

  $$432 \cdot 62{,}50 = 27\,000$$

Questão 8

- **Conteúdo**

  Transformações geométricas

- **Habilidade da BNCC**

  EF08MA18

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

  Habilidade 9: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Geometria.

  Eixo cognitivo: Compreender e aplicar conceitos e procedimentos.

  Habilidade 9G1.1: Identificar, no plano cartesiano, figuras obtidas por uma ou mais transformações geométricas (reflexão, translação, rotação).

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Comunicação.

  Processo matemático: Mudanças e relações.

  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

  Alternativa **a**.

  Na reflexão em relação a um plano, cada ponto da figura original é transformado em seu simétrico em relação a esse plano, uma vez que o plano pode estar na figura ou fora dela. Assim, a forma e o tamanho da figura são mantidos, mas ela aparece invertida, como ocorre em um espelho plano.

Questão 9

- **Conteúdo**

  Estatística

- **Habilidade da BNCC**

  EF08MA25

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 7: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

  Habilidade 28: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Probabilidade e Estatística.

  Eixo cognitivo: Compreender e aplicar conceitos e procedimentos.

  Habilidade 9E1.5: Calcular os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média aritmética simples, moda ou mediana).

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Uso de linguagem simbólica, formal e técnica, e operações.

  Processo matemático: Empregar conceitos, fatos, procedimentos e raciocínio matemáticos.

  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

  Alternativa **b**.

  Cálculo da média *MA* de gols por partida:

$$MA = \frac{23 + 18 + 19}{3}$$

$$MA = \frac{60}{3}$$

$$MA = 20$$

  Portanto, a equipe A marcou, em média, 20 gols por partida.

Questão 10

- **Conteúdo**

  Estatística

- **Habilidade da BNCC**

  EF08MA25

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 7: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

  Habilidade 27: Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

  Habilidade 28: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Probabilidade e Estatística.

  Eixo cognitivo: Compreender e aplicar conceitos e procedimentos.

  Habilidade 9E1.5: Calcular os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média aritmética simples, moda ou mediana).

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Uso de linguagem simbólica, formal e técnica, e operações.

  Processo matemático: Empregar conceitos, fatos, procedimentos e raciocínio matemáticos.

  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

  Alternativa **d**.

  A moda é o dado que aparece mais vezes em uma distribuição, ou seja, o de maior frequência. Nesse caso, de acordo com os dados da tabela, as pessoas demitidas com maior frequência foram as que tinham salário de R$ 2 500,00.

ORGANIZAÇÃO DA COLEÇÃO

ESTRUTURA DO LIVRO DO ESTUDANTE

A coleção é composta de quatro volumes, divididos em unidades e capítulos. Cada unidade tem como foco uma unidade temática (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e Estatística) e apresenta textos, atividades, seções e boxes. No conjunto, pretende-se que a coleção seja um material de apoio para o trabalho de professores e estudantes, a fim de alcançar o desenvolvimento das competências gerais e específicas de Matemática.

ABERTURA DE UNIDADE

No início das unidades há uma imagem que ocupa uma dupla de páginas. Essa imagem tem como objetivo despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes sobre o tema que será tratado na unidade. O texto e as questões propostas em *Primeiras ideias* procuram incentivá-los a explorar a imagem, estabelecendo relações possíveis acerca dos assuntos que serão estudados. Além disso, as questões propostas podem ser utilizadas para diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o tema, realizando uma avaliação inicial da turma.

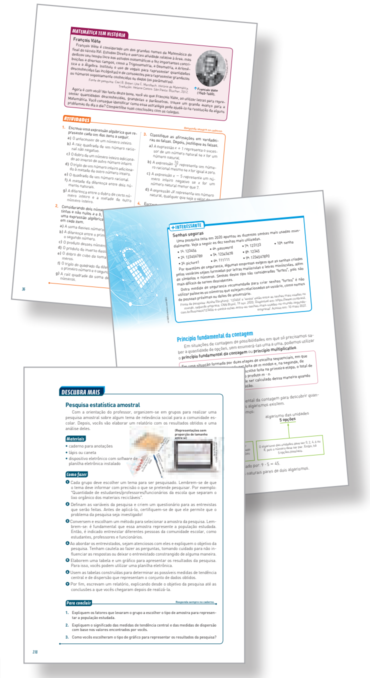
CAPÍTULOS

Cada unidade tem seu conteúdo disposto em dois ou três capítulos. O texto é apresentado de forma organizada e clara por meio de situações contextualizadas. De modo geral, estão associados a ilustrações, fotografias, gráficos, mapas, tabelas, entre outros recursos, a fim de facilitar o entendimento do conteúdo e propiciar o contato com diversos modos de organização das informações. Termos essenciais e ideias-chave são destacados.

O trabalho voltado à formação de valores ocorre ao longo das unidades e pode ser evidenciado no boxe *Valor*. Além dele, há boxes complementares que ampliam o conhecimento e revelam alguns desdobramentos e relações que o conteúdo apresentado estabelece com outros assuntos. Palavras que eventualmente poderiam dificultar a compreensão do texto são explicadas nos glossários, inseridos na mesma página em que o termo aparece, facilitando a consulta.

Além disso, os boxes *Matemática tem história* e *+Interessante* contêm temas que se referem, respectivamente, à história da Matemática e a curiosidades relacionadas à Matemática no dia a dia. Em alguns boxes *Matemática tem história*, também é possível encontrar atividades de pesquisa sobre a história da Matemática.

O boxe *Descubra mais* propõe atividades de caráter investigativo de forma organizada e orientada. Esse boxe está estruturado da seguinte maneira: texto introdutório (contextualização do tema), “Materiais” (opcional com a apresentação de itens – em geral – de fácil acesso), “Como fazer” (descrição das etapas) e “Para concluir” (questões para o auxílio dos estudantes a respeito da avaliação e da reflexão sobre o desenvolvimento e o resultado).



ATIVIDADES E DIVERSIFICANDO

A seção *Atividades*, proposta após a apresentação de alguns conteúdos, e a seção *Diversificando*, no final de cada capítulo, buscam desenvolver diferentes habilidades, abrangendo conceitos trabalhados ao longo do capítulo. Essas seções também podem ser utilizadas como avaliação reguladora.

AO FINAL DA UNIDADE

AMPLIANDO HORIZONTES

A seção tem como principal objetivo fornecer informações, dados e conhecimentos específicos que possibilitem aos estudantes fazer boas escolhas financeiras e compreender suas consequências. A intenção é permitir o desenvolvimento da Educação Financeira. Esse aprendizado ocorre por meio da compreensão e da discussão de situações elucidadas em textos e imagens.

Os principais objetivos dessa seção são:

- Formar para a cidadania.
- Desenvolver a cultura de prevenção.
- Formar multiplicadores de conhecimento.
- Ensinar a planejar em curto, médio e longo prazos.
- Ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável.
- Oferecer conceitos e ferramentas para tomadas de decisão autônomas com base em mudanças de atitude.

RESOLVENDO PROBLEMAS

Um dos principais objetivos dessa seção é expor os estudantes a situações-problema diversificadas, buscando desenvolver o interesse por estratégias de resolução. Compreender e resolver problemas, criar estratégias de resolução, identificar informações pertinentes, tomar decisões individuais e em grupo e saber comunicá-las são capacidades importantes na vida em sociedade.

A seção é proposta em dois momentos em cada volume e está estruturada da seguinte maneira: "O problema" (apresentação do problema a ser resolvido), "Compreensão do problema" (questões que ajudam os estudantes a compreender o problema proposto), "Resolução do problema" (perguntas que orientam os estudantes a traçar uma estratégia para a resolução do problema), "Reflexão sobre o problema" (atividades que incentivam a reflexão a respeito do problema) e "Mais problemas" (outras situações-problema que podem ser resolvidas com a estratégia desenvolvida).

A seguir, são apresentadas as estratégias predominantes na abordagem sugerida para a resolução dos problemas dessa seção ao longo da coleção.

	Unidade	ESTRATÉGIA PREDOMINANTE NA ABORDAGEM SUGERIDA
6º ANO	3	Resolução de trás para a frente
	5	Resolução por tentativa e erro
7º ANO	3	Representação esquemática ou mental
	6	Tradução para a linguagem algébrica
8º ANO	3	Observação de padrões
	6	Tradução para a linguagem algébrica
9º ANO	3	Consulta de um problema mais simples
	6	Organização de informações

INVESTIGAR

A seção *Investigar* propõe atividades de caráter investigativo, voltadas à aplicação de métodos de pesquisa de modo organizado e orientado, incluindo estudos bibliográficos, entrevistas, etc.

Essa seção é proposta em dois momentos em cada volume, sempre no final das unidades 4 e 8.

Ela está estruturada do seguinte modo: "Para começar" (contextualização e apresentação da proposta, exposição da questão a ser investigada e apresentação da prática de pesquisa e do instrumento de coleta), "Procedimentos" (texto instrucional sobre como realizar a atividade), "Questões para discussão" (perguntas para debate sobre a realização do trabalho e os resultados obtidos) e "Comunicação dos resultados" (orientação a respeito do compartilhamento do conhecimento produzido).

A seguir, são apresentados os temas, as práticas de pesquisa, os instrumentos de coleta e os produtos, propostos nessa seção ao longo da coleção.

	Unidade	TEMA	PRÁTICA DE PESQUISA	INSTRUMENTO DE COLETA	PRODUTO
6º ANO	4	Medir o tempo: origens e instrumentos	Bibliográfica	Levantamento de referências teóricas	Seminário
	8	Descobrindo a pesquisa estatística	Bibliográfica	Levantamento de referências teóricas	Resumo
7º ANO	4	Arquitetura e Matemática	Bibliográfica	Levantamento de referências teóricas	Exposição de fotografias
	8	De casa para a escola: quanto tempo leva?	De campo	Questionário	Cartaz
8º ANO	4	Escolhendo a melhor amostra	De campo	Questionário e entrevista	Relatório
	8	Vida saudável	De campo	Questionário e entrevista	Vídeo
9º ANO	4	Personalidades da Matemática	Bibliográfica	Levantamento de referências teóricas	Blogue
	8	Mais pessoas ou menos pessoas?	Documental	Levantamento de registros institucionais	Exposição de cartazes e fotos

ATIVIDADES INTEGRADAS

No final de cada unidade há a seção *Atividades integradas*, que retoma e integra os conteúdos estudados nos capítulos. É uma oportunidade de fazer uma avaliação final, observando quais dificuldades os estudantes ainda têm e retomando conceitos conforme julgar necessário.

FINAL DE VOLUME

INTERAÇÃO

A seção oferece aos estudantes a oportunidade de planejar e de realizar um projeto. Com o objetivo de desenvolver as habilidades necessárias à participação em atividades em grupo (por exemplo: cooperação, capacidade de resolver problemas e comunicação), apresenta uma proposta de trabalho colaborativo como forma de relacionar os conteúdos estudados a situações práticas. Além disso, possibilita um trabalho interdisciplinar.

Essa seção está localizada ao final do volume, para que você tenha mais controle sobre o desenvolvimento da atividade. Entretanto, a proposta é de longa duração; portanto, sugerimos que seja desenvolvida ao longo do ano ou de um semestre.

O esquema a seguir evidencia a organização dessa seção na coleção.

	TEMA	INTERDISCIPLINARIDADE PROPOSTA	PRODUTO
6º ANO	Representatividade em números	Língua Portuguesa	Vídeo
7º ANO	Vamos reciclar?	Arte	Exposição de arte
8º ANO	Escola sustentável	Ciências	Maquete
9º ANO	Imigrantes e refugiados	Geografia e História	Exposição

SUGESTÃO DE CRONOGRAMA

Apresentamos a seguir uma proposta de distribuição dos conteúdos presentes neste volume em bimestres, trimestres e semestres. Entretanto, sabemos que o dinamismo do contexto escolar exige uma prática docente que seja flexível diante dos desafios presentes ao longo do ano letivo. Essa proposta, portanto, tem o objetivo de nortear a prática pedagógica de maneira que você possa adaptá-la à realidade escolar e ao projeto pedagógico desenvolvido na escola. Você também pode complementar a proposta em questão, explorando mais detalhadamente os temas, os boxes e as seções que compõem os capítulos e as unidades e, ainda, os momentos previstos para avaliações.

CONTEÚDO / PERÍODO		1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
		1º trimestre		2º trimestre	3º trimestre
		1º semestre		2º semestre	
Unidade 1 Potenciação e radiciação	**Capítulo 1** Potenciação				
	Capítulo 2 Radiciação				
Unidade 2 Cálculo algébrico	**Capítulo 1** Expressões algébricas				
	Capítulo 2 Polinômios				
Unidade 3 Equações e sistemas	**Capítulo 1** Equações				
	Capítulo 2 Sistemas de equações do 1º grau				
Unidade 4 Triângulos e quadriláteros	**Capítulo 1** Triângulos				
	Capítulo 2 Quadriláteros				
Unidade 5 Sequências e proporcionalidade	**Capítulo 1** Sequências				
	Capítulo 2 Proporcionalidade				
Unidade 6 Construções e transformações geométricas	**Capítulo 1** Construções geométricas				
	Capítulo 2 Transformações geométricas no plano				
Unidade 7 Probabilidade e Estatística	**Capítulo 1** Probabilidade				
	Capítulo 2 Estatística				
Unidade 8 Grandezas e medidas	**Capítulo 1** Áreas				
	Capítulo 2 Volumes e capacidades				
Interação Escola sustentável					

QUADROS DE CONTEÚDOS DA COLEÇÃO

Os quadros a seguir sintetizam os conteúdos, as habilidades, as competências gerais e específicas de Matemática da BNCC e os Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta coleção. Eles estão organizados por volume e por unidade.

6º ANO

UNIDADE 1 – SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E NÚMEROS NATURAIS	
Conteúdos	• Sistema de numeração egípcio • Sistema de numeração romano • Sistema de numeração indo-arábico • Ordens e classes dos números naturais no sistema de numeração decimal • Números naturais (representação na reta numérica, comparação e ordenação) • Operações com números naturais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada) • Propriedades das operações com números naturais • Arredondamentos e estimativas • Expressões numéricas envolvendo números naturais
Habilidades	EF06MA01, EF06MA02, EF06MA03, EF06MA12 e EF06MA14.
Competências gerais	1, 2, 7 e 9.
Competências específicas	1, 2, 3 e 7.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente e Economia.

UNIDADE 2 – GEOMETRIA	
Conteúdos	• Ponto, reta e plano – conceito, representação e nomenclatura • Semirretas • Segmentos de reta • Ponto médio • Ângulos – conceito, representação e classificação • Posições relativas entre retas no plano • Classificação de figuras geométricas planas • Classificação de figuras geométricas não planas • Polígonos e seus elementos • Classificação de triângulos • Classificação de quadriláteros • Poliedros, classificações e seus elementos • Relação de Euler • Não poliedros
Habilidades	EF06MA17, EF06MA18, EF06MA19, EF06MA20, EF06MA25, EF06MA26 e EF06MA27.
Competências gerais	2, 4 e 9.
Competências específicas	1, 2, 7 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Economia, Cidadania e Civismo e Multiculturalismo.

UNIDADE 3 – DIVISIBILIDADE	
Conteúdos	• Sequências numéricas • Múltiplos de um número natural • Divisores de um número natural • Relações entre múltiplo e divisor • Critérios de divisibilidade • Números primos e números compostos • Decomposição em fatores primos
Habilidades	EF06MA04, EF06MA05, EF06MA06 e EF06MA34.
Competências gerais	7, 8 e 9.
Competências específicas	3 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Cidadania e Civismo e Multiculturalismo.

UNIDADE 4 – LOCALIZAÇÃO, SEMELHANÇA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	
Conteúdos	• Localização • Localização de pontos • Plano cartesiano • Pares ordenados no plano cartesiano • Localização de vértices de polígonos no plano cartesiano • Deslocamento no plano cartesiano • Figuras semelhantes • Ampliação, redução e reprodução de figuras na malha quadriculada • Ampliação e redução de figuras no plano cartesiano • Ampliação, redução e deformação de figuras em *software* • Construção de retas paralelas e perpendiculares com régua e esquadro ou par de esquadros • Construção de quadriláteros com régua e esquadro e com *software* de geometria dinâmica
Habilidades	EF06MA16, EF06MA21, EF06MA22 e EF06MA23.
Competências gerais	8, 9 e 10.
Competência específica	8
Tema Contemporâneo Transversal	Cidadania e Civismo

UNIDADE 5 – NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA FRACIONÁRIA	
Conteúdos	• Números racionais positivos na forma fracionária (leitura e escrita) • Situações que envolvem frações • Tipos de fração • Números mistos • Fração de um número • Frações equivalentes • Simplificação e comparação de frações • Operações com frações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada • Porcentagem
Habilidades	EF06MA07, EF06MA08, EF06MA09, EF06MA10, EF06MA13, EF06MA14 e EF06MA15.
Competências gerais	2, 7 e 9.
Competências específicas	1, 3, 4 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente e Saúde.

UNIDADE 6 – NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA DECIMAL	
Conteúdos	• Números racionais positivos na forma decimal: leitura e representação • Frações decimais • Transformações que envolvem números na forma decimal e frações • Números na forma decimal equivalentes • Comparação de números na forma decimal • Operações com números na forma decimal: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada • Porcentagem
Habilidades	EF06MA01, EF06MA02, EF06MA08, EF06MA11, EF06MA13 e EF06MA14.
Competências gerais	2, 9 e 10.
Competência específica	3
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia e Ciência e Tecnologia.

UNIDADE 7 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	
Conteúdos	• Conceitos iniciais de probabilidade – experimento aleatório, espaço amostral e evento • Cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento • Etapas e elementos de uma pesquisa estatística • Tabelas e gráficos • Fluxogramas, organogramas e infográficos
Habilidades	EF06MA30, EF06MA31, EF06MA32, EF06MA33 e EF06MA34.
Competências gerais	1, 5 e 9.
Competências específicas	5 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Cidadania e Civismo e Multiculturalismo.

UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS	
Conteúdos	• Grandezas e medidas • Sistema Internacional de Unidades • Medidas de comprimento, de área, de volume, de capacidade, de massa, de temperatura e de tempo • Transformações entre unidades de medida de uma mesma grandeza • Perímetro de uma figura plana • Área de um retângulo • Área de um triângulo • Volume do bloco retangular • Relação entre volume e capacidade • Vistas e plantas baixas • Escalas
Habilidades	EF06MA24, EF06MA28 e EF06MA29.
Competências gerais	6, 7, 8, 9 e 10.
Competências específicas	1, 2, 3, 6, 7 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia, Multiculturalismo e Ciência e Tecnologia.

7º ANO

UNIDADE 1 – NÚMEROS	
Conteúdos	• Múltiplos • Divisores • Divisibilidade • Mínimo múltiplo comum • Máximo divisor comum • Conjunto dos números inteiros • Representação dos números inteiros na reta numérica • Comparação e ordenação de números inteiros • Módulo (ou valor absoluto) de um número inteiro • Oposto (ou simétrico) de um número inteiro • Operações com números inteiros: adição, subtração, multiplicação e divisão • Propriedades da adição e da multiplicação de números inteiros • Operações inversas • Expressões numéricas envolvendo números inteiros
Habilidades	EF07MA01, EF07MA03 e EF07MA04.
Competência geral	9
Competências específicas	1 e 4.
Tema Contemporâneo Transversal	Meio Ambiente

UNIDADE 2 – NÚMEROS RACIONAIS	
Conteúdos	• Números racionais nas representações fracionária e decimal • Conjunto dos números racionais • Representação dos números racionais na reta numérica • Representação decimal de números racionais: finita ou infinita e periódica • Módulo e simétrico de um número racional • Comparação de números racionais • Operações com números racionais • Relação fundamental da subtração • Números inversos • Relação fundamental da divisão • Expressões numéricas envolvendo números racionais
Habilidades	EF07MA05, EF07MA07, EF07MA08, EF07MA09, EF07MA10, EF07MA11 e EF07MA12.
Competências gerais	7, 8, 9 e 10.
Competências específicas	3, 5 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente e Ciência e Tecnologia.

UNIDADE 3 – FIGURAS GEOMÉTRICAS	
Conteúdos	• Ângulos • Grau e submúltiplos do grau • Construção de ângulos com régua e transferidor • Adição, subtração, multiplicação e divisão com medidas de ângulos • Ângulos congruentes, adjacentes, consecutivos, complementares e suplementares • Ângulos opostos pelo vértice • Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal • Elementos dos polígonos • Diagonais dos polígonos • Ângulos externos e internos dos polígonos • Condição de existência de um triângulo • Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo • Soma das medidas dos ângulos internos e externos de polígonos • Classificação dos triângulos quanto aos lados e aos ângulos • Construção de triângulos com régua e compasso • Construção de polígonos regulares com régua e transferidor
Habilidades	EF07MA23, EF07MA24, EF07MA25, EF07MA26, EF07MA27 e EF07MA28.
Competência geral	2
Competências específicas	3, 4 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Multiculturalismo e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 4 – INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA	
Conteúdos	• Introdução às expressões algébricas • Termos de uma expressão algébrica • Simplificação de uma expressão algébrica • Sequências e expressões algébricas • Solução ou raiz de uma equação • Conjunto universo e conjunto solução de uma equação • Equações do 1º grau com uma incógnita • Equações com duas incógnitas
Habilidades	EF07MA13, EF07MA14, EF07MA15, EF07MA16 e EF07MA18.
Competências gerais	4, 6, 8, 9 e 10.
Competência específica	3
Temas Contemporâneos Transversais	Economia e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 5 – PROPORCIONALIDADE E PORCENTAGEM	
Conteúdos	• Razão • Proporção • Sequências diretamente e inversamente proporcionais • Grandezas diretamente e inversamente proporcionais • Regra de três • Porcentagem envolvendo números na forma fracionária, na forma decimal e cálculo mental • Porcentagem e proporcionalidade • Acréscimos e decréscimos
Habilidades	EF07MA02, EF07MA13 e EF07MA17.
Competências gerais	2, 7, 9 e 10.
Competências específicas	3, 5 e 6.
Tema Contemporâneo Transversal	Meio Ambiente

UNIDADE 6 – CIRCUNFERÊNCIA, CÍRCULO E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	
Conteúdos	• Circunferência • Elementos de uma circunferência: raio, corda, diâmetro, arcos e ângulo central • Medida de comprimento e medida angular de um arco • Cálculo aproximado do número π • Posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências • Círculo e setor circular • Eixo de simetria • Figuras assimétricas • Construções de figuras simétricas • Transformações geométricas: reflexão, rotação e translação • Outras transformações geométricas no plano cartesiano
Habilidades	EF07MA06, EF07MA19, EF07MA20, EF07MA21, EF07MA22 e EF07MA33.
Competência geral	7
Competências específicas	1, 2, 5 e 6.
Tema Contemporâneo Transversal	Meio Ambiente

UNIDADE 7 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	
Conteúdos	• Experimento aleatório, espaço amostral e evento • Cálculo de probabilidade de ocorrência de um evento • Simulações que envolvem cálculo de probabilidade • Pesquisa amostral e pesquisa censitária • Planejamento de pesquisa, coleta e organização dos dados, construção de tabelas e gráficos e interpretação das informações • Tabelas simples e de dupla entrada • Gráficos de barras simples, de barras duplas, de linhas, pictórico e de setores • Cálculo da média aritmética com e sem o uso de planilhas eletrônicas
Habilidades	EF07MA34, EF07MA35, EF07MA36 e EF07MA37.
Competências gerais	4, 8, 9 e 10.
Competências específicas	2, 4, 6 e 7.
Temas Contemporâneos Transversais	Saúde, Cidadania e Civismo e Ciência e Tecnologia.

UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS	
Conteúdos	• Grandezas e medidas • Unidades de medida padronizadas e não padronizadas • Equivalência entre figuras planas • Área e suas unidades de medida padronizadas • Área de quadriláteros e triângulos • Volume de um bloco retangular
Habilidades	EF07MA29, EF07MA30, EF07MA31 e EF07MA32.
Competências gerais	1, 4, 7 e 9.
Competências específicas	1, 3, 4 e 5.

8º ANO

UNIDADE 1 – POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO	
Conteúdos	• Potenciação de números racionais • Propriedades da potenciação • Notação científica • Radiciação de números racionais • Potenciação com expoente fracionário • Propriedades da radiciação
Habilidades	EF08MA01 e EF08MA02.
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	2 e 3.
Temas Contemporâneos Transversais	Saúde, Ciência e Tecnologia, Meio Ambiente e Economia.

UNIDADE 2 – CÁLCULO ALGÉBRICO	
Conteúdos	• Situações que envolvem expressões algébricas • Valor numérico de uma expressão algébrica • Monômios • Operações com monômios: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação • Polinômios • Operações com polinômios: adição, subtração, multiplicação e divisão
Habilidade	EF08MA06
Competências gerais	7, 9 e 10.
Competência específica	3
Tema Contemporâneo Transversal	Economia

UNIDADE 3 – EQUAÇÕES E SISTEMAS	
Conteúdos	• Equações do 1º grau com uma incógnita • Fração geratriz de uma dízima periódica • Equações do 1º grau com duas incógnitas • Resolução gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas • Equações do 2º grau na forma $ax^2 = b$ • Resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$ • Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas • Resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas • Análise da solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas por meio de representação gráfica • Classificação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas em: SPD, SI ou SPI
Habilidades	EF08MA05, EF08MA07, EF08MA08 e EF08MA09.
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	1, 3, 5 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Cidadania e Civismo, Ciência e Tecnologia e Saúde.

UNIDADE 4 – TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS	
Conteúdos	• Elementos e classificação dos triângulos • Condição de existência ou desigualdade triangular • Relação entre um ângulo externo e dois ângulos não adjacentes • Cevianas de um triângulo • Mediatriz do lado de um triângulo • Pontos notáveis do triângulo: ortocentro, baricentro, incentro e circuncentro • Casos de congruência de triângulos • Elementos de um quadrilátero • Classificação dos quadriláteros • Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo • Paralelogramos: classificação e propriedades • Trapézios: classificação e propriedades
Habilidade	EF08MA14
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	3 e 7.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 5 – SEQUÊNCIAS E PROPORCIONALIDADE	
Conteúdos	• Sequências recursivas e não recursivas • Termos de uma sequência • Grandezas direta e inversamente proporcionais • Constante de proporcionalidade • Grandezas não proporcionais
Habilidades	EF08MA10, EF08MA11, EF08MA12 e EF08MA13.
Competências gerais	3, 7, 8 e 9.
Competências específicas	2 e 7.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Cidadania e Civismo e Multiculturalismo.

UNIDADE 6 – CONSTRUÇÕES E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	
Conteúdos	• Conceito e construção de bissetriz de um ângulo e de mediatriz de um segmento com régua e compasso • Construção de ângulos de 30º, 45º, 60º e 90º com régua e compasso • Polígonos regulares inscritos em uma circunferência • Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência • Construção de polígonos regulares (triângulo equilátero, quadrado e octógono regular) inscritos em uma circunferência, com o auxílio de régua e compasso • Construção de polígonos regulares (pentágono regular, dodecágono regular e hexágono regular) inscritos em uma circunferência pelo ângulo central • Isometrias • Transformações geométricas por reflexão, translação e rotação
Habilidades	EF08MA15, EF08MA16, EF08MA17 e EF08MA18.
Competência geral	7
Competência específica	6
Temas Contemporâneos Transversais	Ciência e Tecnologia e Multiculturalismo.

UNIDADE 7 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	
Conteúdos	• Árvore de possibilidades • Princípio fundamental da contagem • Conceitos iniciais de probabilidade: experimento aleatório, espaço amostral e evento • Cálculo da probabilidade de um evento • Eventos complementares • Medidas de tendência central: média aritmética, média aritmética ponderada, mediana e moda • Medidas de dispersão: amplitude, desvio, variância e desvio-padrão • Frequência absoluta e frequência relativa • Histograma • Pesquisa amostral e pesquisa censitária • Representação de dados e análise dos diferentes tipos de gráfico • Planejamento e execução de pesquisa amostral
Habilidades	EF08MA03, EF08MA04, EF08MA22, EF08MA23, EF08MA24, EF08MA25, EF08MA26 e EF08MA27.
Competências gerais	6 e 9.
Competências específicas	3, 4 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Ciência e Tecnologia e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS	
Conteúdos	• Área de figuras planas • Ideias associadas a volume e capacidade • Volume de um bloco retangular • Volume de um cilindro
Habilidades	EF08MA19, EF08MA20 e EF08MA21.
Competências gerais	5, 7, 8 e 9.
Competência específica	7
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia, Saúde e Ciência e Tecnologia.

9º ANO

UNIDADE 1 – CONJUNTOS NUMÉRICOS, POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO	
Conteúdos	• Conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais) • Representação, ordenação e comparação dos números reais na reta numérica • Potenciação com expoentes inteiros e suas propriedades • Notação científica • Radiciação e suas propriedades • Comparação entre radicais • Operação com radicais • Racionalização de denominadores • Potência de radicais • Potência de expoente racional e suas propriedades
Habilidades	EF09MA02, EF09MA03 e EF09MA04.
Competências gerais	7 e 9.
Competência específica	3
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Cidadania e Civismo, Ciência e Tecnologia e Economia.

UNIDADE 2 – RAZÃO, PROPORÇÃO E MATEMÁTICA FINANCEIRA	
Conteúdos	• Razão • Proporção • Divisão em partes proporcionais • Regra de três simples e regra de três composta • Porcentagem • Descontos e acréscimos sucessivos • Juros
Habilidades	EF09MA05, EF09MA07 e EF09MA08.
Competências gerais	1, 5, 8 e 9.
Competência específica	3
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 3 – RETAS E ÂNGULOS, SEMELHANÇA E TRIÂNGULO RETÂNGULO	
Conteúdos	• Retas cortadas por uma transversal • Relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal • Razão e proporção entre segmentos • Feixe de retas paralelas cortadas por transversais • Teorema de Tales • Aplicações do teorema de Tales • Figuras semelhantes • Ampliação e redução de figuras • Semelhança de polígonos • Casos de semelhança de triângulos • Elementos do triângulo retângulo • Medidas no triângulo retângulo • Relações métricas no triângulo retângulo • Teorema de Pitágoras e suas aplicações
Habilidades	EF09MA01, EF09MA10, EF09MA12, EF09MA13 e EF09MA14.
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	1, 3 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Multiculturalismo e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 4 – PRODUTOS NOTÁVEIS, FATORAÇÃO E EQUAÇÕES	
Conteúdos	• Quadrado da soma e da diferença de dois termos • Produto da soma pela diferença de dois termos • Cubo da soma e da diferença de dois termos • Fator comum em evidência • Agrupamento • Diferença de dois quadrados • Trinômio quadrado perfeito • Soma e diferença de dois cubos • Fração algébrica: valor numérico e simplificação • Operações com frações algébricas
Habilidade	EF09MA09
Competências gerais	1, 7 e 9.
Competências específicas	1, 3 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia e Saúde.

UNIDADE 5 – GEOMETRIA	
Conteúdos	• Plano cartesiano • Medida da distância entre dois pontos no plano • Ponto médio de um segmento no plano cartesiano • Perímetro e área de figuras planas representadas no plano cartesiano • Circunferência e arcos de circunferência • Ângulo central e ângulo inscrito em uma circunferência • Relação entre o ângulo inscrito e o arco da circunferência determinado por ele • Relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito • Polígonos regulares • Construção de polígonos regulares com régua e compasso e com *software* de geometria dinâmica • Representação de vistas • Noções de perspectiva
Habilidades	EF09MA11, EF09MA15, EF09MA16 e EF09MA17.
Competências gerais	9 e 10.
Temas Contemporâneos Transversais	Multiculturalismo e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 6 – FUNÇÕES	
Conteúdos	• Noção de função • Lei de formação de uma função • Valor de uma função • Representação gráfica de uma função • Função afim • Casos de função afim • Gráfico de uma função afim • Zero de uma função afim • Variação de uma função afim • Estudo do sinal da função afim • Função linear e proporcionalidade
Habilidades	EF09MA06 e EF09MA08.
Competência geral	8
Competências específicas	3, 6 e 8.

UNIDADE 7 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	
Conteúdos	• Experimento aleatório, espaço amostral e eventos • Probabilidade condicional • Eventos dependentes e independentes • Medidas de tendência central: média, moda e mediana • Medidas de dispersão: amplitude, desvio, variância e desvio-padrão • Análise de tabelas e gráficos estatísticos • Etapas e elementos de uma pesquisa estatística
Habilidades	EF09MA20, EF09MA21, EF09MA22 e EF09MA23.
Competências gerais	1 e 9.
Competências específicas	2, 5 e 6.

UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS	
Conteúdos	• Medidas muito grandes ou muito pequenas • Prefixos do Sistema Internacional (SI) de unidades • Unidades de medida de comprimento • Unidades de medida de massa • Unidades de medida de informática • Volume de prisma, pirâmide, cilindro e cone
Habilidades	EF09MA18 e EF09MA19.
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	3, 4, 7 e 8.

O MANUAL DO PROFESSOR

O Manual do Professor dispõe seu conteúdo ao redor da imagem reduzida do Livro do Estudante. Esse formato facilita a análise e a integração das orientações, situadas e contextualizadas próximas aos textos, às imagens, às atividades e aos demais recursos presentes no livro didático.

Nesta unidade...

Listas com as competências gerais e específicas de Matemática, os Temas Contemporâneos Transversais e as habilidades da BNCC desenvolvidos na unidade.

Primeiras ideias

Comentários sobre a abertura da unidade e as respostas das questões propostas.

Sobre a unidade

Texto que apresenta e descreve o tema a ser desenvolvido na unidade, mostrando o que se espera que os estudantes aprendam e como os objetivos e a justificativa da unidade estão articulados.

Capítulo

Apresenta uma lista com os principais conteúdos do capítulo, os objetivos do capítulo e a justificativa da pertinência desses objetivos.

Temas

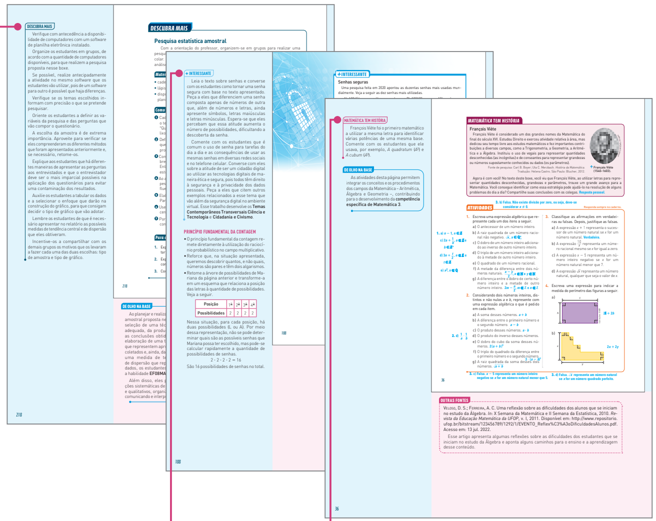
Orientações para a abordagem e o encaminhamento dos conteúdos propostos. Em alguns momentos, constam respostas das atividades propostas.

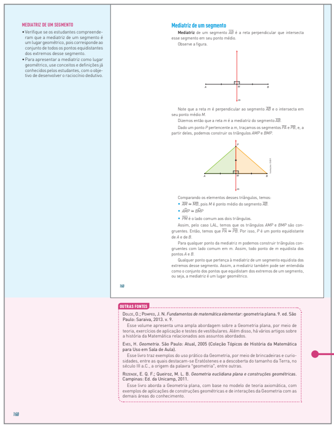
(In)formação

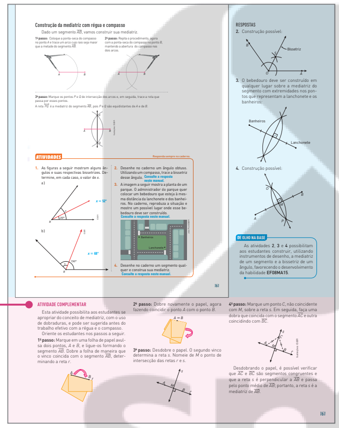
Textos para a formação do professor que podem subsidiar o trabalho com temas específicos.

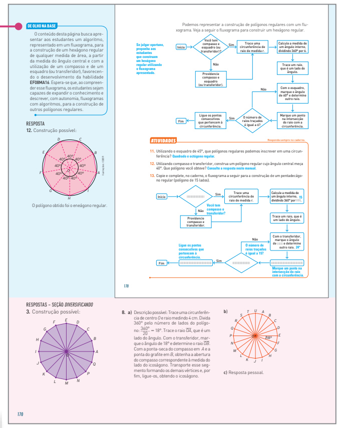
Descubra mais, +Interessante e Matemática tem história

Comentários que subsidiam o trabalho com os boxes presentes no Livro do Estudante.









Outras fontes

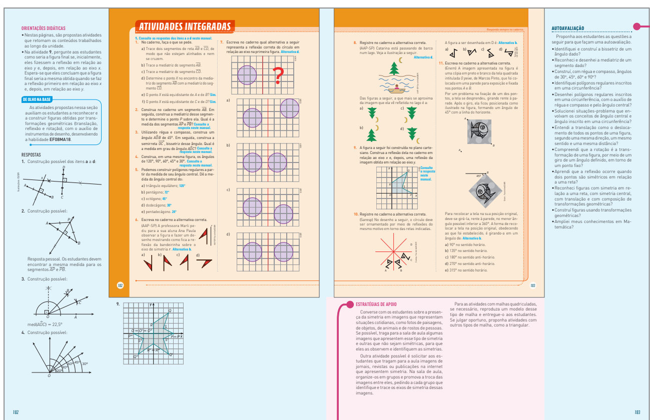
Sugestões para o professor de textos, livros, *sites* e vídeos que podem subsidiar o trabalho com temas específicos.

Atividade complementar

Proposta de atividades extras para serem realizadas com os estudantes.

De olho na Base

Indica e comenta a habilidade e/ou a competência da BNCC que está relacionada ao conteúdo trabalhado.



Autoavaliação

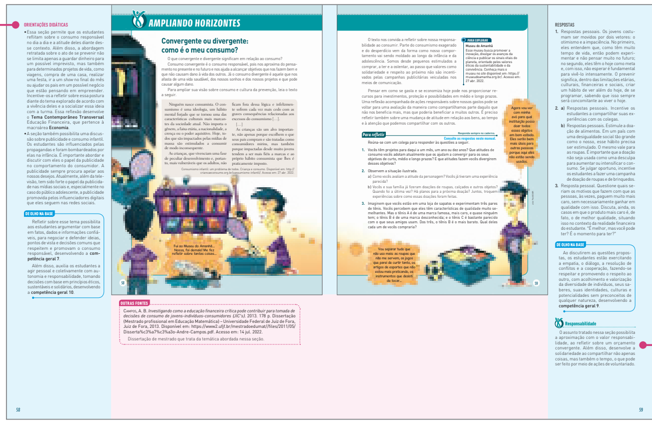
Questões para que os estudantes façam uma autoavaliação do aprendizado.

Estratégias de apoio

Nas seções *Diversificando* e *Atividades integradas*, são apresentadas sugestões de outras abordagens para apoiar estudantes com eventuais dificuldades.

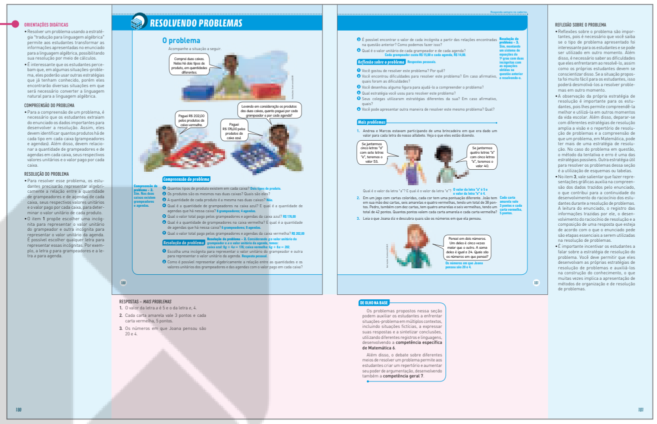
Seções

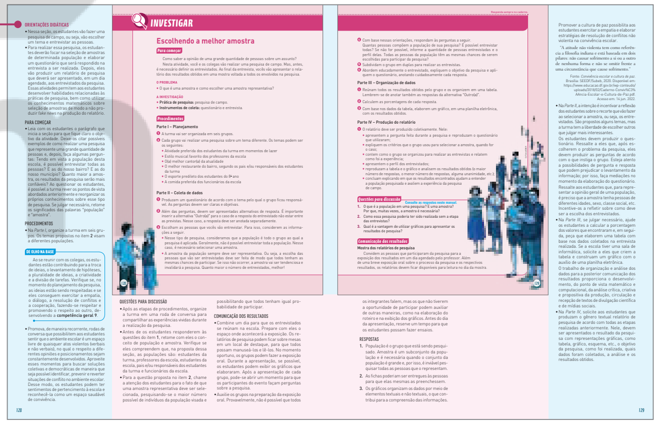
Traz algumas orientações didáticas para o trabalho com essas seções, com comentários e eventuais respostas.



Valor

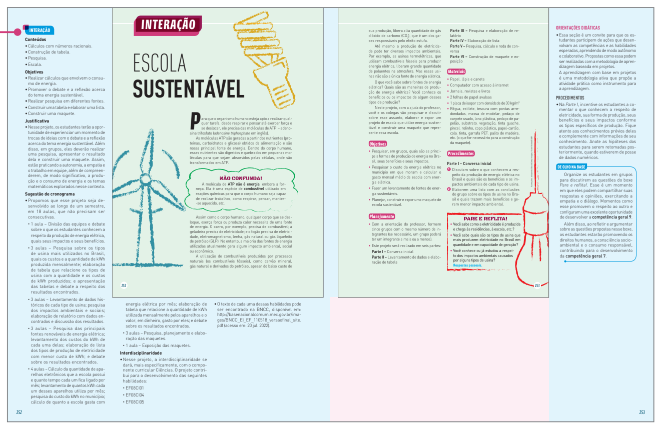
O ícone sinaliza o valor trabalhado naquele momento, sobre o qual os estudantes vão refletir.





Interação

Apresenta orientações didáticas para a condução da seção. Além disso, traz uma proposta de cronograma, com a indicação do número de aulas a serem trabalhadas na seção, e aponta a abordagem interdisciplinar, demonstrando as habilidades trabalhadas de outro(s) componente(s) curricular(es).



BIBLIOGRAFIA COMENTADA

Bacich, L.; Moran, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

Essa obra analisa por que e para que usar metodologias ativas, cujo foco é a participação efetiva dos estudantes na construção do conhecimento e no desenvolvimento de competências. Segundo os autores, a aplicação inovadora de tais metodologias na educação favorece a aprendizagem, levando em consideração o ritmo, o tempo e o estilo de cada estudante, por meio de diferentes atividades e de compartilhamento de informações, dentro e fora da sala de aula, com mediação docente e incorporação de recursos digitais.

Boaler, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Tradução: Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2018. (Série Desafios da Educação).

A autora apresenta razões pelas quais a Matemática se tornou uma fonte de experiências negativas para estudantes na Educação Básica. Com base em sua extensa pesquisa e nas descobertas recentes da neurociência, ela analisa como professores, gestores e pais podem auxiliar os estudantes a transformar sua experiência com a Matemática ao desenvolver neles uma mentalidade de crescimento. Com exemplos práticos, o livro propõe técnicas e atividades que podem ser implementadas na escola para tornar a aprendizagem da Matemática mais significativa e acessível a todos os estudantes.

Brackmann, C. P. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica*. 2017. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias da Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208. Acesso em: 17 jun. 2022.

O autor trata do pensamento computacional como uma abordagem de ensino que utiliza técnicas oriundas da Ciência da Computação.

Brasil. *Constituição* (1988). Constituição da República Federativa do Brasil: texto constitucional promulgado em 5 de outubro de 1988, com as alterações adotadas pelas Emendas Constitucionais n. 1/1992 a 99/2017, pelo Decreto Legislativo n. 186/2008 e pelas Emendas Constitucionais de Revisão n. 1 a 6/1994. 53. ed. Brasília: Edições Câmara, 2018.

Nesse documento encontram-se os itens da Constituição brasileira que deram origem à Lei de Diretrizes e Bases de 1996, que, por sua vez, estabelece os fundamentos da atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC), cuja última versão, até a publicação deste material, foi apresentada em 2018.

Brasil. Lei n. 9 394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: Diário Oficial da União, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm. Acesso em: 17 jun. 2022.

O documento, que contribuiu para a posterior elaboração da BNCC, estabelece as competências e as habilidades para a formação dos estudantes diante dos desafios do mundo contemporâneo.

Brasil. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de avaliação de Matemática – Pisa 2012*. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) traz informações sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária de 15 anos. Nesse documento, é possível conhecer a matriz de avaliação de Matemática do programa.

Brasil. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de referência Enem*. Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) é uma prova do governo federal que avalia o desempenho individual dos participantes. A matriz de referência do Enem apresenta as competências e as habilidades que são exigidas no exame.

Brasil. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matrizes de referência de Matemática do Saeb*. Brasília: Inep, 2022.
Esse documento apresenta as competências e as habilidades que se espera que os participantes das avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) tenham desenvolvido na etapa da Educação Básica.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.
De caráter normativo, esse documento define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e das modalidades da Educação Básica.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Competências socioemocionais como fator de proteção à saúde mental e ao* bullying. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/195-competencias-socioemocionais-como-fator-de-protecao-a-saude-mental-e-ao-bullying. Acesso em: 17 jun. 2022.
As competências socioemocionais, presentes no contexto escolar, estão de acordo com as novas diretrizes propostas pela BNCC. No contexto da educação para o século XXI, os estudantes devem se preparar para além das competências cognitivas, mantendo a inter-relação dos conteúdos, por meio do gerenciamento das emoções, para que possam resolver problemas em todas as áreas que a vida prática venha a exigir deles.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica*. Brasília: MEC/SEB/Dicei, 2013.
Esse documento traz as diretrizes que estabelecem a base nacional comum, responsável por orientar a organização, a articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas das redes de ensino brasileiras.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Ensino Fundamental de nove anos*: orientações para a inclusão da criança de seis anos de idade. Brasília: MEC/SEB, 2007.
O documento foi elaborado com base no diálogo com gestores dos sistemas de ensino e tem como propósito desenvolver uma metodologia de trabalho voltada à ampliação do programa de Ensino Fundamental para alunos de 6 anos de idade.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.
Esse documento explicita a relação entre os diferentes componentes curriculares e as situações vivenciadas pelos estudantes. O texto considera ainda os contextos escolar e social na formação para o trabalho, a cidadania e a democracia, respeitando as características regionais e locais da cultura e da economia e seu impacto na vida dos estudantes.

Bruner, J. S. *O processo da educação*. 3. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1973.
Tendo em vista a reforma curricular na área da educação, o autor mostra nesse livro que os conceitos básicos da ciência e das humanidades podem ser ensinados a crianças desde muito pequenas.

Bussab, W. O.; Morettin, P. A. *Estatística básica*. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.
O livro é dividido em três partes: a análise de dados unidimensionais e bidimensionais, os conceitos básicos de probabilidades e de variáveis aleatórias e os tópicos principais da inferência estatística, além de temas especiais, como regressão linear simples. Em todos os capítulos, traz uma seção que ensina a aplicar a teoria por meio de *softwares*.

Coll, C. *Psicologia e currículo*: uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar. São Paulo: Ática, 2000.
Esse livro apresenta um modelo de projeto curricular que orienta a elaboração de propostas curriculares na educação escolar, abordando desde as relações entre aprendizagem, desenvolvimento e educação até as funções do currículo no planejamento de ensino.

Cruz, C. *Competências e habilidades*: da proposta à prática. São Paulo: Loyola, 2001.
Nesse livro, o autor explica a diferença do que se entende por competência e habilidade e a relação entre essas ideias. O texto fornece subsídios de como colocar em prática o ensino por meio de competências e habilidades.

Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA). 1990. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei8069_02.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.
Esse é o principal documento brasileiro que descreve os direitos e os deveres de crianças e jovens, em seu art. 2º, e considera criança "a pessoa até doze anos de idade incompletos, e adolescente aquela entre doze e dezoito anos de idade" (ECA, p. 1).

Eves, H. *Introdução à história da Matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2011.
Nesse livro, uma das obras mais completas da área da história da Matemática, o autor descreve a história da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos, além de apresentar recursos pedagógicos e o panorama cultural de cada época abordada.

Fiorin, J. L. *As astúcias da enunciação*: as categorias de pessoa, espaço e tempo. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.
No livro, por meio de exemplos diversos, o autor descreve e analisa como as categorias de pessoa, espaço e tempo se manifestam no discurso e quais são os efeitos de sentido que nele engendram.

Freire, P. *Pedagogia da autonomia*. São Paulo: Paz e Terra, 2005.
Trata-se de uma obra de referência na área da educação, em que o autor, com base no olhar revolucionário e no rigor crítico, reflete sobre o que o ato de ensinar exige de educadores e de educandos.

Gardner, H. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Porto Alegre: Artmed, 1995.
Precursor dos estudos de neurociência, o autor apresenta as ideias fundamentais que desencadeiam uma revolução na forma de compreender a inteligência humana e as possibilidades de sua aplicação na educação, em especial nas escolas ou nas salas de aula nas quais a aprendizagem é pensada com profundidade, para além do estudo superficial de conteúdos, visando a um ensino voltado para a compreensão.

Grover, S.; Pea, R. Computational thinking in K-12: a review of the state of the field. *Educational Researcher*, v. 42, n. 1, p. 38-43, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/258134754_Computational_Thinking_in_K-12_A_Review_of_the_State_of_the_Field. Acesso em: 17 jun. 2022.
Esse artigo reúne relatos da experiência de um curso de formação continuada em pensamento computacional, do Programa Norte-rio-grandense de Pensamento Computacional (PENSA RN), com professores dos anos finais do Ensino Fundamental. Tal experiência permitiu que professores adotassem novas estratégias em seu ambiente de trabalho, elaborando e aplicando práticas educativas integradas ao pensamento computacional na rede de ensino em escolas públicas.

Hattie, J. *Aprendizagem visível para professores*: como maximizar o impacto da aprendizagem. Porto Alegre: Penso, 2017.
Fundamentado em amplas pesquisas com milhões de estudantes ao redor do mundo, o autor explica como é possível maximizar a aprendizagem na escola por meio do que ele define como aprendizagem visível. Nessa obra, ele apresenta conceitos bastante inovadores relacionados à avaliação e ao acompanhamento contínuo da aprendizagem pelo educador e pelo estudante, ensinando como aplicar os princípios da aprendizagem visível em qualquer sala de aula.

Iezzi, G. *et al*. *Fundamentos de Matemática elementar, v. 1*: Conjuntos e funções. São Paulo: Atual, 2013.
Com um total de 11 volumes, essa coleção é consagrada por oferecer aos leitores o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Neste volume são desenvolvidos os conteúdos referentes a conjuntos e funções.

Lima, E. C. de S. *Algumas questões sobre o desenvolvimento do ser humano e a aquisição de conhecimentos na escola*: currículo básico para a escola pública do estado do Paraná. 3. ed. Curitiba: Secretaria de Estado da Educação, 2003.
Esse trabalho foi desenvolvido com base na análise da prática em sala de aula e na reflexão sobre ela, com vistas a uma sociedade mais justa, em que todos tenham acesso ao conhecimento e dele possam se apropriar.

Lopes, A. C. *Políticas de integração curricular*. Rio de Janeiro: EdUERJ, 2008. Disponível em: https://www.eduerj.uerj.br/engine/wp-content/uploads/woocommerce_uploads/2016/01/Pol%C3%ADticas-de-Integra%C3%A7%C3%A3o-Curricular.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.
Nesse livro, a autora analisa a atual política de organização do currículo a partir do entendimento da história do pensamento curricular nas principais organizações curriculares clássicas, que permitem entender os atuais discursos pedagógicos.

Luckesi, C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2018.
O objetivo dessa obra é apresentar estudos sobre avaliação da aprendizagem escolar, bem como proposições para torná-la mais viável e construtiva para estudantes e professores.

Machado, N. J. *Conhecimento e valor*. São Paulo: Moderna, 2004.
Nesse livro, o autor reuniu alguns ensaios referentes ao conhecimento como valor, apresentando textos cuja finalidade maior é a compreensão do valor do conhecimento e da função da educação. Ele afirma que o único caminho para a "distribuição" de conhecimento é, sem dúvida, a educação, e a omissão dos educadores pode provocar o predomínio das perspectivas de outros profissionais, como os economistas, no terreno educacional.

Marques, M. *Teoria da medida*. Campinas: Ed. da Unicamp, 2009.
Nessa obra, o autor apresenta uma série de notas de aulas sobre estudos avançados em teoria de probabilidade e teoria estatística matemática, entre outros, para estudantes de Pós-graduação em Matemática e Estatística. Além disso, traz demonstrações desenvolvidas detalhadamente, visando permitir o aprendizado autossuficiente do leitor.

Mlodinow, L. *A janela de Euclides*: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. Belo Horizonte: Geração, 2010.
Nessa obra, o autor apresenta uma jornada pela Geometria, desde o conceito grego de linhas paralelas até as mais recentes noções de hiperespaço.

Nova Escola. Criança e Adolescente. *21 perguntas e respostas sobre* bullying. 1º ago. 2009. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/336/bullying-escola. Acesso em: 17 jun. 2022.
Nesse artigo, especialistas respondem a 21 perguntas sobre *bullying*, um problema que preocupa pais, professores e gestores.

Oliveira, V. C.; Oliveira, C. P.; Vaz, F. A. *A história da Matemática e o processo de ensino-aprendizagem*. *In*: XX EREMAT – Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. Fundação Universidade Federal do Pampa (Unipampa), Bagé (RS), Brasil, 13-16 nov. 2014. p. 429. Disponível em: https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/PO_oliveira_00971876070.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.
Nesse trabalho, os autores apresentam a utilização da história da Matemática como instrumento de investigação científica no ensino de Matemática. Eles demonstram que tais investigações propiciam aos estudantes momentos de reflexão para o estabelecimento de conexões entre as descobertas, os conhecimentos matemáticos e sua realidade.

Organização Pan-Americana de Saúde (Opas). *Folha informativa sobre covid-19*. Disponível em: https://www.paho.org/pt/covid19. Acesso em: 17 jun. 2022.
Esse documento apresenta diversas informações e atualizações sobre a covid-19 e a pandemia causada pelo novo coronavírus SARS-CoV-2.

Perrenoud, P. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1999.
As competências são enfatizadas pelo sociólogo suíço Philippe Perrenoud ao tratar dos desafios da educação contemporânea. A organização, a administração e o desenvolvimento da aprendizagem, a utilização de novas tecnologias, o trabalho em equipe, o envolvimento dos estudantes em suas aprendizagens e a participação na administração da escola são alguns dos temas abordados.

Piaget, J. *Psicologia e pedagogia*. 9. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2008.
Essa obra é resultado de 40 anos de pesquisas sobre novos métodos psicológicos aplicados à pedagogia. Nela, o autor apresenta as falhas da pedagogia tradicional, excessivamente empírica, e retraça a história das tentativas mais importantes que vêm sendo feitas nesse campo há mais de meio século.

Polya, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
Essa obra aborda a prática de resolver problemas, que implica uma série de procedimentos cognitivos para despertar a curiosidade, a atenção e o interesse pelo trabalho mental, contribuindo para outras atividades da vida.

Rezende, E. Q. F.; Queiroz, M. L. B. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. 2. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2008.
Os autores da obra apresentam as construções geométricas com argumentações lógicas, auxiliando professores e estudantes na resolução de problemas.

Rosenberg, M. *Comunicação não violenta*. Nova edição: Técnicas para aprimorar relacionamentos pessoais e profissionais. São Paulo: Ágora, 2021.
O autor da obra cresceu em um bairro turbulento de Detroit (EUA) e se interessou por novas formas de comunicação para criar alternativas pacíficas de diálogo que amenizassem o clima de violência com o qual convivera. Militante pelos direitos civis, voluntário em abrigos e terapeuta familiar, o autor criou uma organização internacional sem fins lucrativos com pessoas habilitadas a dar treinamentos em comunicação não violenta. O trabalho foi realizado em mais de sessenta países com educadores, profissionais da área de saúde, mediadores, empresários, prisioneiros, guardas, policiais, militares, membros do clero e funcionários públicos.

Ruiz, J. A. L. A internet na cultura juvenil: condicionamentos, significados e usos sociais. Observatório da Juventude na Ibero-América, 1º jun. 2017. Disponível em: https://oji.fundacion-sm.org/a-internet-na-cultura-juvenil-condicionamentos-significados-e-usos-sociais/. Acesso em: 17 jun. 2022.
Nesse artigo, o autor esclarece dois conceitos fundamentais: cultura juvenil e cultura digital. Ele ressalta que a interação dos jovens com todos os meios digitais pode estar impulsionando neles habilidades e potenciais.

Sperandio, D.; Mendes, J. T.; Silva, L. H. M. *Cálculo numérico*: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Pearson, 2006.
Esse livro apresenta os procedimentos mais importantes para a análise de complexos modelos matemáticos, provenientes das mais variadas áreas de conhecimento. Além disso, exercícios ao final de cada capítulo permitem ao leitor testar seus conhecimentos e explorar o conteúdo teórico desenvolvido.

Stein, J. D. A. *A Matemática pode mudar sua vida*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.
Essa obra é um guia prático repleto de orientações sobre como a Matemática pode mudar a vida das pessoas. Utilizando situações suscetíveis à análise da Matemática, o autor traz aplicações matemáticas simples que podem se mostrar muito eficientes na vida financeira, profissional e pessoal de uma pessoa.

Tahan, M. *Matemática divertida e curiosa*. 27. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.
Para mostrar a importância da Matemática, esse livro traz enigmas aritméticos, problemas matemáticos, jogos de engenhosidade, ilusões de ótica, lendas, histórias, piadas, paradoxos geométricos e curiosidades que desafiam a inteligência do leitor.

Van de Walle, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.
Nessa obra, são apresentadas ideias e discussões para orientar os professores de Ensino Fundamental que lecionam esse componente curricular.

Waal, F. de. *A era da empatia*: lições da natureza para uma sociedade mais gentil. São Paulo: Companhia das Letras, 2009.
Tomando como base estudos realizados com macacos-prego e chimpanzés, o autor mostra nessa obra como diversos animais (incluindo os seres humanos), ao longo da evolução, apresentaram uma tendência à empatia, ou seja, à capacidade de se colocar no lugar do próximo.

World Health Organization (WHO). Disponível em: https://www.who.int/pt/. Acesso em: 17 jun. 2022.
Esse *site* apresenta diversas informações e atualizações sobre a pandemia de covid-19, causada pelo novo coronavírus, o SARS-CoV-2.

Zegarelli, M. *Matemática básica e pré-álgebra para leigos*. Rio de Janeiro: Alta Books, 2009.
A obra é um convite ao estudo de muitos temas e conceitos matemáticos, com lições fáceis de acompanhar e uma série de exercícios práticos.

RESOLUÇÕES

UNIDADE 1 – POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

CAPÍTULO 1 – POTENCIAÇÃO

PÁGINA 12 – ATIVIDADES

1. Como cada carro tem 4 rodas e cada roda tem 4 parafusos, cada carro tem 4^2 parafusos, pois $4 \cdot 4 = 4^2$. Como são 4 carros, no total são $4 \cdot 4^2 = 4^3$ parafusos.

Portanto, a quantidade de parafusos pode ser expressa por 4^3, ou seja, 64 parafusos.

2. **a)** $(-0,3)^2 = (-0,3) \cdot (-0,3) = 0,09$

b) $(-6)^{-3} = \left(-\frac{1}{6}\right)^3 = \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{216}$

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^5 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{243}{1\,024}$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

e) $(2,5)^{-3} = \left(\frac{25}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{125}$

f) $(-4,8)^{-2} = \left(-\frac{48}{10}\right)^{-2} = \left(-\frac{24}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{24}\right)^2 =$

$= \left(-\frac{5}{24}\right) \cdot \left(-\frac{5}{24}\right) = \frac{25}{576}$

3. **a)** Pode-se calcular o valor dessa expressão de dois modos:

1º modo:

$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 + (-0,25)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} + \frac{1}{16} = \frac{26}{16} = \frac{13}{8}$

2º modo:

$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 + (-0,25)^2 = (1,25)^2 + (-0,25)^2 = 1,5625 + 0,0625 = 1,625$

b) $(-0,25)^2 : (-0,75)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 : \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} : \frac{9}{16} = \frac{1}{16} \cdot \frac{16}{9} = \frac{1}{9}$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^0 = \frac{4}{1} \cdot 1 = 4$

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 3^3 + 3^2 + 3^1 +$
$+ 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 27 + 9 + 3 + 1 + 3 + 9 + 27 = 79$

5. $(-1)^n + 1^n - [-(1^n)] - 1^n = (-1)^n - [-(1^n)] + 1^n - 1^n =$
$= (-1)^n + 1^n + 0 = (-1)^n + 1$

a) Se n for par, tem-se que $(-1)^n = 1$, então:

$(-1)^n + 1 = 1 + 1 = 2$

b) Se n for ímpar, tem-se que $(-1)^n = -1$, então:

$(-1)^n + 1 = -1 + 1 = 0$

PÁGINA 15 – ATIVIDADES

6. **a)** Verdadeira.

b) Falsa. Correção possível: As potências de base negativa e expoente par são positivas.

c) Verdadeira.

d) Falsa. Correção possível: As potências de base positiva são sempre positivas.

7. **a)** $\left(-\frac{3}{7}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^4 = \left(-\frac{3}{7}\right)^{3+4} = \left(-\frac{3}{7}\right)^7$

b) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-5} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3+(-5)} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{-8}$

c) $2^{-9} : 2 = 2^{-9-1} = 2^{-10}$

d) $\left[(14,9)^{15}\right]^2 = (14,9)^{15 \cdot 2} = 14,9^{30}$

e) $(-1,1) \cdot (-1,1)^{-3} \cdot (-1,1)^{-2} = (-1,1)^{1+(-3)+(-2)} = (-1,1)^{-4}$

f) $\left(\frac{1}{11}\right) \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^{-13} : \left(\frac{1}{11}\right)^{11} = \left(\frac{1}{11}\right)^{1+(-13)-11} = \left(\frac{1}{11}\right)^{-23}$

g) $\left[(10)^{-4}\right]^3 \cdot 10^3 = 10^{-12} \cdot 10^3 = 10^{-12+3} = 10^{-9}$

h) $\left[(0,5)^4 : (0,5)^{-9}\right]^2 : (0,5)^{-5} = \left[(0,5)^{4-(-9)}\right]^2 : (0,5)^{-5} =$
$= \left[(0,5)^{13}\right]^2 : (0,5)^{-5} = (0,5)^{13 \cdot 2} : (0,5)^{-5} : (0,5)^{26} : (0,5)^{-5} =$
$= (0,5)^{26-(-5)} = 0,5^{31}$

i) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^3 : \left(\frac{3}{5}\right)^{-4}\right]^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{3 \cdot (-2)} : \left(\frac{3}{5}\right)^{(-4) \cdot (-2)} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-6} : \left(\frac{3}{5}\right)^8 =$
$= \left(\frac{3}{5}\right)^{-6-8} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-14} = \left(\frac{5}{3}\right)^{14}$

8. **a)** Pela 3ª propriedade da potenciação, o símbolo $\bullet$ deve ser um número que, multiplicado por 6, seja igual a 36.

$$\bullet \cdot 6 = 36$$
$$\bullet = \frac{36}{6}$$
$$\bullet = 6$$

Assim, tem-se: $(4^6)^6 = 4^{6 \cdot 6} = 4^{36}$.

b) Pela 2ª propriedade da potenciação, o símbolo $\bullet$ deve ser um número que, subtraído de 2, seja igual a -3.

$$2 - \bullet = -3$$
$$2 + 3 = \bullet$$
$$5 = \bullet$$

Assim, tem-se: $7^2 : 7^5 = 7^{2-5} = 7^{-3}$.

c) Primeiro escreve-se o número 8 como uma potência de base 2:

$$(2^{\bullet})^1 = 2^3$$

Pela 3ª propriedade da potenciação, o símbolo $\bullet$ deve ser um número que, multiplicado por 1, seja igual a 3, ou seja, $\bullet = 3$.

Assim, tem-se: $(2^3)^1 = 2^{3 \cdot 1} = 2^3$.

d) Pela 1ª propriedade da potenciação, o símbolo $\bullet$ deve ser um número que, adicionado a 7, seja igual a 9.

$$\bullet + 7 = 9$$
$$\bullet = 9 - 7$$
$$\bullet = 2$$

Assim, tem-se: $3^2 \cdot 3^7 = 3^{2+7} = 3^9$.

9. A afirmação é falsa. Correção possível: Para qualquer valor inteiro de n, a expressão $(-5)^{2n}$ é positiva.

10. **a)** $a \cdot b \cdot c = 2^{-3} \cdot 2^2 \cdot 2^5 = 2^{-3+2+5} = 2^4$

b) $a^3 \cdot c^3 = (2^{-3})^3 \cdot (2^5)^3 = 2^{-3 \cdot 3} \cdot 2^{5 \cdot 3} = 2^{-9} \cdot 2^{15} =$
$= 2^{-9+15} = 2^6$

c) $\frac{a \cdot b}{c} = \frac{2^{-3} \cdot 2^2}{2^5} = \frac{2^{-3+2}}{2^5} = \frac{2^{-1}}{2^5} = 2^{-1-5} = 2^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

d) $(b \cdot c) : a = \frac{2^2 \cdot 2^5}{2^{-3}} = \frac{2^{2+5}}{2^{-3}} = \frac{2^7}{2^{-3}} = 2^{7-(-3)} = 2^{7+3} = 2^{10}$

11. a) $7^{3^2} = 7^9 = 7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7 =$
$= 40\,353\,607$

b) $(7^3)^2 = 7^{3\cdot2} = 7^6 = 7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7 =$
$= 117\,649$

c) $2^{4^2} = 2^{16} = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot$
$\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 65\,536$

d) $(2^4)^2 = 2^{4\cdot2} = 2^8 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot$
$\cdot2\cdot2\cdot2 = 256$

12. a) Falsa, pois:

$$(3^5)^2 = 3^5\cdot3^5 = 3^{10}$$

e

$$3^{5^2} = 3^{5\cdot5} = 3^{25}$$

Ou seja, $(3^5)^2 \neq 3^{5^2}$.

b) Falsa, pois:

$$0{,}7^{2^{-1}} = 0{,}7^{\frac{1}{2}}$$

e

$$(0{,}7^2)^{-1} = 0{,}7^{2\cdot(-1)} = 0{,}7^{-2}$$

Ou seja, $0{,}7^{2^{-1}} \neq (0{,}7^2)^{-1}$.

c) Verdadeira, pois:

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

d) Falsa, pois:

$$\left(-\frac{1}{9}\right)^{2+3} = \left(-\frac{1}{9}\right)^5 = -\frac{1}{59\,049}$$

e

$$\left(-\frac{1}{9}\right)^2 + \left(-\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{1}{81} - \frac{1}{729} = \frac{8}{729}$$

Ou seja, $\left(-\frac{1}{9}\right)^{2+3} \neq \left(-\frac{1}{9}\right)^2 + \left(-\frac{1}{9}\right)^3$.

e) Falsa, pois:

$$(5:3)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3} = \frac{25}{9}$$

e

$$5^2\cdot3^2 = 25\cdot9 = 225$$

Ou seja, $(5:3)^2 \neq 5^2\cdot3^2$.

13. Calculando algumas potências de 3, tem-se:

$3^0 = \mathbf{1}$ $\quad 3^7 = 218\mathbf{7}$
$3^1 = \mathbf{3}$ $\quad 3^8 = 656\mathbf{1}$
$3^2 = \mathbf{9}$ $\quad 3^9 = 1968\mathbf{3}$
$3^3 = 2\mathbf{7}$ $\quad 3^{10} = 5904\mathbf{9}$
$3^4 = 8\mathbf{1}$ $\quad 3^{11} = 17714\mathbf{7}$
$3^5 = 24\mathbf{3}$ $\quad 3^{12} = 53144\mathbf{1}$
$3^6 = 72\mathbf{9}$ $\quad 3^{13} = 159432\mathbf{3}$

Observe que, a cada quatro potências, o algarismo da unidade se repete. Pode-se notar também que, em todas as potências cujo expoente é múltiplo de 4, o último algarismo é 1. Como 40 é múltiplo de 4, o resultado de 3^{40} termina com o algarismo 1.

14. a) $9^7 : 9^4 = 9^{7-4} = 9^3$

b) $\left(\frac{3}{7}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^4 : \left(\frac{3}{7}\right)^5 = \left(\frac{3}{7}\right)^{3+4} : \left(\frac{3}{7}\right)^5 =$

$= \left(\frac{3}{7}\right)^7 : \left(\frac{3}{7}\right)^5 = \left(\frac{3}{7}\right)^{7-5} = \left(\frac{3}{7}\right)^2$

c) $\frac{1}{21}\cdot\left(\frac{1}{21}\right)^{-7} : \left(\frac{1}{21}\right)^5 = \left(\frac{1}{21}\right)^{1+(-7)} : \left(\frac{1}{21}\right)^5 =$

$= \left(\frac{1}{21}\right)^{-6} : \left(\frac{1}{21}\right)^5 = \left(\frac{1}{21}\right)^{-6-5} =$

$= \left(\frac{1}{21}\right)^{-11} = 21^{11}$

d) $(10^{-4})^3\cdot10^3 = 10^{(-4)\cdot3}\cdot10^3 =$

$= 10^{-12}\cdot10^3 = 10^{-12+3} = 10^{-9} =$

$= \left(\frac{1}{10}\right)^9$

e) $(5^4 : 5^{-9})^2 : 5^{-5} = (5^{4-(-9)})^2 : 5^{-5} =$

$= (5^{13})^2 : 5^{-5} = 5^{13\cdot2} : 5^{-5} =$

$= 5^{26} : 5^{-5} = 5^{26-(-5)} = 5^{31}$

f) $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^5 : \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right]^3 = \left[\left(\frac{3}{7}\right)^{5-(-1)}\right]^3 =$

$= \left[\left(\frac{3}{7}\right)^6\right]^3 = \left(\frac{3}{7}\right)^{6\cdot3} = \left(\frac{3}{7}\right)^{18}$

g) $\frac{9\cdot81\cdot729}{27} = \frac{3^2\cdot3^4\cdot3^6}{3^3} =$

$= 3^{2+4+6-3} = 3^9$

h) $\frac{a^2\cdot b^4\cdot c^{12}}{(a\cdot b\cdot c)^2} = \frac{a^2\cdot b^4\cdot c^{12}}{a^2\cdot b^2\cdot c^2} =$

$= a^{2-2}\cdot b^{4-2}\cdot c^{12-2} =$

$= a^0\cdot b^2\cdot c^{10} = b^2\cdot c^{10}$

i) $\frac{0{,}1\cdot10^3\cdot(0{,}0001)^2}{1000\cdot0{,}0001\cdot10} =$

$= \frac{10^{-1}\cdot10^3\cdot(10^{-4})^2}{10^3\cdot10^{-4}\cdot10} =$

$= \frac{10^{-1}\cdot10^3\cdot10^{-8}}{10^3\cdot10^{-4}\cdot10} =$

$= \frac{10^{-1+3+(-8)}}{10^{3+(-4)+1}} = \frac{10^{-6}}{10^0} = 10^{-6} = \left(\frac{1}{10}\right)^6$

15. a) $3\,120\,000\,000\,000 = 3{,}12\cdot10^{12}$

b) $0{,}0000124 = 1{,}24\cdot10^{-5}$

c) $4\,200\,000\,000 = 4{,}2\cdot10^9$

d) $0{,}000000000000001445 =$
$= 1{,}445\cdot10^{-15}$

16. a) Sol e o planeta Terra:

$149\,600\,000$ km $= 149\,600\,000\cdot1\,000$ m $=$
$= 149\,600\,000\,000$ m $= 1{,}496\cdot10^{11}$ m

b) Sol e o planeta Marte:

$227\,940\,000$ km $= 227\,940\,000\cdot1\,000$ m $=$
$= 227\,940\,000\,000$ m $= 2{,}2794\cdot10^{11}$ m

c) Sol e o planeta Saturno:

$1\,429\,400\,000$ km $= 1\,429\,400\,000\cdot1\,000$ m $=$
$= 1\,429\,400\,000\,000$ m $= 1{,}4294\cdot10^{12}$ m

d) Sol e o planeta Júpiter:

$778\,330\,000$ km $= 778\,330\,000\cdot1\,000$ m $=$
$= 778\,330\,000\,000$ m $= 7{,}7833\cdot10^{11}$ m

17. a) $100\,000\,000\,000$ de neurônios $=$
$= 1{,}0\cdot10^{11}$ neurônios

b) $400\,000\,000\,000$ de estrelas $=$
$= 4{,}0\cdot10^{11}$ estrelas

c) $0{,}00000025$ m $= 2{,}5\cdot10^{-7}$ m

d) $9\,460\,000\,000\,000$ km $= 9{,}46\cdot10^{12}$ km

18. a) $(2{,}4\cdot10^{-4}) : (1{,}2\cdot10^7) = \frac{2{,}4\cdot10^{-4}}{1{,}2\cdot10^7} =$

$= 2\cdot10^{-4-7} = 2\cdot10^{-11}$

b) $(0{,}3\cdot10^3)\cdot(1{,}4\cdot10^{-2}) =$
$= 0{,}3\cdot1{,}4\cdot10^3\cdot10^{-2} =$
$= 0{,}42\cdot10^{3-2} = 0{,}42\cdot10^1 = 4{,}2\cdot10^0$

c) $(6{,}4\cdot10^4)^2 = 6{,}4\cdot10^4\cdot6{,}4\cdot10^4 =$
$= 6{,}4\cdot6{,}4\cdot10^4\cdot10^4 = 40{,}96\cdot10^{4+4} =$
$= 40{,}96\cdot10^8 = 4{,}096\cdot10^9$

19. a) $1\cdot10^{-3} = 0{,}001$
$1\cdot10^2 = 100$
$0{,}01 < 100$
$1\cdot10^{-3} < 1\cdot10^2$

b) $2{,}1\cdot10^{-3} = 0{,}0021$
$2{,}01\cdot10^{-3} = 0{,}00201$
$0{,}0021 > 0{,}00201$
$2{,}1\cdot10^{-3} > 2{,}01\cdot10^{-3}$

c) $4{,}01\cdot10^{-3} = 0{,}00401$
$4{,}001\cdot10^2 = 400{,}1$
$0{,}00401 < 400{,}1$
$4{,}01\cdot10^{-3} < 4{,}001\cdot10^2$

d) $9{,}5\cdot10^{-3} = 0{,}0095$
$9{,}05\cdot10^{-4} = 0{,}000905$
$0{,}0095 > 0{,}000905$
$9{,}5\cdot10^{-3} > 9{,}05\cdot10^{-4}$

PÁGINA 17 – DIVERSIFICANDO

1. Calculando a medida do lado:

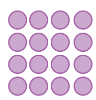
$$\frac{160}{4} = 40$$

Então, a medida da área é:

$$(40)^2 = 1\,600$$

Portanto, a medida da área desse terreno é $1\,600$ m^2.

2. a)



ID/BR

b) Quantidade de círculos da 1ª figura:

$$1^2 = 1$$

Quantidade de círculos da 2ª figura:

$$2^2 = 4$$

Quantidade de círculos da 3ª figura:

$$3^2 = 9$$

Quantidade de círculos da 4ª figura:

$$4^2 = 16$$

Quantidade de círculos da 5ª figura:

$$5^2 = 25$$

Quantidade de círculos da 6ª figura:

$$6^2 = 36$$

3. De acordo com o enunciado, tem-se:
1º dia: $3 = 3^1$
2º dia: $3 \cdot 3 = 3^2$
3º dia: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$
4º dia: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$
Portanto, 81 pessoas receberam a mensagem no quarto dia.

4. Se a medida do lado do quadrado menor é metade da medida do lado do quadrado maior, então a medida do lado do quadrado menor é 1,5 cm $\left(\frac{3}{2} = 1{,}5\right)$. Assim, tem-se:

- medida da área do quadrado maior: 9 cm², pois, $3^2 = 9$;
- medida da área do quadrado menor: 2,25 cm², pois $1{,}5^2 = 2{,}25$.

Logo, a medida da área pintada de azul é a diferença entre as medidas das duas áreas:
$$9 - 2{,}25 = 6{,}75$$
Portanto, a medida da área da região pintada de azul é 6,75 cm².

5. Alternativa **b**.
Sabendo que $125 = 5^3$, então:
$$(125)^{-15} = (5^3)^{-15} = 5^{3 \cdot (-15)} = 5^{-45}$$
Portanto, $(125)^{-15} = 5^{-45}$.

6. $0{,}000000001 \cdot 10\,000 = 10^{-9} \cdot 10^4 = 10^{-5}$
Portanto, a medida da massa dessa colônia de bactérias é 10^{-5} g.

7. Alternativa **c**.
$86\,000\,000\,000 = 8{,}6 \cdot 10^{10}$

8. **a)** Considerando x a quantidade de litros de água contaminada por semana, tem-se:

Dejetos (em litro)	Água contaminada (em litro)
10	10^7
100	x

Considerando que quanto maior a quantidade de dejetos maior a quantidade de água contaminada, tem-se:
$$\frac{10}{100} = \frac{10^7}{x}$$
$$10x = 10^7 \cdot 100$$
$$x = \frac{10^7 \cdot 10^2}{10}$$
$$x = 10^{7+2-1}$$
$$x = 10^8$$
Logo, 10^8 litros de água potável são contaminados por semana por essa fábrica.

b) Escreve-se uma sequência para representar a distância percorrida por dia. Assim, o 1º termo corresponde à distância inicial, o 2º termo, à distância do 2º dia, ou seja, ao dobro da distância inicial, o 3º termo, à distância do 3º dia, ou seja, ao dobro da distância do 2º termo, e assim por diante.
Encontra-se a medida da distância percorrida em cada um dos 7 dias:

Dia	Medida da distância (em metro)
1	$100 = 10^2$
2	$2 \cdot 10^2$
3	$2 \cdot 2 \cdot 10^2 = 2^2 \cdot 10^2 = 4 \cdot 10^2$
4	$2 \cdot 2^2 \cdot 10^2 = 2^3 \cdot 10^2 = 8 \cdot 10^2$
5	$2 \cdot 2^3 \cdot 10^2 = 2^4 \cdot 10^2 = 16 \cdot 10^2$
6	$2 \cdot 2^4 \cdot 10^2 = 2^5 \cdot 10^2 = 32 \cdot 10^2$
7	$2 \cdot 2^5 \cdot 10^2 = 2^6 \cdot 10^2 = 64 \cdot 10^2$

Adiciona-se todas as distâncias:
$$10^2 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10^2 + 32 \cdot 10^2 + 64 \cdot 10^2 =$$
$$= (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64) \cdot 10^2 = 127 \cdot 10^2 = 1{,}27 \cdot 10^4$$
Portanto, vou correr $1{,}27 \cdot 10^4$ metros em 7 dias.

9. 299 792 447 m/s $= 2{,}99792447 \cdot 10^8$ m/s $\simeq 3 \cdot 10^8$ m/s

10. Seja x o valor procurado, temos:
$$10^{-4} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4} \cdot x = 10$$
$$10^{-4-4-4} \cdot x = 10$$
$$10^{-12} \cdot x = 10$$
$$x = \frac{10}{10^{-12}}$$
$$x = 10^{1-(-12)}$$
$$x = 10^{1+12}$$
$$x = 10^{13}$$

11. $$y = \frac{10^{11} \cdot 5^{11+11}}{(5 \cdot 100)^9} = \frac{10^{11} \cdot 5^{22}}{5^9 \cdot 100^9} = \frac{10^{11} \cdot 5^{22}}{5^9 \cdot (10^2)^9} = \frac{10^{11} \cdot 5^{22}}{5^9 \cdot 10^{18}} =$$
$$= 10^{11-18} \cdot 5^{22-9} = 10^{-7} \cdot 5^{13} = \frac{5^{13}}{10^7} = \frac{5^{13}}{(5 \cdot 2)^7} = \frac{5^{13}}{5^7 \cdot 2^7} = \frac{5^{13-7}}{2^7} =$$
$$= \frac{5^6}{2^7} = \frac{15\,625}{128} = 122{,}0703125$$

12. $$\frac{2 \cdot 3^{-2}(2^{-1} \cdot 3^2)^5 \cdot (2 \cdot 3^{-1})^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-1} \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-5} \cdot 3^{10} \cdot 2^2 \cdot 3^{-2}}{2^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-1} \cdot 3} =$$
$$= \frac{2^{1+(-5)+2} \cdot 3^{-2+10+(-2)}}{2^{2+2+(-1)} \cdot 3^{1+(-2)+1}} = \frac{2^{-2} \cdot 3^6}{2^3 \cdot 3^0} = \frac{2^{-2} \cdot 3^6}{2^3 \cdot 1} =$$
$$= \frac{2^{-2}}{2^3} \cdot 3^6 = \frac{3^6}{2^3 \cdot 2^2} = \frac{3^6}{2^{3+2}} = \frac{3^6}{2^5} = \frac{729}{32}$$

13. $$\frac{5^{x+1} + 5^{x+2}}{5^{2-x} - 5^{1-x}} = \frac{5^x \cdot 5^1 + 5^x \cdot 5^2}{5^2 \cdot 5^{-x} - 5^1 \cdot 5^{-x}} = \frac{5^x \cdot (5 + 5^2)}{5^{-x} \cdot (5^2 - 5)} =$$
$$= \frac{5^x \cdot (5 + 25)}{5^{-x} \cdot (25 - 5)} = \frac{30 \cdot 5^x}{20 \cdot 5^{-x}} = \frac{3}{2} \cdot 5^x \cdot 5^x = \frac{3}{2} \cdot 5^{2x}$$

CAPÍTULO 2 – RADICIAÇÃO

PÁGINA 22 – ATIVIDADES

1. **a)** Fatorando o número 1 024, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 1\,024 & 2 \\ 512 & 2 \\ 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$1\,024 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)^2 = 32^2$$
Portanto, $\sqrt{1\,024} = 32$, pois $32^2 = 1\,024$.

b) $\sqrt{\frac{81}{625}} = \frac{9}{25}$, pois $\left(\frac{9}{25}\right)^2 = \frac{9^2}{25^2} = \frac{81}{625}$.

c) $\sqrt{0{,}0144} = \sqrt{\frac{144}{10\,000}} = \frac{12}{100} = 0{,}12$, pois $(0{,}12)^2 = \left(\frac{12}{100}\right)^2 =$
$= \frac{144}{10\,000} = 0{,}0144$.

d) Fatorando o número 196, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 196 & 2 \\ 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$196 = 2^2 \cdot 7^2 = (2 \cdot 7)^2 = 14^2$$

Portanto, $\sqrt{196} = 14$, pois $14^2 = 196$.

2. a) Digita-se os seguintes botões:

8 √

Aparecerá no visor:

2.82842712474

Logo, $\sqrt{8} \simeq 2{,}82842712$.

b) Digita-se os seguintes botões:

1 0 . 1 √

Aparecerá no visor:

3.17804971641

$\sqrt{10{,}1} \simeq 3{,}17804972$

3. a) $\sqrt{102}$ é maior que 10, pois $10^2 = 100$ e $100 < 102$.

$\sqrt{102}$ é menor que 11, pois $11^2 = 121$ e $102 < 121$.

Portanto, $10 < \sqrt{102} < 11$.

Fazendo mais algumas tentativas, tem-se que $\sqrt{102}$ está entre 10,09 (pois $10{,}09^2 = 101{,}8081$) e 10,10 (pois $10{,}10^2 = 102{,}01$), ou seja, $10{,}09 < \sqrt{102} < 10{,}10$.

Logo, $\sqrt{102} \simeq 10{,}10$.

b) $\sqrt{7}$ é maior que 2, pois $2^2 = 4$ e $4 < 7$.

$\sqrt{7}$ é menor que 3, pois $3^2 = 9$ e $7 < 9$.

Portanto, $2 < \sqrt{7} < 3$.

Fazendo mais algumas tentativas, tem-se que $\sqrt{7}$ está entre 2,64 (pois $2{,}64^2 = 6{,}9696$) e 2,65 (pois $2{,}65^2 = 7{,}0225$), ou seja, $2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65$.

Logo, $\sqrt{7} \simeq 2{,}65$.

c) $\sqrt{97}$ é maior que 9, pois $9^2 = 81$ e $81 < 97$.

$\sqrt{97}$ é menor que 10, pois $10^2 = 100$ e $97 < 100$.

Portanto, $9 < \sqrt{97} < 10$.

Fazendo mais algumas tentativas, tem-se que $\sqrt{97}$ está entre 9,84 (pois $9{,}84^2 = 96{,}8256$) e 9,85 (pois $9{,}85^2 = 97{,}0225$), ou seja, $9{,}84 < \sqrt{97} < 9{,}85$.

Logo, $\sqrt{97} \simeq 9{,}85$.

d) $\sqrt{742}$ é maior que 27, pois $27^2 = 729$ e $729 < 742$.

$\sqrt{742}$ é menor que 28, pois $28^2 = 784$ e $742 < 784$.

Portanto, $27 < \sqrt{742} < 28$.

Fazendo mais algumas tentativas, tem-se que $\sqrt{742}$ está entre 27,23 (pois $27{,}23^2 = 741{,}4729$) e 27,24 (pois $27{,}24^2 = 742{,}0176$), ou seja, $27{,}23 < \sqrt{742} < 27{,}24$.

Logo, $\sqrt{742} \simeq 27{,}24$.

4. a) Fatorando o número 512, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 512 & 2 \\ 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$512 = 2^9 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2)^3 = 8^3$$

Portanto:

$$\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{8^3} = 8$$

b) $\sqrt[3]{0{,}729} = \sqrt[3]{729 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{\dfrac{729}{10^3}}$

Fatorando o número 729, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 729 & 3 \\ 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$729 = 3^6 = 3^3 \cdot 3^3 = (3 \cdot 3)^3 = 9^3$$

Portanto:

$$\sqrt[3]{0{,}729} = \sqrt[3]{\frac{729}{10^3}} = \sqrt[3]{\frac{9^3}{10^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{9}{10}\right)^3} = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

c) Fatorando os números 27 e 8, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$27 = 3^3 \qquad 8 = 2^3$$

Portanto:

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{-\frac{2^3}{3^3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{2}{3}\right)^3} = -\frac{2}{3}$$

d) $\sqrt[3]{2{,}197} = \sqrt[3]{\dfrac{2197}{1000}} = \sqrt[3]{\dfrac{2197}{10^3}}$

Fatorando o 2 197, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 2\,197 & 13 \\ 169 & 13 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$2\,197 = 13^3$$

Portanto:

$$\sqrt[3]{2{,}197} = \sqrt[3]{\frac{2197}{10^3}} = \sqrt[3]{\frac{13^3}{10^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{13}{10}\right)^3} = \frac{13}{10} = 1{,}3$$

5. a) $\sqrt[3]{20}$ é maior que 2, pois $2^3 = 8$ e $8 < 20$.

$\sqrt[3]{20}$ é menor que 3, pois $3^3 = 27$ e $20 < 27$.

Portanto, $2 < \sqrt[3]{20} < 3$.

b) $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

Portanto, $-5 < \sqrt[3]{-64} < -3$, pois $-5 < -4 < -3$.

c) $\sqrt[3]{0{,}064} = \sqrt[3]{\dfrac{64}{1\,000}} = \sqrt[3]{\dfrac{4^3}{10^3}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{4}{10}\right)^3} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$

Portanto, $0 < \sqrt[3]{0{,}064} < 1$, pois $0 < 0{,}4 < 1$.

d) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{216}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{6}\right)^3} = \dfrac{5}{6}$

Portanto, $0 < \sqrt[3]{\dfrac{125}{216}} < 1$, pois $0 < \dfrac{5}{6} < 1$.

6. $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

$\sqrt[3]{(-2)^{-3}} = \sqrt[3]{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3} = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$

Como $-2 < -0{,}5$, então $\sqrt[3]{-8} < \sqrt[3]{(-2)^{-3}}$.

Portanto, o maior número é $\sqrt[3]{(-2)^{-3}}$.

7. a) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

b) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{243}} = \sqrt[5]{\dfrac{1^5}{3^5}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^5} = \dfrac{1}{3}$

c) Como o índice é par e o radicando é menor que zero, não existe número racional que, elevado à sexta potência, resulte em -1.

d) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \sqrt[4]{\dfrac{2^4}{3^4}} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^4} = \dfrac{2}{3}$

e) $\sqrt{0{,}36} = \sqrt{\dfrac{36}{100}} = \sqrt{\dfrac{6^2}{10^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{6}{10}\right)^2} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$

f) $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$

8. $\sqrt[4]{0{,}0256} : \sqrt[4]{0{,}0016} = \sqrt[4]{\dfrac{256}{10\,000}} : \sqrt[4]{\dfrac{16}{10\,000}} = \sqrt[4]{\dfrac{4^4}{10^4}} : \sqrt[4]{\dfrac{2^4}{10^4}} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{4}{10}\right)^4} : \sqrt[4]{\left(\dfrac{2}{10}\right)^4} = \dfrac{4}{10} : \dfrac{2}{10} = \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{10}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

9. a-V; b-I; c-II; d-VIII; e-III; f-VII; g-VI; h-IV.

10. a) $3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$

b) $2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8$

c) $5^{\frac{8}{4}} = 5^2 = 25$

d) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$

e) $25^{\frac{5}{2}} = \sqrt{25^5} = \sqrt{(5^2)^5} = \sqrt{(5^5)^2} = 5^5 = 3\,125$

f) $4\,096^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{4\,096^3} = \sqrt[4]{(8^4)^3} = \sqrt[4]{(8^3)^4} = 8^3 = 512$

11. a) $N = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

Em 1 hora teremos 3 bactérias.

b) $N = 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$

Em 2 horas teremos 9 bactérias.

c) $N = 27^{\frac{3}{3}} = 27^1 = 27$

Em 3 horas teremos 27 bactérias.

PÁGINA 26 – ATIVIDADES

12. a) $2\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^3} = \sqrt[4]{16 \cdot 27} = \sqrt[4]{432}$

b) $5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{125 \cdot 4} = \sqrt[3]{500}$

c) $3^2\sqrt[3]{7^2} = 9\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{9^3 \cdot 7^2} =$

$= \sqrt[3]{729 \cdot 49} = \sqrt[3]{35\,721}$

13. a) $2\sqrt{100} = 2\sqrt{10^2} = 2 \cdot 10 = 20$

b) $\sqrt[4]{192} = \sqrt[4]{2^6 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2 \cdot 3} =$

$= 2\sqrt[4]{4 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{12}$

c) $\sqrt[5]{5\,120} = \sqrt[5]{2^{10} \cdot 5} = 2^2 \cdot \sqrt[5]{5} = 4\sqrt[5]{5}$

d) $\sqrt[3]{72\,000} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2 \cdot 10^3} = 20\sqrt[3]{9}$

14. a) $\sqrt[4]{11^2} = \sqrt[4:2]{11^{2:2}} = \sqrt{11}$

b) $\sqrt[8]{\left(\frac{2}{7}\right)^4} = \sqrt[8:4]{\left(\frac{2}{7}\right)^{4:4}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$

c) $\sqrt[8]{3^{14}} = \sqrt[8:2]{3^{14:2}} = \sqrt[4]{3^7}$

d) $\sqrt[15]{5^{25}} = \sqrt[15:5]{5^{25:5}} = \sqrt[3]{5^5}$

e) $\sqrt[10]{2^2} = \sqrt[10:2]{2^{2:2}} = \sqrt[5]{2}$

f) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

g) $\sqrt[15]{(3{,}1)^5} = \sqrt[15:5]{(3{,}1)^{5:5}} = \sqrt[3]{3{,}1}$

h) $\sqrt[12]{9^4} = \sqrt[12:4]{9^{4:4}} = \sqrt[3]{9}$

i) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

j) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = \frac{1}{2}$

15. a) Como o mmc(7, 3) = 21, tem-se:

$\sqrt[7]{4} = \sqrt[7 \cdot 3]{4^{1 \cdot 3}} = \sqrt[21]{4^3}$

$\sqrt[3]{21} = \sqrt[3 \cdot 7]{21^{1 \cdot 7}} = \sqrt[21]{21^7}$

b) Como o mmc(3, 2, 5) = 30, tem-se:

$\sqrt[3]{15} = \sqrt[3 \cdot 10]{15^{1 \cdot 10}} = \sqrt[30]{15^{10}}$

$\sqrt{13} = \sqrt[2 \cdot 15]{13^{1 \cdot 15}} = \sqrt[30]{13^{15}}$

$\sqrt[5]{2} = \sqrt[5 \cdot 6]{2^{1 \cdot 6}} = \sqrt[30]{2^6}$

c) Como o mmc(3, 2) = 6, tem-se:

$\sqrt[3]{6} = \sqrt[3 \cdot 2]{6^{1 \cdot 2}} = \sqrt[6]{6^2}$

$\sqrt{2} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^{1 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2^3}$

d) Como o mmc(11, 3) = 33, tem-se:

$\sqrt[11]{4^2} = \sqrt[11 \cdot 3]{4^{2 \cdot 3}} = \sqrt[33]{4^6}$

$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3 \cdot 11]{9^{1 \cdot 11}} = \sqrt[33]{9^{11}}$

16. a) $\sqrt{0{,}0025} \cdot \sqrt[6]{(0{,}2)^6} = \sqrt{\frac{25}{10\,000}} \cdot 0{,}2 =$

$= \frac{5}{100} \cdot 0{,}2 = \frac{5}{100} \cdot \frac{2}{10} = \frac{10}{1\,000} =$

$= \frac{1}{100} = 0{,}01$

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{531\,441}} = \sqrt[4 \cdot 3]{531\,441} = \sqrt[12]{3^{12}} = 3$

c) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8$

d) $\frac{\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{59\,049}}}{\sqrt[6]{729}} = \frac{\sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[10]{3^{10}}}{\sqrt[6]{3^6}} =$

$= \frac{2^2 \cdot 3}{3} = 4$

e) $\sqrt[5]{\sqrt{1\,024}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3\,125}}{\sqrt[3]{25}} = \sqrt[5 \cdot 2]{1\,024} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^5}}{\sqrt[3]{5^2}} =$

$= \sqrt[10]{2^{10}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5^5}{5^2}} = 2 \cdot \sqrt[3]{5^{5-2}} =$

$= 2 \cdot \sqrt[3]{5^3} = 2 \cdot 5 = 10$

PÁGINA 27 – DIVERSIFICANDO

1. a) $\ell^2 = 4$

$\ell = \sqrt{4}$

$\ell = 2$

Portanto, a medida do comprimento do lado do quadrado é 2 m.

b) $\ell^2 = 49$

$\ell = \sqrt{49}$

$\ell = 7$

Portanto, a medida do comprimento do lado do quadrado é 7 dm.

c) $\ell^2 = 1\,024$

$\ell = \sqrt{1\,024}$

$\ell = 32$

Portanto, a medida do comprimento do lado do quadrado é 32 mm.

d) $\ell^2 = 139$

$\ell = \sqrt{139}$

Portanto, a medida do comprimento do lado do quadrado é $\sqrt{139}$ dam.

2. Inicialmente, determina-se a medida do comprimento do lado de cada um dos terrenos.

- Terreno maior:

$\ell^2 = 81$

$\ell = \sqrt{81}$

$\ell = 9$

Portanto, a medida do comprimento do lado do terreno maior é 9 m.

- Terreno menor:

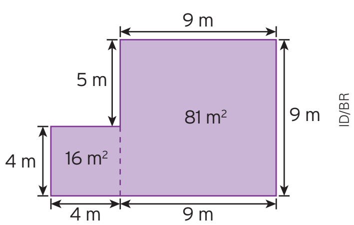
$\ell^2 = 16$

$\ell = \sqrt{16}$

$\ell = 4$

Portanto, a medida do comprimento do lado do terreno menor é 4 m.

Nos locais em que há sobreposição de lados não será colocado arame, conforme indicado na figura a seguir.



Calculando o dobro da medida do perímetro, tem-se:

$2 \cdot (9 + 9 + 9 + 4 + 4 + 4 + 5) = 2 \cdot 44 = 88$

Logo, são necessários 88 m de arame.

3. Alternativa **b**.

A medida das arestas corresponde à raiz cúbica de 35 937. Assim, determina-se por meio da fatoração o número que elevado ao cubo resulta em 35 937.

35 937	3
11 979	3
3 993	3
1 331	11
121	11
11	11
1	

$35\,937 = 3^3 \cdot 11^3 = (3 \cdot 11)^3 = 33^3$

Logo, as arestas medem 33 cm.

4. Alternativa **c**.

Se $300 \cdot 10^5$ representa a medida da área de um quadrado, então a medida do comprimento de seu lado é:

$\sqrt{300 \cdot 10^5} = \sqrt{3 \cdot 10^2 \cdot 10^5} = \sqrt{3 \cdot 10^7} =$

$= \sqrt{3 \cdot 10^6 \cdot 10} = 10^3\sqrt{3 \cdot 10} = 1\,000\sqrt{30}$

Logo, a medida do comprimento do lado desse quadrado é $1\,000\sqrt{30}$ km.

5. Como $\sqrt{50} \simeq 7{,}07$ e $\sqrt{70} \simeq 8{,}37$, o único valor inteiro nesse intervalo é o 8.

Logo, a medida do comprimento do lado desse quadrado é 8 cm.

6. $[(\sqrt{10})^2]^{\frac{1}{6}} = \left[\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{6}} = 10^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6}} =$

$= 0^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10}$

7. $v = 20\sqrt{273{,}25 + T} = 20\sqrt{273{,}25 + 15{,}75} =$

$= 20\sqrt{289} = 20 \cdot 17 = 340$

Logo, a velocidade será 340 m/s.

8. $\sqrt[3]{27^2} + 4^{\frac{5}{2}} = \sqrt[3]{(3^3)^2} + \sqrt{4^5} = \sqrt[3]{3^6} + \sqrt{(2^2)^5} =$

$= \sqrt[3]{3^6} + \sqrt{2^{10}} = 3^{\frac{6}{3}} + 2^{\frac{10}{2}} = 3^2 + 2^5 =$

$= 9 + 32 = 41$

9. $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{49^3}} + \sqrt[3]{27}}{10^{-2}} = \frac{\sqrt[6]{49^3} + \sqrt[3]{27}}{10^{-2}} =$

$= \frac{\sqrt[6:3]{49^{3:3}} + \sqrt[3]{3^3}}{10^{-2}} = \frac{\sqrt{49} + \sqrt[3]{3^3}}{10^{-2}} =$

$= \frac{\sqrt[2]{7^2} + 3}{10^{-2}} = \frac{7 + 3}{10^{-2}} = \frac{10}{10^{-2}} =$

$= 10^{1-(-2)} = 10^3 = 1\,000$

10. $\frac{\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt{\sqrt{9}}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{6^2}} = \frac{\sqrt[4]{4 \cdot 9}}{\sqrt[4]{36}} = \sqrt[4]{\frac{36}{36}} =$

$= \sqrt[4]{1} = 1$

11. a) Falsa.

$\sqrt{600} = \sqrt{6 \cdot 100} = 10\sqrt{6}$

Logo, $10\sqrt{6} \neq 10\sqrt{3}$.

b) Falsa.

$\sqrt[3]{5^5} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5^2} = 5\sqrt[3]{25}$

Logo, $\sqrt[3]{5^5} \neq 25\sqrt[3]{5}$.

c) Verdadeira.

$$3\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{3^4}$$
$$\sqrt[6]{3^8} = \sqrt[6:2]{3^{8:2}} = \sqrt[3]{3^4}$$

Logo, $3\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^8}$.

d) Verdadeira.

$$\sqrt{500} = \sqrt{5 \cdot 100} = 10\sqrt{5}$$

e) Verdadeira.

$$5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{3 \cdot 125} = \sqrt[3]{375}$$

f) Falsa.

$$\sqrt[5]{2^5} = 2$$
$$2\sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{2^3} = 2 \cdot 2 = 4$$

Logo, $\sqrt[5]{2^5} \neq 2\sqrt[3]{8}$.

12. a) $\sqrt[4]{3^8} = \sqrt[4:2]{3^{8:2}} = \sqrt[2]{3^4}$

Portanto, $a = 2$.

b) $\sqrt[6]{1\,024} = \sqrt[6]{2^{10}} = \sqrt[6:2]{2^{10:2}} = \sqrt[3]{2^5}$

Portanto, $a = 3$.

c) $\sqrt[21]{\dfrac{64}{125}} = \sqrt[21]{\dfrac{4^3}{5^3}} = \sqrt[21]{\left(\dfrac{4}{5}\right)^3} =$

$= \sqrt[21:3]{\left(\dfrac{4}{5}\right)^{3:3}} = \sqrt[7]{\dfrac{4}{5}}$

Portanto, $a = 7$.

d) $7\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{7^4 \cdot 2}$

Portanto, $a = 4$.

e) $\sqrt[6]{5^4} = \sqrt[6:1]{5^{4:1}}$

Portanto, $a = 1$.

f) $25\sqrt[6]{10} = \sqrt[6]{25^6} \cdot \sqrt[6]{10} =$

$= \sqrt[6]{(5^2)^6} \cdot \sqrt[6]{10} = \sqrt[6]{5^{12}} \cdot \sqrt[6]{10} =$

$= \sqrt[6]{5^{12} \cdot 10}$

Portanto, $a = 12$.

g) $\sqrt[10]{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^{20}} =$

$= \sqrt[10:2]{2^{8:2} \cdot 3^{6:2} \cdot 5^{20:2}} =$

$= \sqrt[5]{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^{10}} = 5^2\sqrt[5]{2^4 \cdot 3^3}$

Portanto, $a = 5^2 = 25$.

13. Resposta pessoal.

PÁGINA 28 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Respostas pessoais.

2. Respostas pessoais.

3. a) O principal problema do orçamento dessa família é o valor total das despesas ser maior que o valor total das receitas, o que implica dívidas ou não pagamento de todas as contas. Sim, essa família precisa reduzir suas despesas para adequá-las ao orçamento disponível.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta possível: Sim. O fato de o orçamento familiar estar apertado não impede que essa família doe brinquedos e roupas que não sejam mais utilizados para campanhas ou instituições de caridade ou que, por meio de trabalho voluntário, doe seu tempo, por exemplo, auxiliando crianças doentes em hospitais ou idosos em casas de repouso.

PÁGINA 30 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. A metade de 2^{2018} é dada por $2^{2018} : 2$. Aplicando as propriedades da potenciação, tem-se:

$$2^{2018} : 2^1 = 2^{2018 - 1} = 2^{2017}$$

2. Alternativa **a**.

$$0{,}000000005 = 5 \cdot 10^{-9}$$

Portanto, o raio de um átomo de hidrogênio mede $5 \cdot 10^{-9}$ cm.

3. Pode-se escrever uma sequência para representar o número de bactérias a cada 30 minutos. Assim, o 1º termo corresponde ao número inicial de bactérias, o 2º termo corresponde ao número de bactérias depois de 30 minutos, ou seja, o dobro do número de bactérias inicial, o 3º termo corresponde ao número de bactérias depois de 60 minutos, ou seja, o dobro do número de bactérias do 2º termo, e assim por diante.

Como é pedido o número de bactérias depois de 2 horas, isso significa que deve-se encontrar o 5º termo dessa sequência, pois ele corresponde ao número de bactérias após 120 minutos.

Termo	Tempo (minutos)	Número de bactérias
1	0	1 000
2	30	$2 \cdot 1\,000 = 2\,000$
3	60	$2 \cdot 2 \cdot 1\,000 =$ $= 2^2 \cdot 1\,000 =$ $= 4 \cdot 1\,000 = 4\,000$
4	90	$2 \cdot 2^2 \cdot 1\,000 =$ $= 2^3 \cdot 1\,000 =$ $= 8 \cdot 1\,000 = 8\,000$
5	120	$2 \cdot 2^3 \cdot 1\,000 =$ $= 2^4 \cdot 1\,000 =$ $= 16 \cdot 1\,000 = 16\,000$

Portanto, o número de bactérias após 2 horas é 16 000.

4. Pode-se escrever uma sequência para representar o diâmetro da planta a cada 3 meses. Assim, o 1º termo corresponde ao diâmetro inicial, o 2º, ao diâmetro após 3 meses, ou seja, ao triplo do diâmetro inicial, o 3º, ao diâmetro após 6 meses, ou seja, ao triplo do diâmetro do 2º termo, e assim por diante.

Como é pedido o diâmetro depois de 1 ano, isso significa que devemos encontrar o 5º termo dessa sequência, pois ele corresponde ao diâmetro da planta após 12 meses.

Termo	Tempo (meses)	Diâmetro da planta (cm)
1	0	1
2	3	$3 \cdot 1 = 3$
3	6	$3 \cdot 3 \cdot 1 = 3^2 \cdot 1 =$ $= 9 \cdot 1 = 9$
4	9	$3 \cdot 3^2 \cdot 1 = 3^3 \cdot 1 =$ $= 27 \cdot 1 = 27$
5	12	$3 \cdot 3^3 \cdot 1 = 3^4 \cdot 1 =$ $= 81 \cdot 1 = 81$

Portanto, a medida do diâmetro da planta após 1 ano é 81 cm.

5. Alternativa **d**.

Como $d = 20$ m e $V = 14\sqrt{d}$, tem-se:

$V = 14\sqrt{20} = 14\sqrt{4 \cdot 5} = 14\sqrt{2^2 \cdot 5} =$

$= 14 \cdot 2\sqrt{5} = 28\sqrt{5}$

Logo, a medida da velocidade do carro era $28\sqrt{5}$ km/h.

6. Alternativa **c**.

Nesse caso, para ser maior que 10, o número deve ser maior que $\sqrt{100}$. É necessário reescrever os números, inserindo os fatores no radical, e depois compará-los com $\sqrt{100}$. Assim:

$3\sqrt{11} = \sqrt{11 \cdot 3^2} = \sqrt{11 \cdot 9} = \sqrt{99} < \sqrt{100}$

$4\sqrt{7} = \sqrt{7 \cdot 4^2} = \sqrt{7 \cdot 16} = \sqrt{112} > \sqrt{100}$

$5\sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 5^2} = \sqrt{5 \cdot 25} = \sqrt{125} > \sqrt{100}$

$6\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 6^2} = \sqrt{3 \cdot 36} = \sqrt{108} > \sqrt{100}$

$7\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 7^2} = \sqrt{2 \cdot 49} = \sqrt{98} < \sqrt{100}$

Portanto, três desses números são maiores que 10: $4\sqrt{7}$, $5\sqrt{5}$ e $6\sqrt{3}$.

7. a) Como o expoente corresponde à etapa, ou seja, à quantidade de dobras realizadas, um expoente igual a zero significa que a folha não foi dobrada.

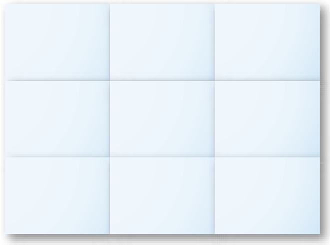
b) A quantidade de partes em que a folha ficará dividida pode ser representada usando potências de 3. Nesse caso, o expoente corresponde à etapa:

1ª etapa:

ID/BR

$3^1 = 3$

2ª etapa:


ID/BR

$$3^2 = 9$$

E assim por diante.

c) Após 5 etapas a folha ficaria dividida em 243 partes, pois:

$$3^5 = 243$$

8. Primeiro, calcula-se a raiz quadrada de $\frac{3^{80}}{2^{30}}$:

$$\sqrt{\frac{3^{80}}{2^{30}}} = \frac{3^{80\,:\,2}}{2^{30\,:\,2}} = \frac{3^{40}}{2^{15}}$$

Agora, calcula-se a metade do valor obtido:

$$\frac{\frac{3^{40}}{2^{15}}}{2} = \frac{3^{40}}{2^{15}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3^{40}}{2^{16}}$$

9. Alternativa **e**.

Primeiro, escreve-se todas as potências na base 3 e, depois, observa-se o maior expoente:

3^{45}

$9^{20} = (3^2)^{20} = 3^{40}$

$27^{14} = (3^3)^{14} = 3^{42}$

$243^9 = (3^5)^9 = 3^{45}$

$81^{12} = (3^4)^{12} = 3^{48}$

Portanto, 81^{12} é o maior número, pois equivale a 3^{48}.

10. $\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{49}{4} + \frac{5}{4} = \frac{54}{4} = \frac{27}{2}$

11. Alternativa **d**.

$$5^3 : 5 \cdot 5^4 : 5 \cdot 5^5 : 5^6 = 5^{3-1+4-1+5-6} = 5^4 = 625$$

12. Alternativa **e**.

Obtendo a medida da altura h da menina, em metro:

$$25 = \frac{64}{h^2}$$

$$h^2 = \frac{64}{25}$$

$$h = \frac{8}{5}$$

$$h = 1{,}6$$

Obtendo o valor RIP:

$$\text{RIP} = \frac{160}{\sqrt[3]{64}} = \frac{160}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{160}{4} = 40$$

Portanto, o valor RIP é 40 cm/kg$^{\frac{1}{3}}$.

13. Alternativa **e**.

Considerando que o ritmo de destruição é de 1 campo de futebol a cada 8 segundos e que 1 ano tem $32 \cdot 10^6$ s, concluí-se que são destruídos $\frac{32 \cdot 10^6 \text{ s}}{8 \text{ s}} = 4 \cdot 10^6$, ou seja, 4 000 000 de campos de futebol por ano.

Como a medida da área de um campo de futebol é aproximadamente 10^{-2} km^2, o ritmo de desmatamento, em um ano, implica a destruição de uma área de $4 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2} = 4 \cdot 10^4$, ou seja, uma área de 40 000 km^2. Percebe-se, então, que o autor da notícia exagerou na comparação.

14. Alternativa **e**.

Como 1 km^3 = $(10^4)^3$ dm^3 = 10^{12} litros, então o aquífero Guarani armazena cerca de $30\,000 \cdot 10^{12} = 3 \cdot 10^{16}$ litros.

O novo reservatório possui $2 \cdot 10^7$ litros.

Assim:

$$\frac{3 \cdot 10^{16}}{2 \cdot 10^7} = 1{,}5 \cdot 10^9$$

Pode-se concluir que a capacidade do aquífero Guarani é $1{,}5 \cdot 10^9$ vezes a capacidade do reservatório novo.

UNIDADE 2 – CÁLCULO ALGÉBRICO

CAPÍTULO 1 – EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

PÁGINA 36 – ATIVIDADES

1. **a)** Sendo n o número desconhecido, temos: $n - 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) Sendo x o número desconhecido, temos: $\sqrt{x}$, $x \in \mathbb{Q}_+^*$.

c) Sendo a e b os números desconhecidos, temos: $2a + \frac{1}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

d) Sendo n e t os números desconhecidos, temos: $3n + \frac{t}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ e $t \in \mathbb{Z}$.

e) Sendo x o número desconhecido, temos: x^2, $x \in \mathbb{Q}$.

f) Sendo x e y os números desconhecidos, temos: $\frac{x - y}{2}$, $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$.

g) Sendo m e n os números desconhecidos, temos: $2m - \frac{n}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

2. **a)** $a + b$

b) $a - b$

c) $a \cdot b$

d) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

e) $2(a + b)^3$

f) $3(a - b)^2$

g) $\sqrt{a + b}$

3. **a)** Verdadeira. O sucessor de um número natural é o número que vem imediatamente depois dele na sequência dos números naturais; logo, para obter o sucessor, basta adicionar 1 ao número.

b) Falsa. Justificativa possível: Não existe divisão por zero, ou seja, deve-se considerar $x \neq 0$.

c) Falsa. Justificativa possível: Para $x = 6$, temos: $6 - 5 = 1$ e o número 1 não é um número inteiro negativo. A expressão $(x - 5)$ representa um número inteiro negativo se x for um número natural menor que 5.

d) Falsa. Justificativa possível: Se considerarmos que $x = 2$, temos que $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$, que não é um número natural. A expressão $\sqrt{x}$ representa um número natural se x for um número quadrado perfeito.

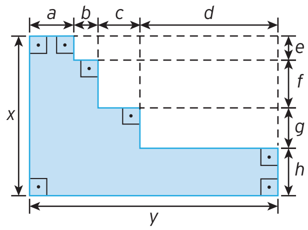
4. A medida do perímetro de um polígono pode ser obtida adicionando a medida de seus lados.

a) A medida o perímetro do retângulo é dada por:

$$\ell + h + \ell + h = 2\ell + 2h$$

b) Resolução possível:

Podemos considerar um retângulo cujas dimensões são dadas por x e y. Esse retângulo pode ser dividido em retângulos menores. Veja:



ID/BR

$$a + b + c + d = y$$
$$e + f + g + h = x$$

Para obter a medida do perímetro P dessa figura, pode-se fazer o seguinte:

$$P = x + y + \underbrace{a + b + c + d}_{y} + \underbrace{e + f + g + h}_{x}$$

$$P = x + y + y + x$$

$$P = 2x + 2y$$

PÁGINA 38 – ATIVIDADES

5. a) $12^2 + 2 \cdot 12 - 30 = 144 + 24 - 30 = 138$

b) $\frac{18}{3} + 18 + 5 = 6 + 18 + 5 = 29$

c) $3 \cdot 9^2 - (-4)^2 = 3 \cdot 81 - 16 = 243 - 16 = 227$

d) $\frac{3 - 7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

e) $\sqrt{4} + 2 \cdot 4 - \frac{1}{3} = 2 + 8 - \frac{1}{3} = 10 - \frac{1}{3} = \frac{30 - 1}{3} = \frac{29}{3}$

6.

	-1	$-2{,}5$	0	$\frac{1}{3}$
x^2	1	6,25	0	$\frac{1}{9}$
$-x + x$	0	0	0	0
$3x - 2$	-5	$-9{,}5$	-2	-1
$\frac{x}{2} + 3$	2,5	1,75	3	$\frac{19}{6}$

7. a) $3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = 3 \cdot 4 - 4 + 4 = 12 - 4 + 4 = 12$

b) $3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4 = 3 \cdot 4 + 4 + 4 = 12 + 4 + 4 = 20$

c) $5^2 + 2 \cdot 5 - 30 = 25 + 10 - 30 = 5$

d) $\frac{50 + 22}{4} = \frac{72}{4} = 18$

e) $(2 \cdot 3 + 1)^2 \cdot (3 - 1) = (6 + 1)^2 \cdot 2 = 7^2 \cdot 2 = 49 \cdot 2 = 98$

f) $\frac{3 \cdot 5 + 1}{5 - 5} = \frac{15 + 1}{0}$

Como não existe divisão por zero, então não existe o valor numérico para $y = 5$.

8. a) $\frac{3 \cdot (-1) - 3}{1 - 3} = \frac{-3 - 3}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$

b) $\frac{1 + (-2)}{1 - 1 \cdot (-2)} = \frac{-1}{1 - (-2)} = \frac{-1}{1 + 2} = -\frac{1}{3}$

c) $\frac{2^2 - 5 \cdot (-1)}{3} = \frac{4 + 5}{3} = \frac{9}{3} = 3$

d) $\frac{5 \cdot (-1{,}5) - 2{,}31}{(-1{,}5)^2 - 3 \cdot (2{,}31)^2} = \frac{-7{,}5 - 2{,}31}{2{,}25 - 3 \cdot 5{,}3361} =$
$= \frac{-9{,}81}{2{,}25 - 16{,}0083} = \frac{-9{,}81}{-13{,}7583} \simeq 0{,}71$

9. Alternativa **b**.
Substituindo x por 2 na expressão dada, temos:
$$\sqrt{2^2 + 4 \cdot 2 + 4} = \sqrt{4 + 8 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

10. Alternativa **c**.
Substituindo m por -1 e n por -3 na expressão dada, temos:
$$\frac{(-1)^2 - 5 \cdot (-3)}{5 \cdot (-1) + (-3)^2} = \frac{1 + 15}{-5 + 9} = \frac{16}{4} = 4$$

11. Sendo n e t os números desconhecidos, tem-se a seguinte expressão numérica:
$$n^2 + t^2$$
Considerando $n = 5$ e $t = 10$, tem-se:
$$5^2 + 10^2 = 25 + 100 = 125$$
Nesse caso, se fosse considerado $n = 10$ e $t = 5$, seria obtido o mesmo resultado.

12. Como a medida do perímetro P é a soma das medidas de seus lados, temos:
$P = 3x + 2 + x + 2 + 5x + 2 + 3x + 1 + 3 + x + 1 + 5x + 3 = 18x + 14$
Substituindo x por 3, temos:
$$P = 18 \cdot 3 + 14 = 54 + 14 = 68$$
Portanto, a medida do perímetro é 68 cm.

13. a) $15x$

b) Substituindo x por 11 em $15x$, temos:
$$15 \cdot 11 = 165$$
Portanto, 165 estudantes participarão como jogadores.
Como o professor escolheu mais 6 estudantes para serem ajudantes, o total de estudantes é 171 (165 + 6 = 171).

PÁGINA 39 – DIVERSIFICANDO

1. a) $\frac{a + b}{10}$

b) $3ab$

c) $a^2 + b^2$

d) $(a + b)^2$

e) $\sqrt{5(a - b)}$

f) $3(a + b)^3$

2. A expressão $x + y$ representa um número natural, pois x e y representam quantidades, ou seja, $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$.

3. a) $\ell + \ell + \ell + \ell + \ell + \ell = 6\ell$

b) $5 + 2x + x + y = 3x + y + 5$

c) $10 + a + \frac{x}{2} + 15 + x + a = 2a + \frac{3x}{2} + 25$

4. Considerando x o número desconhecido, temos:
$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - 1$$
Substituindo x por 12 nessa expressão, temos:
$$\frac{12}{2} + \frac{12}{3} - 1 = 6 + 4 - 1 = 9$$

5. a) $x + x = 2x$

b) $3x + 4$

c) $4x - 6$

d) $4y - y - 8 = 3y - 8$

6. Substituindo b por 1 187 e p por 1 200 na expressão dada, temos:
$$4{,}50 \cdot 1\,187 - 2{,}00 \cdot 1\,200 = 5\,341{,}50 - 2\,400 = 2\,941{,}50$$
Portanto, a família teve lucro de R$ 2 941,50.

7. a) A medida do volume da caixa é obtido pelo produto das medidas de suas dimensões. Portanto:
$V = 30 \cdot (x + 2) \cdot 5 = (30x + 60) \cdot 5 =$
$= 150x + 300$

b) A soma das medidas das áreas externas é dada por:
$2 \cdot [5 \cdot (x + 2)] + 2 \cdot (5 \cdot 30) +$
$+ 30 \cdot (x + 2) = 2 \cdot (5x + 10) +$
$+ 2 \cdot 150 + 30x + 60 = 10x + 20 +$
$+ 300 + 30x + 60 = 40x + 380$
Substituindo x por 10, obtemos:
$40 \cdot 10 + 380 = 400 + 380 = 780$
Portanto, a soma das medidas das áreas externas da caixa corresponde a 780 cm^2.

c) Substituindo x por 8 na expressão do item **a**, temos:
$V = 150 \cdot 8 + 300 = 1\,200 + 300 = 1\,500$
Portanto, a medida do volume dessa caixa é 1 500 cm^3.

8. Não, porque não é possível dividir por zero. Substituindo x por 7 e y por 7, teremos zero no denominador da fração.

9. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2 – POLINÔMIOS

PÁGINA 42 – ATIVIDADES

1. São monômios as expressões dos itens **a**, **c**, **e** e **i**.
   a) É monômio.
   b) Não é monômio, pois tem dois termos.
   c) É monômio.
   d) Não é monômio, pois tem dois termos.
   e) É monômio.
   f) Não é monômio, pois tem dois termos.
   g) Não é monômio, pois $\sqrt{xy} = (xy)^{\frac{1}{2}}$, portanto, o expoente de xy não é natural $\left(\frac{1}{2}\right)$.
   h) Não é monômio, pois $\frac{z}{pq} = z\,(pq)^{-1}$, logo, o expoente de pq não é natural (-1).
   i) É monômio.
   j) Não é monômio, pois o expoente de c não é natural (-4).

2. a) Grau 2.
   b) Grau 0.
   c) Grau 8.
   d) Grau 3 (2 + 1).
   e) Grau 7 (2 + 4 + 1).
   f) Grau 1.

3. a) Sim.
   b) Não, pois as partes literais são diferentes.
   c) Sim.
   d) Sim.
   e) Não, pois as partes literais são diferentes.
   f) Não, pois as partes literais são diferentes.
   g) Não, pois as partes literais são diferentes.
   h) Sim.

4. a) Coeficiente: 2; parte literal: xy^3.
   b) Coeficiente: -4; parte literal: x^3.
   c) Coeficiente: 1; parte literal: t.
   d) Coeficiente: -1; parte literal: x^2.
   e) Coeficiente: $\frac{15}{7}$; parte literal: bat^2.
   f) Coeficiente: -3; parte literal: zt^3.
   g) Coeficiente: $\frac{5}{7}$; parte literal: a^3bc^2.
   h) Coeficiente: 4; parte literal: v^2t.

5. Sim, pois a parte literal (a^2b) é a mesma.

6. Para que os graus dos monômios sejam iguais, temos:
$$m + 5 + m = 8 + 2 + m$$
$$2m + 5 = 10 + m$$
$$2m - m = 10 - 5$$
$$m = 5$$
Logo, o valor de m é 5.

7. Respostas pessoais. Respostas possíveis:
   a) $22x^2$ e $22y$.
   b) $5ab^2$ e $210ab^2$.
   c) $3x^2y$ e $-3x^2y$.

8. • $3m^{-2}$: o expoente de m é (-2), ou seja, um número inteiro negativo, e, para que seja um monômio, ele deve ser um número natural.
   • $4a^{-1}$: o expoente de a é (-1), ou seja, um número inteiro negativo, mas, para que seja um monômio, ele deve ser um número natural.
   • $y\sqrt{x}$: o expoente de x é $\left(\frac{1}{2}\right)$, ou seja, uma fração própria, e, para que a expressão seja um monômio, ele deve ser um número natural.

9. Como o quadrado tem 4 lados de mesma medida, a medida do perímetro será dada por $4x$.

PÁGINA 45 – ATIVIDADES

10. a) $7x + 15x - 9x = 22x - 9x = 13x$
    b) $14k + 2p - 9k + 3p =$
    $= 14k - 9k + 2p + 3p = 5k + 5p$
    c) $\frac{2a}{3} + 4a - \frac{a}{2} = \frac{4a + 24a - 3a}{6} = \frac{25a}{6}$
    d) $\frac{w^2}{12} + \frac{2y}{3} - \frac{w^2}{8} + 2y =$
    $= \frac{w^2}{12} - \frac{w^2}{8} + \frac{2y}{3} + 2y =$
    $= \frac{2w^2 - 3w^2}{24} + \frac{2y + 6y}{3} = -\frac{w^2}{24} + \frac{8y}{3}$

11. a) $\blacklozenge y^3z = 8x^5y^3z - 3x^5y^3z$
    $\blacklozenge y^3z = 5x^5y^3z$
    $\blacklozenge = \frac{5x^5y^3z}{y^3z}$
    $\blacklozenge = 5x^5$
    b) $\blacklozenge = -10b^8c^9d^5$

12. Considerando x o valor procurado, temos:
$$9n^3y^2 + x = -2n^3y^2$$
$$x = -2n^3y^2 - 9n^3y^2$$
$$x = -11n^3y^2$$

13. a) $4y^6 \cdot 6y^3 = (4 \cdot 6)y^{6+3} = 24y^9$
    b) $5a^6b^3 \cdot (-4ab^8) =$
    $= 5 \cdot (-4) \cdot a^{6+1} \cdot b^{3+8} = -20a^7b^{11}$
    c) $\frac{2}{3}t^4 \cdot \frac{6}{5}wz^3 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5}\right)t^4wz^3 =$
    $= \frac{12}{15}t^4wz^3 = \frac{4}{5}t^4wz^3$
    d) $2ab \cdot \frac{ab^3}{22} = \frac{2}{22} \cdot a^{1+1} \cdot b^{1+3} = \frac{a^2b^4}{11}$

14. a) $26x^{16} : 13x^{13} = \frac{26}{13}x^{16-13} = 2x^3$
    b) $-2a^7 : 4a^5 = -\frac{2}{4}a^{7-5} = -\frac{a^2}{2}$
    c) $18x^6y^4 : 9x^4y^3 = \frac{18}{9}x^{6-4} \cdot y^{4-3} = 2x^2y$
    d) $-20a^7b^3c^2 : (-4a^6b^3c) =$
    $= \frac{-20}{-4}a^{7-6} \cdot b^{3-3} \cdot c^{2-1} = 5ac$

15. a) $2x^3 \cdot 4x^2 = \blacklozenge$
    $\blacklozenge = 8x^{3+2}$
    $\blacklozenge = 8x^5$
    b) $8y^4 \cdot \blacklozenge = 16y^9$
    $\blacklozenge = \frac{16}{8}y^{9-4}$
    $\blacklozenge = 2y^5$
    c) $\blacklozenge \cdot a^2b^4c = 2a^8b^4cd^2$
    $\blacklozenge = \frac{2a^8b^4cd^2}{a^2b^4c}$
    $\blacklozenge = 2a^{8-2} \cdot b^{4-4} \cdot c^{1-1} \cdot d^2$
    $\blacklozenge = 2a^6b^0c^0d^2$
    $\blacklozenge = 2a^6d^2$
    d) $-x \cdot \blacklozenge \cdot 2x^3 = 8x^{12}$
    $-2x^4 \cdot \blacklozenge = 8x^{12}$
    $\blacklozenge = \frac{8x^{12}}{-2x^4}$
    $\blacklozenge = -4x^{12-4}$
    $\blacklozenge = -4x^8$
    e) $36xy^3 : \blacklozenge = 2x$
    $\blacklozenge = 36xy^3 : 2x$
    $\blacklozenge = \frac{36}{2}x^{1-1} \cdot y^3$
    $\blacklozenge = 18y^3$
    f) $\blacklozenge : 7x^3 = 11x^2$
    $\blacklozenge = 11x^2 \cdot 7x^3$
    $\blacklozenge = 77x^{2+3}$
    $\blacklozenge = 77x^5$

16. a) $12a^5 : 2a^3 = \frac{12}{2} \cdot a^{5-3} = 6a^2$

Logo, os monômios são $12a^5$ e $2a^3$.

b) $-15a^6b^2 : (-3a^3) = \frac{-15}{-3} a^{6-3}b^2 = 5a^3b^2$

Logo, os monômios são $-15a^6b^2$ e $-3a^3$.

c) Considerando $\blacksquare$ o monômio procurado, temos:

$$\blacksquare \cdot 2b^3 = 4a^6b^5$$

$$\blacksquare = \frac{4a^6b^5}{2b^3}$$

$$\blacksquare = 2a^6b^2$$

Logo, o monômio é $2a^6b^2$.

17. a) Considerando x o número procurado e, elevando esse número ao cubo, temos:

$$x^3$$

b) $(y^6)^2 = y^{6 \cdot 2} = y^{12}$

c) $5[(5b)^8]^2 = 5(5b)^{16} = \cdot 5^{16}b^{16} = 5^{17}\,b^{16}$

d) $\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{2^3} = \frac{a^3}{8}$

18. a) $\left(-\frac{xy^4}{2}\right)^5 = -\frac{x^5 \cdot y^{4 \cdot 5}}{2^5} = -\frac{x^5y^{20}}{32}$

b) $(-9xy^2)^3 = (-9)^3 \cdot x^3 \cdot y^{2 \cdot 3} = -729x^3y^6$

c) $(-4x^2y)^2 = (-4)^2 \cdot x^{2 \cdot 2} \cdot y^2 = 16x^4y^2$

d) $\left(\frac{3z^2x}{2}\right)^5 = \frac{3^5 \cdot z^{2 \cdot 5} \cdot x^5}{2^5} = \frac{243z^{10}x^5}{32}$

e) $\left(-\frac{2x^4y^3}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{2x^4y^3}\right)^2 = \frac{(-5)^2}{2^2 \cdot x^{4 \cdot 2} \cdot y^{3 \cdot 2}} = \frac{25}{4x^8y^6}$

19. a)

$$(3a^2b)^{\star} = 9a^4b^2$$

$$3^{\star} \cdot a^{2 \cdot \star} \cdot b^{\star} = 3^2a^4b^2$$

$$\star = 2$$

b) $(\star xyw^3)^3 = -8x^3y^3w^3$

$$\star^3x^3y^3w^9 = (-2)^3x^3y^3w^9$$

$$\star = -2$$

c) $\left(\frac{5x}{7}\right)^{\star} = \frac{49}{25x^2}$

$$\frac{5^{\star}x^{\star}}{7^{\star}} = \frac{7^2}{5^2x^2}$$

$$\frac{5^{\star}\,x^{\star}}{7^{\star}} = \frac{5^{-2}x^{-2}}{7^{-2}}$$

$$\star = -2$$

20. A medida do volume do paralelepípedo é obtido multiplicando as medidas do comprimento, da altura e da largura. Sendo a medida do comprimento $7x^2y$, a medida da largura x e a medida da altura $\frac{y}{3}$, temos:

$$7x^2y \cdot x \cdot \frac{y}{3} = \frac{7x^3y^2}{3}$$

21. A medida da área do quadrado é obtida multiplicando a medida do comprimento pela medida da largura. Assim:

$$2x^3 \cdot 2x^3 = (2 \cdot 2) \cdot (x^3 \cdot x^3) = 4 \cdot (x^{3+3}) = 4x^6$$

PÁGINA 47 – ATIVIDADES

22. Resposta pessoal.

23. a) $u + v + t$; $5x + 2y + z$

b) $2pqr + q^2 - pr$; $a^3 + b + c$

c) $4x - 5$; $\frac{x}{2} + 3$

d) $abcde^2 - 1$; $r^4s^2 + s$

24. a) $x^7 + 2x^5 - 4x^7 + 2x^6 - 5x^5 = x^7 - 4x^7 + 2x^5 - 5x^5 + 2x^6 =$
$= -3x^7 + 2x^6 - 3x^5$

b) $2a - 3b - c + 5a + 3b + 7c = 2a + 5a - 3b + 3b - c + 7c =$
$= 7a + 6c$

c) $\frac{k}{3} + k^2 - \frac{k}{2} + \frac{3k^2}{2} = \frac{k}{3} - \frac{k}{2} + k^2 + \frac{3k^2}{2} = \frac{2k - 3k}{6} + \frac{2k^2 + 3k^2}{2} =$
$= -\frac{k}{6} + \frac{5k^2}{2}$

d) $(x^3 + 2x^2) + (4x^3 - 2x^2) - (2 - 5x^3) = x^3 + 2x^2 +$
$+ 4x^3 - 2x^2 - 2 + 5x^3 = x^3 + 4x^3 + 5x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 2 = 10x^3 - 2$

PÁGINA 49 – ATIVIDADES

25. a) $5ax^2 - 8(a - ax^3) - (-5a - 7ax^3) = 5ax^2 - 8a + 8ax^3 + 5a +$
$+ 7ax^3 = 8ax^3 + 7ax^3 + 5ax^2 + 5a - 8a = 15ax^3 + 5ax^2 - 3a$

b) $(-13ab + 5a) - (-12ab - 6a^2 - 3a) - (2ab - a^2) = -13ab +$
$+ 5a + 12ab + 6a^2 + 3a - 2ab + a^2 = 6a^2 + a^2 - 13ab +$
$+ 12ab - 2ab + 5a + 3a = 7a^2 - 3ab + 8a$

c) $(7x^2 + 7) + (-x + 2) - (2x^2 - 1) + (-7x^2 + 2x - 2) =$
$= 7x^2 + 7 - x + 2 - 2x^2 + 1 - 7x^2 + 2x - 2 =$
$= 7x^2 - 2x^2 - 7x^2 - x + 2x + 7 + 2 + 1 - 2 = -2x^2 + x + 8$

d) $(-9x + 10) - (3x - 5) + (-3x - 5) - (17x + 10) = -9x +$
$+ 10 - 3x + 5 - 3x - 5 - 17x - 10 = -9x - 3x - 3x - 17x + 10 +$
$+ 5 - 5 - 10 = -32x$

e) $-2x - (y + 5 - 5x) - (xy + 3y) + (-2y + 7x - 4xy) =$
$= -2x - y - 5 + 5x - xy - 3y - 2y + 7x - 4xy = -2x + 5x +$
$+ 7x - xy - 4xy - y - 3y - 2y - 5 = 10x - 5xy - 6y - 5$

26. Sabendo que o polinômio oposto tem sinal inverso, pois a soma do polinômio com seu oposto é igual a zero, temos:

a) $-(x^2 + 2x + 1) = -x^2 - 2x - 1$

b) $-(x^4 + 6x) = -x^4 - 6x$

c) $-(x^5 - 7x^3 + 8x^2 + 5x + 2) = -x^5 + 7x^3 - 8x^2 - 5x - 2$

d) $-\left(-3x^4 + \frac{5x^3}{2}\right) = 3x^4 - \frac{5x^3}{2}$

27. a) $(3x^2 + 5x - 1) + (x^3 + 8x^2 - 5x + 1) = 3x^2 + 5x - 1 + x^3 +$
$+ 8x^2 - 5x + 1 = x^3 + 3x^2 + 8x^2 + 5x - 5x - 1 + 1 = x^3 + 11x^2$

b) $(3x^2 + 5x - 1) - (-2x^3 - 3x^2 + 6) = 3x^2 + 5x - 1 + 2x^3 +$
$+ 3x^2 - 6 = 2x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 5x - 6 - 1 = 2x^3 + 6x^2 + 5x - 7$

c) $(3x^2 + 5x - 1) + (x^3 + 8x^2 - 5x + 1) + (-2x^3 - 3x^2 + 6) =$
$= 3x^2 + 5x - 1 + x^3 + 8x^2 - 5x + 1 - 2x^3 - 3x^2 + 6 = x^3 - 2x^3 +$
$+ 3x^2 + 8x^2 - 3x^2 + 5x - 5x - 1 + 1 + 6 = -x^3 + 8x^2 + 6$

d) $(x^3 + 8x^2 - 5x + 1) - (3x^2 + 5x - 1) + (-2x^3 - 3x^2 + 6) =$
$= x^3 + 8x^2 - 5x + 1 - 3x^2 - 5x + 1 - 2x^3 - 3x^2 + 6 = x^3 - 2x^3 +$
$+ 8x^2 - 3x^2 - 3x^2 - 5x - 5x + 1 + 1 + 6 = -x^3 + 2x^2 - 10x + 8$

28. $P + 2a^4b - 3a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 = 8a^4b - a^3b^2 + 2a^2b^3$

$P = 8a^4b - a^3b^2 + 2a^2b^3 - 2a^4b + 3a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4$

$P = 8a^4b - 2a^4b - a^3b^2 + 3a^3b^2 + 2a^2b^3 - a^2b^3 + ab^4$

$P = 6a^4b + 2a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4$

29. $\bullet = (2x^2 + 3x - 1) + (5x^2 + 8x + 2)$

$\bullet = 2x^2 + 3x - 1 + 5x^2 + 8x + 2$

$\bullet = 7x^2 + 11x + 1$

$\bullet + \blacksquare = 10x^2$

$7x^2 + 11x + 1 + \blacksquare = 10x^2$

$\blacksquare = 10x^2 - 7x^2 - 11x - 1$

$\blacksquare = 3x^2 - 11x - 1$

$(5x^2 + 8x + 2) + \blacklozenge = \blacksquare$

$(5x^2 + 8x + 2) + \blacklozenge = 3x^2 - 11x - 1$

$\blacklozenge = 3x^2 - 11x - 1 - 5x^2 - 8x - 2$

$\blacklozenge = -2x^2 - 19x - 3$

	$10x^2$	
$7x^2 + 11x + 1$		$3x^2 - 11x - 1$
$2x^2 + 3x - 1$	$5x^2 + 8x + 2$	$-2x^2 - 19x - 3$

ID/BR

30. a) $P_A = 30 + 30 + 2x + 3x + 2x + 3x$
$P_A = 10x + 60$

b) $P_B = 3x + 20 + 3x + 20$
$P_B = 6x + 40$

c) $P_{A+B} = 3x + 2x + 30 + 2x + 20 + 3x + 50$
$P_{A+B} = (3x + 2x + 2x + 3x) + (30 + 20 + 50)$
$P_{A+B} = 10x + 100$

PÁGINA 52 – ATIVIDADES

31. a) $3x \cdot (x^3 + 2x - 2) = 3x \cdot x^3 + 3x \cdot 2x + 3x \cdot (-2) =$
$= 3x^4 + 6x^2 - 6x$

b) $a^3b^2 \cdot (2ab + b - a) = a^3b^2 \cdot 2ab + a^3b^2 \cdot b + a^3b^2 \cdot (-a) =$
$= 2a^4b^3 + a^3b^3 - a^4b^2$

c) $5p^2t^4 \cdot (2p^3t^5 - 6p^7t + p^2 - t) = 5p^2t^4 \cdot 2p^3t^5 + 5p^2t^4 \cdot$
$\cdot (-6p^7t) + 5p^2t^4 \cdot p^2 + 5p^2t^4 \cdot (-t) = 10p^5t^9 - 30p^9t^5 +$
$+ 5p^4t^4 - 5p^2t^5$

d) $\frac{2y^2}{5} \cdot \left(\frac{y^3}{6} - \frac{10y}{7}\right) = \frac{2y^2}{5} \cdot \frac{y^3}{6} + \frac{2y^2}{5} \cdot \left(-\frac{10y}{7}\right) = \frac{2y^5}{30} - \frac{20y^3}{35} =$
$= \frac{y^5}{15} - \frac{4y^3}{7}$

e) $3a \cdot (5x + x^2 - 3a + x) = 3a \cdot 5x + 3a \cdot x^2 + 3a \cdot (-3a) +$
$+ 3a \cdot x = 15ax + 3ax^2 - 9a^2 + 3ax = 3ax^2 - 9a^2 + 18ax$

f) $-9y \cdot (3a + a^2 + 6h + 2) = -9y \cdot 3a - 9y \cdot a^2 - 9y \cdot 6h - 9y \cdot 2 =$
$= -27ya - 9ya^2 - 54yh - 18y$

32. a) $(x + 3) \cdot (x - 5) = x \cdot x + x \cdot (-5) + 3 \cdot x + 3 \cdot (-5) =$
$= x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 2x - 15$

b) $(y^3 - yz) \cdot (z^2y + y^3z) = y^3 \cdot z^2y + y^3 \cdot y^3z - yz \cdot z^2y - yz \cdot$
$\cdot y^3z = y^4z^2 + y^6z - y^2z^3 - y^4z^2 = y^6z - y^2z^3$

c) $(2b - 1) \cdot (b^2 + 3b - 4) = 2b \cdot b^2 + 2b \cdot 3b + 2b \cdot$
$\cdot (-4) - 1 \cdot b^2 - 1 \cdot 3b - 1 \cdot (-4) = 2b^3 + 6b^2 - 8b - b^2 - 3b + 4 =$
$= 2b^3 + 5b^2 - 11b + 4$

d) $\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} =$
$= \frac{a^2}{4} + \frac{a}{6} - \frac{a}{6} - \frac{1}{9} = \frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}$

33. a) $(z^2 - 2z + 1) \cdot (2y + 3y^2) = z^2 \cdot 2y + z^2 \cdot 3y^2 - 2z \cdot 2y - 2z \cdot$
$\cdot 3y^2 + 1 \cdot 2y + 1 \cdot 3y^2 = 2z^2y + 3z^2y^2 - 4zy - 6zy^2 + 2y + 3y^2$

b) $(z^2 - 2z + 1) \cdot (y^2 + 10y + 25) = z^2 \cdot y^2 + z^2 \cdot 10y + z^2 \cdot$
$\cdot 25 - 2z \cdot y^2 - 2z \cdot 10y - 2z \cdot 25 + 1 \cdot y^2 + 1 \cdot 10y + 1 \cdot 25 =$
$= z^2y^2 + 10z^2y + 25z^2 - 2zy^2 - 20zy - 50z + y^2 + 10y + 25$

c) $(2y + 3y^2) \cdot (y^2 + 10y + 25) = 2y \cdot y^2 + 2y \cdot 10y + 2y \cdot 25 +$
$+ 3y^2 \cdot y^2 + 3y^2 \cdot 10y + 3y^2 \cdot 25 = 2y^3 + 20y^2 + 50y + 3y^4 + 30y^3 +$
$+ 75y^2 = 3y^4 + 32y^3 + 95y^2 + 50y$

d) $2 \cdot (z^2 - 2z + 1) = 2 \cdot z^2 + 2 \cdot (-2z) + 2 \cdot 1 = 2z^2 - 4z + 2$

34. a) Região I: $y \cdot 2y = 2y^2$
Região II: $3 \cdot 2y = 6y$
Região III: $y \cdot 4 = 4y$
Região IV: $4 \cdot 3 = 12$

b) Medida da largura: $2y + 4$
Medida do comprimento: $3 + y$
Medida da área do retângulo: $(2y + 4) \cdot (3 + y)$

c) $(2y + 4) \cdot (3 + y) = 2y \cdot 3 + 2y \cdot y + 4 \cdot 3 + 4 \cdot y =$
$= 6y + 2y^2 + 12 + 4y = 2y^2 + 10y + 12$

35. De acordo com o enunciado, temos:
- Valor recebido pela empresa pelos 100 km: $100 \cdot 0{,}93 \cdot x = 93x$
- Valor recebido pela empresa pelos 50 km: $50 \cdot 0{,}93 \cdot (x + 3) =$ $= 46{,}5x + 139{,}5$
- Valor total recebido:

$$93x + 46{,}5x + 139{,}5 = 139{,}5x + 139{,}5$$

36. A distância percorrida em um dia é dada pelo produto da distância percorrida em uma viagem pela quantidade de viagens diárias.
Linha 1: $N \cdot D = ND$
Linha 2: $(N - 20) \cdot (D + 30) = ND + 30N - 20D - 600$
Linha 3: $(N - 24) \cdot (D + 54) = ND + 54N - 24D - 1\,296$
Já a distância percorrida pelos ônibus das três linhas juntas é dada por:
$ND + (ND + 30N - 20D - 600) + (ND + 54N - 24D - 1\,296) =$
$= ND + ND + ND + 30N + 54N - 20D - 24D - 600 - 1\,296 =$
$= 3ND + 84N - 44D - 1\,896$

37. a) Medida da área antes da ampliação:

$$x \cdot x = x^2$$

b) Medida da área após a ampliação:

$$(x + 4) \cdot (x + 2) = x^2 + 2x + 4x + 8 = x^2 + 6x + 8$$

c) A nova área passou a ser 50 m² maior, ou seja, $x^2 + 50$. Logo:

$$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 50$$
$$x^2 - x^2 + 6x = 50 - 8$$
$$6x = 42$$
$$x = \frac{42}{6}$$
$$x = 7$$

Portanto, as dimensões da sala eram 7 m × 7 m.

PÁGINA 55 – ATIVIDADES

38. a) $(26x^{16} + 52x^{13}) : 13x^{13} = \frac{26x^{16} + 52x^{13}}{13x^{13}} =$
$= \frac{26x^{16}}{13x^{13}} + \frac{52x^{13}}{13x^{13}} = 2x^3 + 4$

b) $(-2a^7 + 8a^6) : 4a^5 = \frac{-2a^7 + 8a^6}{4a^5} = \frac{-2a^7}{4a^5} + \frac{8a^6}{4a^5} = -\frac{a^2}{2} + 2a$

c) $(18x^6y^4 - 6x^4y^4) : 9x^4y^3 = \dfrac{18x^6y^4 - 6x^4y^4}{9x^4y^3} = \dfrac{18x^6y^4}{9x^4y^3} - \dfrac{6x^4y^4}{9x^4y^3} =$

$= 2x^2y - \dfrac{2}{3}y$

d) $(-13{,}5a^7b^3c^2 + 9a^6b^4c^2) : (-4{,}5a^6b^3c) =$

$= \dfrac{-13{,}5a^7b^3c^2 + 9a^6b^4c^2}{-4{,}5a^6b^3c} = \dfrac{-13{,}5a^7b^3c^2}{-4{,}5a^6b^3c} + \dfrac{9a^6b^4c^2}{-4{,}5a^6b^3c} =$

$= 3ac - 2bc$

39. a)

$$\begin{array}{l|l}
15a^3 + 23a^2 + 5a + 0 & 3a + 4 \\ \hline
-15a^3 - 20a^2 & 5a^2 + a + \frac{1}{3} \\
\quad 3a^2 + 5a & \\
\quad -3a^2 - 4a & \\
\qquad a + 0 & \\
\qquad -a - \frac{4}{3} & \\
\qquad\quad -\frac{4}{3} &
\end{array}$$

$Q = 5a^2 + a + \frac{1}{3}; R = -\frac{4}{3}$

b)

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 + 8x^2 + 5x + 20 & x + 4 \\ \hline
-2x^3 - 8x^2 & 2x^2 + 5 \\
\qquad 0 \quad 5x + 20 & \\
\qquad\quad -5x - 20 & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$Q = 2x^2 + 5; R = 0$

c)

$$\begin{array}{l|l}
30m^5 + 27m^3 + 5m^2 + 7m + 5 & 5m^2 + 2 \\ \hline
-30m^5 - 12m^3 & 6m^3 + 3m + 1 \\
\quad 15m^3 + 5m^2 + 7m + 5 & \\
\quad -15m^3 - 0m^2 - 6m & \\
\qquad 5m^2 + m + 5 & \\
\qquad -5m^2 - 0m - 2 & \\
\qquad\quad m + 3 &
\end{array}$$

$Q = 6m^3 + 3m + 1; R = m + 3$

d)

$$\begin{array}{l|l}
3a^3 - 5a^2 - 12a + 20 & a^2 - 4 \\ \hline
-3a^3 + 0a^2 + 12a & 3a - 5 \\
\quad -5a^2 - 0a + 20 & \\
\quad +5a^2 + 0a - 20 & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$Q = 3a - 5; R = 0$

40. O dividendo é obtido do produto do divisor pelo quociente mais o resto. Logo:

$$(x^2 + 1) \cdot (x^3 - 3) + 2x = x^5 - 3x^2 + x^3 - 3 + 2x =$$
$$= x^5 + x^3 - 3x^2 + 2x - 3$$

41. O binômio M resulta da divisão da medida da área pelo lado $\overline{BC}$ do retângulo. Logo:

$$M = \frac{9x^3y^3z^4 - 6xy^3}{6xy^3} = \frac{9x^3y^3z^4}{6xy^3} - \frac{6xy^3}{6xy^3} = \frac{3}{2}x^2z^4 - 1$$

PÁGINA 56 – DIVERSIFICANDO

1. a) $-4x^3$

b) Nenhum.

c) xy^4

d) $8x^2y$

e) $\dfrac{x^2y^2}{6}$

2. a) Termo de maior grau: $-4t^6$
Grau do polinômio: 6

b) Termo de maior grau: $2a^4b^3$
Grau do polinômio: 7, pois $4 + 3 = 7$.

c) Termo de maior grau: x^2 e y^2 têm o mesmo grau.
Grau do polinômio: 2

d) Termo de maior grau: a, b e c têm o mesmo grau.
Grau do polinômio: 1

e) Termo de maior grau: $\frac{1}{2}x^2y^3$ e $\frac{2}{3}z^5$ têm o mesmo grau.
Grau do polinômio: 5

3. a) $3x^2$, quando $x = 5$: $3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$

b) $\dfrac{x^4}{2}$, quando $x = 2$: $\dfrac{2^4}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$

c) y^3, quando $y = -3$: $(-3)^3 = -27$

d) x^3y^2, quando $x = -4$ e $y = \frac{1}{4}$: $(-4)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = -64 \cdot \frac{1}{16} =$

$= -\dfrac{64}{16} = -4$

4. a) O erro está em ter multiplicado 2 por 3 em vez de tê-los adicionado.
Correto: $(2a + b) + (3a + 6b) = 2a + b + 3a + 6b = 5a + 7b$

b) O erro está em ter adicionado $1m$ a $5m$ em vez de tê-los multiplicado.
Correto: $m(5m + 15n) = 5m^2 + 15mn$

c) O erro está em não se ter aplicado a propriedade distributiva.
Correto: $(x + y) \cdot (x - y) = x \cdot x - x \cdot y + y \cdot x - y \cdot y = x^2 - y^2$

d) A subtração $-(p + q)$ não foi realizada corretamente.
Correto: $(p - q) - (p + q) = p - q - p - q = -2q$

e) O erro está em calcular $pq + pq$, em vez de calcular $pq - pq$.
Correto: $(p - q) \cdot (p + q) = p^2 + p \cdot q - p \cdot q - q \cdot q = p^2 - q^2$

5. A medida da área de um quadrado é expressa pelo produto das medidas de dois de seus lados. Logo, para calcular a medida de sua área A, fazemos:

$$A = p \cdot p = p^2$$

6. Sendo P a medida do perímetro da figura, temos:

$$P = 4a + 5a + 3a + 3a = 15a$$

7. a) $7x + 9x = 16x$

b) $m^2 + 2m^2 = 3m^2$

c) $-a - 3a = -4a$

d) $2ab^2 + 5ab^2 - 7ab^2 = 7ab^2 - 7ab^2 = 0$

e) $0{,}12xy + 0{,}21xy - 1{,}36xy - 0{,}97xy = 0{,}33xy - 1{,}36xy - 0{,}97xy =$
$= -1{,}03xy - 0{,}97xy = -2xy$

f) $7{,}352p^2q^2r + 6{,}005p^2q^2r - 0{,}005p^2q^2r + 0{,}352p^2q^2r =$
$= 13{,}357p^2q^2r - 0{,}005p^2q^2r + 0{,}352\, p^2q^2r = 13{,}352p^2q^2r +$
$+ 0{,}352p^2q^2r = 13{,}704p^2q^2r$

g) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x - \frac{3}{10}x = \frac{10x}{30} + \frac{6x}{30} - \frac{9x}{30} = \frac{16x}{30} - \frac{9x}{30} = \frac{7x}{30}$

h) $-y^5 + \frac{7}{9}y^5 - \frac{8}{3}y^5 = -\frac{9y^5}{9} + \frac{7y^5}{9} - \frac{24y^5}{9} = -\frac{2y^5}{9} - \frac{24y^5}{9} =$

$= -\frac{26y^5}{9}$

8. $M + \frac{2x^3y}{7} = \frac{x^3y}{14}$

$$M = \frac{x^3y}{14} - \frac{2x^3y}{7}$$

$$M = \frac{x^3y - 4x^3y}{14}$$

$$M = -\frac{3x^3y}{14}$$

9. Chamando o polinômio procurado de P, temos:

$$P \cdot 2x = 4x^4 + 6x^3 + 2x$$

$$P = \frac{4x^4 + 6x^3 + 2x}{2x}$$

$$P = \frac{4x^4}{2x} + \frac{6x^3}{2x} + \frac{2x}{2x}$$

$$P = 2x^3 + 3x^2 + 1$$

Logo, o polinômio é $2x^3 + 3x^2 + 1$.

10. Seguindo o sentido das setas, temos:

♦ : $2a^4 + 3a^4 = 5a^4$

♥ : $5a^4 \cdot 2a^2 = 10a^6$

★ : $10a^6 : 5a = 2a^{6-1} = 2a^5$

☺ : $2a^5 - 8a^5 = -6a^5$

E por fim, conferimos se a última transição resulta no monômio inicial:

$$(-6a^5) : (-3a) = 2a^{5-1} = 2a^4$$

11. A medida da área de uma figura retangular é dada pelo produto de suas dimensões. Portanto:

$$A = (2x + 5) \cdot (x - 3)$$

$$A = 2x^2 - 6x + 5x - 15$$

$$A = 2x^2 - x - 15$$

12. a) $x + x - 20 = 2x - 20$

b) Modelo 1: $750x$

Modelo 2: $925 \cdot (x - 20) = 925x - 18\,500$

Arrecadação total: $750x + 925x - 18\,500 = 1\,675x - 18\,500$

c) $1\,675x - 18\,500 = 48\,500$

$1\,675x = 48\,500 + 18\,500$

$1\,675x = 67\,000$

$x = \frac{67\,000}{1\,675}$

$x = 40$

Portanto, havia 40 celulares do modelo 1 e 20 do modelo 2 $(40 - 20 = 20)$.

13. a) Indicando a medida do perímetro por P, temos:

$P = 2b + 5a - b + 7 + 2b + 3a + 2a + 1 + a - 2b + 7 + 2a +$
$+ 1 + a + b$

$P = 5a + 3a + 2a + a + 2a + a + 2b - b + 2b - 2b + b + 7 +$
$+ 1 + 7 + 1$

$P = 14a + 2b + 16$

b) $P = 14a + 2b + 16$

$36 = 14 \cdot 1 + 2b + 16$

$36 = 14 + 16 + 2b$

$36 = 30 + 2b$

$36 - 30 = 2b$

$6 = 2b$

$\frac{6}{2} = b$

$3 = b$

Portanto, $b = 3$ cm.

14. Para encontrar a medida da área não perfurada, é necessário calcular a medida da área dos dois quadrados da figura e, depois, subtrair a menor da maior.

Medida da área do quadrado maior (A):

$$A = (2p + 6) \cdot (2p + 6)$$

$$A = 4p^2 + 12p + 12p + 36$$

$$A = 4p^2 + 24p + 36$$

Medida da área do quadrado menor (B):

$$B = (p + 2) \cdot (p + 2)$$

$$B = p^2 + 2p + 2p + 4$$

$$B = p^2 + 4p + 4$$

Para determinar a medida da área não perfurada (L), precisamos subtrair a medida da área do quadrado menor da medida da área do quadrado maior ($L = A - B$). Então:

$$L = (4p^2 + 24p + 36) - (p^2 + 4p + 4)$$

$$L = 4p^2 + 24p + 36 - p^2 - 4p - 4$$

$$L = 3p^2 + 20p + 32$$

15. a) Medida do volume I: $x \cdot 4x \cdot y = 4x^2y$

Medida do volume II: $x \cdot 2y \cdot y = 2xy^2$

Medida do volume III: $x \cdot 3 \cdot y = 3xy$

b) A medida do volume total é dada pela adição das medidas dos volumes I, II e III: $4x^2y + 2xy^2 + 3xy$

16. a) Como os triângulos são equiláteros, seus lados também medem x. Assim, a medida do perímetro é dada por:

$$x + x + x + x + x + x = 6x$$

b) Substituindo x por 2, temos:

$$6x = 6 \cdot 2 = 12$$

Portanto, a medida do perímetro da figura é 12 cm.

17. a) $(x + 2) \cdot (x + 1) \cdot 1 = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2$

b) Como a base da caixa é um retângulo, temos:

$$(x + 2) \cdot (x + 1) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2$$

c) A razão entre a medida da capacidade e a medida da área da base é dada por:

$$\frac{(x^2 + 3x + 2)}{(x^2 + 3x + 2)} = 1$$

PÁGINA 58 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Respostas pessoais.

2. a) Respostas pessoais.

b) Respostas pessoais.

3. Resposta pessoal.

PÁGINA 60 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. **a)** $t_F = 32 + \frac{9}{5}t_C$

b) Substituindo t_C por 25, temos:

$$t_F = 32 + \frac{9}{5} \cdot 25 = 32 + 45 = 77\ °F$$

2. Fábrica A: x

Fábrica B: $2x - 100$

Fábrica C: $\frac{x}{2} + 200$

3. **a)** Incorreta. Correção possível: Um polinômio é toda expressão algébrica formada por uma adição ou por uma subtração de monômios.

b) Incorreta. Correção possível: Um polinômio é toda expressão algébrica formada pela adição ou pela subtração de monômios.

c) Correta.

4. **a)** A medida P do perímetro é dada pela soma das medidas dos lados. Logo:

$P = a + a + b + b + b + a + b + a = a + a + a + a + b +$

$+ b + b + b = 4a + 4b$

Portanto, $P = 4(a + b)$.

A medida A da área da figura é dada pela soma das medidas das áreas dos quadrados e do retângulo.

Medida da área do quadrado menor: $a \cdot a = a^2$

Medida da área do quadrado maior: $b \cdot b = b^2$

Medida da área do retângulo: $a \cdot b = ab$

Medida da área total: $A = a^2 + ab + b^2$

b) Substituindo a por 3 e b por 7, temos:

$P = 4 \cdot (3 + 7) = 4 \cdot 10 = 40$

$A = 3^2 + 3 \cdot 7 + 7^2 = 9 + 21 + 49 = 79$

5. Alternativa **e**.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^4 & -\ 4x^3 & +\ 0x^2 & -\ kx & -\ 75 & & x-5 \\ \cline{7-7}
-x^4 & +\ 5x^3 & & & & & x^3 + x^2 + 5x + (25-k) \\ \cline{1-2}
 & x^3 & +\ 0x^2 & -\ kx & -\ 75 & & \\
 & -x^3 & +\ 5x^2 & & & & \\ \cline{2-3}
 & & 5x^2 & -\ kx & -\ 75 & & \\
 & & -5x^2 & +\ 25x & & & \\ \cline{3-4}
 & & & (25-k)x & -\ 75 & & \\
 & & & -(25-k)x & +\ 5(25-k) & & \\ \cline{4-5}
 & & & & -75 + 5(25-k) & &
\end{array}$$

Igualando o resto a 10, temos:

$$-75 + 5 \cdot (25 - k) = 10$$
$$-75 + 125 - 5k = 10$$
$$50 - 5k = 10$$
$$-5k = 10 - 50$$
$$-5k = -40$$
$$k = \frac{-40}{-5}$$
$$k = 8$$

6. **a)** Para $x = 8$, as dimensões do bloco retangular são 16, 8 e 9. Logo, seu volume mede:

$$16 \cdot 8 \cdot 9 = 1\,152$$

b) A expressão $2x \cdot x \cdot (x + 1)$ representa o produto das três dimensões do bloco, ou seja, a medida do volume do bloco.

c) O valor obtido é o mesmo do item **a**, ou seja:

$$2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot (8 + 1) = 16 \cdot 8 \cdot 9 = 1\,152$$

7. **a)**

$$\begin{array}{rr|l}
3b & +\ 5 & b + 1 \\ \cline{3-3}
-3b & -\ ★ & 3 \\ \cline{1-2}
 & 2 &
\end{array}$$

Para descobrir o valor da ★, multiplicamos 3 por $(b + 1)$, obtendo $3b + 3$.

Subtraindo $3b$ e 3 do dividendo, descobrimos que ★ = 3.

b) Para descobrir o valor do ●, multiplicamos o termo de maior grau do divisor pelo termo de maior grau do quociente, que deve ser igual ao termo de maior grau do dividendo:

$$3a \cdot ● = 6a^2$$
$$● = \frac{6a^2}{3a}$$
$$● = 2a$$

Então:

$$\begin{array}{rrr|l}
6a^2 & +\ ▲ & +\ 7 & 2a + 2 \\ \cline{4-4}
-6a^2 & -\ ★ & & 3a \\ \cline{1-3}
 & -\ 6a & +\ 7 &
\end{array}$$

Multiplicando $3a$ por $(2a + 2)$ temos $(6a^2 + 6a)$.

Subtraindo $6a^2$ e $6a$ do dividendo, descobrimos que ★ = $6a$.

Mas:

$$▲ - ★ = -6a$$
$$▲ - 6a = -6a$$
$$▲ = 0$$

Portanto:

$$\begin{array}{rrr|l}
6a^2 & +\ 0a & +\ 7 & 2a + 2 \\ \cline{4-4}
-6a^2 & -\ 6a & & 3a \\ \cline{1-3}
 & -\ 6a & +\ 7 &
\end{array}$$

Agora, vamos descobrir qual é o número que multiplicado por $2a$ resulta em $-6a$.

$$■ \cdot 2a = -6a$$
$$■ = -3$$

Daí:

$$\begin{array}{rrr|l}
6a^2 & +\ 0a & +\ 7 & 2a + 2 \\ \cline{4-4}
-6a^2 & -\ 6a & & 3a - 3 \\ \cline{1-3}
 & -\ 6a & +\ 7 & \\
 & +\ 6a & +\ 6 & \\ \cline{2-3}
 & & ♦ &
\end{array}$$

Por último, calculamos:

$$7 + 6 = ♦$$
$$♦ = 13$$

Assim: ▲ = 0; ● = $2a$; ★ = $6a$; ■ = -3; ♦ = 13.

c) Para encontrar o valor da ★, multiplicamos o quociente pelo divisor, adicionamos o resultado ao resto e igualamos ao dividendo. Assim:

$$\frac{1}{2} \cdot (10m - 3) + \frac{1}{2} = ★ - 1$$
$$\frac{1}{2} \cdot [(10m - 3) + 1] = ★ - 1$$
$$(10m - 3) + 1 = 2 \cdot ★ - 2$$
$$10m - 2 = 2 \cdot ★ - 2$$
$$10m = 2 \cdot ★$$
$$\frac{10m}{2} = ★$$
$$5m = ★$$

Para descobrir o valor do $\blacktriangle$, fazemos:

$$-1 + \blacktriangle = \frac{1}{2}$$

$$\blacktriangle = \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$$

Assim:

$$\begin{array}{r|l} 5m - 1 & 10m - 3 \\ \hline -5m + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \end{array}$$

Logo, $\bigstar = 5m$; $\blacktriangle = \frac{3}{2}$.

8. • Boniteza

Substituindo p por 3, d por 250 e h por 320, temos:

$$9{,}60 \cdot 3 + \frac{7{,}50 \cdot 250}{10} + 5 \cdot 320 =$$
$$= 28{,}8 + 187{,}5 + 1\,600 = 1\,816{,}30$$

Portanto, na viagem para Boniteza, o gasto será R\$ 1 816,30.

• Mimosa

Substituindo p por 4, d por 120 e h por 400, temos:

$$9{,}60 \cdot 4 + \frac{7{,}50 \cdot 120}{10} + 5 \cdot 400 =$$
$$= 38{,}4 + 90 + 2\,000 = 2\,128{,}40$$

Portanto, na viagem para Mimosa, o gasto será R\$ 2 128,40.

Logo, o casal deverá ir a Boniteza, já que os gastos da viagem são menores.

9. **a)** Resposta pessoal. Uma possível resposta seria: Convertendo a medida que foi dada em metro para centímetro:

$$(0{,}01x + 0{,}25) \cdot 100 = (x + 25)$$

Logo, a medida é $(x + 25)$ cm.

b) A medida da área desse retângulo, em centímetro quadrado, é dada por:

$$(x + 25) \cdot (x + 2) = x^2 + 2x + 25x + 50 =$$
$$= x^2 + 27x + 50$$

c) Respostas pessoais.

10. O polinômio que representa a medida do volume da embalagem azul é:

$$4x \cdot (4x + 1) \cdot (x + 2) = (16x^2 + 4x) \cdot (x + 2) =$$
$$= 16x^3 + 32x^2 + 4x^2 + 8x = 16x^3 + 36x^2 + 8x$$

O polinômio que representa a medida do volume da embalagem rosa é:

$$2 \cdot x \cdot (2x^2 + 3x + 1) = 2x \cdot (2x^2 + 3x + 1) =$$
$$= 4x^3 + 6x^2 + 2x$$

Dividindo a medida do volume da embalagem azul pela medida do volume da embalagem rosa, obtemos a quantidade de embalagens rosa que podem ser enchidas:

$$\begin{array}{r|l} 16x^3 + 36x^2 + 8x & 4x^3 + 6x^2 + 2x \\ \hline -16x^3 - 24x^2 - 8x & 4 \\ \hline 12x^2 & \end{array}$$

Portanto, é possível encher completamente 4 embalagens.

11. Resposta pessoal.

12. Resposta pessoal.

UNIDADE 3 – EQUAÇÕES E SISTEMAS

CAPÍTULO 1 – EQUAÇÕES

PÁGINA 69 – ATIVIDADES

1. Alternativas **a** e **d**.

a) $3x - x = 8 + 3$

$$2x = 11$$
$$2x - 11 = 0$$

É uma equação do 1º grau com uma incógnita, pois é do tipo $ax + b = 0$, com $a \neq 0$.

b) $\frac{a^2}{2} = 5{,}5$

Não é uma equação do 1º grau com uma incógnita, pois o expoente da incógnita a é diferente de 1.

c) $25{,}8 + 2x - 13{,}2 = 12{,}6 + 2x$

$$2x + 12{,}6 = 12{,}6 + 2x$$
$$2x - 2x = 12{,}6 - 12{,}6$$
$$0x = 0$$

Não é uma equação do 1º grau com uma incógnita, pois o coeficiente de x é zero.

d) $5y + 3y = 14 - 6$

$$8y = 8$$
$$8y - 8 = 0$$

É uma equação do 1º grau com uma incógnita, pois é do tipo $ax + b = 0$, com $a \neq 0$.

2. **a)** Considerando x a fração geratriz da dízima $0{,}\overline{2}$, tem-se:

$$x = 0{,}222... \quad \text{(I)}$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 10, tem-se:

$$10 \cdot x = 10 \cdot 0{,}222...$$
$$10x = 2{,}222... \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II), tem-se:

$$10x - x = 2{,}222... - 0{,}222...$$
$$9x = 2$$
$$x = \frac{2}{9}$$

b) Considerando x a fração geratriz da dízima $1{,}\overline{18}$, tem-se:

$$x = 1{,}181818... \quad \text{(I)}$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 100, tem-se:

$$100 \cdot x = 100 \cdot 1{,}181818...$$
$$100x = 118{,}181818... \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II), tem-se:

$$100x - x = 118{,}181818... - 1{,}181818...$$
$$99x = 117$$
$$x = \frac{117}{99}$$

c) Considerando x a fração geratriz da dízima $0{,}3\overline{42}$, tem-se:

$$x = 0{,}3424242...$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 10, tem-se:

$$10 \cdot x = 10 \cdot 0{,}3424242...$$
$$10x = 3{,}424242... \quad \text{(I)}$$

Agora, para obter outro número na forma decimal com o mesmo período, multiplicamos os dois membros dessa igualdade por 100.

$$100 \cdot 10x = 100 \cdot 3{,}424242...$$
$$1\,000x = 342{,}424242... \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II), tem-se:

$$1\,000x - 10x = 342{,}424242... - 3{,}424242...$$
$$990x = 339$$
$$x = \frac{339}{990}$$

d) Considerando x a fração geratriz da dízima $0{,}181\overline{3}$, tem-se:

$$x = 0{,}181333...$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 1 000, tem-se:

$$1\,000 \cdot x = 1\,000 \cdot 0{,}181333...$$
$$1\,000x = 181{,}333... \quad \text{(I)}$$

Agora, para obter outro número na forma decimal com o mesmo período, multiplicamos os dois membros dessa igualdade por 10.

$$10 \cdot 1\,000x = 10 \cdot 181{,}333...$$
$$10\,000x = 1\,813{,}333... \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II), tem-se:

$$10\,000x - 1\,000x = 1\,813{,}333... - 181{,}333...$$
$$9\,000x = 1\,632$$
$$x = \frac{1\,632}{9\,000}$$

3. Seja x uma fração geratriz que pertence ao seguinte intervalo:

$$0{,}\overline{1} < x < \frac{7}{8}$$
$$0{,}\overline{1} < x < 0{,}875$$

Então, três frações possíveis são:

$$\frac{3}{9} = 0{,}\overline{3}$$
$$\frac{27}{99} = 0{,}\overline{27}$$
$$\frac{7\,747}{9\,900} = 0{,}78\overline{25}$$

4. **a)**

Fração geratriz	Forma decimal	Período
$\frac{62}{9}$	$6{,}\overline{8}$	8
$\frac{435}{990}$	$0{,}4\overline{39}$	39
$\frac{39}{9}$	$4{,}\overline{3}$	3
$\frac{4}{30}$	$0{,}1\overline{3}$	3

• $\frac{62}{9} = 62 : 9 = 6{,}888... = 6{,}\overline{8}$

Período da dízima: 8.

- $0,4\overline{39} = 0,4393939...$

  Considerando x a fração geratriz da dízima $0,4\overline{39}$, tem-se:

  $$x = 0,4393939...$$

  Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 10, tem-se:

  $$10 \cdot x = 10 \cdot 0,4393939...$$

  $$10x = 4,393939... \quad \text{(I)}$$

  Para obter outro número na forma decimal com o mesmo período, multiplicamos os dois membros dessa igualdade por 100.

  $$100 \cdot 10x = 100 \cdot 4,393939...$$

  $$1\,000x = 439,393939... \quad \text{(II)}$$

  Subtraindo (I) de (II), tem-se:

  $$1000x - 10x = 439,393939... - 4,393939...$$

  $$990x = 435$$

  $$x = \frac{435}{990}$$

  Período da dízima: 39.

- $4,\overline{3} = 4,333...$

  Considerando x a fração geratriz da dízima $4,\overline{3}$, tem-se:

  $$x = 4,333... \quad \text{(I)}$$

  Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 10, tem-se:

  $$10 \cdot x = 10 \cdot 4,333...$$

  $$10x = 43,333... \quad \text{(II)}$$

  Subtraindo (I) de (II), tem-se:

  $$10x - x = 43,333... - 4,333...$$

  $$9x = 39$$

  $$x = \frac{39}{9}$$

  Período da dízima: 3.

- $\frac{4}{30} = 4 : 30 = 0,13333... = 0,1\overline{3}$

  Período da dízima: 3.

b) Simples: $6,\overline{8}$; $4,\overline{3}$; compostas: $0,4\overline{39}$; $0,1\overline{3}$.

5. Alternativas **b**, **d** e **e**.

a) $x = 8$

Não é uma equação do 1º grau com duas incógnitas, pois tem apenas uma incógnita.

b) $2x - 3y = 9$

É equação do 1º grau com duas incógnitas.

c) $\frac{1}{2} + w = 1$

Não é uma equação do 1º grau com duas incógnitas, pois tem apenas uma incógnita.

d) $3(x - 4) = 2y + 1$

$$3x - 12 = 2y + 1$$

$$3x - 2y = 1 + 12$$

$$3x - 2y = 13$$

É equação do 1º grau com duas incógnitas.

e) $\frac{x}{2} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{y}{4}$

mmc(2, 8, 4) = 8

$$\frac{4x}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} - \frac{2y}{8}$$

$$4x + 1 = 8 - 2y$$

$$4x + 2y = 8 - 1$$

$$4x + 2y = 7$$

É equação do 1º grau com duas incógnitas.

6. Não. A afirmação II é falsa. Justificativa possível: Trata-se de uma equação do 1º grau que, ao ser simplificada, fica apenas com uma incógnita (y).

PÁGINA 72 – ATIVIDADES

7. $x + 3y = 21$

Respostas possíveis:

- Para $x = 0$:

  $$0 + 3y = 21$$
  $$3y = 21$$
  $$y = \frac{21}{3}$$
  $$y = 7$$

  Par ordenado: (0, 7).

- Para $x = 21$:

  $$21 + 3y = 21$$
  $$3y = 21 - 21$$
  $$3y = 0$$
  $$y = 0$$

  Par ordenado: (21, 0).

- Para $x = 20$:

  $$20 + 3y = 21$$
  $$3y = 21 - 20$$
  $$3y = 1$$
  $$y = \frac{1}{3}$$

  Par ordenado: $\left(20, \frac{1}{3}\right)$.

8. **a)** $2x + 3y = 200$

b) Substituindo x por 65 e y por 30 no 1º membro da equação do item **a**, tem-se:

$$2 \cdot 65 + 3 \cdot 30 = 130 + 90 = 220$$

Como Marcos gastou R$ 200,00, não é possível que cada calça tenha custado R$ 65,00 e cada camiseta, R$ 30,00.

c) Respostas possíveis:

- Para $x = 55$:

  $$2 \cdot 55 + 3y = 200$$
  $$110 + 3y = 200$$
  $$3y = 200 - 110$$
  $$3y = 90$$
  $$y = \frac{90}{3}$$
  $$y = 30$$

  Par ordenado: (55, 30).

  Portanto, cada calça pode custar R$ 55,00 e cada camiseta, R$ 30,00.

- Para $y = 25$:

  $$2x + 3 \cdot 25 = 200$$
  $$2x + 75 = 200$$
  $$2x = 200 - 75$$
  $$2x = 125$$
  $$x = \frac{125}{2}$$
  $$x = 62,5$$

  Par ordenado: (62,5; 25).

  Portanto, cada calça pode custar R$ 62,50 e cada camiseta, R$ 25,00.

- Para $x = 25$:

  $$2 \cdot 25 + 3y = 200$$
  $$50 + 3y = 200$$
  $$3y = 200 - 50$$
  $$3y = 150$$
  $$y = \frac{150}{3}$$
  $$y = 50$$

  Par ordenado: (25, 50).

  Portanto, cada calça pode custar R$ 25,00 e cada camiseta, R$ 50,00.

9. Encontra-se dois pares ordenados que são soluções da equação $x - y = 2$ e verifica-se se eles pertencem à reta vermelha ou à reta azul. Escolhe-se apenas dois pares, pois por dois pontos passa uma única reta.

- Para $x = 0$:

  $$0 - y = 2$$
  $$-y = 2$$
  $$y = -2$$

  Par ordenado: (0, −2)

- Para $x = 1$:

  $$1 - y = 2$$
  $$-y = 2 - 1$$
  $$-y = 1$$
  $$y = -1$$

  Par ordenado: (1, −1)

Analisando as retas, observa-se que os pares ordenados (0, −2) e (1, −1) pertencem à reta azul.

Logo, a reta azul contém as soluções da equação $x - y = 2$.

10. Uma resolução possível é encontrar dois pares ordenados que são soluções da equação $-x + y = 3$ e, depois, verificar a qual reta eles pertencem. Assim:

- Para $x = -1$:

  $$-(-1) + y = 3$$
  $$1 + y = 3$$
  $$y = 3 - 1$$
  $$y = 2$$

  Par ordenado: (−1, 2)

- Para $x = -2$:

  $$-(-2) + y = 3$$
  $$2 + y = 3$$
  $$y = 3 - 2$$
  $$y = 1$$

  Par ordenado: (−2, 1)

Analisando as retas, pode-se observar que os pares ordenados $(-1, 2)$ e $(-2, 1)$ pertencem à reta roxa.

Logo, a equação $-x + y = 3$ é representada pela reta roxa.

A explicação de como se chegou a essa conclusão é pessoal.

11. Observa-se que os pontos verdes estão alinhados; do mesmo modo, os pontos vermelhos também estão alinhados. Assim, pode-se traçar uma reta que passa por cada um desses conjuntos de pontos.

Para determinar se o conjunto de pontos é ou não solução da equação, substitui-se um par ordenado na equação e verifica-se se a sentença obtida é verdadeira (V) ou falsa (F). Se ela for falsa, a reta que passa por esse ponto não é solução da equação. Se ela for verdadeira, deve-se substituir mais um par ordenado do conjunto considerado na equação e verificar se a sentença é verdadeira ou falsa. Nessa segunda substituição, se a sentença obtida for falsa, a reta que passa por esse ponto não é solução da equação. Se ela for verdadeira, a reta que passa por esses dois pontos é solução da equação. Lembre-se de que por dois pontos distintos passa uma única reta.

a) $x = y - 2$

Pontos vermelhos: $(4, 0)$ e $(6, 1)$

- Para $x = 4$ e $y = 0$:

$$4 = 0 - 2$$
$$4 = -2 \ \text{(F)}$$

Logo, o par ordenado $(4, 0)$ não é solução da equação e, portanto, os pontos vermelhos não são solução da equação.

Pontos verdes: $(0, 2)$ e $(1, 3)$

- Para $x = 0$ e $y = 2$:

$$0 = 2 - 2$$
$$0 = 0 \ \text{(V)}$$

- Para $x = 1$ e $y = 3$:

$$1 = 3 - 2$$
$$1 = 1 \ \text{(V)}$$

Logo, os pares ordenados $(0, 2)$ e $(1, 3)$ e os demais pontos verdes são soluções da equação $x = y - 2$.

b) $x^2 + y = -3$

Como a equação não é de 1º grau com duas incógnitas, o gráfico não será uma reta; portanto, nem os pontos vermelhos nem os pontos verdes são soluções da equação.

c) $7 = -x + 7y$

Pontos vermelhos: $(-2, -3)$ e $(4, 0)$

- Para $x = -2$ e $y = -3$:

$$7 = -(-2) + 7 \cdot (-3)$$
$$7 = 2 - 21$$
$$7 = -19 \ \text{(F)}$$

Logo, o par ordenado $(-2, -3)$ não é solução da equação e, portanto, os pontos vermelhos não são solução da equação.

Pontos verdes: $(4, 6)$ e $(1, 3)$

- Para $x = 4$ e $y = 6$:

$$7 = -4 + 7 \cdot 6$$
$$7 = -4 + 42$$
$$7 = 38 \ \text{(F)}$$

Logo, o par ordenado $(4, 6)$ não é solução da equação e, portanto, os pontos verdes não são solução da equação.

d) $2y = x - 4$

Pontos vermelhos: $(-4, -4)$ e $(2, -1)$

- Para $x = -4$ e $y = -4$

$$2 \cdot (-4) = -4 - 4$$
$$-8 = -8 \ \text{(V)}$$

- Para $x = 2$ e $y = -1$

$$2 \cdot (-1) = 2 - 4$$
$$-2 = -2 \ \text{(V)}$$

Logo, os pares ordenados $(-4, -4)$ e $(2, -1)$ e os demais pontos vermelhos são soluções da equação $2y = x - 4$.

e) $y^2 = 3$

Como a equação não é de 1º grau com duas incógnitas, o gráfico não será uma reta e, portanto, nem os pontos vermelhos nem os pontos verdes são soluções da equação.

f) $x^2 + y^2 = 1$

Como a equação não é de 1º grau com duas incógnitas, o gráfico não será uma reta e, portanto, nem os pontos vermelhos nem os pontos verdes são soluções da equação.

12. $2x + y = 6$

Resposta possível:

- Para $x = 0$:

$$2 \cdot 0 + y = 6$$
$$y = 6$$

Par ordenado: $(0, 6)$

- Para $x = 1$:

$$2 \cdot 1 + y = 6$$
$$2 + y = 6$$
$$y = 6 - 2$$
$$y = 4$$

Par ordenado: $(1, 4)$

- Para $x = 3$:

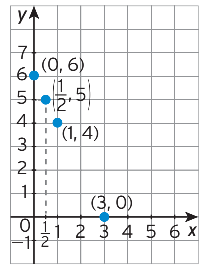
$$2 \cdot 3 + y = 6$$
$$6 + y = 6$$
$$y = 6 - 6$$
$$y = 0$$

Par ordenado: $(3, 0)$

- Para $x = \frac{1}{2}$:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + y = 6$$
$$1 + y = 6$$
$$y = 6 - 1$$
$$y = 5$$

Par ordenado: $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$



Ilustrações: ID/BR

13. Respostas possíveis:

a) $2x + y = 16$

- Para $x = 0$:

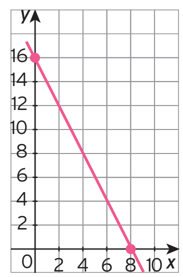
$$2 \cdot 0 + y = 16$$
$$y = 16$$

Par ordenado: $(0, 16)$

- Para $x = 8$:

$$2 \cdot 8 + y = 16$$
$$16 + y = 16$$
$$y = 16 - 16$$
$$y = 0$$

Par ordenado: $(8, 0)$



b) $x - 3y = 10$

- Para $x = 10$:

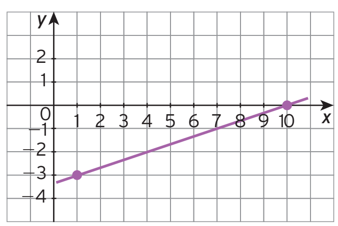
$$10 - 3y = 10$$
$$-3y = 10 - 10$$
$$-3y = 0$$
$$y = 0$$

Par ordenado: $(10, 0)$

- Para $x = 1$

$$1 - 3y = 10$$
$$-3y = 10 - 1$$
$$-3y = 9$$
$$y = \frac{9}{-3}$$
$$y = -3$$

Par ordenado: $(1, -3)$



c) $2x + 2y = 32$

- Para $x = 10$:

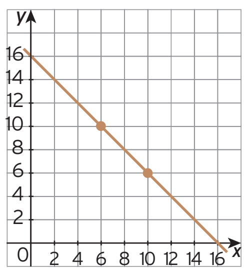
$$2 \cdot 10 + 2y = 32$$
$$20 + 2y = 32$$
$$2y = 32 - 20$$
$$2y = 12$$
$$y = \frac{12}{2}$$
$$y = 6$$

Par ordenado: (10, 6)

- Para $x = 6$

$$2 \cdot 6 + 2y = 32$$
$$12 + 2y = 32$$
$$2y = 32 - 12$$
$$2y = 20$$
$$y = \frac{20}{2}$$
$$y = 10$$

Par ordenado: (6, 10)



Ilustrações: ID/BR

d) $2x + 3y = 24$

- Para $x = 3$:

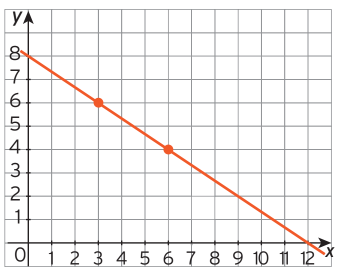
$$2 \cdot 3 + 3y = 24$$
$$6 + 3y = 24$$
$$3y = 24 - 6$$
$$y = \frac{18}{3}$$
$$y = 6$$

Par ordenado: (3, 6)

- Para $y = 4$:

$$2x + 3 \cdot 4 = 24$$
$$2x + 12 = 24$$
$$2x = 24 - 12$$
$$x = \frac{12}{2}$$
$$x = 6$$

Par ordenado: (6, 4)



PÁGINA 76 – ATIVIDADES

14. De acordo com o enunciado, $a = 18$ e $c = 72$. Então a equação é $18x^2 + 72 = 0$.

15. a) $-12x^2 + 14 = 0$

Incógnita: x

Coeficiente a: -12

Coeficiente c: 14

b) $z^2 = \frac{36}{144}$

$z^2 - \frac{36}{144} = 0$

Incógnita: z

Coeficiente a: 1

Coeficiente c: $-\frac{36}{144}$

c) $0{,}64n^2 = 0$

Incógnita: n

Coeficiente a: 0,64

Coeficiente c: 0

16. Considerando n a nota final de Alexandre, tem-se:

$$2n^2 = 0$$
$$n^2 = 0$$
$$n = 0$$

Portanto, a nota final é 0.

17. $10x^2 - 1\,000 = 0$

$$10x^2 = 1\,000$$
$$x^2 = \frac{1\,000}{10}$$
$$x^2 = 100$$
$$x = \pm\sqrt{100}$$
$$x = \pm 10$$

As soluções são $x_1 = 10$ e $x_2 = -10$.

Calculando a soma dos cubos de x_1 e x_2, tem-se:

$$10^3 + (-10)^3 = 1\,000 - 1\,000 = 0$$

18. Alternativa **c**.

$$4x^2 - 100 = 0$$
$$4x^2 = 100$$
$$x^2 = \frac{100}{4}$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \pm\sqrt{25}$$
$$x = \pm 5$$

Logo, as soluções são 5 e -5.

19. a) $x^2 = -169$

$x = \pm\sqrt{-169}$

1 6 9 +/– √

No visor da calculadora, poderá aparecer E ou Entrada inválida, pois não existe raiz quadrada racional de número negativo. Logo, não existem soluções racionais.

b) $x^2 - 169 = 0$

$$x^2 = 169$$
$$x = \pm\sqrt{169}$$

1 6 9 √

No visor da calculadora aparecerá apenas a raiz positiva dessa equação, ou seja, o número 13. Porém, as soluções dessa equação são -13 e 13.

c) $2x^2 - 288 = 0$

$$2x^2 = 288$$
$$x^2 = \frac{288}{2}$$
$$x^2 = 144$$
$$x = \pm\sqrt{144}$$

1 4 4 √

No visor da calculadora aparece apenas a raiz positiva dessa equação, ou seja, o número 12. Porém, as soluções dessa equação são -12 e 12.

d) $4x^2 = 0$

$$x^2 = \frac{0}{4}$$
$$x^2 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{0}$$

0 √

No visor da calculadora aparecerá o número zero. Nesse caso, o único número que, elevado ao quadrado, é igual a zero é o próprio zero, assim 0 é a solução dessa equação.

e) $5x^2 - 3\,125 = 0$

$$5x^2 = 3125$$
$$x^2 = \frac{3125}{5}$$
$$x^2 = 625$$
$$x = \pm\sqrt{625}$$

6 2 5 √

A calculadora informa apenas a raiz positiva dessa equação, ou seja, o número 25. Porém, as soluções dessa equação são -25 e 25.

20. a) $x^2 - 25 = 0$

$$x^2 = 25$$
$$x = \pm\sqrt{25}$$
$$x = \pm 5$$

Logo, -5 e 5 são soluções da equação.

b) $2x^2 + 7 = 5x^2 - 20$

$$2x^2 - 5x^2 = -20 - 7$$
$$-3x^2 = -27$$
$$x^2 = \frac{-27}{-3}$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$

Portanto, -3 e 3 são soluções da equação.

c) $2x^2 + 10 = 0$

$$2x^2 = -10$$
$$x^2 = -\frac{10}{2}$$
$$x^2 = -5$$

Não existe número racional que, elevado ao quadrado, resulte em -5. Portanto, essa equação não tem soluções racionais.

d) $5x \cdot \frac{2x}{3} = 0$

$\frac{10x^2}{3} = 0$

$10x^2 = 0 \cdot 3$

$x^2 = \frac{0}{10}$

$x^2 = 0$

$x = 0$

Portanto, 0 é solução da equação.

e) $3x^2 + 12 = 0$

$3x^2 = -12$

$x^2 = \frac{-12}{3}$

$x^2 = -4$

Não existe número racional que elevado ao quadrado resulte em -4. Portanto, essa equação não tem soluções racionais.

f) $36 - x^2 = 0$

$-x^2 = -36$

$x^2 = \frac{-36}{-1}$

$x^2 = 36$

$x = \pm\sqrt{36}$

$x = \pm 6$

Portanto, -6 e 6 são soluções da equação.

21. a) $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm 2$

Portanto, -2 e 2 são soluções da equação.

b) $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3$

Portanto, -3 e 3 são soluções da equação.

c) $x^2 - 361 = 0$

$x^2 = 361$

$x = \pm\sqrt{361}$

$x = \pm 19$

Portanto, -19 e 19 são soluções da equação.

d) $x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4$

Não existe número racional que, elevado ao quadrado, resulte em -4. Portanto, essa equação não tem soluções racionais.

e) $x^2 + 9 = 0$

$x^2 = -9$

Não existe número racional que, elevado ao quadrado, resulte em -9. Portanto, essa equação não tem soluções racionais.

f) $x^2 + 361 = 0$

$x^2 = -361$

Não existe número racional que, elevado ao quadrado, resulte em -361. Portanto, essa equação não tem soluções racionais.

22. a) Equações dos itens **a**, **b** e **c**: são equações do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, em que c é um número racional negativo e suas soluções são opostas.

Equações dos itens **d**, **e** e **f**: são equações do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, em que c é um número racional positivo; não têm soluções racionais, pois não existe número racional que, elevado ao quadrado, resulte em um número negativo.

b) II, III, V e VI.

23. Considerando as dimensões do retângulo $2x^2$ e 2, a medida do perímetro é dada por:

$$2 + 2x^2 + 2 + 2x^2 = 29$$

Resolvendo essa equação para determinar o valor de x, tem-se:

$4 + 4x^2 = 29$

$4x^2 = 29 - 4$

$4x^2 = 25$

$x^2 = \frac{25}{4}$

$x = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$

$x = \pm\frac{5}{2}$

Como x representa uma medida de comprimento, então considera-se apenas a raiz positiva. Logo, $x = \frac{5}{2}$.

24. Considerando x a medida da altura, tem-se que a medida da largura da tela é $1{,}5x$. Assim, a medida da área da tela é dada pela equação:

$x \cdot 1{,}5x = 12\,150$

Resolvendo essa equação para determinar o valor de x, tem-se:

$1{,}5x^2 = 12\,150$

$x^2 = \frac{12\,150}{1{,}5}$

$x^2 = 8\,100$

$x = \pm\sqrt{8\,100}$

$x = \pm 90$

Como x representa uma medida, deve-se considerar apenas os valores positivos. Assim, a altura mede 90 cm e a largura mede 135 cm ($1{,}5 \cdot 90 = 135$).

25. Alternativa **c**.

$9x^2 - 1 = 0$

$9x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{9}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{9}}$

$x = \pm\frac{1}{3}$

26. Resposta pessoal. Resposta possível: Um retângulo possui a medida de seu lado maior igual ao quádruplo da medida do lado menor, e sua área mede 256 m^2. Determine a medida de seus lados.

PÁGINA 77 – DIVERSIFICANDO

1. Alternativa **a**.

$5x - 2y = 1$

$5 \cdot (-3) - 2y = 1$

$-15 - 2y = 1$

$-2y = 1 + 15$

$-2y = 16$

$y = \frac{16}{-2}$

$y = -8$

2. a) $x = 0{,}181818...$ (I)

$100x = 18{,}181818...$ (II)

Subtraindo (I) de (II), tem-se:

$100x - x = 18{,}181818... - 0{,}181818...$

$99x = 18$

$x = \frac{18}{99}$

$x = \frac{2}{11}$

b) $x = 2{,}131313...$ (I)

$100x = 213{,}131313...$ (II)

Subtraindo (I) de (II), tem-se:

$100x - x = 213{,}131313... - 2{,}131313...$

$99x = 211$

$x = \frac{211}{99}$

c) $x = 1{,}102102...$ (I)

$1\,000x = 1\,102{,}102102...$ (II)

Subtraindo (I) de (II), tem-se:

$1\,000x - x = 1\,102{,}102102... - 1{,}102102...$

$999x = 1\,101$

$x = \frac{1\,101}{999}$

$x = \frac{367}{333}$

d) $x = 0{,}3969696...$

$10x = 3{,}969696...$ (I)

$1\,000x = 396{,}969696...$ (II)

Subtraindo (I) de (II), tem-se:

$1\,000x - 10x = 396{,}969696... - 3{,}969696...$

$990x = 393$

$x = \frac{393}{990}$

$x = \frac{131}{330}$

e) $x = 0{,}347171...$

$100x = 34{,}7171...$ (I)

$10\,000x = 3\,471{,}7171...$ (II)

Subtraindo (I) de (II), tem-se:

$10\,000x - 100x = 3\,471{,}7171... - 34{,}7171...$

$9\,900x = 3\,437$

$x = \frac{3\,437}{9\,900}$

f) $x = 1{,}458989...$

$100x = 145{,}8989...$ (I)

$10\,000x = 14\,589{,}8989...$ (II)

Subtraindo (I) de (II), tem-se:

$$10\,000x - 100x = 14589{,}8989... - 145{,}8989...$$
$$9\,900x = 14\,444$$
$$x = \frac{14\,444}{9\,900}$$
$$x = \frac{3\,611}{2\,475}$$

3. Alternativa **c**.

Uma maneira de resolver é substituir cada par ordenado na equação $3x - 4y = 7$.

a) Para $x = 3$ e $y = 1$, tem-se:

$$3 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 7$$
$$9 - 4 = 7$$
$$5 = 7 \text{ (F)}$$

Logo, (3, 1) não é solução da equação.

b) Para $x = 2$ e $y = 5$, tem-se:

$$3 \cdot 2 - 4 \cdot 5 = 7$$
$$6 - 20 = 7$$
$$-14 = 7 \text{ (F)}$$

Logo, (2, 5) não é solução da equação.

c) Para $x = 5$ e $y = 2$, tem-se:

$$3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 7$$
$$15 - 8 = 7$$
$$7 = 7 \text{ (V)}$$

Logo, (5, 2) é solução da equação.

d) Para $x = 4$ e $y = 1$, tem-se:

$$3 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 7$$
$$12 - 4 = 7$$
$$8 = 7 \text{ (F)}$$

Logo, (4, 1) não é solução da equação.

4. $x - \frac{1}{4} = 3 + \frac{y}{2}$

Resposta possível:

- Para $x = 0$:

$$0 - \frac{1}{4} = 3 + \frac{y}{2}$$
$$-\frac{1}{4} - 3 = \frac{y}{2}$$
$$-\frac{1}{4} - \frac{12}{4} = \frac{y}{2}$$
$$-\frac{13}{4} = \frac{y}{2}$$
$$-\frac{13 \cdot 2}{4} = y$$
$$-\frac{13}{2} = y$$

Par ordenado: $\left(0, -\frac{13}{2}\right)$

- Para $x = 3$:

$$3 - \frac{1}{4} = 3 + \frac{y}{2}$$
$$3 - \frac{1}{4} - 3 = \frac{y}{2}$$
$$-\frac{1}{4} = \frac{y}{2}$$
$$-\frac{2}{4} = y$$
$$-\frac{1}{2} = y$$

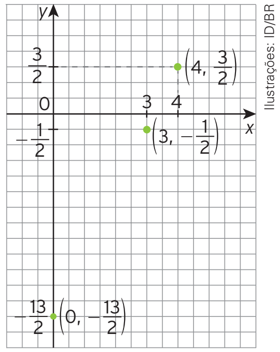
Par ordenado: $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$

- Para $x = 4$:

$$4 - \frac{1}{4} = 3 + \frac{y}{2}$$
$$4 - \frac{1}{4} - 3 = \frac{y}{2}$$
$$\frac{16 - 1 - 12}{4} = \frac{y}{2}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{y}{2}$$
$$\frac{3 \cdot 2}{4} = y$$
$$\frac{3}{2} = y$$

Par ordenado: $\left(4, \frac{3}{2}\right)$

Representando esses pares ordenados no plano cartesiano, tem-se:



5. Resposta pessoal. Resposta possível: $x + y = 7$ e $2x - 3y = -6$.

Observe que:

- $x + y = 7$

$$3 + 4 = 7$$
$$7 = 7$$

- $2x - 3y = -6$

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = -6$$
$$6 - 12 = -6$$
$$-6 = -6$$

6. Alternativa **d**.

$$2x^2 - 2 = 0$$
$$2x^2 = 2$$
$$x^2 = \frac{2}{2}$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{1}$$
$$x = \pm 1$$

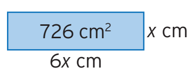
Portanto, a solução da equação dada é -1 e 1.

7. Considerando x o número procurado, tem-se:

$$x \cdot \frac{x}{3} = 48$$
$$\frac{x^2}{3} = 48$$
$$x^2 = 3 \cdot 48$$
$$x^2 = 144$$
$$x = \pm\sqrt{144}$$
$$x = \pm 12$$

Como o número procurado é positivo, então $x = 12$.

8. Considerando x a medida da largura da tira de papelão, pode-se representar a situação da seguinte maneira:



$$6x \cdot x = 726$$
$$6x^2 = 726$$
$$x^2 = \frac{726}{6}$$
$$x^2 = 121$$
$$x = \pm\sqrt{121}$$
$$x = \pm 11$$

Como x representa uma medida, então considera-se apenas a raiz positiva. Logo, a largura da tira mede 11 cm e o comprimento mede 66 cm ($6 \cdot 11 = 66$).

9. Alternativa **c**.

Em equações do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, em que c é um número racional positivo, pode-se concluir que a equação não terá soluções racionais. Portanto, a única equação nessa condição é a equação $2x^2 + 50 = 0$.

10. Alternativa **c**.

Se a reta representa a solução de uma das equações apresentadas, substituindo-se quaisquer pontos pertencentes à reta, esses pontos serão solução da equação procurada. Como uma reta é determinada por dois pontos, escolhe-se os pontos dados no gráfico, (0, 3) e (4, −1), e substitui-se esses pontos nas equações apresentadas.

a) $x - y = 3$

Para $x = 0$ e $y = 3$:

$$0 - 3 = -3$$

Para $x = 4$ e $y = -1$:

$$4 - (-1) = 5$$

Como nenhum dos pares satisfaz a equação, a reta não é definida por $x - y = 3$.

b) $-x - y = 3$

Para $x = 0$ e $y = 3$:

$$0 - 3 = -3$$

Para $x = 4$ e $y = -1$:

$$-4 - (-1) = -4 + 1 = -3$$

Como nenhum dos pares satisfaz a equação, a reta não é definida por $-x - y = 3$.

c) $x + y = 3$

Para $x = 0$ e $y = 3$:

$$0 + 3 = 3$$

Para $x = 4$ e $y = -1$:

$$4 + (-1) = 4 - 1 = 3$$

Como os dois pares satisfazem a equação, a reta é definida por $x + y = 3$.

d) $3x + 3y = 0$

Para $x = 0$ e $y = 3$:

$$3 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$$

Para $x = 4$ e $y = -1$:

$$3 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 12 - 3 = 9$$

Como nenhum dos pares satisfaz a equação, a reta não é definida por $3x + 3y = 0$.

11. Considerando x a medida do lado do terreno quadrado, tem-se:

$$\begin{aligned} x^2 + 180 &= 964 \\ x^2 &= 964 - 180 \\ x^2 &= 784 \\ x &= \pm\sqrt{784} \\ x &= \pm 28 \end{aligned}$$

Como x representa a medida do lado do terreno, considera-se apenas a raiz positiva, ou seja, o lado do terreno mede 28 m.

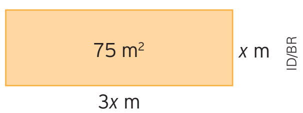
12. Considerando x a quantia que Rosana tem, então:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 192 &= 200 \\ 2x^2 &= 392 \\ x^2 &= 196 \\ x &= \pm\sqrt{196} \\ x &= \pm 14 \end{aligned}$$

Nessa situação-problema, o valor de x deve ser um número positivo, pois se trata de uma quantia que Rosana tem, ou seja, R$ 14,00.

13. Sabendo que Aline pagou R$ 3 750,00 pelo carpete de madeira e que o metro quadrado desse carpete custou R$ 50,00, então o piso do escritório mede 75 m² $\left(\frac{3\,750}{50} = 75\right)$.

O piso do escritório é retangular e a medida de seu comprimento é igual a 3 vezes a medida de sua largura, então:



$$\begin{aligned} 3x \cdot x &= 75 \\ 3x^2 &= 75 \\ x^2 &= \frac{75}{3} \\ x^2 &= 25 \\ x &= \pm\sqrt{25} \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

Nessa situação-problema, o valor de x deve ser um número positivo, pois se trata de uma medida.

Portanto, as dimensões desse escritório são 5 m por 15 m $(3 \cdot 5 = 15)$.

14. Considerando x o número de bolinhas que João tinha inicialmente, tem-se:

$$\begin{aligned} x - 5 &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

João tinha inicialmente 5 bolinhas.

CAPÍTULO 2 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU

PÁGINA 84 – ATIVIDADES

1. a) $\begin{cases} x - 4y = -8 \\ 3x + y = 15 \end{cases}$

Isola-se x na primeira equação:

$$\begin{aligned} x - 4y &= -8 \\ x &= -8 + 4y \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

Substituindo (I) na segunda equação, tem-se:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 15 \\ 3 \cdot (-8 + 4y) + y &= 15 \\ -24 + 12y + y &= 15 \\ 13y &= 15 + 24 \\ 13y &= 39 \\ y &= \frac{39}{13} \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Agora, substitui-se o valor encontrado para y em (I) e determina-se o valor de x.

$$\begin{aligned} x &= -8 + 4y \\ x &= -8 + 4 \cdot 3 \\ x &= -8 + 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (4, 3).

b) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 5y = -23 \end{cases}$

Isola-se x na segunda equação:

$$\begin{aligned} x + 5y &= -23 \\ x &= -23 - 5y \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

Substituindo (I) na primeira equação, tem-se:

$$\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ 2 \cdot (-23 - 5y) + y &= -1 \\ -46 - 10y + y &= -1 \\ 9y &= -45 \\ y &= -\frac{45}{9} \\ y &= -5 \end{aligned}$$

Agora, substitui-se o valor encontrado para y em (I) e determina-se o valor de x.

$$\begin{aligned} x &= -23 - 5y \\ x &= -23 - 5 \cdot (-5) \\ x &= -23 + 25 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (2, −5).

2. a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$

Como esse sistema não tem nenhuma incógnita com coeficientes opostos, precisa-se escolher uma incógnita e fazer transformações para encontrar esses coeficientes. Escolhe-se a incógnita x e multiplica-se a segunda equação por (−1).

$$x + 3y = -1 \xRightarrow{\cdot(-1)} -x - 3y = 1$$

Obtém-se, então, o sistema:

$\begin{cases} x + y = 5 \\ -x - 3y = 1 \end{cases}$

Agora, pode-se resolvê-lo pelo método da adição.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 5 \\ -x - 3y = 1 \end{cases} + \\ \hline 0x - 2y = 6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -2y &= 6 \\ y &= \frac{6}{-2} \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Substituindo y por (−3) na equação $x + 3y = -1$, obtém-se o valor de x:

$$\begin{aligned} x + 3 \cdot (-3) &= -1 \\ x - 9 &= -1 \\ x &= -1 + 9 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (8, −3).

b) $\begin{cases} 5x + y = 14 \\ 7x + 3y = 42 \end{cases}$

Como esse sistema não tem nenhuma incógnita com coeficientes opostos, precisa-se escolher uma incógnita e fazer transformações para encontrar esses coeficientes. Escolhe-se a incógnita y e multiplica-se a primeira equação por (−3).

$$5x + y = 14 \xRightarrow{\cdot(-3)} -15x - 3y = -42$$

Obtém-se, então, o sistema:

$\begin{cases} -15x - 3y = -42 \\ 7x + 3y = 42 \end{cases}$

Agora, pode-se resolvê-lo pelo método da adição.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -15x - \cancel{3y} = -42 \\ 7x + \cancel{3y} = 42 \end{cases} + \\ \hline -8x + 0y = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -8x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo x por 0 na equação $5x + y = 14$, obtém-se o valor de y:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 0 + y &= 14 \\ y &= 14 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (0, 14).

3. a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$

Expressa-se x em função de y nas duas equações:

$\begin{cases} x + y = 8 \Rightarrow x = 8 - y \quad \text{(I)} \\ x + 3y = 14 \Rightarrow x = 14 - 3y \quad \text{(II)} \end{cases}$

Igualando (I) e (II), obtém-se o valor de y:

$$\begin{aligned} 8 - y &= 14 - 3y \\ 3y - y &= 14 - 8 \\ 2y &= 6 \\ y &= \frac{6}{2} \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Agora, basta substituir o valor de y na equação (I) ou na equação (II). Substitui-se esse valor, por exemplo, na equação (I):

$$\begin{aligned} x &= 8 - y \\ x &= 8 - 3 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (5, 3).

b) $\begin{cases} 5x - y = 14 \\ 7x - 3y = 42 \end{cases}$

Expressa-se y em função de x nas duas equações.

Da primeira equação, tem-se:

$$\begin{aligned} 5x - y &= 14 \\ -y &= 14 - 5x \\ y &= 5x - 14 \quad \text{(I)} \end{aligned}$$

Da segunda equação, tem-se:

$$\begin{aligned} 7x - 3y &= 42 \\ -3y &= 42 - 7x \\ 3y &= 7x - 42 \\ y &= \frac{7x - 42}{3} \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

Igualando (I) e (II), obtém-se o valor de x:

$$\begin{aligned} 5x - 14 &= \frac{7x - 42}{3} \\ 3 \cdot (5x - 14) &= 7x - 42 \\ 15x - 42 &= 7x - 42 \\ 15x - 7x &= -42 + 42 \\ 8x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Agora, basta substituir o valor de x na equação (I) ou na equação (II). Substitui-se esse valor, por exemplo, na equação (I):

$$\begin{aligned} y &= 5x - 14 \\ y &= 5 \cdot 0 - 14 \\ y &= -14 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (0, −14).

4. Considerando x a medida do lado maior e y a medida do lado menor, tem-se o seguinte sistema de equações:

$\begin{cases} 2x + 2y = 120 \\ x = 3y \end{cases}$

Substituindo a segunda equação na primeira, tem-se:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 120 \\ 2 \cdot 3y + 2y &= 120 \\ 6y + 2y &= 120 \\ 8y &= 120 \\ y &= \frac{120}{8} \\ y &= 15 \end{aligned}$$

Agora, substituindo y na segunda equação, tem-se:

$$\begin{aligned} x &= 3y \\ x &= 3 \cdot 15 \\ x &= 45 \end{aligned}$$

Portanto, os lados desse retângulo medem 15 cm e 45 cm.

5. a) Considerando x o preço do sanduíche e y o preço do suco de laranja, tem-se:

$\begin{cases} y = x - 13 \\ 2x + 3y = 63 \end{cases}$

Substituindo y na segunda equação, tem-se:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 63 \\ 2x + 3 \cdot (x - 13) &= 63 \\ 2x + 3x - 39 &= 63 \\ 5x &= 102 \\ x &= 20{,}4 \end{aligned}$$

Logo, o preço do sanduíche é R$ 20,40 .

b) Substituindo x na primeira equação, encontra-se o valor de y:

$$\begin{aligned} y &= x - 13 \\ y &= 20{,}4 - 13 \\ y &= 7{,}4 \end{aligned}$$

Portanto, o preço do suco de laranja é R$ 7,40.

6. Considerando x a quantidade de livros de inglês e y a de livros de espanhol, tem-se:

$\begin{cases} x + y = 15 \\ 40x + 30y = 500 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por (−40) e resolvendo o sistema pelo método da adição, tem-se:

$$\begin{aligned} + \begin{cases} -40x - 40y = -600 \\ 40x + 30y = 500 \end{cases} \\ \hline -10y = -100 \\ y = \frac{-100}{-10} \\ y = 10 \end{aligned}$$

Substituindo y na equação $x + y = 5$, tem-se.

$$\begin{aligned} x + 10 &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Portanto, foram vendidos 5 livros de inglês e 10 livros de espanhol.

PÁGINA 88 – ATIVIDADES

7. a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

O sistema é possível e indeterminado (SPI), pois as retas r: $x + y = 2$ e u: $2x + 2y = 4$ são coincidentes.

b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

O sistema é impossível (SI), pois as retas s: $x - y = 0$ e t: $x - y = 2$ são distintas e paralelas.

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

O sistema é possível e determindo (SPD), pois as retas r: $x + y = 2$ e s: $x - y = 0$ se cruzam em um único ponto.

d) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$

O sistema é possível e determinado (SPD), pois as retas r: $x + y = 2$ e t: $x - y = 2$ se cruzam em um único ponto.

e) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

O sistema é possível e determinado (SPD), pois as retas s: $x - y = 0$ e u: $2x + 2y = 4$ se cruzam em um único ponto.

f) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

O sistema é possível e determinado (SPD), pois as retas t: $x - y = 2$ e u: $2x + 2y = 4$ se cruzam em um único ponto.

PÁGINA 89 – DIVERSIFICANDO

1. Considerando a a quantidade de rodadas que Edu acertou e e a quantidade de rodadas que ele errou, tem-se:

$\begin{cases} a + e = 20 \\ a - 2e = 11 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por (−1) e usando o método da adição para resolver esse sistema, tem-se:

$$\begin{aligned} + \begin{cases} -a - e = -20 \\ a - 2e = 11 \end{cases} \\ \hline -3e = -9 \\ e = 3 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de e na equação $a + e = 20$, tem-se:

$$\begin{aligned} a + 3 &= 20 \\ a &= 20 - 3 \\ a &= 17 \end{aligned}$$

Portanto, Edu acertou 17 rodadas e errou 3.

2. a) Considerando x a quantidade de cabras e y a quantidade de gansos, tem-se:

$\begin{cases} x + y = 30 \\ 4x + 2y = 100 \end{cases}$

b) Multiplicando a primeira equação por (−2) e usando o método da adição para resolver esse sistema, tem-se:

$$\begin{aligned} + \begin{cases} -2x - 2y = -60 \\ 4x + 2y = 100 \end{cases} \\ \hline 2x = 40 \\ x = 20 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de x em $x + y = 30$, tem-se:

$$\begin{aligned} 20 + y &= 30 \\ y &= 30 - 20 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Portanto, há 20 cabras e 10 gansos nesse sítio.

3. Considera-se g a idade de Guto e c a idade de Caio. Sabe-se que a idade atual da mãe dos meninos é 42 anos e que Guto tem 5 anos a mais que Caio, ou seja:

$$g = c + 5 \quad \text{(I)}$$

Daqui 3 anos, a idade da mãe ($42 + 3 = 45$) será o triplo da soma da idade dos filhos, ou seja:

$$3 \cdot (c + g) = 45$$
$$c + g = \frac{45}{3}$$
$$c + g = 15$$

Agora, organiza-se o sistema:

$$\begin{cases} g = c + 5 \\ c + g = 15 \end{cases}$$

Substituindo g na segunda equação, tem-se:

$$c + g = 15$$
$$c + (c + 5) = 15$$
$$c + c + 5 = 15$$
$$2c = 15 - 5$$
$$2c = 10$$
$$c = 5$$

Substituindo c na primeira equação, tem-se:

$$g = 5 + 5$$
$$g = 10$$

a) A idade de Guto é 10 anos.

b) A idade de Caio é 5 anos.

4. Sendo x o número de pessoas que foram até Felicidade e y o número de pessoas que foram até Tranquilidade, tem-se:

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ 32x + 34y = 1\,360 \end{cases}$$

Antes de resolver o sistema, pode-se simplificar a equação $32x + 34y = 1\,360$, dividindo todos os termos por 2:

$$32x + 34y = 1\,360$$
$$\frac{32x}{2} + \frac{34y}{2} = \frac{1\,360}{2}$$
$$16x + 17y = 680$$

Portanto, o novo sistema formado é:

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ 16x + 17y = 680 \end{cases}$$

Multiplicando a equação $x + y = 42$ do sistema por (-16) e usando o método da adição para resolver esse sistema, tem-se:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -16x - 16y = -672 \\ 16x + 17y = 680 \end{cases} + \\ \hline y = 8 \end{array}$$

Logo, 8 pessoas foram até Tranquilidade.

5. **a)** Considerando x o número de livros com 5 cm de espessura e y o número de livros com 3 cm de espessura, tem-se:

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ 5x + 3y = 90 \end{cases}$$

Em seguida, isola-se x nas duas equações:

$$\begin{cases} x = 22 - y \\ 5x + 3y = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 22 - y \\ x = \dfrac{90 - 3y}{5} \end{cases}$$

Igualando as duas equações, obtém-se:

$$22 - y = \frac{90 - 3y}{5}$$
$$5 \cdot (22 - y) = 90 - 3y$$
$$110 - 5y = 90 - 3y$$
$$-2y = -20$$
$$y = 10$$

Portanto, a quantidade de livros com 3 cm de espessura é 10.

b) Substituindo $y = 10$ na equação $x = 22 - y$, obtém-se:

$$x = 22 - 10$$
$$x = 12$$

Portanto, há 12 livros com 5 cm de espessura nessa pilha.

6. Considerando x a quantidade de convites vendida para associados e y a quantidade de convites vendida para convidados, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ 15x + 20y = 5\,300 \end{cases}$$

Isolando x na primeira equação, obtém-se:

$$x = 300 - y$$

Substituindo x na segunda equação, tem-se:

$$15 \cdot (300 - y) + 20y = 5\,300$$
$$4\,500 - 15y + 20y = 5\,300$$
$$5y = 5\,300 - 4\,500$$
$$5y = 800$$
$$y = 160$$

Substituindo y na equação $x = 300 - y$, tem-se:

$$x = 300 - 160$$
$$x = 140$$

Portanto, foram vendidos 140 convites para os associados do clube.

7. Considerando x a quantidade de cadernos de capa mole e y a quantidade de cadernos de capa dura, tem-se:

$$\begin{cases} x + y = 125 \\ 12x + 15y = 1\,680 \end{cases}$$

Isolando x na equação $x + y = 125$, obtém-se:

$$x = 125 - y$$

Substituindo x na segunda equação, tem-se:

$$12 \cdot (125 - y) + 15y = 1\,680$$
$$1\,500 - 12y + 15y = 1\,680$$
$$3y = 180$$
$$y = 60$$

Substituindo y na equação $x = 125 - y$, tem-se:

$$x = 125 - 60$$
$$x = 65$$

Portanto, foram vendidos 60 cadernos de capa dura e 65 cadernos de capa mole.

8. Chamando de x a quantidade de horas de trabalho regular e de y a quantidade de horas extras, tem-se:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ 10x + 15y = 1\,900 \end{cases}$$

Isolando x na primeira equação, obtém-se:

$$x = 180 - y$$

Substituindo x na segunda equação, tem-se:

$$10 \cdot (180 - y) + 15y = 1\,900$$
$$1\,800 - 10y + 15y = 1\,900$$
$$5y = 100$$
$$y = 20$$

Substituindo $y = 20$ na equação $x = 180 - y$, obtém-se:

$$x = 180 - 20$$
$$x = 160$$

Portanto, Tomás fez nesse mês 160 horas regulares e 20 horas extras.

9. **a)** Chamando um número de x e o outro de y, pode-se escrever o seguinte sistema e resolvê-lo pelo método da adição:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 200 \\ x - y = 70 \end{cases} + \\ \hline 2x = 270 \\ x = 135 \end{array}$$

Substituindo x na equação $x + y = 200$, obtém-se:

$$135 + y = 200$$
$$y = 200 - 135$$
$$y = 65$$

Portanto, os números são 135 e 65.

b) Chamando de r o valor pago por revista e de a o valor pago por álbum, tem-se:

$$\begin{cases} 6r + 3a = 75 \\ 2r + 2a = 30 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por (-3) e usando o método da adição para resolvê-lo, tem-se:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 6r + 3a = 75 \\ -6r - 6a = -90 \end{cases} + \\ \hline -3a = -15 \\ a = 5 \end{array}$$

Substituindo a na equação $2r + 2a = 30$, obtém-se:

$$2r + 2 \cdot 5 = 30$$
$$2r + 10 = 30$$
$$2r = 20$$
$$r = 10$$

Portanto, cada álbum de figurinhas custou R$ 5,00 e cada revista custou R$ 10,00.

10. Considera-se a, b e c o número de deputados dos estados A, B e C, respectivamente. Sabe-se que:

- o estado A tem 7 vezes o número de deputados estaduais do estado B, ou seja, $a = 7b$;
- o estado B tem 36 deputados estaduais a menos do que o estado C, ou seja, $b = c - 36$;

- adicionando o número de deputados do estado C ao triplo do número de deputados do estado B, o resultado ultrapassa em 6 o número de deputados do estado A, ou seja, $c + 3b = a + 6$.

Pode-se, então, escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a = 7b \\ b = c - 36 \\ c + 3b = a + 6 \end{cases}$$

Substituindo o valor de b, da equação $b = c - 36$, na equação $a = 7b$, obtém-se:

$$a = 7 \cdot (c - 36)$$
$$a = 7c - 252$$

Substituindo o valor de a da equação $a = 7c - 252$ e o valor de b da equação $b = c - 36$ na equação $c + 3b = a + 6$, obtém-se:

$$c + 3 \cdot (c - 36) = 7c - 252 + 6$$
$$c + 3c - 108 = 7c - 246$$
$$4c - 7c = -246 + 108$$
$$-3c = -138$$
$$c = 46$$

Substituindo $c = 46$ na equação $b = c - 36$, obtém-se:

$$b = 46 - 36$$
$$b = 10$$

Agora, substituindo $b = 10$ na equação $a = 7b$, obtém-se:

$$a = 7 \cdot 10$$
$$a = 70$$

Portanto, o estado A tem 70 deputados estaduais, o estado B, 10 deputados estaduais e o estado C, 46 deputados estaduais.

11. Considere x o número de moedas de 10 centavos de euro, y o número de moedas de 20 centavos de euro e z o total de euros que tenho.

Como eu tenho 20 moedas, então:

$$x + y = 20$$

Mas:

$$\begin{cases} 10x + 20y = z \\ 20x + 10y = z + 60 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtém-se:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 20x + 10y = z + 60 \\ 10x + 20y = z \end{cases} - \\ \hline 10x - 10y = 60 \end{array}$$

Dividindo a equação obtida acima por 10, encontra-se:

$$\frac{10x}{10} - \frac{10y}{10} = \frac{60}{10}$$
$$x - y = 6$$

Agora, pode-se escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema pelo método da adição, tem-se:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 6 \end{cases} + \\ \hline 2x = 26 \\ x = 13 \end{array}$$

Substituindo $x = 13$ na equação $x + y = 20$, obtém-se:

$$x + y = 20$$
$$y = 20 - x$$
$$y = 20 - 13$$
$$y = 7$$

Portanto, tenho 7 moedas de 20 centavos e 13 moedas de 10 centavos.

12. Considerando x a quantia que Sônia tem e y a quantia que Teresa tem, pode-se escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 0{,}2y = 2 \cdot 0{,}8y \\ x - 300 = y + 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 0{,}2y - 1{,}6y = 0 \\ x - y = 300 + 300 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 1{,}4y = 0 \\ x - y = 600 \end{cases}$$

Multiplicando a equação $x - 1{,}4y = 0$ por (-1) e usando o método da adição para resolver esse sistema, tem-se:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -x + 1{,}4y = 0 \\ x - \quad y = 600 \end{cases} + \\ \hline 0{,}4y = 600 \\ y = 1\,500 \end{array}$$

Substituindo $y = 1\,500$ em $x - y = 600$, obtém-se:

$$x - 1\,500 = 600$$
$$x = 2\,100$$

Portanto, Sônia tem R$ 2 100,00 e Teresa tem R$ 1 500,00.

13. Resposta pessoal.

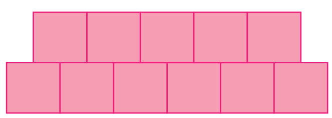
PÁGINA 90 – RESOLVENDO PROBLEMAS

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

1. A figura 1 contém 3 quadrados, a figura 2 contém 5 quadrados, a figura 3 contém 7 quadrados e a figura 4, 9 quadrados.

2. Resposta pessoal. É possível observar que, de uma figura para a outra, a quantidade de quadrados aumenta em duas unidades.

3. Observando a sequência das figuras de Laís, é possível perceber que, de uma figura para a outra, é acrescido um quadrado na fileira de baixo e um quadrado na fileira de cima. Então, a figura 5 pode ser desenhada da seguinte maneira:



ID/BR

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

1. Como de uma figura para a outra a quantidade de quadrados aumenta em duas unidades e a Figura 4 tem 9 quadrados, a Figura 5 terá 11 quadrados ($9 + 2 = 11$).

2. Sim.

3. Resposta pessoal. Uma maneira de explicar como calcular a quantidade de quadrados que compõem a Figura 8 sem desenhá-la é: Multiplica-se por 2 o número que representa a posição da Figura 8 e acrescenta-se 1 ao resultado; assim, conclui-se que a Figura 8 terá 17 quadrados, pois $2 \cdot 8 + 1 = 16 + 1 = 17$.

4. Sim.

REFLEXÃO SOBRE O PROBLEMA

1. Respostas pessoais.
2. Respostas pessoais.
3. Resposta pessoal.
4. Resposta pessoal.
5. Respostas pessoais.
6. Respostas pessoais.

MAIS PROBLEMAS

1. A partir da segunda figura, a quantidade de caixas é igual à quantidade da figura anterior acrescida do número da posição do termo que se deseja calcular, mais uma unidade.

   Por exemplo, no 3º dia a quantidade é 10 caixas, pois há 6 caixas do dia anterior e o funcionário adicionou 4 caixas ($3 + 1 = 4$). Portanto, se no 4º dia haviam sido empilhadas 15 caixas, determina-se quantas caixas estarão empilhadas no 5º dia e no 6º dia:

   - 5º dia:

     $15 + 5 + 1 = 21$

   - 6º dia:

     $21 + 6 + 1 = 28$

   Portanto, no 6º dia estarão empilhadas 28 caixas.

2. Se o cachorro superar os 10 obstáculos, então ele receberá:

   - pelo 1º obstáculo: 0 pontos;
   - pelo 2º obstáculo: 3 pontos;
   - pelo 3º obstáculo: 6 pontos;
   - pelo 4º obstáculo: 9 pontos;
   - pelo 5º obstáculo: 12 pontos;
   - pelo 6º obstáculo: 15 pontos;
   - pelo 7º obstáculo: 18 pontos;
   - pelo 8º obstáculo: 21 pontos;
   - pelo 9º obstáculo: 24 pontos;
   - pelo 10º obstáculo: 27 pontos.

   O cachorro deverá receber 135 pontos, pois:

   $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 = 135$

3. Para descobrir a relação que existe entre as quantidades de bolinhas obtidas e o dia em que elas foram obtidas, é possível organizar um quadro:

Dia	Quantidade de bolinhas de gude	Relação entre a quantidade de bolinhas de gude e o dia
1	5	$5 = 2 \cdot 1 + 3$
2	7	$7 = 2 \cdot 2 + 3$
3	9	$9 = 2 \cdot 3 + 3$
4	11	$11 = 2 \cdot 4 + 3$

Pela observação do quadro, percebe-se que a quantidade de bolinhas de gude de determinado dia é obtida multiplicando-se o dia por 2 e adicionando 3. Considerando n o dia, a quantidade de bolinhas é representada por $2n + 3$. Portanto, no 17º dia, tem-se:

$$2 \cdot 17 + 3 = 34 + 3 = 37$$

Logo, no 17º dia, Ricardo terá 37 bolinhas de gude.

PÁGINA 92 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Considerando v a quantidade de bolas de vôlei e b a quantidade de bolas de basquete, tem-se:

$$\begin{cases} b + v = 27 \\ v = 2b \end{cases}$$

Substituindo $v = 2b$ na equação $b + v = 27$, obtém-se:

$$b + 2b = 27$$
$$3b = 27$$
$$b = 9$$

Substituindo b na equação $v = 2b$, tem-se:

$$v = 2 \cdot 9$$
$$v = 18$$

Logo, Mariana usa 18 bolas de vôlei e 9 bolas de basquete nas aulas.

2. Considerando x o valor do ingresso comum e y o valor do ingresso de estudante, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 220 \\ 4x + 6y = 248 \end{cases}$$

Dividindo a equação $4x + 6y = 248$ por 2, obtém-se:

$$\frac{4x}{2} + \frac{6y}{2} = \frac{248}{2}$$
$$2x + 3y = 124$$

Agora, podemos montar um novo sistema:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 220 \\ 2x + 3y = 124 \end{cases}$$

Multiplicando a equação $2x + 3y = 124$ por (-1) e usando o método da adição, tem-se:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 5x + 3y = 220 \\ -2x - 3y = -124 \end{cases} + \\ \hline 3x = 96 \end{array}$$
$$x = 32$$

Substituindo x na equação $2x + 3y = 124$, tem-se:

$$2 \cdot 32 + 3y = 124$$
$$64 + 3y = 124$$
$$3y = 60$$
$$y = 20$$

O valor do ingresso comum é R$ 32,00 e o valor do ingresso de estudante é R$ 20,00.

3. a) Considerando x a massa, em quilograma, de cada lata verde e y a massa, em quilograma, de cada lata vermelha, pode-se escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

b) Isolando x em cada equação do sistema, tem-se:

- Primeira equação:

$$3x + y = 4$$
$$3x = 4 - y$$
$$x = \frac{4 - y}{3}$$

- Segunda equação:

$$2x + 2y = 3$$
$$2x = 3 - 2y$$
$$x = \frac{3 - 2y}{2}$$

Comparando as equações obtidas, tem-se:

$$\frac{4 - y}{3} = \frac{3 - 2y}{2}$$
$$2 \cdot (4 - y) = 3 \cdot (3 - 2y)$$
$$8 - 2y = 9 - 6y$$
$$-2y + 6y = 9 - 8$$
$$4y = 1$$
$$y = \frac{1}{4}$$
$$y = 0{,}25$$

Substituindo y na equação $x = \frac{4 - y}{3}$, obtém-se:

$$x = \frac{4 - 0{,}25}{3}$$
$$x = \frac{3{,}75}{3}$$
$$x = 1{,}25$$

Logo, a medida da massa de uma lata verde é 1,25 kg e a de uma lata vermelha é 0,25 kg.

4. Considerando x a quantidade de cédulas de 100 reais e y a quantidade de cédulas de 50 reais, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 100x + 50y = 1\,100 \end{cases}$$

Isolando x na equação $x + y = 12$, tem-se:

$$x = 12 - y$$

Substituindo x na equação $100x + 50y = 1\,100$, tem-se:

$$100 \cdot (12 - y) + 50y = 1\,100$$
$$1\,200 - 100y + 50y = 1\,100$$
$$-50y = -100$$
$$y = 2$$

Substituindo y na equação $x = 12 - y$, tem-se:

$$x = 12 - 2$$
$$x = 10$$

Portanto, Felipe retirou do caixa eletrônico 10 cédulas de 100 reais e 2 cédulas de 50 reais.

5. a) Observando a representação gráfica, esse sistema é possível e determinado (SPD), pois as retas se cruzam em um único ponto.

b) O ponto S representa a solução do sistema.

6. a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

Utilizando o método da adição para resolver esse sistema, tem-se:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 4 \end{cases} + \\ \hline 3x = 6 \end{array}$$
$$x = 2$$

Substituindo x na equação $x + y = 2$, tem-se:

$$2 + y = 2$$
$$y = 0$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (2, 0).

b) $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Multiplicando a primeira equação por 2 e usando o método da adição, tem-se:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases} + \\ \hline 5y = 10 \end{array}$$
$$y = 2$$

Substituindo y na equação $-x + 2y = 3$, tem-se:

$$-x + 2 \cdot 2 = 3$$
$$-x + 4 = 3$$
$$-x = 3 - 4$$
$$-x = -1$$
$$x = 1$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (1, 2).

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 6 \end{cases}$

Utilizando o método da adição para resolver esse sistema, tem-se:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 6 \end{cases} + \\ \hline 3x = 9 \end{array}$$
$$x = 3$$

Substituindo x na equação $x - y = 6$, tem-se:

$$3 - y = 6$$
$$-y = 6 - 3$$
$$-y = 3$$
$$y = -3$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (3, −3).

d) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

Multiplicando a segunda equação por 2 e usando o método da adição, tem-se:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 6x + 2y = 18 \end{cases} + \\ \hline 7x = 23 \\ x = \dfrac{23}{7} \end{array}$$

Substituindo x na equação $x - 2y = 5$, tem-se:

$$\frac{23}{7} - 2y = 5$$
$$-2y = 5 - \frac{23}{7}$$
$$-2y = \frac{35 - 23}{7}$$
$$-2y = \frac{12}{7}$$
$$y = \frac{12}{7} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$y = -\frac{6}{7}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado $\left(\frac{23}{7}, -\frac{6}{7}\right)$.

7. Alternativa **c**.

Considerando ℓ a quantidade de frascos de detergente no aroma limão por caixa e c a quantidade de frascos de detergente no aroma coco por caixa, pode-se escrever o sistema:

$\begin{cases} \ell + c = 24 \\ \ell = c + 2 \end{cases}$

É possível resolver esse sistema pelo método da substituição.

Substituindo ℓ na primeira equação, tem-se:

$$c + 2 + c = 24$$
$$2c = 22$$
$$c = 11$$

Substituindo c na equação $\ell = c + 2$, tem-se:

$$\ell = 11 + 2$$
$$\ell = 13$$

Portanto, havia 13 frascos de detergente no aroma limão em uma caixa.

Como eram 10 caixas, foram entregues 130 frascos $(10 \cdot 13 = 130)$ de detergente no aroma limão.

8. Considerando x a quantidade de vitórias e y a quantidade de empates, obtém-se o sistema:

$\begin{cases} x + y + 3 = 19 \\ 3x + y = 48 \end{cases}$

Isolando y na equação $x + y + 3 = 19$, tem-se:

$$x + y = 19 - 3$$
$$x + y = 16$$
$$y = 16 - x$$

Substituindo y na equação $3x + y = 48$, obtém-se:

$$3x + 16 - x = 48$$
$$2x = 32$$
$$x = 16$$

Substituindo x na equação $y = 16 - x$, obtém-se:

$y = 16 - 16$

$y = 0$

Portanto, o time obteve 16 vitórias e nenhum empate.

9. Considerando x a quantidade de páginas digitadas por Bia e y a quantidade de páginas digitadas por Lia, obtém-se o sistema.

$\begin{cases} x + y = 120 \\ x + 3 = 2y \end{cases}$

Pode-se resolver esse sistema pelo método da comparação.

Isolando x em cada equação, tem-se:

- $x + y = 120$
  $x = 120 - y$
- $x + 3 = 2y$
  $x = 2y - 3$

Comparando as duas equações, obtém-se:

$$120 - y = 2y - 3$$
$$-3y = -3 - 120$$
$$3y = 123$$
$$y = 41$$

Substituindo y na equação $x = 2y - 3$, tem-se:

$$x = 2 \cdot 41 - 3$$
$$x = 82 - 3$$
$$x = 79$$

De acordo com o enunciado, para cada página digitada devem ser pagos R$ 2,00 $(240 : 120 = 2)$. Portanto, Bia deve receber R$ 158,00 $(79 \cdot 2 = 158)$ e Lia, R$ 82,00 $(41 \cdot 2 = 82)$.

10. O gráfico I contém os pontos com pares ordenados $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Verificando esses pontos na equação $2x + y = 3$, tem-se:

- $2 \cdot 1 + 1 = 3$
  $2 + 1 = 3$
  $3 = 3$
- $2 \cdot (-1) + (-1) = 3$
  $-2 - 1 = 3$
  $-3 \neq 3$

Portanto, na representação gráfica I a reta não contém as soluções da equação.

O gráfico II contém os pontos com pares ordenados $(1, 1)$ e $(2, -1)$.

Verificando esses pontos na equação $2x + y = 3$, tem-se:

- $2 \cdot 1 + 1 = 3$
  $2 + 1 = 3$
  $3 = 3$
- $2 \cdot 2 + (-1) = 3$
  $4 - 1 = 3$
  $3 = 3$

Portanto, na representação gráfica II a reta contém as soluções da equação.

11. a) $\begin{cases} x - y = -3 \\ -x - 2y = -3 \end{cases}$

O sistema é possível e determinado (SPD), pois as retas r: $x - y = -3$ e s: $-x - 2y = -3$ se cruzam em um único ponto.

b) $\begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$

O sistema é possível e determinado (SPD), pois as retas t: $-2x - 4y = 0$ e u: $3x - 3y = -9$ se cruzam em um único ponto.

c) $\begin{cases} -x - 2y = -3 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases}$

O sistema é impossível (SI), pois as retas s: $-x - 2y = -3$ e t: $-2x - 4y = 0$ são distintas e paralelas.

d) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$

O sistema é possível e indeterminado (SPI), pois as retas r: $x - y = -3$ e u: $3x - 3y = -9$ são coincidentes.

e) $\begin{cases} -x - 2y = -3 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$

O sistema é possível e determinado (SPD), pois as retas s: $-x - 2y = -3$ e u: $3x - 3y = -9$ se cruzam em um único ponto.

f) $\begin{cases} x - y = -3 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases}$

O sistema é possível e determinado (SPD), pois as retas r: $x - y = -3$ e t: $-2x - 4y = 0$ se cruzam em um único ponto.

12. a) Sendo x o número de convites vendidos aos estudantes e y o número de convites vendidos aos convidados, tem-se:

$\begin{cases} x + y = 600 \\ 30x + 40y = 21\,600 \end{cases}$

Pode-se resolver esse sistema pelo método da substituição.

Isolando x na equação $x + y = 600$, tem-se:

$$x = 600 - y$$

Substituindo $x = 600 - y$ na equação $30x + 40y = 21\,600$, obtém-se:

$$30 \cdot (600 - y) + 40y = 21\,600$$
$$18\,000 - 30y + 40y = 21\,600$$
$$10y = 3\,600$$
$$y = 360$$

Substituindo y na equação $x = 600 - y$, tem-se:

$$x = 600 - 360$$
$$x = 240$$

Portanto, foram vendidos 240 convites aos estudantes.

b) Foram vendidos 360 convites aos convidados.

13. a) Sendo n o número de netas, então há $(n + 3)$ netos.

Como Antônio dividiu 120 moedas entre as netas e 165 moedas entre os netos, de modo que todos receberam a mesma quantidade de moedas, podemos escrever a seguinte equação:

$$\frac{120}{n} = \frac{165}{n+3}$$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$165n = 120 \cdot (n + 3)$$
$$165n = 120n + 360$$
$$45n = 360$$
$$n = 8$$

Logo, Antônio tem 8 netas e 11 netos $(8 + 3 = 11)$.

b) Podemos calcular de duas maneiras diferentes a quantidade de moedas que cada neto ou neta recebeu:

1ª maneira: $\frac{120}{n} = \frac{120}{8} = 15$

2ª maneira: $\frac{165}{n+3} = \frac{165}{8+3} = \frac{165}{11} = 15$

Portanto, cada um dos netos e cada uma das netas recebeu 15 moedas de Antônio.

14. Alternativa **d**.

Sendo a a quantidade de anos para que a idade do pai seja o triplo da idade do filho, tem-se:

$$33 + a = 3 \cdot (7 + a)$$

Resolvendo essa equação, encontra-se:

$$33 + a = 21 + 3a$$
$$-2a = -12$$
$$a = 6$$

Portanto, depois de 6 anos, a idade do pai será o triplo da idade do filho.

15. Considerando m o número de filhas e h o número de filhos do pai de Beto, tem-se a seguinte quantidade de irmãos:

- irmãos de Beto: $h - 1$;
- irmãs de Carol: $m - 1$.

Como Beto tem 3 irmãos a mais do que irmãs, então:

$$h - 1 = m + 3$$

Carol possui o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs, ou seja:

$$h = 2 \cdot (m - 1)$$

Pode-se então escrever um sistema com essas duas equações:

$$\begin{cases} h - 1 = m + 3 \\ h = 2 \cdot (m - 1) \end{cases}$$

É possível resolver esse sistema pelo método da substituição.

Substituindo $h = 2 \cdot (m - 1)$ na equação $h - 1 = m + 3$, tem-se:

$$2 \cdot (m - 1) - 1 = m + 3$$
$$2m - 2 - 1 = m + 3$$
$$2m - 3 = m + 3$$
$$m = 6$$

Substituindo m na equação $h = 2 \cdot (m - 1)$, tem-se:

$$h = 2 \cdot (6 - 1)$$
$$h = 2 \cdot 5$$
$$h = 10$$

Portanto, o pai de Beto e Carol tem 16 filhos $(10 + 6 = 16)$, sendo 10 filhos e 6 filhas.

16. Considerando x o valor recebido por Renata e y o valor recebido por Gustavo, pode-se montar o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 7\,540 \\ \frac{x}{17} + \frac{y}{15} = \frac{7\,540}{32} \cdot 2 \end{cases}$$

Isolando o valor de x na primeira equação, obtém-se:

$$x = 7\,540 - y$$

Substituindo o valor obtido na segunda equação, tem-se:

$$\frac{7\,540 - y}{17} + \frac{y}{15} = \frac{7\,540}{16}$$

$$\frac{1\,809\,600 - 240y}{4\,080} + \frac{272y}{4\,080} = \frac{1\,922\,700}{4\,080}$$

$$32y = 113\,100$$

$y \simeq 3\,534{,}37$

Assim:

$$x = 7\,540 - 3\,534{,}37 = 4\,005{,}63$$

Portanto, Renata ganhará R$ 4 005,63 e Gustavo, R$ 3 534,37.

17. Considerando a a quantidade de petróleo produzida pelo poço A e b a quantidade de petróleo produzida pelo poço B, pode-se escrever:

$$(4a + 3b) \cdot 5 = (3a + 5b) \cdot 4$$
$$20a + 15b = 12a + 20b$$
$$8a = 5b$$
$$b = \frac{8}{5}a$$

Portanto, o poço B produz mais que o poço A.

UNIDADE 4 – TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

CAPÍTULO 1 – TRIÂNGULOS

PÁGINA 98 – ATIVIDADES

1. O outro lado deve ter medida menor que a soma das medidas dadas (4 cm e 6 cm), ou seja, a medida do outro lado deve ser o maior número inteiro menor que 10 $(4 + 6 = 10)$, portanto, 9 cm.

2. Para saber se é possível construir um triângulo dadas as medidas dos lados, é preciso verificar a desigualdade triangular. Se a medida de cada lado do triângulo for menor que a soma das medidas dos outros dois lados, será possível construir o triângulo.

a)
- $13 < 10 + 4$
  $13 < 14$ (verdadeiro)
- $10 < 13 + 4$
  $10 < 17$ (verdadeiro)
- $4 < 13 + 10$
  $4 < 23$ (verdadeiro)

Sim, é possível construir o triângulo.

b)
- $8 < 9 + 1$
  $8 < 10$ (verdadeiro)
- $1 < 9 + 8$
  $1 < 17$ (verdadeiro)
- $9 < 8 + 1$
  $9 < 9$ (falso)

Não é possível construir o triângulo.

c)
- $3 < 4 + 5$
  $3 < 9$ (verdadeiro)
- $4 < 3 + 5$
  $4 < 8$ (verdadeiro)
- $5 < 3 + 4$
  $5 < 7$ (verdadeiro)

Sim, é possível construir o triângulo.

d)
- $15 < 20 + 5$
  $15 < 25$ (verdadeiro)
- $5 < 20 + 15$
  $5 < 35$ (verdadeiro)
- $20 < 15 + 5$
  $20 < 20$ (falso)

Não é possível construir o triângulo

3. O terceiro lado deve ter medida inteira menor que 15 cm $(6 + 9 = 15)$ e maior que 3 cm $(9 - 6 = 3)$, ou seja, as possíveis medidas, em centímetro, são: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14.

4. Uma possível resolução é pensar nos múltiplos de 7 e ir testando se esses múltiplos podem ser a medida do terceiro lado do triângulo. Assim, escrevendo os primeiros múltiplos de 7:

M(7): 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, ...

Como a medida do lado de um triângulo não pode ser 0, inicia-se com a medida 7.

- Conferindo se 7 cm pode ser a medida do terceiro lado, tem-se:
  $7 < 10 + 28 \Rightarrow 7 < 38$ (verdadeiro)
  $10 < 7 + 28 \Rightarrow 10 < 35$ (verdadeiro)
  $28 < 7 + 10 \Rightarrow 28 < 17$ (falso)
  Assim, 7 cm não pode ser a medida do terceiro lado.
- Conferindo se 14 cm pode ser a medida do terceiro lado, tem-se:
  $14 < 10 + 28 \Rightarrow 14 < 38$ (verdadeiro)
  $10 < 14 + 28 \Rightarrow 10 < 42$ (verdadeiro)
  $28 < 14 + 10 \Rightarrow 28 < 24$ (falso)
  Assim, 14 cm não pode ser a medida do terceiro lado.
- Conferindo se 21 cm pode ser a medida do terceiro lado, tem-se:
  $21 < 10 + 28 \Rightarrow 21 < 38$ (verdadeiro)
  $10 < 21 + 28 \Rightarrow 10 < 49$ (verdadeiro)
  $28 < 21 + 10 \Rightarrow 28 < 31$ (verdadeiro)
  Assim, 21 cm pode ser a medida do terceiro lado.
- Conferindo se 28 cm pode ser a medida do terceiro lado, tem-se:
  $28 < 10 + 28 \Rightarrow 28 < 38$ (verdadeiro)
  $10 < 28 + 28 \Rightarrow 10 < 56$ (verdadeiro)
  $28 < 28 + 10 \Rightarrow 28 < 38$ (verdadeiro)
  Assim, 28 cm pode ser a medida do terceiro lado.

- Conferindo se 35 cm pode ser a medida do terceiro lado, tem-se:

  $35 < 10 + 28 \Rightarrow 35 < 38$ (verdadeiro)

  $10 < 35 + 28 \Rightarrow 10 < 63$ (verdadeiro)

  $28 < 35 + 10 \Rightarrow 28 < 45$ (verdadeiro)

  Assim, 35 cm pode ser a medida do terceiro lado.
- Conferindo se 42 cm pode ser a medida do terceiro lado, tem-se:

  $42 < 10 + 28 \Rightarrow 42 < 38$ (falso)

  Assim, 42 cm não pode ser a medida do terceiro lado.

Os próximos múltiplos de 7 são maiores que 42, ou seja, eles são maiores que a soma dos outros lados (38). Assim, as possíveis medidas do terceiro lado desse triângulo são 21 cm, 28 cm ou 35 cm.

5. **a)** Como a medida de cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele, tem-se que 143° é a medida de um ângulo externo do triângulo e as medidas dos ângulos não adjacentes a ele são y e 90°, então:

$$143° = 90° + y$$
$$y = 143° - 90°$$
$$y = 53°$$

Como, em um triângulo, o ângulo interno e o ângulo externo são adjacentes suplementares, tem-se que x e 143° são suplementares. Assim:

$$x + 143° = 180°$$
$$x = 180° - 143°$$
$$x = 37°$$

Logo, $x = 37°$ e $y = 53°$.

b) É possível observar dois triângulos retângulos na figura dada: um triângulo retângulo com os ângulos internos medindo 30°, 90° e x e outro triângulo retângulo com os ângulos internos medindo $(30° + y)$, 90° e 30°.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, para calcular x, tem-se:

$$30° + 90° + x = 180°$$
$$120° + x = 180°$$
$$x = 180° - 120°$$
$$x = 60°$$

Para calcular y, tem-se:

$$(30° + y) + 90° + 30° = 180°$$
$$y + 150° = 180°$$
$$y = 180° - 150°$$
$$y = 30°$$

Logo, $x = 60°$ e $y = 30°$.

PÁGINA 102 – DESCUBRA MAIS

PARA CONCLUIR

1. No baricentro.

2. Sim, no triângulo equilátero.

PÁGINA 104 – ATIVIDADES

6. **a)**
- mediana
- altura

b)
- bissetriz interna
- mediatriz

7. Não é possível, pois, além de ser o ponto de equilíbrio ou centro de gravidade de um corpo, o baricentro é o ponto formado pela intersecção das medianas do triângulo, sendo que as medianas de todo triângulo sempre são internas a ele.

8. **a)** Baricentro; é o ponto de intersecção das medianas.

b) Ortocentro; é o ponto de intersecção das alturas.

c) Incentro; é o ponto de intersecção das bissetrizes internas.

d) Circuncentro; é o ponto de intersecção das mediatrizes.

PÁGINA 107 – ATIVIDADES

9. **a)** Os triângulos *ABC* e *OMN* têm um par de lados congruentes e dois pares de ângulos congruentes. Um par de ângulo é adjacente ao lado congruente e o outro par é oposto ao lado congruente.

- $\overline{AC} \cong \overline{ON}$
- $\hat{B} \cong \hat{M}$
- $\hat{C} \cong \hat{O}$

Logo, os triângulos *ABC* e *OMN* são congruentes pelo caso LAA_o.

b) Os triângulos *ABC* e *OMN* têm três pares de lados congruentes.

- $\overline{AC} \cong \overline{ON}$
- $\overline{CB} \cong \overline{NM}$
- $\overline{AB} \cong \overline{OM}$

Logo, os triângulos *ABC* e *OMN* são congruentes pelo caso LLL.

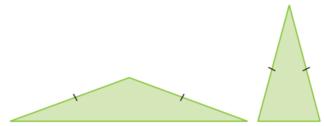
c) Nenhum dos casos de congruência se aplica a esses triângulos. Observando a figura, é possível perceber um par de ângulos congruentes e dois pares de lados congruentes que não é um caso de congruência de triângulos.

d) Os triângulos *ABC* e *OMN* têm três pares de lados congruentes e dois pares de ângulos congruentes.

- $\overline{AC} \cong \overline{ON}$
- $\overline{CB} \cong \overline{NM}$
- $\overline{AB} \cong \overline{OM}$
- $\hat{A} \cong \hat{O}$
- $\hat{B} \cong \hat{M}$

Portanto, os triângulos são congruentes pelos casos LLL, LAL, ALA ou LAA_o.

10. A afirmação é falsa. Nos triângulos a seguir, os pares de lados indicados com a mesma marca são congruentes, mas um triângulo não é congruente ao outro, pois o terceiro lado de um triângulo não é congruente ao terceiro lado do outro triângulo.



Ilustrações: ID/BR

11. **a)** Sim, pelo caso ALA, pois os dois triângulos têm dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos respectivamente congruentes.

b) Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo *ABC*, tem-se:

$$\text{med}(\hat{C}) = 180° - 40° - 30°$$
$$\text{med}(\hat{C}) = 110°$$

Como os triângulos são congruentes, então:

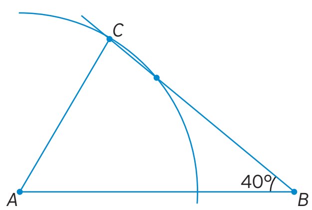
$$\text{med}(\hat{R}) = \text{med}(\hat{C}) = 110°$$

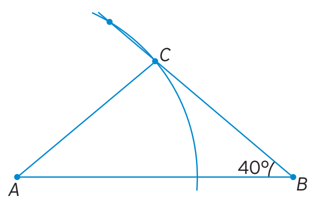
12. Não. Justificativa possível: Sabemos apenas que um dos ângulos do triângulo *ABC* é congruente a um dos ângulos do triângulo *DEF*. São necessárias informações sobre as medidas de pelo menos mais um par de ângulos correspondentes e um par de lados correspondentes ou dois pares de lados correspondentes para garantir que *ABC* e *DEF* sejam congruentes.

13. Resposta pessoal. Para construir o triângulo *ABC*, é possível seguir os passos abaixo:

- Traçar com a régua o segmento $\overline{AB}$ com a medida dada na atividade (4,9 cm).
- Usando a régua e o transferidor, marcar o ângulo $\hat{B}$.
- Transportar a medida do segmento $\overline{AC}$ (3,2 cm). Para isso, utilizar o compasso com abertura *AC* e, com a ponta-seca em *A*, fazer um arco de circunferência.
- Prolongar o lado do ângulo $\hat{B}$ que não contém o ponto *A*, de modo que ele passe pelo arco. Observar que, ao fazer esse prolongamento, o lado do ângulo vai interceptar o arco em dois pontos.
- Ligar o ponto *A* a um dos pontos de intersecção do arco com o lado do ângulo $\hat{B}$ e, então, obter o triângulo *ABC*.

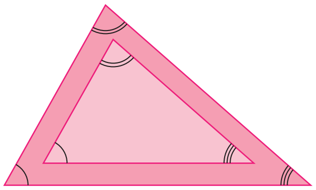
Com isso, é possível traçar dois triângulos *ABC*:





Assim, se os triângulos comparados tiverem o lado $\overline{BC}$ com a mesma medida de comprimento, eles serão congruentes pelo caso LLL. Entretanto, se os triângulos comparados tiverem o lado $\overline{BC}$ de medidas diferentes, eles não serão congruentes.

14. a) Pode haver triângulos cujos ângulos tenham medidas iguais, mas cujos lados não tenham medidas iguais, conforme a figura a seguir.



Ilustrações: ID/BR

Outro exemplo são os triângulos equiláteros, pois todos têm ângulos de 60°, mas nem todos são congruentes.

b) Considere os triângulos *ABC* e *PQR* congruentes pelo caso ALA. Chamando de $\hat{A}$ e $\hat{B}$ os ângulos congruentes do triângulo *ABC* e de $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ os ângulos congruentes do triângulo *PQR*, respectivamente, pode-se determinar a medida do terceiro ângulo $\hat{C}$ e $\hat{R}$ de cada um dos triângulos.

$$c = 180° - a - b$$
$$r = 180° - p - q$$

Como $a = p$ e $b = q$, temos $c = r$.

Então, supondo med($\overline{AB}$) = med($\overline{PQ}$), e conhecendo dois dos ângulos congruentes, determina-se o terceiro. Assim, é possível mostrar que o caso LAA_o é uma consequência do caso de congruência ALA.

15. a) Sim; LLL. Os três pares de lados correspondentes têm a mesma medida.

b) Os pares de lados congruentes são:

- $\overline{BC} \cong \overline{DF}$
- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
- $\overline{AC} \cong \overline{EF}$

Como $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, tem-se:

$$\text{med}(\hat{F}) = \text{med}(\hat{C}) = 30°$$

Como $\overline{AC} \cong \overline{EF}$, tem-se:

$$\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{D}) = 105°$$

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo *ABC*, tem-se:

$$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 180°$$
$$\text{med}(\hat{A}) + 105° + 30° = 180°$$
$$\text{med}(\hat{A}) = 180° - 105° - 30°$$
$$\text{med}(\hat{A}) = 45°$$

Como $\overline{BC} \cong \overline{DF}$, tem-se med($\hat{E}$) = = med($\hat{A}$) = 45°.

16. a) Os ângulos $A\hat{E}B$ e $D\hat{E}C$ são congruentes, pois são opostos pelo vértice. Os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{EC}$ são congruentes, pois têm marcas iguais, que representam medidas iguais. Os ângulos $A\hat{B}E$ e $D\hat{C}E$ são ambos retos e, portanto, são congruentes. Logo, os triângulos *ABE* e *DCE* são congruentes pelo caso ALA.

b) Considerando os triângulos *ABE* e *DCE* congruentes, os lados congruentes são:

- $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
- $\overline{BE} \cong \overline{CE}$
- $\overline{AE} \cong \overline{DE}$

Então:

- med($\overline{AB}$) = med($\overline{DC}$)

$$6x - 2 = 40$$
$$6x = 42$$
$$x = 7$$

- med($\overline{AE}$) = med($\overline{DE}$)

$$60 = 4y + 16$$
$$44 = 4y$$
$$y = 11$$

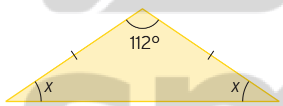
Logo, $x = 7$ e $y = 11$.

PÁGINA 110 – ATIVIDADES

17. Considerando que nesta atividade todas as figuras são triângulos isósceles, é possível afirmar que:

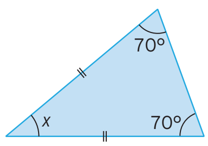
- Os dois ângulos opostos aos lados congruentes são congruentes.
- A soma dos ângulos internos é igual a 180°.

a)



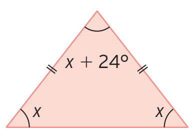
$$112° + x + x = 180°$$
$$2x = 180° - 112°$$
$$2x = 68°$$
$$x = \frac{68°}{2}$$
$$x = 34°$$

b)



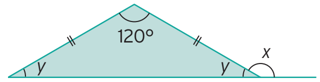
$$x + 70° + 70° = 180°$$
$$x + 140° = 180°$$
$$x = 180° - 140°$$
$$x = 40°$$

c)



$$x + x + x + 24° = 180°$$
$$3x = 180° - 24°$$
$$3x = 156°$$
$$x = \frac{156°}{3}$$
$$x = 52°$$

d)



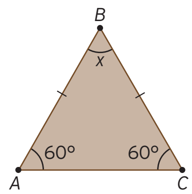
$$y + y + 120° = 180°$$
$$2y + 120° = 180°$$
$$2y = 60°$$
$$2y = \frac{60°}{2}$$
$$y = 30°$$

Como em um triângulo, o ângulo interno e o ângulo externo são adjacentes suplementares, tem-se:

$$x + y = 180°$$
$$x + 30° = 180°$$
$$x = 180° - 30°$$
$$x = 150°$$

18. Dado um triângulo *ABC* isósceles, sabendo que um de seus ângulos mede 60°, tem-se duas possibilidades:

I. O ângulo de 60° é ângulo da base.



Como em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes, o outro ângulo da base também terá a medida de 60°.

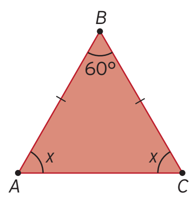
Como a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é igual a 180°, tem-se:

$$x + 60° + 60° = 180°$$
$$x + 120° = 180°$$
$$x = 180° - 120°$$
$$x = 60°$$

Portanto, o terceiro ângulo também mede 60°.

Assim, como o triângulo tem três ângulos congruentes, seus três lados também são congruentes. Então, o triângulo *ABC* é equilátero.

II. O ângulo de 60° não é ângulo da base.



Como em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes e os dois ângulos da base têm a mesma medida.

Como a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é igual a 180°, tem-se:

$$x + x + 60° = 180°$$
$$2x + 60° = 180°$$
$$2x = 180° - 60°$$
$$2x = 120°$$
$$x = 60°$$

Portanto, os ângulos da base medem 60° cada um.

Assim, como o triângulo tem três ângulos congruentes, seus três lados também são congruentes. Então, o triângulo ABC é equilátero.

19. Como o triângulo é isósceles de base $\overline{BC}$, temos $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Então:

$$3x - 4 = x + 12$$
$$3x - x = 12 + 4$$
$$2x = 16$$
$$x = \frac{16}{2}$$
$$x = 8$$

Substituindo $x = 8$ em uma das expressões que representam as medidas dos lados congruentes, tem-se, em centímetro:

$$AB = 3x - 4$$
$$AB = 3 \cdot 8 - 4$$
$$AB = 24 - 4$$
$$AB = 20$$

Como $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $AC = 20$ cm.

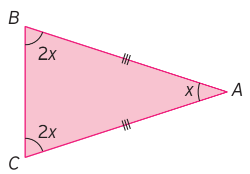
Assim, a medida do perímetro é dada por:

$$20 + 20 + 16 = 56$$

Logo, a medida do perímetro desse triângulo é 56 cm.

20. Sabendo que, em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos é igual a 180° e que o triângulo ABC é isósceles, tem-se:

$$\text{med}(A\hat{C}B) = \text{med}(A\hat{B}C) = 2x$$



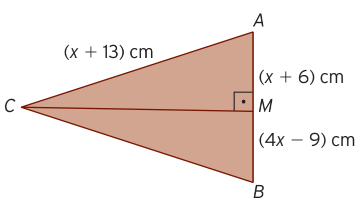
Então:

$$2x + 2x + x = 180°$$
$$5x = 180°$$
$$x = \frac{180°}{5}$$
$$x = 36°$$

Logo:

$$\text{med}(C\hat{A}B) = x = 36°$$
$$\text{med}(A\hat{C}B) = \text{med}(A\hat{B}C) = 2x = 72°$$

21.



Como o triângulo ABC é isósceles, a altura e a mediana relativas ao lado $\overline{AB}$ coincidem. Logo, M é ponto médio de $\overline{AB}$. Então, $\overline{AM} \cong \overline{BM}$:

$$x + 6 = 4x - 9$$
$$4x - x = 6 + 9$$
$$3x = 15$$
$$x = \frac{15}{3}$$
$$x = 5$$

Mas:

$$AC = BC = x + 13$$
$$AM = BM = x + 6$$

Substituindo $x = 5$, tem-se:

$$AC = BC = 5 + 13 = 18$$
$$AM = BM = 5 + 6 = 11$$

Portanto, a medida do perímetro do triângulo ABC, em centímetro, é dada por:

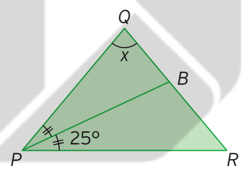
$$18 + 18 + 11 + 11 = 58$$

22. Como os três ângulos internos de um triângulo equilátero são congruentes e a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede:

$$180° : 3 = 60°$$

23. Pela figura, temos que $\overline{PB}$ é bissetriz interna do ângulo $Q\hat{P}R$, portanto $\text{med}(Q\hat{P}R) = 50°$.

Como o triângulo é isósceles de base $\overline{PR}$, temos $\text{med}(Q\hat{R}P) = \text{med}(Q\hat{P}R) = 50°$.



Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então:

$$x + 50° + 50° = 180°$$
$$x + 100° = 180°$$
$$x = 180° - 100°$$
$$x = 80°$$

24. a) Como o triângulo é equilátero, cada lado mede 8 cm. Assim, a medida do perímetro, em centímetro, é:

$$3 \cdot 8 = 24$$

b) Tem-se $\overline{AB}$ lado comum ao triângulo ABP e ao quadrado $ABCD$. Como $AB = 8$ cm, a medida do perímetro de $ABCD$, em centímetro, é:

$$4 \cdot 8 = 32$$

c) Como o triângulo é equilátero e a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, a medida de $P\hat{A}B$ é dada por:

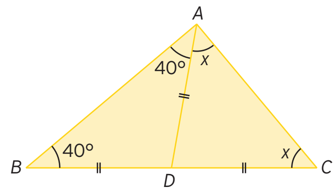
$$180° : 3 = 60°$$

d) O ângulo $B\hat{A}D$ mede 90° por ser um ângulo interno de um quadrado. Da figura, tem-se:

$$\text{med}(B\hat{A}D) = \text{med}(B\hat{A}P) + \text{med}(P\hat{A}D)$$
$$90° = 60° + \text{med}(P\hat{A}D)$$
$$\text{med}(P\hat{A}D) = 90° - 60°$$
$$\text{med}(P\hat{A}D) = 30°$$

25. Os lados $\overline{BD}$, $\overline{DC}$ e $\overline{AD}$ têm marcas iguais, portanto são congruentes. Então, os triângulos ABD e ACD são isósceles.

Logo, $\text{med}(B\hat{A}D) = 40°$ e $\text{med}(C\hat{A}D) = x$.

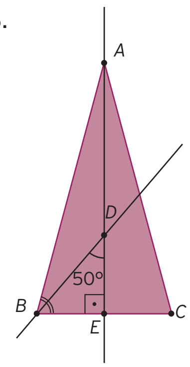


Ilustrações: ID/BR

Como $\text{med}(B\hat{A}C) = 40° + x$ e a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual 180°, tem-se:

$$40° + 40° + x + x = 180°$$
$$80° + 2x = 180°$$
$$2x = 180° - 80°$$
$$2x = 100°$$
$$x = \frac{100°}{2}$$
$$x = 50°$$

26.



$\overleftrightarrow{BD}$ é bissetriz interna de $A\hat{B}E$, então $D\hat{B}E \cong D\hat{B}A$.

No triângulo BDE, a soma dos ângulos internos é igual a 180°. Então:

$$\text{med}(D\hat{B}E) + 50° + 90° = 180°$$
$$\text{med}(D\hat{B}E) + 140° = 180°$$
$$\text{med}(D\hat{B}E) = 180° - 140°$$
$$\text{med}(D\hat{B}E) = 40°$$

Logo, $\text{med}(A\hat{B}E) = 80°$.

Como o triângulo ABC é isósceles,

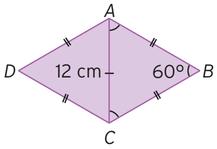
$$\text{med}(A\hat{C}E) = \text{med}(A\hat{B}E) = 80°$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se:

$$\text{med}(B\hat{A}C) + 80° + 80° = 180°$$
$$\text{med}(B\hat{A}C) + 160° = 180°$$
$$\text{med}(B\hat{A}C) = 180° - 160°$$
$$\text{med}(B\hat{A}C) = 20°$$

Logo, os ângulos internos desse triângulo medem 20°, 80° e 80°.

27.



Um losango tem dois ângulos agudos e dois obtusos. Assim, o ângulo de 60° é um dos ângulos agudos. A diagonal que mede 12 cm é o segmento $\overline{AC}$, que é a base dos triângulos isósceles ABC e ACD.

Assim, como o triângulo ABC é isósceles, $C\hat{A}B \cong B\hat{C}A$.

Sendo $\text{med}(C\hat{A}B) = \text{med}(B\hat{C}A) = x$ e, sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se:

$$x + x + 60° = 180°$$
$$2x = 180° - 60°$$
$$2x = 120°$$
$$x = 60°$$

O mesmo ocorre no triângulo ACD, ou seja, os triângulos são equiláteros. Então:

$$AC = AB = BC = CD = DA = 12 \text{ cm}$$

Portanto, a medida do perímetro do losango $ABCD$, em centímetro, é dada por:

$$AB + BC + CD + DA = 48$$

PÁGINA 111 – DIVERSIFICANDO

1. a) Sabendo que a medida de cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele, tem-se:

$$6x + 10° = 70° + 2x + 20°$$
$$6x - 2x = 70° + 20° - 10°$$
$$4x = 80°$$
$$x = 20°$$

Substituindo $x = 20°$ em $2x + 20°$ e sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se:

$$2 \cdot 20° + 20° + 70° + y = 180°$$
$$40° + 20° + 70° + y = 180°$$
$$130° + y = 180°$$
$$y = 180° - 130°$$
$$y = 50°$$

Portanto, $x = 20°$ e $y = 50°$.

b) Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se:

$$x + x + 90° = 180°$$
$$2x + 90° = 180°$$
$$2x = 180° - 90°$$
$$2x = 90°$$
$$x = \frac{90°}{2}$$
$$x = 45°$$

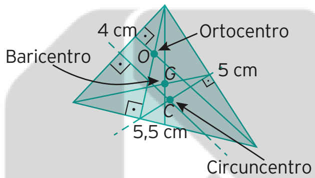
Como, em um triângulo, o ângulo interno e o ângulo externo são adjacentes suplementares, tem-se:

$$x + y = 180°$$
$$45° + y = 180°$$
$$y = 180° - 45°$$
$$y = 135°$$

Portanto, $x = 45°$ e $y = 135°$.

2. a)
- O ponto de intersecção das medianas é o baricentro do triângulo. Para determinar o baricentro, traçam-se as medianas do triângulo, marcando os pontos médios dos três lados do triângulo e traçando as retas que unem cada vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a ele.
- O ponto de intersecção das alturas é o ortocentro do triângulo. Para determinar o ortocentro, marcam-se as alturas do triângulo, traçando as retas que passam por cada um dos vértices e são perpendiculares às retas suporte de cada lado do triângulo.
- O ponto de intersecção das mediatrizes relativas aos lados do triângulo é o circuncentro.

Uma construção possível é:



b) Resposta pessoal. O ortocentro, o baricentro e o circuncentro são colineares.

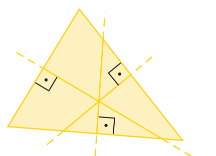
3. a) Resposta pessoal.

b) Sim. Pois o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo não equilátero são colineares. A reta determinada por esses pontos é chamada de *reta de Euler*.

4. Resposta pessoal.

Para traçar a mediatriz, marcam-se os pontos médios dos três lados do triângulo e traça-se, passando por esses pontos, uma reta perpendicular a cada lado do triângulo.

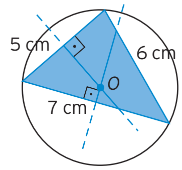
Um possível desenho é:



5. Resposta pessoal.

Para traçar uma circunferência circunscrita a um triângulo, determina-se inicialmente o centro dessa circunferência, que é o circuncentro. Para determinar o circuncentro, marcam-se pelo menos duas mediatrizes do triângulo, traçando as retas que passam pelos pontos médios e são perpendiculares a cada um dos lados. O ponto de intersecção das mediatrizes do triângulo é seu circuncentro. Com a ponta-seca do compasso no circuncentro e a ponta grafite em um dos vértices do triângulo, traça-se a circunferência circunscrita a ele.

Uma construção possível é:

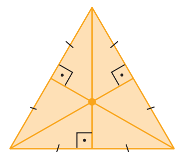


Ilustrações: ID/BR

6. a) Sim, pois todo triângulo tem três mediatrizes, cada uma relativa a um de seus lados, e o ponto de intersecção das mediatrizes é o seu circuncentro.

b) Não; se os pontos forem colineares, não será possível traçar uma circunferência que passe por eles.

7. Resposta pessoal.
- O ponto de intersecção das medianas é o baricentro do triângulo. Para determinar o baricentro, traçam-se as medianas do triângulo, marcando os pontos médios dos três lados do triângulo e traçando as retas que unem cada vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a ele.
- O ponto de intersecção das alturas é o ortocentro do triângulo. Para determinar o ortocentro, marcam-se as alturas do triângulo, traçando as retas que passam por seus vértices e são perpendiculares às retas suporte de cada lado do triângulo.
- O ponto de intersecção das bissetrizes internas é o incentro do triângulo. Para determinar o incentro, marcam-se as bissetrizes internas do triângulo, traçando as retas que passam por seus vértices e dividem os ângulos internos em dois ângulos adjacentes congruentes.

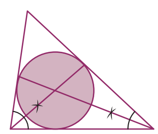


Em um triângulo equilátero os pontos notáveis – baricentro, ortocentro e incentro – são coincidentes.

8. Resposta pessoal.

Para traçar uma circunferência inscrita em um triângulo, determina-se inicialmente o centro dessa circunferência, que é o incentro. Para determinar o incentro, marcam-se pelo menos duas bissetrizes internas do triângulo, traçando as retas que passam por seus vértices e dividem os ângulos internos em dois ângulos adjacentes congruentes. O ponto de intersecção das bissetrizes internas do triângulo é seu incentro. Com a ponta-seca do compasso no incentro e a ponta grafite no ponto do lado que é o pé da perpendicular a esse lado, traça-se a circunferência.

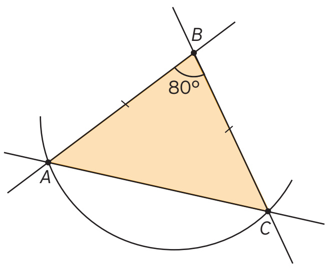
Uma construção possível é:



9. Resposta pessoal.

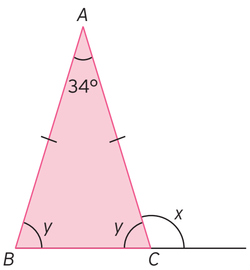
Primeiro, constrói-se o ângulo de 80° com o transferidor. Em seguida, com a ponta-seca do compasso no vértice do ângulo de 80° e com abertura igual à medida dos lados congruentes, traça-se um arco que intercepta os dois lados do ângulo de 80°. Para determinar a base do triângulo, marcam-se os pontos de intersecção e, em seguida unem-se esses pontos.

Uma construção possível é:



Ilustrações: ID/BR

10.



Como o triângulo *ABC* é isósceles, os ângulos da base têm a mesma medida. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se:

$$y + y + 34° = 180°$$
$$2y = 180° - 34°$$
$$2y = 146°$$
$$y = 73°$$

Como em um triângulo, o ângulo interno e o ângulo externo são adjacentes suplementares, então:

$$x + y = 180°$$
$$x + 73° = 180°$$
$$x = 180° - 73°$$
$$x = 107°$$

11. Para saber se é possível construir um triângulo dadas as medidas dos lados, é preciso verificar a desigualdade triangular. Se a medida de cada lado do triângulo for menor que a soma das medidas dos outros dois lados, é possível construir o triângulo.

a)
- $8 < 6 + 10$
  $8 < 16$ (verdadeiro)
- $6 < 8 + 10$
  $6 < 18$ (verdadeiro)
- $10 < 6 + 8$
  $10 < 14$ (verdadeiro)

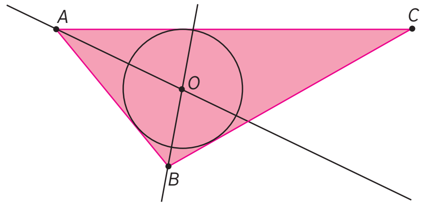
Sim, é possível construir o triângulo.

b)
- $5 < 3 + 2$
  $5 < 5$ (falso)

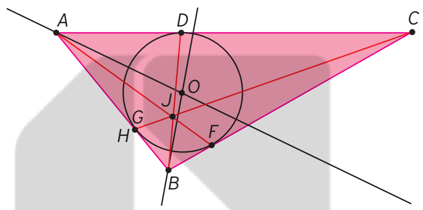
Não é possível construir o triângulo.

12. Traça-se inicialmente pelo menos duas bissetrizes internas do triângulo. O ponto de intersecção das bissetrizes internas é o circuncentro, que é o centro da circunferência inscrita.

Com a ponta-seca do compasso no incentro e a ponta grafite em um ponto do lado do triângulo, traça-se a circunferência inscrita nele.



Então, marca-se os pontos de intersecção entre o triângulo e a circunferência e liga-se cada vértice do triângulo ao ponto em que a circunferência toca o lado oposto a esse vértice.

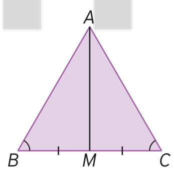


Portanto, os três segmentos passam pelo mesmo ponto.

13. Resposta pessoal. Os pontos são colineares para qualquer ponto *P* que pertença à circunferência.

14. Possível demonstração:

Considere o triângulo *ABC* equilátero. Traçando a bissetriz $\overline{AM}$ em relação ao vértice *A* formam-se os triângulos *ABM* e *ACM*.



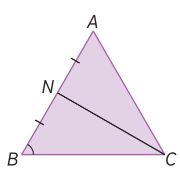
Considerando os triângulos *ABM* e *ACM*, tem-se:

- $\overline{AM}$: lado comum aos dois triângulos;
- $B\hat{A}M \cong C\hat{A}M$: $\overline{AM}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$;
- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$: triângulo equilátero.

Portanto, pelo caso LAL, os triângulos *ABM* e *ACM* são congruentes.

Como o $\Delta ABC \cong \Delta ACM$, então $A\hat{B}M$ e $A\hat{C}M$.

Repetindo esse procedimento para o vértice *C*, ou seja, traçando a bissetriz a partir desse vértice, tem-se:



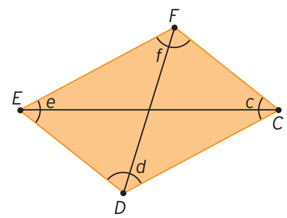
Então, $C\hat{B}N \cong C\hat{A}N$.

Portanto, os ângulos internos de qualquer triângulo equilátero são congruentes e medem 60°.

CAPÍTULO 2 – QUADRILÁTEROS

PÁGINA 114 – ATIVIDADES

1. Desenho possível:



a) $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{CF}$.

b) *C*, *D*, *E* e *F*.

c) $\overline{CE}$ e $\overline{DF}$.

d) $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$ e $\hat{f}$.

2. Alternativa **c**.

a) Falsa. Nem todo quadrilátero tem os lados opostos paralelos.

b) Falsa. Nem todo quadrilátero é um quadrado.

c) Verdadeira.

d) Falsa. Nem todo quadrilátero tem dois lados paralelos.

e) Falsa. Nem todo quadrilátero tem os lados congruentes.

3. Alternativa **e**.

a) Falsa. Um paralelogramo é um quadrilátero que tem dois pares de lados opostos paralelos.

b) Falsa. Um paralelogramo é um quadrilátero que tem dois pares de lados opostos congruentes.

c) Falsa. Todo paralelogramo é um quadrilátero.

d) Falsa. Um trapézio é um quadrilátero que tem um par de lados opostos paralelos.

e) Verdadeira.

4. Considerando que nesta atividade todas as figuras são quadriláteros, é possível afirmar que a soma dos ângulos internos é igual a 360°.

a) $90° + 122° + 85° + x = 360°$
$$297° + x = 360°$$
$$x = 360° - 297°$$
$$x = 63°$$

b) $x + 105° + 98° + 87° = 360°$
$$x + 290° = 360°$$
$$x = 360° - 290°$$
$$x = 70°$$

c) $\frac{3x}{2} + 2x + \frac{x}{2} + x = 360°$

$$\frac{3x + 4x + x + 2x}{2} = 360°$$
$$\frac{10x}{2} = 360°$$
$$5x = 360°$$
$$x = \frac{360°}{5}$$
$$x = 72°$$

d) $x + 60° + 2x + 90° = 360°$

$$3x + 150° = 360°$$
$$3x = 360° - 150°$$
$$3x = 210°$$
$$x = \frac{210°}{3}$$
$$x = 70°$$

PÁGINA 119 – ATIVIDADES

5. Sabendo que, em um paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes e que os ângulos consecutivos são suplementares, tem-se:

a) $x + 122° = 180°$

$$x = 180° - 122°$$
$$x = 58°$$
$$y = 122°$$
$$z = x$$
$$z = 58°$$

Portanto, $x = 58°$, $y = 122°$ e $z = 58°$.

b) $x = 31°$

$$y + 31° = 180°$$
$$y = 180° - 31°$$
$$y = 149°$$
$$z = y$$
$$z = 149°$$

Portanto, $x = 31°$, $y = 149°$ e $z = 149°$.

c) $2x - 12° + 130° = 180°$

$$2x = 180° - 130° + 12°$$
$$2x = 62°$$
$$x = 31°$$
$$3y - 11° = 130°$$
$$3y = 130° + 11°$$
$$3y = 141°$$
$$y = \frac{141°}{3}$$
$$y = 47°$$
$$z + 130° = 180°$$
$$z = 180° - 130°$$
$$z = 50°$$

Portanto, $x = 31°$, $y = 47°$ e $z = 50°$.

d) $\begin{cases} 12x + 3y = 123° \\ 5x + 7y = 57° \end{cases}$

Dividindo a primeira equação por 3, tem-se:

$$\begin{cases} 4x + y = 41° \\ 5x + 7y = 57° \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação (-7), tem-se:

$$\begin{cases} -28x - 7y = -287° \\ 5x + 7y = 57° \end{cases}$$

Somando as duas equações, tem-se:

$$-23x + 0y = -230°$$
$$-23x = -230°$$
$$x = \frac{-230°}{-23}$$
$$x = 10°$$

Substituindo $x = 10°$em $4x + y = 41°$, tem-se:

$$4 \cdot 10° + y = 41°$$
$$40° + y = 41°$$
$$y = 41° - 40°$$
$$y = 1°$$

Portanto, $x = 10°$ e $y = 1°$.

6. Sabendo que os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes, tem-se:

$$\hat{D} \cong \hat{B} \text{ e } \hat{A} \cong \hat{C}$$

Como, em um paralelogramo, os ângulos consecutivos são suplementares, tem-se:

$$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) = 180°$$

Sabendo que a bissetriz interna de um ângulo o divide em dois ângulos congruentes, no triângulo *ABP*, os ângulos da base medem $\frac{A}{2}$ e $\frac{B}{2}$.

Como soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo *ABP*, tem-se:

$$\text{med}(\hat{P}) + \frac{\text{med}(\hat{A})}{2} + \frac{\text{med}(\hat{B})}{2} = 180°$$
$$\text{med}(\hat{P}) + \frac{1}{2} \cdot (\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B})) = 180°$$
$$\text{med}(\hat{P}) = 180° - \frac{1}{2} \cdot (\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}))$$
$$\text{med}(\hat{P}) = 180° - \frac{1}{2} \cdot 180°$$
$$\text{med}(\hat{P}) = 180° - 90°$$
$$\text{med}(\hat{P}) = 90°$$

Logo, a medida do ângulo $A\hat{P}B$ é 90°.

7. Sabendo que os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares, tem-se:

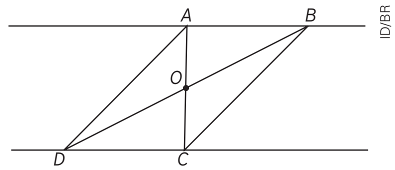
$$2x + x = 180°$$
$$3x = 180°$$
$$x = 60°$$

Então:

$$2x = 2 \cdot 60°$$
$$2x = 120°$$

Logo, os ângulos desse paralelogramo medem 60°, 120°, 60° e 120°.

8. O intuito é provar que, por congruência de triângulos, se houver segmentos paralelos congruentes, então o quadrilátero formado por esses segmentos será um paralelogramo, conforme demonstrado a seguir.



O é o ponto de intersecção das diagonais. $C\hat{D}B$ e $A\hat{B}D$ são ângulos alternos internos e, portanto, congruentes. O mesmo acontece com o par de ângulos $D\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$; portanto, eles são congruentes. Como $\overline{CD} \cong \overline{AB}$, os triângulos *DBC* e *DBA* são congruentes pelo caso ALA. Analogamente, os triângulos *ABC* e *ADC* são congruentes. Portanto, *ABCD* é um paralelogramo.

9. Sabendo que as diagonais de um paralelogramo se intersectam no ponto médio, então, $\overline{AM} \cong \overline{CM}$ e $\overline{BM} \cong \overline{DM}$. Assim:

- $\overline{AM} \cong \overline{CM}$

$$19 - y = 2y + 1$$
$$3y = 18$$
$$y = \frac{18}{3}$$
$$y = 6$$

- $\overline{BM} \cong \overline{DM}$

$$x + y = 4x - 6$$
$$x + 6 = 4x - 6$$
$$3x = 12$$
$$x = \frac{12}{3}$$
$$x = 4$$

Portanto:

- $AC = AM + CM$
  $AC = 19 - y + 2y + 1$
  $AC = y + 20$
  $AC = 6 + 20$
  $AC = 26$
- $BD = BM + DM$
  $BD = x + y + 4x - 6$
  $BD = 5x + y - 6$
  $BD = 5 \cdot 4 + 6 - 6$
  $BD = 20$

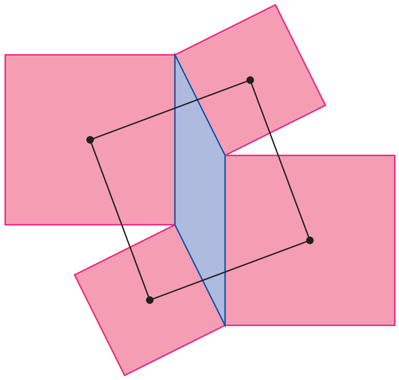
Logo, $AC = 26$ e $BD = 20$.

10. Resolução possível.

Usando um esquadro com escala, constrói-se um paralelogramo qualquer. Em seguida, com o par de esquadros e o compasso, constroem-se quadrados sobre os lados do paralelogramo e externos a ele. Para encontrar o centro dos quadrados, traçam-se as diagonais de cada quadrado, pois em todo quadrado as diagonais se interceptam no ponto médio. Usando o esquadro, ligam-se os centros dos quadrados, obtendo-se, assim, um novo quadrilátero. Para descobrir que tipo de quadrilátero foi construído, é possível usar a régua, ou o compasso, e verificar que os lados desse quadrilátero têm medidas iguais. Além disso, com o auxílio de um transferidor, por exemplo, é possível medir os ângulos desse quadrilátero e verificar que eles medem 90°.

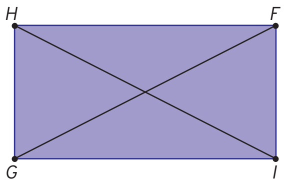
Portanto, o quadrilátero construído é um quadrado.

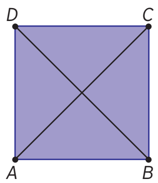
Ilustrações: ID/BR



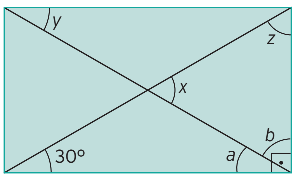
11. Sim, basta que o paralelogramo seja um retângulo ou um quadrado, pois, para que um paralelogramo tenha diagonais congruentes, é necessário que ele tenha ângulos internos medindo 90°.

Desenhos possíveis:





12. a)



Como as diagonais do retângulo são congruentes e se intersectam no ponto médio, cada triângulo formado pelos lados e pelas diagonais do paralelogramo é isósceles. Logo:

$$a = 30°$$
$$b = z$$

Como a medida de cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele, tem-se:

$$x = a + 30°$$
$$x = 30° + 30°$$
$$x = 60°$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e $b = z$, tem-se:

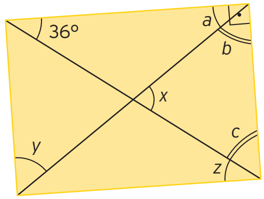
$$x + b + z = 180°$$
$$60° + b + z = 180°$$
$$b + z = 120°$$
$$2z = 120°$$
$$z = 60°$$

Portanto, $b = 60°$.

Como $\hat{y}$ e $\hat{a}$ são alternos internos e, portanto, congruentes, $y = a = 30°$.

Logo, $x = 60°$, $y = 30°$ e $z = 60°$.

b)



Como as diagonais do retângulo são congruentes e se intersectam no ponto médio, cada triângulo formado pelos lados e pelas medidas das diagonais do paralelogramo é isósceles. Logo:

$$a = 36°$$
$$b = c$$

Como a medida de cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele, tem-se:

$$x = a + 36°$$
$$x = 36° + 36°$$
$$x = 72°$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e $b = c$, tem-se:

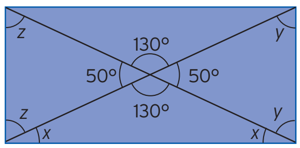
$$x + b + c = 180°$$
$$72° + b + c = 180°$$
$$b + c = 108°$$
$$2c = 108°$$
$$c = 54°$$

Portanto, $b = 54°$.

Como $\hat{y}$ e $\hat{b}$ são alternos internos e, portanto, congruentes, $y = b = 54°$.

Logo, $x = 72°$, $y = 54°$ e $z = 36°$.

c)



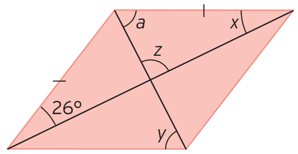
Os quatro ângulos formados pela intersecção das diagonais do retângulo são, dois a dois, opostos pelo vértice ou suplementares, portanto medem 50°, 50° e 130°. Como as diagonais do retângulo são congruentes e se intersectam no ponto médio, cada triângulo formado pelos lados e pelas medidas das diagonais do paralelogramo é isósceles; portanto, os ângulos da base de cada triângulo são congruentes.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se:

- $$2x + 130° = 180°$$
  $$2x = 50°$$
  $$x = 25°$$
- $$2y + 50° = 180°$$
  $$2y = 130°$$
  $$y = 65°$$
- $$2z + 50° = 180°$$
  $$2z = 130°$$
  $$z = 65°$$

Logo, $x = 25°$, $y = 65°$ e $z = 65°$.

d)



Como as diagonais de um losango são perpendiculares entre si, temos $z = 90°$. Como o ângulo de 26° e o ângulo de medida x são os ângulos da base de um triângulo isósceles, então $x = 26°$. Além disso, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se:

$$a + x + z = 180°$$
$$a + 26° + 90° = 180°$$
$$a + 116° = 180°$$
$$a = 180° - 116°$$
$$a = 64°$$

Como os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{y}$ são alternos internos e, portanto, congruentes, então $y = a = 64°$.

Logo, $x = 26°$, $y = 64°$ e $z = 90°$.

13. a) Verdadeira.

b) Falsa. Correção possível: As diagonais de um losango são perpendiculares entre si, mas não necessariamente congruentes.

c) Verdadeira.

d) Falsa. Correção possível: Se um quadrilátero tem diagonais perpendiculares que se intersectam em seus pontos médios, então ele é um losango.

e) Falsa. Correção possível: Se um quadrilátero tem diagonais congruentes, que se cruzam no ponto médio, então ele é um retângulo.

f) Falsa. Correção possível: As diagonais de um losango são bissetrizes dos ângulos internos.

14. Na figura, há dois quadrados, cujos ângulos internos são congruentes e medem 90°, e dois triângulos, sendo um deles equilátero, cujos ângulos internos são congruentes e medem 60°, e o outro isósceles, cujos ângulos internos medem x, y e y.

O ângulo em torno do vértice comum às quatro figuras é um ângulo de volta inteira, então sua medida é igual a 360°.

Assim:

$$90° + 60° + 90° + x = 360°$$
$$240° + x = 360°$$
$$x = 360° - 240°$$
$$x = 120°$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo isósceles tem-se:

$$y + y + x = 180°$$
$$2y + 120° = 180°$$
$$2y = 180° - 120°$$
$$2y = 60°$$
$$y = \frac{60°}{2}$$
$$y = 30°$$

Logo, $x = 120°$ e $y = 30°$.

PÁGINA 124 – ATIVIDADES

15. a) Como em um trapézio isósceles os ângulos adjacentes a uma das bases são congruentes, então $z = 43°$ e $x = y$.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, tem-se:

$$x + y + z + 43° = 360°$$
$$x + x + 43° + 43° = 360°$$
$$2x + 86° = 360°$$
$$2x = 360° - 86°$$
$$2x = 274°$$
$$x = \frac{274°}{2}$$
$$x = 137°$$

Mas:

$$y = x$$
$$y = 137°$$

Logo, $x = 137°$, $y = 137°$ e $z = 43°$.

b) Como em um trapézio isósceles os ângulos adjacentes a uma das bases são congruentes, então $z = 114°$ e $x = y$. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, tem-se:

$$x + y + 114° + z = 360°$$
$$x + x + 114° + 114° = 360°$$
$$2x + 228° = 360°$$
$$2x = 360° - 228°$$
$$2x = 132°$$
$$x = \frac{132°}{2}$$
$$x = 66°$$

Mas:

$$y = x$$
$$y = 66°$$

Logo, $x = 66°$, $y = 66°$ e $z = 114°$.

c) Como em um trapézio isósceles os ângulos adjacentes a uma das bases são congruentes, então $y = 134°$ e $x = z$.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, tem-se:

$$x + y + 134° + z = 360°$$
$$x + 134° + 134° + x = 360°$$
$$2x + 268° = 360°$$
$$2x = 360° - 268°$$
$$2x = 92°$$
$$x = \frac{92°}{2}$$
$$x = 46°$$

Mas:

$$z = x$$
$$z = 46°$$

Logo, $x = 46°$, $y = 134°$ e $z = 46°$.

d) Como em um trapézio as bases são paralelas, temos $x = 90°$.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, tem-se:

$$x + 90° + y + 28° = 360°$$
$$90° + 90° + y + 28° = 360°$$
$$y + 208° = 360°$$
$$y = 360° - 208°$$
$$y = 152°$$

Logo, $x = 90°$ e $y = 152°$.

16. Desenho possível:

Ilustrações: ID/BR

Na comparação, mesmo variando os ângulos, em trapézios isósceles, os ângulos opostos são suplementares ($a + b = 180°$).

17. Traçando por A um segmento paralelo a $\overline{BC}$, marca-se o ponto O em $\overline{DC}$ e obtém-se $\overline{AO}$ e $\overline{OC}$, em que $OC = 4$ m, pois, como $\overline{AO}$ é paralelo a $\overline{BC}$, $ABCO$ é um paralelogramo e $OC = AB$.

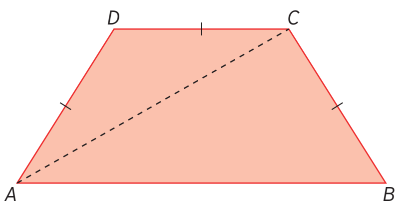
Os ângulos $O\hat{A}B$ e $B\hat{C}O$ são congruentes, pois são os ângulos internos do paralelogramo $ABCO$. Os ângulos $A\hat{O}D$ e $B\hat{A}O$ também são congruentes, pois são alternos internos e $\text{med}(D\hat{A}B) = 2 \cdot \text{med}(B\hat{C}D)$. Assim, $\text{med}(D\hat{A}O) = \text{med}(B\hat{C}D)$, ou seja, $\overline{AO}$ é a bissetriz interna de $D\hat{A}B$.

É possível concluir que ADO é um triângulo isósceles e que, portanto, $AD = DO$. Então:

$$DO = DC - CO$$
$$DO = 19 - 4$$
$$DO = 15$$

Portanto, $AD = 15$ m.

18.



a) Podemos afirmar que ACD é um triângulo isósceles, pois $\overline{AD} = \overline{DC}$.

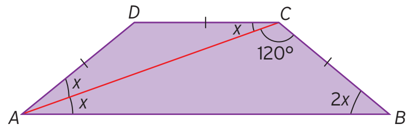
b) Porque são ângulos da base de um triângulo isósceles.

c) Sim. Considerando que $\overline{DC}$ e $\overline{AB}$ são paralelos, pois são as bases do trapézio $ABCD$, os ângulos $D\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ são alternos internos.

d) O segmento $\overline{AC}$ divide $D\hat{A}B$ em $C\hat{A}B$ e $D\hat{A}C$. Como o par de ângulos $D\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ e o par $D\hat{C}A$ e $D\hat{A}C$ são congruentes, $C\hat{A}B$ e $D\hat{A}C$ também são congruentes. Logo, $\overline{AC}$ é bissetriz interna de $D\hat{A}B$.

19. Nos dois itens desta atividade, a diagonal $\overline{AC}$ divide $D\hat{A}B$ em $C\hat{A}B$ e $D\hat{A}C$. Como os ângulos $D\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ são alternos internos ($\overline{DC}$ e $\overline{AB}$ são paralelos, pois são as bases do trapézio $ABCD$) e $D\hat{C}A$ e $D\hat{A}C$ são ângulos da base do triângulo ACD, que é isósceles, o par $D\hat{C}A$ e $D\hat{A}C$ e o par $D\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ são congruentes; então, o par $C\hat{A}B$ e $D\hat{A}C$ é congruente. Logo, $\overline{AC}$ é bissetriz interna de $D\hat{A}B$.

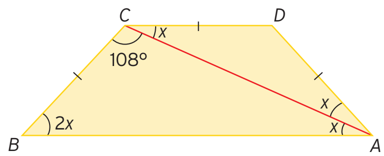
a)



Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo ABC, tem-se:

$$2x + x + 120° = 180°$$
$$3x = 180° - 120°$$
$$3x = 60°$$
$$x = \frac{60°}{3}$$
$$x = 20°$$

b)



Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo ABC, tem-se:

$$108° + x + 2x = 180°$$
$$3x = 180° - 108°$$
$$3x = 72°$$
$$x = \frac{72°}{3}$$
$$x = 24$$

20. Como os degraus são igualmente espaçados, o degrau y ficará posicionado à mesma distância dos degraus que medem 40 cm e 60 cm; o degrau x ficará posicionado à mesma distância dos degraus que medem 40 cm e y; e o degrau z ficará posicionado à mesma distância dos degraus que medem y e 60 cm.

Sabendo que a base média de um trapézio é paralela às bases do trapézio e mede a metade da soma das medidas das bases, tem-se, em centímetro:

- $y = \dfrac{40 + 60}{2}$

  $y = \dfrac{100}{2}$

  $y = 50$

- $x = \dfrac{40 + y}{2}$

  $x = \dfrac{40 + 50}{2}$

  $x = \dfrac{90}{2}$

  $x = 45$

- $z = \dfrac{y + 60}{2}$

  $z = \dfrac{50 + 60}{2}$

  $z = \dfrac{110}{2}$

  $z = 55$

Então:

$$x + y + z = 45 + 50 + 55$$
$$x + y + z = 150$$

Logo, o comprimento total desses degraus medirá 150 cm.

PÁGINA 125 – DIVERSIFICANDO

1. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°, tem-se:

$$(x - 50°) + x + x + \left(\frac{x}{2} - 10°\right) = 360°$$
$$x - 50° + x + x + \frac{x}{2} - 10° = 360°$$
$$3x + \frac{x}{2} - 60° = 360°$$
$$\frac{6x}{2} + \frac{x}{2} = 360° + 60°$$
$$\frac{7x}{2} = 420°$$
$$7x = 840°$$
$$x = 120°$$

Substituindo $x = 120°$ nas expressões que representam os ângulos do quadrilátero, tem-se:

- $x - 50° = 120° - 50° = 70°$
- $x = 120°$
- $\frac{x}{2} - 10° = \frac{120°}{2} - 10° = 60° - 10° = 50°$

Portanto, as medidas dos ângulos do quadrilátero são 70°, 120°, 120° e 50°.

2. a) Sabendo que os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares e $a = 3b$, tem-se:

$$a + b = 180°$$
$$3b + b = 180°$$
$$4b = 180°$$
$$b = \frac{180°}{4}$$
$$b = 45°$$

b) $a - b = 3b - b = 2b = 2 \cdot 45° = 90°$

3. Em um paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes e os ângulos consecutivos são suplementares. Como todo losango é um paralelogramo, tem-se:

- $z = 70°$
- $x + 70° = 180°$

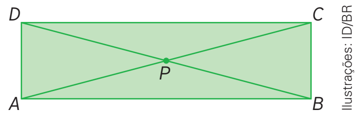
  $x = 180° - 70°$

  $x = 110°$

- $y = x$

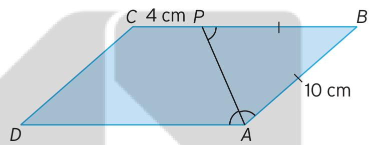
  $y = 110°$

Os valores dos ângulos x, y e z são 110°, 110° e 70°, respectivamente.

4. 

Como as diagonais de um retângulo se intersectam em seus pontos médios e são congruentes, P é o ponto médio das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Logo, $DP = PB = AP = PC$. Como os lados opostos de um retângulo são congruentes, $AD = BC$ e $CD = AB$.

Portanto, os pares de triângulos PBC e PDA e PCD e PAB são isósceles e congruentes pelo caso LLL.

5. a) 

Como $\overline{AP}$ é bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}D$, tem-se $B\hat{A}P \cong D\hat{A}P$.

Como os ângulos $B\hat{P}A$ e $D\hat{A}P$ são alternos internos $\left(\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}\right)$ e, portanto, congruentes, então $B\hat{A}P \cong D\hat{A}P \cong B\hat{P}A$.

Logo, o triângulo APB é isósceles e, portanto, $PB = AB = 10$ cm.

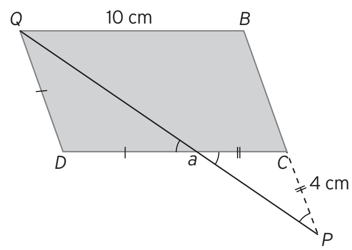
Assim, em centímetro, tem-se:

$$CB = CP + PB = 4 + 10 = 14$$

Como os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, $AD = CB = 14$ cm .

Logo, a medida do perímetro do paralelogramo $ABCD$, em centímetro, é dada por:

$$2 \cdot 10 + 2 \cdot 14 = 20 + 28 = 48$$

b) 

Como $\overline{AP}$ é bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}D$, $B\hat{A}P \cong D\hat{A}P$.

Marcando o ponto Q, intersecção de $\overline{AP}$ e $\overline{DC}$, obtêm-se $\overline{DQ}$ e $\overline{QC}$.

Os ângulos $A\hat{Q}D$ e $B\hat{A}Q$ são alternos internos $\left(\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}\right)$ e, portanto, congruentes.

Os ângulos $A\hat{Q}D$ e $C\hat{Q}P$ são opostos pelo vértice Q e, portanto, congruentes.

Os ângulos $B\hat{P}Q$ e $D\hat{A}P$ são alternos internos $\left(\overleftrightarrow{BP} // \overleftrightarrow{AD}\right)$ e, portanto, congruentes.

Como $C\hat{Q}P$ e $B\hat{P}Q$ são congruentes, o triângulo QCP é isósceles e, portanto, $CP = QC = 4$.

Como os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, então:

$$DC = AB = 10 \text{ cm}$$

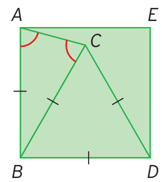
Em centímetro, tem-se:

$$DQ = DC - QC$$
$$DQ = 10 - 4$$
$$DQ = 6$$

Como $D\hat{A}Q$ e $A\hat{Q}D$ são congruentes, o triângulo QDA é isósceles e, portanto, $AD = DQ = 6$ cm.

Logo, a medida do perímetro do paralelogramo $ABCD$, em centímetro, é dada por:

$$2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 20 + 12 = 32$$

6. a) 

O triângulo BCD é equilátero, e seus lados têm a mesma medida que a dos lados do quadrado $ABDE$, ou seja:

$$AB \cong BC \cong BD \cong CD$$

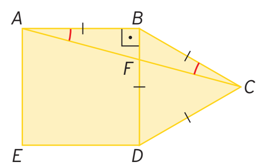
Assim, o triângulo ABC é isósceles e, portanto, $B\hat{A}C \cong B\hat{C}A$.

Como o triângulo BCD é equilátero, $\text{med}(D\hat{B}C) = 60°$. Da figura, tem-se $\text{med}(C\hat{B}A) = \text{med}(D\hat{B}A) - \text{med}(D\hat{B}C)$ e $\text{med}(D\hat{B}A) = 90°$, pois é ângulo interno do quadrado $ABDE$; então:

$$\text{med}(C\hat{B}A) = 30°$$

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se:

$$\text{med}(C\hat{B}A) + \text{med}(B\hat{C}A) + \text{med}(B\hat{A}C) =$$
$$= 180°$$
$$30° + 2 \cdot \text{med}(B\hat{C}A) = 180°$$
$$2 \cdot \text{med}(B\hat{C}A) = 180° - 30°$$
$$2 \cdot \text{med}(B\hat{C}A) = 150°$$
$$\text{med}(B\hat{C}A) = 75°$$

b) 

O triângulo BCD é equilátero, e seus lados têm a mesma medida que a dos lados do quadrado $ABDE$, ou seja, $AB = BC =$ $= BD = CD$. Portanto, o triângulo ABC é isósceles. Então, $B\hat{A}C \cong B\hat{C}A$.

Como o triângulo BCD é equilátero, $med(D\hat{B}C) = 60°$. Da figura, tem-se: $med(C\hat{B}A) = med(D\hat{B}A) + med(D\hat{B}C)$ e $med(D\hat{B}A) = 90°$, pois é ângulo interno do quadrado $ABDE$; então:

$$med(C\hat{B}A) = 150°$$

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se:

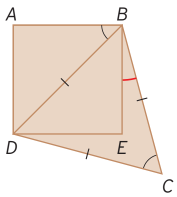
$med(C\hat{B}A) + med(B\hat{C}A) + med(B\hat{A}C) =$
$= 180°$

$150° + 2 \cdot med(B\hat{C}A) = 180°$

$2 \cdot med(B\hat{C}A) = 180° - 150°$

$2 \cdot med(B\hat{C}A) = 30°$

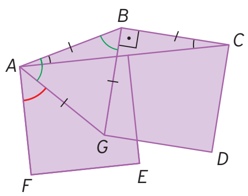
$med(B\hat{C}A) = 15°$

c) 

Ilustrações: ID/BR

Como o triângulo BCD é equilátero, $med(D\hat{B}C) = 60°$. Da figura, tem-se $med(E\hat{B}C) = med(D\hat{B}C) - med(D\hat{B}E)$ e $med(D\hat{B}E) = 45°$, pois $\overline{BD}$ é diagonal do quadrado $ABED$ e bissetriz interna de $med(A\hat{B}E) = 90°$. Então:

$$med(E\hat{B}C) = 60° - 45° = 15°$$

d) 

O triângulo BAG é equilátero, e seus lados têm a mesma medida que a dos lados do quadrado $BCDG$, ou seja, $GB = BC =$ $= CD = DG$. Portanto, o triângulo ABC é isósceles. Então, $B\hat{A}C \cong B\hat{C}A$.

Da figura, tem-se:

$$med(A\hat{B}C) = med(A\hat{B}G) + med(G\hat{B}C)$$

Como o triângulo BAG é equilátero, tem-se: $med(A\hat{B}G) = 60°$ e $med(G\hat{B}C) = 90°$, pois é ângulo interno do quadrado $BCDG$. Então: $med(A\hat{B}C) = 150°$.

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se:

$med(C\hat{B}A) + med(B\hat{C}A) + med(B\hat{A}C) =$
$= 180°$

$150° + 2 \cdot med(B\hat{C}A) = 180°$

$2 \cdot med(B\hat{C}A) = 180° - 150°$

$2 \cdot med(B\hat{C}A) = 30°$

$med(B\hat{C}A) = 15°$

Sendo $med(B\hat{A}G) = 60°$, pois é ângulo interno do triângulo equilátero ABC, então:

$med(C\hat{A}G) = med(B\hat{A}G) - med(B\hat{A}C)$

$med(C\hat{A}G) = 60° - 15°$

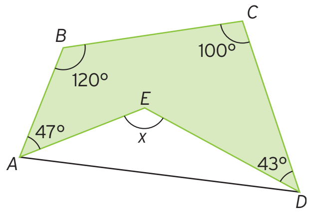
$med(C\hat{A}G) = 45°$

Assim:

$med(G\hat{A}F) = med(C\hat{A}F) - med(C\hat{A}G)$

$med(G\hat{A}F) = 90° - 45°$

$med(G\hat{A}F) = 45°$

7. 

Unindo-se os vértices A e D, obtém-se um quadrilátero, cuja soma dos ângulos internos é igual a 360°. Assim:

$120° + 100° + 43° + med(A\hat{D}E) + med(E\hat{A}D) +$
$+ 47° = 360°$

$310° + med(A\hat{D}E) + med(E\hat{A}D) = 360°$

$med(A\hat{D}E) + med(E\hat{A}D) = 360° - 310°$

$med(A\hat{D}E) + med(E\hat{A}D) = 50°$

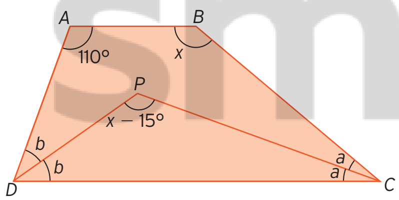
Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo AED, tem-se:

$med(A\hat{D}E) + med(E\hat{A}D) + med(A\hat{E}D) = 180°$

$50° + x = 180°$

$x = 180° - 50°$

$x = 130°$

8. 

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo PCD, tem-se:

$$a + b + x - 15° = 180°$$
$$a + b + x = 195° \text{ (I)}$$

Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°, no trapézio $ABCD$, tem-se:

$$110° + x + 2a + 2b = 360°$$
$$x + 2a + 2b = 360° - 110°$$
$$x + 2a + 2b = 250°$$
$$(a + b + x) + a + b = 250°$$
$$195° + a + b = 250°$$
$$a + b = 55° \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), tem-se:

$$a + b + x = 195°$$
$$55° + x = 195°$$
$$x = 195° - 55°$$
$$x = 140°$$

PÁGINA 126 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.

PÁGINA 128 – INVESTIGAR

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO

1. População é o grupo sobre o qual está sendo realizada a pesquisa. Amostra é um subconjunto da população. Ela é necessária quando o conjunto da população é grande e é inviável fazer a pesquisa com todo ele.

2. As fichas poderiam ser entregues às pessoas para que elas mesmas as preenchessem.

3. Os gráficos organizam os dados por meio de elementos textuais e não textuais, o que contribui para a compreensão deles.

PÁGINA 130 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. a) Como a medida do menor lado é 3 cm e a do maior lado é 5 cm, devido à condição de existência de um triângulo, tem-se $3 + 5 = 8$ e $5 - 3 = 2$; então $7 < 3 + 5$ e $5 - 3 < 3$. Os valores que completam corretamente a frase são 7 cm e 3 cm.

b) Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo RST, tem-se:

$$3x - 16° + 2x + 18° + x - 2° = 180°$$
$$6x = 180°$$
$$x = \frac{180°}{6}$$
$$x = 30°$$

Então, os ângulos internos do triângulo RST medem:

$med(\hat{R}) = 3x - 16° = 3 \cdot 30° - 16° = 74°$

$med(\hat{T}) = 2x + 18° = 2 \cdot 30° + 18° = 78°$

$med(\hat{S}) = x - 2° = 30° - 2° = 28°$

Logo, o maior ângulo desse triângulo mede 78°.

c) Como, em um triângulo, o ângulo interno e o ângulo externo são adjacentes suplementares, subtraindo de 180° a medida dos ângulos externos, obtém-se os ângulos internos desse triângulo. Então:

- $180° - x$
- $180° - (x + 30°) = 150° - x$
- $180° - (x - 30°) = 210° - x$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, tem-se:

$$180° - x + 150° - x + 210° - x = 180°$$
$$-3x = 180° - 540°$$
$$-3x = -360°$$
$$x = \frac{-360°}{-3}$$
$$x = 120°$$

Substituindo $x = 120°$nas expressões que representam as medidas dos ângulos internos , tem-se:

- $180° - x = 180° - 120° = 60°$
- $150° - x = 150° - 120° = 30°$
- $210° - x = 210° - 120° = 90°$

2. **a)** $y = 35° + 55° = 90°$

b) • $x + 30° = 60°$

$x = 60° - 30°$

$x = 30°$

• $x + y = 180°$

$30° + y = 180°$

$y = 180° - 30°$

$y = 150°$

Portanto, $x = 30°$ e $y = 150°$.

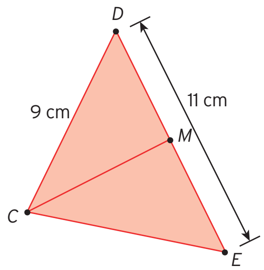
c) $4x + 60° + 3x - 5° = 125°$

$4x + 3x = 125° - 60° + 5°$

$7x = 70°$

$x = 10°$

3.



Ilustrações: ID/BR

Como o perímetro do triângulo *CDE* mede 30 cm, tem-se:

$9 + 11 + CE = 30$

$20 + CE = 30$

$CE = 30 - 20$

$CE = 10$

Como $\overline{CM}$ é a mediana relativa a $\overline{DE}$, então:

$$DM = EM = \frac{DE}{2}$$

$$DM = EM = \frac{11}{2}$$

$$DM = EM = 5{,}5$$

Portanto, $CE = 10$ cm; $DM = 5{,}5$ cm e $EM = 5{,}5$ cm.

4. **a)** Verdadeira.

$9 + 2x = 30$

$2x = 21$

$x = 10{,}5$

b) Falsa. Justificativa possível: Apesar de todos os ângulos nos triângulos equiláteros terem a mesma medida (60°), a medida dos lados de um triângulo equilátero pode ser diferente da medida dos lados do outro triângulo equilátero.

5. Alternativa **a**.

Como as medidas conhecidas dos lados são 10 e 3, devido à condição de existência de um triângulo, tem-se: $10 + 3 = 13$ e $10 - 3 = 7$. Considerando que o terceiro lado mede x, tem-se $x > 7$ e $x < 13$. Portanto, as medidas possíveis para o terceiro lado do triângulo são 8, 9, 10, 11 e 12, ou seja, há 5 possíveis triângulos.

6. **a)** Pela figura, o ângulo $D\hat{O}A$ é reto. Os ângulos $B\hat{O}A$ e $D\hat{O}C$ são suplementares a $D\hat{O}A$ e, portanto, também medem 90°. Como $D\hat{O}A$ e $B\hat{O}C$ são opostos pelo vértice, $B\hat{O}C$ também é um ângulo reto.

Os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OC}$ e os segmentos $\overline{OD}$ e $\overline{OB}$ são congruentes, pois têm marcas iguais, que representam medidas iguais.

Então, os triângulos *ABO*, *CBO*, *CDO* e *ADO* são congruentes entre si pelo caso LAL, pois têm dois lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes. Assim, $x = 40°$.

Pela congruência desses triângulos, é possível afirmar que, além dos ângulos $O\hat{A}B$ e $\hat{x}$, $B\hat{C}O$ e $D\hat{A}O$ também medem 40° e, consequentemente, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, é possível concluir que os ângulos $O\hat{B}A$, $O\hat{B}C$, $O\hat{D}C$e $O\hat{D}A$ medem 50° ($40° + 90° + 50° = 180°$). Assim, os triângulos *BDA* e *BDC* e os triângulos *BAC* e *DAC* são congruentes pelo caso ALA.

b) Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$, os ângulos $B\hat{A}E$ e $C\hat{D}E$ e os ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{D}A$ são congruentes, pois têm marcas iguais, que representam medidas iguais.

O triângulo *AED* é isósceles, pois os ângulos $E\hat{A}D$ e $E\hat{D}A$ são congruentes. Então, os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{AE}$ são congruentes.

Considerando que $\overline{AD}$ é lado comum aos triângulos *ABD* e *DCA* e que os ângulos $D\hat{E}C$ e $A\hat{E}B$ são congruentes, pois são opostos pelos vértice, é possível afirmar que, pelos casos ALA ou LAL, os triângulos *ABD* e *DCA* e os triângulos *ABE* e *DCE* são congruentes; logo, $x = 30°$.

7. **a)** Os triângulos *ABC* e *EDC* são congruentes pelo caso LAA_o pois:

- $\overline{DC} \cong \overline{BC}$
- $D\hat{C}E \cong B\hat{C}A$
- $D\hat{E}C \cong B\hat{A}C$

Logo, $x = AC = EC = 6$ cm.

b) Os triângulos *ABC* e *CDA* são congruentes pelo caso LLL, pois:

- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
- $\overline{BC} \cong \overline{DA}$
- $\overline{AC}$: lado comum

Logo, $x = \text{med}(B\hat{A}C) = \text{med}(D\hat{C}A) = 40°$.

8. **a)** Verdadeira. O ortocentro é o encontro das alturas e, em um triângulo retângulo, as alturas coincidem com os catetos.

b) Falsa. Em todo triângulo equilátero, o incentro, o ortocentro e o baricentro coincidem.

c) Falsa. Em todo triângulo isósceles, o incentro e o ortocentro só coincidem se esse triângulo isósceles for equilátero.

d) Falsa. Nos triângulos obtusângulos, o circuncentro é externo ao triângulo e, nos triângulos retângulos, ele é o ponto médio da hipotenusa.

9. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo *ABC*, tem-se:

$\text{med}(B\hat{A}C) + \text{med}(A\hat{B}C) + \text{med}(A\hat{C}B) = 180°$

$\text{med}(B\hat{A}C) + 72° + 24° = 180°$

$\text{med}(B\hat{A}C) + 96° = 180°$

$\text{med}(B\hat{A}C) = 180° - 96°$

$\text{med}(B\hat{A}C) = 84°$

Como $\overline{AE}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, então $\text{med}(C\hat{A}E) = \text{med}(B\hat{A}E) = 42°$.

Como $\overline{AD}$ é a altura do triângulo, relativa ao lado $\overline{BC}$, $\text{med}(A\hat{D}E) = \text{med}(A\hat{D}B) = 90°$.

Como a medida de cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele, no triângulo *ADE*, tem-se:

$\text{med}(A\hat{E}C) = \text{med}(D\hat{A}E) + \text{med}(A\hat{D}E)$

$\text{med}(A\hat{E}C) = x + 90°$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo *ACE*, tem-se:

$\text{med}(A\hat{E}C) + \text{med}(A\hat{C}E) + \text{med}(C\hat{A}E) = 180°$

$\text{med}(A\hat{E}C) + 24° + 42° = 180°$

$\text{med}(A\hat{E}C) + 66° = 180°$

$\text{med}(A\hat{E}C) = 180° - 66°$

$\text{med}(A\hat{E}C) = 114°$

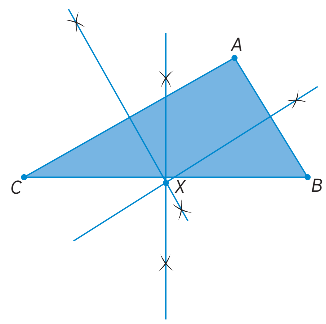
Então:

$x + 90° = 114°$

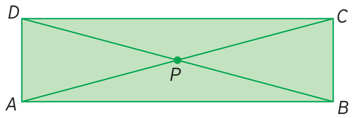
$x = 114° - 90°$

$x = 24°$

10. O ponto equidistante das três cidades é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo cujos vértices são os centros das cidades *A*, *B* e *C*. O centro da circunferência circunscrita é o ponto de intersecção das mediatrizes do triângulo *ABC*.



11. Respostas pessoais. Resposta possível:



Como as diagonais de um retângulo se intersectam em seus pontos médios e são congruentes, *P* é ponto médio das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Logo, $DP = PB = AP = PC$.

Como os lados opostos de um retângulo são congruentes, $AD = BC$ e $CD = AB$.

Portanto, os triângulos *PAB* e *PCD* são congruentes pelo caso LLL, assim como os triângulos *PBC* e *PAD*. No entanto, os quatro triângulos só serão congruentes entre si se *ABCD* for um quadrado.

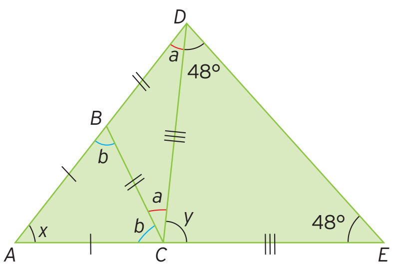
12. Alternativa **c**.

I. Correta. Em um triângulo escaleno, a altura e a bissetriz nunca coincidem.

II. Falsa. Apenas no triângulo equilátero as três medianas são necessariamente congruentes.

III. Falsa. Um triângulo isósceles tem pelo menos duas alturas congruentes.

13. Alternativa **c**.



Como $AB = AC$, $BC = BD$ e $CD = CE$, os triângulos *CDE*, *ABC* e *BCD* são isósceles.

Assim, $\text{med}(C\hat{D}E) = 48°$.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, no triângulo *CDE*, tem-se:

$$y + 48° + 48° = 180°$$
$$y + 96° = 180°$$
$$y = 180° - 96°$$
$$y = 84°$$

E, no triângulo *ABC*, tem-se:

$$x + 2b = 180° \text{ (I)}$$

Como a medida de cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele, no triângulo *ACD*, tem-se:

$$x + a = 84° \text{ (II)}$$

E, no triângulo *BCD*, tem-se:

$$b = 2a \text{ (III)}$$

De (I) e (III), tem-se:

$$x + 4a = 180° \text{(IV)}$$

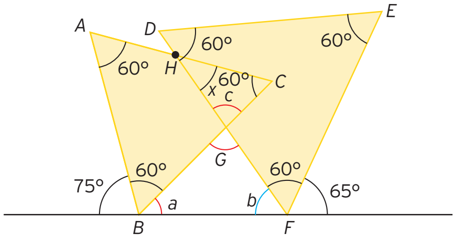
Subtraindo (II) de (IV), tem-se:

$$\begin{cases} x + 4a = 180° \\ -x + a = 84° \end{cases}$$
$$3a = 96°$$
$$a = \frac{96°}{3}$$
$$a = 32°$$

Substituindo $a = 32°$ em (II), tem-se:

$$x + 32° = 84°$$
$$x = 84° - 32°$$
$$x = 52°$$

14. Alternativa **b**.



Sabendo que um ângulo raso mede 180° e que cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60°, tem-se:

- Em torno do vértice *B*:

$$75° + 60° + a = 180°$$
$$135° + a = 180°$$
$$a = 180° - 135°$$
$$a = 45°$$

- Em torno do vértice *F*:

$$65° + 60° + b = 180°$$
$$125° + b = 180°$$
$$b = 180° - 125°$$
$$b = 55°$$

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180°, tem-se:

- No triângulo *BFG*:

$$a + b + c = 180°$$
$$45° + 55° + c = 180°$$
$$c = 180° - 100°$$
$$c = 80°$$

- No triângulo *CGH*:

Os ângulos $B\hat{G}F$ e $C\hat{G}H$ são opostos pelo vértice *G* e, portanto, congruentes.

$$x + 80° + 60° = 180°$$
$$x + 140° = 180°$$
$$x = 180° - 140°$$
$$x = 40°$$

Logo, o ângulo *x* mede 40°.

UNIDADE 5 – SEQUÊNCIAS E PROPORCIONALIDADE

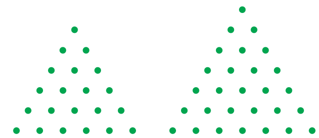
CAPÍTULO 1 – SEQUÊNCIAS

PÁGINA 140 – ATIVIDADES

1. a) Nessa sequência, pode-se identificar o seguinte padrão: adicionar 4 quadrados a cada nova figura, sendo um em cada uma das extremidades da base e dois na ponta superior. Assim, os dois próximos termos dessa sequência são:

Ilustrações: ID/BR

b) Nessa sequência, pode-se identificar o seguinte padrão: adicionar, à base da figura anterior, a quantidade de bolinhas equivalente à posição da figura que será formada, mantendo a disposição das bolinhas de maneira que a figura lembre um triângulo. Assim, os dois próximos termos dessa sequência são:



c) Nessa sequência, pode-se identificar o seguinte padrão: a partir do segundo termo, adicionar 4 unidades ao termo anterior. Assim, os dois próximos termos dessa sequência são 26 e 30, pois:

$$22 + 4 = 26 \text{ e } 26 + 4 = 30$$

d) Nessa sequência, pode-se identificar o seguinte padrão: a partir do segundo termo, adicionar 2 unidades ao termo anterior. Assim, os dois próximos termos dessa sequência são 12 e 14, pois:

$$10 + 2 = 12 \text{ e } 12 + 2 = 14$$

e) Nessa sequência, pode-se identificar o seguinte padrão: a partir do segundo termo, multiplicar o termo anterior por 2. Assim, os dois próximos termos dessa sequência são 64 e 128, pois:

$$32 \cdot 2 = 64 \text{ e } 64 \cdot 2 = 128$$

f) Nessa sequência, pode-se identificar o seguinte padrão: cada termo equivale ao quadrado do número que indica a sua posição. Assim, os dois próximos termos dessa sequência são 36 e 49, pois $6^2 = 36$ e $7^2 = 49$.

g) Nessa sequência, pode-se identificar o seguinte padrão: o novo termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores. Assim, os dois próximos termos dessa sequência são 34 e 55, pois $13 + 21 = 34$ e $21 + 34 = 55$.

h) Nessa sequência, pode-se identificar o seguinte padrão: a quantidade de zeros entre o primeiro e o último algarismo corresponde a uma unidade a menos do que o número que indica a posição do termo. Assim, os dois próximos termos dessa sequência são 1 000 001 e 10 000 001, pois o 6º termo terá cinco zeros e o 7º termo terá seis zeros.

i) Nessa sequência, pode-se identificar o seguinte padrão: o numerador é sempre 1 e o denominador é indicado pela posição do termo. Assim, os dois próximos termos são $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{7}$, pois o 6º termo tem denominador 6 e o 7º termo tem denominador 7.

2. É possível relacionar os elementos da sequência com o resto obtido ao dividir por 4 o número que representa a posição ocupada por cada elemento, da seguinte maneira:
- Estrela: resto 1;
- Flor: resto 2;
- Bola: resto 3;
- Barco: resto 0.

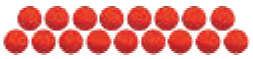
Assim:
- o 15º termo é a bola, pois, ao dividir 15 por 4, obtém-se resto 3.
- o 30º termo é a flor, pois, ao dividir 30 por 4, obtém-se resto 2.
- o 124º termo é o barco, pois, ao dividir 124 por 4, obtém-se resto 0.

Ilustrações: ID/BR

15º 30º 124º

3. a)

b)



c) O termo geral dessa sequência pode ser escrito como $a_n = 2n - 1$, sendo n um número natural e diferente de zero.

d) 31 bolinhas, pois substituindo n por 16 na regra indicada no item **c**, tem-se:

$$a_n = 2n - 1$$
$$a_{16} = 2 \cdot 16 - 1$$
$$a_{16} = 32 - 1$$
$$a_{16} = 31$$

4. Uma possível regra de formação dos termos da sequência é dada por $a_n = 25 - 7 \cdot n$, sendo n um número natural e diferente de zero.
Para calcular o 15º termo, tem-se:

$$a_{15} = 25 - 7 \cdot 15$$
$$a_{15} = 25 - 105$$
$$a_{15} = -80$$

5. a) Sendo $a_n = 3 \cdot n - 1$ o termo geral, com n natural e diferente de zero, os próximos termos serão:

$$a_7 = 3 \cdot 7 - 1 = 21 - 1 = 20$$
$$a_8 = 3 \cdot 8 - 1 = 24 - 1 = 23$$
$$a_9 = 3 \cdot 9 - 1 = 27 - 1 = 26$$

b) Sendo $a_n = n^2 - 2 \cdot n$ o termo geral, com n natural e diferente de zero, os próximos termos serão:

$$a_7 = 7^2 - 2 \cdot 7 = 49 - 14 = 35$$
$$a_8 = 8^2 - 2 \cdot 8 = 64 - 16 = 48$$
$$a_9 = 9^2 - 2 \cdot 9 = 81 - 18 = 63$$

c) Sendo $a_n = \frac{5 + 7 \cdot n}{3}$ o termo geral, com n natural e diferente de zero, os próximos termos serão:

$$a_7 = \frac{5 + 7 \cdot 7}{3} = \frac{5 + 49}{3} = \frac{54}{3} = 18$$
$$a_8 = \frac{5 + 7 \cdot 8}{3} = \frac{5 + 56}{3} = \frac{61}{3}$$
$$a_9 = \frac{5 + 7 \cdot 9}{3} = \frac{5 + 63}{3} = \frac{68}{3}$$

6. a) A partir do segundo dia, adiciona-se 20 km à distância percorrida no dia anterior. Para determinar o termo geral da sequência, pode-se organizar as informações apresentadas no enunciado como no quadro a seguir.

Dia	Distância (em km)
1	$35 = 15 + 20 \cdot 1$
2	$55 = 15 + 20 \cdot 2$
3	$75 = 15 + 20 \cdot 3$
4	$95 = 15 + 20 \cdot 4$
5	$115 = 15 + 20 \cdot 5$
⋮	⋮
n	$a_n = 15 + 20 \cdot n$

Logo, o termo geral dessa sequência pode ser escrito como $a_n = 15 + 20n$, sendo n um número natural, diferente de zero e menor que 16.

b) Como o teste tem duração de 15 dias, no último dia, tem-se $n = 15$.

$$a_{15} = 15 + 20 \cdot 15$$
$$a_{15} = 15 + 300$$
$$a_{15} = 315$$

Portanto, no último dia do teste, o veículo vai percorrer 315 km.

7. a) Nessa sequência, a cada nova figura, a partir da segunda, acrescentam-se 3 palitos, formando-se mais um quadrado em relação à figura anterior.
Os primeiros termos da sequência são:

4	$1 + 3$	$1 + 3 \cdot 1$
7	$1 + 3 + 3$	$1 + 3 \cdot 2$
10	$1 + 3 + 3 + 3$	$1 + 3 \cdot 3$
13	$1 + 3 + 3 + 3 + 3$	$1 + 3 \cdot 4$
16	$1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$	$1 + 3 \cdot 5$
19	$1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$	$1 + 3 \cdot 6$

Logo, o termo geral dessa sequência pode ser escrito como $a_n = 3n + 1$, sendo n natural e diferente de zero.

b) Substituindo a_n por 295 na regra determinada no item **a**, pode-se obter o valor de n correspondente. Assim:

$$a_n = 3n + 1$$
$$295 = 3n + 1$$
$$3n = 295 - 1$$
$$3n = 294$$
$$n = \frac{294}{3}$$
$$n = 98$$

Portanto, a figura que ocupa a 98ª posição nessa sequência pode ser construída com 295 palitos.

PÁGINA 141 – DIVERSIFICANDO

1. São três posições diferentes que se repetem. Dividindo-se 22 por 3, obtém-se resto 1.
Portanto, no 22º movimento, a atleta estará na posição equivalente à posição 1.

2. Para formar uma nova figura, a partir da segunda, acrescentam-se três palitos à figura anterior. Para determinar o termo geral da sequência, pode-se organizar as informações apresentadas no enunciado como no quadro a seguir.

Figura	Quantidade de palitos
1	$6 = 3 + 3 \cdot 1$
2	$9 = 3 + 3 \cdot 2$
3	$12 = 3 + 3 \cdot 3$
4	$15 = 3 + 3 \cdot 4$
5	$18 = 3 + 3 \cdot 5$
⋮	⋮
n	$a_n = 3 + 3 \cdot n$

Logo, o termo geral dessa sequência pode ser escrito como $a_n = 3 + 3 \cdot n$, sendo n um número natural diferente de zero.
Para $n = 10$, tem-se:

$$a_{10} = 3 + 3 \cdot 10 = 3 + 30 = 33$$

Logo, são necessários 33 palitos para formar o 10º termo dessa sequência.

3. a) Os cinco primeiros termos da sequência dos números ímpares positivos são: 1, 3, 5, 7, 9.

b) Pode-se continuar escrevendo a sequência: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.
Logo, o 10º termo dessa sequência é 19.

c) Observando a sequência, pode-se concluir que cada número pode ser escrito como o dobro de sua posição subtraído de 1 unidade, ou seja, $a_n = 2n - 1$.

4. a) Para construir os termos da sequência, inicia-se com o primeiro termo formado por um quadradinho central e mais 1 quadradinho em cada lado desse quadradinho. Para formar os demais termos, acrescentam-se 4 quadradinhos a cada figura, um em cada uma das quatro extremidades da figura anterior.

Essas informações podem ser organizadas no quadro a seguir.

Figura	Quantidade de quadradinhos
1	$5 = 1 + 4 \cdot 1$
2	$9 = 1 + 4 \cdot 2$
3	$13 = 1 + 4 \cdot 3$
4	$17 = 1 + 4 \cdot 4$
5	$21 = 1 + 4 \cdot 5$
⋮	⋮
n	$a_n = 1 + 4 \cdot n$

Assim, para o 8º termo, tem-se:

$$a_8 = 1 + 4 \cdot 8 = 1 + 32 = 33$$

Logo, serão necessários 33 quadradinhos para construir o 8º termo da sequência.

b) O termo geral dessa sequência pode ser escrito como $a_n = 4n + 1$, sendo n natural e diferente de zero.

c) Substituindo $a_n = 185$ em $a_n = 4n + 1$, é possível determinar o valor de n que representa a posição do termo formado por 185 quadradinhos.

$$a_n = 185$$
$$185 = 1 + 4n$$
$$4n = 184$$
$$n = 46$$

Portanto, o 46º termo dessa sequência tem 185 quadradinhos.

Substituindo $a_n = 188$ em $a_n = 4n + 1$, é possível determinar o valor de n que representa a posição do termo formado por 188 quadradinhos.

$$188 = 1 + 4n$$
$$4n = 187$$
$$n = 46{,}75$$

Como 46,75 não é um número natural, então não existe um termo nessa sequência que tenha 188 quadradinhos.

5. Os termos ímpares dessa sequência são as letras do alfabeto a partir da letra F e os termos pares dessa sequência são as letras do alfabeto, na ordem inversa, a partir da letra N. Assim:

- Termos ímpares: F, G, H. O sétimo termo é a letra I.
- Termos pares: N, M, L. O oitavo termo é a letra K.

Logo, os dois próximos termos são: I, K.

6. a) $a_n = \dfrac{a_{n-1} + 2}{3}$

b) Sendo $a_1 = 730$, tem-se:

- $a_2 = \dfrac{a_{2-1} + 2}{3}$

$$a_2 = \frac{a_1 + 2}{3}$$
$$a_2 = \frac{730 + 2}{3}$$
$$a_2 = \frac{732}{3}$$
$$a_2 = 244$$

- $a_3 = \dfrac{a_{3-1} + 2}{3}$

$$a_3 = \frac{a_2 + 2}{3}$$
$$a_3 = \frac{244 + 2}{3}$$
$$a_3 = \frac{246}{3}$$
$$a_3 = 82$$

Logo, o terceiro termo é 82.

7. Montando um quadro com as medidas das alturas das bonecas, tem-se:

Posição	Medida da altura
1	$2 = 1{,}1 + 0{,}9 \cdot 1$
2	$2{,}9 = 1{,}1 + 0{,}9 \cdot 2$
3	$3{,}8 = 1{,}1 + 0{,}9 \cdot 3$
⋮	⋮
n	$a_n = 1{,}1 + 0{,}9 \cdot n$

Logo, a regra dessa sequência pode ser escrita como $a_n = 1{,}1 + 0{,}9 \cdot n$, sendo n natural e diferente de zero.

Assim, pode-se calcular a posição da suposta boneca que mede 11 cm de altura. Para $a_n = 11$, tem-se:

$$a_n = 1{,}1 + 0{,}9 \cdot n$$
$$11 = 1{,}1 + 0{,}9 \cdot n$$
$$0{,}9 \cdot n = 11 - 1{,}1$$
$$0{,}9 \cdot n = 9{,}9$$
$$n = \frac{9{,}9}{0{,}9}$$
$$n = 11$$

Assim, a boneca com 11 cm de altura seria a 11ª boneca da série. Como o conjunto em questão tem apenas 8 bonecas, não é possível haver na sequência uma *matrioska* com 11 cm de altura.

Outra maneira de resolver é determinar a medida da altura da maior boneca da série. Sendo $n = 8$, tem-se:

$$a_n = 1{,}1 + 0{,}9 \cdot n$$
$$a_8 = 1{,}1 + 0{,}9 \cdot 8$$
$$a_8 = 1{,}1 + 7{,}2$$
$$a_8 = 8{,}3$$

Logo, não é possível haver nessa sequência uma *matrioska* com 11 cm de medida de altura, pois a altura da maior boneca do conjunto mede 8,3 cm.

8. a) Pode-se organizar as informações do enunciado como no seguinte quadro:

Dia do programa	Distância percorrida (m)
1	$600 = 450 + 150 \cdot 1$
2	$750 = 450 + 150 \cdot 2$
3	$900 = 450 + 150 \cdot 3$
4	$1\,050 = 450 + 150 \cdot 4$
⋮	⋮
n	$a_n = 450 + 150 \cdot n$

Logo, a regra que descreve a distância percorrida no enésimo dia por alguém que siga esse programa pode ser escrita como $a_n = 450 + 150 \cdot n$, sendo n natural e diferente de zero.

b) No oitavo dia de treinamento, tem-se:

$$a_8 = 450 + 150 \cdot 8$$
$$a_8 = 450 + 1\,200$$
$$a_8 = 1\,650$$

Logo, no oitavo dia de treinamento, essa pessoa deve percorrer 1 650 m.

c) No dia em que serão percorridos 2 700 metros, tem-se $a_n = 2\,700$:

$$2\,700 = 450 + 150 \cdot n$$
$$150n = 2\,700 - 450$$
$$150n = 2\,250$$
$$n = 15$$

Portanto, os 2 700 m serão percorridos no 15º dia do programa.

9. a) Nessa sequência, pode-se identificar o seguinte padrão: a partir do segundo termo, adicionar 3 unidades ao termo anterior.

Logo, a regra recursiva dessa sequência pode ser escrita como $a_n = a_{n-1} + 3$, com $a_1 = 5$.

b) Nessa sequência, pode-se identificar o seguinte padrão: a partir do segundo termo, subtrair 4 unidades do dobro do termo anterior.

Logo, a regra recursiva dessa sequência pode ser escrita como $a_n = 2a_{n-1} - 4$, com $a_1 = 8$.

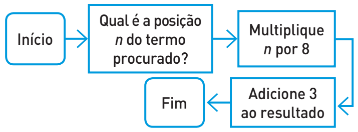
c) Nessa sequência, pode-se identificar o seguinte padrão: a partir do segundo termo, adicionar 8 unidades à metade do termo anterior.

Logo, a regra recursiva dessa sequência pode ser escrita como $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2} + 8$, com $a_1 = 688$.

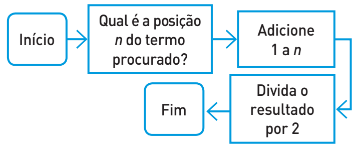
d) Nessa sequência, pode-se identificar o seguinte padrão: a partir do segundo termo, adicionar 3 unidades ao quíntuplo do termo anterior.

Logo, a regra recursiva dessa sequência pode ser escrita como $a_n = 5a_{n-1} + 3$, com $a_1 = 10$.

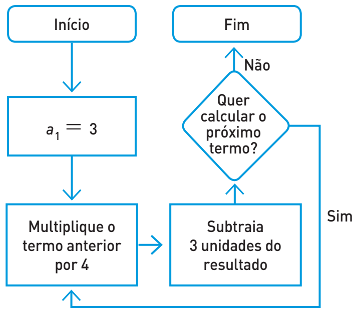
10. a) O padrão dessa sequência pode ser escrito como: $a_n = 8n + 3$



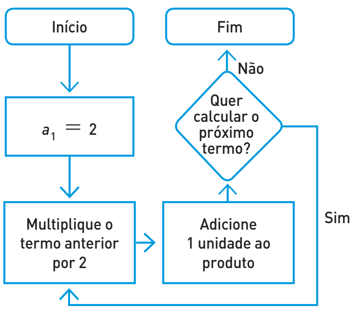
b) O padrão dessa sequência pode ser escrito como: $a_n = \dfrac{n+1}{2}$



c) O padrão dessa sequência pode ser escrito como: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 4a_{n-1} - 3,\ n \geqslant 2 \end{cases}$



d) O padrão dessa sequência pode ser escrito como: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1,\ n \geqslant 2 \end{cases}$



CAPÍTULO 2 – PROPORCIONALIDADE

PÁGINA 150 – ATIVIDADES

1. Se a velocidade do trem-bala é constante e igual a 270 km/h, a cada hora ele percorre 270 km. Assim:

$$\text{velocidade} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$$

$$\frac{270}{1} = \frac{405}{x}$$

$$270x = 405$$

$$x = \frac{405}{270}$$

$$x = 1{,}5$$

Logo, o trem fará o percurso de 405 km em 1,5 hora.

2. As grandezas são inversamente proporcionais, pois, se 10 máquinas produzem 200 tapetes em 6 dias, o dobro de máquinas produzirá essa quantidade de tapetes na metade do tempo.

3. a) $\dfrac{2}{\frac{1}{63}} = 2 \cdot 63 = 126$

$\dfrac{3}{\frac{1}{42}} = 3 \cdot 42 = 126$

$\dfrac{7}{\frac{1}{18}} = 7 \cdot 18 = 126$

$\dfrac{9}{\frac{1}{14}} = 9 \cdot 14 = 126$

Como o produto entre os termos correspondentes das duas sequências é constante e igual a 126, os números que formam as duas sequências são inversamente proporcionais, com $k = 126$.

b) $\dfrac{5}{\frac{1}{88}} = 5 \cdot 88 = 440$

$\dfrac{8}{\frac{1}{55}} = 8 \cdot 55 = 440$

$\dfrac{10}{\frac{1}{44}} = 10 \cdot 44 = 440$

$\dfrac{11}{\frac{1}{40}} = 11 \cdot 40 = 440$

Como o produto entre os termos correspondentes das duas sequências é constante e igual a 440, os números que formam as duas sequências são inversamente proporcionais, com $k = 440$.

c) $\dfrac{1}{\frac{1}{105}} = 1 \cdot 105 = 105$

$\dfrac{3}{\frac{1}{40}} = 3 \cdot 40 = 120$

$\dfrac{5}{\frac{1}{21}} = 5 \cdot 21 = 105$

$\dfrac{7}{\frac{1}{18}} = 7 \cdot 18 = 126$

Como o produto entre os termos correspondentes das duas sequências não é constante, os números que formam as duas sequências não são inversamente proporcionais.

d) $\dfrac{2}{\frac{1}{100}} = 2 \cdot 100 = 200$

$\dfrac{4}{\frac{1}{25}} = 4 \cdot 25 = 100$

$\dfrac{6}{\frac{1}{17}} = 6 \cdot 17 = 102$

$\dfrac{8}{\frac{1}{12}} = 8 \cdot 12 = 96$

Como o produto entre os termos correspondentes das duas sequências não é constante, os números que formam as duas sequências não são inversamente proporcionais.

4. a) $\dfrac{4}{10} = 0{,}4$

$\dfrac{6}{12} = 0{,}5$

$\dfrac{8}{14} \simeq 0{,}57$

$\dfrac{10}{18} = 0{,}\overline{5}$

$\dfrac{12}{20} = 0{,}6$

As grandezas não são proporcionais, pois a razão entre as duas grandezas não é constante.

b) $\dfrac{900}{1} = 900$

$\dfrac{1\,800}{2} = 900$

$\dfrac{2\,700}{3} = 900$

$\dfrac{7\,200}{8} = 900$

$\dfrac{9\,900}{11} = 900$

A quantidade de máquinas e a de ovos embalados é diretamente proporcional, pois, aumentando a quantidade de máquinas utilizadas, a quantidade de ovos embalados aumenta proporcionalmente, de modo que a razão entre elas é constante.

c) $\dfrac{5}{\frac{1}{200}} = 5 \cdot 200 = 1\,000$

$\dfrac{8}{\frac{1}{125}} = 8 \cdot 125 = 1\,000$

$\dfrac{10}{\frac{1}{100}} = 10 \cdot 100 = 1\,000$

$\dfrac{16}{\frac{1}{62,5}} = 16 \cdot 62{,}5 = 1\,000$

$\dfrac{20}{\frac{1}{50}} = 20 \cdot 50 = 1\,000$

As grandezas são inversamente proporcionais, pois aumentando a velocidade, o tempo diminui na mesma proporção.

5. a) Considerando uma distância constante, se a velocidade aumenta, o tempo para percorrer essa distância diminui. Portanto, as grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais.

b) Se a velocidade dobra em relação à situação inicial, o tempo para percorrer a mesma distância passa a ser metade do tempo inicial.
Portanto, com velocidade de 120 km/h, o trem levaria 5 horas para fazer a mesma viagem.

6. a) Sendo a quantidade de ração constante, a quantidade de galinhas e o tempo que a ração dura são inversamente proporcionais.
Logo, tendo mais galinhas, o tempo que a ração iria durar seria menor que 45 dias.

b) Com mais galinhas para alimentar, a mesma quantidade de ração dura menos tempo. Logo, as grandezas são inversamente proporcionais.

7. A quantidade de integrantes e o tempo são inversamente proporcionais, pois, com menos dias para realizar o mesmo trabalho, serão necessários mais integrantes. Assim:

$$\frac{\text{quantidade de integrantes}}{\frac{1}{\text{dias}}} = \text{constante}$$

$$\frac{8}{\frac{1}{15}} = \frac{x}{\frac{1}{10}}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{x}{15}$$

$$10x = 8 \cdot 15$$

$$x = \frac{8 \cdot 15}{10}$$

$$x = 12$$

Logo, serão necessários 12 integrantes.

8. a) Cada 1 L de gasolina deve apresentar 0,75 L de gasolina e 0,25 L de etanol. Aumentando a quantidade de gasolina, será necessário aumentar a quantidade de etanol na mistura. Portanto, as grandezas são diretamente proporcionais.

b) Sendo x a quantidade de etanol que há no tanque de combustível do carro de Jorge, tem-se:

1 L de gasolina	0,25 L de etanol
50 L de gasolina	x

$$x = 50 \cdot 0{,}25 = 12{,}5$$

Logo, no tanque de combustível do carro de Jorge estão 12,5 L de etanol.

PÁGINA 151 – DIVERSIFICANDO

1. Dividindo a quantidade de tecido pelo número de pedaços, obtém-se a medida de comprimento de cada pedaço de tecido. E dividindo a quantidade de tecido pelo comprimento de cada pedaço, obtém-se o número de pedaços. Assim:

$$96 : 12 = 8$$

$$96 : 8 = 12$$

$$96 : 16 = 6$$

$$96 : 24 = 4$$

$$96 : 3 = 32$$

Número de pedaços	Comprimento de cada pedaço (em metro)
4	24
8	12
12	8
16	6
24	4
32	3

a) Como o número de pedaços de tecido aumenta na mesma proporção que o comprimento de cada pedaço diminui, as grandezas são inversamente proporcionais.

b) $k = \frac{4}{\frac{1}{24}} = 4 \cdot 24 = 96$

O fator de proporcionalidade é 96.

2. As grandezas são diretamente proporcionais, pois, aumentando a quantidade de bonecas a serem produzidas, o tempo de produção aumenta na mesma proporção.

$$\frac{400}{5} = \frac{1\,000}{t}$$

$$400 \cdot t = 5 \cdot 1\,000$$

$$t = \frac{5 \cdot 1\,000}{400}$$

$$t = 12{,}5$$

Logo, para produzir 1 000 bonecas, serão necessárias 12,5 horas.

3. As grandezas distância e tempo são diretamente proporcionais, pois, considerando a velocidade constante, ao aumentar o tempo de viagem, a distância percorrida aumenta na mesma proporção. Assim:

$$\text{velocidade} = \frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$$

$$\frac{25}{1} = \frac{d}{1{,}5}$$

$$d = 25 \cdot 1{,}5$$

$$d = 37{,}5$$

Portanto, esse ciclista percorre 37,5 km em uma hora e meia, mantendo a mesma velocidade.

4. A quantidade de marinheiros e a de dias que o alimento durará são inversamente proporcionais, pois aumentando a quantidade de marinheiros, mantendo constante a quantidade de alimentos, o tempo que os alimentos vão durar diminui na mesma proporção.

$$\frac{30}{\frac{1}{60}} = \frac{90}{\frac{1}{t}}$$

$$\frac{30}{t} = \frac{90}{60}$$

$$90 \cdot t = 30 \cdot 60$$

$$t = \frac{30 \cdot 60}{90}$$

$$t = 20$$

Portanto, os marinheiros terão alimentos por 20 dias.

5. A quantidade de torneiras e o tempo para encher a piscina são inversamente proporcionais, pois aumentando a quantidade de torneiras, o tempo necessário para encher a piscina diminui na mesma proporção.

$$\frac{3}{\frac{1}{10}} = \frac{10}{\frac{1}{t}}$$

$$\frac{3}{t} = \frac{10}{10}$$

$$10 \cdot t = 30$$

$$t = \frac{30}{10}$$

$$t = 3$$

Dez torneiras idênticas encherão a mesma piscina em 3 horas.

6. a) Como a população de bactérias dobra a cada minuto, em 1 minuto existirão 2 000 bactérias e, em 2 minutos, 4 000 bactérias.

b) Não, pois como a cada minuto o número de bactérias duplica, então em 3 minutos o número de bactérias será multiplicado por 2, por 2 e por 2. Isto é, o número de bactérias será multiplicado por 8, pois $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

c) $\frac{2\,000}{1} = 2\,000$

$\frac{4\,000}{2} = 2\,000$

$\frac{8\,000}{3} \simeq 2\,666$

$\frac{16\,000}{4} = 4\,000$

A quantidade de bactérias aumenta conforme o tempo aumenta, mas não de maneira proporcional.

Portanto, essas grandezas não são diretamente proporcionais.

7. As grandezas são diretamente proporcionais, pois, para pavimentar uma maior extensão, serão necessários mais dias de trabalho a uma produção constante.

$$\frac{54}{18} = \frac{81}{t}$$

$$54 \cdot t = 81 \cdot 18$$

$$t = \frac{81 \cdot 18}{54}$$

$$t = 27$$

Portanto, serão necessários 27 dias para pavimentar 81 km de estrada.

8. As grandezas são inversamente proporcionais, pois, para alimentar mais animais com a mesma quantidade de ração, a ração durará menos dias.

$$\frac{20}{\frac{1}{1}} = \frac{x}{\frac{1}{5}}$$

$$x = \frac{20}{5}$$

$$x = 4$$

Logo, se Paula tivesse 5 *hamsters*, o pacote de ração duraria 4 dias.

9. a) Sim, são proporcionais. São diretamente proporcionais, pois, aumentando a quantidade de churros, o tempo de produção aumentará na mesma proporção.

b) $\frac{9\,600 \text{ churros}}{6 \text{ horas}} = 1\,600$ churros por hora.

Unidades produzidas	Tempo (em hora)
1 600	1
3 200	2
6 400	4
8 000	5
11 200	7
16 000	10

c) $k = \dfrac{9\,600}{6}$

$k = 1\,600$

O fator de proporcionalidade entre essas grandezas é 1 600.

d) Sendo x o valor correspondente às unidades produzidas e y o valor correspondente ao tempo, em hora, tem-se:

$$x = 1\,600 \cdot y$$

10. Respostas pessoais.

PÁGINA 152 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Resposta pessoal. A relação está na possibilidade de que as coisas não saiam da melhor forma possível, conforme o esperado.

2. **a)** Resposta pessoal. O valor do seguro depende da idade do motorista, da cidade em que o carro será usado, se o carro fica em estacionamento, entre outros fatores.

b) Resposta pessoal. O fator idade contribui para a diferença de valores e, aparentemente, o seguro é mais caro para pessoas mais jovens.

3. **a)** Resposta pessoal.

b) Sim, pois, ao dobrar o preço do equipamento, o preço da garantia estendida em um mesmo período de tempo também dobrou. Justificativa pessoal.

c) Não, pois, ao dobrar o tempo, considerando o valor do produto constante, o valor da garantia não dobra. Justificativa pessoal.

PÁGINA 154 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. **a)** Dividindo-se por 6 o número que representa a região na qual se pretende determinar o dia de entrega dos botijões de gás, o resto indicará o dia da semana em que será feita a entrega dos botijões na região, pois a distribuição dos números associados às regiões pelos dias da semana forma um padrão que se repete a cada 6 dias.

Dividindo 135 por 6, obtém-se resto 3, o que significa que a entrega de botijões de gás da região 135 será feita no mesmo dia da semana que a entrega dos botijões realizada na região 3. Ou seja, na quarta-feira.

b) São as regiões representadas por números que geram resto 5 ao serem divididos por 6.

2. Essa sequência é formada pelos quadrados perfeitos dos números naturais diferentes de zero e a posição do termo representa a base da potência. Desse modo, o 8º termo é $8^2 = 64$ e o 9º termo é $9^2 = 81$.

Logo, a soma de 64 com 81 é 145.

3. Alternativa **a**.

Observando a sequência, pode-se perceber que a cada 5 figuras o padrão se repete. Assim, para determinar qual é a figura correspondente à figura 169, pode-se dividir 169 por 5 e observar o resto.

Como o resto da divisão de 169 por 5 é 4, então a figura 169 será igual à figura 4.

4. Pode-se relacionar os elementos da sequência com o resto obtido ao efetuar a divisão por 8 do número que representa a posição ocupada por eles, da seguinte maneira:

resto 0: ↖	resto 4: ↘
resto 1: ↑	resto 5: ↓
resto 2: ↗	resto 6: ↙
resto 3: →	resto 7: ←

Assim, a figura que está na 955ª posição é →, pois o resto da divisão de 955 por 8 é 3; e a figura que está na 2 028ª posição é ↘, pois o resto da divisão de 2 028 por 8 é 4.

5. Alternativa **b**.

O valor pago e o número de horas trabalhadas são inversamente proporcionais, então:

$$\frac{100}{\frac{1}{20}} = \frac{x}{\frac{1}{25}} = \frac{125}{\frac{1}{y}}$$

$$100 \cdot 20 = x \cdot 25 = 125 \cdot y$$

$$2\,000 = 25x = 125y$$

- Calculando o valor de x, que representa o valor pago por Eduardo, em real, tem-se:

$$2\,000 = 25x$$

$$x = \frac{2\,000}{25}$$

$$x = 80$$

- Calculando o valor de y, que representa o número de horas trabalhadas por Flávio, tem-se:

$$2\,000 = 125y$$

$$y = \frac{2000}{125}$$

$$y = 16$$

Portanto, x vale R$ 80,00 e y vale 16 horas.

6. Alternativa **c**.

A quantidade de bolinhas em cada caixa é sempre um quadrado perfeito, cuja base da potência é uma unidade maior do que a posição da caixa. Para determinar a regra de formação da sequência, pode-se organizar as informações em um quadro, como o apresentado a seguir.

Posição da caixa	Quantidade de bolinhas
1	$4 = 2^2 = (1 + 1)^2$
2	$9 = 3^2 = (2 + 1)^2$
3	$16 = 4^2 = (3 + 1)^2$
4	$25 = 5^2 = (4 + 1)^2$
5	$36 = 6^2 = (5 + 1)^2$
⋮	⋮
n	$(n + 1)^2$

7. Como os números são diretamente proporcionais, então:

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{72} = \frac{32}{128}$$

- Calculando o valor de x:

$$\frac{x}{40} = \frac{32}{128}$$

$$128 \cdot x = 40 \cdot 32$$

$$x = \frac{40 \cdot 32}{128}$$

$$x = 10$$

- Calculando o valor de y:

$$\frac{y}{72} = \frac{32}{128}$$

$$128 \cdot y = 72 \cdot 32$$

$$y = \frac{72 \cdot 32}{128}$$

$$y = 18$$

8. **a)** A próxima figura é:

ID/BR

b) A cada nova figura, aumentam-se 4 pontos, um em cada extremidade. Para encontrar a quantidade de pontos da figura que ocupa a 10ª posição, pode-se organizar as informações em um quadro, como o apresentado a seguir.

Posição da figura	Quantidade de pontos
1	5
2	9
3	13
4	17
5	21
6	25
7	29
8	33
9	37
10	41

Portanto, a figura da 10ª posição tem 41 pontos.

c) Observando os dados do quadro apresentado no item **b**, pode-se verificar que a quantidade de pontos de cada figura é o sucessor de um múltiplo de 4.

Logo, a regra dessa sequência pode ser escrita como $a_n = 4n + 1$, sendo n natural e diferente de zero.

9. Em uma mesa, há 4 lugares e, a cada mesa que se junta, acomodam-se mais 2 pessoas. Assim:

Quantidade de mesas	Quantidade de pessoas
1	$4 = 2 + 2 \cdot 1$
2	$6 = 2 + 2 \cdot 2$
3	$8 = 2 + 2 \cdot 3$
4	$10 = 2 + 2 \cdot 4$
⋮	⋮
n	$a_n = 2 + 2 \cdot n$

Então, o termo geral dessa sequência pode ser escrito como $a_n = 2 + 2 \cdot n$, em que n representa a quantidade de mesas.

Para $n = 16$, tem-se:

$$a_{16} = 2 + 2 \cdot 16$$
$$a_{16} = 2 + 32$$
$$a_{16} = 34$$

Logo, juntando 16 mesas idênticas a essa, poderão ser acomodadas 34 pessoas.

10. Alternativa **a**.

As informações necessárias e suficientes para responder à questão são a posição da figura e a quantidade de quadrados (com 4 pontos) que serão formados.

Posição da figura	Quantidade de quadrados
1	1
2	4
3	9
⋮	⋮
n	n^2

Dessa maneira, para a posição n, serão formados n^2 quadrados com 4 pontos.

Logo, a figura 16 formará 16^2 quadrados, ou seja, 256 quadrados.

11. a) A sequência formada pela quantidade de quadrados brancos é (1, 2, 3, ...). Logo, a quantidade de quadrados brancos em cada figura é igual à posição dessa figura. Uma possível regra é $a_n = n$.

b) Todas as figuras têm uma coluna com 3 quadrados verdes e mais 2 quadrados verdes a cada nova figura, ou seja, cada figura tem 3 quadrados verdes da coluna da esquerda mais o dobro do número que representa a posição da figura. Uma regra possível é $a_n = 3 + 2 \cdot n$.

c) O número total de quadrados de cada figura é dado pela soma dos quadrados brancos com os quadrados verdes ($a_n = n + 3 + 2 \cdot n$). Assim, cada figura tem 3 quadrados da coluna da esquerda mais o triplo do número que representa a posição da figura. Uma regra possível é $a_n = 3 + 3 \cdot n$.

12. Alternativa **b**.

Sendo H a altura do poste, tem-se:

Altura	Sombra
1,8 m	60 cm = 0,6 m
H	2,0 m

Então:

$$\frac{1{,}8}{H} = \frac{0{,}6}{2}$$
$$H = \frac{2 \cdot 1{,}8}{0{,}6}$$
$$H = 6$$

Logo, a altura do poste mede 6 metros.

Na segunda situação, considerando x a medida do comprimento da sombra da pessoa, tem-se:

Altura	Sombra
1,8 m	x
6 m	1,5 m

Então:

$$\frac{1{,}8}{6} = \frac{x}{1{,}5}$$
$$x = \frac{1{,}8 \cdot 1{,}5}{6}$$
$$x = 0{,}45$$

Portanto, a sombra da pessoa passou a medir 0,45 m ou 45 cm.

13. A quantidade de quadradinhos rosa é $4n$, sendo n a posição que a figura ocupa na sequência. Considerando que cada figura é um quadrado de lado $2n + 1$, a quantidade total de quadradinhos é igual a $(2n + 1)^2$.

Logo, a quantidade de quadradinhos brancos pode ser determinada pela diferença entre a quantidade total de quadradinhos e a quantidade de quadradinhos rosa:

$$a_n = (2n + 1)^2 - 4n$$

Para $n = 5$, tem-se:

$$a_5 = (2 \cdot 5 + 1)^2 - 4 \cdot 5$$
$$a_5 = 11^2 - 20$$
$$a_5 = 121 - 20$$
$$a_5 = 101$$

Portanto, a Figura 5 terá 101 quadradinhos brancos.

UNIDADE 6 – CONSTRUÇÕES E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

CAPÍTULO 1 – CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

PÁGINA 161 – ATIVIDADES

1. a) $\frac{x}{2} = 26°$

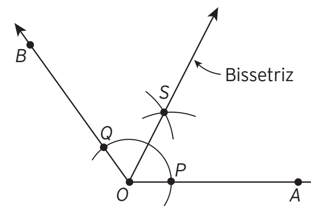
$$x = 2 \cdot 26°$$
$$x = 52°$$

b) $x = \frac{136°}{2}$

$$x = 68°$$

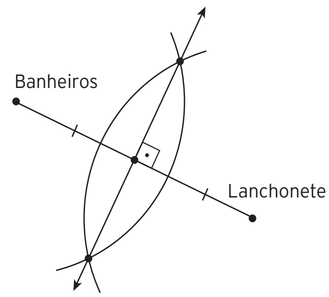
2. Resolução possível:

- Constrói-se um ângulo obtuso $A\hat{O}B$.
- Com a ponta-seca do compasso em O, traça-se $\overset{\frown}{QP}$.
- Com a ponta-seca do compasso em P e abertura qualquer, traça-se um arco na região interna de $A\hat{O}B$.
- Mantendo a mesma abertura, com a ponta-seca do compasso em Q, traça-se um segundo arco na região interna de $A\hat{O}B$, cuja intersecção com o arco anterior determina o ponto S.
- Traça-se a bissetriz $\overrightarrow{OS}$ unindo os pontos O e S.



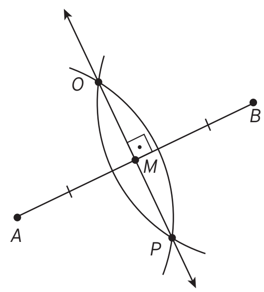
Ilustrações: ID/BR

3. Visto que a mediatriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos extremos de um segmento, para que o bebedouro esteja à mesma distância da lanchonete e dos banheiros, o ponto que o representa deve pertencer à mediatriz do segmento cujas extremidades são os pontos que representam a lanchonete e os banheiros.



4. Resolução possível:

- Constrói-se um segmento $\overline{AB}$.
- Com a ponta-seca do compasso em A e abertura maior que $\frac{AB}{2}$, traça-se um arco.
- Mantendo a mesma abertura, com a ponta-seca do compasso em B, traça-se um segundo arco, cuja intersecção com o arco anterior determina os pontos O e P.
- Traça-se a mediatriz $\overleftrightarrow{OP}$ unindo os pontos O e P.
- A intersecção de $\overleftrightarrow{OP}$ e $\overline{AB}$ determina M, o ponto médio de $\overline{AB}$.



PÁGINA 163 – ATIVIDADES

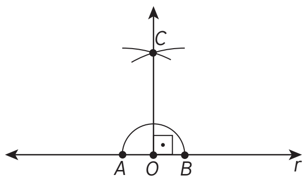
5. O ângulo $A\hat{O}B$ é suplemento de 60°, ou seja,

$$x + 60° = 180°$$
$$x = 180° - 60°$$
$$x = 120°$$

Portanto, $A\hat{O}B$ mede 120°.

6. a) Construção possível:

A partir do ângulo de 180°, constrói-se a bissetriz, encontrando dois ângulos de 90°.



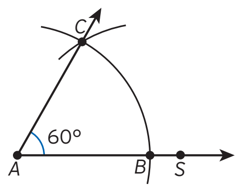
Ilustrações: ID/BR

b) Construção possível:

Traça-se uma semirreta $\overrightarrow{AS}$. Com a ponta-seca do compasso em *A* e uma abertura qualquer, traça-se um arco que intersecta $\overrightarrow{AS}$, determinando o ponto *B*.

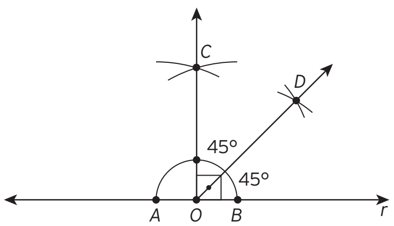
Com a mesma abertura e ponta-seca em *B*, traça-se um arco que intersecta o arco anterior, determinando o ponto *C*.

Traça-se a semirreta $\overrightarrow{AC}$, determinando $B\hat{A}C$, tal que $\text{med}(B\hat{A}C) = 60°$.



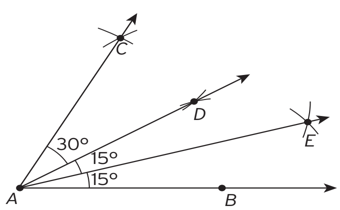
c) Construção possível:

A partir do ângulo de 180°, constrói-se a bissetriz, encontrando dois ângulos de 90°. Em seguida, constrói-se a bissetriz de um dos ângulos de 90°, obtendo-se dois ângulos de 45°.



d) Construção possível:

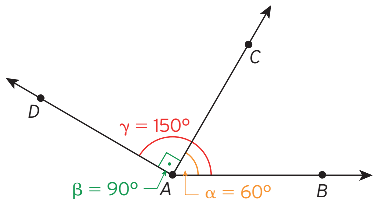
A partir da construção do ângulo de 60°, constrói-se a bissetriz, encontrando dois ângulos de 30°. Em seguida, constrói-se a bissetriz de um dos ângulos de 30°, obtendo-se dois ângulos de 15°.



7. a) Construções possíveis:

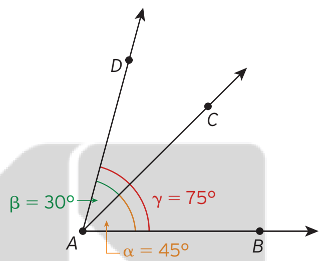
- 150°

  Constroem-se dois ângulos consecutivos adjacentes, um ângulo de 90° e o outro de 60°, obtendo-se um ângulo de 150° (90° + 60° = 150°).



- 75°

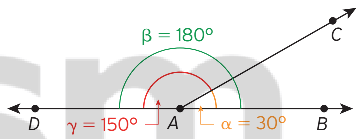
  Constroem-se dois ângulos consecutivos adjacentes, um ângulo de 45° e o outro de 30°, obtendo-se, assim, um ângulo de 75° (45° + 30° = 75°).



b) Construções possíveis:

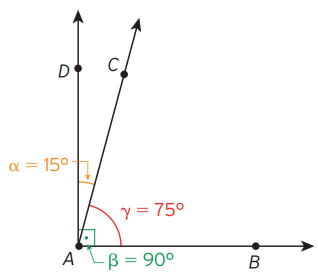
- 150°

  Constroem-se dois ângulos consecutivos não adjacentes, um ângulo de 180° e o outro de 30°, obtendo-se, assim, um ângulo de 150° (180° – 30° = 150°).



- 75°

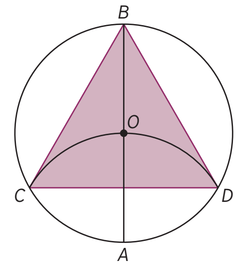
  Constroem-se dois ângulos consecutivos não adjacentes, um ângulo de 90° e o outro de 15°, obtendo-se, assim, um ângulo de 75° (90° – 15° = 75°).



PÁGINA 166 – ATIVIDADES

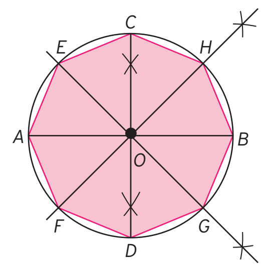
8. Construção possível:

Traça-se uma circunferência de centro *O* e raio medindo 3 cm. Marca-se o diâmetro $\overline{AB}$. Com a ponta-seca do compasso em *A* e abertura de 3 cm, traça-se um arco, determinando os pontos *C* e *D*. Traçam-se $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$, determinando o triângulo equilátero *BCD*.



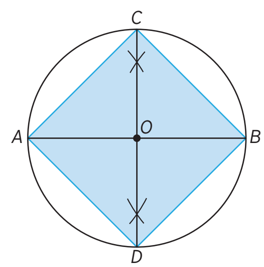
9. Construção possível:

Traça-se uma circunferência de raio medindo 4,5 cm. Marcam-se os diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ perpendiculares entre si. Com o compasso, traçam-se as bissetrizes dos ângulos retos formados por $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determinando os pontos *E*, *F*, *G* e *H* sobre a circunferência. Traçam-se $\overline{AF}$, $\overline{FD}$, $\overline{DG}$, $\overline{GB}$, $\overline{BH}$, $\overline{HC}$, $\overline{CE}$ e $\overline{EA}$, determinando o octógono *CHBGDFAE*.



10. Construção possível:

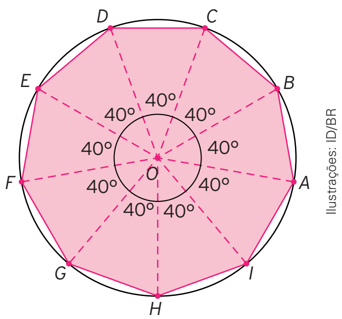
Traça-se uma circunferência de centro *O* e raio medindo 5 cm. Marca-se o diâmetro $\overline{AB}$. Com a ponta-seca do compasso em *B* e abertura maior que 5 cm, traça-se um arco. Com a ponta-seca do compasso em *A* e mantendo a mesma abertura do compasso, traça-se um arco que intersecte o arco traçado anteriormente. Traça-se o segmento que passa por *O* e pelo ponto de intersecção dos arcos, obtendo o diâmetro $\overline{CD}$, perpendicular ao diâmetro $\overline{AB}$. Traçam-se $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, determinando o quadrado *ACBD*.



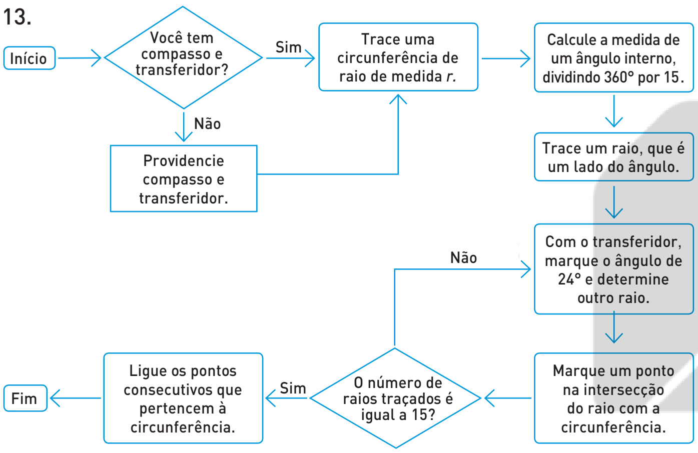
PÁGINA 170 – ATIVIDADES

11. Com o esquadro de 45°, é possível construir um octógono regular e um quadrado. Divide-se a circunferência em 8 ângulos de 45° (360 : 45 = 8). As intersecções de cada lado dos 8 ângulos centrais de 45° com a circunferência determinam os vértices do octógono. Determina-se o quadrado tomando alternadamente 4 dos 8 vértices do octógono.

12. Como 360° : 40° = 9, o polígono regular que será construído terá 9 lados congruentes, portanto é um eneágono regular. Para construí-lo, traça-se uma circunferência e, em seguida, um raio. A partir desse raio, determinam-se sucessivamente os ângulos centrais de 40°, com o transferidor, até completar os 360°, dividindo-se, assim, a circunferência em 9 partes iguais, isto é, em 9 ângulos centrais de 40°. Ligam-se os pontos consecutivos obtidos, determinando o eneágono regular.



13.



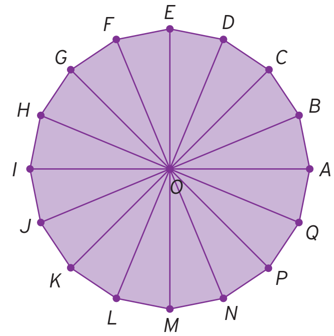
PÁGINA 171 – DIVERSIFICANDO

1. Como $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$, tem-se que:
   - $\text{med}(B\hat{O}C) = \text{med}(A\hat{O}B)$
   - $\text{med}(A\hat{O}C) = \text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C)$

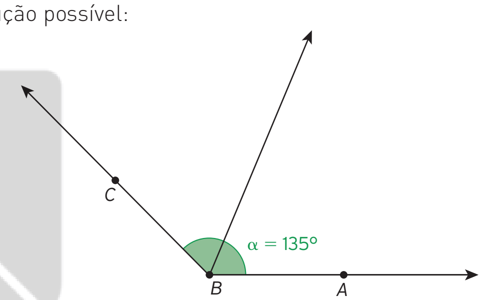
   Então:
   - $\text{med}(B\hat{O}C) = 28°$
   - $\text{med}(A\hat{O}C) = 28° + 28° = 56°$

2. O observatório pode ficar em qualquer ponto da mediatriz do segmento cujos extremos são o vale dos Tigres e o lago das Focas.

3. A medida do ângulo central de um polígono regular de 16 lados é 22° 30' (360° : 16 = 22° 30'). Traça-se uma circunferência com compasso e determina-se um raio. A partir desse raio, constrói-se com o transferidor ou o esquadro um ângulo de 45° e, em seguida, por meio da bissetriz desse ângulo, determina-se um ângulo central de 22° 30'. Com o compasso, transporta-se o ângulo consecutivamente sobre a circunferência, obtendo 16 pontos, que são os vértices do polígono, completando, assim, os 360°. Obtém-se o polígono regular de 16 lados, unindo sucessivamente seus 16 vértices.



4. Construção possível:



A bissetriz do ângulo de 135° determina dois ângulos congruentes de 67°30' (135° : 2 = 67° 30').

5. Resposta pessoal. Resolução possível:
   Obtém-se o ângulo de 105° por adição dos ângulos de medidas 60° e 45° (60° + 45° = 105°).
   Constroem-se dois ângulos consecutivos adjacentes, sendo um ângulo de 60° e o outro de 45°, obtendo-se, assim, um ângulo de 105°.

6. Como $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, ela divide esse ângulo em dois ângulos congruentes, ou seja:

$$2x + 10° = 5x - 50°$$
$$3x = 60°$$
$$x = 20°$$

   Substituindo $x = 20°$ na expressão que representa a medida do ângulo $B\hat{O}C$, obtém-se:

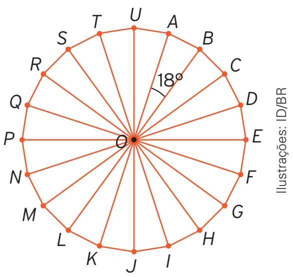
$$\text{med}(B\hat{O}C) = 5x - 50° = 5 \cdot 20° - 50° = 100° - 50° = 50°$$

   Portanto, a medida de $B\hat{O}C$ é 50°.

7. Como o segmento $\overline{AB}$ mede 7 cm e a mediatriz divide o segmento em dois segmentos congruentes, tem-se que $AM = MB = 3{,}5$ cm (7 : 2 = 3,5).

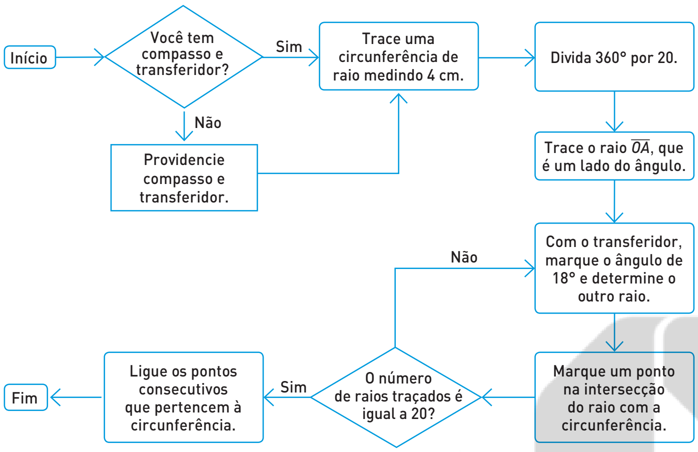
8. a) Descrição possível:
   Traça-se uma circunferência de centro O e raio medindo 4 cm. Divide-se 360° por 20, que é o número de lados do polígono, obtendo-se 18° como medida do ângulo central do icoságono (360° : 20 = 18°). Traça-se o raio $\overline{OA}$, que é um lado do ângulo. Com o transferidor, marca-se o ângulo de 18° e determina-se o raio $\overline{OB}$. Com a ponta-seca do compasso em A e a ponta da grafite em B, obtém-se a abertura do compasso correspondente ao lado do icoságono. Transporta-se esse segmento determinando os demais vértices e, por fim, ligam-se os vértices, obtendo-se o icoságono.

b)



c) Resposta pessoal.

d)

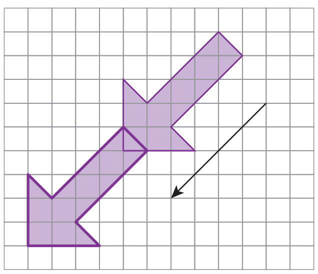


CAPÍTULO 2 – TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

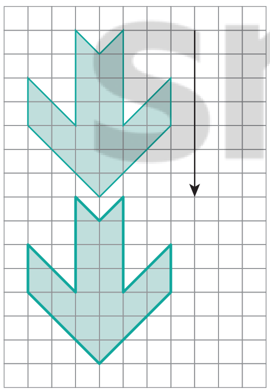
PÁGINA 174 – ATIVIDADES

1. Respostas possíveis:

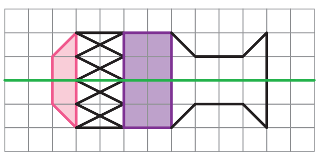
a)



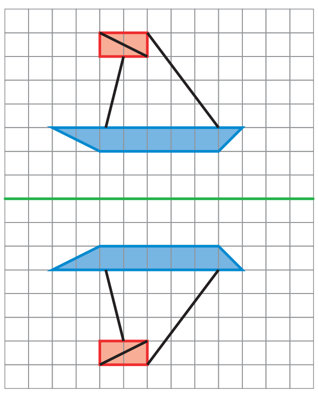
b)



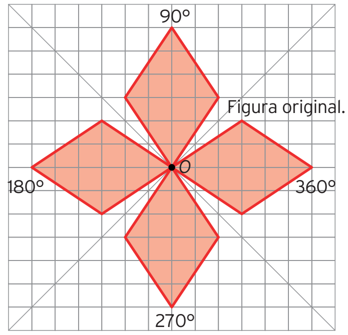
2. a)



b)



3. Construção possível:

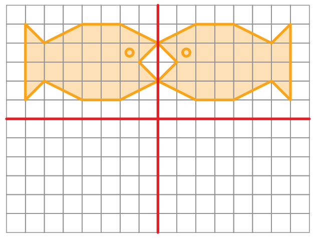


PÁGINA 178 – ATIVIDADES

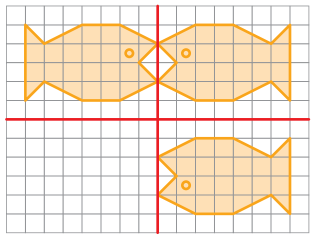
4. a) Sim. b) Não. c) Sim. I e III; II e IV.

5. Na reflexão em torno de um eixo, cada ponto da figura original é transformado em seu simétrico em relação a esse eixo. Assim, cada ponto original e seu correspondente na reflexão devem ter a mesma distância em relação ao eixo de simetria.

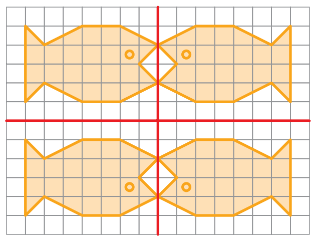
1ª reflexão: refletir a figura em relação ao eixo vertical.



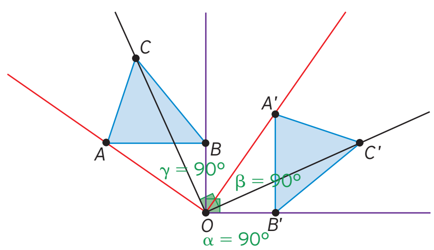
2ª reflexão: refletir a figura obtida em relação ao eixo horizontal.



3ª reflexão: refletir a última figura obtida em relação ao eixo vertical.



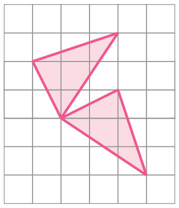
6. A transformação é uma rotação em torno do ponto O. Para determinar o ângulo de rotação, unimos ao ponto O, que é o centro de rotação, aos pontos A e A' (ou B e B' ou C e C'). O ângulo $A\hat{O}A'$ (ou $B\hat{O}B'$ ou $C\hat{O}C'$) é o ângulo de rotação; nesse caso, ele mede 90°.



PÁGINA 179 – DIVERSIFICANDO

1. Reflexão e translação.

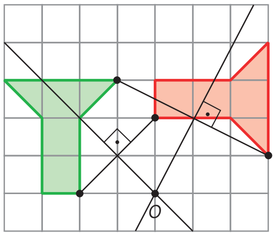
2. Sim. Um exemplo de rotação de uma figura em torno de um ponto pertencente à própria figura é a rotação de um triângulo em torno de um de seus vértices.



Ilustrações: ID/BR

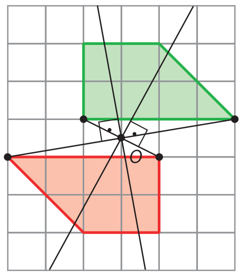
3. Em todas as figuras, o centro de rotação é a intersecção das mediatrizes dos segmentos formados por dois pares de pontos correspondentes (um ponto na figura original e o outro na figura rotacionada).

a)



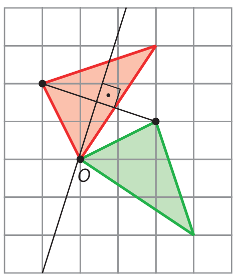
A rotação feita é de 90° no sentido horário.

b)



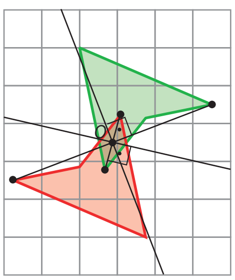
A rotação feita é de 180° no sentido anti-horário.

c)



A rotação feita é de 90° no sentido anti-horário.

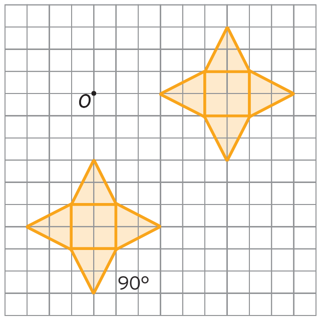
d)



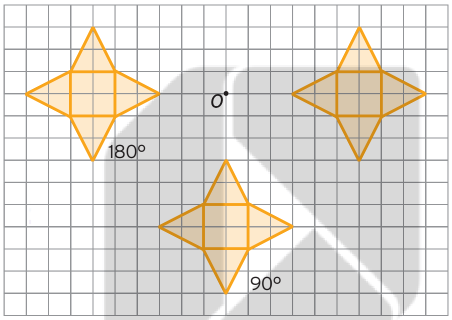
A rotação feita é de 180° no sentido horário.

4. Na rotação em torno de um ponto, cada ponto da figura original é transformado em seu simétrico em relação a esse eixo. Assim, cada ponto original e seu correspondente na rotação devem ter a mesma amplitude em relação ao ponto fixo.

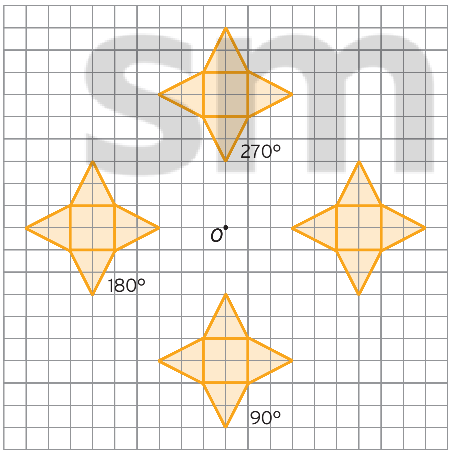
- Rotação de centro O e ângulo de 90°, no sentido horário:



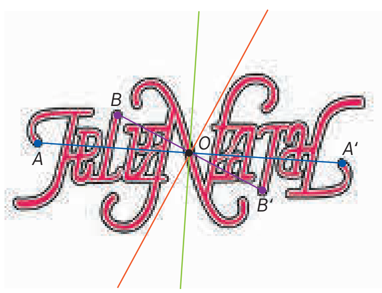
- Rotação de centro O e ângulo de 180°, no sentido horário:



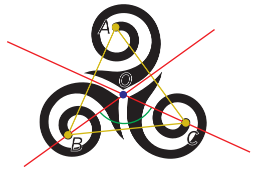
- Rotação de centro O e ângulo de 270°, no sentido horário:



5. Rotação de 180° em torno do centro de rotação, que é a intersecção das mediatrizes dos segmentos formados por dois pares de pontos correspondentes.



6.

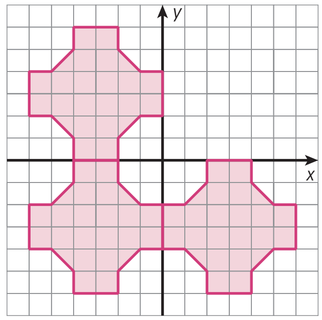


Para que a figura recaia sobre si mesma, tomando o ponto B e aplicando a menor rotação em torno do ponto O no sentido anti-horário, para que B recaia sobre C, a menor medida do ângulo de rotação em grau deve ser:

$$\text{med}(B\hat{O}C) = \frac{360°}{3}$$

$$\text{med}(B\hat{O}C) = 120°$$

7. Na reflexão em torno de um eixo, cada ponto da figura original é transformado em seu simétrico em relação a esse eixo. Assim, cada ponto original e seu correspondente na reflexão devem ter a mesma distância em relação ao eixo de simetria.



PÁGINA 180 – RESOLVENDO PROBLEMAS

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

1. Dois tipos de produtos.
2. Sim. Nas duas caixas existem grampeadores e agendas.
3. Não.
4. 8 grampeadores; 4 agendas.
5. R$ 176,00
6. 6 grampeadores; 8 agendas.
7. R$ 202,00

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

1. Resposta pessoal. Resposta possível: g para grampeadores e a para agenda.

2. Supondo-se que g represente o valor unitário do grampeador e a o valor unitário da agenda; na caixa azul há 8 grampeadores e 4 agendas, totalizando R$ 176,00, e na caixa vermelha, 6 grampeadores e 8 agendas, totalizando R$ 202,00.
Representando algebricamente:
   - caixa azul: $8g + 4a = 176$
   - caixa vermelha: $6g + 8a = 202$

3. Sim, montando um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas com as equações obtidas na questão anterior e resolvendo-o.

4. Montando o sistema, tem-se:

$$\begin{cases} 8g + 4a = 176 \\ 6g + 8a = 202 \end{cases}$$

Multiplicando-se a primeira equação por (-2) e adicionando-a à segunda equação, obtém-se o valor de g:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -16g - 8a = -352 \\ 6g + 8a = 202 \end{cases} + \\ \hline -10g + 0a = -150 \\ 10g = 150 \\ g = 15 \end{array}$$

Substituindo o valor encontrado para g em uma das duas equações, obtém-se o valor de a:

$$\begin{aligned} 6g + 8a &= 202 \\ 6 \cdot 15 + 8a &= 202 \\ 90 + 8a &= 202 \\ 8a &= 202 - 90 \\ 8a &= 112 \\ a &= 14 \end{aligned}$$

Cada grampeador custa R$ 15,00 e cada agenda, R$ 14,00.

REFLEXÃO SOBRE O PROBLEMA

1. Respostas pessoais.
2. Respostas pessoais.
3. Resposta pessoal.
4. Resposta pessoal.
5. Respostas pessoais.
6. Respostas pessoais.

MAIS PROBLEMAS

1. Da fala de Andrea e Marcos, considerando a o valor de cada letra "a" e e o valor de cada letra "e", obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 5a + 7e = 53 \\ 4a + 5e = 40 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 4, a segunda equação por (-5) e adicionando-as, obtém-se o valor de e:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 20a + 28e = 212 \\ -20a - 25e = -200 \end{cases} + \\ \hline 3e = 12 \\ e = 4 \end{array}$$

Substituindo o valor encontrado para e em uma das duas equações, obtém-se o valor de a:

$$\begin{aligned} 4a + 5e &= 40 \\ 4a + 5 \cdot 4 &= 40 \\ 4a + 20 &= 40 \\ 4a &= 20 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

O valor da letra "a" é 5 e o valor da letra "e" é 4.

2. Da relação proposta no enunciado, supondo a o valor de cada carta amarela e v o valor de cada carta vermelha, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 6a + 4v = 38 \\ 4a + 6v = 42 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por (-2), a segunda por 3 e adicionando essas equações, obtém-se o valor de v:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -12a - 8v = -76 \\ 12a + 18v = 126 \end{cases} + \\ \hline 10v = 50 \\ v = 5 \end{array}$$

Substituindo o valor encontrado para v em uma das duas equações, obtém-se o valor de a:

$$\begin{aligned} 4a + 6v &= 42 \\ 4a + 6 \cdot 5 &= 42 \\ 4a + 30 &= 42 \\ 4a &= 12 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Cada carta amarela vale 3 pontos e cada carta vermelha, 5 pontos.

3. Pode-se representar a fala de Joana pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x = 5y \\ x + y = 24 \end{cases}$$

Substituindo $x = 5y$ na segunda equação, obtém-se o valor de y:

$$\begin{aligned} 5y + y &= 24 \\ 6y &= 24 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Substituindo o valor encontrado para y em uma das duas equações, obtém-se o valor de x:

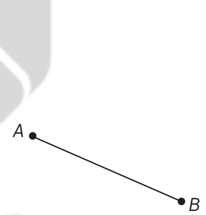
$$\begin{aligned} x &= 5y \\ x &= 5 \cdot 4 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Os números em que Joana pensou são 20 e 4.

PÁGINA 182 – ATIVIDADES INTEGRADAS

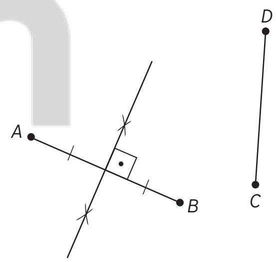
1. Respostas possíveis:

a)

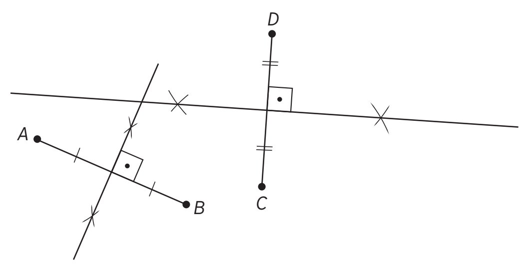


Ilustrações: ID/BR

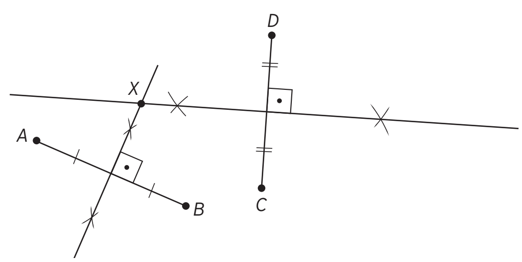
b)



c)



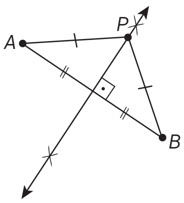
d)



e) Sim, pois o ponto X pertence à mediatriz de $\overline{AB}$ e todos os pontos da mediatriz de um segmento são equidistantes dos extremos desse segmento.

f) Sim, pois o ponto X pertence à mediatriz de $\overline{CD}$ e todos os pontos da mediatriz de um segmento são equidistantes dos extremos desse segmento.

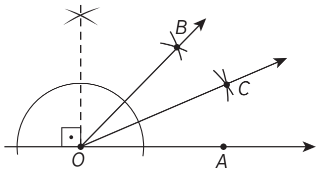
2. Independentemente da medida de $\overline{AB}$, os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$ devem ser congruentes.
Construção possível:



Ilustrações: ID/BR

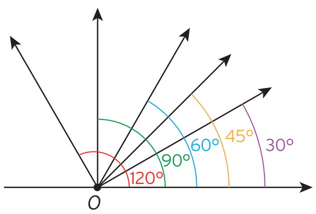
$\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são congruentes.

3. Resolução possível:



Como $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, ela divide esse ângulo em dois ângulos congruentes de medida igual à metade da medida de $A\hat{O}B$. Então, $A\hat{O}C$ mede 22,5° (45° : 2 = 22,5°).

4. Resolução possível:



5. a) Como 360° : 3 = 120°, o ângulo central do triângulo equilátero mede 120°.

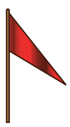
b) Como 360° : 5 = 72°, o ângulo central do pentágono regular mede 72°.

c) Como 360° : 8 = 45°, o ângulo central do octógono regular mede 45°.

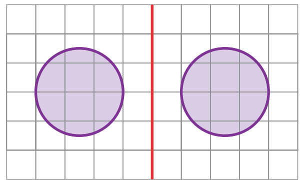
d) Como 360° : 12 = 30°, o ângulo central do dodecágono regular mede 30°.

e) Como 360° : 15 = 24°, o ângulo central do pentadecágono regular mede 24°.

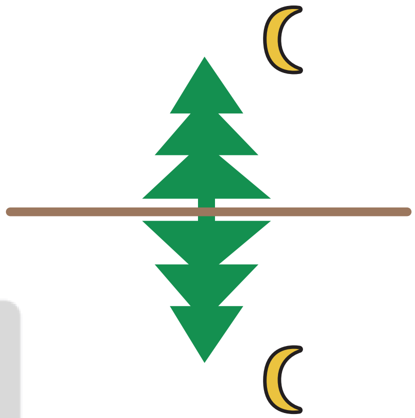
6. Alternativa **b**.
Na reflexão em torno de um eixo, cada ponto da figura original é transformado em seu simétrico em relação a esse eixo. Assim, cada ponto original e seu correspondente na reflexão têm a mesma distância em relação ao eixo de simetria.



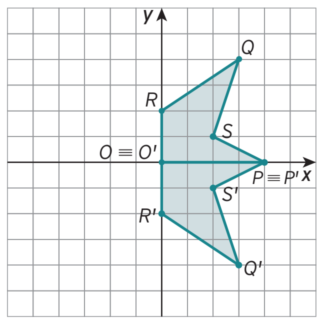
7. Alternativa **d**.
Na reflexão em relação a um eixo, cada ponto da figura original é transformado em seu simétrico em relação a esse eixo, logo o círculo que representa corretamente a reflexão é o da alternativa **d**, pois cada ponto original e seu correspondente na reflexão têm a mesma distância em relação ao eixo de simetria.



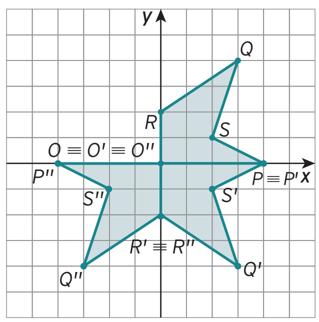
8. Alternativa **d**.
Considerando a linha que representa o chão como eixo de reflexão, a imagem que Catarina vê refletida no lago é mais bem representada pela alternativa **d**, pois cada ponto original e seu correspondente na reflexão têm a mesma distância em relação ao eixo de simetria.



9. Reflexão da figura dada em relação ao eixo x:



Reflexão da figura obtida em relação ao eixo y:



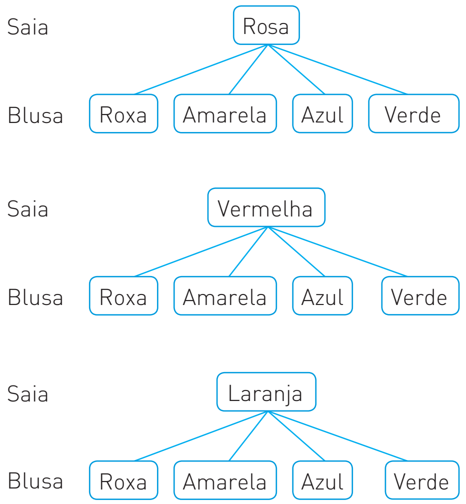
10. Alternativa **b**.
A figura a ser desenhada em D é uma transformação isométrica da figura desenhada em C, por meio de uma rotação de 45° em sentido anti-horário.

11. Alternativa **b**.
Observando a figura, para que a tela retorne à posição original, é necessário girá-la 135° (45° + 90° = 135°) no sentido horário.

CAPÍTULO 1 – PROBABILIDADE

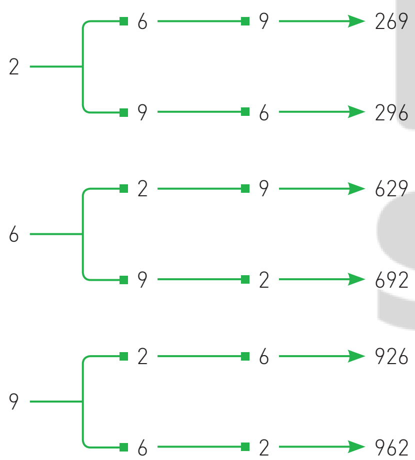
PÁGINA 189 – ATIVIDADES

1. a)



b) Para cada uma das 3 saias, Bruna tem 4 blusas para compor. Logo, ela pode se vestir de 12 maneiras diferentes ($3 \cdot 4 = 12$).

2. Construindo uma árvore de possibilidades para descobrir quais são os números de três algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 2, 6 e 9, tem-se:



Logo, os números são 269, 296, 629, 692, 926 e 962.

3. Para o algarismo das dezenas, há 9 possibilidades: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9.

Para os algarismos das unidades, há 5 possibilidades: 1, 3, 5, 7 ou 9.

Utilizando o princípio fundamental da contagem, há 45 possibilidades ($9 \cdot 5 = 45$).

Portanto, existem 45 números naturais ímpares de dois algarismos.

4. Como existem 3 caminhos diferentes da cidade A para a cidade B e 3 caminhos diferentes da cidade B para a cidade C, pelo princípio fundamental da contagem, há 9 caminhos diferentes ($3 \cdot 3 = 9$) para ir da cidade A para a cidade C, passando pela cidade B.

5. Para a primeira colocação (medalha de ouro), há 4 possibilidades. Para a segunda colocação (medalha de prata), há 3 possibilidades. Para a terceira colocação (medalha de bronze), há 2 possibilidades. Então, pelo princípio fundamental da contagem, há 24 maneiras diferentes ($4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$) de distribuir as medalhas entre elas.

6. a) A indústria fabrica 3 sabores diferentes de suco em 2 tipos de embalagem. Portanto, essa indústria fabrica 6 tipos ($3 \cdot 2 = 6$) de produtos diferentes.

b) Se a empresa oferecesse mais um tipo de embalagem, essa embalagem teria 3 sabores diferentes de suco. Portanto, a empresa produziria 3 produtos a mais.

PÁGINA 192 – ATIVIDADES

7. a) Há 4 cartas ás em um baralho comum de 52 cartas. Então, a probabilidade de sair um ás é igual a:

$$P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

b) Há 1 carta ás de paus em um baralho comum de 52 cartas. Então, a probabilidade de sair um ás de paus é igual a:

$$P = \frac{1}{52}$$

c) Do item **a** sabe-se que a probabilidade de sair um ás em um baralho comum é $\frac{1}{13}$. Então, a probabilidade de não sair um ás é igual a:

$$P = 1 - \frac{1}{13} = \frac{13}{13} - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

d) Em um baralho comum de 52 cartas, há 4 reis e 4 damas. Então, a probabilidade de sair rei ou dama é igual a:

$$P = \frac{4+4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

e) Em um baralho comum de 52 cartas, apenas 10 cartas são de números pares e de naipe preto: as cartas 2, 4, 6, 8 e 10 de espadas e as cartas 2, 4, 6, 8 e 10 de paus. Portanto, a probabilidade de sair um número par de naipe preto é igual a:

$$P = \frac{10}{52} = \frac{5}{26}$$

8. Organizando o quadro com todas as possibilidades no lançamento de duas moedas honestas distintas, tem-se:

		Moeda 2	
		cara	coroa
Moeda 1	cara	(cara, cara)	(cara, coroa)
	coroa	(coroa, cara)	(coroa, coroa)

Existem 4 resultados possíveis no lançamento simultâneo de duas moedas distintas e apenas uma possibilidade de obter, simultaneamente, coroa nas duas moedas. Portanto, a probabilidade de obter coroa nas duas moedas é $\frac{1}{4}$.

9. a) Montando um quadro para visualizar todas as possibilidades nos dois lançamentos sucessivos, tem-se:

		Lançamento 2	
		cara	coroa
Lançamento 1	cara	(cara, cara)	(cara, coroa)
	coroa	(coroa, cara)	(coroa, coroa)

Portanto, o espaço amostral desse experimento é S = {(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa)}.

b) Resposta possível: Não sair cara ou coroa em um dos lançamentos.

c) Resposta possível: Sair cara ou coroa no primeiro lançamento.

a) Organizando em um quadro todas as possibilidades do lançamento simultâneo de dois dados comuns: um vermelho e outro amarelo, tem-se:

		Dado amarelo					
		1	2	3	4	5	6
Dado vermelho	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Portanto, o espaço amostral é $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ e tem 36 elementos.

b) Observando o espaço amostral no item **a**, é possível perceber que existe apenas 1 elemento que pertence ao evento E "saírem dois números 6", que é (6, 6).

c) Existe apenas 1 elemento do espaço amostral do item **a** que satisfaz ao evento "saírem dois números 1", que é (1, 1). Portanto, a probabilidade de saírem dois números 1 é $\frac{1}{36}$.

d) O evento "não saírem dois números 1" é o complementar do evento "saírem dois números 1", do item **c**. Logo, a probabilidade de o evento "não saírem dois números 1" é igual a:

$$P = 1 - \frac{1}{36} = \frac{36}{36} - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

e) Observando o espaço amostral do item **a**, constata-se que há 9 elementos que têm dois números ímpares. Portanto, a probabilidade de saírem dois números ímpares é igual a:

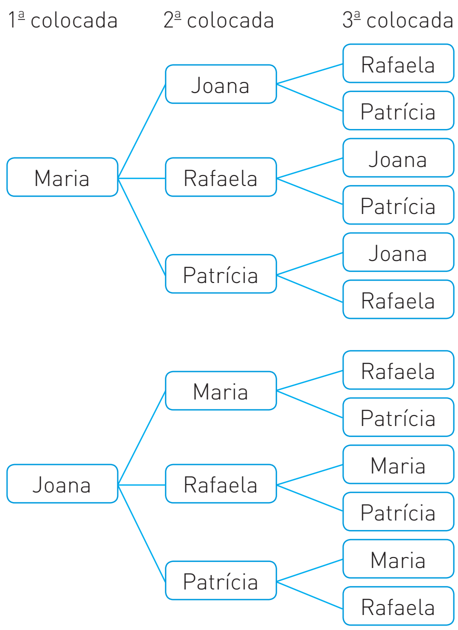
$$P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

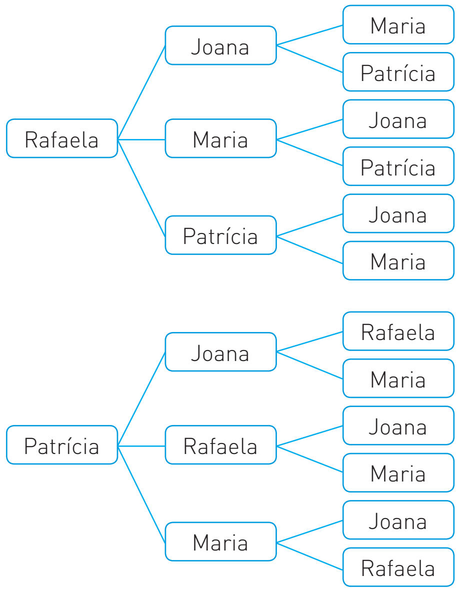
f) O evento "não saírem dois números ímpares" é o complementar do evento "saírem dois números ímpares", do item **e**. Logo, a probabilidade de não saírem dois números ímpares é igual a:

$$P = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

PÁGINA 193 – DIVERSIFICANDO

1. **a)** Resposta possível:





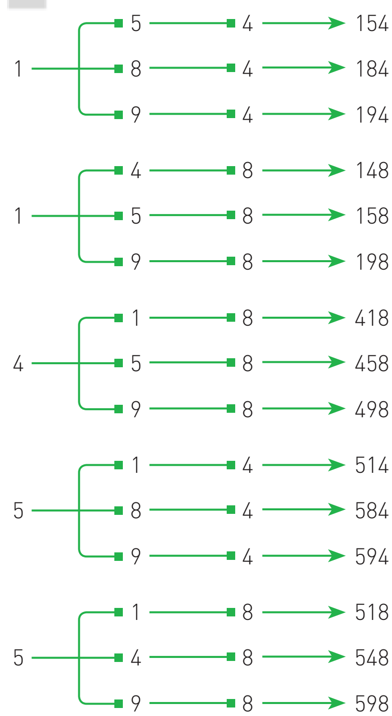
b) Observando a árvore de possibilidades do item **a**, constata-se que há 24 resultados possíveis. Dessa forma, além de determinar quantas são as maneiras, também é possível definir quais são elas.

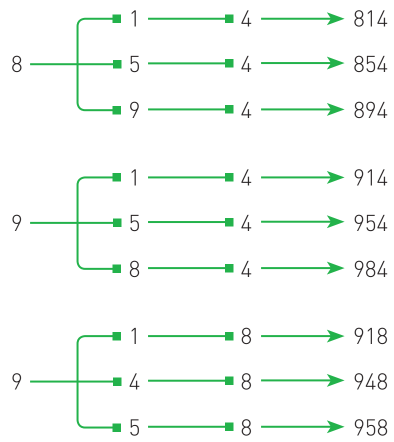
Outra forma de calcular a quantidade de resultados, sem necessariamente saber quais são eles, é pelo princípio fundamental da contagem.

Nessa situação, há 4 possibilidades para o primeiro lugar, 3 para o segundo lugar e, por fim, 2 possibilidades para o terceiro lugar. Portanto, há 24 resultados possíveis ($4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$).

c) Quando Maria, Rafaela ou Patrícia estão em primeiro lugar, Joana tem duas possibilidades, em relação às outras três participantes, de ficar em segundo. Logo, são 6 possibilidades ($3 \cdot 2 = 6$) de resultados nos quais Joana aparece em segundo lugar.

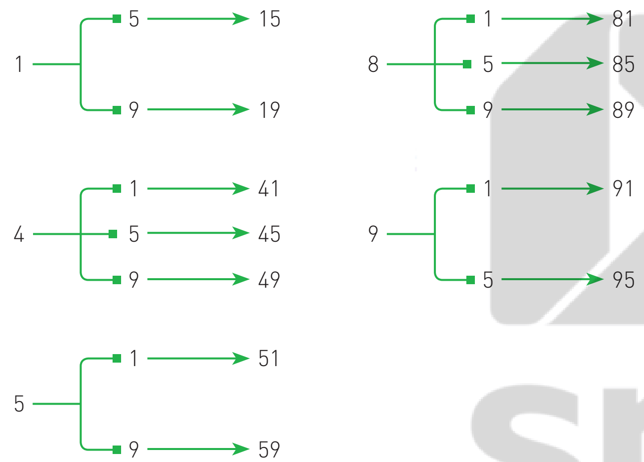
2. **a)** Para conhecer todos os números de três algarismos distintos que sejam pares, formados pelos algarismos 1, 4, 5, 8 e 9, pode-se montar uma árvore de possibilidades, na qual o algarismo das unidades seja 4 ou 8.





Logo, os números formados são: 154, 184, 194, 148, 158, 198, 418, 458, 498, 514, 584, 594, 518, 548, 598, 814, 854, 894, 914, 954, 984, 918, 948 e 958.

b) Pode-se utilizar a mesma estratégia de resolução do item **a**, ou seja, montar uma árvore de possibilidades para encontrar todos os números de dois algarismos distintos formados pelos algarismos 1, 4, 5, 8 e 9 que sejam ímpares.



Logo, os números formados são: 15, 19, 41, 45, 49, 51, 59, 81, 85, 89, 91 e 95.

3. a) Para que o número tenha quatro algarismos, existe apenas uma restrição: o primeiro algarismo deve ser diferente de 0. Então, as possibilidades para cada um dos algarismos desse número são:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$$

Logo, existem 9 000 números naturais de quatro algarismos em nosso sistema de numeração.

b) Para que o número tenha quatro algarismos distintos, existem duas restrições: o primeiro algarismo deve ser diferente de 0 e os seguintes devem ser diferentes entre si.

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$$

Logo, existem 4 536 números naturais de quatro algarismos distintos em nosso sistema de numeração.

4. a) O primeiro amigo vai ter 5 cadeiras para escolher, o segundo, 4 cadeiras, o terceiro vai ter 3, o quarto, 2, e o último, apenas 1 cadeira. Logo, os amigos podem se sentar de 120 maneiras diferentes ($5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$) nessas cadeiras.

b) Como André vai se sentar na cadeira do meio, o próximo amigo tem 4 cadeiras para escolher, o outro amigo, 3 cadeiras, o outro, 2 cadeiras e, por fim, o último vai ter 1 cadeira. Logo, os amigos podem se sentar de 24 maneiras diferentes ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$).

5. Há 2 possibilidades para as letras e 24 possibilidades ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$) para os números. Logo, Lúcia terá, no total, 48 possibilidades ($24 \cdot 2 = 48$) para escolher sua senha.

6. a) O espaço amostral é formado por todas as bolas coloridas deste experimento, ou seja:

$$S = \{\text{bola azul, bola verde}\}$$

b) Como a quantidade de bolas azuis é maior que a quantidade de bolas verdes, a chance de ser sorteada uma bola azul é maior que a chance de ser sorteada uma bola verde. Portanto, o espaço amostral não é equiprovável.

7. a) Sendo A o evento "sair um número múltiplo de 3", tem-se:

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60\}$

b) Como há 60 bolas numeradas e 20 delas têm números múltiplos de 3, a probabilidade de ser sorteada uma bola com número múltiplo de 3 é igual a:

$$P = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

8. a) Há 11 jogadores, dos quais apenas 1 é o goleiro. Então, a probabilidade de ele ser sorteado é $\frac{1}{11}$.

b) Há 11 jogadores, dos quais apenas 3 são zagueiros. Então, a probabilidade de um desses zagueiros ser sorteado é $\frac{3}{11}$.

c) Há 11 jogadores, dos quais apenas 2 são atacantes. Então, a probabilidade de um desses atacantes ser sorteado é $\frac{2}{11}$.

d) Há 11 jogadores, dos quais apenas 5 são jogadores do meio-campo. Então, a probabilidade de um desses jogadores ser sorteado é $\frac{5}{11}$.

e) Considerando apenas os jogadores que não ocupam a posição de goleiro, o espaço amostral passa a ter 10 elementos ($11 - 1 = 10$). Como há 3 zagueiros, a probabilidade de ser sorteado um dos zagueiros é $\frac{3}{10}$.

9. a) A probabilidade de obter 4 caras em quatro lançamentos sucessivos de uma moeda é dada por:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 = 6{,}25\%$$

b) A probabilidade de uma mãe dar à luz 6 bebês do sexo feminino em seis gestações é dada por:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64} = 0{,}015625 \simeq 1{,}56\%$$

c) A probabilidade de tirar 6 em quatro lançamentos de um dado é igual a:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{1296} \simeq 0{,}00077 = 0{,}077\%$$

10. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2 – ESTATÍSTICA

PÁGINA 197 – ATIVIDADES

1. a) $MA = \frac{5 + 7 + 3 + 11 + 9 + 6 + 8}{7} = \frac{49}{7} = 7$

b) $MA = \frac{35 + 19 + 21 + 28 + 33 + 26 + 20}{7} = \frac{182}{7} = 26$

2. a) Sabendo que a média aritmética dos números da sequência dada é igual a 7, tem-se:

$$MA = 7$$

$$\frac{5 + 4 + 3 + \blacksquare + 5 + 8 + 9 + 11 + 7 + 8}{10} = 7$$

$$\frac{60 + \blacksquare}{10} = 7$$

$$60 + \blacksquare = 70$$

$$\blacksquare = 70 - 60$$

$$\blacksquare = 10$$

b) Colocando os números em ordem crescente, tem-se:

3, 4, 5, 5, 7, 8, 8, 9, 10, 11

A mediana é o valor que ocupa a posição central (ou a média entre os dois termos centrais) de uma amostra, quando os dados são organizados em ordem crescente ou decrescente. Então:

$$\underbrace{3, 4, 5, 5}_{\text{4 primeiros termos}}, \underbrace{7, 8}_{\text{2 termos centrais}}, \underbrace{8, 9, 10, 11}_{\text{4 últimos termos}}$$

Calculando a média aritmética entre os dois termos centrais, tem-se: $\frac{7 + 8}{2} = 7{,}5$.

Logo, a mediana dos termos dessa sequência é 7,5.

3. a) Para calcular a idade média dos estudantes de um curso de Educação de Jovens e Adultos (EJA), é necessário calcular a média ponderada da idade deles:

$$MP = \frac{38 \cdot 23 + 26 \cdot 24 + 20 \cdot 25 + 18 \cdot 26 + 12 \cdot 27 + 6 \cdot 28}{120} =$$

$$= \frac{874 + 624 + 500 + 468 + 324 + 168}{120} = \frac{2\,958}{120} = 24{,}65$$

Portanto, a idade média desses estudantes é 24,65 anos.

b) A moda é a idade que aparece mais vezes, ou seja, 23 anos.

4. Para calcular a idade média desse grupo de 10 estudantes, calcula-se a média ponderada da idade deles:

$$MP = \frac{1 \cdot 13 + 3 \cdot 14 + 1 \cdot 15 + 5 \cdot 16}{10} = \frac{13 + 42 + 15 + 80}{10} =$$

$$= \frac{150}{10} = 15$$

Portanto, a idade média desse grupo de 10 estudantes é 15 anos.

5. a) Organizando, em ordem crescente, os números dados, tem-se:

13, 17, 21, 25, 32, 38, 57, 61, 62

Portanto, a mediana desses números é:

$$\underbrace{13, 17, 21, 25}_{\text{4 primeiros termos}}, \underbrace{32}_{\text{mediana}}, \underbrace{38, 57, 61, 62}_{\text{4 últimos termos}}$$

b) Organizando, em ordem crescente, os números dados, tem-se:

5, 8, 10, 10, 12, 15, 17, 17, 20, 25

Logo, a mediana desses números é:

$$\underbrace{5, 8, 10, 10,}_{\text{4 primeiros termos}}, \underbrace{12, 15}_{\frac{12+15}{2} = \underbrace{13{,}5}_{\text{mediana}}}, \underbrace{17, 17, 20, 25}_{\text{4 últimos termos}}$$

6. a) A moda é a temperatura que aparece mais vezes, ou seja, 21 °C.

b) A temperatura média nesse período é dada por:

$$MA = \frac{21 + 17 + 19 + 20 + 22 + 24 + 21}{7} = \frac{144}{7} \simeq 20{,}57$$

Portanto, a temperatura média nesse período foi aproximadamente 20,57 °C.

PÁGINA 202 – ATIVIDADES

7.

Grupo de dados	Média aritmética	Amplitude
20, 18, 14, 15	16,75	6
42, 27, 12, 19, 55	31	43
107, 108, 109, 108	108	2
18, 25, 32, 22, 18	23	14

- Para o primeiro grupo de dados numéricos (20, 18, 14, 15), tem-se:

$$MA = \frac{20 + 18 + 14 + 15}{4} = \frac{67}{4} = 16{,}75$$

$$A = 20 - 14 = 6$$

- Para o segundo grupo de dados numéricos (42, 27, 12, 19, 55), tem-se:

$$MA = \frac{42 + 27 + 12 + 19 + 55}{5} = \frac{155}{5} = 31$$

$$A = 55 - 12 = 43$$

- Para o terceiro grupo de dados numéricos (107, 108, 109, 108), tem-se:

$$MA = \frac{107 + 108 + 109 + 108}{4} = \frac{432}{4} = 108$$

$$A = 109 - 107 = 2$$

- Para o quarto grupo de dados numéricos (18, 25, 32, 22, 18), tem-se:

$$MA = \frac{18 + 25 + 32 + 22 + 18}{5} = \frac{115}{5} = 23$$

$$A = 32 - 18 = 14$$

8. Temperatura média:

$$MA = \frac{22 + 24 + 18 + 20 + 25 + 18}{6} = \frac{127}{6} \simeq 21{,}17$$

Amplitude:

$$A = 25 - 18 = 7$$

Logo, a temperatura média é aproximadamente 21,17 °C e a amplitude térmica é 7 °C.

9. - Cálculo da média dos dados:

$$MA = \frac{108 + 98 + 110 + 99 + 103 + 107}{6} = \frac{625}{6} \simeq 104{,}17$$

- Cálculo dos desvios de cada dado do grupo:

$$D(108) = 108 - 104{,}17 = 3{,}83$$
$$D(98) = 98 - 104{,}17 = -6{,}17$$
$$D(110) = 110 - 104{,}17 = 5{,}83$$
$$D(99) = 99 - 104{,}17 = -5{,}17$$
$$D(103) = 103 - 104{,}17 = -1{,}17$$
$$D(107) = 107 - 104{,}17 = 2{,}83$$

10. a) - Cálculo da média:

$$MA = \frac{18 + 16 + 22 + 18 + 20}{5} = \frac{94}{5} = 18{,}8$$

- Cálculo dos desvios:

$$D(18) = 18 - 18{,}8 = -0{,}8$$
$$D(16) = 16 - 18{,}8 = -2{,}8$$
$$D(22) = 22 - 18{,}8 = 3{,}2$$
$$D(20) = 20 - 18{,}8 = 1{,}2$$

- Cálculo da variância:

$$V = \frac{(-0{,}8)^2 + (-2{,}8)^2 + 3{,}2^2 + (-0{,}8)^2 + 1{,}2^2}{5} = \frac{0{,}64 + 7{,}84 + 10{,}24 + 0{,}64 + 1{,}44}{5} = \frac{20{,}8}{5} = 4{,}16$$

b) • Cálculo da média:

$$MA = \frac{53 + 54 + 52 + 53 + 53 + 53 + 53 + 53 + 53}{9} = \frac{477}{9} = 53$$

- Cálculo dos desvios:

$$D(53) = 53 - 53 = 0$$
$$D(54) = 54 - 53 = 1$$
$$D(52) = 52 - 53 = -1$$

- Cálculo da variância:

$$V = \frac{0^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2}{9} = \frac{1+1}{9} = \frac{2}{9} \simeq 0{,}22$$

11. • Cálculo da média:

$$MA = \frac{35 + 38 + 33 + 38 + 42 + 40}{6} = \frac{226}{6} \simeq 37{,}67$$

- Cálculo da variância:

$$V = \frac{(35 - 37{,}67)^2 + 2 \cdot (38 - 37{,}67)^2 + (33 - 37{,}67)^2 + (42 - 37{,}67)^2 + (40 - 37{,}67)^2}{6}$$

$$V = \frac{7{,}1289 + 2 \cdot 0{,}1089 + 21{,}8089 + 18{,}7489 + 5{,}4289}{6} = \frac{53{,}3334}{6} = 8{,}8889$$

- Cálculo do desvio-padrão:

$$DP = \sqrt{\text{variância}} = \sqrt{8{,}8889} \simeq 2{,}98$$

12. O grupo mais regular é aquele que apresenta o menor desvio-padrão. Calculando o desvio-padrão de cada um dos grupos, tem-se:

- Grupo A:

$$MA_{A} = \frac{25 + 18 + 22 + 15 + 18 + 24}{6} = \frac{122}{6} \simeq 20{,}33$$

$$(DP_A)^2 = (25 - 20{,}33)^2 + 2 \cdot (18 - 20{,}33)^2 + (22 - 20{,}33)^2 + (15 - 20{,}33)^2 + (24 - 20{,}33)^2$$

$$(DP_A)^2 \simeq \frac{21{,}81 + 2 \cdot 5{,}43 + 2{,}79 + 28{,}41 + 13{,}47}{6} = 12{,}89$$

$$DP_A = \sqrt{12{,}89} \simeq 3{,}59$$

- Grupo B:

$$MA_{B} = \frac{22 + 23 + 24 + 23 + 22 + 23}{6} = \frac{137}{6} \simeq 22{,}83$$

$$(DP_B)^2 = \frac{2 \cdot (22 - 22{,}83)^2 + 3 \cdot (23 - 22{,}83)^2 + (24 - 22{,}83)^2}{6} \simeq \frac{2 \cdot 0{,}69 + 3 \cdot 0{,}03 + 1{,}37}{6} \simeq 0{,}47$$

$$DP_B = \sqrt{0{,}47} \simeq 0{,}69$$

- Grupo C:

$$MA_{C} = \frac{25 + 25 + 20 + 25 + 28 + 28}{6} = \frac{151}{6} \simeq 25{,}17$$

$$(DP_C)^2 = \frac{3 \cdot (25 - 25{,}17)^2 + (20 - 25{,}17)^2 + 2 \cdot (28 - 25{,}17)^2}{6} \simeq \frac{3 \cdot 0{,}03 + 26{,}73 + 2 \cdot 8{,}01}{6} \simeq 7{,}14$$

$$DP_C = \sqrt{7{,}14} \simeq 2{,}67$$

Portanto, o grupo mais regular é o grupo B. Resposta pessoal.

13. a) $MA = \frac{426 + 838 + 819 + 822 + 225}{5} = \frac{3\,130}{5} = 626$

Portanto, a média das velocidades é 626 quilômetros por hora.

b) $A = 838 - 225 = 613$

Logo, a amplitude desse grupo é 613 quilômetros por hora.

c) $D(426) = 426 - 626 = -200$

$D(838) = 838 - 626 = 212$

$D(819) = 819 - 626 = 193$

$D(822) = 822 - 626 = 196$

$D(225) = 225 - 626 = -401$

d) $V = \frac{(-200)^2 + 212^2 + 193^2 + 196^2 + (-401)^2}{5} = \frac{40\,000 + 44\,944 + 37\,249 + 38\,416 + 160\,801}{5} = \frac{321\,410}{5} = 64\,282$

e) $DP = \sqrt{64\,282} \simeq 253{,}54$

Portanto, o desvio-padrão desse grupo é, aproximadamente, 253,54 quilômetros por hora.

14. a)
- Grupo A:

$$MA_A = \frac{21 + 22 + 23 + 24 + 25}{5} = \frac{115}{5} = 23$$

- Grupo B:

$$MA_B = \frac{78 + 65 + 66 + 78 + 99}{5} = \frac{386}{5} = 77{,}2$$

- Grupo C:

$$MA_C = \frac{30 + 44 + 54 + 30 + 62}{5} = \frac{220}{5} = 44$$

b)
- Grupo A:

$$(DP)^2 = \frac{(21-23)^2 + (22-23)^2 + (23-23)^2 + (24-23)^2 + (25-23)^2}{5} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$DP = \sqrt{2} \simeq 1{,}4$$

- Grupo B:

$$(DP)^2 = \frac{2 \cdot (78-77{,}2)^2 + (65-77{,}2)^2 + (66-77{,}2)^2 + (99-77{,}2)^2}{5}$$

$$(DP)^2 = \frac{2 \cdot 0{,}64 + 148{,}84 + 125{,}44 + 475{,}24}{5} = \frac{750{,}8}{5} = 150{,}16$$

$$DP = \sqrt{150{,}16} \simeq 12{,}25$$

- Grupo C:

$$(DP)^2 = \frac{2 \cdot (30-44)^2 + (44-44)^2 + (54-44)^2 + (62-44)^2}{5} = \frac{2 \cdot 196 + 0 + 100 + 324}{5} = \frac{816}{5} = 163{,}2$$

$$DP = \sqrt{163{,}2} \simeq 12{,}77$$

Logo, o grupo C tem o maior desvio-padrão.

c) Para descobrir qual dos grupos tem a menor dispersão, é necessário encontrar a amplitude de cada grupo:

$$A_A = 25 - 21 = 4$$
$$A_B = 99 - 65 = 34$$
$$A_C = 62 - 30 = 32$$

Portanto, o grupo A tem a menor amplitude, ou seja, ele tem a menor dispersão nos dados.

d) O grupo mais regular é aquele em que o desvio-padrão é menor, ou seja, o grupo A.

PÁGINA 207 – ATIVIDADES

15. a) Para organizar a tabela de frequências, determina-se a frequência absoluta das velocidades registradas no teste. Em seguida, calcula-se a frequência relativa pela razão entre a frequência absoluta de determinada velocidade e o total de registros, que é 25.

Distribuição de velocidade máxima dos carros antigos testados		
Velocidade (quilômetro por hora)	Frequência absoluta	Frequência relativa
80	8	$\frac{8}{25} = 0{,}32 = 32\%$
90	6	$\frac{6}{25} = 0{,}24 = 24\%$
100	5	$\frac{5}{25} = 0{,}2 = 20\%$
110	3	$\frac{3}{25} = 0{,}12 = 12\%$
115	2	$\frac{2}{25} = 0{,}08 = 8\%$
130	1	$\frac{1}{25} = 0{,}04 = 4\%$

Dados do enunciado.

b) A velocidade que tem maior frequência é 80 quilômetros por hora.

c) A velocidade que tem menor frequência é 130 quilômetros por hora.

d) Respostas pessoais.

16. a)

Gastos de alguns dos estudantes do 8º ano na cantina		
Gasto	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**
De 50 reais a 74 reais	6	$\frac{6}{28} = \frac{3}{14}$
De 75 reais a 99 reais	11	$\frac{11}{28}$
De 100 reais a 124 reais	8	$\frac{8}{28} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$
De 125 reais a 149 reais	3	$\frac{3}{28}$

Dados fornecidos por Cristina.

b) Para determinar a porcentagem dos gastos mensais que não atingem 100 reais, utiliza-se os dados da última coluna da tabela do item anterior.

$$\frac{6}{28} + \frac{11}{28} = \frac{17}{28} \simeq 0{,}607 = 60{,}7\%$$

17. a) Observando o histograma, tem-se a seguinte quantidade de funcionários para cada distância:

- entre 0 e 500 m: 16 funcionários;
- entre 500 m e 1 000 m: 10 funcionários;
- entre 1 000 m e 1 500 m: 4 funcionários;
- entre 1 500 m e 2 000 m: 4 funcionários;
- entre 2 000 m e 2 500 m: 2 funcionários.

Portanto, nessa empresa trabalham 36 funcionários (16 + 10 + + 4 + 4 + 2 = 36).

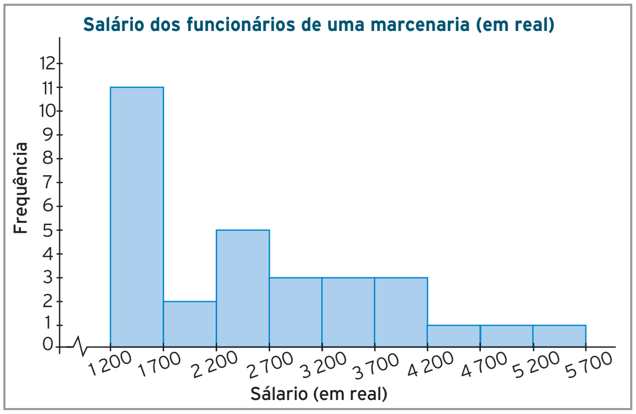
b) De acordo com o item **a**, 4 funcionários moram a uma distância entre 1 500 m e 2 000 m.

c) De acordo com o item **a**, 26 funcionários (16 + 10 = 26) moram a menos de 1 000 m da empresa.

18. a) Para construir o histograma, inicialmente pode-se organizar uma tabela de frequências com 9 intervalos com os salários dos funcionários. Cada intervalo terá amplitude de 500 reais.

Distribuição dos funcionários de uma marcenaria de acordo com os salários	
Salário dos funcionários (em real)	**Frequência absoluta**
1 200 ⊢ 1 700	11
1 700 ⊢ 2 200	2
2 200 ⊢ 2 700	5
2 700 ⊢ 3 200	3
3 200 ⊢ 3 700	3
3 700 ⊢ 4 200	3
4 200 ⊢ 4 700	1
4 700 ⊢ 5 200	1
5 200 ⊢ 5 700	1

Dados fornecidos pela marcenaria.



ID/BR

Dados fornecidos pela marcenaria.

b) Respostas pessoais.

PÁGINA 212 – ATIVIDADES

19. a) Resposta possível: Verificar a necessidade de promover uma campanha de conscientização ou de comprar mais lixeiras para o lixo orgânico e para os materiais recicláveis.

b) Censitária, pois entrevistou todos os moradores do condomínio.

20. Resposta possível: A professora poderia sortear os estudantes que vão participar da pesquisa pelo número de matrícula.

21. a)
- Plano básico:

$$65\% \text{ de } 1\,500 = \frac{65}{100} \cdot 1\,500 = 65 \cdot 15 = 975$$

Portanto, 975 clientes do plano básico foram selecionados para a amostra.

- Plano *premium*:

$$35\% \text{ de } 1\,500 = \frac{35}{100} \cdot 1\,500 = 35 \cdot 15 = 525$$

Portanto, 525 clientes do plano *premium* foram selecionados para a amostra.

b) Não. É necessário apenas conhecer a quantidade de clientes da amostra e a porcentagem dos clientes em cada um dos planos.

22. Para determinar o intervalo K, deve-se calcular a razão entre o número de elementos da população (360) e o número de elementos da amostra (45). Portanto:

$$K = \frac{360}{45} = 8$$

Logo, o intervalo deve ser 8.

23. De acordo com a tabela, tem-se:

- dos 1 200 passageiros pesquisados, 600 responderam Sim ou Não para ônibus. Logo:

$$\frac{600}{1\,200} = \frac{1}{2} = 50\%$$

- dos 1 200 passageiros pesquisados, 300 responderam Sim ou Não para ônibus + trem. Logo:

$$\frac{300}{1\,200} = \frac{1}{4} = 25\%$$

- dos 1 200 passageiros pesquisados, 300 responderam Sim ou Não para ônibus + metrô. Logo:

$$\frac{300}{1\,200} = \frac{1}{4} = 25\%$$

PÁGINA 218 – DESCUBRA MAIS

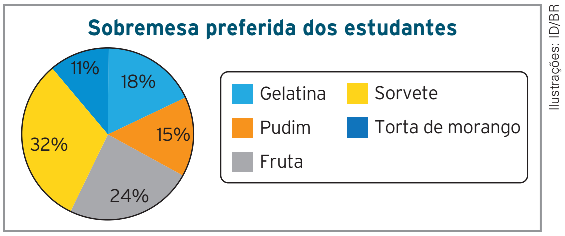
PARA CONCLUIR

1. Resposta pessoal. **2.** Resposta pessoal. **3.** Resposta pessoal.

PÁGINA 219 – ATIVIDADES

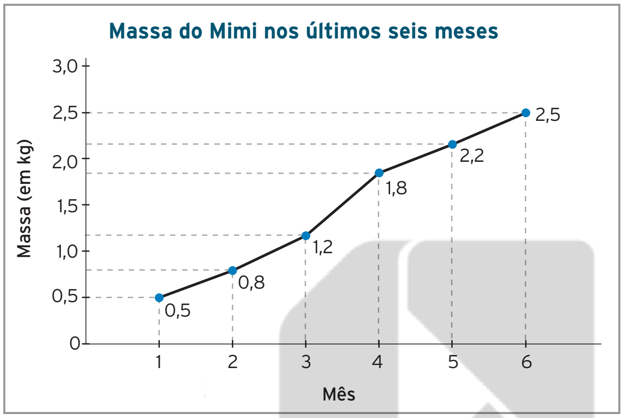
24. a) Resposta pessoal. Os estudantes podem digitar a tabela na planilha eletrônica, selecionar os dados da tabela e inserir o gráfico escolhido.

b) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes construam um gráfico de setores como este, a seguir.



Dados obtidos por Camila e Júlia.

25.



Dados obtidos por Juliana.

26. a) De acordo com o gráfico, a maior notificação ocorreu no dia 3 de fevereiro.

b) A amplitude é dada pela diferença entre o maior e o menor valor apresentado no gráfico.

$$298\,408 - 59\,737 = 238\,671$$

Logo, a amplitude dos dados do gráfico é 238 671.

27. a) 30% de $120 = \frac{30}{100} \cdot 120 = 3 \cdot 12 = 36$

Portanto, 36 estudantes têm gato como animal de estimação.

b) 20% de $120 = \frac{20}{100} \cdot 120 = 2 \cdot 12 = 24$

Portanto, 24 estudantes não têm animais de estimação.

c) Foi realizada uma pesquisa com 120 estudantes e 24 deles não têm animal de estimação. Então, 96 estudantes ($120 - 24 = 96$) têm animais de estimação.

PÁGINA 220 – DIVERSIFICANDO

1. a) $MA_A = \frac{110{,}5 + 108{,}3 + 107{,}1 + 108{,}5}{4} = \frac{434{,}4}{4} = 108{,}6$

$MA_B = \frac{112{,}7 + 100{,}1 + 106{,}4 + 118{,}2}{4} = \frac{437{,}4}{4} = 109{,}35$

$MA_C = \frac{110{,}1 + 109{,}8 + 109{,}9 + 110{,}0}{4} = \frac{439{,}8}{4} = 109{,}95$

Portanto, o tempo médio do candidato A é 108,6 segundos, do candidato B é 109,35 segundos e do candidato C é 109,95 segundos.

b) O candidato A teve o tempo médio mais baixo, 108,6 segundos.

c) O candidato B fez a volta mais rápida com o tempo de 100,1 segundos.

d) • Candidato A:

$$(DP_A)^2 = \frac{(110{,}5 - 108{,}6)^2 + (108{,}3 - 108{,}6)^2 + (107{,}1 - 108{,}6)^2 + (108{,}5 - 108{,}6)^2}{4}$$

$$(DP_A)^2 = \frac{3{,}61 + 0{,}09 + 2{,}25 + 0{,}01}{4} = \frac{5{,}96}{4} = 1{,}49$$

$$DP_A = \sqrt{1{,}49} \simeq 1{,}22$$

- Candidato B:

$$(DP_B)^2 = \frac{(112{,}7 - 109{,}35)^2 + (100{,}1 - 109{,}35)^2 + (106{,}4 - 109{,}35)^2 + (118{,}2 - 109{,}35)^2}{4}$$

$$(DP_B)^2 = \frac{11{,}2225 + 85{,}5625 + 8{,}7025 + 78{,}3225}{4} = \frac{183{,}81}{4} = 45{,}9525$$

$$DP_B = \sqrt{45{,}9525} \simeq 6{,}78$$

- Candidato C:

$$(DP_C)^2 = \frac{(110{,}1 - 109{,}95)^2 + (109{,}8 - 109{,}95)^2 + (109{,}9 - 109{,}95)^2 + (110 - 109{,}95)^2}{4}$$

$$(DP_C)^2 = \frac{0{,}0225 + 0{,}0225 + 0{,}0025 + 0{,}0025}{4} = \frac{0{,}05}{4} = 0{,}0125$$

$$DP_C = \sqrt{0{,}0125} \simeq 0{,}11$$

e) O candidato mais regular é aquele cujo desvio-padrão dos tempos é o menor. Logo, é o candidato C.

2. Respostas possíveis:

a)

Intervalos de classe de salários dos funcionários de uma empresa	
Salário (R$)	Frequência absoluta
1 000 ⊢ 1 600	4
1 600 ⊢ 2 200	16
2 200 ⊢ 2 800	8
2 800 ⊢ 3 400	7
3 400 ⊢ 4 000	5

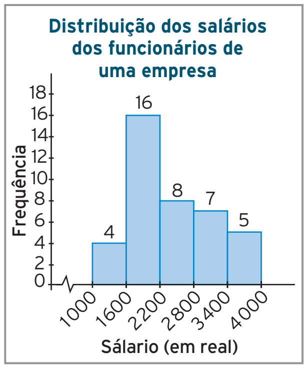
Dados obtidos pelo setor administrativo.

b)

Intervalos de classe de salários dos funcionários de uma empresa		
Salário (R$)	Frequência absoluta	Frequência relativa
1 000 ⊢ 1 600	4	$\frac{4}{40} = 0{,}1 = 10\%$
1 600 ⊢ 2 200	16	$\frac{16}{40} = 0{,}4 = 40\%$
2 200 ⊢ 2 800	8	$\frac{8}{40} = 0{,}2 = 20\%$
2 800 ⊢ 3 400	7	$\frac{7}{40} = 0{,}175 = 17{,}5\%$
3 400 ⊢ 4 000	5	$\frac{5}{40} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Dados obtidos pelo setor administrativo.

c)



ID/BR

Dados obtidos pelo setor administrativo.

3. Resposta pessoal.

4. **a)** Resposta pessoal. **b)** Resposta pessoal.

5. Alternativa **a**.

Calculando a média anual de cada uma das áreas de conhecimento tem-se:

- Matemática e suas Tecnologias:

$$MA = \frac{9 + 8 + 10 + 8}{4} = \frac{35}{4} = 8{,}75$$

- Ciências da Natureza e suas Tecnologias:

$$MA = \frac{8{,}5 + 6 + 6 + 8{,}5}{4} = \frac{29}{4} = 7{,}25$$

- Ciências Humanas e suas Tecnologias:

$$MA = \frac{7 + 7 + 9{,}5 + 8}{4} = \frac{31{,}5}{4} = 7{,}875$$

- Linguagens e suas Tecnologias:

$$MA = \frac{8 + 6{,}5 + 6{,}5 + 7{,}5}{4} = \frac{28{,}5}{4} = 7{,}125$$

- Redação:

$$MA = \frac{7{,}5 + 8 + 8 + 8}{4} = \frac{31{,}5}{4} = 7{,}875$$

Portanto, a maior média anual corresponde a Matemática e suas Tecnologias.

6. **a)** Observando o gráfico, podemos concluir que em 2021 houve maior percentual de crianças pretas de 6 a 7 anos que não sabiam ler e escrever.

b) De acordo com o gráfico, aproximadamente, 30%.

c) No período indicado, o grupo das crianças brancas sempre teve o menor percentual entre as que não sabiam ler e escrever.

d) Respostas pessoais.

e) Resposta pessoal.

PÁGINA 222 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Custos perdidos são os custos que já foram incorridos, ou seja, aquilo que já foi. O efeito desse tipo de custo na decisão das pessoas é uma ilusão econômica produzida por nossa mente.

2. Respostas pessoais.

3. Resposta possível: Na primeira situação, o rapaz comprou um tênis caro e desconfortável. Ele continua usando o tênis porque fica pensando no dinheiro que gastou e que era suficiente para comprar uma bicicleta. Na segunda situação, a família comprou ingressos para um filme do qual não está gostando e do qual pode ir embora a qualquer momento, mas não faz isso. Resposta pessoal.

4. **a)** Resposta pessoal. **b)** Resposta pessoal. **c)** Resposta pessoal. **d)** Resposta pessoal.

PÁGINA 224 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. **a)** $MA = \dfrac{70 + 66 + 72 + 55 + 69 + 61 + 60 + 70 + 80 + 65}{10} = \dfrac{668}{10} = 66{,}8$

   Portanto, a massa média desse grupo de atletas é 66,8 kg.

   b) $A = 80 - 55 = 25$

   Logo, a amplitude desses dados é 25 kg.

   c) $D(70) = 70 - 66{,}8 = 3{,}2$

   $D(66) = 66 - 66{,}8 = -0{,}8$

   $D(72) = 72 - 66{,}8 = 5{,}2$

   $D(55) = 55 - 66{,}8 = -11{,}8$

   $D(69) = 69 - 66{,}8 = 2{,}2$

   $D(61) = 61 - 66{,}8 = -5{,}8$

   $D(60) = 60 - 66{,}8 = -6{,}8$

   $D(70) = 70 - 66{,}8 = 3{,}2$

   $D(80) = 80 - 66{,}8 = 13{,}2$

   $D(65) = 65 - 66{,}8 = -1{,}8$

   d) $V = \dfrac{3{,}2^2 + (-0{,}8)^2 + 5{,}2^2 + (-11{,}8)^2 + 2{,}2^2 + (-5{,}8)^2 + (-6{,}8)^2 + 3{,}2^2 + 13{,}2^2 + (-1{,}8)^2}{10} =$

   $= \dfrac{10{,}24 + 0{,}64 + 27{,}04 + 139{,}24 + 4{,}84 + 33{,}64 + 46{,}24 + 10{,}24 + 174{,}24 + 3{,}24}{10} = \dfrac{449{,}6}{10} = 44{,}96$

   e) $DP = \sqrt{44{,}96} \simeq 6{,}71$

   Portanto, o desvio-padrão dessas massas é, aproximadamente, 6,71 kg.

2. Para calcular a quantidade de modelos diferentes, pode-se utilizar o princípio fundamental da contagem, ou seja, multiplicar as quantidades de opções de escolha. Para escolher a cor:

   - de fundo, há 4 opções;
   - secundária, há 6 opções;
   - dos detalhes, há 5 opções.

   Então:

   $$4 \cdot 6 \cdot 5 = 120$$

   Logo, podem ser escolhidos 120 modelos diferentes de tênis.

3. Alternativa **c**.

   Para escolher o campeão, há 5 opções de candidato, e para o vice-campeão, 4 opções, uma vez que um deles foi escolhido campeão. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, há 20 opções ($5 \cdot 4 = 20$) de escolha para os dois premiados.

4. Alternativa **b**.

   Luciano somou todos os números e dividiu por 15, obtendo 7 como resultado, ou seja, a soma dos 13 números é igual a 105 ($15 \cdot 7 = 105$).

   Efetuando a adição de todos os números naturais até 15, obtemos 120 ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 120$). Logo, Luciano pulou os números que somam 15 ($120 - 105 = 15$).

   Sabendo que os números são consecutivos, consideramos x um número e $(x + 1)$ o outro número. Então:

   $$x + x + 1 = 15$$
   $$2x + 1 = 15$$
   $$2x = 15 - 1$$
   $$2x = 14$$
   $$x = \frac{14}{2}$$
   $$x = 7$$

   Logo, os números que ele esqueceu de somar são 7 e 8, cujo produto é 56 ($7 \cdot 8 = 56$).

5. Alternativa **e**.

a) Falsa. De acordo com o gráfico, a média de Português da sala A é 8 e a média de Matemática da sala B é 9.

b) Falsa. Na sala B, a média de Português é menor que a média de Matemática.

c) Falsa. A média de Matemática das duas salas juntas é 7,8

$\left(\frac{6 \cdot 20 + 9 \cdot 30}{20 + 30} = \frac{120 + 270}{50} = \frac{390}{50} = 7{,}8\right)$.

d) Falsa. A média da sala A é 7 $\left(\frac{6 + 8}{2} = \frac{14}{2} = 7\right)$ e a média da sala B também é 7 $\left(\frac{9 + 5}{2} = \frac{14}{2} = 7\right)$.

e) Verdadeira. A média geral das notas de todos os estudantes nas duas matérias é 7, pois:

$$\frac{6 \cdot 20 + 8 \cdot 20 + 9 \cdot 30 + 5 \cdot 30}{100} = \frac{700}{100} = 7$$

6. Para verificar se a afirmação está correta, é preciso determinar a distância média dos voos desse aeroporto e, então, comparar o valor obtido com o dado no enunciado, isto é, 150 milhas náuticas.

Observando o histograma apresentado, pode-se montar a tabela a seguir.

Voos por distância	
Distância voada (milhas náuticas)	**Frequência relativa (%)**
$0 \vdash 100$	25
$100 \vdash 200$	50
$200 \vdash 300$	20
$300 \vdash 400$	5

Dados fictícios.

Nota-se, por exemplo, que 25% dos voos têm uma distância entre 0 e 100 milhas náuticas, mas não é possível saber exatamente a distância de cada um dos voos. Nesse caso, é preciso definir um valor que represente cada intervalo. Esse valor corresponde à média do intervalo, já informada no histograma apresentado no enunciado. Assim, tem-se:

Voos por distância		
Distância voada (milhas náuticas)	**Frequência relativa (%)**	**Média do intervalo**
$0 \vdash 100$	25	50
$100 \vdash 200$	50	150
$200 \vdash 300$	20	250
$300 \vdash 400$	5	350

Dados fictícios.

Agora, pode-se assumir que 25% dos voos têm uma distância percorrida de 50 milhas náuticas, que é o valor médio do intervalo $0 \vdash 100$. Do mesmo modo, pode-se assumir que 50% dos voos têm uma distância percorrida de 150 milhas náuticas, que é o valor médio do intervalo $100 \vdash 200$, e assim por diante. Com isso, para determinar a distância média dos voos (*MP*), adiciona-se as distâncias percorridas e divide-se pelo total de ocorrências.

$$MP = \frac{25 \cdot 50 + 50 \cdot 150 + 20 \cdot 250 + 5 \cdot 350}{25 + 50 + 20 + 5} =$$

$$= \frac{1\,250 + 7\,500 + 5\,000 + 1\,750}{100} = \frac{15\,500}{100} = 155$$

Comparando o valor de *MP* com o valor dado no enunciado, tem-se que $155 > 150$. Portanto, a afirmação está correta.

7. Alternativa **e**.

Sendo X a média aritmética, tem-se:

$$X = \frac{0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1}{5 + 3 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1}$$

$$X = \frac{0 + 3 + 8 + 9 + 8 + 10 + 7}{20}$$

$$X = 2{,}25$$

Para determinar a mediana, considera-se que os gols marcados foram escritos em ordem crescente. Sabendo que a quantidade de partidas é 20, os termos centrais ocupam a 10ª e a 11ª posição. Assim, tem-se:

- 1ª até 5ª posição: 0 gols;
- 6ª até 8ª posição: 1 gol;
- 9ª até 12ª posição: 2 gols;
- 13ª até 15ª posição: 3 gols;
- 16ª e 17ª posição: 4 gols;
- 18ª e 19ª posição: 5 gols;
- 20ª posição: 7 gols;

Sendo Y a mediana, tem-se:

$$Y = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

Considerando Z a moda, tem-se $Z = 0$, pois é a quantidade de gols marcados que ocorreu com maior frequência (5 partidas).

Assim, $Z < Y < X$.

8. Alternativa **d**.

Calculando a média, em milhares de reais, dos três últimos anos de cada empresa, tem-se:

- Alfinetes V: $\frac{200 + 220 + 240}{3} = 220$
- Balas W: $\frac{200 + 230 + 200}{3} = 210$
- Chocolates X: $\frac{250 + 210 + 215}{3} = 225$
- Pizzaria Y: $\frac{230 + 230 + 230}{3} = 230$
- Tecelagem Z: $\frac{160 + 210 + 245}{3} = 205$

Logo, as duas empresas escolhidas são Chocolates X e Pizzaria Y.

9. **a)** O tema da pesquisa é: Estudantes que já foram ofendidos nas redes sociais.

b) Sim, a pesquisa foi amostral. De 11,8 milhões de estudantes brasileiros, foram pesquisados quase 188 mil estudantes.

10. **a)** Gilson utilizou o método da amostra sistemática. Quando os elementos da população já estão previamente ordenados, pode-se utilizar uma amostragem sistemática, em que os elementos são separados por um mesmo intervalo.

b) Para determinar o intervalo em uma amostra sistemática, calcula-se a razão entre o número de pés de alface (150) e o número de elementos da amostra (15). Portanto, o tamanho da amostra selecionada por Gilson é 10 pés ($150 : 15 = 10$) de alface.

c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que não faria sentido, pois a pesquisa não envolve categorias.

UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS

CAPÍTULO 1 – ÁREAS

PÁGINA 229 – ATIVIDADES

1. a) $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$

$A_{\text{retângulo}} = 5 \cdot 9 = 45$

Portanto, a medida da área do retângulo é igual a 45 mm^2.

b) $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$

$A_{\text{retângulo}} = 7 \cdot 14 = 98$

Portanto, a medida da área do retângulo é igual a 98 cm^2.

c) $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$

$A_{\text{retângulo}} = 23 \cdot 5 = 115$

Portanto, a medida da área do retângulo é igual a 115 hm^2.

d) $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$

$A_{\text{retângulo}} = 8{,}6 \cdot 7{,}5 = 64{,}5$

Portanto, a medida da área do retângulo é igual a 64,5 m^2.

e) $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$

$A_{\text{retângulo}} = 2{,}1 \cdot 4{,}3 = 9{,}03$

Portanto, a medida da área do retângulo é igual a 9,03 m^2.

f) Como 3,5 cm equivalem a 35 mm, a medida da área do retângulo é dada por:

$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$

$A_{\text{retângulo}} = 6 \cdot 35 = 210$

Portanto, a medida da área do retângulo é igual a 210 mm^2.

2. a) $A_{\text{quadrado}} = \ell^2$

$A_{\text{quadrado}} = 9^2 = 81$

Portanto, a medida da área do quadrado é igual a 81 km^2.

b) $A_{\text{quadrado}} = \ell^2$

$A_{\text{quadrado}} = 6^2 = 36$

Portanto, a medida da área do quadrado é igual a 36 dm^2.

c) $A_{\text{quadrado}} = \ell^2$

$A_{\text{quadrado}} = 7^2 = 49$

Portanto, a medida da área do quadrado é igual a 49 cm^2.

d) $A_{\text{quadrado}} = \ell^2$

$A_{\text{quadrado}} = 2{,}5^2 = 6{,}25$

Portanto, a medida da área do quadrado é igual a 6,25 m^2.

e) $A_{\text{quadrado}} = \ell^2$

$A_{\text{quadrado}} = 4{,}6^2 = 21{,}16$

Portanto, a medida da área do quadrado é igual a 21,16 mm^2.

f) $A_{\text{quadrado}} = \ell^2$

$A_{\text{quadrado}} = 3{,}1^2 = 9{,}61$

Portanto, a medida da área do quadrado é igual a 9,61 hm^2.

3. Como a medida da área do terreno retangular já foi dada e a medida do comprimento desse terreno também, precisa-se descobrir a medida da largura dele. Uma sugestão para resolver esse problema é:

$$A = b \cdot h$$
$$69\,750 = 310h$$
$$h = \frac{69\,750}{310}$$
$$h = 225$$

Portanto, a medida da largura do terreno é igual a 225 m.

4. Como a sala é quadrada, a medida de sua área é igual a:

$$A = \ell^2$$
$$A = 4{,}9^2 = 24{,}01$$

Portanto, a medida da área da sala é igual a 24,01 m^2.

5. Como a praça é uma região quadrada de medida de área igual a 144 m^2, tem-se:

$$A_{\text{quadrado}} = \ell^2$$
$$144 = \ell^2$$
$$\sqrt{144} = \ell$$
$$12 = \ell$$

Portanto, o lado do quadrado mede 12 m.

Para descobrir quantos metros de fita Ana deverá usar para cercar a região quadrada, deve-se encontrar a medida do perímetro do quadrado de lado 12 m.

medida do perímetro $= 4\ell$

medida do perímetro $= 4 \cdot 12 = 48$

Portanto, Ana vai usar 48 m de fita.

6. Como o quadrado tem quatro lados de medidas iguais e a medida do perímetro é igual a 100 cm, então cada lado mede 25 cm (100 : 4 = 25). Portanto:

$$A_{\text{quadrado}} = \ell^2$$
$$A_{\text{quadrado}} = 25^2 = 625$$

Logo, a medida da área do quadrado é igual a 625 cm^2.

PÁGINA 230 – ATIVIDADES

7. $A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$

$A_{\text{paralelogramo}} = 6 \cdot 4{,}3 = 25{,}8$

Portanto, a medida da área do paralelogramo é igual a 25,8 cm^2.

8. Como o terreno tem a forma de um paralelogramo, basta descobrir a medida da área de um paralelogramo com 10 m de base e 7 m de altura.

$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$

$A_{\text{paralelogramo}} = 10 \cdot 7 = 70$

Portanto, a medida da área do terreno é igual a 70 m^2.

9. Sabendo que 3 m equivalem a 300 cm e 2 m equivalem a 200 cm, pode-se encontrar a medida da área da sala retangular.

$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$

$A_{\text{retângulo}} = 300 \cdot 200 = 60\,000$

Portanto, a medida da área da sala retangular é igual a 60 000 cm^2.

Como cada lajota tem a forma de um paralelogramo, sua medida da área é dada por:

$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$

$A_{\text{paralelogramo}} = 20 \cdot 15 = 300$

Portanto, a medida da área de cada lajota é igual a 300 cm^2.

Para encontrar quantas lajotas são necessárias, efetua-se a divisão da medida da área total da sala pela medida da área de cada lajota:

$$60\,000 : 300 = 200$$

Logo, são necessárias 200 lajotas para revestir o piso da sala.

10. De acordo com a figura, a base do paralelogramo *EFGH* mede 6 dm e sua altura, 2,5 dm. Então:

$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$

$A_{\text{paralelogramo}} = 6 \cdot 2{,}5 = 15$

Logo, a medida da área do paralelogramo *EFGH* é 15 dm^2.

PÁGINA 231 – ATIVIDADES

11. Como o triângulo tem um lado medindo 13 cm e a altura relativa a esse lado mede 5 cm, sua medida de área é dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{13 \cdot 5}{2} = \frac{65}{2} = 32{,}5$$

Portanto, a medida da área do triângulo é igual a 32,5 cm^2.

12. a) Como a base do triângulo mede 2,3 m e a altura relativa a essa base mede 2,4 m, tem-se:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{2{,}3 \cdot 2{,}4}{2} = 2{,}3 \cdot 1{,}2 = 2{,}76$$

Portanto, a medida da área do triângulo é igual a 2,76 m^2.

b) Como a base do triângulo mede 4,3 km e a altura relativa a essa base mede 2 km, tem-se:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{4{,}3 \cdot 2}{2} = 4{,}3$$

Portanto, a medida da área do triângulo é igual a 4,3 km^2.

c) Como a base do triângulo mede 5,5 mm e a altura relativa a essa base mede 1,5 mm, tem-se:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{5{,}5 \cdot 1{,}5}{2} = \frac{8{,}25}{2} = 4{,}125$$

Portanto, a medida da área do triângulo é igual a 4,125 mm^2.

PÁGINA 232 – ATIVIDADES

13. a) Como o trapézio tem dois ângulos retos, ele é um trapézio retângulo.

b) De acordo com a figura, a base maior (B) mede 5 cm, a base menor (b) mede 3 cm e a altura (h) mede 2 cm. Então:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(5 + 3) \cdot 2}{2} = 5 + 3 = 8$$

Portanto, a medida da área do trapézio é igual a 8 cm^2.

14. De acordo com a figura, a base maior (B) mede 120 dm, a base menor (b) mede 50 dm e a altura (h) mede 60 dm. Então:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(120 + 50) \cdot 60}{2} = 70 \cdot 30 = 5\,100$$

Portanto, a medida da área do terreno é igual a 5 100 dm^2.

PÁGINA 233 – ATIVIDADE

15. $A_{\text{losango}} = \dfrac{D \cdot d}{2}$

$$48 = \frac{D \cdot 6}{2}$$

$$48 = 3D$$

$$D = \frac{48}{3}$$

$$D = 16$$

Portanto, a diagonal maior mede 16 cm.

PÁGINA 236 – ATIVIDADES

16. $A_{\text{círculo}} = \pi r^2$

$A_{\text{círculo}} = 3{,}14 \cdot 9^2 = 3{,}14 \cdot 81 = 254{,}34$

Portanto, a medida da área do círculo é igual a 254,34 cm^2.

17. Como a praça é circular e seu raio mede 23 m, sua medida da área é dada por:

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot 23^2 = 529\pi$$

Portanto, a medida da área da praça circular é igual a 529π m^2.

18. Como o diâmetro da região circular mede 15 cm, o raio dessa região mede 7,5 cm (15 : 2 = 7,5).

Logo, a medida da área dessa região circular é dada por:

$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$

$A_{\text{círculo}} = 3{,}14 \cdot 7{,}5^2 = 3{,}14 \cdot 56{,}25 =$

$= 176{,}625$

Portanto, a medida da área dessa região circular é igual a 176,625 cm^2.

19. Para calcular a medida da área de uma região circular, é preciso conhecer o valor do raio dessa região. De acordo com o enunciado, foi dada a medida do comprimento da circunferência dessa região. Com base nessa medida, descobre-se a medida de seu raio. Então:

$$C = 2\pi r$$

$$27\pi = 2\pi r$$

$$r = \frac{27\pi}{2\pi}$$

$$r = 13{,}5$$

Agora, calcula-se a medida da área da região circular:

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot (13{,}5)^2 = 182{,}25\pi$$

Portanto, a medida da área da região circular é igual a $182{,}25\pi$ cm^2.

20. a) $A_{\text{setor}} = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$

$A_{\text{setor}} = \dfrac{48°}{360°} \cdot \pi \cdot (2{,}5)^2 =$

$= \dfrac{2}{15} \cdot \left(\dfrac{25}{10}\right)^2 \cdot \pi = \dfrac{2}{15} \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \cdot \pi =$

$= \dfrac{2}{15} \cdot \dfrac{25}{4} \cdot \pi = \dfrac{5\pi}{6}$

Logo, a medida da área do setor circular é igual a $\dfrac{5\pi}{6}$ cm^2.

b) $A_{\text{setor}} = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$

$A_{\text{setor}} = \dfrac{270°}{360°} \cdot \pi \cdot 8^2 = \dfrac{3}{4} \cdot 64 \cdot \pi = 48\pi$

Logo, a medida da área do setor circular é igual a 48π cm^2.

c) $A_{\text{setor}} = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$

$A_{\text{setor}} = \dfrac{30°}{360°} \cdot \pi \cdot 3^2 = \dfrac{1}{12} \cdot 9 \cdot \pi = \dfrac{3\pi}{4}$

Logo, a medida da área do setor circular é igual a $\dfrac{3\pi}{4}$ cm^2.

d) $A_{\text{setor}} = \dfrac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$

$A_{\text{setor}} = \dfrac{40°}{360°} \cdot \pi \cdot (4{,}5)^2 =$

$= \dfrac{1}{9} \cdot \left(\dfrac{45}{10}\right)^2 \cdot \pi = \dfrac{1}{9} \cdot \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 \cdot \pi =$

$= \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{81}{4} \cdot \pi = \dfrac{9\pi}{4} = 2{,}25\pi$

Logo, a medida da área do setor circular é igual a $2{,}25\pi$ cm^2.

21. Como os pratos são circulares, a medida da área ocupada por cada um deles é dada por $A_{\text{círculo}} = \pi r^2$. Pelo enunciado, o diâmetro mede 25 cm e, portanto, o raio mede $\dfrac{25}{2}$ cm. Então:

$$A_{\text{prato}} = \pi \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{625\pi}{4}$$

Portanto, a medida da área ocupada por um prato é igual a $\dfrac{625\pi}{4}$ cm^2.

22. Para determinar a medida da área da região colorida, pode-se, por exemplo, calcular a medida da área do setor circular e subtrair metade da medida da área do quadrado.

Observando a figura, é possível perceber que o ângulo central correspondente ao arco mede 90°. Então, a medida da área do setor circular correspondente é dada por:

$$A_{\text{setor circular}} = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360°}$$

$$A_{\text{setor circular}} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 90°}{360°} = \frac{\pi \cdot 36}{4} = 9\pi$$

Agora, calcula-se a medida da área do quadrado de 6 cm de lado.

$$A_{\text{quadrado}} = \ell^2$$

$$A_{\text{quadrado}} = 6^2 = 36$$

Logo, a medida da área da região colorida (A) é dada por:

$A = A_{\text{setor circular}} - A_{\text{metade da área do quadrado}}$

$A = 9\pi - \dfrac{36}{2} = 9\pi - 18$

Portanto, a medida da área da região colorida é igual a $(9\pi - 18)$ cm^2.

23. a) $A = \dfrac{A_{\text{círculo}}}{2} = \dfrac{\pi \cdot 12^2}{2} = \dfrac{144\pi}{2} = 72\pi$

Portanto, a medida da área da região colorida é igual a 72π cm^2.

b) Para determinar a medida da área da região colorida, pode-se, por exemplo, calcular a medida da área da semicircunferência de raio medindo 7 cm e subtrair a medida da área de duas semicircunferências de raio medindo 3,5 cm cada uma ou, então, subtrair da medida da área da semicircunferência de raio medindo 7 cm a medida da área da circunferência de raio medindo 3,5 cm.

Chamando a medida da área da semicircunferência de raio medindo 7 cm de A_I, a medida da área da circunferência de raio medindo 3,5 cm de A_{II} e a medida da área da região colorida de A, tem-se:

- $A_I = \dfrac{\pi r^2}{2}$

  $A_I = \dfrac{\pi \cdot 7^2}{2} = \dfrac{49\pi}{2}$

- $A_{II} = \pi r^2$

  $A_{II} = \pi \cdot (3{,}5)^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{35}{10}\right)^2 =$

  $= \pi \cdot \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{49\pi}{4}$

- $A = A_I - A_{II} = \dfrac{49\pi}{2} - \dfrac{49\pi}{4} =$

  $= \dfrac{98\pi - 49\pi}{4} = \dfrac{49\pi}{4}$

Portanto, a medida da área da região colorida é igual a $\dfrac{49\pi}{4}$ cm^2.

c) Para determinar a medida da área da região colorida, pode-se, por exemplo, calcular a medida da área do quadrado e subtrair quatro vezes a medida da área do setor circular.

- Medida da área do quadrado

$$A_{\text{quadrado}} = \ell^2$$
$$A_{\text{quadrado}} = 2^2 = 4$$

- Medida da área de um setor circular

  Observando a figura, é possível perceber que o ângulo central correspondente ao arco mede 90°. Então, a medida da área do setor circular correspondente é dada por:

$$A_{\text{setor circular}} = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360°}$$
$$A_{\text{setor circular}} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 90°}{360°} = \frac{\pi}{4}$$

Logo, a medida da área da região colorida é dada por:

$$A_{\text{região colorida}} = A_{\text{quadrado}} - 4A_{\text{setor circular}} =$$
$$= 4 - 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 4 - \pi$$

Portanto, a medida da área da região colorida é igual a $(4 - \pi)$ cm^2.

PÁGINA 237 – DIVERSIFICANDO

1. Pode-se calcular a medida da área da sala de Luís Guilherme, que é retangular, em centímetro quadrado. Sabendo que 4,5 m equivalem a 450 cm e 3 m equivalem a 300 cm, tem-se:

$$A_{\text{sala}} = b \cdot h$$
$$A_{\text{sala}} = 450 \cdot 300 = 135\,000$$

Portanto, a medida da área da sala é igual a 135 000 cm^2.

Agora, calcula-se a medida da área de cada placa quadrada em centímetro quadrado:

$$A_{\text{placa}} = \ell^2$$
$$A_{\text{placa}} = 18^2 = 324$$

Portanto, a medida da área de cada placa quadrada é 324 cm^2.

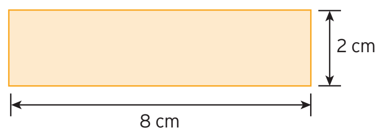
Logo, a quantidade de placas que Luís Guilherme deve comprar é:

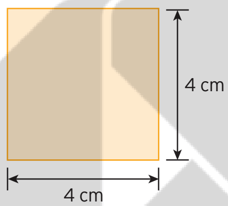
$$\frac{135\,000}{324} \simeq 416{,}67$$

Portanto, Luís Guilherme deve comprar, no mínimo, 417 placas para revestir o piso da sala.

2. Resposta pessoal. Uma resposta possível seria desenhar um retângulo de lados medindo 8 cm e 2 cm e um quadrado de lado medindo 4 cm.

Ilustrações: ID/BR





3. Deve-se calcular a medida da área das paredes a serem pintadas, descontando a medida da área da janela e a medida da área da porta que existem nessa sala.

- Medida da área (A_1) de uma parede retangular com dimensões 5 m por 2,5 m, em metro quadrado:

$$A_1 = b \cdot h$$
$$A_1 = 5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$$

- Medida da área (A_2) de uma parede retangular com dimensões 4 m por 2,5 m, em metro quadrado:

$$A_2 = b \cdot h$$
$$A_2 = 4 \cdot 2{,}5 = 10$$

- Medida da área (A_3) da janela retangular de dimensões 2 m por 1,5 m, em metro quadrado:

$$A_3 = b \cdot h$$
$$A_3 = 2 \cdot 1{,}5 = 3$$

- Medida da área (A_4) da porta retangular de dimensões 0,8 m por 2,2 m, em metro quadrado:

$$A_4 = b \cdot h$$
$$A_4 = 0{,}8 \cdot 2{,}2 = 1{,}76$$

- Medida da área total (A_t) a ser pintada, em metro quadrado:

  Nessa sala retangular, há duas paredes de dimensões 5 m por 2,5 m e duas paredes de dimensões 4 m por 2,5 m. Então:

$$A_t = 2A_1 + 2A_2 - A_3 - A_4 =$$
$$= 2 \cdot 12{,}5 + 2 \cdot 10 - 3 - 1{,}76 =$$
$$= 25 + 20 - 3 - 1{,}76 = 40{,}24$$

  Portanto, a medida da área total a ser pintada é igual a 40,24 m^2.

Como Elisa recebe R$ 15,00 por metro quadrado pintado, ela vai receber por esse trabalho R$ 603,60 ($15 \cdot 40{,}24 = 603{,}60$).

4. Em ambos os modelos, é necessário descobrir a medida da área do quadrado de lado 3 m.

$$A_{\text{quadrado}} = \ell^2$$
$$A_{\text{quadrado}} = 3^2 = 9$$

Portanto, a medida da área do quadrado é igual a 9 m^2.

Agora, deve-se descobrir quanto custa cada um dos modelos de vidro.

- Modelo 1: o triângulo azul-escuro é um triângulo isósceles de base medindo 3 m e altura medindo 3 m. Logo, a medida de sua área é dada por:

$$A_{\text{modelo 1}} = \frac{b \cdot h}{2}$$
$$A_{\text{modelo 1}} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

  Portanto, a medida da área do modelo 1 é igual a 4,5 m^2.

  A medida da área da parte azul-clara é dada por:

$$9 - 4{,}5 = 4{,}5$$

  Assim, a medida da área da parte azul-clara é igual a 4,5 m^2.

- Modelo 2: o triângulo azul-escuro é um triângulo retângulo e isósceles de catetos medindo 3 m. Logo, a medida de sua área é dada por:

$$A_{\text{modelo 2}} = \frac{b \cdot h}{2}$$
$$A_{\text{modelo 2}} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

  Portanto, a medida da área do modelo 2 é igual a 4,5 m^2.

  A medida da área da parte azul-clara é dada por:

$$9 - 4{,}5 = 4{,}5$$

  Assim, a medida da área da parte azul-clara é igual a 4,5 m^2.

Portanto, os dois modelos têm o mesmo custo:

$$4{,}5 \cdot 7 + 4{,}5 \cdot 13 = 31{,}5 + 58{,}5 = 90$$

Logo, o custo dos dois modelos é R$ 90,00.

5. Uma das maneiras de encontrar a medida da área pintada de verde da figura é subtrair a medida da área do losango menor, de diagonais medindo 8 cm e 5 cm, da medida da área do losango maior, de diagonais medindo 14 cm e 7 cm.

- $A_{\text{losango menor}} = \dfrac{D \cdot d}{2}$

  $A_{\text{losango menor}} = \dfrac{8 \cdot 5}{2} = \dfrac{40}{2} = 20$
- $A_{\text{losango maior}} = \dfrac{D \cdot d}{2}$

  $A_{\text{losango maior}} = \dfrac{14 \cdot 7}{2} = \dfrac{98}{2} = 49$
- $A = A_{\text{losango maior}} - A_{\text{losango menor}}$

  $A = 49 - 20 = 29$

Portanto, a medida da área pintada de verde é igual a 29 cm^2.

6. Considerando que a base do paralelogramo mede x cm e sua altura mede 4 cm, uma possível resolução é:

$$A = b \cdot h$$
$$8 = 4 \cdot x$$
$$\frac{8}{4} = x$$
$$2 = x$$

Portanto, $x = 2$ cm.

7. Como cada canteiro tem a forma de losango, a medida da área de cada um é dada por:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$
$$A = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Têm-se 8 canteiros iguais, então a medida da área de todos eles é igual a 80 m^2 $(8 \cdot 10 = 80)$.

Como serão plantadas 13 mudas por metro quadrado, serão plantadas ao todo nos canteiros dessa praça 1 040 mudas $(13 \cdot 80 = 1\,040)$.

8. $A_{\text{coroa circular}} = (R^2 - r^2)\pi$

$A_{\text{coroa circular}} = (6^2 - 4^2)\pi = (36 - 16)\pi = 20\pi$

Como a medida da área da coroa circular é igual à medida da área do círculo, tem-se:

$$A_{\text{coroa circular}} = A_{\text{círculo}}$$
$$20\pi = \pi r^2$$
$$r^2 = 20$$
$$r = \sqrt{20}$$
$$r = \sqrt{4 \cdot 5}$$
$$r = 2\sqrt{5}$$

Portanto, o raio do círculo mede $2\sqrt{5}$ cm.

9. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2 – VOLUMES E CAPACIDADES

PÁGINA 244 – ATIVIDADES

1. Decompõe-se a figura dada em dois blocos retangulares: um com medidas 1 cm por 1 cm por 3 cm e outro com medidas 1 cm por 3 cm por 3 cm.

- Volume (V_I) do bloco retangular com medidas 1 cm por 1 cm por 3 cm:

$$V_I = a \cdot b \cdot c$$
$$V_I = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$$

- Volume (V_{II}) do bloco retangular com medidas 1 cm por 3 cm por 3 cm:

$$V_{II} = a \cdot b \cdot c$$
$$V_{II} = 1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$$

Portanto, a medida do volume da figura é dado por:

$$V = V_I + V_{II} = 3 + 9 = 12$$

Logo, a medida do volume da peça é igual a 12 cm^3.

2. $V_{\text{bloco retangular}} = a \cdot b \cdot c$

$V_{\text{bloco retangular}} = 34 \cdot 18{,}5 \cdot 12 = 7\,548$

Portanto, a medida do volume do bloco retangular é igual a 7 548 cm^3.

3. $V_{\text{cubo}} = \ell^3$

$V_{\text{cubo}} = 7^3 = 343$

Portanto, a medida do volume do cubo é igual a 343 cm^3.

4. a) $V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot (1{,}8)^2 \cdot 3 = \pi \cdot 3{,}24 \cdot 3 = 9{,}72\pi$

Portanto, a medida do volume do cilindro é igual a $9{,}72\pi$ cm^3.

b) $V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 1{,}5 = \pi \cdot 16 \cdot 1{,}5 = 24\pi$

Portanto, a medida do volume do cilindro é igual a 24π cm^3.

c) $V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 12^2 \cdot 50 = \pi \cdot 144 \cdot 50 = 7200\pi$

Portanto, a medida do volume do cilindro é igual a $7\,200\pi$ dm^3.

d) $V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 4^2 \cdot 4 = \pi \cdot 16 \cdot 4 = 64\pi$

Portanto, a medida do volume do cilindro é igual a 64π dm^3.

5. - Cálculo da medida da área da base do cilindro:

$$A_{\text{base}} = \pi r^2$$
$$A_{\text{base}} = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$$

- Cálculo da medida da altura do cilindro:

$$V = A_{\text{base}} \cdot h$$
$$144\pi = 16\pi \cdot h$$
$$h = \frac{144\pi}{16\pi}$$
$$h = 9$$

Portanto, a altura do cilindro mede 9 cm.

6. Sabendo que o comprimento do tubo cilíndrico mede 12,5 m ou 1 250 cm, que o raio mede 1,5 cm e que $\pi = 3{,}14$, então:

$V_{\text{tubo cilíndrico}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{\text{tubo cilíndrico}} = 3{,}14 \cdot (1{,}5)^2 \cdot 1\,250 = 3{,}14 \cdot 2{,}25 \cdot 1\,250 = 8\,831{,}25$

Portanto, a medida do volume de água que cabe dentro de um tubo cilíndrico é igual a 8 831,25 cm^3, que equivale a, aproximadamente, 8,83 L.

7. O reservatório tem 15 m de medida de diâmetro, ou seja, 7,5 m ou 75 dm de medida de raio. Além disso, sabemos que a medida de sua altura é 5 m ou 50 dm. Logo:

$V = 75 \cdot 75 \cdot 50 \cdot \pi = 281\,250 \cdot 3{,}14 = 883\,125$

Logo, a medida da capacidade do reservatório é 883 125 L.

8. a) Para descobrir a capacidade de cada pote, deve-se encontrar a medida do volume desse pote. Como esse pote é cilíndrico, com 5 cm de medida de diâmetro, ou seja, 2,5 cm de medida de raio e 7 cm de medida de altura, então se encontra a medida da área da base desse cilindro e, em seguida, a medida de seu volume.

- $A_{\text{base}} = \pi r^2$

  $A_{\text{base}} = 3{,}14 \cdot (2{,}5)^2 = 3{,}14 \cdot 6{,}25 = 19{,}625$
- $V = A_{\text{base}} \cdot h$

  $V = 19{,}625 \cdot 7 = 137{,}375 \simeq 137$

Portanto, a medida do volume de cada pote é igual a, aproximadamente, 137 cm^3, que equivale a, aproximadamente, 137 mL.

b) 5 L equivalem a 5 000 mL, então:

$$\frac{5\,000}{137} \simeq 36{,}5$$

Logo, poderão ser totalmente preenchidos 36 potes com álcool em gel.

PÁGINA 245 – DIVERSIFICANDO

1. $V_{\text{caixa}} = a \cdot b \cdot c$

$V_{\text{caixa}} = 8{,}5 \cdot 9{,}5 \cdot 4{,}3 = 347{,}225$

Portanto, a medida do volume da caixa de milho é 347,225 cm^3.

2. - Volume interno máximo da piscina:

$$V_{\text{piscina}} = a \cdot b \cdot c$$
$$V_{\text{piscina}} = 50 \cdot 25 \cdot 2 = 2\,500$$

Portanto, nessa piscina cabem, no máximo, 2 500 m^3 de água.

- Quantidade de litros que cabem na piscina: 2 500 m^3 equivalem a 2 500 000 L.

Logo, nessa piscina cabem, no máximo, 2 500 000 L de água.

3. Considerando x a medida da aresta de um cubo, a medida de seu volume é igual a x^3.

Se dobrarmos a medida de sua aresta, ela será igual a $2x$ e, consequentemente, a medida de seu volume será:

$$(2x)^3 = 8x^3$$

Portanto, a medida de seu volume vai aumentar oito vezes.

4. Como a medida do diâmetro da lata é 8 cm, então a medida do raio é 4 cm. Portanto, a medida da área da base da lata de ervilha é dada por:

$$A_{base} = \pi r^2$$
$$A_{base} = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$$

Como a medida da altura da lata é igual a 10 cm, a medida do volume dessa lata é dado por:

$$V = A_{base} \cdot h$$
$$V = 16\pi \cdot 10 = 160\pi$$

Logo, a medida do volume da lata de ervilha é igual a 160π cm^3.

5. 50 000 L são equivalentes a 50 m^3, então:

$$V = A_{base} \cdot h$$
$$50 = \pi r^2 \cdot h$$
$$50 = \pi \cdot (2{,}5)^2 \cdot h$$
$$50 = \pi \cdot \left(\frac{25}{10}\right)^2 \cdot h$$
$$50 = \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot h$$
$$50 = \pi \cdot \frac{25}{4} \cdot h$$
$$h = \frac{50}{\pi \cdot \frac{25}{4}}$$
$$h = 50 \cdot \frac{4}{25\pi}$$
$$h = \frac{2 \cdot 4}{\pi}$$
$$h = \frac{8}{\pi}$$

Portanto, a altura desse reservatório mede $\frac{8}{\pi}$ m.

6. • Cálculo da medida do volume da lata mais baixa:

$$V_{lata\ mais\ baixa} = A_{base} \cdot h$$
$$V_{lata\ mais\ baixa} = \pi r^2 \cdot 4 = \pi \cdot 8^2 \cdot 4 = 256\pi$$

Portanto, o volume da lata mais baixa mede 256π cm^3.

• Cálculo da medida da altura do cilindro da lata mais alta:

Como as latas têm a mesma medida de volume, a lata mais alta também tem volume medindo 256π cm^3. Então:

$$V_{lata\ mais\ alta} = A_{base} \cdot h$$
$$256\pi = \pi r^2 \cdot h$$
$$256 = 6^2 \cdot h$$
$$256 = 36h$$
$$h = \frac{256}{36}$$
$$h \simeq 7{,}1$$

Portanto, a medida da altura do cilindro maior é, aproximadamente, 7,1 cm.

7. $V_{lata} = a \cdot b \cdot c$

$V_{lata} = 12 \cdot 24 \cdot 40 = 11\,520$

Portanto, a medida do volume da lata é 11 520 cm^3.

Como a medida do volume da nova lata será reduzido pela metade, ele será igual a 5 760 cm^3 $\left(\frac{11\,520}{2} = 5\,760\right)$.

Uma resposta possível seria manter as medidas da base desse bloco retangular e alterar apenas a medida da altura. Desse modo, a nova medida da altura é dada por:

$$V_{lata} = a \cdot b \cdot c$$
$$5\,760 = 12 \cdot 24 \cdot h$$
$$h = \frac{5\,760}{288}$$
$$h = 20$$

Portanto, a medida da altura da nova lata é 20 cm.

Logo, as medidas da nova lata são:

$$12 \text{ cm} \times 24 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$$

8. a) A medida do diâmetro ou do raio e a medida da altura da lata.

b) Deve-se representar em um desenho a lata que foi providenciada e indicar as medidas de seu diâmetro ou raio e de sua altura.

c) Resposta de acordo com as medidas obtidas da lata cilíndrica providenciada.

9. Para determinar a lata economicamente mais vantajosa para o consumidor, é preciso comparar a razão entre a medida do volume e o preço de cada uma delas.

• Lata 1: raio da base medindo 5 cm:

$$V_{lata_1} = \pi r^2 h$$
$$V_{lata_1} = \pi \cdot 5^2 \cdot h = 25h\pi$$
$$\frac{V_{lata_1}}{\text{preço}_1} = \frac{25h\pi}{6{,}85} \simeq 3{,}65h\pi$$

• Lata 2: raio da base medindo 8 cm:

$$V_{lata_2} = \pi r^2 h$$
$$V_{lata_2} = \pi \cdot 8^2 \cdot h = 64h\pi$$
$$\frac{V_{lata_2}}{\text{preço}_2} = \frac{64h\pi}{7{,}29} \simeq 8{,}78h\pi$$

Como a medida da altura h é igual para as duas latas, tem-se que a lata 2 é a mais vantajosa para o consumidor ($8{,}78 > 3{,}65$), pois oferece maior volume de extrato de tomate para cada real gasto.

10. • Volume da primeira peça (bloco retangular com orifício no formato de um cilindro)

$$V_{1^a\ peça} = V_{bloco\ retangular} - V_{cilindro} =$$
$$= a \cdot b \cdot c - (A_{base} \cdot h)$$
$$V_{1^a\ peça} = 10 \cdot 4 \cdot 3 - (\pi r^2 \cdot h) =$$
$$= 120 - (3{,}14 \cdot (0{,}75)^2 \cdot 3) =$$
$$= 120 - (3{,}14 \cdot 0{,}5625 \cdot 3) =$$
$$= 120 - 5{,}29875 = 114{,}70125 \simeq 114{,}70$$

Então, o volume da primeira peça mede, aproximadamente, 114,70 cm^3.

• Volume da segunda peça (cilindro com orifício no formato de um bloco retangular)

$$V_{2^a\ peça} = V_{cilindro} - V_{bloco\ retangular} =$$
$$= A_{base} \cdot h - a \cdot b \cdot c$$
$$V_{2^a\ peça} = \pi r^2 \cdot 3 - 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 3 =$$
$$= 3{,}14 \cdot (4{,}5)^2 \cdot 3 - 6{,}75 =$$
$$= 3{,}14 \cdot 20{,}25 \cdot 3 - 6{,}75 =$$
$$= 190{,}755 - 6{,}75 = 184{,}005 \simeq 184{,}01$$

Então, o volume da segunda peça mede, aproximadamente, 184,01 cm^3.

Portanto, a medida do volume da segunda peça é maior.

PÁGINA 246 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Respostas pessoais.
2. Resposta pessoal.
3. a) Significa a diferença entre a taxa em dezembro de 2021 e a taxa anterior, em dezembro de 2020, ou seja:

$$349{,}6\% - 327{,}8\% = 21{,}8\%$$

b) Inicialmente, determina-se quanto de juros essa pessoa vai pagar, sabendo que a taxa anual foi de 349,6%.

$$1\,000 \cdot \frac{349{,}6}{100} = 10 \cdot 349{,}6 = 3\,496$$

Agora, adiciona-se o valor que ela deixou de pagar com o juro obtido e encontra-se o valor dessa dívida.

$$1\,000 + 3\,496 = 4\,496$$

Logo, o valor da dívida é R$ 4 496,00.

4. Resposta pessoal.

PÁGINA 248 – INVESTIGAR

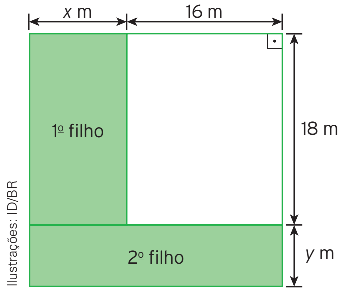
QUESTÕES PARA DISCUSSÃO

1. Resposta pessoal.
2. Respostas pessoais.
3. Resposta pessoal.

PÁGINA 250 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Alternativa **c**.

Consideram-se as medidas x e y, em metro, indicadas na figura a seguir.



Como o terreno é quadrado e a medida da área do terreno para cada filho é a mesma, tem-se:

$$\begin{cases} 16 + x = 18 + y \Rightarrow x = y + 2 \quad \text{(I)} \\ 18x = y(16 + x) \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$18(y + 2) = y(16 + y + 2)$$
$$18y + 36 = y(18 + y)$$
$$18y + 36 = 18y + y^2$$
$$y^2 = 36$$
$$y = 6$$

Observando a figura, tem-se que o lado do terreno quadrado mede $(18 + y)$ m, ou seja:

$$18 + 6 = 24$$

Logo, a medida do lado do terreno quadrado é 24 m.

2. **a)** Cálculo da medida da área de cada um dos terrenos

- Terreno I:

$$A_{I} = \frac{b \cdot h}{2}$$
$$A_{I} = \frac{25 \cdot 16}{2} = \frac{400}{2} = 200$$

Portanto, a medida da área do terreno I é igual a 200 m^2.

- Terreno II:

$$A_{II} = \frac{b \cdot h}{2}$$
$$A_{II} = \frac{15{,}5 \cdot 26}{2} = \frac{403}{2} = 201{,}5$$

Portanto, a medida da área do terreno II é igual a 201,5 m^2.

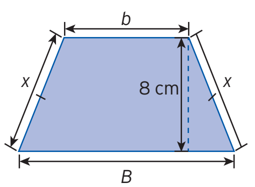
- Terreno III:

$$A_{III} = \frac{b \cdot h}{2}$$
$$A_{III} = \frac{29 \cdot 10{,}3}{2} = \frac{298{,}7}{2} = 149{,}35$$

Portanto, a medida da área do terreno III é igual a 149,35 m^2.

b) Resposta pessoal.

3. De acordo com o enunciado, tem-se o seguinte trapézio:



Sabendo que a medida da área desse trapézio é igual a 56 cm^2, tem-se:

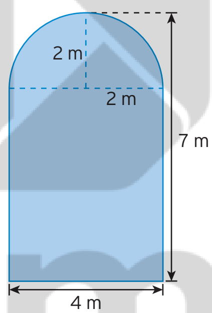
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$
$$56 = \frac{(B + b) \cdot 8}{2}$$
$$56 = (B + b) \cdot 4$$
$$B + b = \frac{56}{4}$$
$$B + b = 14$$

A medida do perímetro desse trapézio é igual a 34 cm, então:

$$x + B + x + b = 34$$
$$2x + B + b = 34$$
$$2x + 14 = 34$$
$$2x = 34 - 14$$
$$2x = 20$$
$$x = \frac{20}{2}$$
$$x = 10$$

Logo, os lados não paralelos do trapézio isósceles medem 10 cm cada um.

4. **a)** Decompõe-se a figura dada em duas figuras.

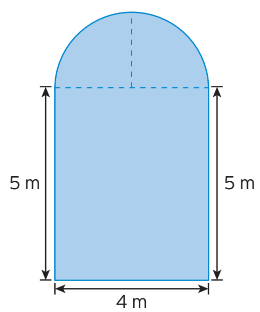


A primeira figura é um semicírculo de raio medindo 2 m. Logo, a medida de seu perímetro é igual à metade da medida do comprimento da circunferência (C) de raio medindo 2 m.

medida do perímetro do semicírculo =

$$= \frac{C}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r = 2\pi$$

A segunda figura tem o contorno com as medidas indicadas a seguir.



Logo, a medida do perímetro da segunda figura é 14 m (5 + 4 + 5 = 14).

Portanto, a medida do perímetro de cada vitral é $(14 + 2\pi)$ m.

b) A medida da área desse vitral é composta da medida da área de um semicírculo adicionada à medida da área de um retângulo.

- $A_{\text{semicírculo}} = \dfrac{\pi r^2}{2}$

  $A_{\text{semicírculo}} = \dfrac{\pi \cdot 2^2}{2} = \dfrac{4\pi}{2} = 2\pi$

- $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$

  $A_{\text{retângulo}} = 4 \cdot 5 = 20$

Logo, a medida da área do vitral é dada por:

$$A_{\text{vitral}} = A_{\text{semicírculo}} + A_{\text{retângulo}}$$
$$A_{\text{vitral}} = 2\pi + 20$$

Portanto, a medida da área de cada vitral é $(2\pi + 20)$ m^2.

5. Alternativa **e**.

O banheiro tem:

I. duas paredes retangulares medindo 2,6 m de altura por 3 m de largura;
II. duas paredes retangulares medindo 2,6 m de altura por 4 m;
III. um chão retangular medindo 4 m de comprimento por 3 m de largura;
IV. uma porta retangular medindo 2,2 m de altura e 1 m de largura;
V. uma janela retangular medindo 40 cm ou 0,4 m de altura por 60 cm ou 0,6 m de largura.

Encontra-se a medida da área de cada um desses itens.

- $A_{I} = 2 \cdot 2{,}6 \cdot 3 = 15{,}6$
- $A_{II} = 2 \cdot 2{,}6 \cdot 4 = 20{,}8$
- $A_{III} = 4 \cdot 3 = 12$
- $A_{IV} = 2{,}2 \cdot 1 = 2{,}2$
- $A_{V} = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$

A medida da área total do banheiro que o pedreiro deve azulejar é dada por:

$$A_{\text{total}} = A_{I} + A_{II} + A_{III} - A_{IV} - A_{V} =$$
$$= 15{,}6 + 20{,}8 + 12 - 2{,}2 - 0{,}24 = 45{,}96$$

Portanto, a medida da área total do banheiro a ser azulejada é 45,96 m^2.

Os azulejos que serão colocados são quadrados com lados medindo 20 cm cada um. Portanto, a medida da área de cada azulejo é igual a 400 cm^2 ($20^2 = 400$).

A medida da área do banheiro a ser azulejada é igual a 45,96 m^2, que equivalem a 459 600 cm^2. Então, serão necessários 1 149 azulejos quadrados $\left(\dfrac{459\,600}{400} = 1\,149\right)$ para realizar o trabalho.

Portanto, o pedreiro vai precisar de, no mínimo, 29 caixas $\left(\dfrac{1\,149}{40} = 28{,}725\right)$ de azulejos.

6. Alternativa **b**.

Cálculo da medida do volume do paralelepípedo:

$$V = 3 \cdot 18 \cdot 4 = 216$$

Logo, a medida do volume do paralelepípedo é 216 cm^3.

Como as medidas dos volumes são iguais, e chamando a medida da aresta do cubo de a, tem-se:

$$216 = a^3$$
$$a = 6$$

7. Alternativa **d**.

A medida do volume de madeira é obtida pela diferença entre as medidas de volume dos cubos.

$V_{\text{madeira}} = V_{\text{cubo maior}} - V_{\text{cubo menor}} = 12^3 - 8^3 = 1728 - 512 = 1216$

Portanto, a medida de volume de madeira é 1216 cm^3.

8. A lata de leite em pó tem formato cilíndrico, sua base tem raio medindo 5 cm e sua altura mede 12 cm. A medida de seu volume é dada por:

$$V_{\text{lata}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 300\pi$$

Portanto, a lata pode conter 300π cm^3 de leite em pó.

9. O bolo tem a forma de um cilindro de raio medindo 15 cm e altura medindo 10 cm. Então, a medida do seu volume é dada por:

$$V = A_{\text{base}} \cdot h = \pi r^2 \cdot 10 = \pi \cdot 15^2 \cdot 10 = \pi \cdot 225 \cdot 10 = 2250\pi$$

Portanto, a medida do volume ocupado pelo bolo é 2250π cm^3.

10. a)
- $V_{\text{primeira embalagem}} = A_{\text{base}} \cdot h$

  $V_{\text{primeira embalagem}} = \pi r^2 \cdot 8 = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = \pi \cdot 16 \cdot 8 = 128\pi$
- $V_{\text{segunda embalagem}} = A_{\text{base}} \cdot h$

  $V_{\text{segunda embalagem}} = \pi r^2 \cdot 10 = \pi \cdot 2^2 \cdot 10 = \pi \cdot 4 \cdot 10 = 40\pi$
- $V_{\text{terceira embalagem}} = A_{\text{base}} \cdot h$

  $V_{\text{terceira embalagem}} = \pi r^2 \cdot 9 = \pi \cdot (1,5)^2 \cdot 9 = \pi \cdot 2,25 \cdot 9 = 20,25\pi$

Comparando a medida do volume das três embalagens ($128\pi > 40\pi > 20,25\pi$), concluímos que a primeira embalagem contém o maior volume.

b) As medidas obtidas no item anterior estão todas em centímetro cúbico. Como 1 $cm^3 = 10^{-3}$ dm^3 e 1 dm^3 = 1 L, para $\pi = 3$, as medidas dos volumes são dadas por:

- $V_{\text{primeira embalagem}} = 128\pi = 128 \cdot 3 = 384$

  Portanto:

  $$384 \text{ cm}^3 = 384 \cdot 10^{-3} \text{ dm}^3 = 0,384 \text{ L}$$
- $V_{\text{segunda embalagem}} = 40\pi = 40 \cdot 3 = 120$

  Portanto:

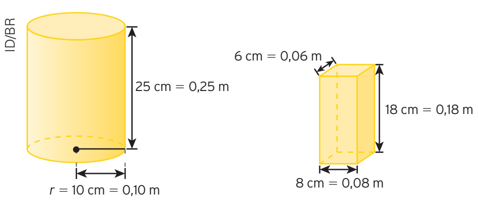
  $$120 \text{ cm}^3 = 120 \cdot 10^{-3} \text{ dm}^3 = 0,120 \text{ L}$$
- $V_{\text{terceira embalagem}} = 20,25\pi = 20,25 \cdot 3 = 60,75$

  Portanto:

  $$60,75 \text{ cm}^3 = 60,75 \cdot 10^{-3} \text{ dm}^3 = 0,06075 \text{ L}$$

Portanto, a medida de capacidade de cada embalagem é: 0,384 L; 0,120 L e 0,06075 L.

11. Inicialmente, vamos converter as unidades que estão em centímetro para metro.



a) Para descobrir a medida da altura alcançada pela água em cada um dos recipientes, é necessário encontrar a medida do volume e a medida da medida da área da base de cada um.

- Cilindro: $V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h$

  $$A_{\text{base}} = \pi r^2$$
  $$A_{\text{base}} = 3 \cdot (0,1)^2 = 3 \cdot 0,01 = 0,03$$

  Então, a medida da área da base do cilindro é 0,03 m^2.

  Se choveu 15 L por metro quadrado, então:

  $$\begin{array}{rcl} 1 \text{ m}^2 & \text{———} & 15 \text{ L} \\ 0,03 \text{ m}^2 & \text{———} & x \text{ L} \end{array}$$
  $$x = 15 \cdot 0,03 = 0,45$$

  Logo, em 0,03 m^2 choveu 0,45 L ou 0,00045 m^3.

  Portanto:

  $$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h$$
  $$0,00045 = 0,03h$$
  $$h = \frac{0,00045}{0,03}$$
  $$h = 0,015$$

  Assim, no cilindro, a medida da altura alcançada pela água foi 0,015 m.

- Bloco retangular: $V_{\text{bloco retangular}} = A_{\text{base}} \cdot h$

  $$A_{\text{base}} = b \cdot h$$
  $$A_{\text{base}} = 0,08 \cdot 0,06 = 0,0048$$

  Logo, a medida da área da base do bloco retangular é 0,0048 m^2.

  Se choveu 15 L por metro quadrado, então:

  $$\begin{array}{rcl} 1 \text{ m}^2 & \text{———} & 15 \text{ L} \\ 0,0048 \text{ m}^2 & \text{———} & x \text{ L} \end{array}$$
  $$x = 15 \cdot 0,0048 = 0,072$$

  Então, em 0,0048 m^2 choveu 0,072 L ou 0,000072 m^3.

  Portanto:

  $$V_{\text{bloco retangular}} = A_{\text{base}} \cdot h$$
  $$0,000072 = 0,0048h$$
  $$h = \frac{0,000072}{0,0048}$$
  $$h = 0,015$$

  Assim, no bloco retangular, a altura alcançada pela água foi 0,015 m.

b) Como 2,5 cm correspondem a 0,25 m, tem-se:

$$\begin{array}{rcl} 15 \text{ L por metro quadrado} & \text{———} & 0,015 \text{ m} \\ z \text{ L por metro quadrado} & \text{———} & 0,025 \text{ m} \end{array}$$
$$0,015z = 15 \cdot 0,025$$
$$0,015z = 0,375$$
$$z = \frac{0,375}{0,015}$$
$$z = 25$$

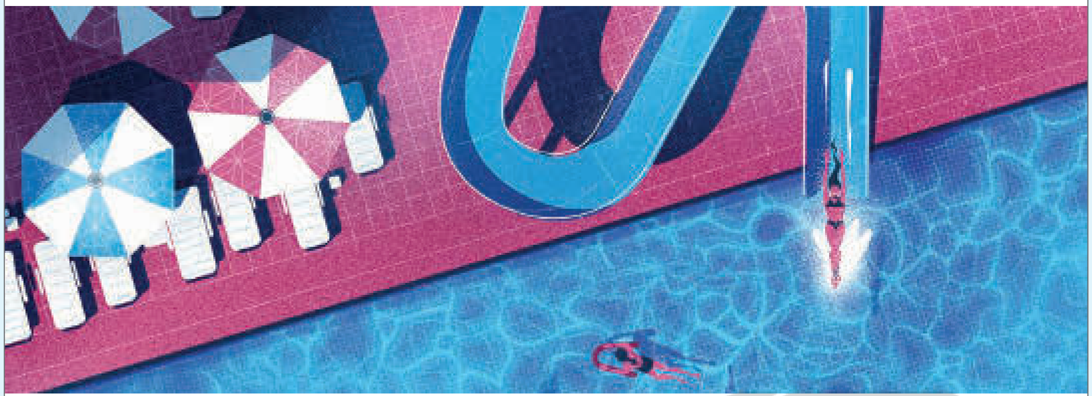
Portanto, havia chovido 25 L por metro quadrado.

12. Resposta pessoal.

GERAÇÃO ALPHA

Matemática 8

Ensino Fundamental | Anos finais | 8º ano
Componente curricular: Matemática



Carlos N. C. de Oliveira
Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP).
Especialista em Educação Matemática pelo Centro Universitário Fundação Santo André (FSA).
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).
Professor e coordenador de ensino de Matemática.

Felipe Fugita
Licenciado em Matemática pelo IME-USP.
Professor de Matemática.

Editora responsável: Isabella Semaan
Bacharela em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal do ABC (UFABC).
Editora e elaboradora de conteúdo para materiais didáticos.

Organizadora: SM Educação
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação.

São Paulo, 4ª edição, 2022

sm

***Geração Alpha* Matemática 8**

© SM Educação
Todos os direitos reservados

Direção editorial Cláudia Carvalho Neves
Gerência editorial Lia Monguilhott Bezerra
Gerência de *design* e produção André Monteiro
Edição executiva Isabella Semaan
Edição: Cármen Matricardi, Carolina Maria Toledo, Cristiano Oliveira da Conceição, Diana Maia, Eduardo Chavante, Luana Fernandes de Souza
Suporte editorial: Fernanda de Araújo Fortunato
Coordenação de preparação e revisão Cláudia Rodrigues do Espírito Santo
Preparação: Ana Paula Perestrelo, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares
Revisão: Ana Paula Perestrelo, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares
Apoio de equipe: Camila Lamin Lessa, Maria Clara Loureiro
Coordenação de *design* Gilciane Munhoz
***Design*:** Carla Almeida Freire, Tiago Stéfano, Victor Malta (Interação)
Coordenação de arte Andressa Fiorio
Edição de arte: Vitor Trevelin
Assistência de arte: Viviane Ayumi Yonamine
Assistência de produção: Júlia Stacciarini Teixeira
Coordenação de iconografia Josiane Laurentino
Pesquisa iconográfica: Camila D'Angelo, Fabio Matsuura
Tratamento de imagem: Marcelo Casaro
Capa João Brito/Gilciane Munhoz
Ilustração da capa: Denis Freitas
Projeto gráfico Rafael Vianna Leal
Pré-impressão Américo Jesus
Fabricação Alexander Maeda
Impressão

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Oliveira, Carlos N. C. de
Geração alpha matemática : 8º ano : ensino fundamental : anos finais / Carlos N. C. de Oliveira, Felipe Fugita ; editora responsável Isabella Semaan ; organizadora SM Educação ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação. — 4. ed. — São Paulo : Edições SM, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-65-5744-751-2 (aluno)
ISBN 978-65-5744-752-9 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Fugita, Felipe. II. Semaan, Isabella. III. Título.

22-111782 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

4ª edição, 2022

SM Educação
Avenida Paulista, 1842 – 18º andar, cj. 185, 186 e 187 – Condomínio Cetenco Plaza
Bela Vista 01310-945 São Paulo SP Brasil
Tel. 11 2111-7400
atendimento@grupo-sm.com
www.grupo-sm.com/br

Apresentação

Caro estudante,

Ser jovem no século XXI significa estar em contato constante com múltiplas linguagens, uma imensa quantidade de informações e inúmeras ferramentas tecnológicas. Isso ocorre em um cenário mundial que apresenta grandes desafios sociais, econômicos e ambientais.

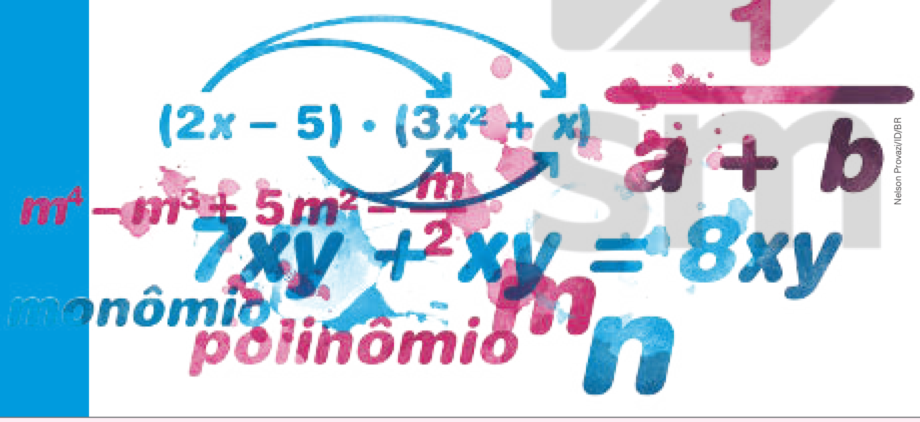
Diante dessa realidade, esta coleção foi cuidadosamente pensada para ajudar você a enfrentar esses desafios com autonomia e espírito crítico.

Atendendo a esse propósito, os textos, as imagens e as atividades nela propostos se configuram como oportunidades para que você reflita sobre o que aprende, expresse suas ideias e desenvolva habilidades de comunicação para as mais diversas situações de interação em sociedade.

Vinculados aos conhecimentos próprios de cada disciplina, são apresentados, em situações e atividades reflexivas, aspectos sobre valores universais, como justiça, respeito, solidariedade, responsabilidade, honestidade e criatividade. Esperamos, assim, contribuir para que você compartilhe dos conhecimentos construídos pela **Matemática** e os utilize para fazer escolhas responsáveis e transformadoras em sua vida.

Desejamos também que esta coleção contribua para que você se torne um jovem atuante na sociedade do século XXI, capaz de questionar a realidade em que vive e de buscar respostas e soluções para os desafios presentes e para os que estão por vir.

Equipe editorial



Nelson Provazi/ID/BR

3

Conheça seu livro

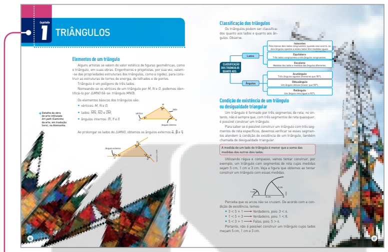
ABERTURA DE UNIDADE

No início de cada unidade, você é apresentado ao tema que vai estudar.

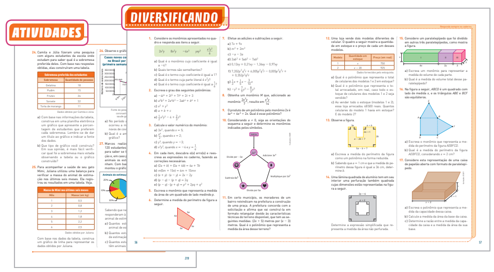
Uma imagem vai instigar sua curiosidade.

Primeiras ideias
Texto que explica a imagem e permite estabelecer relações com o que será estudado na unidade. Algumas questões vão incentivar você a contar o que sabe do assunto e a levantar algumas hipóteses sobre ele.

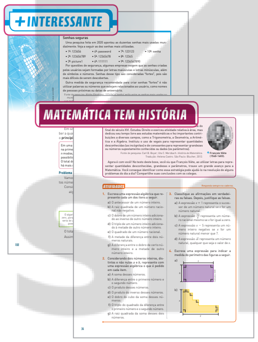
CAPÍTULOS



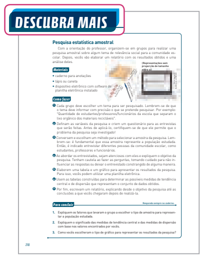
Abertura de capítulo
Textos, imagens e esquemas apresentam o conteúdo a ser estudado.



Atividades
As atividades vão ajudá-lo a desenvolver diferentes habilidades e competências. Após a apresentação dos conteúdos, vem a seção **Atividades**. E, no final de cada capítulo, há a seção **Diversificando**.

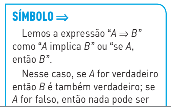


Os boxes **Matemática tem história** e **+Interessante** apresentam textos relacionados à história da Matemática e curiosidades.

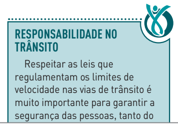


No boxe **Descubra mais**, você vai realizar atividades práticas e investigativas para aprender mais sobre o assunto estudado. Com os colegas, vai levantar hipóteses, desenvolver um trabalho investigativo ou de experimentação e elaborar conclusões.

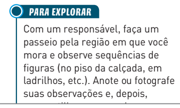
Boxes



Esses boxes retomam, complementam e ampliam o assunto em estudo.



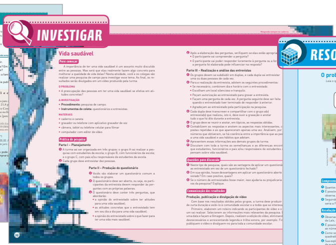
Valor
Apresenta temas e questões relacionados a valores humanos para você refletir e se posicionar.



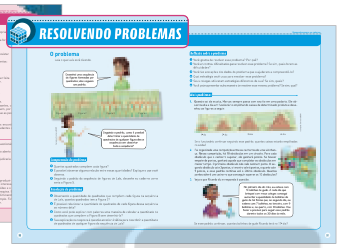
Para explorar
Oferecem indicações de livros, *sites* e passeios relacionados ao assunto.

FECHAMENTO DE UNIDADE

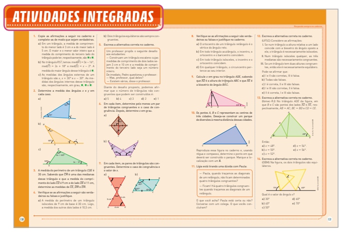
Ampliando horizontes
Essa seção consta no final de algumas unidades e, com base em temas relacionados à Educação Financeira, convida você a refletir sobre como nossos valores influenciam nossa vida.



Investigar
Em dois momentos do livro, você vai entrar em contato com diferentes metodologias de pesquisa, como entrevistas, observação de campo, etc.
Também vai desenvolver sua habilidade de comunicação ao compartilhar os resultados da investigação.

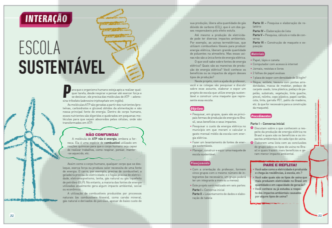


Resolvendo problemas
Com os problemas propostos, você vai desenvolver a compreensão e as estratégias de resolução, aliadas às habilidades de ler, representar informações diante de situações--problema e tomar decisões.



Atividades integradas
Essas atividades integram os assuntos da unidade. São uma oportunidade para você analisar o quanto aprendeu e refletir sobre os assuntos estudados.

FINAL DO LIVRO



Interação
Essa seção propõe um projeto coletivo cujo produto poderá ser destinado à comunidade escolar.

5

Sumário

Rogério Reis/Pulsar Imagens

Unidade 1 POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO ... 8

1. Potenciação ... 10
Potenciação de números racionais ... 10
Propriedades da potenciação ... 13
Simplificação de expressões ... 14
Notação científica ... 15
▪ **Diversificando** ... 17

2. Radiciação ... 18
Raiz quadrada de um número racional ... 18
Raiz cúbica de um número racional ... 20
Raiz enésima de um número racional ... 20
Potência com expoente racional ... 21
Propriedades dos radicais ... 23
▪ **Diversificando** ... 27

AMPLIANDO HORIZONTES: Pequenas atitudes, grandes oportunidades! ... 28
ATIVIDADES INTEGRADAS ... 30

Walt Disney Studios/LANDMARK MEDIA/Alamy/Fotoarena

Unidade 2 CÁLCULO ALGÉBRICO ... 32

1. Expressões algébricas ... 34
Situações que envolvem expressões algébricas ... 34
Valor numérico de uma expressão algébrica ... 37
▪ **Diversificando** ... 39

2. Polinômios ... 40
Monômios ... 40
Polinômios ... 46
▪ **Diversificando** ... 56

AMPLIANDO HORIZONTES: Convergente ou divergente: como é o meu consumo? ... 58
ATIVIDADES INTEGRADAS ... 60

Alexandre Schneider/EXEMPLUS/CPB

Unidade 3 EQUAÇÕES E SISTEMAS ... 62

1. Equações ... 64
Equação do 1º grau com uma incógnita ... 64
Equação do 1º grau com duas incógnitas ... 68
Equação do 2º grau com uma incógnita ... 73
▪ **Diversificando** ... 77

2. Sistemas de equações do 1º grau ... 78
Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas ... 78
Resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas ... 80
Solução de um sistema de equações do 1º grau por meio da representação gráfica ... 85
Classificação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas ... 85
▪ **Diversificando** ... 89

RESOLVENDO PROBLEMAS ... 90
ATIVIDADES INTEGRADAS ... 92

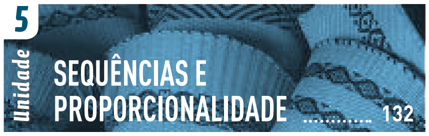
Jochen Tack/Alamy/Fotoarena

Unidade 4 TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS ... 94

1. Triângulos ... 96
Elementos de um triângulo ... 96
Classificação dos triângulos ... 97
Condição de existência de um triângulo ou desigualdade triangular ... 97
Relação entre um ângulo externo e dois ângulos internos não adjacentes ... 98
Cevianas de um triângulo ... 99
Mediatriz ... 103
Congruência de triângulos ... 105
Propriedades dos triângulos isósceles ... 108
▪ **Diversificando** ... 111

2. Quadriláteros ... 112
Elementos de um quadrilátero ... 112
Classificação dos quadriláteros ... 113
Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo ... 114
Paralelogramos ... 115
Trapézios ... 121
▪ **Diversificando** ... 125

AMPLIANDO HORIZONTES: Quem poderá nos defender? ... 126
INVESTIGAR: Escolhendo a melhor amostra ... 128
ATIVIDADES INTEGRADAS ... 130



Fábio Colombini/Acervo do fotógrafo

5 Unidade SEQUÊNCIAS E PROPORCIONALIDADE 132

1. Sequências 134
Sequências numéricas e sequências de figuras 134
▪ Diversificando 141

2. Proporcionalidade 142
Grandezas e sequências diretamente proporcionais 142
Grandezas e sequências inversamente proporcionais 146
Situações que não envolvem grandezas proporcionais 149
▪ Diversificando 151

AMPLIANDO HORIZONTES: Imprevistos acontecem 152

ATIVIDADES INTEGRADAS 154

Rubens Chaves/Pulsar Imagens

6 Unidade CONSTRUÇÕES E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS 156

1. Construções geométricas 158
Bissetriz 158
Mediatriz de um segmento 160
Construção de ângulos com régua e compasso 162
Polígonos regulares inscritos em uma circunferência 164
▪ Diversificando 171

2. Transformações geométricas no plano 172
Isometrias 172
Composição de transformações 175
▪ Diversificando 179

RESOLVENDO PROBLEMAS 180

ATIVIDADES INTEGRADAS 182

Andre Dib/Pulsar Imagens

7 Unidade PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA 184

1. Probabilidade 186
Árvore de possibilidades 186
Princípio fundamental da contagem 188
Probabilidade 190
▪ Diversificando 193

2. Estatística 194
Medidas de tendência central 194
Medidas de dispersão 198
Frequência absoluta e frequência relativa 203
Pesquisa estatística 208
Tipos de gráfico 213
▪ Diversificando 220

AMPLIANDO HORIZONTES: Agora já era! 222

ATIVIDADES INTEGRADAS 224

Mauricio Simonetti/Pulsar Imagens

8 Unidade GRANDEZAS E MEDIDAS 226

1. Áreas 228
Retomando a ideia de área 228
Área de um retângulo 229
Área de um quadrado 229
Área de um paralelogramo 230
Área de um triângulo 231
Área de um trapézio 232
Área de um losango 233
Área de um círculo 234
▪ Diversificando 237

2. Volumes e capacidades 238
Retomando as ideias associadas a volume e capacidade 238
Volume de um bloco retangular 239
Volume de um cubo 240
Volume de um cilindro 240
Relações entre unidades de medida de capacidade e de volume 242
▪ Diversificando 245

AMPLIANDO HORIZONTES: O mundo mágico dos cartões de crédito 246

INVESTIGAR: Vida saudável 248

ATIVIDADES INTEGRADAS 250

Interação: Escola sustentável 252

Lista de siglas e bibliografia 256

7

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
7 e 9.

Competências específicas de Matemática
2 e 3.

Temas Contemporâneos Transversais
Saúde, Ciência e Tecnologia, Meio Ambiente e Economia.

Habilidades

(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.

(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

UNIDADE 1

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

SOBRE A UNIDADE

Os conhecimentos desenvolvidos nesta unidade visam à ampliação e ao aprofundamento das operações com números racionais por meio do estudo da potenciação e de suas propriedades. São apresentadas diversas situações-problema, que possibilitam a construção de significados para essas operações e a promoção do protagonismo do estudante em relação à apropriação dos conhecimentos.

Além disso, as propriedades dessas operações, tal como abordadas, conduzem os estudantes à compreensão das generalizações, desenvolvendo o raciocínio lógico matemático, importante para o desenvolvimento das aprendizagens no ensino da Álgebra.

A representação de números muito pequenos ou muito grandes por meio da notação científica aparece de forma contextualizada, o que contribui para uma aprendizagem eficaz e significativa.

O estudo da radiciação se dá por meio da relação de operação inversa da potenciação e da representação das raízes como uma potência de expoente fracionário.

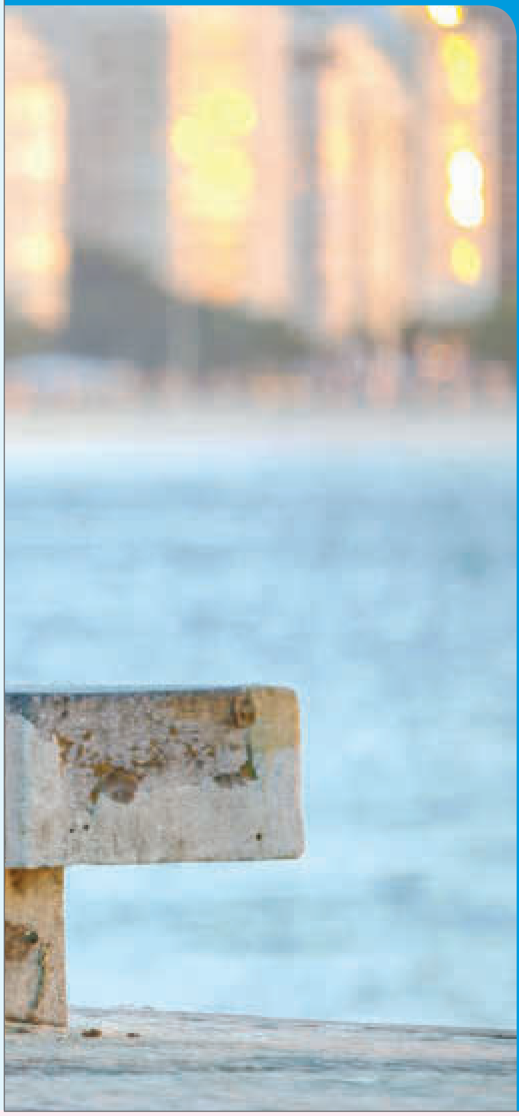
(IN)FORMAÇÃO

De acordo com a Organização Pan-Americana da Saúde (Opas), em 31 de dezembro de 2019 a Organização Mundial da Saúde (OMS) recebeu uma notificação sobre diversos casos de pneumonia na cidade de Wuhan, na China. Logo em seguida, na primeira semana de janeiro de 2020, as autoridades chinesas confirmaram que haviam identificado um novo tipo de coronavírus, o SARS-CoV-2, até então não identificado em seres humanos.

No fim de janeiro de 2020, a OMS declarou que o surto do novo coronavírus se enquadrava como uma Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional (ESPII), que configura o mais alto nível de alerta da Organização.

CAPÍTULO 1
Potenciação

CAPÍTULO 2
Radiciação



Rogério Reis/Pulsar Imagens

← Estátua do poeta Carlos Drummond de Andrade com máscara de proteção contra o coronavírus, no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2021.

PRIMEIRAS IDEIAS

Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS), até o final de fevereiro de 2022, o mundo havia acumulado um total de 444 066 247 casos confirmados de covid-19. Durante a pandemia, a máscara de proteção se tornou indispensável. Para incentivar o uso das máscaras, muitos monumentos ao redor do mundo receberam esse acessório.

1. **O mícron é uma unidade de medida de comprimento que equivale à milésima parte do milímetro. O vírus causador da covid-19 chama-se SARS-CoV-2 e pode ter até 0,1 mícron de diâmetro. No caderno, escreva essa medida em milímetro.**
2. **O número obtido na atividade anterior pode ser representado como uma potência de base $\frac{1}{10}$. Nesse caso, qual é o expoente dessa potência? Como você pensou para responder a essa pergunta?**

PRIMEIRAS IDEIAS

- Peça aos estudantes que observem a foto e a legenda para que identifiquem o local em que ela foi tirada. Pergunte se conhecem esse monumento e se já tiveram a oportunidade de vê-lo pessoalmente.
- Pergunte também a eles se sabem por que o monumento estava com máscara respiratória. Verifique o que eles sabem em relação à pandemia de covid-19. Em seguida, peça que leiam o texto para ter mais informações sobre esse assunto.
- Solicite aos estudantes que, considerando que a medida do diâmetro do vírus SARS-CoV-2 corresponde a um terço da capacidade de filtração da máscara do tipo PFF2 e que as partículas desse vírus são encontradas envoltas em gotículas respiratórias com medida de diâmetro entre 0,001 mm e 0,004 mm, respondam se essas gotículas podem ser filtradas por esse tipo de máscara. Espera-se que eles percebam que, como 0,001 mm = = 1 mícron e 0,004 mm = 4 mícron, a máscara do tipo PFF2 consegue filtrar as gotículas respiratórias.

RESPOSTAS

1. 0,1 mícron equivale a um décimo de milésimo de milímetro, ou seja, 0,0001 mm.
2. Expoente 4, pois:

$$0{,}0001 \text{ mm} = \frac{1}{10\,000} = \left(\frac{1}{10}\right)^4.$$

Resposta pessoal.

DE OLHO NA BASE

Compreender que as máscaras respiratórias podem filtrar partículas, utilizando como recurso os conhecimentos matemáticos, auxilia os estudantes no desenvolvimento do espírito de investigação, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 2**.

Até então, esse alerta havia sido emitido em apenas cinco ocasiões:

- 25 de abril de 2009: pandemia de H1N1;
- 5 de maio de 2014: disseminação internacional de poliovírus;
- 8 de agosto de 2014: surto de ebola na África Ocidental;
- 1º de fevereiro de 2016: vírus zika e aumento de casos de microcefalia e outras malformações congênitas;
- 18 de maio de 2018: surto de ebola na República Democrática do Congo.

Em 11 de março de 2020, a covid-19, doença causada pelo SARS-CoV-2, foi caracterizada como pandemia. Vale ressaltar que o termo "pandemia" não está relacionado com a gravidade da doença, mas sim com uma questão geográfica.

No Brasil, assim como na maior parte do mundo, para conter o avanço da doença e amenizar o impacto no sistema de saúde, foram adotadas, em um primeiro momento, medidas de isolamento social. Estabelecimentos que prestavam serviços caracterizados como não essenciais (estádios de futebol, cinemas, escolas, teatros, igrejas, lojas, entre outros) foram fechados e os hábitos tiveram de ser rapidamente modificados para que as pessoas trabalhassem (no caso de serviços considerados não essenciais) e estudassem de maneira remota. Depois, também foi adotado o uso obrigatório de máscaras individuais para reduzir o contágio. Muitos eventos importantes, como as Olimpíadas de Tóquio, foram adiados, cancelados ou transformados em eventos virtuais.

Em 2021, após o desenvolvimento de algumas vacinas, teve início o processo de vacinação. No Brasil, até 24 de maio de 2022, mais de 667 mil pessoas haviam morrido de covid-19, e o número de casos confirmados já passava dos 31 milhões.

Fontes de pesquisa: WHO. Disponível em: https://www.who.int/pt; Opas. Disponível em: https://www.paho.org/pt/brasil. Acessos em: 31 maio 2022.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Potenciação de números racionais.
- Propriedades da potenciação.
- Notação científica.

Objetivos

- Ampliar os conhecimentos sobre potenciação.
- Ampliar as propriedades da potenciação para os números racionais.
- Calcular potências de números racionais com expoentes inteiro e fracionário.
- Utilizar cálculos com potências de números racionais para resolver problemas.
- Simplificar expressões que envolvem potenciação.
- Escrever números em notação científica.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo da potenciação, compreendendo as propriedades dessa operação que envolve números racionais. Além disso, terão condições de representar números usando a notação científica. Esses conhecimentos são abordados por meio de situações que favorecem a compreensão dos estudantes e contribuem com o repertório matemático para a resolução de problemas.

POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

- Aproveite o texto de abertura deste capítulo para conversar com os estudantes sobre o uso de células, como o de células-tronco, para estabelecer relações entre a produção científica e o papel delas na sociedade atual em relação a pesquisas e procedimentos terapêuticos. Informe a eles que o uso dessa tecnologia na área da saúde tem sido estudado para o tratamento de diversas doenças, como a covid-19 ou doenças incuráveis. Comente que esse estudo tem o objetivo de utilizar as células-tronco para renovar as células que passam por algum processo inflamatório. Pergunte a eles se conhecem outros benefícios do uso da tecnologia na área da saúde que contribui para melhorar a qualidade de vida da população. Dessa maneira, eles podem compreender o conhecimento científico para agir crítica e eticamente com base em argumentos científicos para defender suas ideias no contexto em que estão inseridos atualmente. Essa proposta desenvolve os **Temas Contemporâneos Transversais** Saúde e Ciência e Tecnologia, que pertencem às macroáreas **Saúde** e **Ciência e Tecnologia**.
- Essa temática que envolve a divisão celular e a potenciação permite uma abordagem interdisciplinar com o componente curricular Ciências, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF08CI07** [Comparar diferentes processos reprodutivos em plantas e animais em relação aos mecanismos adaptativos e evolutivos.].

Capítulo **1**

POTENCIAÇÃO

Para desenvolver os conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes dominem os conteúdos relacionados à multiplicação e à potenciação de números naturais.

Potenciação de números racionais

Todos os seres vivos são compostos de unidades básicas chamadas células. As células são fundamentais para qualquer organismo, seja ele unicelular (formado por apenas uma célula) ou pluricelular (formado por mais de uma célula).

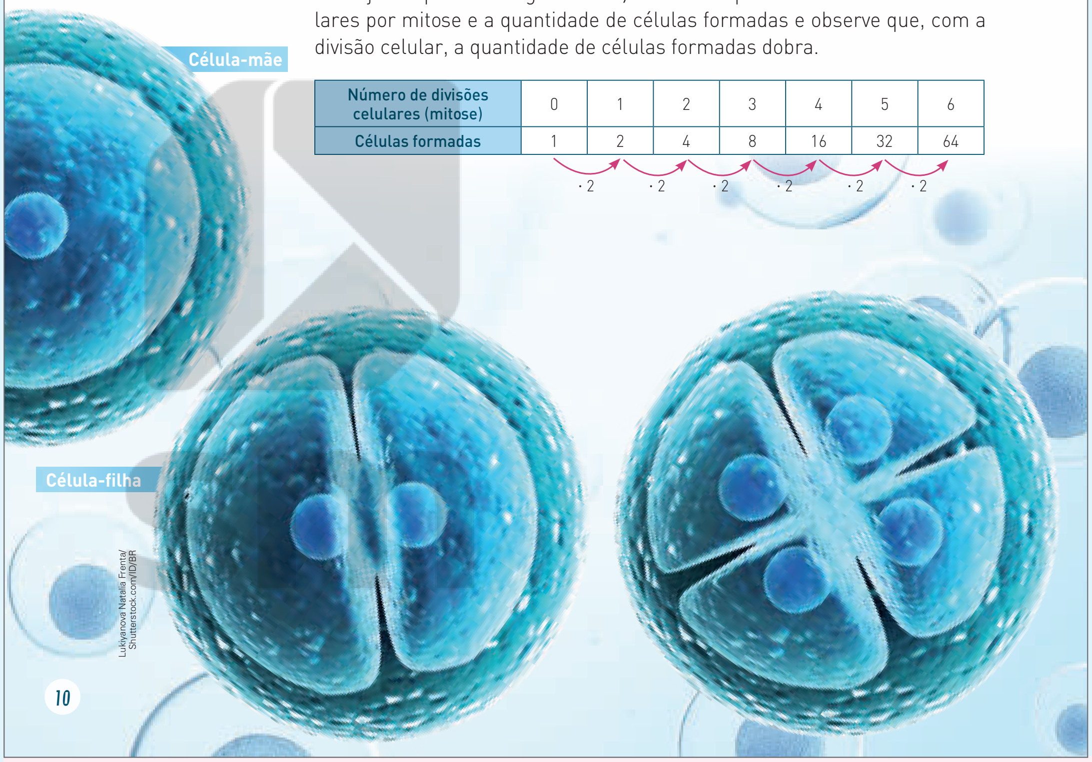
As células apresentam a capacidade de se dividir e, por meio desse mecanismo, os organismos pluricelulares crescem, repõem células mortas ou danificadas e se reproduzem.

Existem dois tipos de divisão celular: a mitose e a meiose. Nos organismos pluricelulares, a mitose é o processo de divisão celular responsável pelo crescimento do organismo e pela reposição de células mortas ou danificadas. Nesse processo, a célula-mãe se divide em duas células, dando origem às células-filhas, que são iguais à célula-mãe.

Veja no quadro a seguir a relação entre a quantidade de divisões celulares por mitose e a quantidade de células formadas e observe que, com a divisão celular, a quantidade de células formadas dobra.

Número de divisões celulares (mitose)	0	1	2	3	4	5	6
Células formadas	1	2	4	8	16	32	64

$\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$ $\cdot 2$



Representação do processo de reprodução celular por mitose. Como cada célula se divide em duas, na segunda divisão celular ela tem 4 células ($2^2 = 4$).

Lukiyanova Natalia Frenta/Shutterstock.com/ID/BR

10

(IN)FORMAÇÃO

O triângulo de Fibonacci

Segundo Dantzig (1970), Fibonacci usa o seu triângulo aritmético como uma estratégia algorítmica para apresentar a sua prova da identidade $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$. Para tanto, dispôs os inteiros ímpares consecutivos em uma sequência triangular:

									1	1^3
								3	5	2^3
							7	9	11	3^3
						13	15	17	19	4^3
					21	23	25	27	29	5^3
				31	33	35	37	39	41	6^3
			43	45	47	49	51	53	55	7^3
		57	59	61	63	65	67	69	71	8^3
	73	75	77	79	81	83	85	87	89	9^3
91	93	95	97	99	101	103	105	107	109	10^3

Para representar a relação entre o número de divisões celulares e a quantidade de células formadas, podemos usar operação de **potenciação**. Veja como representar a quantidade de células após 20 divisões celulares usando a potenciação.

$$\underbrace{2}_{\text{base}}{}^{\overbrace{20}^{\text{expoente}}} = \underbrace{1\,048\,576}_{\text{potência}}$$

A base é o fator que se repete, o expoente indica o número de vezes que a base se repete e a potência é o resultado da operação.

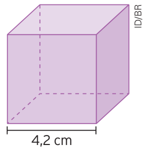
Potência com expoente inteiro natural

Sabendo que um cubo tem lado de medida igual a 4,2 cm, qual é a medida do volume desse cubo?

A medida V do volume do cubo é igual à medida ℓ de sua aresta elevada ao cubo. Assim, temos:

$$V = \ell^3 = (4{,}2)^3 = 4{,}2 \cdot 4{,}2 \cdot 4{,}2 = 74{,}088$$

Portanto, a medida do volume desse cubo é 74,088 cm^3.



Potências de expoente 1

Potências cuja base é um número racional e cujo expoente é 1 têm resultado igual à própria base.

$$\boxed{a^1 = a, \text{ com } a \in \mathbb{Q}}$$

Exemplos

A. $(-2{,}1)^1 = -2{,}1$

B. $\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$

Potências de expoente zero

Potências cuja base é um número racional diferente de zero e cujo expoente é zero têm resultado igual a 1.

$$\boxed{a^0 = 1, \text{ com } a \in \mathbb{Q}^*}$$

Exemplos

A. $(4{,}1)^0 = 1$

B. $\left(\frac{7}{5}\right)^0 = 1$

Potências de expoente natural maior que 1

Potências cuja base é um número racional e cujo expoente é um número natural maior que 1 têm resultado igual ao produto dessa base por ela mesma tantas vezes quanto indicar o expoente.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}, \text{ com } a \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1$$

O triângulo de Fibonacci tem seus elementos distribuídos na forma de uma progressão aritmética e aponta várias evidências aritméticas geradas da soma de cada sequência parcial, composta dos ímpares consecutivos de cada linha. Neste sentido, podemos apontar algumas relações numéricas extraídas do referido triângulo.

A soma de cada linha do triângulo dá como resultado o cubo do número de elementos de cada linha, bem como o cubo do número da linha. Na linha 2, por exemplo, $2^3 = 3 + 5$; na linha 3, temos como resultado $3^3 = 7 + 9 + 11$. Na linha 4, $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$. No mesmo processo aritmético, a linha 5 nos mostra que $5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$. Nota-se, daí, que a sequência de números ímpares, a partir do 1, é distribuída no triângulo de modo a completar o número de casas que compõem cada uma das linhas.

Mendes, I. A. *Investigação histórica no ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009. p. 166-167.

DE OLHO NA BASE

Compreender o conceito de potenciação por meio do processo de divisão celular auxilia os estudantes na compreensão das relações entre conceitos e procedimentos de Matemática e de outras áreas, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

- A potenciação é uma operação que tem sido objeto de conhecimento desde o 6º ano. Em um primeiro momento, os estudantes apropriaram-se dessa operação apenas com números naturais e, depois, com os racionais positivos e os expoentes naturais. Agora, esses conhecimentos são aprofundados, passando a envolver também os números racionais negativos e os expoentes inteiros negativos.
- Converse com os estudantes sobre o significado dos termos na representação de uma potência, explicando a eles que o expoente indica quantas vezes a base será multiplicada. Assim, 2^{20} nos mostra que a base 2 será multiplicada por ela mesma 20 vezes. Essa abordagem pode auxiliar os estudantes a compreender que essa operação permite simplificar uma escrita multiplicativa.
- Em relação ao expoente zero, uma maneira de explicar o resultado 1 pode ser por meio da observação da regularidade em sequências, como mostra o exemplo a seguir.

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
32	16	8	4	2	1

÷ 2 ÷ 2 ÷ 2 ÷ 2 ÷ 2

OUTRAS FONTES

Mendes, I. A. A investigação histórica na formação de professores de Matemática. *Revista Cocar*, v. 4, n. 7, 2010. Disponível em: https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/37. Acesso em: 9 jun. 2022.

Esse artigo aborda as possibilidades de uso da investigação histórica como um reorganizador didático e conceitual da Matemática escolar na formação inicial e continuada de um grupo de professores de Matemática. Segundo o autor, esse tipo de investigação pode contribuir para que os estudantes se familiarizem com o uso de referências bibliográficas como agente de compreensão do desenvolvimento histórico-epistemológico da Matemática, além de ganharem autonomia para trabalhar de maneira independente na construção da própria aprendizagem e desenvolverem o espírito investigatório, bem como habilidades de organizar, analisar e apresentar resultados de seus projetos de pesquisa por meio do exercício de comunicação oral de suas ideias, apresentação visual e escrita.

- Em relação às potências de base racional positiva, se julgar necessário, retome a multiplicação de números na forma decimal e na forma fracionária. Do mesmo modo, sobre as potências de base racional negativa, se for preciso, proponha aos estudantes atividades que permitam a eles compreender que em uma potência cuja base é um número racional negativo: se o expoente for par, o resultado será um número positivo e, se for ímpar, ele será negativo. Para que os estudantes percebam a regularidade nos resultados, utilize, por exemplo, a potência de base (-1), como mostrado a seguir.
  - $(-1)^1 = -1$
  - $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
  - $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
  - $(-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$
  - $(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
  - $(-1)^6 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$
  - $(-1)^7 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
  - $(-1)^{10} = 1$
  - $(-1)^{15} = -1$
  - $(-1)^{101} = -1$
  - $(-1)^{102} = 1$
- Explique aos estudantes as características das potências com expoente inteiro negativo, de modo que compreendam por que seus resultados são sempre números inversos à base, como: $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$; $4^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$; $10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3$; etc. A observação da regularidade na obtenção de sucessivas potências pode favorecer essa compreensão.

2^3	8	
		÷ 2
2^2	4	
		÷ 2
2^1	2	
		÷ 2
2^0	1	
		÷ 2
2^{-1}	$\frac{1}{2^1}$	
		÷ 2
2^{-2}	$\frac{1}{2^2}$	
		÷ 2
2^{-3}	$\frac{1}{2^3}$	

- Na atividade **3**, os estudantes podem escrever os números na forma decimal ou na forma fracionária. É importante que eles percebam que nos itens **a** e **b** é mais rápido realizar os cálculos com números fracionários.
- Na atividade **5**, caso necessário, relembre aos estudantes que, para qualquer n par, o resultado de $(-1)^n$ será 1 e, para todo n ímpar, ele será -1 e, para todo n, o resultado de 1^n será 1.

Potência de base racional positiva

Toda potência de base racional positiva e expoente natural é um número positivo.

Exemplos

A. $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$

B. $(0,6)^2 = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$

Potência de base racional negativa

Toda potência de base racional negativa e expoente natural par é um número positivo.

Exemplos

A. $(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$

B. $(-1,3)^2 = (-1,3) \cdot (-1,3) = 1,69$

Toda potência de base racional negativa e expoente natural ímpar é um número negativo.

Exemplos

A. $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

B. $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32}$

Potência com expoente inteiro negativo

Toda potência de base racional diferente de zero e expoente inteiro negativo é dada por $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Exemplos

A. $(-9)^{-2} = \left(-\frac{1}{9}\right)^2 = \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{81}$

B. $(0,1)^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = (10)^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Considere a seguinte situação:
- Em um estacionamento, há 4 carros.
- Cada carro tem 4 rodas.
- Cada roda tem 4 parafusos.

Expresse com uma potência a quantidade de parafusos nas rodas dos 4 carros e escreva essa quantidade. **4^3, ou seja, 64 parafusos.**

2. Calcule as potências a seguir.

a) $(-0,3)^2$ **0,09**

b) $(-6)^{-3}$ **$-\frac{1}{216}$**

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^5$ **$-\frac{243}{1\,024}$**

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$ **16**

e) $(2,5)^{-3}$ **$\frac{8}{125}$**

f) $(-4,8)^{-2}$ **$\frac{25}{576}$**

3. Determine o valor de cada expressão.

a) $\left(1\frac{1}{4}\right)^2 + (-0,25)^2$ **$\frac{13}{8}$**

b) $(-0,25)^2 : (-0,75)^2$ **$\frac{1}{9}$**

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^0$ **4**

4. Calcule o valor da expressão a seguir.

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$ **79**

5. Determine o valor da expressão:

$(-1)^n + 1^n - [-(1^n)] - 1^n$

a) para n par; **2**

b) para n ímpar. **0**

Propriedades da potenciação

Vamos estudar as propriedades da potenciação para os números racionais quando a base é um número racional diferente de zero e os expoentes são números inteiros.

1ª propriedade

Para calcular um produto de potências de mesma base, mantemos a base e adicionamos os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ com } a \in \mathbb{Q}^* \text{ e } m \text{ e } n \in \mathbb{Z}$$

Exemplos

A. $2^{-1} \cdot 2^{-2} = 2^{(-1)+(-2)} = 2^{-3}$

B. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^{(-3)+7} = \left(\frac{4}{7}\right)^{4}$

C. $(6{,}1)^5 \cdot (6{,}1)^4 = (6{,}1)^{5+4} = (6{,}1)^9$

D. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{(-2)+(-3)} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-5}$

2ª propriedade

Para calcular o resultado de uma divisão de potências de mesma base, mantemos a base e subtraímos o expoente do divisor do expoente do dividendo.

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ com } a \in \mathbb{Q}^* \text{ e } m \text{ e } n \in \mathbb{Z}$$

Exemplos

A. $\left(\frac{1}{3}\right)^{4} : \left(\frac{1}{3}\right)^{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{4-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1}$

B. $(5{,}2)^{-2} : (5{,}2)^{-4} = (5{,}2)^{(-2)-(-4)} = (5{,}2)^2$

C. $\left(-\frac{3}{8}\right)^{4} : \left(-\frac{3}{8}\right)^{8} = \left(-\frac{3}{8}\right)^{4-8} = \left(-\frac{3}{8}\right)^{-4}$

D. $a^3 : a^2 = a^{3-2} = a^1$

Observe que também podemos escrever:

$a^3 : a^2 = (a \cdot a \cdot a) : (a \cdot a) = a$

Logo, $a^1 = a$.

PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

- A abordagem dos conhecimentos relativos às propriedades da potenciação para os números inteiros considera que os estudantes já tenham se apropriado dos conteúdos desse tema em relação aos números racionais positivos. Portanto, esse é o momento em que os conhecimentos construídos são aprofundados e ampliados. Além disso, é uma oportunidade de desenvolver o raciocínio lógico-matemático por meio da investigação das propriedades da potenciação.
- Antes de apresentar as propriedades desta página, retome com os estudantes as propriedades da potenciação com números naturais perguntando, por exemplo, se eles sabem explicar por que na multiplicação de potências de mesma base os expoentes devem ser adicionados e, na divisão de potências de mesma base, os expoentes devem ser subtraídos.

  Espera-se que os estudantes respondam a essas questões utilizando exemplos:
  - $2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$
  - $\frac{3^4}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 3 \cdot 3 = 3^2$

- Nas 3ª, 4ª e 5ª propriedades, respectivamente, potência de potência, potência de um produto e potência de um quociente, também pode ser aplicado o mesmo raciocínio das 1ª e 2ª propriedades. Elas podem ser explicadas com base nos exemplos a seguir.
  - $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) =$
    $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$
  - $(2 \cdot 3)^2 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 =$
    $= 2^2 \cdot 3^2$
  - $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^3}{3^3}$

SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES

- Explique aos estudantes que a simplificação das expressões ocorre pela transformação dos números em potência de base iguais e pela aplicação das propriedades de potência.

3ª propriedade

Para calcular uma potência elevada a um expoente, mantemos a base e multiplicamos os expoentes.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \text{ com } a \in \mathbb{Q}^* \text{ e } m \text{ e } n \in \mathbb{Z}}$$

Exemplos

A. $(3^4)^3 = 3^{4 \cdot 3} = 3^{12}$

B. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{5 \cdot 2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}$

C. $[(1{,}5)^2]^2 = (1{,}5)^{2 \cdot 2} = (1{,}5)^4$

D. $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\right]^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{(-2) \cdot 3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-6}$

4ª propriedade

Para calcular a potência de uma multiplicaçao de dois ou mais fatores, elevamos cada fator da multiplicação ao expoente da potência.

$$\boxed{(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m, \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{Q}^* \text{ e } m \in \mathbb{Z}}$$

Exemplos

A. $(3 \cdot 5)^3 = 3^3 \cdot 5^3 = 27 \cdot 125 = 3375$

B. $(2{,}5 \cdot 3{,}1)^2 = (2{,}5)^2 \cdot (3{,}1)^2 = 6{,}25 \cdot 9{,}61 = 60{,}0625$

C. $\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{3}\right)^5 = \left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^5 = \frac{1}{3125} \cdot \frac{32768}{243} = \frac{32768}{759375}$

5ª propriedade

Para calcular a potência de uma divisão, elevamos o dividendo e o divisor ao expoente da potência.

$$\boxed{(a : b)^m = a^m : b^m, \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{Q}^* \text{ e } m \in \mathbb{Z}}$$

Exemplos

A. $(6 : 4)^3 = 6^3 : 4^3 = 216 : 64 = 3{,}375$

B. $\left(\frac{1}{4} : \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 : \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} : \frac{6}{4} = \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{24}$

Simplificação de expressões

Algumas expressões podem ser simplificadas reescrevendo seus números em forma de potência, transformando-os em potências de bases iguais e aplicando as propriedades das potências.

Exemplos

A. $\frac{1024 : 32}{4 \cdot 16} + 8 = \frac{2^{10} : 2^5}{2^2 \cdot 2^4} + 8 = \frac{2^5}{2^6} + 8 = 2^{-1} + 8 = \frac{1}{2} + 8 = \frac{1 + 16}{2} = \frac{17}{2}$

B. $\frac{3^5 \cdot 27^2 \cdot 9^{-4}}{3^4 \cdot 81^{-2} \cdot 243^0} = \frac{3^5 \cdot (3^3)^2 \cdot (3^2)^{-4}}{3^4 \cdot (3^4)^{-2} \cdot 1} = \frac{3^5 \cdot 3^6 \cdot 3^{-8}}{3^4 \cdot 3^{-8}} = \frac{3^3}{3^{-4}} = 3^7$

C. $\frac{(a^2 \cdot b^5)^5}{(a^3 \cdot b^5)^2} = \frac{(a^2)^5 \cdot (b^5)^5}{(a^3)^2 \cdot (b^5)^2} = \frac{a^{10} \cdot b^{25}}{a^6 \cdot b^{10}} = a^4 \cdot b^{15}$

Notação científica

Para escrever números muito grandes ou muito pequenos, é comum usar potências de base 10 para representá-los. Veja um exemplo.

As menores células já conhecidas são as das bactérias, que podem ter a medida de seu comprimento entre 0,000002 m e 0,000005 m.

Podemos escrever esses mesmos números como $2 \cdot 10^{-6}$ m e $5 \cdot 10^{-6}$ m, respectivamente.

Quando um número é representado por um produto de dois fatores, sendo um deles um número maior ou igual a 1 e menor que 10 e o outro uma potência de 10, dizemos que esse número está escrito em notação científica.

Exemplos

A. Medida da massa aproximada de uma célula:
0,000000001 g ou $1 \cdot 10^{-9}$ g ou $1{,}0 \cdot 10^{-12}$ kg

B. Idade aproximada do Universo:
13 700 000 000 anos ou $1{,}37 \cdot 10^{10}$ anos

C. Medida da área aproximada da superfície da Terra:
510 000 000 km² ou $5{,}1 \cdot 10^{8}$ km²

6. a) Verdadeira.
b) Falsa. As potências de base negativa e expoente par são positivas.
c) Verdadeira.
d) Falsa. As potências de base positiva e expoente ímpar são sempre positivas.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

6. Verifique se as sentenças a seguir são verdadeiras. Se existirem afirmações falsas, corrija-as.

a) A base de uma potência de expoente natural maior que 1 é o fator que se repete na multiplicação.

b) As potências de base negativa e expoente par são negativas.

c) As potências de base negativa e expoente ímpar são negativas.

d) As potências de base positiva e expoente ímpar são negativas.

7. Utilize as propriedades de potências de mesma base e exprima o valor das expressões na forma de uma única potência.

a) $\left(-\frac{3}{7}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^4$ $\mathbf{\left(-\frac{3}{7}\right)^7}$

b) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-5}$ $\mathbf{\left(-\frac{1}{5}\right)^{-8}}$

c) $2^{-9} : 2$ $\mathbf{2^{-10}}$

d) $[(14{,}9)^{15}]^2$ $\mathbf{14{,}9^{30}}$

e) $(-1{,}1) \cdot (-1{,}1)^{-3} \cdot (-1{,}1)^{-2}$ $\mathbf{(-1{,}1)^{-4}}$

f) $\left(\frac{1}{11}\right) \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^{-13} : \left(\frac{1}{11}\right)^{11}$ $\mathbf{\left(\frac{1}{11}\right)^{-23}}$

g) $[(10)^{-4}]^3 \cdot 10^3$ $\mathbf{10^{-9}}$

h) $[(0{,}5)^4 : (0{,}5)^{-9}]^2 : (0{,}5)^{-5}$ $\mathbf{0{,}5^{31}}$

i) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^3 : \left(\frac{3}{5}\right)^{-4}\right]^{-2}$ $\mathbf{\left(\frac{5}{3}\right)^{14}}$

8. Copie as sentenças no caderno, substituindo o símbolo ● por um número que torne cada sentença verdadeira.

a) $(4^6)^{●} = 4^{36}$ **6**

b) $7^2 : 7^{●} = 7^{-3}$ **5**

c) $(2^{●})^1 = 8$ **3**

d) $3^{●} \cdot 3^7 = 3^9$ **2**

9. Leia a afirmação a seguir.

> Para qualquer valor inteiro de n, a expressão $(-5)^{2n}$ é negativa.

Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Se for falsa, corrija-a no caderno.

10. Sendo $a = 2^{-3}$, $b = 2^2$ e $c = 2^5$, determine em forma de potência cada uma das expressões a seguir.

a) $a \cdot b \cdot c$ $\mathbf{2^4}$

b) $a^3 \cdot c^3$ $\mathbf{2^6}$

c) $\frac{a \cdot b}{c}$ $\mathbf{\left(\frac{1}{2}\right)^6}$

d) $(b \cdot c) : a$ $\mathbf{2^{10}}$

9. Falsa. Correção possível: Para qualquer valor inteiro de n, a expressão $(-5)^{2n}$ é positiva.

NOTAÇÃO CIENTÍFICA

- Nesta página, os estudantes terão o primeiro contato com a notação científica, que será retomada no 9º ano e será bastante utilizada ao longo do Ensino Médio.
- Ao corrigir a atividade **9**, comente com os estudantes que a expressão é positiva, pois o expoente sempre será par, uma vez que $2n$, com n natural, é uma representação de um número par.

DE OLHO NA BASE

Representar os números em notação científica, por meio de cálculos com potências de expoentes inteiros, favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA01**.

Além disso, compreender o uso da notação científica promove o desenvolvimento do raciocínio lógico, que permite atuar e entender o mundo, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 2**.

- Sugira aos estudantes o uso da calculadora para resolver a atividade **11**. Antes de efetuar os cálculos, é importante que eles escrevam a potência de forma simplificada; assim, no item **a**, vão calcular 7^9 e, no item **b**, 7^6.
- Na atividade **12**, peça aos estudantes que justifiquem as afirmações falsas.
- Na atividade **13**, sugira aos estudantes o uso da calculadora, assim como o registro no caderno de cada resultado encontrado:

$3^1 = 3$	$3^7 = 2\,187$
$3^2 = 9$	$3^8 = 6\,561$
$3^3 = 27$	$3^9 = 19\,683$
$3^4 = 81$	$3^{10} = 59\,049$
$3^5 = 243$	$3^{11} = 177\,147$
$3^6 = 729$	$3^{12} = 531\,441$

Em seguida, os estudantes poderão verificar que a cada grupo de quatro potências o último algarismo se repete.

Eles podem notar também que, em todas as potências cujo expoente é múltiplo de 4, o último algarismo é o 1. É importante eles perceberem que, nessa sequência, é possível encontrar o último algarismo de qualquer potência de base 3, pois, ao dividir o expoente por 4, o resto da divisão indicará o último algarismo da potência.

  - Na sequência de potências, cujos expoentes são 1, 5, 9, 13, ..., o resto da divisão por 4 é 1. Assim, o último algarismo da potência 3^{41}, por exemplo, será o 3, pois o resto da divisão de 41 por 4 é 1.
  - Na sequência de potências, cujos expoentes são 2, 6, 10, 14, ..., o resto da divisão por 4 é 2. Assim, o último algarismo da potência 3^{86}, por exemplo, será o 9, pois o resto da divisão de 86 por 4 é 2.
  - Na sequência de potências, cujos expoentes são 3, 7, 11, 15, ..., o resto da divisão por 4 é 3. Assim, o último algarismo da potência 3^{123}, por exemplo, será o 7, pois o resto da divisão de 123 por 4 é 3.

- Na atividade **15**, comente com os estudantes que os números, para serem expressos em notação científica, além de serem escritos como produto de dois fatores, sendo um deles uma potência de base 10, devem apresentar o outro fator necessariamente tendo em sua parte inteira apenas a ordem das unidades.

11. Determine o valor das potências.

a) 7^{3^2} **40 353 607**

b) $(7^3)^2$ **117 649**

c) 2^{4^2} **65 536**

d) $(2^4)^2$ **256**

12. Verifique se as igualdades são verdadeiras.

a) $(3^5)^2 = 3^{5^2}$ **Falsa.**

b) $0{,}7^{2^{-1}} = (0{,}7^2)^{-1}$ **Falsa.**

c) $2^{-2} = \frac{1}{4}$ **Verdadeira.**

d) $\left(-\frac{1}{9}\right)^{2+3} = \left(-\frac{1}{9}\right)^2 + \left(-\frac{1}{9}\right)^3$ **Falsa.**

e) $(5:3)^2 = 5^2 \cdot 3^2$ **Falsa.**

13. Calcule as potências de 3 com os menores expoentes naturais e observe o resultado. A cada quantas potências o último algarismo do resultado se repete? Com que algarismo termina 3^{40}?
A cada quatro potências. Com o algarismo 1.

14. Simplifique as expressões a seguir.

a) $9^7 : 9^4$ $\mathbf{9^3}$

b) $\left(\frac{3}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 : \left(\frac{3}{7}\right)^5$ $\left(\frac{3}{7}\right)^2$

c) $\frac{1}{21} \cdot \left(\frac{1}{21}\right)^{-7} : \left(\frac{1}{21}\right)^5$ $\mathbf{21^{11}}$

d) $(10^{-4})^3 \cdot 10^3$ $\left(\frac{1}{10}\right)^9$

e) $(5^4 : 5^{-9})^2 : 5^{-5}$ $\mathbf{5^{31}}$

f) $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^5 : \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right]^3$ $\left(\frac{3}{7}\right)^{18}$

g) $\frac{9 \cdot 81 \cdot 729}{27}$ $\mathbf{3^9}$

h) $\frac{a^2 \cdot b^4 \cdot c^{12}}{(a \cdot b \cdot c)^2}$ b^2c^{10}

i) $\frac{0{,}1 \cdot 10^3 \cdot (0{,}0001)^2}{1\,000 \cdot 0{,}0001 \cdot 10}$ $\left(\frac{1}{10}\right)^6$

15. Escreva os números em notação científica.

a) 3 120 000 000 000 $\mathbf{3{,}12 \cdot 10^{12}}$

b) 0,0000124 $\mathbf{1{,}24 \cdot 10^{-5}}$

c) 4 200 000 000 $\mathbf{4{,}2 \cdot 10^9}$

d) 0,000000000000001445 $\mathbf{1{,}445 \cdot 10^{-15}}$

16. Os planetas do Sistema Solar orbitam em torno do Sol, mantendo uma distância média, em quilômetro, conforme mostra a tabela a seguir.

Distância média dos planetas em relação ao Sol

Planeta	Distância média (km)
Mercúrio	57 910 000
Vênus	108 200 000
Terra	149 600 000
Marte	227 940 000
Júpiter	778 330 000
Saturno	1 429 400 000
Urano	2 780 990 000
Netuno	4 504 300 000

Fonte de pesquisa: Edna M. E. da Silva. O Sistema Solar. UFSC Planetário. Disponível em: https://planetario.ufsc.br/o-sistema-solar. Acesso em: 22 abr. 2022.

Usando a notação científica, determine, em metro, a medida da distância entre o Sol e o planeta:

a) Terra; $\mathbf{1{,}496 \cdot 10^{11}}$

b) Marte; $\mathbf{2{,}2794 \cdot 10^{11}}$

c) Saturno; $\mathbf{1{,}4294 \cdot 10^{12}}$

d) Júpiter. $\mathbf{7{,}7833 \cdot 10^{11}}$

17. Em cada item, escreva os valores em notação científica.

a) Estimava-se que o cérebro humano tivesse cerca de 100 000 000 000 de neurônios. $\mathbf{1 \cdot 10^{11}}$ **neurônios**

b) A Via Láctea tem cerca de 400 bilhões de estrelas. $\mathbf{4{,}0 \cdot 10^{11}}$ **estrelas**

c) A medida do comprimento de uma célula é aproximadamente 0,00000025 m. $\mathbf{2{,}5 \cdot 10^{-7}}$ **m**

d) O ano-luz, distância percorrida pela luz em 1 ano, é igual a 9 460 000 000 000 km. $\mathbf{9{,}46 \cdot 10^{12}}$ **km**

18. Determine o valor das expressões a seguir em notação científica.

a) $(2{,}4 \cdot 10^{-4}) : (1{,}2 \cdot 10^7)$ $\mathbf{2 \cdot 10^{-11}}$

b) $(0{,}3 \cdot 10^3) \cdot (1{,}4 \cdot 10^{-2})$ $\mathbf{4{,}2 \cdot 10^0}$

c) $(6{,}4 \cdot 10^4)^2$ $\mathbf{4{,}096 \cdot 10^9}$

19. Compare os números em notação científica e identifique o maior em cada caso.

a) $1 \cdot 10^{-3}$ e $1 \cdot 10^2$ $\mathbf{1 \cdot 10^{-3} < 1 \cdot 10^2}$

b) $2{,}1 \cdot 10^{-3}$ e $2{,}01 \cdot 10^{-3}$

c) $4{,}01 \cdot 10^{-3}$ e $4{,}001 \cdot 10^2$

d) $9{,}5 \cdot 10^{-3}$ e $9{,}05 \cdot 10^{-4}$ $\mathbf{9{,}5 \cdot 10^{-3} > 9{,}05 \cdot 10^{-4}}$

19. b) $\mathbf{2{,}1 \cdot 10^{-3} > 2{,}01 \cdot 10^{-3}}$
c) $\mathbf{4{,}01 \cdot 10^{-3} < 4{,}001 \cdot 10^2}$

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. A medida do perímetro de um terreno em forma de quadrado é 160 m. Sabendo disso, qual é a medida da área desse terreno? **1 600 m²**

2. Observe a seguir as três primeiras figuras de uma sequência.

2. a)

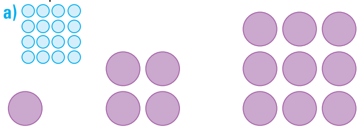


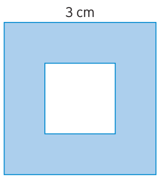
Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Desenhe a quarta figura dessa sequência.

b) Represente com uma potência a quantidade de círculos da sexta figura. $6^2 = 36$

3. Francisco recebeu uma mensagem por aplicativo. No primeiro dia, ele encaminhou a mensagem para 3 pessoas. Essas 3 pessoas a leram no segundo dia, e cada uma delas a encaminhou para outras 3 pessoas e assim sucessivamente. Quantas pessoas receberam essa mensagem no quarto dia, considerando que todas seguiram o mesmo procedimento? **81 pessoas.**

4. Qual é a medida da área da região pintada de azul, sabendo que a medida do lado do quadrado menor é a metade da medida do lado do quadrado maior? **6,75 cm²**



Ilustrações: ID/BR

5. Escreva no caderno qual das potências a seguir equivale a $(125)^{-15}$. **Alternativa b.**

a) 5^{45} c) 2^{45} e) $5^{9 \cdot 5}$

b) 5^{-45} d) 2^{-45} f) $(-2)^{45}$

6. Sabe-se que a medida da massa de uma bactéria é aproximadamente 0,000000001 g. Se uma colônia tem 10 mil bactérias desse tipo, qual é a medida da massa dessa colônia? 10^{-5} **g**

7. Escreva no caderno a alternativa correta. O cérebro humano tem em torno de 86 bilhões de neurônios. Esse número pode ser escrito na forma de notação científica como: **Alternativa c.**

a) $0{,}86 \cdot 10^9$. d) $86 \cdot 10^{10}$.

b) $8{,}6 \cdot 10^9$. e) $8{,}6 \cdot 10^{11}$.

c) $8{,}6 \cdot 10^{10}$.

8. Reúna-se com um colega para resolver os problemas a seguir.

a) Descobriu-se que toda semana determinada fábrica descarta 100 litros de dejetos químicos em um rio nas proximidades. Sabendo que 10 litros desses dejetos podem contaminar 10 milhões (10^7) de litros de água potável, qual seria, em litro, a quantidade de água potável contaminada semanalmente por essa fábrica? 10^8 **litros.**

b) Em um programa de condicionamento físico, uma pessoa deve correr durante 7 dias e a cada dia deve percorrer uma distância igual ao dobro do dia anterior. Comecei o programa na segunda-feira correndo 100 m. Então, quantos metros vou correr em 7 dias? Expresse esse valor em notação científica. $1{,}27 \cdot 10^4$ **m**

9. A velocidade da luz no vácuo é 299 792 447 m/s. Escreva esse número em notação científica, fazendo a aproximação de modo que o fator que multiplica a potência de 10 seja um número inteiro. **Aproximadamente** $3 \cdot 10^8$ **m/s.**

10. Qual é a potência de 10 que devemos multiplicar pelo número $10^{-4} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4}$ para que o produto seja igual a 10? 10^{13}

11. Sabendo que $y = \dfrac{10^{11} \cdot 5^{11} \cdot 5^{11}}{500^9}$, use as propriedades da potenciação para descobrir o valor de y. **122,0703125**

12. Simplifique a expressão.

$$\frac{2 \cdot 3^{-2} \cdot (2^{-1} \cdot 3^2)^5 \cdot (2 \cdot 3^{-1})^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-1} \cdot 3} \quad \frac{729}{32}$$

13. Utilizando as propriedades das potências, deixe a expressão a seguir na forma mais simplificada possível.

$$\frac{5^{x+1} + 5^{x+2}}{5^{2-x} - 5^{1-x}} \quad \frac{3}{2} \cdot 5^{2x}$$

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- A atividade **2** traz uma sequência figural cuja regra é dada pelo quadrado do número que indica a posição do elemento dentro da sequência. Se julgar oportuno, explore mais termos da sequência.
- Uma possível resolução para a atividade **3** é utilizar um diagrama de árvore para, em seguida, propor a generalização. Pergunte aos estudantes quantas pessoas receberam a mensagem no décimo ou no centésimo dia, por exemplo.
- Na atividade **4**, verifique se os estudantes percebem que a medida da área da região pintada de azul é dada pela diferença entre a medida da área dos quadrados de lado medindo 3 cm e de lado medindo 1,5 cm.
- Na atividade **5**, os estudantes devem recorrer à propriedade potência de potência para encontrar uma potência equivalente a $(125)^{-15}$.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Relembre os conhecimentos discutidos, propondo aos estudantes questões como as apresentadas a seguir.

- $2^x = 16$
- $x^1 = 17$
- $2^x = \dfrac{1}{2}$
- $x^4 = 81$
- $5^x = 1$

Em seguida, apresente alguns cálculos com potências de base 10, sugerindo aos estudantes que observem a regularidade entre o expoente e o número de zeros do resultado:

$10^0 = 1$ $10^2 = 100$ $10^4 = 10\,000$

$10^1 = 10$ $10^3 = 1\,000$ $10^5 = 100\,000$

Retome o sistema de numeração decimal e a decomposição dos números, acrescentando o uso das potências de 10. Por exemplo:

- $2345 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 =$
- $= 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

- Faça o mesmo em relação às potências de 10 com expoentes negativos. Se julgar conveniente, utilize o seguinte quadro:

Potência	Representação fracionária	Representação decimal
10^{-1}	$\frac{1}{10}$	0,1
10^{-2}	$\frac{1}{100}$	0,01
10^{-3}	$\frac{1}{1\,000}$	0,001
10^{-4}	$\frac{1}{10\,000}$	0,0001
10^{-5}	$\frac{1}{100\,000}$	0,00001

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Radiciação de números racionais.
- Potenciação com expoente fracionário.
- Propriedades da radiciação.

Objetivos

- Aprofundar os conhecimentos sobre raiz quadrada de um número racional.
- Interpretar geometricamente a raiz quadrada de um número como a medida do lado de um quadrado, cuja medida da área é conhecida.
- Compreender a relação entre potenciação e radiciação.
- Determinar a raiz quadrada exata e aproximada de um número racional positivo.
- Determinar a raiz enésima de um número racional.
- Relacionar potenciação e radiciação e representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
- Reconhecer e aplicar as propriedades dos radicais.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar e aprofundar o estudo da radiciação, compreendendo suas propriedades e sua relação com a potenciação. Esses estudos propiciam a eles maior autonomia na resolução de problemas, pois poderão se apropriar de novas estratégias de cálculos.

RAIZ QUADRADA DE UM NÚMERO RACIONAL

- A ideia de raiz quadrada como operação inversa da potenciação pode ser trabalhada com base no conceito de área de um quadrado e a medida de seu lado, conforme apresentado no Livro do Estudante.
- Comente com os estudantes que o símbolo que denota a operação da radiciação é chamado radical. Verifique se eles já conhecem os demais termos, como índice, radicando e raiz.
- Aproveite o tema apresentado no início do capítulo e converse com os estudantes sobre reflorestamento. Se houver algum projeto de reflorestamento no município em que vivem, proponha que realizem uma pesquisa para entender como o projeto funciona e como podem colaborar para o desenvolvimento dele.
- Apresente aos estudantes o processo de recuperação ambiental da Mata Atlântica, desenvolvido pelo Instituto Terra na região do Vale do Rio Doce. Peça a eles que façam uma pesquisa sobre as grandes transformações realizadas na região no *site* do instituto, disponível em: https://institutoterra.org/ (acesso em: 9 jun. 2022).

Capítulo

2 RADICIAÇÃO

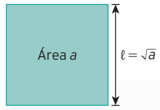
Para desenvolver os conteúdos deste capítulo, os estudantes devem ter compreendido os conceitos de operações com números racionais.

Raiz quadrada de um número racional

Imagine que uma região quadrada de área medindo 1 hectare (1 ha), ou 10 000 m^2, será reflorestada. Para determinar a medida do lado dessa região quadrada, em metro, precisamos calcular a raiz quadrada de 10 000.

> A **raiz quadrada** de um número racional não negativo *a* é o número que, elevado ao quadrado, é igual a *a*. Nem sempre essa raiz quadrada é um número racional.

Geometricamente, a raiz quadrada de um número racional não negativo *a* equivale à medida ℓ do lado de um quadrado cuja medida da área é igual a *a*.



Assim, a raiz quadrada de 10 000 é:

índice

$$\sqrt[2]{10\,000} = 100$$

radicando raiz

O sinal $\sqrt{\ }$ é chamado de **radical**. Quando não há índice no radical, significa que esse índice é 2, ou seja, trata-se de uma raiz quadrada.

Área de restauração de vegetação nativa do Cerrado na chapada dos Veadeiros, Alto Paraíso de Goiás (GO). Foto de 2021.

Andre Dib/Pulsar Imagens

18

Raiz quadrada exata

Quando a raiz quadrada de um número racional não negativo resulta em um número racional, dizemos que se trata de uma **raiz quadrada exata**.

Exemplos

A. $\sqrt{36} = 6$, pois $6^2 = 36$.

B. $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$, pois $(0{,}9)^2 = 0{,}81$.

C. $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$, pois $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

D. Vamos determinar a raiz quadrada de 225. Podemos fazer isso decompondo 225 em fatores primos. Observe.

$$\begin{array}{r|l} 225 & 5 \\ 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$225 = 5^2 \cdot 3^2 = (5 \cdot 3)^2 = 15^2$

Portanto, $\sqrt{225} = 15$, pois $15^2 = 225$.

Raiz quadrada aproximada

Nem todo cálculo de raiz quadrada de números racionais positivos resulta em um número racional. No cálculo de raízes quadradas que não são raízes quadradas exatas, usamos aproximações decimais.

Exemplos

A. Vamos calcular o valor aproximado de $\sqrt{2}$ usando uma calculadora.

Para isso, digitamos **2** e, em seguida, **√**.

Aparecerá no visor **1.41421356237**.

Logo, $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$.

B. Vamos calcular o valor aproximado de $\sqrt{3}$ fazendo tentativas e aproximações sucessivas:

- $\sqrt{3}$ é maior que 1, pois $1^2 = 1$ e $1 < 3$.
- $\sqrt{3}$ é menor que 2, pois $2^2 = 4$ e $4 > 3$.

Portanto, $1 < \sqrt{3} < 2$.

Fazendo mais algumas tentativas, concluímos que $\sqrt{3}$ está entre 1,73 e 1,74, pois $(1{,}73)^2 = 2{,}9929$ e $(1{,}74)^2 = 3{,}0276$, ou seja:

$$\underbrace{1{,}73}_{\text{aproximação por falta}} < \sqrt{3} < \underbrace{1{,}74}_{\text{aproximação por excesso}}$$

Logo, $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$ ou $\sqrt{3} \simeq 1{,}74$.

- Retome o conceito de números primos antes de apresentar os exemplos de raiz quadrada exata.
- Comente com os estudantes que, quando a raiz de um número não é exata, podemos calcular a raiz aproximada desse número por meio de tentativas e aproximações ou usando a calculadora.
- Explore outros exemplos para que os estudantes compreendam o método de determinação de uma raiz por aproximação. Para utilizar esse método, é importante que eles saibam determinar os quadrados perfeitos que são imediatamente menor e maior que o número que se pretende determinar a raiz.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Se julgar necessário, apresente aos estudantes as questões a seguir, para que percebam a relação entre potenciação e radiciação.

1. Qual é a medida da área de um quadrado de lado medindo:

a) 3 cm?
9 cm^2

b) 2,5 cm?
6,25 cm^2

c) 1,5 cm?
2,25 cm^2

d) 4 cm?
16 cm^2

e) 10 cm?
100 cm^2

2. Qual é a medida dos lados de um quadrado cuja medida da área é:

a) 4 cm^2?
2 cm

b) 25 cm^2?
5 cm

c) 49 cm^2?
7 cm

d) 121 cm^2?
11 cm

e) 64 cm^2?
8 cm

RAIZ CÚBICA DE UM NÚMERO RACIONAL

- Explique aos estudantes, por meio da potenciação, como determinar a raiz cúbica de um número negativo, para que compreendam que apenas podemos calcular raízes negativas quando seus índices são ímpares e que as raízes de índice par de um número negativo não pertencem ao conjunto dos números racionais.

Respeito

Discuta com os estudantes a importância da consciência ambiental no mundo contemporâneo com base no texto que aborda a questão de preservar a vida marinha. Embora a atividade de criar peixes ornamentais em aquários seja permitida, o criador deve seguir algumas recomendações para que a retirada desses animais do seu ambiente natural não seja feita de maneira ilegal e respeite o meio ambiente. Peça a eles que pesquisem sobre esse assunto e o impacto da ação das pessoas na vida marinha no *site* do Ibama e também em outras fontes. Para abordar a importância da conscientização da preservação da vida marinha, sugerimos documentários e artigos sobre o assunto, disponíveis em: https://gia.org.br/portal/videos-documentarios/ (acesso em: 9 jun. 2022). Essa conversa desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação Ambiental, que pertence à macroárea **Meio Ambiente**.

DE OLHO NA BASE

Ao se discutir temas sobre consciência ambiental, desenvolve-se a argumentação baseada em fatos, dados e informações, para formular e defender ideias que respeitem e promovam a consciência socioambiental, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 7**.

RAIZ ENÉSIMA DE UM NÚMERO RACIONAL

- O estudo da raiz enésima é o momento de formalizar o conhecimento sobre a radiciação. A generalização ocorre com base na compreensão de que existem infinitos valores para *n* e *a*, mas, independentemente do valor que essas variáveis assumem, as propriedades serão válidas e o procedimento para determinar as raízes será o mesmo.

João Picoli/ID/BR

RESPEITO À VIDA MARINHA

Para preservar a vida dos peixes em um aquário, é preciso que as condições do ecossistema artificial sejam similares às do ambiente natural em que os peixes vivem. Assim, mesmo em cativeiro, é possível que eles se reproduzam.

Porém, é necessário pesquisar se a espécie escolhida para compor o aquário está em risco de extinção, verificar sua origem e ter consciência de que a vida no ecossistema natural é o que resulta na conservação da diversidade biológica.

- **Com os colegas, faça uma pesquisa no *site* do Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis (Ibama) para saber quais peixes ornamentais brasileiros estão em extinção.**

Resposta pessoal.

Raiz cúbica de um número racional

Um aquário com formato de cubo tem volume medindo 27 000 cm³. Qual é a medida da altura desse aquário?

Por se tratar de um aquário com a forma de um cubo, determinar a medida da altura desse aquário é o mesmo que determinar a medida da largura ou do comprimento, pois todas as arestas do aquário têm a mesma dimensão. Como a medida do volume de um cubo é igual à medida de sua aresta ao cubo, para encontrar o valor desejado basta calcular a raiz cúbica de 27 000.

> A **raiz cúbica** de um número racional *a* é o número racional que, elevado ao cubo, é igual a *a*.

Utilizando a decomposição em fatores primos, temos:

27 000	2
13 500	2
6 750	2
3 375	3
1 125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

$27\,000 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^3 = 30^3$

Portanto, $\sqrt[3]{27\,000} = 30$, pois $30^3 = 27\,000$.

Logo, a medida da altura desse aquário é 30 cm.

Exemplos

A. $\sqrt[3]{-2\,197} = -13$, pois $(-13)^3 = -2\,197$.

B. $\sqrt[3]{3{,}375} = 1{,}5$, pois $(1{,}5)^3 = 3{,}375$.

C. $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3}$, pois $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$.

Raiz enésima de um número racional

A raiz enésima de um número racional *a* é o número racional *b*, de mesmo sinal que *a*, que, elevado ao índice natural *n*, maior ou igual a 2, é igual a *a*, ou seja:

> $\sqrt[n]{a} = b$ se e somente se $b^n = a$, em que *a* e *b* têm o mesmo sinal e $n \geqslant 2$.

Podemos representar a raiz enésima assim:

$$\underset{\text{radicando: } a}{\overset{\text{índice: } n}{\sqrt[n]{a}}}$$

Vamos analisar a raiz enésima considerando dois casos: com índice *n* par e com índice *n* ímpar.

Índice par

Se o índice n for um número natural **par**, o radicando a não pode ser menor que zero, pois não existe número racional que, elevado ao quadrado ou a qualquer outro expoente par, tenha como resultado um número racional negativo. Assim, $\sqrt[n]{a}$ será positivo sempre que estiver definido.

Exemplos

A. $\sqrt[4]{16} = 2$, pois $2^4 = 16$.

B. $\sqrt[4]{-16}$ não é um número racional, pois não existe um número racional que, elevado a 4, seja igual a -16.

Índice ímpar

Se o índice n for um número natural **ímpar**, o radicando a pode ser menor que zero, pois um número racional negativo elevado a um expoente ímpar n tem como resultado um número racional negativo. Assim, $\sqrt[n]{a}$ pode ser menor que zero.

Exemplos

A. $\sqrt[5]{1\,024} = 4$, pois $4^5 = 1\,024$.

B. $\sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$, pois $(0{,}5)^3 = 0{,}125$.

C. $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3)^3 = -27$.

D. $\sqrt[7]{-128} = -2$, pois $(-2)^7 = -128$.

Potência com expoente racional

Uma potência de base racional positiva pode ter expoente racional.

Vamos considerar um número b e a potência $a^{\frac{m}{n}}$, sendo $b = a^{\frac{m}{n}}$.

- Elevando a n os dois membros da igualdade, temos:

$$b = a^{\frac{m}{n}}$$
$$b^n = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$$
$$b^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n}$$
$$b^n = a^m$$

- Calculando a raiz enésima dos dois membros da igualdade, temos:

$$\sqrt[n]{b^n} = \sqrt[n]{a^m}$$
$$b = \sqrt[n]{a^m}$$

Portanto, $b = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Toda potência de base racional positiva e expoente de número racional pode ser escrita como uma raiz.

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ com } a \in \mathbb{Q}_+^*, m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}}$$

PROPRIEDADES

As propriedades válidas para potências de expoente inteiro também são válidas para as potências de expoente racional que tenham base positiva.

POTÊNCIA COM EXPOENTE RACIONAL

- Para melhor compreensão dos cálculos de potências com expoentes fracionários, é importante que os estudantes já tenham se apropriado de conhecimentos relativos às propriedades das potências com números inteiros, às operações com frações e à transformação de frações em número na forma decimal e vice-versa. Retome esses conhecimentos por meio de alguns exemplos, caso os estudantes ainda não tenham se apropriado deles por completo.

- Sugira aos estudantes que transformem os números da forma decimal para a fracionária e fatorem os radicandos para calcular os valores das raízes nas atividades **1**, **4**, **7** e **8**.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nesta página permitem aos estudantes, por meio da resolução de problemas, utilizar a relação entre potenciação e radiciação para representar uma raiz como potência de expoente fracionário, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA02**.

2. Respostas possíveis:
a) Aproximadamente 2,82842712.
b) Aproximadamente 3,17804972.

3. a) Aproximadamente 10,10.
b) Aproximadamente 2,65.
c) Aproximadamente 9,85.
d) Aproximadamente 27,24.

5. c) $0 < \sqrt[3]{0{,}064} < 1$
d) $0 < \sqrt[3]{\dfrac{125}{216}} < 1$

Exemplos

A. $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9}$

B. $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$

C. $3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3}$

D. $87^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{87^4}$

E. $3^{0{,}5} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

F. $1\,024^{0{,}1} = 1\,024^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{1\,024}$

G. $78^{6{,}7} = 78^{\frac{67}{10}} = \sqrt[10]{78^{67}}$

H. $15^{1{,}4} = 15^{\frac{14}{10}} = 15^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{15^7}$

ATIVIDADES

9. a-V; b-I; c-II; d-VIII; e-III; f-VII; g-VI; h-IV.

Responda sempre no caderno.

1. Calcule o valor das raízes quadradas.
a) $\sqrt{1\,024}$ **32**
b) $\sqrt{\dfrac{81}{625}}$ $\mathbf{\dfrac{9}{25}}$
c) $\sqrt{0{,}0144}$ **0,12**
d) $\sqrt{196}$ **14**

2. Use a calculadora para obter uma aproximação do valor das raízes a seguir.
a) $\sqrt{8}$
b) $\sqrt{10{,}1}$

3. Sem usar calculadora, dê o valor aproximado das raízes a seguir, considerando duas casas decimais.
a) $\sqrt{102}$
b) $\sqrt{7}$
c) $\sqrt{97}$
d) $\sqrt{742}$

4. Calcule o valor das raízes cúbicas.
a) $\sqrt[3]{512}$ **8**
b) $\sqrt[3]{0{,}729}$ **0,9**
c) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}$ $\mathbf{-\dfrac{2}{3}}$
d) $\sqrt[3]{2{,}197}$ **1,3**

5. Determine entre quais números inteiros consecutivos estão as raízes cúbicas a seguir.
a) $\sqrt[3]{20}$ $\mathbf{2 < \sqrt[3]{20} < 3}$
b) $\sqrt[3]{-64}$ $\mathbf{-5 < \sqrt[3]{-64} < -3}$
c) $\sqrt[3]{0{,}064}$
d) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{216}}$

6. Qual é o maior número: $\sqrt[3]{-8}$ ou $\sqrt[3]{(-2)^{-3}}$? $\mathbf{\sqrt[3]{(-2)^{-3}}}$

7. Calcule, quando possível, o valor das raízes a seguir.
a) $\sqrt[3]{-8}$ **−2**
b) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{243}}$ $\mathbf{\dfrac{1}{3}}$
c) $\sqrt[6]{-1}$
d) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$ $\mathbf{\dfrac{2}{3}}$
e) $\sqrt{0{,}36}$ **0,6**
f) $\sqrt{100}$ **10**

8. Qual é o valor da expressão a seguir?
$\sqrt[4]{0{,}0256} : \sqrt[4]{0{,}016}$ **2**

9. Relacione as colunas indicando os números iguais.

a)	$\sqrt[4]{3^2}$	I)	$4^{\frac{2}{3}}$
b)	$\sqrt[3]{4^2}$	II)	$4^{\frac{3}{2}}$
c)	$\sqrt{4^3}$	III)	$2^{\frac{4}{3}}$
d)	$\sqrt[3]{5^2}$	IV)	$2^{\frac{3}{4}}$
e)	$\sqrt[3]{2^4}$	V)	$3^{\frac{2}{4}}$
f)	$\sqrt{5^3}$	VI)	$3^{\frac{4}{2}}$
g)	$\sqrt{3^4}$	VII)	$5^{\frac{3}{2}}$
h)	$\sqrt[4]{2^3}$	VIII)	$5^{\frac{2}{3}}$

10. Calcule:
a) $3^{\frac{4}{2}}$ **9**
b) $2^{\frac{12}{4}}$ **8**
c) $5^{\frac{8}{4}}$ **25**
d) $27^{\frac{2}{3}}$ **9**
e) $25^{\frac{5}{2}}$ **3 125**
f) $4\,096^{\frac{3}{4}}$ **512**

11. Biólogos constataram que o número de bactérias N de certa cultura, em função do tempo t, medido em hora, é dado por $N = 27^{\frac{t}{3}}$. Quantas bactérias teremos em:
a) 1 hora? **3 bactérias.**
b) 2 horas? **9 bactérias.**
c) 3 horas? **27 bactérias.**

7. c) Não existe número racional que, elevado à sexta potência, resulte em −1.

OUTRAS FONTES

Guelli, O. *História de potências e raízes*. 9. ed. São Paulo: Ática, 2000.
Esse livro narra de forma lúdica a história das propriedades das potências e das raízes.

Propriedades dos radicais

Vamos estudar as propriedades dos radicais.

1ª propriedade

Vamos considerar dois casos:

- Sendo a um número racional e n um número natural ímpar maior que 2, temos:

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ com } a \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ ímpar maior que } 2$$

- Sendo a um número racional e n um número natural par não nulo, temos:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \text{ com } a \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \text{ par}$$

Exemplos

A. $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

B. $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

C. $\sqrt{(-9)^2} = |-9| = 9$

Usamos o módulo, pois, ao calcular $\sqrt{(-9)^2}$, extraímos a raiz de índice par de um número positivo, isto é, $\sqrt{81}$, que é 9, pois $9^2 = 81$.

D. $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{4^4} = |4| = 4$

2ª propriedade

Ao dividir o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número natural maior que zero, o valor do radical não se altera.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}, \text{ sendo } a \in \mathbb{Q}_+, m \in \mathbb{Z}, n \text{ e } p \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2 \text{ e } p \text{ divisor comum de } m \text{ e de } n$$

Exemplos

A. Considere os radicais $\sqrt[6]{4^6}$ e $\sqrt[3]{4^3}$.

Como vimos na 1ª propriedade, $\sqrt[6]{4^6} = 4$ e $\sqrt[3]{4^3} = 4$. Logo, $\sqrt[6]{4^6} = \sqrt[3]{4^3}$.

Podemos dizer que $\sqrt[3]{4^3}$ é uma simplificação de $\sqrt[6]{4^6}$. Para fazer essa simplificação, podemos dividir o expoente da potência e o índice do radical pelo mesmo número. Observe.

$$\sqrt[6]{4^6} = \sqrt[6:2]{4^{6:2}} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

B. Vamos calcular $\sqrt[8]{7^4}$.

Como 4 é um divisor comum entre 4, o expoente da potência, e 8, o índice do radical, podemos simplificar esse radical da seguinte maneira:

$$\sqrt[8:4]{7^{4:4}} = \sqrt[2]{7^1} = \sqrt{7}$$

Esse processo pode ser feito para qualquer radical $\sqrt[n]{a^m}$, em que a é um número não negativo e m e n têm divisor comum diferente de 1.

PROPRIEDADES DOS RADICAIS

- Para que os estudantes compreendam as propriedades dos radicais, é necessário que os conhecimentos que eles têm a respeito de potenciação e de radiciação estejam consolidados.
- Apresente as propriedades utilizando alguns exemplos para cada uma delas.
- É importante que os estudantes entendam o porquê do uso do módulo na primeira propriedade.

- Reserve um momento da aula para que alguns estudantes expliquem, com suas palavras e por meio de exemplos, uma das propriedades dos radicais para os demais colegas. Faça isso com todas as propriedades pelo menos uma vez. Explicar o conteúdo para o colega pode auxiliar tanto aqueles que farão a explanação quanto os demais a compreender melhor cada uma das propriedades estudadas.

Também podemos escrever a 2ª propriedade da seguinte maneira:

Ao multiplicar o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número natural maior que zero, o valor do radical não se altera.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}, \text{ com } a \in \mathbb{Q}_+, m \in \mathbb{Z}, n \text{ e } p \in \mathbb{N}^* \text{ e } n \geqslant 2$$

Exemplos

A. $\sqrt[5]{3} = \sqrt[5 \cdot 2]{3^{1 \cdot 2}} = \sqrt[10]{3^2}$

B. $\sqrt[7]{8} = \sqrt[7 \cdot 3]{8^{1 \cdot 3}} = \sqrt[21]{8^3}$

3ª propriedade

Sendo *a* e *b* números racionais positivos e *n* um número natural maior ou igual a 2, temos:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{Q}_+, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2$$

Exemplos

A. Vamos calcular o valor de $\sqrt{0{,}16 \cdot 4}$ e de $\sqrt{0{,}16} \cdot \sqrt{4}$.

$\sqrt{0{,}16 \cdot 4} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

$\sqrt{0{,}16} \cdot \sqrt{4} = 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8$

Assim, $\sqrt{0{,}16 \cdot 4} = \sqrt{0{,}16} \cdot \sqrt{4}$.

B. $\sqrt[3]{512 \cdot 64} = \sqrt[3]{512} \cdot \sqrt[3]{64} = 8 \cdot 4 = 32$

C. $\sqrt[4]{1\,296} = \sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6$

4ª propriedade

Sendo *a* e *b* números racionais positivos, com $b \neq 0$, e *n* um número natural maior ou igual a 2, temos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{Q}_+, b \neq 0, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2$$

Exemplos

A. Vamos calcular o valor de $\sqrt{\frac{81}{9}}$ e de $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}$.

$\sqrt{\frac{81}{9}} = \sqrt{9} = 3$

$\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$

Assim, $\sqrt{\frac{81}{9}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}$.

B. Vamos calcular o valor de $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ e de $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}$.

$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3}$

$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{2}{3}$

Assim, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}$.

5ª propriedade

Sendo a um número racional positivo e n e p números naturais com n e p maiores ou iguais a 2, temos:

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}, \text{ com } a \in \mathbb{Q}_+, n \text{ e } p \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 2 \text{ e } p \geqslant 2$$

Exemplos

A. Vamos calcular o valor de $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$ e de $\sqrt[6]{729}$.

$\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

$\sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

Assim, $\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[6]{729}$

B. Vamos calcular o valor de $\sqrt{\sqrt[4]{\frac{1}{256}}}$ e de $\sqrt[8]{\frac{1}{256}}$.

$\sqrt{\sqrt[4]{\frac{1}{256}}} = \sqrt{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\right)^4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$\sqrt[8]{\frac{1}{256}} = \sqrt[8]{\left(\frac{1}{2}\right)^8} = \frac{1}{2}$

Assim, $\sqrt{\sqrt[4]{\frac{1}{256}}} = \sqrt[8]{\frac{1}{256}}$.

C. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{1\,953\,125}} = \sqrt[3 \cdot 3]{1\,953\,125} = \sqrt[9]{1\,953\,125} = \sqrt[9]{5^9} = 5$

Aplicação das propriedades dos radicais

Vamos estudar algumas aplicações das propriedades dos radicais. Para isso, consideramos apenas radicais cujas bases são não negativas.

Extração dos fatores do radicando

Se um ou mais fatores do radicando têm expoente igual ao índice do radical, de acordo com a 1ª propriedade, esses fatores podem ser extraídos da raiz. Nos casos em que o expoente do radicando é maior que o índice do radical, são feitas transformações convenientes para que seja possível extraí-lo.

Exemplos

A. $\sqrt{1\,296} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^4} = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$

B. $\dfrac{\sqrt[4]{144}}{\sqrt[5]{32}} = \dfrac{\sqrt[4]{2^4 \cdot 3^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \dfrac{\sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3^2}}{2} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Introdução de fatores no radicando

Um fator externo pode ser introduzido em um radicando como um fator, desde que seja escrito com um expoente igual ao índice do radical.

Exemplos

A. $5 \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{125 \cdot 7} = \sqrt[3]{875}$

B. $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2^3}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \cdot 2^3}} = \sqrt[4]{2^5}$

- Após apresentar as propriedades, incentive os estudantes a pensar como elas podem ser aplicadas para ajudar na resolução das expressões que envolvem cálculo de raízes. Em seguida, apresente as aplicações descritas nesta e na próxima página.

DE OLHO NA BASE

Compreender a aplicação das propriedades dos radicais, relacionando as raízes com potências de expoente fracionário, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA02**.

- A redução de radicais ao mesmo índice é de extrema importância para realizar a comparação entre duas ou mais raízes.
- Se os estudantes tiverem dificuldade em resolver o item **a** da atividade **16**, solicite que transformem os números na forma decimal em frações. Para resolver os demais itens, eles podem utilizar a fatoração para determinar o valor das expressões.

Simplificação de radicais

Quando o índice do radical e os expoentes de todos os fatores do radicando têm divisor comum diferente de 1, podemos dividir o índice do radical e os expoentes de todos os fatores do radicando por esse divisor comum.

Exemplos

A. $\sqrt[10]{3^5 \cdot 2^{15}} = \sqrt[10:5]{3^{5:5} \cdot 2^{15:5}} = \sqrt{3 \cdot 2^3}$

B. $\sqrt[8]{169 \cdot 6^4} = \sqrt[8]{13^2 \cdot 6^4} = \sqrt[8:2]{13^{2:2} \cdot 6^{4:2}} = \sqrt[4]{13 \cdot 6^2}$

Redução de radicais ao mesmo índice

Reduzir dois radicais ao mesmo índice significa determinar outros dois radicais que tenham o mesmo índice e sejam equivalentes aos dois primeiros radicais.

Exemplos

A. $\sqrt[5]{4}$ e $\sqrt[3]{3}$

Como o mmc(5, 3) = 15, temos:

$\sqrt[5]{4} = \sqrt[5 \cdot 3]{4^{1 \cdot 3}} = \sqrt[15]{4^3} = \sqrt[15]{64}$

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3 \cdot 5]{3^{1 \cdot 5}} = \sqrt[15]{3^5} = \sqrt[15]{243}$

B. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{7}$

Como o mmc(2, 3, 4) = 12, temos:

$\sqrt{2} = \sqrt[2 \cdot 6]{2^{1 \cdot 6}} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$

$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3 \cdot 4]{5^{1 \cdot 4}} = \sqrt[12]{5^4} = \sqrt[12]{625}$

$\sqrt[4]{7} = \sqrt[4 \cdot 3]{7^{1 \cdot 3}} = \sqrt[12]{7^3} = \sqrt[12]{343}$

15. a) $\sqrt[21]{4^3}$ e $\sqrt[21]{21^7}$.
b) $\sqrt[30]{15^{10}}$, $\sqrt[30]{13^{15}}$ e $\sqrt[30]{2^6}$.
c) $\sqrt[6]{6^2}$ e $\sqrt[6]{2^3}$.
d) $\sqrt[33]{4^6}$ e $\sqrt[33]{9^{11}}$.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

12. Introduza os fatores nos radicandos a seguir.

a) $2\sqrt[4]{3^3}$ $\sqrt[4]{432}$ b) $5\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{500}$ c) $3^2\sqrt[3]{7^2}$ $\sqrt[3]{35\,721}$

13. Extraia os fatores de cada radicando, quando possível.

a) $2\sqrt{100}$ **20**
b) $\sqrt[4]{192}$ $2\sqrt[4]{12}$
c) $\sqrt[5]{5\,120}$ $4\sqrt[5]{5}$
d) $\sqrt[3]{72\,000}$ $20\sqrt[3]{9}$

14. Simplifique os radicais a seguir.

a) $\sqrt[4]{11^2}$ $\sqrt{11}$
b) $\sqrt[8]{\left(\frac{2}{7}\right)^4}$ $\sqrt{\frac{2}{7}}$
c) $\sqrt[8]{3^{14}}$ $\sqrt[4]{3^7}$
d) $\sqrt[15]{5^{25}}$ $\sqrt[3]{5^5}$
e) $\sqrt[10]{2^2}$ $\sqrt[5]{2}$
f) $\sqrt[4]{81}$ **3**
g) $\sqrt[15]{(3,1)^5}$ $\sqrt[3]{3,1}$
h) $\sqrt[12]{9^4}$ $\sqrt[3]{9}$
i) $\sqrt[4]{16}$ **2**
j) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$ $\frac{1}{2}$

15. Deixe os radicais representados em cada item com o mesmo índice.

a) $\sqrt[7]{4}$ e $\sqrt[3]{21}$
b) $\sqrt[3]{15}$, $\sqrt{13}$ e $\sqrt[5]{2}$
c) $\sqrt[3]{6}$ e $\sqrt{2}$
d) $\sqrt[11]{4^2}$ e $\sqrt[3]{9}$

16. Utilize as propriedades dos radicais para determinar o valor de cada expressão a seguir.

a) $\sqrt{0,0025} \cdot \sqrt[6]{(0,2)^6}$ **0,01**
b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{531\,441}}$ **3**
c) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$ **8**
d) $\dfrac{\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{59\,049}}}{\sqrt[6]{729}}$ **4**
e) $\sqrt[5]{\sqrt{1\,024}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{3\,125}}{\sqrt[3]{25}}$ **10**

26

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. Determine a medida do comprimento do lado de um quadrado cuja área mede:

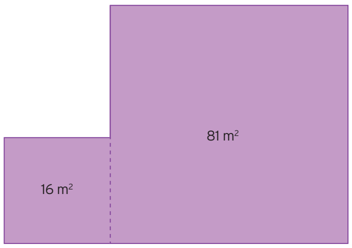
a) $4\ m^2$; **2 m**

b) $49\ dm^2$; **7 dm**

c) $1\,024\ mm^2$; **32 mm**

d) $139\ dam^2$. $\sqrt{139}$ **dam**

2. A medida da área de cada terreno quadrado está indicada na figura. Calcule a quantidade de arame, em metro, necessária para cercar completamente os dois terrenos juntos, de modo que se dê duas voltas ao redor deles. **88 m**



3. Uma caixa cúbica tem volume medindo $35\,937\ cm^3$. Quais são as medidas das arestas dessa caixa, em centímetro? Escreva a alternativa correta no caderno. **Alternativa b.**

a) 27, 21 e 27.

b) 33, 33 e 33.

c) 37, 37 e 37.

d) 38, 32 e 20.

e) $\sqrt{33}$, $\sqrt{33}$ e $\sqrt{33}$.

4. O buraco da camada de ozônio sobre a Antártida teve, em 2000, um tamanho recorde, ocupando uma área de, aproximadamente, $300 \cdot 10^5\ km^2$.

Supondo que esse número represente a medida da área de um quadrado, escreva no caderno a alternativa que apresenta a medida do lado desse quadrado. **Alternativa c.**

a) $10\sqrt{50}$ km

b) 300 000 km

c) $1\,000\sqrt{30}$ km

d) $100\sqrt{30}$ km

e) 30 500 km

5. A medida, em centímetro, do comprimento do lado de um quadrado é um valor inteiro que está compreendido entre $\sqrt{50}$ cm e $\sqrt{70}$ cm. Quanto mede o comprimento do lado desse quadrado? **8 cm**

6. Escreva a expressão $\left[\left(\sqrt{10}\right)^2\right]^{\frac{1}{6}}$ na forma de um único radical. $\sqrt[6]{10}$

7. Segundo a fórmula $v = 20\sqrt{273{,}25 + T}$, a velocidade v, em metro por segundo, do som no ar varia com a temperatura T. Qual será a velocidade aproximada do som quando a temperatura for 15,75 °C? **340 m/s**

8. Determine o valor da expressão $\sqrt[3]{27^2} + 4^{\frac{5}{2}}$. **41**

9. Calcule o valor da expressão a seguir.

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{49^3}} + \sqrt[3]{27}}{10^{-2}}$$ **1 000**

10. Utilizando as propriedades dos radicais, encontre o valor da expressão.

$$\frac{\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt{\sqrt{9}}}{\sqrt{6}}$$ **1**

11. Verifique se as igualdades representadas a seguir são verdadeiras ou falsas.

a) $\sqrt{600} = 10\sqrt{3}$ **Falsa.**

b) $\sqrt[3]{5^5} = 25\sqrt[3]{5}$ **Falsa.**

c) $3\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^8}$ **Verdadeira.**

d) $\sqrt{500} = 10\sqrt{5}$ **Verdadeira.**

e) $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}$ **Verdadeira.**

f) $\sqrt[5]{2^5} = 2\sqrt[3]{8}$ **Falsa.**

12. Determine o valor de a para que as igualdades a seguir sejam verdadeiras.

a) $\sqrt[4]{3^8} = \sqrt[a]{3^4}$ ***a* = 2**

b) $\sqrt[6]{1\,024} = \sqrt[a]{2^5}$ ***a* = 3**

c) $\sqrt[21]{\frac{64}{125}} = \sqrt[a]{\frac{4}{5}}$ ***a* = 7**

d) $\sqrt[4]{7^a \cdot 2} = 7\sqrt[4]{2}$ ***a* = 4**

e) $\sqrt[6]{5^4} = \sqrt[6:a]{5^{4:a}}$ ***a* = 1**

f) $25\sqrt[6]{10} = \sqrt[6]{5^a \cdot 10}$ ***a* = 12**

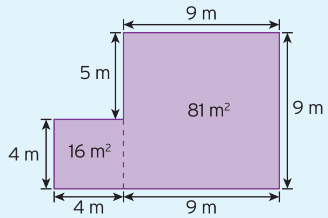
g) $\sqrt[10]{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^{20}} = a\sqrt[5]{2^4 \cdot 3^3}$ ***a* = 25**

13. Elabore um problema que envolva o cálculo de radicais e dê para um colega resolver.

Dica: Você pode pensar em problemas que envolvam as medidas das áreas de quadrados ou as medidas de volumes de cubos.
Resposta pessoal.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **2**, além de calcular a medida dos lados de cada quadrado, os estudantes precisam perceber que nos locais em que há sobreposição de lados não será colocado arame, conforme indicado na figura a seguir.



É importante que os estudantes percebam que a soma dessas medidas não equivale à soma das medidas do perímetro de cada quadrado. Além disso, é preciso calcular o dobro da medida do perímetro do terreno, pois o enunciado informa que são duas voltas de arame.

- Na atividade **3**, como a caixa é cúbica, basta calcular a raiz cúbica do volume da caixa para descobrir a medida de sua aresta. Oriente os estudantes a fatorar o radicando 35 937.
- Ao propor a atividade **4**, converse com os estudantes sobre o buraco da camada de ozônio e a Rede Zero Carbono, que busca a neutralidade em emissões de carbono até 2050. Saiba mais no *site* das Nações Unidas, disponível em: https://news.un.org/pt/story/2020/12/1735052 (acesso em: 9 jun. 2022).
- Verifique se os estudantes perceberam que, na atividade **5**, deve-se encontrar o número entre 50 e 70 cuja raiz é exata.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nesta página permitem aos estudantes resolver e elaborar problemas estabelecendo as relações entre potenciação e radiciação, por meio da representação de uma raiz como potência de expoente fracionário, desenvolvendo a habilidade **EF08MA02**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para auxiliar os estudantes que apresentarem dificuldade com o cálculo das raízes, relacione a radiciação com sua operação inversa, a potenciação.

Retome os conteúdos de fatoração e as operações com números racionais, especialmente na forma fracionária, e a transformação destes da representação decimal para a fracionária e vice-versa.

Representar os quadrados perfeitos e suas raízes na reta numérica pode facilitar a determinação de raízes aproximadas.

Dê exemplos simples de aplicação das propriedades dos radicais e amplie gradativamente o grau de dificuldade dos exemplos, até que os estudantes consigam fazer generalizações dessas propriedades e suas aplicações.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, o tema abordado é o orçamento familiar. Convide os estudantes a pensar, com base no texto e nas perguntas, sobre o orçamento familiar como ferramenta de grande utilidade na vida cotidiana.
- É importante que os estudantes compreendam como o orçamento familiar contribui para o planejamento de gastos de acordo com a realidade e as possibilidades financeiras da família. Incentive-os a refletir sobre a participação de cada um no orçamento e a identificar atitudes que podem ser ressignificadas no dia a dia e que colaborem para um orçamento familiar equilibrado. Nesse contexto, é importante debater sobre as consequências ao não saber administrar as finanças, pois isso pode abalar a saúde mental de muitas pessoas diante de possíveis situações conflituosas em virtude de crises financeiras. Essa conversa desenvolve os **Temas Contemporâneos Transversais** Educação Financeira e Saúde, que pertencem às macroáreas **Economia** e **Saúde**.
- Verifique se os estudantes percebem que os valores da última coluna da planilha que Arthur fez é a razão entre os valores da penúltima e da antipenúltima colunas.
- As atividades propostas nessa seção têm o objetivo de preparar os estudantes para resolver questões do cotidiano. Além disso, permite que eles desenvolvam a autonomia e o protagonismo, ao investigr e analisar um orçamento familiar. Propostas como essa estão baseadas na metodologia de aprendizagem baseada em problemas.
- O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes deve ser preservada. Para isso, valorize situações em que eles se sintam acolhidos, incentivando o desenvolvimento da empatia e da solidariedade.

  A Educação Financeira tem um papel importante nesse contexto, pois os problemas que envolvem o uso do dinheiro visam aproximar teoria e prática, desenvolvendo a capacidade dos estudantes de gerir as próprias finanças. Além disso, permite a eles que se sintam inseridos na sociedade ao se depararem com uma situação real de compra e venda com pais ou responsáveis, colaborando com o aumento da autonomia e da autoestima nesses momentos.

Responsabilidade

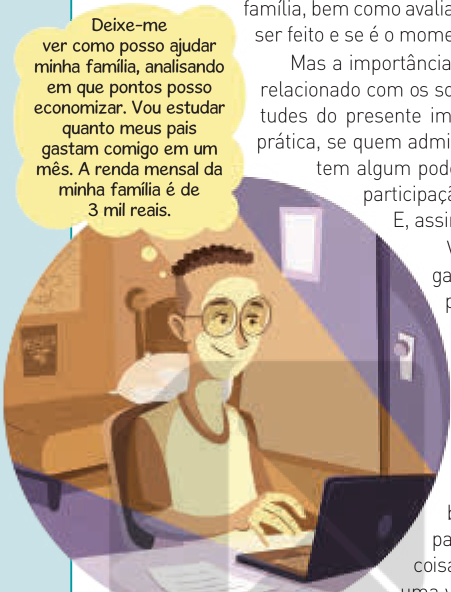
O assunto tratado nessa seção possibilita a aproximação com o valor responsabilidade, ao refletir sobre as ações que podem ser postas em prática que contribuam com o orçamento familiar, agindo de forma responsável em relação a seus gastos e auxiliando sua família nesse aspecto.

AMPLIANDO HORIZONTES

Pequenas atitudes, grandes oportunidades!

Como suas ações individuais podem impactar o orçamento familiar? Qual é seu papel nisso? Para ajudar a responder a essas perguntas, vamos começar lembrando que o orçamento familiar é uma ferramenta financeira, geralmente uma tabela, em que registramos o que ganhamos (receitas) e quanto pretendemos ou precisamos gastar. Trata-se de uma ferramenta importante, pois ajuda a planejar os gastos levando em consideração a realidade e as possibilidades financeiras da família, bem como avaliar o que realmente precisa ser atendido, o que é possível ser feito e se é o momento adequado para isso.

Mas a importância do orçamento vai muito além disso. Ele também está relacionado com os sonhos e com a realização deles, pois os planos e as atitudes do presente impactam a realização dos sonhos amanhã. Porém, na prática, se quem administra o dinheiro são seus responsáveis, será que você tem algum poder de decisão? Vamos mostrar que você pode ter uma participação importante nas questões financeiras da sua família. E, assim, você pode, e muito, ajudar no orçamento familiar.



Você já parou para pensar quanto seus responsáveis gastam com você em um mês com alimentação, transporte, lazer, material escolar, cursos, saúde, entre outros gastos? Se você estiver envolvido com um ou alguns desses itens, pense de que maneira pode ajudar e (re)avaliar os gastos da sua família.

Tão importante quanto fazer o orçamento pessoal e familiar é ter atitude para resolver o problema, respeitando e reavaliando o que foi planejado. Se você identificou excessos, este é o momento de rever hábitos, mimos e comportamentos, mudando de atitude para reduzir as despesas, e redirecionar os gastos para coisas mais importantes, que beneficiem a todos, como uma viagem em família, uma reforma na casa ou uma doação de bens e de tempo.

Arquivo Página inicial Inserir Fórmula Dados Revisão Exibir

Descrição	Valor (R$)	Parte gasta com Arthur (R$)	Arthur (%)
Alimentação	800,00	200,00	25
Luz	120,00	40,00	33,3
Água	90,00	30,00	33,3
Telefone	50,00	10,00	20
Celular	150,00	50,00	33,3
Aluguel	800,00	0,00	0
Cartão de crédito	400,00	150,00	37,5
Lazer	250,00	200,00	80
Transporte	300,00	100,00	33,33
TOTAL	2.960,00	780,00	26,35

RESPOSTAS

1. Respostas pessoais. O objetivo dessa atividade é mostrar como pode ser desafiador montar um orçamento com base em uma renda de 3 mil reais. Você pode, em seguida, discutir com os estudantes a renda média das famílias brasileiras, mostrando dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Alguns pontos desse orçamento merecem uma avaliação especial. Por exemplo, por que os gastos com cartão de crédito quase chegam a 40% da receita? Seria possível economizar em lazer, por exemplo, participando de atividades gratuitas? Este pode ser um bom momento para trabalhar o peso (percentual) de cada despesa em relação à receita, pois ele é um bom indicador e possibilita reavaliar os custos e propor ações que diminuam o orçamento familiar. Conclua a questão reforçando a realidade brasileira e convidando os estudantes a pensar e a pesquisar que tipo de atitude poderia mudar essa situação.
2. Respostas pessoais. Você pode sugerir algumas atitudes, caso os estudantes estejam com dificuldade de elencá-las. Separar as despesas fixas das variáveis, por exemplo, pode ser um caminho para começar a identificar de que maneira as ações de um adolescente podem impactar o orçamento familiar. Ressalte que os hábitos de consumo são, muitas vezes, fontes de desperdícios que podem ser evitados. Dessa forma, os estudantes podem descobrir maneiras de contribuir para um orçamento familiar mais equilibrado, o que inclui ajustar gastos para atingir os objetivos almejados.

Para refletir Responda sempre no caderno.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir. **Consulte as respostas neste manual.**

1. Observem a situação ilustrada. O que vocês aprenderam com ela? Se estivessem no lugar da personagem, que medidas vocês proporiam para melhorar o orçamento familiar? O que vocês e seus familiares fariam com o dinheiro que sobrasse?
2. Listem cinco atitudes que vocês podem ter para ajudar a família de vocês no planejamento financeiro mensal. De que maneira essas atitudes podem auxiliar em médio e longo prazos?
3. Considerem uma família que, logo no início do mês, fez o orçamento doméstico a seguir, com base nas despesas do mês anterior.

Receitas	
Descrição	**Valor (R$)**
Salário I	2 500,00
Salário II	1 300,00
Total	**3 800,00**

Despesas	
Descrição	**Valor (R$)**
Alimentação	800,00
Luz, água e telefone	580,00
Aluguel	1 200,00
Cartão de crédito	1 000,00
Lazer	200,00
Transporte	400,00
Total	**4 180,00**

a) Quais são os possíveis problemas financeiros com o orçamento doméstico dessa família? Essa família precisa reduzir despesas? Por quê?

b) Imaginem que essa fosse a situação da família de vocês. Que sugestões vocês dariam para resolver os problemas identificados?

c) Seria possível a essa família fazer alguma doação? Se sim, de que tipo?

João Picoli/ID/BR

29

3. a) Resposta possível: O principal problema do orçamento dessa família é o valor total das despesas ser maior que o valor total das receitas, o que implica dívidas ou não pagamento de todas as contas. Sim, essa família precisa reduzir suas despesas para adequá-las ao orçamento disponível.

b) Resposta pessoal. Opte por colocar sugestões para que a discussão não gire apenas em torno do que cortar, mas também do por que cortar, e de como se chegou à situação de se gastar mais do que se ganha. O cartão de crédito e o lazer serão, possivelmente, os itens que os estudantes mais escolherão. Nesse exemplo de orçamento familiar, há um problema em potencial nos gastos do cartão de crédito. Mas talvez seja possível avaliar outros gastos, como água, luz e telefone, e discutir temas transversais, como desperdício de água, de energia elétrica, etc.

c) Resposta possível: Sim. O fato de o orçamento familiar estar apertado não impede que essa família doe brinquedos e roupas que não usam mais para campanhas ou instituições de caridade ou, por meio de trabalho voluntário, doe seu tempo, por exemplo, auxiliando crianças doentes em hospitais ou idosos em casas de repouso. Deixe os estudantes falar sobre isso e compartilhar suas crenças e seus valores a respeito desse tema. Acreditamos que o respeito às pessoas, a solidariedade e a vontade de ajudar podem e devem estar presentes em nossa sociedade.

DE OLHO NA BASE

Essa seção contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**, permitindo que os estudantes sintam segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

Além disso, refletir sobre esse tema auxilia os estudantes a argumentar com base em dados para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que promovam o consumo responsável em âmbito local, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 7**.

Ao se reunirem em duplas e discutirem as questões propostas no *Para refletir*, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, desenvolvendo a **competência geral 9**.

OUTRAS FONTES

FERREIRA, V. R. M. *Decisões econômicas*: você já parou para pensar? 2. ed. São Paulo: Évora, 2011.

Esse livro traz uma análise do ponto de vista da psicologia econômica de como nós, seres humanos, tomamos decisões e como as propagandas têm um papel importante na forma como isso acontece.

HORNOS, A. P. *5 princípios da educação financeira*. Casa do Saber. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=_rtfqSmyPWo. Acesso em: 9 jun. 2022.

Esse vídeo trabalha valores como gratidão, respeito, cuidado, paciência, criatividade, entre outros. A responsabilidade se amplia do individual para o coletivo.

SOTON, C. *Consumo adolescente*. Programa Código de Barras, TV Brasil. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=HWpITjSW1YU. Acesso em: 9 jun. 2022.

A reportagem pode ser usada como atividade em sala de aula, convidando os estudantes a refletir, de forma crítica e responsável, sobre o consumismo na adolescência e o papel das propagandas nesse consumo.

Os delírios de consumo de Becky Bloom. Walt Disney Pictures, 2009 (106 min). Classificação: 12 anos.

Esse filme é uma adaptação do livro *Os delírios de consumo de Becky Bloom*, de Sophie Kinsella. É uma ótima oportunidade para discutir a temática da seção.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Para resolver a atividade **5**, os estudantes precisam substituir na fórmula dada o valor de *d*. Verifique se eles fatoram o número 20 para obter a velocidade pedida.
- Na atividade **6**, verifique se os estudantes percebem que, para ser maior que 10, o número deve ser maior que $\sqrt{100}$. Sugira a eles que reescrevam os números, inserindo os fatores no radical, e, depois, os comparem com $\sqrt{100}$.
- Para realizar a atividade **9**, sugira aos estudantes que escrevam o número apresentado em cada alternativa na forma de potência de base 3.
- Uma possível resolução da atividade **11** é aplicar as propriedades da multiplicação e da divisão de potências de mesma base.
- Na atividade **12**, calcula-se inicialmente a medida da altura da menina, em metro, utilizando o valor do IMC e a medida da massa dela. Em seguida, calcula-se o RIP. Chame a atenção dos estudantes que, nesse segundo cálculo, o valor da medida da altura é dado em centímetro. Logo, eles devem realizar a transformação de unidades de 1,6 m para 160 cm antes de efetuarem o segundo cálculo.
- Na resolução da atividade **13**, inicie pedindo aos estudantes que leiam o texto e destaquem os dados que serão utilizados para resolver o problema.

  Para calcular quantos campos de futebol são devastados em um ano, deve-se dividir $32 \cdot 10^6$ por 8, que resulta em $4 \cdot 10^6$.

  Em seguida, os estudantes devem multiplicar esse valor pela medida da área de um campo de futebol, ou seja:

  $$4 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2} = 4 \cdot 10^4$$

  Os estudantes ainda precisam decidir entre as alternativas **d** e **e**. A diferença entre as duas alternativas é que a alternativa **d** considera que o exagero na comparação feita dá uma falsa impressão de gravidade, enquanto a alternativa **e** reconhece que é um fato realmente grave, sendo, portanto, a alternativa correta.
- A atividade **14** compara a medida da capacidade do aquífero Guarani com a do novo reservatório da Sabesp. Para isso, deve ser calculada a razão entre essas medidas. Lembre aos estudantes que é preciso convertê-las para a mesma unidade, ou seja, são 30 mil km^3 que devem ser convertidos em decímetro cúbico.

  Para efetuar essa conversão, o valor inicial deve ser multiplicado por 10^{12}.

  Como 1 dm^3 equivale a 1 L, a capacidade do aquífero Guarani mede $3 \cdot 10^{16}$ L.

  A capacidade do novo reservatório da Sabesp mede 20 milhões de litros, ou seja, $2 \cdot 10^7$ L. Assim, a razão entre as capacidades é $1{,}5 \cdot 10^9$. Pode-se concluir que a medida da capacidade do aquífero Guarani é $1{,}5 \cdot 10^9$ vezes maior que a do novo reservatório da Sabesp.

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Quanto vale a metade de 2^{2018}? Escreva na forma de uma potência. **2^{2017}**

2. O raio de um átomo de hidrogênio mede 0,000000005 cm. Escreva no caderno qual das alternativas a seguir representa esse número em notação científica. **Alternativa a.**

a) $5 \cdot 10^{-9}$ cm
b) $5 \cdot 10^{-9}$ m
c) $5 \cdot 10^{-8}$ cm
d) $5 \cdot 10^{-8}$ m
e) $0{,}5 \cdot 10^{-9}$ cm

3. Certa colônia de bactérias se reproduz duplicando-se a cada 30 minutos. Em dado instante, havia 1 000 bactérias nessa colônia. Após 2 horas desse instante, qual será o número de bactérias dessa colônia? **16 000 bactérias.**

4. Um biólogo observou o crescimento de uma planta aquática circular e percebeu que a cada três meses o diâmetro da planta triplicava. Se no início das observações o diâmetro da planta media 1 cm, qual será a medida do diâmetro da planta depois de um ano da primeira observação? **81 cm**

5. Escreva a alternativa correta no caderno.

Como a polícia técnica pode, após um acidente, determinar a velocidade que o carro estava desenvolvendo? A fórmula matemática $V = 14\sqrt{d}$ pode ser usada para determinar, aproximadamente, a velocidade *V*, em quilômetro por hora, que o carro desenvolvia. Essa fórmula utiliza a medida do comprimento *d*, em metro, referente às marcas de pneu que o veículo deixou no chão ao frear. Qual era a medida da velocidade aproximada de um carro que, no acidente, deixou no chão marcas de pneu com 20 metros de medida de comprimento? **Alternativa d.**

a) $20\sqrt{5}$ km/h
b) $20\sqrt{14}$ km/h
c) $14\sqrt{3}$ km/h
d) $28\sqrt{5}$ km/h
e) $42\sqrt{7}$ km/h

6. Escreva a alternativa correta no caderno.

(OBM) Quantos dos números abaixo são maiores que 10? **Alternativa c.**

$$3\sqrt{11},\ 4\sqrt{7},\ 5\sqrt{5},\ 6\sqrt{3},\ 7\sqrt{2}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

7. Se dobrarmos uma folha de papel ao meio repetidas vezes, podemos representar a quantidade de partes em que a folha ficará dividida usando potências de 2. Nesse caso, o expoente corresponde às seguintes etapas:

1ª etapa: Dobrar a folha ao meio uma vez.

Ilustrações: ID/BR

$2^1 = 2$

2ª etapa: Dobrar a folha ao meio duas vezes.

$2^2 = 4$

7. b) A quantidade de partes em que a folha ficará dividida pode ser representada por potências de 3.

Agora, reúna-se com um colega para responder aos itens a seguir.

a) O que significa, nesse caso, um expoente igual a zero? **Significa que a folha não foi dobrada.**

b) Como ficaria essa experiência se dobrássemos uma folha de papel de modo a obter 3 partes iguais em cada etapa?

c) Considerando a experiência do item **b**, em quantas partes a folha ficaria dividida na 5ª etapa? **243 partes ($3^5 = 243$).**

8. Qual é a metade da raiz quadrada do número $\frac{3^{80}}{2^{30}}$? Escreva na forma de uma potência. **$\frac{3^{40}}{2^{16}}$**

9. Escreva a alternativa correta no caderno.

(OBM) Qual dos números a seguir é o maior?

a) 3^{45}
b) 9^{20}
c) 27^{14}
d) 243^{9}
e) 81^{12}

Alternativa e.

10. Determine o valor da expressão $\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(-\frac{5}{4}\right)$. **$\frac{27}{2}$**

11. Escreva a alternativa correta no caderno.

O resultado da expressão numérica $5^3 : 5 \cdot 5^4 : 5 \cdot 5^5 : 5^6$ é: **Alternativa d.**

a) 55.
b) 5^{-4}.
c) $5^{\frac{1}{4}}$.
d) 625.
e) 5.

12. Escreva a alternativa correta no caderno.

(Enem) Embora o Índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, existem ainda inúmeras restrições teóricas ao uso e às faixas de normalidade preconizadas. O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com o modelo alométrico, tem uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões cúbicas e a altura, uma variável de dimensões lineares. As fórmulas que determinam esses índices são:

$IMC = \dfrac{massa\ (kg)}{[altura\ (m)]^2}$	$RIP = \dfrac{altura\ (cm)}{\sqrt[3]{massa\ (kg)}}$

C. G. S. Araujo; D. R. Ricardo. Índice de Massa Corporal: um questionamento científico baseado em evidências. *Arquivos Brasileiros de Cardiologia*, v. 79, n. 1, 2002 (adaptado).

Se uma menina, com 64 kg de massa, apresenta IMC igual a 25 kg/m^2, então ela tem RIP igual a **Alternativa e.**

a) 0,4 cm/kg$^{\frac{1}{3}}$.
b) 2,5 cm/kg$^{\frac{1}{3}}$.
c) 8 cm/kg$^{\frac{1}{3}}$.
d) 20 cm/kg$^{\frac{1}{3}}$.
e) 40 cm/kg$^{\frac{1}{3}}$.

13. Leia o problema e escreva a alternativa correta no caderno.

(Enem) Dados divulgados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais mostraram o processo de devastação sofrido pela Região Amazônica entre agosto de 1999 e agosto de 2000. Analisando fotos de satélites, os especialistas concluíram que, nesse período, sumiu do mapa um total de 20 000 quilômetros quadrados de floresta. Um órgão de imprensa noticiou o fato com o seguinte texto:

> **O assustador ritmo de destruição é de um campo de futebol a cada oito segundos.**

Considerando que um ano tem aproximadamente $32 \cdot 10^6$ s (trinta e dois milhões de segundos) e que a medida da área oficial de um campo de futebol é aproximadamente 10^{-2} km^2 (um centésimo de quilômetro quadrado), as informações apresentadas nessa notícia permitem concluir que tal ritmo de desmatamento, em um ano, implica a destruição de uma área de **Alternativa e.**

a) 10 000 km^2, e a comparação dá a ideia de que a devastação não é tão grave quanto o dado numérico nos indica.
b) 10 000 km^2, e a comparação dá a ideia de que a devastação é mais grave do que o dado numérico nos indica.
c) 20 000 km^2, e a comparação retrata exatamente o ritmo da destruição.
d) 40 000 km^2, e o autor da notícia exagerou na comparação, dando a falsa impressão de gravidade a um fenômeno natural.
e) 40 000 km^2, e, ao chamar a atenção para um fato realmente grave, o autor da notícia exagerou na comparação.

14. Leia o problema a seguir e indique a alternativa correta no caderno.

(Enem)

> **Técnicos concluem mapeamento do aquífero Guarani**
>
> O aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total de 1 200 000 quilômetros quadrados, dos quais 840 000 quilômetros quadrados estão no Brasil. O aquífero armazena cerca de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo.
>
> Na maioria das vezes em que são feitas referências à água, são usadas as unidades metro cúbico e litro, e não as unidades já descritas. A Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenagem é de 20 milhões de litros.
>
> Disponível em: http://noticias.terra.com.br. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

Comparando as capacidades do aquífero Guarani e desse novo reservatório da Sabesp, a capacidade do aquífero Guarani é **Alternativa e.**

a) $1{,}5 \cdot 10^2$ vezes a capacidade do reservatório novo.
b) $1{,}5 \cdot 10^3$ vezes a capacidade do reservatório novo.
c) $1{,}5 \cdot 10^6$ vezes a capacidade do reservatório novo.
d) $1{,}5 \cdot 10^8$ vezes a capacidade do reservatório novo.
e) $1{,}5 \cdot 10^9$ vezes a capacidade do reservatório novo.

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Consegui aplicar as propriedades de potência e de radicais?
- Consegui resolver problemas que envolvem cálculos com potências e raízes?
- Aprendi a simplificar expressões que envolvem potências e raízes?
- Compreendi onde e como utilizar a notação científica?
- Entendi a relação inversa entre potenciação e radiciação?
- Sei determinar raízes exatas e aproximadas de um número racional?
- Consegui relacionar potenciação e radiciação por meio da representação de uma raiz como potência de expoente fracionário?
- Ampliei meus conhecimentos sobre potenciação e radiciação?
- Procurei solucionar minhas dúvidas com os demais colegas e o professor?
- Participei efetivamente das atividades em grupo, expondo minhas opiniões e observando os pontos de vista dos colegas?

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para auxiliar os estudantes com dúvidas nos problemas propostos, peça a eles que leiam atentamente o enunciado, destacando as informações importantes para a compreensão e a resolução do problema. Além dos dados numéricos, algumas informações podem vir permeadas no texto e, muitas vezes, passam despercebidas para os estudantes. Explique a eles a importância de realizarem uma leitura inicial para entender a situação proposta e, em seguida, uma segunda leitura, destacando as informações necessárias para traçar a estratégia de resolução do problema.

Se julgar necessário, retome a transformação de unidades de comprimento, de capacidade e de volume. Aproveite para reforçar a importância desse conteúdo e mostrar como ele é aplicado e se faz presente no cotidiano, por meio das reportagens apresentadas nos enunciados das questões.

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
7, 9 e 10.

Competência específica de Matemática
3

Tema Contemporâneo Transversal
Economia

Habilidade
(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

UNIDADE 2

CÁLCULO ALGÉBRICO

Buena Vista/Everett Collection/Fotoarena; Walt Disney Studios/LANDMARK MEDIA/Alamy/ Fotoarena. Fotomontagem: ID/BR

SOBRE A UNIDADE

Nesta unidade, os estudantes terão oportunidade de utilizar letras para representar números ou grandezas, reconhecer expressões algébricas e encontrar o valor numérico de uma expressão algébrica. Também será realizado um trabalho de leitura e de interpretação de enunciados para transcrever a linguagem discursiva para a algébrica. Além disso, serão explorados os conceitos de monômio e de polinômio e as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de monômios e de polinômios. Os estudantes vão resolver atividades que possibilitam a compreensão da aplicação de polinômios em situações contextualizadas.

Vale destacar que esta unidade propicia aos estudantes a compreensão acerca das relações entre conceitos e procedimentos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria.

CAPÍTULO 1
Expressões algébricas

CAPÍTULO 2
Polinômios

PRIMEIRAS IDEIAS

Você já parou para pensar em como são feitos os filmes de animação?
Acredite: antigamente as animações eram feitas à mão e, para os movimentos das personagens, eram necessários inúmeros desenhos. Com o avanço das técnicas de computação gráfica, depois de determinar o modo de andar de uma personagem, por exemplo, o computador faz o resto do trabalho nas animações.
A computação gráfica também é a área da computação responsável por criar imagens cada vez mais parecidas com a realidade e, para isso, utiliza o conceito de polinômios.

1. Você conhece filmes criados por computação gráfica?
2. No texto aparece a palavra "polinômio". Você sabe o que ela significa?

← *Toy Story* foi o primeiro filme criado totalmente por computação gráfica, em 1995. Em 2019, foi lançado o *Toy Story* 4. A evolução da computação gráfica permitiu imagens mais parecidas com a realidade no filme de 2019 (em primeiro plano) em comparação com as do filme lançado em 1995 (nos destaques).

PRIMEIRAS IDEIAS

- Na imagem de abertura da unidade, temos a comparação entre alguns destaques da animação *Toy Story*, primeiro filme criado totalmente por computação gráfica em 1995, e uma cena de *Toy Story 4*, lançado em 2019. Nessa imagem, é possível ver como a computação gráfica evoluiu nesse período de tempo. Uma sugestão para saber mais sobre esse tema é pesquisar vídeos como o disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=4SfmN0DHwJY (acesso em: 13 jul. 2022).
- Na conversa com os estudantes, exemplifique outras áreas em que a computação gráfica é utilizada, como engenharia (simulação de eventos físicos e químicos) e medicina (análise de exames por imagem, como tomografia computadorizada ou ultrassom 3-D).

RESPOSTAS

1. Resposta pessoal. Hoje em dia, vários filmes utilizam computação gráfica para produzir efeitos especiais. É possível que os estudantes tenham assistido a *Jurassic World*, *Carros*, *Hotel Transilvânia*, *Vingadores: ultimato*, *Shazan*, *Soul*, entre outros.
2. Resposta pessoal. Se julgar oportuno, converse com os estudantes sobre o significado do prefixo *poli-*, perguntando sobre outras palavras que têm esse prefixo, por exemplo, polígono, polissílabo e poliglota. Verifique se eles compreenderam que esse prefixo significa "vários" ou "muitos".

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Situações que envolvem o uso de expressões algébricas.
- Valor numérico de uma expressão algébrica.

Objetivos

- Representar situações por meio de expressão algébrica.
- Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de utilizar a linguagem matemática para representar diversas situações e compreender o uso de variáveis para calcular o valor numérico de uma expressão algébrica. As situações propostas favorecem a compreensão dos estudantes com relação à formulação de expressões algébricas para resolver problemas.

SITUAÇÕES QUE ENVOLVEM EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

- Oriente os estudantes a observar a imagem e pergunte a eles se conhecem o significado de "pressão atmosférica". Comente que, quanto maior a altitude, menor a pressão atmosférica sobre um corpo, pois a massa de ar existente acima desse corpo será menor.

Capítulo 1

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

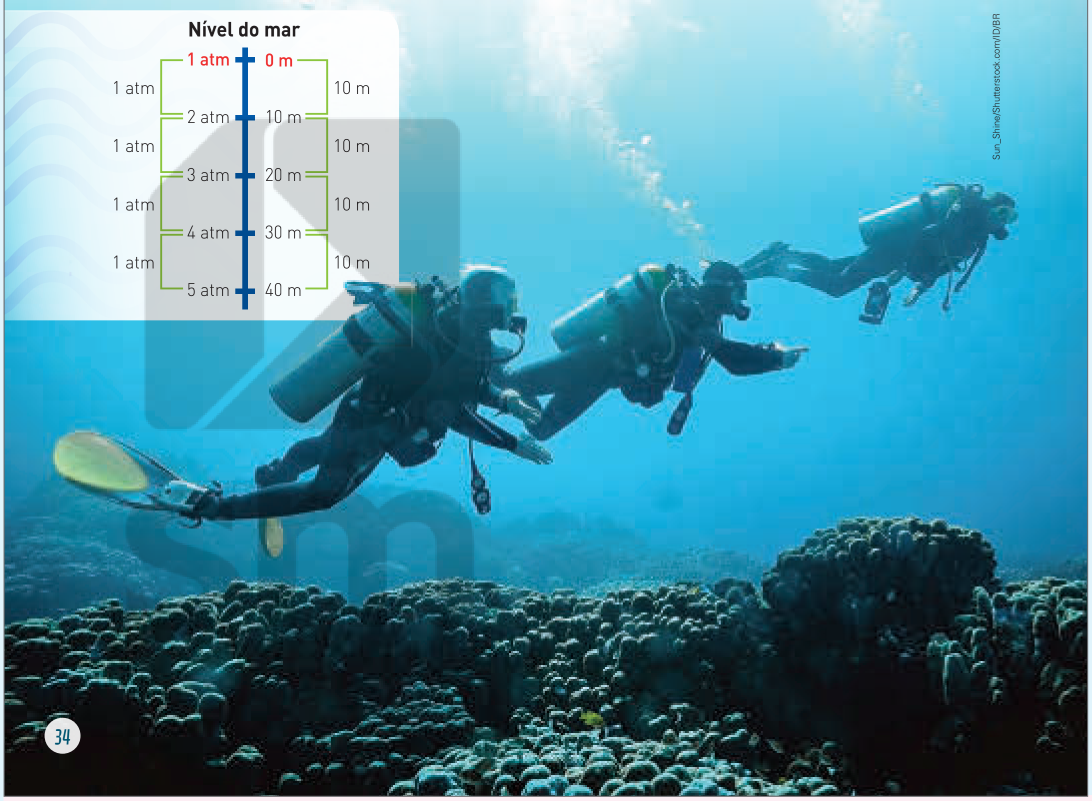
Para facilitar a compreensão dos conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes saibam realizar operações com números racionais. Além disso, o conhecimento adquirido neste capítulo será fundamental para o estudo de polinômios, de equações e de funções.

Situações que envolvem expressões algébricas

Você já ouviu falar que jogadores de futebol, para disputarem uma partida em cidades com altitude elevada, precisam se adaptar a ela? Ou que em determinadas altitudes a bola "corre mais"? Esses fatores estão relacionados com a pressão do ar, pois, apesar de não parecer, o ar exerce pressão sobre as nossas cabeças.

No nível do mar, a pressão atmosférica mede 1 atm (1 atmosfera). Em cidades que ficam acima do nível do mar, a medida da pressão é menor que 1 atm; já em cidades abaixo do nível do mar, a pressão atmosférica aumenta em relação à pressão no nível do mar.

Em um mergulho, a pressão aumenta aproximadamente 1 atm a cada 10 metros de profundidade, como pode ser visto no esquema.



Mergulhadores no mar Vermelho, em Dahab, no Egito. Foto de 2022.

OUTRAS FONTES

Souza, E. R. de; Diniz, M. I. de S. V. Álgebra: seu significado e suas funções. *In*: *Álgebra*: das variáveis às equações e funções. São Paulo: Departamento de Educação, CAEM-IME/USP, 1994. p. 4-10. Coleção Ensino Fundamental, v. 5.

Nesse livro, que aborda o ensino de Álgebra na Educação Básica, defende-se que, embora a ideia da generalização da aritmética seja importante para que os estudantes consigam compreender alguma abstração, o professor não deve se limitar a esse conceito.

Conhecendo a medida x, em metro, da profundidade do mergulhador, podemos determinar a pressão suportada por ele, em atm, dividindo o valor x por 10 e adicionando 1 ao quociente, ou seja, usando a expressão $\frac{x}{10} + 1$. Dizemos que $\frac{x}{10} + 1$ é uma **expressão algébrica**.

Expressões matemáticas formadas por números e letras ou somente por letras são chamadas de expressões algébricas.

Em expressões desse tipo, cada letra pode ser substituída por qualquer valor numérico. Por isso, as letras são chamadas de **variáveis**.

Veja alguns exemplos de situações que podem ser representadas por expressões algébricas.

Exemplos

A. Um número racional adicionado à sua terça parte.
Sendo x o número desconhecido, temos:

$$x + \frac{x}{3},\ x \in \mathbb{Q}$$

B. O inverso de um número racional adicionado ao dobro desse número.
Sendo y o número desconhecido, temos:

$$\frac{1}{y} + 2 \cdot y,\ y \in \mathbb{Q}^*$$

C. Um número inteiro adicionado ao inverso da soma de outros dois números inteiros.
Sendo a, b e c os números inteiros desconhecidos, temos:

$$a + \frac{1}{b + c},\ a, b \text{ e } c \in \mathbb{Z}$$

D. A conta de gás natural de uma residência cobra um valor fixo de R\$ 13,40 pela faixa de consumo contratada mais R\$ 8,60 por metro cúbico consumido. Considerando m a quantidade de metros cúbicos utilizados por um cliente durante um mês, podemos representar o valor que ele pagará na conta por:

$$\overbrace{13{,}40}^{\text{valor fixo}} + \underbrace{8{,}60}_{\text{valor pago por metro cúbico}} \cdot \overbrace{m}^{\text{metros cúbicos utilizados}}$$

E. Um vendedor foi contratado por uma loja. Seu salário será composto de uma parte fixa de R\$ 1800,00 e a outra parte será composta de 8% de comissão sobre suas vendas.
Para obter a expressão que determina o salário desse vendedor, usaremos a letra t para representar o total de vendas realizadas no mês. Assim, temos:

$$\overbrace{1\,800}^{\text{valor fixo}} + \overbrace{8\%}^{\text{comissão}} \text{ de } t = 1\,800 + \frac{8}{100}t = 1\,800 + 0{,}08t$$

Portanto, o salário desse vendedor pode ser representado pela expressão algébrica $1\,800 + 0{,}08t$.

- Nessa página do Livro do Estudante há exemplos de como as expressões algébricas podem ser utilizadas para resolver problemas, generalizar e representar situações matemáticas.
- Em relação à generalização, explique aos estudantes que, quando utilizamos, por exemplo, a expressão $3 \cdot n$, ou $3n$, para representar o número de arestas de um prisma, em que n é o número de lados do polígono que constitui sua base, estamos fazendo uma generalização.
- Da mesma forma, quando queremos escrever uma expressão que indica um número par, podemos utilizar a expressão $2n$, com n inteiro. Ou, ainda, quando queremos escrever uma expressão que indica um número ímpar, podemos utilizar a expressão $2n + 1$, com n inteiro.
- Explique aos estudantes que há outras situações que podem ser representadas por meio de expressões algébricas, reforçando a ideia de que elas são utilizadas em situações nas quais os números de valor desconhecido são denominados variáveis e representados por letras.
- Comente com os estudantes que, nas expressões algébricas, é comum indicar uma multiplicação sem usar o sinal. Por exemplo, a expressão $1800 + 0{,}08t$ representa $1800 + 0{,}08 \cdot t$.

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

François Viète foi o primeiro matemático a utilizar a mesma letra para identificar várias potências de uma mesma base. Comente com os estudantes que ele usava, por exemplo, *A quadratum* (A^2) e *A cubum* (A^3).

DE OLHO NA BASE

As atividades desta página permitem integrar os conceitos e os procedimentos dos campos da Matemática – Aritmética, Álgebra e Geometria –, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

François Viète

François Viète é considerado um dos grandes nomes da Matemática do final do século XVI. Estudou Direito e exerceu atividade relativa à área, mas dedicou seu tempo livre aos estudos matemáticos e fez importantes contribuições a diversos campos, como a Trigonometria, a Geometria, a Aritmética e a Álgebra. Instituiu o uso de vogais para representar quantidades desconhecidas (as incógnitas) e de consoantes para representar grandezas ou números supostamente conhecidos ou dados (os parâmetros).

Fonte de pesquisa: Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach. *História da Matemática*. Tradução: Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

François Viète (1540-1603).

Agora é com você! No texto deste boxe, você viu que François Viète, ao utilizar letras para representar quantidades desconhecidas, grandezas e parâmetros, trouxe um grande avanço para a Matemática. Você consegue identificar como essa estratégia pode ajudá-lo na resolução de alguns problemas do dia a dia? Compartilhe suas conclusões com os colegas. **Resposta pessoal.**

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Escreva uma expressão algébrica que represente cada um dos itens a seguir.

a) O antecessor de um número inteiro. **1. a)** $n - 1, n \in \mathbb{Z}$

b) A raiz quadrada de um número racional não negativo. $\sqrt{x}, x \in \mathbb{Q}_+^*$

c) O dobro de um número inteiro adicionado ao inverso de outro número inteiro. **c)** $2a + \frac{1}{b}, a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$

d) O triplo de um número inteiro adicionado à metade de outro número inteiro. **d)** $3n + \frac{t}{2}, n \in \mathbb{Z}$ e $t \in \mathbb{Z}$

e) O quadrado de um número racional. **e)** $x^2, x \in \mathbb{Q}$

f) A metade da diferença entre dois números naturais. $\frac{x - y}{2}, x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$

g) A diferença entre o dobro de certo número inteiro e a metade de outro número inteiro. $2m - \frac{n}{2}, m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$

2. Considerando dois números inteiros, distintos e não nulos *a* e *b*, represente com uma expressão algébrica o que é pedido em cada item.

a) A soma desses números. $a + b$

b) A diferença entre o primeiro número e o segundo número. $a - b$

c) O produto desses números. $a \cdot b$

d) O produto do inverso desses números. **2. d)** $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

e) O dobro do cubo da soma desses números. $2(a + b)^3$

f) O triplo do quadrado da diferença entre o primeiro número e o segundo número. $3 \cdot (a - b)^2$

g) A raiz quadrada da soma desses dois números. $\sqrt{a + b}$

3. Classifique as afirmações em verdadeiras ou falsas. Depois, justifique as falsas.

a) A expressão $x + 1$ representa o sucessor de um número natural se *x* for um número natural. **Verdadeira.**

b) A expressão $\frac{10}{x}$ representa um número racional mesmo se *x* for igual a zero.

3. b) Falsa. Não existe divisão por zero, ou seja, deve-se considerar $x \neq 0$.

c) A expressão $x - 5$ representa um número inteiro negativo se *x* for um número natural menor que 7.

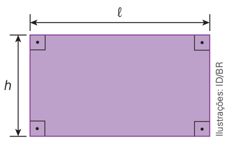
3. c) Falsa. $x - 5$ representa um número inteiro negativo se *x* for um número natural menor que 5.

d) A expressão $\sqrt{x}$ representa um número natural, qualquer que seja o valor de *x*.

3. d) Falsa. $\sqrt{x}$ representa um número natural se *x* for um número quadrado perfeito.

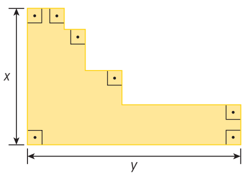
4. Escreva uma expressão para indicar a medida do perímetro das figuras a seguir.

a)



$2\ell + 2h$

b)



$2x + 2y$

36

OUTRAS FONTES

Veloso, D. S.; Ferreira, A. C. Uma reflexão sobre as dificuldades dos alunos que se iniciam no estudo da Álgebra. *In*: X Semana da Matemática e II Semana da Estatística, 2010. *Revista da Educação Matemática da UFOP*, v. I, 2011. Disponível em: http://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/1292/1/EVENTO_Reflex%C3%A3oDificuldadesAlunos.pdf. Acesso em: 13 jul. 2022.

Esse artigo apresenta algumas reflexões sobre as dificuldades dos estudantes que se iniciam no estudo da Álgebra e aponta alguns caminhos para o ensino e a aprendizagem desse conteúdo.

Valor numérico de uma expressão algébrica

Ao substituir as variáveis de uma expressão algébrica por números e efetuar as operações indicadas na expressão, obtemos um **valor numérico**.

Exemplos

A. Considere a expressão $\sqrt{9} - \frac{7}{3}y + xt^2$. Vamos obter o valor numérico dela para $x = 9$, $y = 3$ e $t = 1$, fazendo:

$$\sqrt{9} - \frac{7}{3}y + xt^2 =$$
$$= \sqrt{9} - \frac{7}{3} \cdot 3 + 9 \cdot 1^2 =$$
$$= 3 - 7 + 9 \cdot 1 =$$
$$= -4 + 9 =$$
$$= 5$$

Então, dizemos que, para x igual a 9, y igual a 3 e t igual a 1, o valor numérico da expressão algébrica $\sqrt{9} - \frac{7}{3}y + xt^2$ é 5.

B. Os terrenos de um loteamento são retangulares, e a medida da largura de cada um deles corresponde a um terço da medida do comprimento menos 2. Isso significa que, se a medida do comprimento do terreno é c, a medida da largura é dada por $\frac{c}{3} - 2$.

Danilo Souza/ID/BR

Vamos imaginar duas possíveis medidas para o comprimento c do terreno e, em seguida, determinar a medida da largura.

- Para $c = 30$, temos:

$$\frac{c}{3} - 2 =$$
$$= \frac{30}{3} - 2 =$$
$$= 10 - 2 =$$
$$= 8$$

- Para $c = 45$, temos:

$$\frac{c}{3} - 2 =$$
$$= \frac{45}{3} - 2 =$$
$$= 15 - 2 =$$
$$= 13$$

Dizemos que o valor numérico da expressão $\frac{c}{3} - 2$ é 8 para c igual a 30 e 13 para c igual a 45.

Assim, uma possibilidade é o terreno medir 30 metros de comprimento e 8 metros de largura. Outra possibilidade é o terreno medir 45 metros de comprimento e 13 metros de largura.

VALOR NUMÉRICO DE UMA EXPRESSÃO ALGÉBRICA

- Nessa fase da aprendizagem, mais que realizar cálculos algébricos, é importante que os estudantes atribuam significado às expressões algébricas e entendam as letras como símbolos que substituem números para representar quantidades quaisquer.
- No exemplo **B**, ao escrever $\frac{c}{3} - 2$ como a expressão que representa a medida da largura dos terrenos de um loteamento, os estudantes devem perceber que, substituindo a letra c por qualquer número positivo que represente a medida do comprimento do terreno, obtém-se a medida da largura desse terreno. Embora, nesse caso, a letra c não possa assumir valores menores que 6, é possível obter a medida da largura de qualquer terreno desse loteamento conhecendo a medida de seu comprimento.

- O desenvolvimento do pensamento algébrico e de sua linguagem possibilita aos estudantes pensar genericamente, percebendo e descrevendo regularidades. Favorece, também, a autonomia na aprendizagem da Matemática, uma vez que tais procedimentos estimulam a capacidade de abstração.
- É importante que os estudantes percebam que, para representar um mesmo número, deve-se utilizar a mesma letra. Quando uma representação matemática contém letras diferentes, significa que os números representados podem ser diferentes.

RESPOSTA

6.

	-1	$-2{,}5$	0	$\frac{1}{3}$
x^2	1	6,25	0	$\frac{1}{9}$
$-x + x$	0	0	0	0
$3x - 2$	-5	$-9{,}5$	-2	-1
$\frac{x}{2} + 3$	2,5	1,75	3	$\frac{19}{6}$

DE OLHO NA BASE

As atividades destas páginas permitem que os estudantes utilizem o conceito de valor numérico de expressões algébricas, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA06**.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

5. Determine o valor numérico das expressões algébricas para os valores indicados.

a) $n^2 + 2n - 30$ para $n = 12$. **138**

b) $\frac{x}{3} + x + 5$ para $x = 18$. **29**

c) $3a^2 - b^2$ para $a = 9$ e $b = -4$. **227**

d) $\frac{y - 7}{4}$ para $y = 3$. **-1**

e) $\sqrt{k} + 2k - \frac{1}{3}$ para $k = 4$. **$\frac{29}{3}$**

6. Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o com os valores numéricos das expressões algébricas (na primeira coluna) para os valores de x, dados na primeira linha. **Consulte a resposta neste manual.**

	-1	$-2{,}5$	0	$\frac{1}{3}$
x^2				
$-x + x$				
$3x - 2$				
$\frac{x}{2} + 3$				

7. Determine o valor numérico das expressões algébricas para os valores indicados.

a) $3x^2 - 2x + 4$ para $x = 2$. **12**

b) $3x^2 - 2x + 4$ para $x = -2$. **20**

c) $n^2 + 2n - 30$ para $n = 5$. **5**

d) $\frac{x + 22}{4}$ para $x = 50$. **18**

e) $(2t + 1)^2 \cdot (t - 1)$ para $t = 3$. **98**

f) $\frac{3y + 1}{y - 5}$ para $y = 5$. **Não existe.**

8. As expressões a seguir apresentam mais de uma variável. Determine o valor numérico de cada uma delas considerando os valores indicados.

a) $\frac{3a - b}{1 - b}$ para $a = -1$ e $b = 3$. **3**

b) $\frac{a + b}{1 - ab}$ para $a = 1$ e $b = -2$. **$-\frac{1}{3}$**

c) $\frac{a^2 - 5b}{c}$ para $a = 2$, $b = -1$ e $c = 3$. **3**

d) $\frac{5a - b}{a^2 - 3b^2}$ para $a = -1{,}5$ e $b = 2{,}31$. **Aproximadamente 0,71.**

9. Escreva no caderno a alternativa correta.

Dada a expressão algébrica $\sqrt{x^2 + 4x + 4}$, é correto afirmar que seu valor numérico para $x = 2$ é: **Alternativa b.**

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16 e) 32

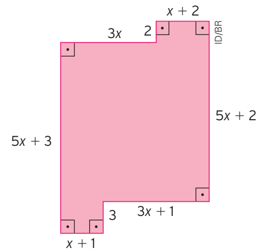
10. Escreva no caderno a alternativa correta.

O valor numérico da expressão algébrica $\frac{m^2 - 5n}{5m + n^2}$ para $m = -1$ e $n = -3$ é: **Alternativa c.**

a) 2 b) -2 c) 4 d) -4 e) 8

11. Escreva uma expressão algébrica que represente o quadrado de um número somado ao quadrado de outro número. Calcule o valor numérico dessa expressão para os números 5 e 10. **$n^2 + t^2$; 125**

12. Sabendo que $x = 3$, determine a medida do perímetro do polígono a seguir, em centímetro. **68 cm**



13. Para um campeonato de futebol, o professor de Educação Física formou 15 times, colocando uma quantidade x de estudantes em cada time. Após ter feito a divisão dos times, o professor escolheu outros 6 estudantes para serem ajudantes durante o campeonato. Faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Determine a expressão algébrica que representa a quantidade de estudantes que jogarão no campeonato. **$15x$**

b) Considerando 11 o valor de x, calcule a quantidade total de estudantes e a quantidade de estudantes que participarão como jogadores no campeonato. **171 estudantes; 165 estudantes.**

ESTRATÉGIAS DE APOIO

A fim de incentivar o desenvolvimento de estratégias para representar expressões algébricas e também determinar o valor numérico das expressões, apresente aos estudantes as seguintes situações:

1. A medida do comprimento de um terreno retangular é 10 metros maior que a de sua largura. Se a largura mede x metros, expresse:

   a) a medida do comprimento do terreno; $x + 10$

   b) a medida do perímetro do terreno; $x + 10 + x + x + 10 + x$

   c) a medida da área do terreno; $x \cdot (x + 10)$

   d) o valor numérico da medida do perímetro quando $x = 15$ m; 80 m

   e) o valor numérico da medida da área para $x = 20$ m. 600 m²

   Oriente os estudantes a desenhar a figura que representa o terreno, pois isso auxilia na compreensão da situação.

2. Escreva uma expressão algébrica que expresse a sentença dada em cada item, usando as letras a e b para representar os números.

   a) A metade da diferença entre dois números. $\frac{a - b}{2}$

   b) A diferença entre o dobro de um número e a metade de outro. $2a - \frac{b}{2}$

   c) Um número adicionado ao quadrado de seu sucessor. $a + (a + 1)^2$

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. Considere dois números racionais a e b. Represente com uma expressão algébrica o que se pede em cada item.

a) A décima parte da soma desses dois números.

b) O triplo do produto desses dois números.

c) A soma dos quadrados desses dois números.

d) O quadrado da soma desses dois números.

e) A raiz quadrada do quíntuplo da diferença entre esses dois números.

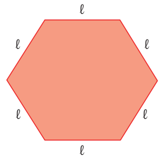
f) O triplo do cubo da soma desses dois números.

1. a) $\frac{a+b}{10}$ **b)** $3ab$ **c)** $a^2 + b^2$ **d)** $(a+b)^2$ **e)** $\sqrt{5(a-b)}$ **f)** $3(a+b)^3$

2. Se x representa a quantidade de carteiras em uma sala de aula e y representa a quantidade de cadeiras, então a expressão $x + y$ representa um número inteiro negativo ou um número natural? **Um número natural.**

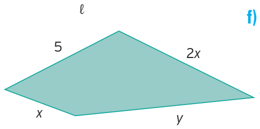
3. Escreva uma expressão algébrica que represente a medida do perímetro das figuras a seguir.

a)



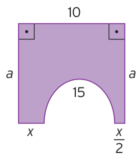
6ℓ

b)



$3x + y + 5$

c)

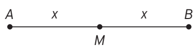


$2a + \frac{3x}{2} + 25$

4. Monte uma expressão algébrica para representar a metade de um número mais a terça parte desse número menos 1. Em seguida, calcule o valor dessa expressão se o número mencionado for 12. **$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - 1$; 9**

5. Expresse algebricamente a medida do segmento de extremidades A e B nos casos a seguir.

a)

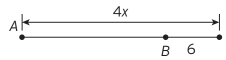


$2x$

b)

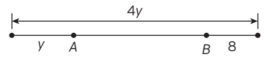
$3x + 4$

c)



$4x - 6$

d)



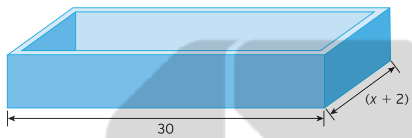
$3y - 8$

6. Uma família produz brigadeiro caseiro para vender. Cada brigadeiro é vendido por R$ 4,50 e, para a produção de cada um, são gastos R$ 2,00 de ingredientes. Para calcular o lucro ou prejuízo na venda do produto, os integrantes da família utilizam a seguinte expressão:

$$4{,}50b - 2{,}00p$$

A variável b representa a quantidade de brigadeiros vendidos e a variável p representa a quantidade de brigadeiros produzidos. Em um final de semana, foram produzidas 1 200 unidades de brigadeiros e foram vendidas 1 187 unidades. A família teve lucro ou prejuízo? De quanto? **Lucro de R$ 2 941,50.**

7. Observe a caixa sem tampa, representada a seguir, cujas medidas estão em centímetro.



Ilustrações: ID/BR

Sabendo que a medida da altura da caixa é 5 cm, responda aos itens a seguir.

a) Qual expressão algébrica indica a medida de seu volume V? **$V = 150x + 300$**

b) Se $x = 10$ cm, a soma das medidas das áreas externas da caixa corresponde a quantos centímetros quadrados? **780 cm²**

c) Qual é a medida do volume dessa caixa para $x = 8$ cm? **1 500 cm³**

8. Existe o valor numérico da expressão $\frac{5x}{x-y}$ para $x = 7$ e $y = 7$? Por quê?
Não, porque não é possível dividir por zero.

9. Elabore um problema que possa ser representado por uma expressão algébrica. Em seguida, dê para um colega resolver o problema criado por você. Mas atenção, você deve dar o(s) valor(es) que a(s) variável(is) pode(m) assumir. **Resposta pessoal.**

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- A atividade **5** possibilita que os estudantes visualizem e relacionem as medidas dos segmentos com as expressões algébricas. Se achar oportuno, diga que os valores de x para os itens **a**, **b** e **c** são diferentes, pois as medidas são diferentes para os segmentos.
- Na atividade **6**, verifique se os estudantes substituem corretamente os valores de b e de p; nesse caso, $b = 1187$ e $p = 1200$. Amplie a atividade pedindo a eles que indiquem valores de b e de p que dariam prejuízo à família. Um exemplo seria $b = 300$ e $p = 800$; nesse caso, a família teria um prejuízo de R$ 250,00. Verifique se os estudantes percebem que, para ocorrer prejuízo, o valor $4{,}50b$ deve ser menor que $2{,}00p$.
- Para resolver a atividade **7**, os estudantes precisam saber como calcular a medida de volume de blocos retangulares e a medida de área de retângulos.

DE OLHO NA BASE

As atividades **3**, **5** e **7** permitem verificar a integração entre a Álgebra e a Geometria, e a atividade **6**, a integração entre a Aritmética e a Álgebra, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

Além disso, a atividade **9** explora a elaboração e a resolução de problema que envolve o valor numérico de uma expressão algébrica, auxiliando no desenvolvimento da habilidade **EF08MA06**.

O intuito dessa atividade é determinar a expressão algébrica que representa a sentença de cada item. É importante os estudantes observarem que, apesar de estar explícito o uso das letras a e b, não se especifica quais números representam as letras. No item **c**, apesar de serem citados dois números (um número e seu sucessor), não são necessárias duas letras para representá-los, pois pode-se escrever o sucessor de um número como ele próprio mais 1.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Monômios.
- Operações com monômios.
- Polinômios.
- Operações com polinômios.

Objetivos

- Identificar um monômio.
- Identificar o coeficiente e a parte literal dos monômios.
- Identificar polinômios.
- Determinar o grau de monômios e de polinômios.
- Operar com monômios e polinômios.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de compreender o significado de monômio e de polinômio, entendendo suas principais características para que possam realizar diversas operações com eles. Esses conhecimentos ampliam o domínio da Álgebra nos estudantes, tornando-os mais autônomos para a resolução de problemas que envolvem contextos de diversos campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento.

MONÔMIOS

- Peça aos estudantes que pesquisem em um dicionário o significado do prefixo *mono-*, que é de origem grega e significa "único, só, isolado, uma só coisa".
- Explique aos estudantes que monômio é toda expressão algébrica formada por um único termo, que pode ser composto de um número só ou do produto de um número por uma ou mais variáveis, cujos expoentes são sempre naturais.

Capítulo 2 POLINÔMIOS

Para que os estudantes compreendam com clareza os conteúdos desenvolvidos neste capítulo, é importante que tenham absorvido os conceitos do capítulo anterior. Compreender os conteúdos trabalhados neste capítulo possibilita um melhor entendimento sobre equações, funções e, futuramente, inequações.

Monômios

Leia a tira "Sem palavras".

Você conseguiu compreender a resposta do Tucano? Realmente, a resposta que ele deu parece sem sentido, não é? Agora, leia a definição a seguir e veja se você consegue entender o humor da tira.

> Um **monômio** é um número ou uma expressão algébrica formada pelo produto de um número por uma ou mais variáveis com seus expoentes. Esses expoentes devem ser números naturais. Os monômios também podem ser chamados de **termos algébricos** ou, apenas, de **termos**.

Willian Raphael Silva/Acervo do artista

OUTRAS FONTES

BERTOLI, V.; SCHUHMACHER, E. Aprendendo polinômios utilizando o Algeplan: uma prática no ensino da Matemática para o Ensino Fundamental. *In*: *VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática*, 16-18 out. 2013, Ulbra, Canoas, RS. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/748/330. Acesso em: 14 jul. 2022.

Esse artigo apresenta uma prática que auxilia os estudantes a relacionar letras e formas geométricas manipuláveis, envolvendo teoria e prática. Sugere o uso do Algeplan, que consiste na utilização de figuras geométricas planas (quadrados e retângulos), confeccionadas com papel.

As expressões a seguir são monômios:

- $1x$
- $-\frac{2}{3}a^2b$
- -7

As expressões a seguir **não** são monômios:

- xy^{-3}, pois o expoente de y não é natural (-3).
- $\sqrt{t}$, pois, como $\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$, o expoente de t não é natural $\left(\frac{1}{2}\right)$.
- $\frac{ab}{c}$, pois, como $\frac{ab}{c} = abc^{-1}$, o expoente de c não é natural (-1).

Em um monômio, a parte numérica é chamada de **coeficiente**, e a parte que contém as variáveis com seus expoentes é a **parte literal**.

Exemplos

A. $1x$ — parte literal: x; coeficiente: 1

B. $-\frac{2}{3}a^2b$ — parte literal: a^2b; coeficiente: $-\frac{2}{3}$

C. -7 — não tem parte literal; coeficiente: -7

Observações

- O coeficiente 1 dos monômios pode ser omitido. Por exemplo, $1x = x$ e $-1x^2y = -x^2y$.
- Nos monômios não há necessidade de usar o sinal de multiplicação. Por exemplo, $a^2 \cdot b = a^2b$.
- Todo número racional é um monômio sem parte literal.
- O número zero é chamado de **monômio nulo**.

Monômios semelhantes

Monômios que apresentam partes literais iguais são chamados de **monômios semelhantes**.

Exemplos

A. Os monômios $3x^2y$, $\frac{x^2y}{5}$ e $-7x^2y$ são semelhantes, pois apresentam a mesma parte literal.

$$3\underline{x^2y} \qquad \frac{1}{5}\underline{x^2y} \qquad -7\underline{x^2y}$$

$$x^2y = x^2y = x^2y$$

B. Os monômios $9x^2y^3z^4$ e $-3y^3z^4x^2$ são semelhantes, pois, embora as variáveis apareçam em ordens distintas, suas partes literais são iguais.

$$9\underline{x^2y^3z^4} \qquad -3\underline{y^3z^4x^2}$$

$$x^2y^3z^4 = y^3z^4x^2$$

C. Os monômios $4{,}7pqrs$ e $4{,}7abcd$ **não** são semelhantes, pois, apesar de apresentarem coeficientes iguais, suas partes literais são diferentes.

$$4{,}7\underline{pqrs} \qquad 4{,}7\underline{abcd}$$

$$pqrs \neq abcd$$

- Após a definição de monômio, apresente alguns exemplos para que os estudantes possam identificá-los. Certifique-se de que alguns monômios mostrem a mesma parte literal. Em seguida, indique a parte literal e o coeficiente de cada um deles. Para finalizar a introdução desse conceito, veja se os estudantes conseguem identificar alguns monômios “parecidos”; isso dará a eles a noção de monômios semelhantes.
- Algumas regras precisam ser enfatizadas, pois são mais difíceis de compreender, como algumas das observações escritas nessa página do Livro do Estudante: “Todo número racional é um monômio sem parte literal.”; “O número zero é chamado de monômio nulo.”.

- Analise com os estudantes o exemplo proposto para encontrar o valor de n de modo que o grau dos monômios seja igual.
- As atividades propostas possibilitam a aplicação e a compreensão dos conceitos apresentados.

RESPOSTAS

4. a) Coeficiente: 2; parte literal: xy^3.

b) Coeficiente: -4; parte literal: x^3.

c) Coeficiente: 1; parte literal: t.

d) Coeficiente: -1; parte literal: x^2.

e) Coeficiente: $\frac{15}{7}$; parte literal: bat^2.

f) Coeficiente: -3; parte literal: zt^3.

g) Coeficiente: $\frac{5}{7}$; parte literal: a^3bc^2.

h) Coeficiente: 4; parte literal: v^2t.

8. $3m^{-2}$: o expoente (-2) é um número inteiro negativo e, para que seja um monômio, ele deve ser um número natural.

$4a^{-1}$: o expoente (-1) é um número inteiro negativo e, para que seja um monômio, ele deve ser um número natural.

$y\sqrt{x}$: o expoente de x é $\frac{1}{2}$, ou seja, uma fração própria, e, para que a expressão seja um monômio, ele deve ser um número natural.

Grau de um monômio

O grau de um monômio de coeficiente não nulo é dado pela soma dos expoentes da parte literal. Veja.

- $\frac{4}{3}a^3$ → parte literal: a^3; grau do monômio: 3
- $-7a^2xb^3$ → parte literal: a^2xb^3; grau do monômio: 6 $(2 + 1 + 3 = 6)$

Exemplo

Dados os monômios $5x^3y^nz^7$ e $24a^nb^6c^n$, vamos calcular o valor de n para que eles tenham o mesmo grau.

Para isso, a soma dos expoentes da parte literal do primeiro monômio deve ser igual à soma dos expoentes da parte literal do segundo monômio. Assim:

$$3 + n + 7 = n + 6 + n$$
$$n + 10 = 2n + 6$$
$$n - 2n = 6 - 10$$
$$-n = -4$$
$$n = 4$$

Portanto, para que os monômios $5x^3y^nz^7$ e $24a^nb^6c^n$ tenham o mesmo grau, n deve ser igual a 4.

ATIVIDADES

5. Sim, pois a parte literal (a^2b) é a mesma. Responda sempre no caderno.

1. Observe as expressões algébricas a seguir e copie no caderno as que representam monômios. **Itens a, c, e e i.**

a) $-14a^3b$
b) $4x + 2y$
c) $\frac{2a^3p}{7}$
d) $2a - b$
e) $-2{,}78$
f) $x - 1$
g) $\sqrt{xy}$
h) $\frac{z}{pq}$
i) xyz^2
j) $593xc^{-4}$

2. Identifique o grau de cada monômio.

a) p^2 **2**
b) -5 **0**
c) $\frac{9m^8}{7}$ **8**
d) $3x^2y$ **3**
e) $-9p^2q^4r$ **7**
f) $\frac{x}{5}$ **1**

3. Em cada item a seguir há dois monômios. Verifique se eles são semelhantes.

a) $3p^2$ e $8p^2$ **Sim.**
b) $2p^3$ e $3p^2$ **Não.**
c) x e $\frac{x}{5}$ **Sim.**
d) $\frac{x^2y}{2}$ e $-2yx^2$ **Sim.**
e) $4x$ e $4y$ **Não.**
f) $\frac{-15}{7}p^8q^3r$ e $4q^3r$ **Não.**
g) x^4y^7z e x^7y^4z **Não.**
h) $\frac{-a^3bc^4}{5}$ e $\frac{ba^3c^4}{10}$ **Sim.**

4. Escreva no caderno o coeficiente e a parte literal de cada monômio. **Consulte as respostas neste manual.**

a) $2xy^3$
b) $-4x^3$
c) t
d) $-x^2$
e) $\frac{15}{7}bat^2$
f) $-3zt^3$
g) $\frac{5}{7}a^3bc^2$
h) $4v^2t$

5. Os monômios $\frac{1}{3}a^2b$ e $-2ba^2$ são semelhantes? Justifique sua resposta.

6. Calcule o valor de m para que os monômios $-2x^my^5z^m$ e $a^8b^2c^m$ tenham o mesmo grau. **5**

7. Para cada item, escreva dois monômios que: **Respostas pessoais.**

a) tenham o mesmo coeficiente.
b) tenham a mesma parte literal.
c) sejam semelhantes e cujos coeficientes sejam números opostos.

8. Expressões como $3m^{-2}$, $4a^{-1}$ ou $y\sqrt{x}$ não são monômios. Reúna-se com um colega para justificar essa afirmação.

9. Escreva o monômio que representa a medida do perímetro de um quadrado de lado de medida x. **$4x$**

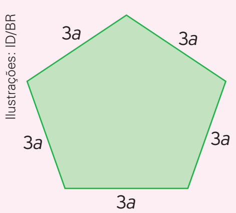
8. Consulte a resposta neste manual.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

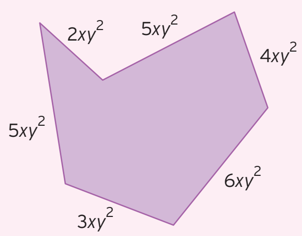
Sugerimos duas atividades em que os estudantes precisam adicionar a medida dos comprimentos dos lados dos polígonos para obter as medidas dos respectivos perímetros, a fim de auxiliar na compreensão da adição de monômios.

1. Determine os monômios que representam a medida do perímetro de cada figura a seguir.

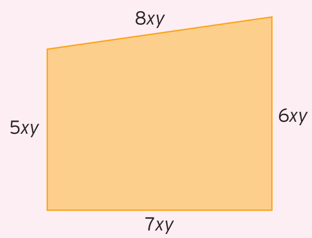
a) $15a$



b) $25xy^2$



c) $26xy$



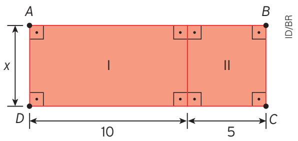
Operações com monômios

A seguir, vamos estudar as operações que envolvem monômios.

Adição e subtração

A adição de dois monômios pode ser representada geometricamente por meio da adição da área de dois retângulos.

Observe a representação do retângulo *ABCD*.



É possível calcular a medida da área do retângulo *ABCD* de duas maneiras. Acompanhe.

1ª maneira: Calculamos separadamente a medida da área das regiões I e II e, depois, as adicionamos.

- Área I: $10 \cdot x = 10x$
- Área II: $5 \cdot x = 5x$

$\rightarrow$ Área total = Área I + Área II = $= 10x + 5x = 15x$

2ª maneira: Calculamos diretamente a medida da área total do retângulo *ABCD*.

$$(10 + 5) \cdot x = 15x$$

A área total do retângulo *ABCD* mede $15x$.

Da mesma maneira, podemos representar a subtração de dois monômios geometricamente. Considerando o retângulo *ABCD*, podemos obter a medida da área da região II subtraindo a medida da área da região I da medida da área total do retângulo *ABCD*. Assim, calculamos separadamente as medidas da área total e da região I e, depois, fazemos a subtração.

- Área total: $(10 + 5) \cdot x = 15x$
- Área I: $10 \cdot x = 10x$

$\rightarrow$ Área II = Área total − Área I = $= 15x - 10x = 5x$

A área da região II mede $5x$.

De maneira geral, na adição e na subtração de monômios semelhantes, adicionam-se ou subtraem-se os coeficientes e mantém-se a parte literal.

Exemplos

A. $7ab + 8ab = (7 + 8) \cdot ab = 15ab$

B. $10x^2y - 8x^2y = (10 - 8) \cdot x^2y = 2x^2y$

Se uma expressão algébrica tem monômios semelhantes e monômios não semelhantes, fazemos a adição ou a subtração dos monômios semelhantes e conservamos os demais.

Exemplos

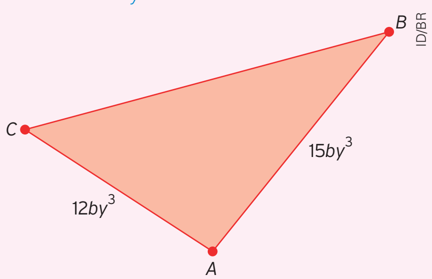
A. $5xy - 3t^2 - 2xy = 5xy - 2xy - 3t^2 = (5 - 2)xy - 3t^2 = 3xy - 3t^2$

B. $3a^2 + 4mn^3 - 2a^2 + 7mn^3 = 3a^2 - 2a^2 + 4mn^3 + 7mn^3 =$
$= (3 - 2)a^2 + (4 + 7)mn^3 = a^2 + 11mn^3$

OPERAÇÕES E PROPRIEDADES

Como as variáveis que aparecem em expressões algébricas representam números, as operações e as propriedades estudadas e utilizadas até agora para os números também são válidas para as expressões algébricas.

2. Sabendo que a medida do perímetro do triângulo *ABC* é $46by^3$, qual é o monômio que representa a medida do segmento $\overline{CB}$? $19by^3$



- Inicie o estudo sobre operações com monômios perguntando aos estudantes como eles adicionam $2x$ a $3x$ ($2x + 3x = 5x$). Permita que a turma discuta o assunto e incentive a apresentação de algumas estratégias. Esclareça que a adição é de $2x$, $(x + x)$, e de $3x$, $(x + x + x)$. O mesmo procedimento deve ser usado na subtração $3x - 2x$: $(x + x + x) - (x + x)$ é igual a x.

DE OLHO NA BASE

Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática, como proposto neste capítulo, entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria, contribui para que os estudantes compreendam os cálculos algébricos e desenvolvam a **competência específica de Matemática 3**.

- Explique aos estudantes que as mesmas operações e propriedades que fundamentam a aritmética são aceitas entre os termos algébricos, pois assim eles poderão comparar as duas linguagens, o que facilita a compreensão.
- Sempre que possível, no estudo de Álgebra, explore as atividades que envolvem Geometria para que os estudantes relacionem essas duas áreas dentro da Matemática. Uma sugestão para auxiliar na compreensão deles seria relacionar o cálculo de medida de área de quadriláteros com a multiplicação de monômios. Por exemplo, considerando um retângulo cuja medida do comprimento é o triplo da medida da largura, qual é a expressão que indica a medida da área desse retângulo? Para resolver, vamos considerar a medida da largura x e a do comprimento $3x$, que representam dois monômios. A expressão da medida da área é dada pela multiplicação desses dois monômios, ou seja, $3x \cdot x = 3x^2$.
- Considere a possibilidade de utilizar com os estudantes um simulador que associa as representações algébrica e geométrica no trabalho com a multiplicação de monômios. Esse recurso está disponível neste caminho: https://phet.colorado.edu/sims/html/area-model-algebra/latest/area-model-algebra_pt_BR.html (acesso em: 14 jul. 2022).

Multiplicação

Para realizar multiplicações com monômios, semelhantes ou não, multiplicamos coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal. As propriedades da multiplicação e da potenciação já estudadas também são válidas para operações com monômios. Veja.

Exemplos

A. $x^2 \cdot x^3 =$
$= x^{2+3} =$ — propriedade do produto de potências de mesma base
$= x^5$

B. $2x \cdot 3y =$
$= (2 \cdot 3) \cdot (x \cdot y) =$ — propriedade associativa da multiplicação
$= 6xy$

Divisão

Para dividir dois monômios, considerando divisor diferente de zero, dividimos coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal, quando houver. Na divisão de uma mesma variável, podemos usar a propriedade da divisão de potências de mesma base.

Exemplos

A. Sendo $x \neq 0$:

$(28x^5) : 7x^3 =$

$= \dfrac{28x^5}{7x^3} =$

$= \dfrac{28}{7} \cdot \dfrac{x^5}{x^3} =$

$= 4 \cdot x^{5-3} =$

$= 4x^2$

B. Sendo $x \neq 0$ e $z \neq 0$:

$(-7xy) : (21xz) =$

$= \dfrac{-7xy}{21xz} =$

$= -\dfrac{7}{21} \cdot (x^{1-1}) \cdot \left(\dfrac{y}{z}\right) =$

$= -\dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{y}{z}\right) =$

$= -\dfrac{y}{3z}$

Observe que o resultado da divisão entre monômios nem sempre é um monômio. No exemplo B, o quociente $-\dfrac{y}{3z}$ não é um monômio, pois tem a variável z no denominador.

Potenciação

Para elevar monômios a uma potência, elevamos o coeficiente e cada fator da parte literal à potência dada. Para isso, podemos usar as propriedades da potenciação.

Exemplos

A. $(5a)^3 =$
$= 5^3 \cdot a^3 =$ — propriedade da potência do produto
$= 125a^3$

B. $(x^2)^5 =$
$= x^{2 \cdot 5} =$ — propriedade da potência de potência
$= x^{10}$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

10. Efetue as operações a seguir.

a) $7x + 15x - 9x$ **$13x$**

b) $14k + 2p - 9k + 3p$ **$5k + 5p$**

c) $\frac{2a}{3} + 4a - \frac{a}{2}$ **$\frac{25a}{6}$**

d) $\frac{w^2}{12} + \frac{2y}{3} - \frac{w^2}{8} + 2y$ **$-\frac{w^2}{24} + \frac{8y}{3}$**

11. Copie as expressões a seguir no caderno, substituindo o símbolo ♦ de modo que as igualdades sejam verdadeiras.

a) $3x^5y^3z + ♦y^3z = 8x^5y^3z$ **$5x^5$**

b) $10b^8c^9d^5 + ♦ = 0$ **$-10b^8c^9d^5$**

12. Quanto devo adicionar ao monômio $9n^3y^2$ para obter $-2n^3y^2$? **$-11n^3y^2$**

13. Calcule as seguintes multiplicações entre monômios.

a) $4y^6 \cdot 6y^3$ **$24y^9$**

b) $5a^6b^3 \cdot (-4ab^8)$ **$-20a^7b^{11}$**

c) $\frac{2}{3}t^4 \cdot \frac{6}{5}wz^3$ **$\frac{4}{5}t^4wz^3$**

d) $2ab \cdot \frac{ab^3}{22}$ **$\frac{a^2b^4}{11}$**

14. Efetue as divisões a seguir.

a) $26x^{16} : 13x^{13}$ **$2x^3$**

b) $-2a^7 : 4a^5$ **$-\frac{a^2}{2}$**

c) $18x^6y^4 : 9x^4y^3$ **$2x^2y$**

d) $-20a^7b^3c^2 : (-4a^6b^3c)$ **$5ac$**

15. Escreva no caderno cada igualdade a seguir substituindo o símbolo ♦ por um monômio que a torne verdadeira.

a) $2x^3 \cdot 4x^2 = ♦$ **$8x^5$**

b) $8y^4 \cdot ♦ = 16y^9$ **$2y^5$**

c) $♦ \cdot a^2b^4c = 2a^8b^4cd^2$ **$2a^6d^2$**

d) $-x \cdot ♦ \cdot 2x^3 = 8x^{12}$ **$-4x^8$**

e) $36xy^3 : ♦ = 2x$ **$18y^3$**

f) $♦ : 7x^3 = 11x^2$ **$77x^5$**

16. Entre os monômios apresentados no quadro a seguir, escreva no caderno aqueles que satisfazem cada item.

$2a^6b^2$	$2a^3$	$-15a^6b^2$
$12a^5$	$-3a^3$	

a) Dois monômios que, divididos, resultam em $6a^2$. **$12a^5$ e $2a^3$**

b) Dois monômios que, divididos, resultam em $5a^3b^2$. **$-15a^6b^2$ e $-3a^3$**

c) Um monômio que multiplicado por $2b^3$ resulta em $4a^6b^5$. **$2a^6b^2$**

17. Escreva os monômios a seguir.

a) Um número elevado ao cubo. **x^3**

b) O quadrado de y^6. **y^{12}**

c) O quíntuplo do quadrado de $(5b)^8$. **$5^{17}b^{16}$**

d) O cubo da metade de a. **$\frac{a^3}{8}$**

18. Efetue as potenciações dos seguintes monômios.

a) $\left(-\frac{xy^4}{2}\right)^5$ **$-\frac{x^5y^{20}}{32}$**

b) $(-9xy^2)^3$ **$-729x^3y^6$**

c) $(-4x^2y)^2$ **$16x^4y^2$**

d) $\left(\frac{3z^2x}{2}\right)^5$ **$\frac{243z^{10}x^5}{32}$**

e) $\left(-\frac{2x^4y^3}{5}\right)^{-2}$ **$\frac{25}{4x^8y^6}$**

19. Copie no caderno as sentenças a seguir substituindo ★ por números que tornem as igualdades verdadeiras.

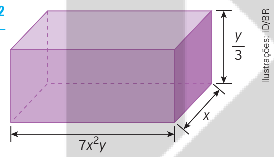
a) $(3a^2b)^{★} = 9a^4b^2$ **2**

b) $(★xyw^3)^3 = -8x^3y^3w^9$ **−2**

c) $\left(\frac{5x}{7}\right)^{★} = \frac{49}{25x^2}$ **−2**

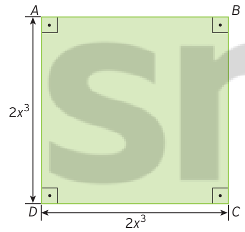
20. Determine a medida do volume do paralelepípedo representado a seguir.

$\frac{7x^3y^2}{3}$



Ilustrações: ID/BR

21. Determine a medida da área do quadrado *ABCD* representado a seguir. **$4x^6$**



- A aprendizagem dos conceitos relacionados a monômios forma uma base para que os estudantes possam compreender os polinômios. As atividades propostas nesta página auxiliam na consolidação desses conhecimentos.
- Na resolução da atividade **20**, os estudantes devem calcular a medida do volume do paralelepípedo, que se dá pelo seguinte produto: V = área da base · altura, tendo a base medidas $7x^2y$ e x e a altura, medida $\frac{y}{3}$. No caso de produto de monômios, semelhantes ou não, é preciso multiplicar coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal.
- Na atividade **21**, o objetivo é multiplicar os monômios para determinar a expressão que representa a área do quadrado.

DE OLHO NA BASE

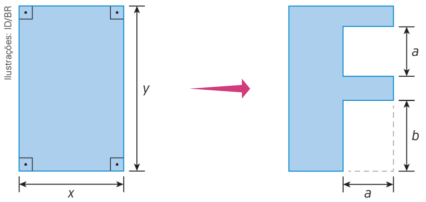
As atividades **20** e **21** relacionam conceitos e procedimentos de diferentes campos da Matemática, como a Álgebra e a Geometria, desenvolvendo a **competência específica de Matemática 3**.

POLINÔMIOS

- Caso julgue necessário, antes de iniciar o trabalho com os polinômios, faça uma breve revisão sobre monômios semelhantes, grau de um monômio e operações com monômios.
- Reproduza as figuras dessa página na lousa e a expressão que representa a área da letra F, mostrando aos estudantes como foram obtidas as áreas das partes recortadas.
- Comente com os estudantes que um polinômio está na sua forma reduzida quando não apresenta termos semelhantes.

Polinômios

Para formar a letra F com uma folha de cartolina retangular, Helena recortou dessa folha um quadrado e um retângulo.



Para calcular a medida da área da letra F obtida, subtraímos da medida da área da folha original a medida das áreas das partes recortadas:

$$\underbrace{xy}_{\text{área da folha original}} - \underbrace{a^2}_{\text{área do quadrado recortado}} - \underbrace{ab}_{\text{área do retângulo recortado}}$$

A expressão $xy - a^2 - ab$ é um exemplo de **polinômio**.

> **Polinômio** é toda expressão algébrica formada por um monômio ou pela adição e/ou subtração de monômios.

Redução de termos semelhantes

Quando um polinômio apresenta termos semelhantes, usamos a adição e a subtração deles para simplificá-lo e escrevê-lo na forma reduzida. Esse processo recebe o nome de **redução de termos semelhantes**.

Exemplos

A. $6a + 4b - 3a = 6a - 3a + 4b = \underbrace{3a + 4b}_{\text{forma reduzida}}$

B. $7x^2y + 1 + 5x^2y - 3 = 7x^2y + 5x^2y + 1 - 3 = \underbrace{12x^2y - 2}_{\text{forma reduzida}}$

NOMES ESPECIAIS DE POLINÔMIOS

De acordo com a quantidade de termos não semelhantes que apresentam, alguns polinômios recebem nomes especiais.

- Monômio: polinômio com um termo não semelhante.
- Binômio: polinômio com dois termos não semelhantes.
- Trinômio: polinômio com três termos não semelhantes.

Grau de um polinômio

Para definir o grau de um polinômio, devemos escrevê-lo na forma reduzida e identificar o termo de maior grau com coeficiente não nulo. O grau desse termo é o grau do polinômio.

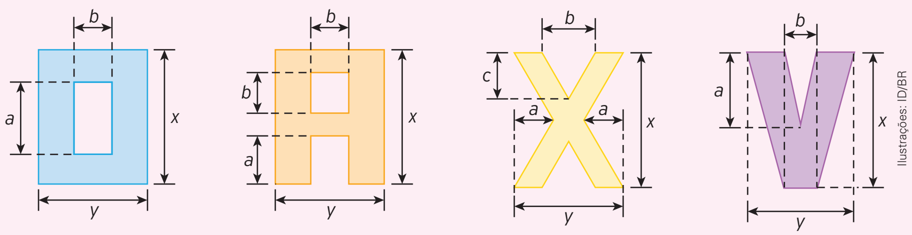
Exemplos

A. $-\frac{3}{5}a + \frac{1}{4}$ — termo de maior grau: $-\frac{3}{5}a$; grau do polinômio: 1 (1º grau)

B. $\frac{2}{3}a - \frac{7}{8}b + \frac{1}{2}ab - 2abc$ — termo de maior grau: $2abc$; grau do polinômio: $1 + 1 + 1 = 3$ (3º grau)

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Geralmente, a atividade de recortar letras em cartolina ou papelão motiva os estudantes no aprendizado. Aproveite o momento para propor a eles que escrevam um nome qualquer utilizando retângulos de cartolina para cada letra. Em seguida, considerando que as dimensões de cada retângulo medem x e y, peça a eles que escrevam a expressão da medida da área de cada letra. Abaixo, seguem alguns exemplos de letras. Depois, se julgar oportuno, peça aos estudantes que calculem a medida da área numericamente. Para isso, eles podem medir as dimensões de um retângulo de cartolina e substituí-las na expressão da medida da área obtida anteriormente.



Polinômio nulo

Para um polinômio ser nulo, o coeficiente de todos os termos deve ser igual a zero. Então, se N é um polinômio nulo, temos:

$$N = ... + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0$$

Não definimos grau para um polinômio nulo.

Polinômios com uma variável

Observe os seguintes polinômios:

- $6x^2 - 5x - 1$
- $x^3 - 2x^2 - x + 1$

Esses polinômios estão na forma reduzida e apresentam uma única variável na parte literal. Essa variável é a mesma em todos os termos. Polinômios desse tipo são polinômios com uma variável.

Em geral, os termos desses polinômios são ordenados de acordo com a ordem decrescente dos expoentes da variável, e o maior expoente da variável determina o grau desse polinômio.

Exemplos

A. $-3x^2 + 8$ → polinômio de 2º grau

B. $y^4 + 2y^2 - y + 10$ → polinômio de 4º grau

Polinômio incompleto

Um polinômio de grau n com uma variável que não apresenta um ou mais termos com variáveis de expoente menores que n é chamado de **polinômio incompleto**. Os polinômios $-3x^2 + 8$ e $y^4 + 2y^2 - y + 10$ são exemplos de polinômios incompletos.

23. a) $u + v + t$; $5x + 2y + z$
b) $2pqr + q^2 - pr$; $a^3 + b + c$
c) $4x - 5$; $\frac{x}{2} + 3$
d) $abcde^2 - 1$; $r^4s^2 + s$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

22. Dê alguns exemplos de monômios, binômios e trinômios. **Resposta pessoal.**

23. Considere os polinômios a seguir.

$2pqr + q^2 - pr$	$\frac{x}{2} + 3$
$abcde^2 - 1$	$r^4s^2 + s$
$u + v + t$	$5x + 2y + z$
$4x - 5$	$a^3 + b + c$

Copie no caderno os polinômios que satisfazem a cada item.

a) Polinômio de 1º grau com três termos.

b) Polinômio de 3º grau com três termos.

c) Polinômio de 1º grau com dois termos.

d) Polinômio de 6º grau com dois termos.

24. Escreva os polinômios a seguir na forma reduzida no caderno.

a) $x^7 + 2x^5 - 4x^7 + 2x^6 - 5x^5$ $\quad -3x^7 + 2x^6 - 3x^5$

b) $2a - 3b - c + 5a + 3b + 7c$ $\quad 7a + 6c$

c) $\frac{k}{3} + k^2 - \frac{k}{2} + \frac{3k^2}{2}$ $\quad -\frac{k}{6} + \frac{5k^2}{2}$

d) $(x^3 + 2x^2) + (4x^3 - 2x^2) - (2 - 5x^3)$ $\quad 10x^3 - 2$

- Comente os exemplos de polinômios apresentados nessa página do Livro do Estudante classificados em polinômio nulo, com uma variável e incompleto, para que os estudantes entendam as diferenças entre os tipos de polinômio.
- Proponha aos estudantes que resolvam a atividade **22** em duplas, pois a interação e a discussão poderão auxiliar no entendimento dos conceitos. Espera-se que eles consigam dar exemplos de monômios, de binômios (formado por dois monômios) e de trinômios (formados por três monômios). Veja algumas respostas possíveis: $3x^2$ (monômio); $2a^2 + 3c$ (binômio); $5y - 3x^2 + 4t$ (trinômio).
- Para facilitar os cálculos na atividade **24**, sugira aos estudantes que organizem os monômios de forma que os semelhantes fiquem próximos para que eles possam realizar as operações. Por exemplo, no item **a**, eles podem reescrever o polinômio da seguinte forma:

$$x^7 - 4x^7 + 2x^5 - 5x^5 + 2x^6 =$$
$$= -3x^7 - 3x^5 + 2x^6$$

Os estudantes também podem organizar os termos do polinômio do termo de maior grau para o de menor grau.

As medidas das áreas são as seguintes:

- letra O: $xy - ab$
- letra A: $xy - b^2 - ab$
- letra X: $xy - \frac{bc}{2} - \frac{bc}{2} - \frac{ax}{2} - \frac{ax}{2}$

  simplificada: $xy - bc - ax$
- letra V: $xy - \frac{ba}{2} - \frac{\left(\frac{y}{2} - \frac{b}{2}\right) \cdot x}{2} - \frac{\left(\frac{y}{2} - \frac{b}{2}\right) \cdot x}{2}$

  simplificada: $xy - \frac{ba}{2} - \frac{y - b}{2} \cdot x$

- Se julgar oportuno, mostre aos estudantes que uma forma prática de adicionar e de subtrair polinômios consiste em escrevê-los da maneira mostrada a seguir, colocando os termos semelhantes um abaixo do outro.
  - $(3a + 2b + c) + (2a + b + 2c + 3)$

$$\begin{array}{rrrrr} & 3a & +\,2b & +\,c & \\ + & 2a & +\,b & +\,2c & +\,3 \\ \hline & 5a & +\,3b & +\,3c & +\,3 \end{array}$$

  - $(3x^2 - 3x + 2) - (-2x^2 + 3x + 7) =$
$= (3x^2 - 3x + 2) + (2x^2 - 3x - 7)$

$$\begin{array}{rrrr} & 3x^2 & -\,3x & +\,2 \\ + & 2x^2 & -\,3x & -\,7 \\ \hline & 5x^2 & -\,6x & -\,5 \end{array}$$

Operações com polinômios

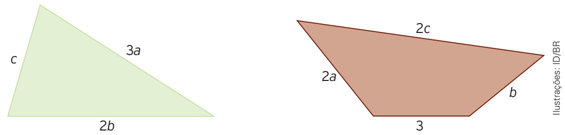
Vamos estudar as operações que envolvem polinômios.

Adição

Para adicionar polinômios, agrupamos os termos semelhantes e, em seguida, os reduzimos.

Exemplo

Pretende-se cercar dois terrenos com os seguintes formatos e medidas:



Para determinar a medida total do comprimento da cerca, é preciso adicionar as medidas dos perímetros dos dois terrenos. Sendo T a medida do perímetro do terreno com formato triangular e Q a do terreno com formato de um quadrilátero, temos:

$$T = 3a + 2b + c$$
$$Q = 2a + 2c + b + 3$$

Assim, a soma das medidas dos perímetros é dada pela soma dos polinômios T e Q. Observe.

$T + Q = (3a + 2b + c) + (2a + 2c + b + 3) =$
Eliminamos os parênteses.
$= 3a + 2b + c + 2a + 2c + b + 3 =$
Agrupamos os termos semelhantes.
$= 3a + 2a + 2b + b + c + 2c + 3 =$
Reduzimos os termos semelhantes.
$= 5a + 3b + 3c + 3$

Portanto, a medida total do comprimento da cerca é dada por: $5a + 3b + 3c + 3$.

Subtração

Para subtrair um polinômio B de um polinômio A, adicionamos ao polinômio A o oposto do polinômio B.

Exemplo

Considere os polinômios $A = 3x^2 - 3x + 2$ e $B = 2x^2 + 3x + 7$.

A diferença $A - B$ é dada por:

$A - B = A + (-B) =$
$= (3x^2 - 3x + 2) + (-2x^2 - 3x - 7) =$
Eliminamos os parênteses.
$= 3x^2 - 3x + 2 - 2x^2 - 3x - 7 =$
Agrupamos os termos semelhantes.
$= 3x^2 - 2x^2 - 3x - 3x + 2 - 7 =$
Reduzimos os termos semelhantes.
$= x^2 - 6x - 5$

POLINÔMIOS OPOSTOS

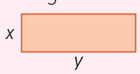
Quando adicionamos dois polinômios e obtemos como resultado um polinômio nulo, dizemos que esses polinômios são opostos.

O polinômio $a^2 - 3a$ é oposto ao polinômio $-a^2 + 3a$, pois:
$a^2 - 3a - a^2 + 3a =$
$= a^2 - a^2 - 3a + 3a =$
$= 0$

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Os estudantes devem determinar a medida dos perímetros das figuras dadas e, então, estabelecer uma relação entre as medidas do comprimento e da altura da figura modelo, como demonstrado a seguir.

Observe este retângulo:



a) As duas figuras a seguir foram construídas com peças retangulares congruentes à do modelo acima.

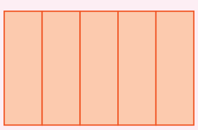


figura A

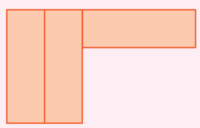


figura B

Determine a medida do perímetro de cada uma. Figura A: $10x + 2y$; figura B: $4x + 4y$.

b) Observe esta figura construída com peças congruentes à do modelo apresentado.

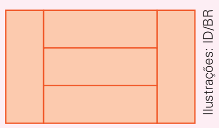


figura C

Sabe-se que é possível estabelecer uma relação entre y e x. Qual é essa relação? $y = 3x$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

25. Escreva os polinômios a seguir na forma reduzida.

a) $5ax^2 - 8(a - ax^3) - (-5a - 7ax^3)$ $\mathbf{15ax^3 + 5ax^2 - 3a}$

b) $(-13ab + 5a) - (-12ab - 6a^2 - 3a) - (2ab - a^2)$ $\mathbf{7a^2 - 3ab + 8a}$

c) $(7x^2 + 7) + (-x + 2) - (2x^2 - 1) + (-7x^2 + 2x - 2)$ $\mathbf{-2x^2 + x + 8}$

d) $(-9x + 10) - (3x - 5) + (-3x - 5) - (17x + 10)$ $\mathbf{-32x}$

e) $-2x - (y + 5 - 5x) - (xy + 3y) + (-2y + 7x - 4xy)$ $\mathbf{10x - 5xy - 6y - 5}$

26. Escreva o polinômio oposto ao polinômio de cada item a seguir, ou seja, o polinômio que, adicionado ao indicado no item, terá zero como resultado.

a) $x^2 + 2x + 1$ $\mathbf{-x^2 - 2x - 1}$

b) $x^4 + 6x$ $\mathbf{-x^4 - 6x}$

c) $x^5 - 7x^3 + 8x^2 + 5x + 2$ $\mathbf{-x^5 + 7x^3 - 8x^2 - 5x - 2}$

d) $-3x^4 + \frac{5x^3}{2}$ $\mathbf{3x^4 - \frac{5x^3}{2}}$

27. Considere os seguintes polinômios.

$P = 3x^2 + 5x - 1$ $\quad$ $Q = x^3 + 8x^2 - 5x + 1$ $\quad$ $R = -2x^3 - 3x^2 + 6$

Efetue as operações a seguir.

a) $P + Q$ $\mathbf{x^3 + 11x^2}$

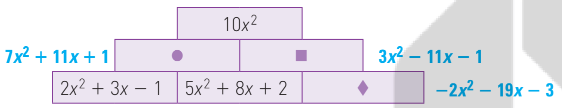
b) $P - R$ $\mathbf{2x^3 + 6x^2 + 5x - 7}$

c) $P + Q + R$ $\mathbf{-x^3 + 8x^2 + 6}$

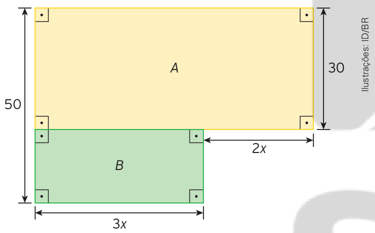
d) $Q - P + R$ $\mathbf{-x^3 + 2x^2 - 10x + 8}$

28. Obtenha um polinômio P que, adicionado ao polinômio $2a^4b - 3a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4$, resulte no polinômio $8a^4b - a^3b^2 + 2a^2b^3$. $\mathbf{6a^4b + 2a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4}$

29. Copie e complete o esquema a seguir no caderno, trocando cada símbolo pela soma dos dois polinômios indicados nos retângulos imediatamente inferiores.



30. A figura a seguir representa a composição de dois retângulos, A e B, e suas dimensões.



Escreva um polinômio na forma reduzida que represente a medida do perímetro solicitado em cada um dos itens.

a) Medida do perímetro do retângulo A. $\mathbf{10x + 60}$

b) Medida do perímetro do retângulo B. $\mathbf{6x + 40}$

c) Medida do perímetro da região formada pelos retângulos A e B juntos. $\mathbf{10x + 100}$

- Na atividade **28**, o objetivo é efetuar operações com polinômios. Apesar de o enunciado citar uma adição, para determinar o polinômio P é necessário subtrair os polinômios dados.

49

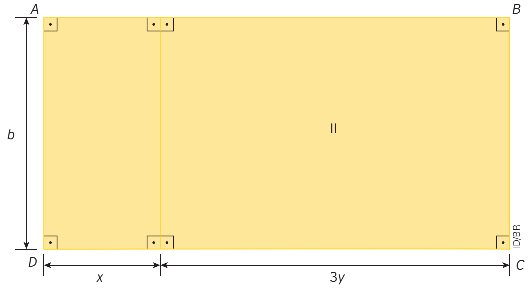
- Explique aos estudantes que, na multiplicação de monômio por polinômio, emprega-se a propriedade distributiva, de modo que se multiplica cada termo de um polinômio por um monômio.
- Se achar conveniente, reproduza na lousa os exemplos de multiplicação apresentados nessa página do Livro do Estudante, para que os estudantes possam compreender bem essa representação.

Multiplicação de polinômios

Vamos estudar a multiplicação de monômio por polinômio e de polinômio por polinômio.

Multiplicação de monômio por polinômio

Uma representação geométrica da multiplicação de monômio por polinômio pode ser observada no cálculo da medida da área de um retângulo. Observe que essa representação é semelhante à da adição de monômios, que você já estudou.



Acompanhe duas maneiras de calcular a medida da área do retângulo *ABCD*.

1ª maneira: Calculamos separadamente a medida da área das regiões I e II e, depois, as adicionamos.

- Área I: $x \cdot b = xb$
- Área II: $3y \cdot b = 3yb$

Área I + Área II = $xb + 3yb$

2ª maneira: Calculamos diretamente a medida da área do retângulo *ABCD*.

Área do retângulo *ABCD*: $b \cdot (x + 3y)$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$b \cdot (x + 3y) = xb + 3yb$$

Assim, a medida da área do retângulo *ABCD* é dada por $xb + 3yb$.

Para multiplicar um monômio por um polinômio, aplicamos a propriedade distributiva, multiplicando o monômio por todos os termos do polinômio, e, em seguida, adicionamos os resultados.

A multiplicação de monômio por polinômio sempre resulta em polinômio.

Exemplos

A. $x \cdot (6x + 4) =$

$= x \cdot 6x + x \cdot 4 =$

$= 6x^2 + 4x$

B. $(3xy) \cdot (2x + 3y - 4) =$

$= 3xy \cdot 2x + 3xy \cdot 3y + 3xy \cdot (-4) =$

$= 6x^2y + 9xy^2 - 12xy$

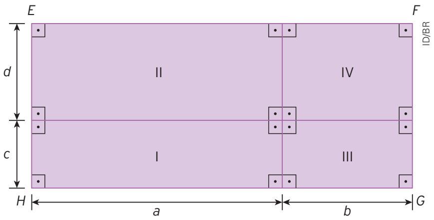
OUTRAS FONTES

Scaldelai, D. *et al*. Objetos de aprendizagem envolvendo polinômios no *software* GeoGebra. *In*: *III Dia de GeoGebra Iberoamericano*, 18 out. 2015. São Paulo: PUC-SP. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/25594/18239. Acesso em: 14 jul. 2022.

Nesse artigo, os autores disponibilizam *links* de acesso aos quatro objetos de aprendizagem desenvolvidos por eles, cujo objetivo é atribuir significado ao estudo das operações com polinômios, relacionando-as à medida da área de retângulos.

Multiplicação de polinômio por polinômio

A multiplicação de dois polinômios também pode ser representada geometricamente. Observe a figura a seguir.



Acompanhe duas maneiras de calcular a medida da área do retângulo *EFGH*.

1ª maneira: Calculamos separadamente a medida da área das regiões I, II, III e IV e, depois, as adicionamos:

- Área I: $a \cdot c = ac$
- Área II : $a \cdot d = ad$
- Área III : $b \cdot c = bc$
- Área IV : $b \cdot d = bd$

$\rightarrow$ Área I + Área II + Área III + Área IV = $ac + ad + bc + bd$

2ª maneira: Calculamos diretamente a medida da área do retângulo *EFGH*.
Área do retângulo *EFGH*: $(a + b) \cdot (c + d)$.
Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Então, a medida da área do retângulo *EFGH* é dada por $ac + ad + bc + bd$.

Para multiplicar dois polinômios, usamos a propriedade distributiva, multiplicando cada termo de um dos polinômios por todos os termos do outro. Em seguida, adicionamos os resultados.

A multiplicação de um polinômio por um polinômio sempre resulta em um polinômio.

Exemplos

A. $(2x - 5) \cdot (3x^2 + x) = 2x \cdot 3x^2 + 2x \cdot x + (-5) \cdot 3x^2 + (-5) \cdot x =$
$= 6x^3 + 2x^2 - 15x^2 - 5x =$
$= 6x^3 - 13x^2 - 5x$

B. $(4x^2 + 3x) \cdot (-x^2 - 6) = 4x^2 \cdot (-x^2) + 4x^2 \cdot (-6) + 3x \cdot (-x^2) + 3x \cdot (-6) =$
$= -4x^4 - 24x^2 - 3x^3 - 18x =$
$= -4x^4 - 3x^3 - 24x^2 - 18x$

- Para efetuar a multiplicação de um polinômio por outro polinômio, também se utiliza a propriedade distributiva, mas multiplica-se cada termo de um dos polinômios pelo outro termo do outro polinômio.
- Reproduza na lousa os exemplos apresentados nessa página do Livro do Estudante para melhor compreensão dos estudantes das etapas de cálculo.

- As atividades propostas nessa página buscam consolidar os conceitos de multiplicação de polinômios.

RESPOSTAS

33. a) $2z^2y + 3z^2y^2 - 4zy - 6zy^2 + 2y + 3y^2$

b) $z^2y^2 + 10z^2y + 25z^2 - 2zy^2 - 20zy - 50z + y^2 + 10y + 25$

c) $3y^4 + 32y^3 + 95y^2 + 50y$

d) $2z^2 - 4z + 2$

36. Linha 1: ND; linha 2: $ND + 30N - 20D - 600$; linha 3: $ND + 54N - 24D - 1\,296$; todas: $3ND + 84N - 44D - 1\,896$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

31. c) $10p^5t^9 - 30p^9t^5 + 5p^4t^4 - 5p^2t^5$

31. Aplicando a propriedade distributiva, desenvolva as expressões a seguir.

a) $3x \cdot (x^3 + 2x - 2)$ $\mathbf{3x^4 + 6x^2 - 6x}$

b) $a^3b^2 \cdot (2ab + b - a)$ $\mathbf{2a^4b^3 + a^3b^3 - a^4b^2}$

c) $5p^2t^4 \cdot (2p^3t^5 - 6p^7t + p^2 - t)$

d) $\frac{2y^2}{5} \cdot \left(\frac{y^3}{6} - \frac{10y}{7}\right)$ $\mathbf{\frac{y^5}{15} - \frac{4y^3}{7}}$

e) $3a \cdot (5x + x^2 - 3a + x)$ $\mathbf{3ax^2 - 9a^2 + 18ax}$

f) $-9y \cdot (3a + a^2 + 6h + 2)$ $\mathbf{-27ya - 9ya^2 - 54yh - 18y}$

32. Efetue as multiplicações entre polinômios indicadas a seguir, escrevendo o resultado na forma reduzida.

a) $(x + 3) \cdot (x - 5)$ $\mathbf{x^2 - 2x - 15}$

b) $(y^3 - yz) \cdot (z^2y + y^3z)$ $\mathbf{y^6z - y^2z^3}$

c) $\mathbf{2b^3 + 5b^2 - 11b + 4}$

c) $(2b - 1) \cdot (b^2 + 3b - 4)$

d) $\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{3}\right)$ $\mathbf{\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}}$

33. Dados os polinômios D, E e F a seguir, efetue as operações indicadas e escreva os resultados na forma reduzida. **Consulte as respostas neste manual.**

$$D = z^2 - 2z + 1$$
$$E = 2y + 3y^2$$
$$F = y^2 + 10y + 25$$

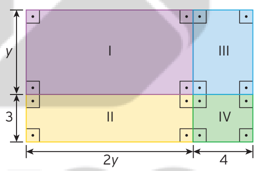
a) $D \cdot E$

b) $D \cdot F$

c) $E \cdot F$

d) $2D$

34. Um retângulo foi dividido em quatro regiões.



a) Escreva o polinômio que representa a medida da área de cada região.

b) Expresse a medida da área do retângulo como produto de dois polinômios.

c) Use a propriedade distributiva para efetuar a multiplicação que você indicou no item anterior. $\mathbf{2y^2 + 10y + 12}$

35. Uma empresa de ônibus fretado cobra de cada passageiro R$ 0,93 por quilômetro rodado. Um ônibus dessa empresa transportou, na primeira viagem, x passageiros por 100 quilômetros e, na segunda viagem, $(x + 3)$ passageiros por 50 quilômetros. Considerando essas informações, determine o polinômio que representa o valor total recebido por essa empresa nessas duas viagens. **139,5x + 139,5**

36. A tabela a seguir mostra a quantidade de viagens diárias das três linhas de uma empresa de ônibus e a distância percorrida em cada viagem.

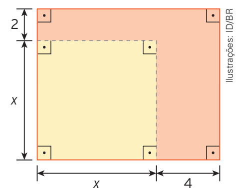
Viagens diárias por linha

Linha	Quantidade de viagens diárias	Distância percorrida por viagem (em km)
1	N	D
2	$N - 20$	$D + 30$
3	$N - 24$	$D + 54$

Dados fornecidos pela empresa.

Escreva o polinômio que representa a distância percorrida em um dia pelos ônibus de cada linha e pelos ônibus das três linhas juntas.

37. Para ampliar uma sala quadrada, foram acrescentados 4 metros na medida de seu comprimento e 2 metros na de sua largura, como mostra a figura.



a) Escreva um polinômio que represente a medida da área da sala antes da ampliação. $\mathbf{x^2}$

b) Escreva um polinômio que represente a medida da área da sala depois da ampliação. $\mathbf{x^2 + 6x + 8}$

c) Sabendo que, após a ampliação, a sala ganhou 50 m² de área, determine a medida das dimensões da sala antes da ampliação. **7 m × 7 m**

34. a) Região I: $2y^2$; região II: $6y$; região III: $4y$; região IV: 12.

b) $(2y + 4) \cdot (3 + y)$

OUTRAS FONTES

Universidade Federal de Mato Grosso. Instituto de Ciências Exatas e da Terra. Departamento de Matemática/Gepemat. Polinômios com material concreto. Disponível em: https://estagiomatufmt.files.wordpress.com/2012/11/polinc3b4mios.docx. Acesso em: 14 jul. 2022.

Atividades desenvolvidas pelo Grupo de Ensino, Pesquisa e Extensão em Educação Matemática (Gepemat) para realizar operações com polinômios usando material concreto.

Divisão de polinômios

Vamos estudar a divisão de polinômio por monômio e de polinômio por polinômio.

Divisão de polinômio por monômio

Para fazer a divisão de um polinômio por um monômio não nulo, dividimos cada termo do polinômio pelo monômio e adicionamos os termos semelhantes obtidos.

Exemplos

A. Sendo $a \neq 0$ e $b \neq 0$:

$$(6a^6b + 5ab^4) : (3ab) =$$
$$= \frac{6a^6b + 5ab^4}{3ab} =$$
$$= \frac{6a^6b}{3ab} + \frac{5ab^4}{3ab} =$$
$$= 2a^5 + \frac{5b^3}{3}$$

B. Sendo $x \neq 0$:

$$(8x^4 - 2x^3 + 6x^2) : (2x^2) =$$
$$= \frac{8x^4 - 2x^3 + 6x^2}{2x^2} =$$
$$= \frac{8x^4}{2x^2} - \frac{2x^3}{2x^2} + \frac{6x^2}{2x^2} =$$
$$= 4x^2 - x + 3$$

C. Sendo $z \neq 0$:

$$(4xyz + 2x) : 2z =$$
$$= \frac{4xyz + 2x}{2z} =$$
$$= \frac{4xyz}{2z} + \frac{2x}{2z} =$$
$$= 2xy + \frac{x}{z}$$

Observe que o resultado obtido no exemplo C **não** é um polinômio.

Divisão de polinômio por polinômio

Vamos considerar apenas a divisão entre polinômios com uma variável. Neste caso, o conceito e o algoritmo da divisão de um polinômio por outro polinômio são semelhantes aos da divisão de números naturais.

Dados os polinômios A e B, com B não nulo, dividir A por B é determinar os polinômios Q (quociente) e R (resto), tais que:

$$A = B \cdot Q + R$$

O resto R é um polinômio de grau menor que o grau do polinômio B ou um polinômio nulo.

PARE E REFLITA

A medida da área do retângulo a seguir é dada por $6x^3 - 4x^2 + 2x$.

Sabendo que a medida da largura do retângulo é a indicada, qual é a medida do comprimento do retângulo? Como você fez para descobrir?

A medida do comprimento do retângulo é dada por $3x^2 - 2x + 1$. Ela pode ser obtida fazendo a divisão de $6x^3 - 4x^2 + 2x$ por $2x$.

TERMOS DA DIVISÃO

$$\begin{array}{rcl} \text{dividendo} \longrightarrow A & \underline{|B} & \longleftarrow \text{divisor} \\ \text{resto} \longrightarrow R & Q & \longleftarrow \text{quociente} \end{array}$$

- Se necessário, retome a divisão de monômio por monômio, uma vez que essa divisão é necessária para a compreensão da divisão de polinômio por monômio.
- Sugerimos que os exemplos dessa página do Livro do Estudante sejam reproduzidos na lousa para que os estudantes percebam que a escrita fracionária auxilia na simplificação e na obtenção do polinômio quociente.
- Verifique se os estudantes compreenderam por que antes da divisão aparece uma condição. Lembre-os de que não é possível efetuar uma divisão por zero; logo, nenhuma das letras que aparecem no monônio que representa o divisor pode ser zero.
- No exemplo **C**, é importante que os estudantes compreendam que, ao dividir um polinômio por um monômio, nem sempre obtemos um polinômio como quociente. Caso seja necessário, retome a definição de polinômio dada anteriormente.

- Comente com os estudantes que o algoritmo da divisão de um polinômio por outro polinômio é parecido com o da divisão de números naturais.
- Reproduza na lousa o exemplo dessa página do Livro do Estudante para esclarecer o processo de divisão: dados dois polinômios, P (dividendo) e D (divisor), em que D é não nulo, dividir P por D consiste em determinar dois outros polinômios, Q (quociente) e R (resto), em que o grau de R é sempre menor que o de P, de modo que se verifique a seguinte condição:

$$P = D \cdot Q + R$$

Exemplo

Vamos efetuar a divisão de $A = 9x^2 + 6x - 3$ por $B = 3x + 1$.

Dividimos o termo de maior grau de A pelo termo de maior grau de B.

$$A = \underbrace{9x^2}_{\text{termo de maior grau}} + 6x - 3 \qquad B = \underbrace{3x}_{\text{termo de maior grau}} + 1$$

$$\begin{array}{r|l} 9x^2 + 6x - 3 & 3x + 1 \\ \hline & 3x \end{array}$$

Multiplicamos o quociente ($3x$) pelo divisor ($3x + 1$) e obtemos o produto ($9x^2 + 3x$). Em seguida, subtraímos o produto do dividendo.

$$\begin{array}{r|l} 9x^2 + 6x - 3 & 3x + 1 \\ \cline{2-2} -(9x^2 + 3x) & 3x \\ \cline{1-1} \mathbf{3x - 3} & \end{array}$$

Continuamos a divisão, dividindo ($3x - 3$) por ($3x + 1$). Dividimos o termo de maior grau de ($3x - 3$) pelo termo de maior grau de ($3x + 1$).

$$\underbrace{3x}_{\text{termo de maior grau}} - 3 \qquad \underbrace{3x}_{\text{termo de maior grau}} + 1$$

$$\begin{array}{r|l} 9x^2 + 6x - 3 & 3x + 1 \\ \cline{2-2} -(9x^2 + 3x) & 3x + 1 \\ \cline{1-1} 3x - 3 & \end{array}$$

Multiplicamos o quociente (1) pelo divisor ($3x + 1$) e obtemos o produto ($3x + 1$). Em seguida, subtraímos o produto do dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 9x^2 + 6x - 3 & 3x + 1 \\ \cline{2-2} -(9x^2 + 3x) & 3x + 1 \\ \cline{1-1} 3x - 3 & \\ -(3x + 1) & \\ \cline{1-1} \mathbf{-4} & \end{array}$$

A divisão termina quando se obtém como resto um polinômio de grau menor que o grau do divisor. Como o grau do resto (-4) é zero e o grau do divisor ($3x + 1$) é 1, a divisão está encerrada.

Portanto, a divisão de $A = 9x^2 + 6x - 3$ por $B = 3x + 1$ tem quociente $Q = 3x + 1$ e resto $R = -4$.

Para verificar se a divisão está correta, devemos multiplicar o quociente (Q) pelo divisor (B) e adicionar o resto (R). O resultado obtido deve ser igual ao dividendo (A).

$$A = B \cdot Q + R$$

$$A = (3x + 1) \cdot (3x + 1) + (-4)$$

$$A = 9x^2 + 3x + 3x + 1 - 4$$

$$A = 9x^2 + 6x - 3$$

O valor de A obtido corresponde ao valor inicial de A dado no enunciado. Logo, a divisão está correta.

Divisão de um polinômio incompleto

Nos casos de divisão de polinômios em que o dividendo é um polinômio incompleto, devemos escrevê-lo na forma completa, indicando os termos de coeficiente zero.

Exemplo

Vamos dividir $C = x^4 + 8x + 1$ por $D = x^2 + 2x$.

Observe que o polinômio C é do 4º grau, mas está incompleto, isto é, não apresenta termos em x^3 e em x^2. Nesse caso, os termos faltantes são representados por $0x^3$ e $0x^2$.

O polinômio C na forma completa é $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 8x + 1$, e a divisão de C por D pode ser feita da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 8x + 1 & x^2 + 2x \\ \cline{3-3}
 & \underline{-x^4 - 2x^3} & x^2 - 2x + 4 \\
 & -2x^3 + 0x^2 + 8x + 1 & \\
 & \underline{2x^3 + 4x^2} & \\
 & 4x^2 + 8x + 1 & \\
 & \underline{-4x^2 - 8x} & \\
 & 1 &
\end{array}
$$

Portanto, o quociente da divisão de $C = x^4 + 8x + 1$ por $D = x^2 + 2x$ é $Q = x^2 - 2x + 4$, e o resto é $R = 1$.

Para verificar se a divisão está correta, devemos fazer:

$$C = D \cdot Q + R$$

$$x^4 + 8x + 1 = (x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 2x + 4) + 1$$

$$x^4 + 8x + 1 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x^3 - 4x^2 + 8x + 1$$

$$x^4 + 8x + 1 = x^4 + 8x + 1$$

Logo, a divisão está correta.

PARA EXPLORAR

Algeplan virtual

Nesta página da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, é possível utilizar o algeplan virtual para efetuar operações com polinômios. Disponível em: http://mdmat.mat.ufrgs.br/algeplan/. Acesso em: 27 abr. 2022.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

38. Efetue as divisões a seguir.

a) $(26x^{16} + 52x^{13}) : 13x^{13}$, com $x \neq 0$.

b) $(-2a^7 + 8a^6) : 4a^5$, com $a \neq 0$.

c) $(18x^6y^4 - 6x^4y^4) : 9x^4y^3$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

d) $(-13{,}5a^7b^3c^2 + 9a^6b^4c^2) : (-4{,}5a^6b^3c)$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

39. Em cada caso, divida o polinômio A pelo polinômio B.

a) $A = 15a^3 + 23a^2 + 5a$ e $B = 3a + 4$

b) $A = 2x^3 + 8x^2 + 5x + 20$ e $B = x + 4$

c) $A = 30m^5 + 27m^3 + 5m^2 + 7m + 5$ e $B = 5m^2 + 2$

d) $A = 3a^3 - 5a^2 - 12a + 20$ e $B = a^2 - 4$ $Q = 3a - 5$; $R = 0$

40. Em uma divisão de polinômios, o divisor é $x^2 + 1$, o quociente é $x^3 - 3$ e o resto é $2x$. Qual é o dividendo? $x^5 + x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

41. A medida da área do retângulo $ABCD$ é igual a $9x^3y^3z^4 - 6xy^3$.

Obtenha o binômio M, que representa a medida do comprimento do lado $\overline{AB}$.

38. a) $2x^3 + 4$ b) $-\frac{a^2}{2} + 2a$ c) $2x^2y - \frac{2}{3}y$ d) $3ac - 2bc$

39. a) $Q = 5a^2 + a + \frac{1}{3}$; $R = -\frac{4}{3}$ b) $Q = 2x^2 + 5$; $R = 0$ c) $Q = 6m^3 + 3m + 1$; $R = m + 3$

41. $\frac{3}{2}x^2z^4 - 1$

- Na resolução da atividade **39**, os estudantes devem efetuar divisões com polinômios. Se julgar necessário, comente com eles que nos itens **a** e **c** os polinômios são incompletos.
- Para determinar a medida do comprimento de um dos lados do retângulo, como proposto na atividade **41**, pode-se resolver da seguinte forma:

$$M \cdot 6xy^3 = 9x^3y^3z^4 - 6xy^3$$

$$M = \frac{9x^3y^3z^4}{6xy^3} - \frac{6xy^3}{6xy^3}$$

$$M = \frac{3}{2}x^2z^4 - 1$$

Apesar de ser citada a medida da área do retângulo, os estudantes devem realizar uma divisão para determinar o binômio M.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **2**, relembre os estudantes de que o grau de um polinômio é determinado pelo monômio de maior grau e que o grau de um monômio de coeficiente não nulo é dado pela soma dos expoentes da parte literal. Por exemplo, no item **b**, o monômio de maior grau é $2a^4b^3$, cujo grau é 7; logo, o polinômio também tem grau 7.
- Na atividade **4**, sugira aos estudantes que simplifiquem o primeiro membro da igualdade e verifiquem se o polinômio que encontraram é igual ao que está no segundo membro da igualdade. Dessa forma, eles podem apontar qual é o erro em cada item.
- Um erro que os estudantes podem cometer ao resolver a atividade **7** é adicionar os expoentes da parte literal. Verifique se eles compreenderam que em cada item os monômios têm a mesma parte literal, bastando adicionar e/ou subtrair os coeficientes.
- Na atividade **9**, para conhecer o polinômio, deve-se aplicar a operação inversa da multiplicação, ou seja, a divisão.

DIVERSIFICANDO

1. c) xy^4 d) $8x^2y$ e) $\frac{x^2y^2}{6}$

1. Considere os monômios apresentados no quadro e responda aos itens a seguir.

$2x^3y$	$8x^2y$	$-4x^3$	xy^4	$\frac{x^2y^2}{6}$

a) Qual é o monômio cujo coeficiente é igual a -4? **$-4x^3$**

b) Quais termos são semelhantes? **Nenhum.**

c) Qual é o termo cujo coeficiente é igual a 1?

d) Qual é o termo cuja parte literal é x^2y?

e) Qual é o termo cujo coeficiente é igual a $\frac{1}{6}$?

2. Escreva o grau dos seguintes polinômios:

a) $-4t^6 + 2t^5 + 7t^4 + 2t + 3$ **6**

b) $a^3b^2 + 2a^4b^3 - 3ab^4 + b^6 + 1$ **7**

c) $x^2 + y^2$ **2**

d) $a + b + c$ **1**

e) $\frac{1}{2}x^2y^3 - 4 + \frac{2}{3}z^5$ **5**

3. Calcule o valor numérico do monômio:

a) $3x^2$, quando $x = 5$; **75**

b) $\frac{x^4}{2}$, quando $x = 2$; **8**

c) y^3, quando $y = -3$; **-27**

d) x^3y^2, quando $x = -4$ e $y = \frac{1}{4}$. **-4**

4. Em cada item, descubra o(s) erro(s) e reescreva as expressões no caderno, fazendo as correções necessárias.

a) $(2a + b) + (3a + 6b) = 6a + 7b$

b) $m(5m + 15n) = 6m + 15mn$

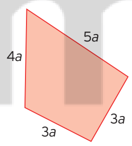
c) $(x + y) \cdot (x - y) = 2x - 2y$

d) $(p - q) - (p + q) = 2q$ **$(p - q) - (p + q) = -2q$**

e) $(p - q) \cdot (p + q) = p^2 + 2pq + q^2$

5. Escreva o monômio que representa a medida da área de um quadrado de lado medindo p. **p^2**

6. Determine a medida do perímetro da figura a seguir. **15a**



7. Efetue as adições e subtrações a seguir.

a) $7x + 9x$ **$16x$**

b) $m^2 + 2m^2$ **$3m^2$**

c) $-a - 3a$ **$-4a$**

d) $2ab^2 + 5ab^2 - 7ab^2$ **0**

e) $0{,}12xy + 0{,}21xy - 1{,}36xy - 0{,}97xy$ **$-2xy$**

f) $7{,}352p^2q^2r + 6{,}005p^2q^2r - 0{,}005p^2q^2r + 0{,}352p^2q^2r$ **$13{,}704p^2q^2r$**

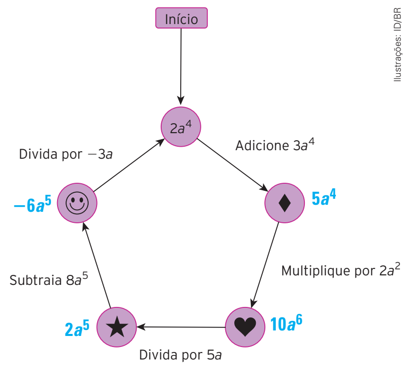
g) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x - \frac{3}{10}x$ **$\frac{7x}{30}$**

h) $-y^5 + \frac{7}{9}y^5 - \frac{8}{3}y^5$ **$-\frac{26y^5}{9}$**

8. Obtenha um monômio M que, adicionado ao monômio $\frac{2x^3y}{7}$, resulte em $\frac{x^3y}{14}$. **$-\frac{3x^3y}{14}$**

9. O produto de um polinômio pelo monômio $2x$ é $4x^4 + 6x^3 + 2x$. Qual é esse polinômio? **$2x^3 + 3x^2 + 1$**

10. Considerando $a \neq 0$, siga as orientações do esquema a seguir e determine os monômios indicados pelos símbolos.



11. Em certo município, os moradores de um bairro reivindicam na prefeitura a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que vai construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno disponível, que tem as seguintes medidas: $(2x + 5)$ metros por $(x - 3)$ metros. Qual é o polinômio que representa a medida da área desse terreno? **$2x^2 - x - 15$**

4. a) $(2a + b) + (3a + 6b) = 5a + 7b$
b) $m(5m + 15n) = 5m^2 + 15mn$
c) $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$
e) $(p - q) \cdot (p + q) = p^2 - q^2$

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Caso os estudantes ainda apresentem dificuldades nas operações com polinômios, reforce as ideias a seguir e proponha mais algumas operações para que eles resolvam aplicando-as.

I. Na adição ou na subtração de polinômios, agrupe os monômios semelhantes antes de efetuar essas operações.

II. Ao efetuar a multiplicação de polinômios, use a propriedade distributiva; assim, multiplica-se cada termo de um polinômio por cada termo do outro.

III. Na divisão, dados dois polinômios P (dividendo) e D (divisor), em que D é não nulo, dividir P por D consiste em determinar dois outros polinômios, Q (quociente) e R (resto), em que R sempre tem grau menor que o de D, de modo que se verifique a condição $P = D \cdot Q + R$.

1. $(4x^2 - 7x + 2) + (3x^2 + 2x + 3)$
$7x^2 - 5x + 5$
2. $(5x^3 - 8x + 2) - (3x^2 + 2x + 3)$
$5x^3 - 3x^2 - 10x - 1$
3. $5x \cdot (2x - 5)$
$10x^2 - 25x$
4. $(5x^2 - 2x + 1) \cdot (x - 2)$
$5x^3 - 12x^2 + 5x - 2$
5. $18x^3 - 12x^2 + 3x : 3x$
$6x^2 - 4x + 1$

Responda sempre no caderno.

12. Uma loja vende dois modelos diferentes de celular. O quadro a seguir mostra a quantidade em estoque e o preço de cada um desses modelos.

Modelo	Quantidade em estoque	Preço (em real)
1	x	750
2	$x - 20$	925

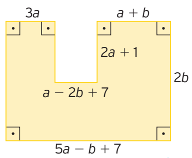
Dados fornecidos pelo estoquista.

a) Qual é o polinômio que representa o total de celulares dos modelos 1 e 2 em estoque? **$2x - 20$**

b) Qual é o polinômio que representa o total arrecadado, em real, caso todo o estoque de celulares dos modelos 1 e 2 seja vendido? **$1\,675x - 18\,500$**

c) Ao vender todo o estoque (modelos 1 e 2), essa loja arrecadou 48 500 reais. Quantos celulares do modelo 1 havia em estoque? E do modelo 2? **40 celulares do modelo 1 e 20 do modelo 2.**

13. Observe a figura.

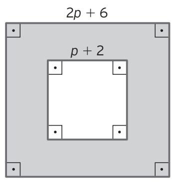


a) $14a + 2b + 16$

a) Escreva a medida do perímetro da figura como um polinômio na forma reduzida.

b) Sabendo que $a = 1$ cm e que a medida do perímetro dessa figura é igual a 36 cm, determine b. **3 cm**

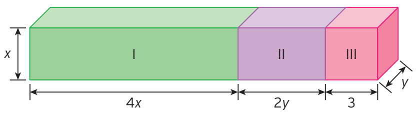
14. Uma lâmina quadrada de alumínio tem em seu interior uma perfuração também quadrada cujas dimensões estão representadas na figura a seguir.



Determine a expressão simplificada que representa a medida da área não perfurada. **$3p^2 + 20p + 32$**

15. a) I: $4x^2y$; II: $2xy^2$; III: $3xy$
b) $4x^2y + 2xy^2 + 3xy$

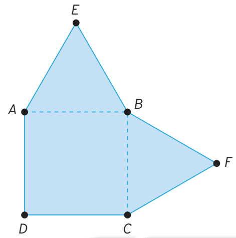
15. Considere um paralelepípedo que foi dividido em outros três paralelepípedos, como mostra a figura.



a) Escreva um monômio para representar a medida do volume de cada parte.

b) Qual é a medida do volume total desse paralelepípedo?

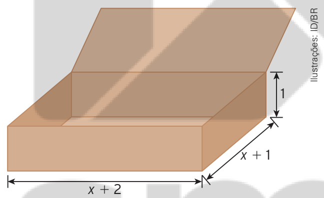
16. Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado com lado de medida x, e os triângulos ABE e BCF são equiláteros.



a) Escreva o monômio que representa a medida do perímetro da figura $AEBFCD$. **$6x$**

b) Qual é a medida do perímetro da figura $AEBFCD$, considerando $x = 2$ cm? **12 cm**

17. Considere esta representação de uma caixa de papelão aberta com formato de paralelepípedo.



a) Escreva o polinômio que representa a medida da capacidade dessa caixa. **$x^2 + 3x + 2$**

b) Calcule a medida da área da base da caixa.

c) Determine a razão entre a medida da capacidade da caixa e a medida da área da sua base. **1**

17. b) $x^2 + 3x + 2$

- Na atividade **13**, é necessário adicionar as expressões para determinar a expressão que indica a medida do perímetro e, depois, substituir a na equação $14a + 2b + 16 = 36$ e determinar b, em cm.
- Na atividade **14**, para determinar a medida da área da lâmina, é necessário calcular as medidas das áreas dos dois quadrados na figura e, depois, subtrair a medida da menor área da maior.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

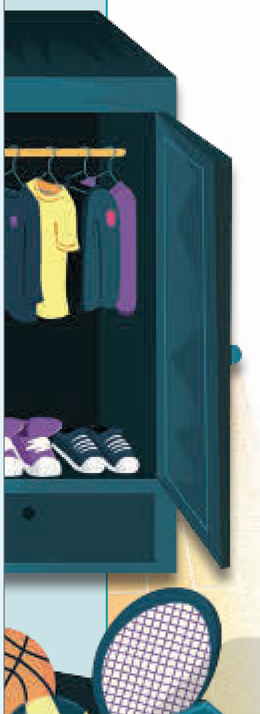
- Essa seção permite que os estudantes reflitam sobre o consumo responsável no dia a dia e a atitude deles diante desse contexto. Além disso, a abordagem retratada sobre o ato de se prevenir não se limita apenas a guardar dinheiro para um possível imprevisto, mas também para determinados projetos de vida, como viagens, compra de uma casa, realizar uma festa, ir a um *show* no final do mês ou ajudar os pais em um possível negócio que estão pensando em empreender. Incentive-os a refletir sobre essa postura diante do tema explorado de acordo com a vivência deles e a socializar essa ideia com a turma. Essa reflexão desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação Financeira, que pertence à macroárea **Economia**.
- A seção também possibilita uma discussão sobre publicidade e consumo infantil. Os estudantes são influenciados pelas propagandas e foram bombardeados por elas na infância. É importante abordar e discutir com eles o papel da publicidade no comportamento do consumidor. A publicidade sempre procura apelar aos nossos desejos. Atualmente, além da televisão, tem sido forte o papel da publicidade nas mídias sociais e, especialmente no caso do público adolescente, a publicidade promovida pelos influenciadores digitais que eles seguem nas redes sociais.

DE OLHO NA BASE

Refletir sobre esse tema possibilita aos estudantes argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam o consumo responsável, desenvolvendo a **competência geral 7**.

Além disso, auxilia os estudantes a agir pessoal e coletivamente com autonomia e responsabilidade, tomando decisões com base em princípios éticos, sustentáveis e solidários, desenvolvendo a **competência geral 10**.

AMPLIANDO HORIZONTES



Convergente ou divergente: como é o meu consumo?

O que convergente e divergente significam em relação ao consumo?

Consumo convergente é o consumo responsável, pois nos aproxima do pensamento no presente e no futuro e nos ajuda a alcançar objetivos que nos fazem bem e que não causam dano à vida dos outros. Já o consumo divergente é aquele que nos afasta de uma vida saudável, dos nossos sonhos e dos nossos projetos e que pode causar algum dano.

Para ampliar sua visão sobre consumo e cultura da prevenção, leia o texto a seguir.

> Ninguém nasce consumista. O consumismo é uma ideologia, um hábito mental forjado que se tornou uma das características culturais mais marcantes da sociedade atual. Não importa o gênero, a faixa etária, a nacionalidade, a crença ou o poder aquisitivo. Hoje, todos que são impactados pelas mídias de massa são estimulados a consumir de modo inconsequente.
>
> As crianças, que vivenciam uma fase de peculiar desenvolvimento e, portanto, mais vulneráveis que os adultos, não ficam fora dessa lógica e infelizmente sofrem cada vez mais cedo com as graves consequências relacionadas aos excessos do consumismo [...].
>
> [...]
>
> As crianças são um alvo importante, não apenas porque escolhem o que seus pais compram e são tratadas como consumidores mirins, mas também porque impactadas desde muito jovens tendem a ser mais fiéis a marcas e ao próprio hábito consumista que lhes é praticamente imposto.

Consumismo infantil: um problema de todos. Criança e consumo. Disponível em: http://criancaeconsumo.org.br/consumismo-infantil/. Acesso em: 27 abr. 2022.

OUTRAS FONTES

Campos, A. B. *Investigando como a educação financeira crítica pode contribuir para tomada de decisões de consumo de jovens-indivíduos-consumidores (JIC's)*. 2013. 178 p. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: https://www2.ufjf.br/mestradoedumat//files/2011/05/Disserta%c3%a7%c3%a3o-Andre-Campos.pdf. Acesso em: 14 jul. 2022.

Dissertação de mestrado que trata da temática abordada nessa seção.

O texto nos convida a refletir sobre nossa responsabilidade ao consumir. Parte do consumismo exagerado e do desperdício vem da forma como nosso comportamento vai sendo moldado ao longo da infância e da adolescência. Somos desde pequenos estimulados a comprar, a ter e a ostentar, ao passo que valores como solidariedade e respeito ao próximo não são incentivados pelas campanhas publicitárias veiculadas nos meios de comunicação.

PARA EXPLORAR

Museu do Amanhã

Esse museu busca promover a inovação, divulgar os avanços da ciência e publicar os sinais vitais do planeta, orientado pelos valores éticos da sustentabilidade e da convivência. Conheça mais o museu no *site* disponível em: https://museudoamanha.org.br/. Acesso em: 27 abr. 2022.

Pensar em como se gasta e se economiza hoje pode nos proporcionar recursos para investimentos, proteção e possibilidades em médio e longo prazos. Uma reflexão acompanhada de ações responsáveis sobre nossos gastos pode se voltar para uma avaliação da maneira como compartilhamos parte daquilo que não nos beneficia mais, mas que poderia beneficiar a muitos outros. É preciso refletir também sobre uma mudança de atitude em relação aos bens, ao tempo e à atenção que podemos compartilhar com os outros.

Para refletir

Responda sempre no caderno.

Consulte as respostas neste manual.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir.

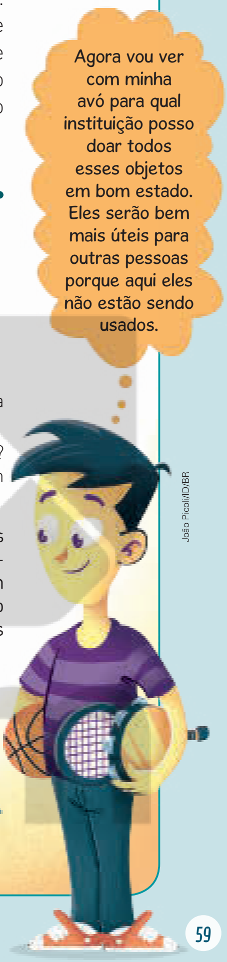
1. Vocês têm projetos para daqui a um mês, um ano ou dez anos? Que atitudes de consumo vocês adotam atualmente que os ajudam a convergir para os seus objetivos de curto, médio e longo prazos? E que atitudes fazem vocês divergirem desses objetivos?

2. Observem a situação ilustrada.

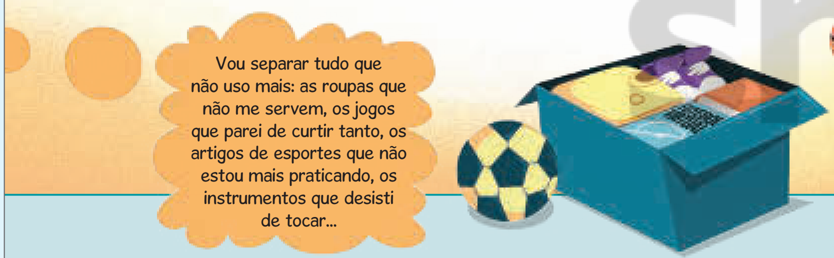
a) Como vocês avaliam a atitude da personagem? Vocês já tiveram uma experiência parecida?

b) Vocês e sua família já fizeram doações de roupas, calçados e outros objetos? Quando foi a última vez? Há planos para a próxima doação? Juntos, troquem experiências sobre como essas doações foram feitas.

3. Imaginem que vocês estão em uma loja de sapatos e experimentam três pares de tênis. Vocês percebem que eles têm características de qualidade muito semelhantes. Mas o tênis A é de uma marca famosa, mais caro, e quase ninguém tem; o tênis B é de uma marca desconhecida; e o tênis C é bastante parecido com o que seus amigos usam. Dos três, o tênis B é o mais barato. Qual deles cada um de vocês compraria?



João Picoli/ID/BR



RESPOSTAS

1. Respostas pessoais. Os jovens costumam ser movidos por dois vetores: o otimismo e a impaciência. No primeiro, eles entendem que, como têm muito tempo de vida, então podem experimentar e não pensar muito no futuro; no segundo, eles têm o hoje como meta e, com isso, não esperar é fundamental para vivê-lo intensamente. O prevenir significa, dentro das limitações etárias, culturais, financeiras e sociais, criar um hábito de ver além do hoje, de se programar, sabendo que isso sempre será concomitante ao viver o hoje.

2. a) Respostas pessoais. Incentive os estudantes a compartilhar suas experiências com os colegas.

b) Respostas pessoais. Estimule a doação de alimentos. Em um país com uma desigualdade social tão grande como o nosso, esse hábito precisa ser estimulado. O mesmo vale para as roupas. É importante que a doação não seja usada como uma desculpa para aumentar ou intensificar o consumo. Se julgar oportuno, incentive os estudantes a fazer uma campanha de doação de roupas e de brinquedos.

3. Resposta pessoal. Questione quais seriam os motivos que fazem com que as pessoas, às vezes, paguem muito mais caro, sem necessariamente ganhar em qualidade com isso. Discuta, ainda, os casos em que o produto mais caro é, de fato, o de melhor qualidade, situando isso no contexto da realidade financeira do estudante. “É melhor, mas você pode ter? É o momento para ter?”

DE OLHO NA BASE

Ao discutirem as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, desenvolvendo a **competência geral 9**.

Responsabilidade

O assunto tratado nessa seção possibilita a aproximação com o valor responsabilidade, ao refletir sobre um orçamento convergente. Além disso, desenvolve a solidariedade ao compartilhar não apenas coisas, mas também o tempo, o que pode ser feito por meio de ações de voluntariado.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Na atividade **3**, verifique se os estudantes compreenderam a proposta. Se tiverem dificuldades em resolvê-la, retome os conceitos de construção do polinômio.
- Na atividade **9**, os estudantes podem fazer, no item **a**, a conversão das medidas de metro para centímetro ou de centímetro para metro. Se optarem por transformar em metro a medida que está em centímetro, os coeficientes serão números na forma decimal e o polinômio será $0{,}0001x^2 + 0{,}0027x + 0{,}005$. No item **c**, eles podem fazer a conversão das unidades de de medidida de maneiras diferentes, porém o polinômio que representa a medida da área deverá ser da forma: $k \cdot (x^2 + 27x + 50)$, com k sendo um número racional.
- Socialize as respostas da atividade **12**, para que os estudantes percebam que um mesmo problema pode ter diferentes soluções.

RESPOSTAS

3. a) Incorreta. Correção possível: Um polinômio é formado por uma adição ou uma subtração de monômios.

b) Incorreta. Correção possível: Um polinômio é formado pela adição ou pela subtração de monômios.

c) Correta.

DE OLHO NA BASE

As atividades apresentadas nessa seção auxiliam na resolução e na elaboração de problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações e contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA06**.

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Para calcular a medida da temperatura em grau Fahrenheit (t_F) equivalente a uma dada temperatura em grau Celsius (t_C), adiciona-se 32 a $\frac{9}{5}$ de t_C.

a) Escreva no caderno a expressão algébrica dessa conversão. $t_F = 32 + \frac{9}{5}t_C$

b) Quanto mede a temperatura em grau Fahrenheit (t_F) equivalente a 25 °C? **77 °F**

2. Considere três fábricas de automóveis, A, B e C. Por dia, é produzida em cada fábrica a seguinte quantidade de carros: **Fábrica B: $2x - 100$; fábrica C: $\frac{x}{2} + 200$.**

- Fábrica A: x carros
- Fábrica B: o dobro da quantidade de carros da fábrica A menos 100 unidades
- Fábrica C: metade da produção da fábrica A mais 200 unidades

Represente as produções das fábricas B e C por meio de polinômios.

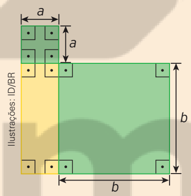
3. Indique no caderno qual é a alternativa correta e corrija as demais. **Consulte as respostas neste manual.**

a) Um polinômio é toda expressão algébrica que representa a adição de monômios, sendo todos semelhantes.

b) Um polinômio é toda expressão algébrica que representa a multiplicação de monômios não semelhantes.

c) Um polinômio é toda expressão algébrica formada por um monômio ou pela adição ou subtração de monômios não necessariamente semelhantes.

4. A figura a seguir é formada por dois quadrados verdes e um retângulo amarelo.



a) Escreva duas expressões algébricas: uma que represente a medida P do perímetro dessa figura e outra que represente a medida A de sua área.
$P = 4(a + b)$; $A = a^2 + ab + b^2$

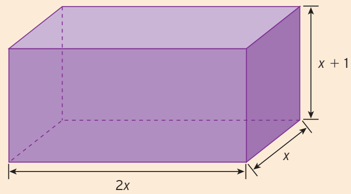
b) Determine as medidas do perímetro e da área dessa figura para $a = 3$ e $b = 7$.
$P = 40$; $A = 79$

5. Escreva no caderno a alternativa correta.

(UEL-PR) Se o resto da divisão do polinômio $p = x^4 - 4x^3 - kx - 75$ por $(x - 5)$ é 10, o valor de k é: **Alternativa e.**

a) −5.
b) −4.
c) 5.
d) 6.
e) 8.

6. Observe o bloco retangular ilustrado e suas dimensões e, então, responda:



a) Se $x = 8$, quanto mede o volume desse bloco? **1 152**

b) Neste caso, qual é o significado da expressão $2x \cdot x \cdot (x + 1)$? **É a medida do volume do bloco.**

c) Substituindo x por 8 na expressão do item anterior, qual valor será obtido? Tente responder antes de efetuar as operações e justifique. **1 152**

7. Copie as divisões no caderno substituindo cada símbolo pelo termo correspondente.

a)
$$\begin{array}{r|l} 3b + 5 & b + 1 \\ \hline -3b - \star\ (3) & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r|l} 6a^2 + \blacktriangle\ (0) + 7 & \bullet\ (2a) + 2 \\ \hline -6a^2 - \star\ (6a) & 3a + \blacksquare\ (-3) \\ \hline -6a + 7 & \\ 6a + 6 & \\ \hline \blacklozenge\ (13) & \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|l} \star\ (5m) - 1 & 10m - 3 \\ \hline -\star\ (5m) + \blacktriangle\ \left(\frac{3}{2}\right) & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \end{array}$$

8. Viagem a Boniteza: R\$ 1816,30; viagem a Mimosa: R\$ 2128,40; o casal deverá ir para Boniteza.

8. Sandra e Adolfo estão planejando uma viagem de cinco dias, mas têm dúvidas se visitarão a cidade de Boniteza ou a cidade de Mimosa. Adolfo propôs que fizessem uma previsão dos gastos e que optassem pela viagem mais barata. Os gastos serão basicamente com pedágios, gasolina e hospedagem. O valor de cada pedágio é R\$ 9,60, e o preço do litro de gasolina é R\$ 7,50. Adolfo equacionou as despesas da seguinte forma: $9{,}60 \cdot p + \frac{7{,}50 \cdot d}{10} + 5 \cdot h$, em que p é o número de pedágios, d é a distância, ida e volta, e h é o valor das diárias de hospedagem.

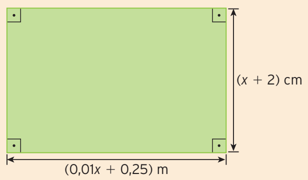
Analise a tabela a seguir, calcule os gastos com cada possibilidade de viagem e conclua para qual cidade o casal deverá ir, de acordo com a proposta de Adolfo.

Planejamento de viagem

Cidade	Quantidade de pedágios (p)	Distância (d)	Valor da diária (h)
Boniteza	3	250 km	R\$ 320,00
Mimosa	4	120 km	R\$ 400,00

Dados pesquisados por Sandra e Adolfo.

9. Na figura a seguir, a medida da altura do retângulo está indicada em centímetro e a medida do comprimento está indicada em metro.



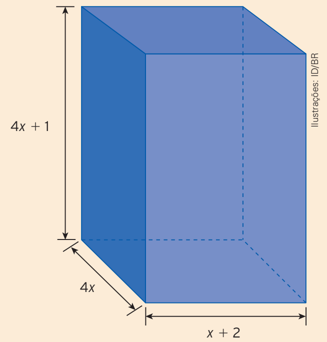
a) Como você faria para que as duas medidas ficassem na mesma unidade?

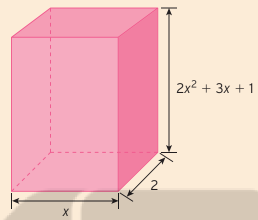
b) Determine o polinômio que representa a medida da área desse retângulo. **$x^2 + 27x + 50$**

c) Compare sua resposta ao item **b** com as dos colegas e verifique se algum deles respondeu diferente de você. Se sim, você acha que ambas as respostas estão corretas? Por quê? **Respostas pessoais.**

9. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes transformem a medida que foi dada em metro em medida em centímetro, ou seja, $(0{,}01x + 0{,}25) \cdot 100 = (x + 25)$.

10. As figuras a seguir representam duas embalagens de leite.





Suponha que a embalagem maior esteja cheia de leite e que essa quantidade de leite pode ser dividida em embalagens menores, como a embalagem rosa. Quantas dessas embalagens conseguiremos encher completamente? **4 embalagens.**

11. Crie um polinômio e, depois, siga os passos a seguir.

1º) Apague o termo independente.

2º) Multiplique cada monômio pelo seu grau.

3º) Subtraia 1 do grau de cada monômio.

Agora, dê para um colega verificar se você seguiu corretamente os passos. Você deve fazer o mesmo com o polinômio criado por ele. **Resposta pessoal.**

12. Desenhe no caderno um paralelepípedo cujas dimensões (comprimento, largura e altura) sejam polinômios. Em seguida, elabore um problema em que seja necessário determinar a medida do volume desse paralelepípedo. **Resposta pessoal.**

AUTOAVALIAÇÃO

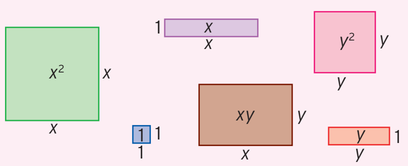
Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Compreendi o que são expressões algébricas e como são aplicadas?
- Sei reconhecer um monômio e um polinômio?
- Consegui resolver as operações com monômios e polinômios?
- Compreendi que dados dois polinômios P e D, em que D é não nulo, dividir P por D consiste em determinar dois outros polinômios, Q e R, em que R sempre tem grau menor que o de D, de modo que $P = D \cdot Q + R$?
- Procurei conversar com os colegas ou o professor para eliminar minhas possíveis dúvidas?
- Ampliei meus conhecimentos em relação às expressões algébricas?

ESTRATÉGIA DE APOIO

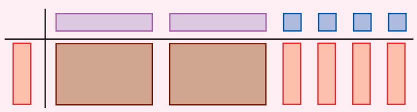
Se os estudantes ainda tiverem dificuldade em multiplicar polinômios, proponha uma atividade utilizando o Algeplan. Esse material auxilia no ensino e na aprendizagem das operações com polinômios de até 2º grau.

Confeccione as peças de cartolina conforme indicação abaixo (a quantidade depende da operação envolvida).



As figuras congruentes representam termos semelhantes, sendo possível solicitar aos estudantes que escrevam as suas representações, calculando a medida da área de cada um dos quadriláteros.

Depois, represente a operação de multiplicação da expressão $y \cdot (2x + 4)$:



Ilustrações: ID/BR

NESTA UNIDADE...

Competências gerais

7 e 9.

Competências específicas de Matemática
1, 3, 5 e 6.

Temas Contemporâneos Transversais
Cidadania e Civismo, Ciência e Tecnologia e Saúde.

Habilidades

(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

UNIDADE 3

EQUAÇÕES E SISTEMAS

SOBRE A UNIDADE

Esta unidade amplia o conhecimento algébrico dos estudantes, retomando o estudo de equações do 1º grau com uma incógnita, que são trabalhadas por meio de problemas do cotidiano e de sua aplicação no cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica.

Amplia-se o estudo de equações do 1º grau com duas incógnitas por meio de situações-problema e da interpretação geométrica, utilizando o plano cartesiano. Além disso, são apresentadas as equações do 2º grau com uma incógnita. Neste volume, o estudo das equações do 2º grau terá foco nas equações incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$.

O estudo dos sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas é apresentado por meio de uma situação cotidiana. Apresenta-se, também, a solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas por meio da representação gráfica. Além disso, classificam-se os sistemas desse tipo em: sistema impossível, sistema possível e determinado e sistema possível e indeterminado.

São mostrados três métodos de resolução de sistemas desse tipo: o método da substituição, o método da adição e o método da comparação.

RESPOSTAS

1. Respostas pessoais. Se houver estudantes que tenham deficiência ou que conheçam pessoas com deficiência que são praticantes de algum esporte, peça que compartilhem com os colegas as informações, estimulando, assim, a autonomia e desenvolvendo a oratória.
2. Sim. Sim. Espera-se que os estudantes respondam que a seleção brasileira pode ter feito, no máximo, 23 cestas de 3 pontos e a seleção argentina, no máximo 14. Além disso, a seleção brasileira pode ter feito, no máximo, 34 cestas de 2 pontos e a seleção argentina, no máximo 22. Se julgar oportuno, peça aos estudantes que compartilhem com os colegas a maneira como pensaram para responder à atividade.

CAPÍTULO 1
Equações

CAPÍTULO 2
Sistemas de equações do 1º grau

Alexandre Schneider/EXEMPLUS/CPB

← Partida entre brasileiras e argentinas nos Jogos Parapan-Americanos de Lima, em 2019.

PRIMEIRAS IDEIAS

No basquete com cadeira de rodas, as pontuações são parecidas com as do jogo tradicional:

- 3 pontos quando o jogador que acerta o arremesso está a 6,75 m ou mais da cesta;
- 2 pontos quando o jogador que acerta o arremesso está a menos de 6,75 m da cesta;
- 1 ponto quando é arremesso de lance livre.

Nos Jogos Parapan-Americanos de Lima, em 2019, a Seleção Brasileira Feminina de Basquetebol em Cadeira de Rodas enfrentou a seleção da Argentina e venceu o jogo por 69 a 44, conquistando a medalha de bronze.

1. O que você sabe sobre esporte para pessoas com deficiência? Conhece alguém que participa de alguma modalidade?
2. Considerando a partida citada no texto, é possível saber qual foi a quantidade máxima de cestas de 3 pontos que cada uma das seleções pode ter feito? E de 2 pontos é possível saber?

63

PRIMEIRAS IDEIAS

- Converse com os estudantes sobre o basquete em cadeira de rodas. Muitas informações podem ser encontradas no *site* da Confederação Brasileira de Basquetebol em Cadeira de Rodas (CBBC), disponível em: https://www.cbbc.org.br/ (acesso em: 10 jun. 2022).
- Pergunte aos estudantes quais são as dificuldades encontradas pelos jogadores com deficiência ao praticar essa modalidade. Espera-se que eles percebam por meio da imagem que o espaço da cadeira de rodas deve ser considerado na locomoção, além do esforço exercido para deslocá-la na quadra ao quicar, passar ou arremessar a bola a cada dois toques dados na cadeira. Ressalte que a cadeira é adaptada e padronizada de acordo com as regras da Federação Internacional de Basquete em Cadeiras de Rodas (IWBF, na sigla em inglês). Com base nessa observação, incentive os estudantes a refletir sobre as dificuldades encontradas pelas pessoas com deficiência no dia a dia e a socializar algumas possibilidades para melhorar a qualidade de vida dessas pessoas, seja em relação à inclusão delas na sociedade (mobilidade e mundo do trabalho), seja por meio da tecnologia (*mouse* ocular ou visual, perna robótica, *stand table*, bengala luminosa, guincho de piscina, etc.). Essa reflexão desenvolve os **Temas Contemporâneos Transversais** Educação em Direitos Humanos e Ciência e Tecnologia, que pertencem às macroáreas **Cidadania e Civismo** e **Ciência e Tecnologia**.
- Releia com os estudantes o texto para que não haja dúvidas quanto ao modo como é feita a pontuação nos jogos.
- Promova, de maneira recorrente, rodas de conversa que possibilitem aos estudantes sentir que o ambiente escolar é um espaço livre de quaisquer atos violentos (verbais ou não verbais), em que o respeito a diferentes opiniões e posicionamentos sejam constantemente desenvolvidos. Aproveite esses momentos para buscar soluções coletivas e democráticas, de maneira que seja possível identificar, prevenir e reverter situações de conflito no ambiente escolar. Desse modo, os estudantes podem ter sentimentos de pertencimento à escola e reconhecê-la como um espaço saudável de convivência. Nesse contexto, incentive-os a refletir sobre o tema de combate aos vários tipos de violência (física, psicológica, moral, sexual e patrimonial) contra mulheres e meninas. Ao identificar situações que constituem atos de desrespeito ou intimidação, faça intervenções, por meio de mecanismos de conscientização e empoderamento, para garantir o respeito, a dignidade, o direito e a justiça para todas as mulheres. Se possível, reserve um momento para apresentar aos estudantes o vídeo *Igualdade de gênero*, da Organização das Nações Unidas (ONU), disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=-ZCGLC-vziRc (acesso em: 10 jun. 2022). Ao término da apresentação, organize um momento para a troca de ideias e converse com os estudantes sobre a mensagem que acompanha o vídeo: "Desde cedo, meninos e meninas aprendem o que podem e o que não podem fazer. Eles são levados a acreditar que as suas escolhas são determinadas pelo sexo. Só que isso tem consequências sérias para as mulheres, que se tornam vítimas da desigualdade. Essa realidade tem que mudar. Precisamos construir uma cultura de mais igualdade, mais direitos e mais oportunidades para todas e todos". Se julgar conveniente, proponha uma atividade complementar para atualizar as informações apresentadas no vídeo, pois os dados são de 2013, ou seja, eles representam situações vivenciadas pelas mulheres há mais de dez anos. Então, solicite aos estudantes que pesquisem, por exemplo, se houve avanços no que diz respeito aos direitos que as mulheres conquistaram nesse período e se houve algum retrocesso nas políticas implementadas anteriormente.

DE OLHO NA BASE

A situação proposta na abertura desta unidade contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**, ao permitir que os estudantes respeitem e promovam o respeito ao outro e aos direitos humanos, acolham e valorizem a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Equações do 1º grau com uma incógnita.
- Fração geratriz de uma dízima periódica.
- Equações do 1º grau com duas incógnitas.
- Resolução gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas.
- Equações do 2º grau na forma $ax^2 = b$.
- Resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$.

Objetivos

- Reconhecer a existência de valores desconhecidos e relacioná-los à incógnita.
- Utilizar métodos para calcular frações geratrizes a partir de números na forma decimal.
- Relacionar a solução gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
- Reconhecer uma equação do 2º grau com uma incógnita e utilizar métodos para calcular o valor da incógnita.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de compreender o significado de incógnita e de resolver equações do 1º grau e do 2º grau, associando, sempre que possível, essas sentenças com representações geométricas. Essa abordagem favorece o desenvolvimento da capacidade de modelar, aumentando o repertório de estratégias para resolver problemas que envolvem fenômenos quantitativos dessa natureza.

EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

- Se necessário, retome os conceitos de expressões algébricas e de operações com números racionais.
- Explique aos estudantes que a equação apresentada no Livro do Estudante relaciona três grandezas: velocidade, tempo e distância. Assim, conhecendo a distância entre duas cidades e o tempo que se leva para ir de uma a outra, é possível descobrir a velocidade média do percurso.
- É importante investigar o conhecimento prévio dos estudantes para relacioná-los com novos conceitos. Faça as mediações necessárias, desconstruindo possíveis ideias equivocadas que possam atrapalhar novas aprendizagens e reforçando ideias pertinentes ao estudo das equações e da linguagem algébrica.
- A situação apresentada nessa página pode promover uma abordagem interdisciplinar com o componente curricular Ciências a respeito da energia elétrica utilizada para movimentar o trem-bala e como esse recurso é produzido e disponibilizado ao meio de transporte, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08CI06** [Discutir e avaliar usinas de geração de energia elétrica (termelétricas, hidrelétricas, eólicas etc.), suas semelhanças e diferenças, seus impactos socioambientais, e como essa energia chega e é usada em sua cidade, comunidade, casa ou escola.].

Capítulo 1 EQUAÇÕES

Para o estudo dos conteúdos apresentados neste capítulo, é importante que os estudantes tenham compreendido os conceitos de expressões algébricas e dominem as estratégias utilizadas para realizar operações com números racionais.

Equação do 1º grau com uma incógnita

A primeira linha de trem-bala foi inaugurada em 1964, no Japão, para os jogos olímpicos e ligava Tóquio a Osaka.

Esse meio de transporte reduziu muito o tempo de viagem entre essas cidades. De ônibus, essa viagem dura 8 horas; em um trem convencional, dura 7 horas. Com o trem-bala de 1964, a viagem passou a ser de 4 horas; com o trem-bala de 2017, a viagem é feita em 2 horas e 45 minutos ou 2,75 horas.

Conhecendo a distância entre duas cidades e o tempo que se leva para ir de uma a outra, podemos descobrir a velocidade média do percurso usando a seguinte relação:

$$vt - d = 0$$

em que v é a velocidade média, t é o tempo gasto no trajeto e d é a distância entre as cidades.

Considerando que a distância entre Tóquio e Osaka é de aproximadamente 500 quilômetros e o tempo que o trem-bala leva para ir de uma cidade a outra é 2,75 horas, podemos obter a velocidade média do trem-bala da seguinte maneira:

$$v \cdot 2{,}75 - 500 = 0$$

Trem-bala com o monte Fuji ao fundo, Japão. Foto de 2020.

64

OUTRAS FONTES

GARBI, G. G. *O romance das equações algébricas*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

O livro apresenta uma abordagem diferenciada para métodos de resolução de equações.

IMENES, L. M. P. *et al. Álgebra*. 6. ed. São Paulo: Atual, 1992 (Coleção Pra que Serve Matemática?).

Nesse volume, as situações algébricas são apresentadas a partir de eventos curiosos e divertidos e de modo interdisciplinar e com fomento ao uso de tecnologias.

A sentença $v \cdot 2{,}75 - 500 = 0$ é um exemplo de **equação do 1º grau com uma incógnita**. Nesse caso, a incógnita é v.

> Uma **equação do 1º grau com uma incógnita** é qualquer equação que pode ser escrita na forma $ax + b = 0$, em que x é a incógnita, a e b são os coeficientes e $a \neq 0$.

Para resolver uma equação do 1º grau com uma incógnita, primeiro devemos analisar o conjunto universo. Depois, podemos simplificá-la até que a incógnita fique isolada em um dos membros da equação. Então, verificamos se o valor obtido pertence ao conjunto universo.

Como exemplo, vamos resolver a equação $v \cdot 2{,}75 - 500 = 0$.

$$v \cdot 2{,}75 - 500 = 0$$

$$v \cdot 2{,}75 = 500$$

$$v = \frac{500}{2{,}75}$$

$$v = \frac{2\,000}{11}$$

A raiz da equação $y \cdot 2{,}75 - 500 = 0$ é $\frac{2\,000}{11}$.

Portanto, a velocidade média do trem-bala que liga Tóquio a Osaka é de, aproximadamente, 182 km/h (lê-se: cento e oitenta e dois quilômetros por hora).

LEMBRE-SE:

O conjunto formado por todos os valores possíveis que a incógnita pode assumir, em uma equação, é chamado de **conjunto universo**.

Raiz ou **solução** de uma equação é todo número pelo qual a incógnita é substituída e que torna a sentença verdadeira.

Após resolver uma equação, é possível verificar se o resultado está correto, substituindo a incógnita pela solução e observando se a sentença obtida é verdadeira.

takune/Shutterstock.com/ID/BR

DE OLHO NA BASE

Discutir resoluções de equações com base em situações cotidianas possibilita aos estudantes reconhecer a Matemática como ciência humana, que contribui para a solução de problemas científicos e tecnológicos, desenvolvendo a **competência específica de Matemática 1**.

- Com base na imagem do trem-bala, instigue os estudantes a refletir sobre a mobilidade no contexto diário deles, como o itinerário de casa à escola, ou dos familiares ou responsáveis. Incentive-os a socializar a opinião deles a respeito da qualidade do transporte público sob a perspectiva social, considerando espaço, tempo e saúde, por exemplo, em relação a algumas situações, como pontualidade, tempo de trajeto, estrutura do veículo e superlotação, e como essas situações impactam na saúde física e mental das pessoas. Peça a eles que comparem a tecnologia empregada no trem-bala com os meios de transporte utilizados no município deles. Assim, a turma pode propor algumas inovações tecnológicas e melhorias que ampliem a qualidade de vida de toda a população. Essa conversa desenvolve os **Temas Contemporâneos Transversais** Educação em Direitos Humanos, Ciência e Tecnologia e Saúde, que pertencem às macroáreas **Cidadania e Civismo**, **Ciência e Tecnologia** e **Saúde**.
- Ao apresentar a definição de equação do 1º grau com uma incógnita para os estudantes, não deixamos explícito a qual conjunto numérico os coeficientes a e b pertencem. Esses coeficientes pertencem ao conjunto dos números reais, que ainda não foi abordado com os estudantes. Assim, é importante que você avalie a pertinência de comentar com eles que esses coeficientes fazem parte do conjunto numérico dos reais, que contempla o conjunto dos números racionais e outros números e que será estudado em outro momento.
- Faça a resolução da equação do exemplo do trem-bala passo a passo, mostrando cada operação realizada até obter a solução $v = \frac{2\,000}{11}$ (ou aproximadamente 182). É importante que os estudantes percebam o uso das operações inversas para isolar a incógnita v em cada passagem. Compreender o significado do uso das operações inversas para isolar a incógnita evitará que eles mecanizem o procedimento e permitirá a eles aplicá-lo nas diferentes situações com as quais vão se deparar ao longo da unidade e em estudos posteriores relacionados às equações.
- Retome o conceito de raiz de uma equação. Explique a eles que, após resolver uma equação, é possível verificar se o resultado está correto...

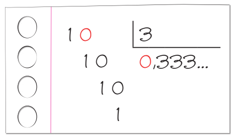
- Se julgar necessário, retome com os estudantes o conceito de números racionais e suas representações decimal e fracionária.
- Certifique-se de que os estudantes se lembram dos principais conceitos relacionados às dízimas periódicas.
- Ao realizar a leitura do Livro do Estudante, faça pausas questionando os principais pontos, como período, fração geratriz e diferença entre dízima periódica simples e dízima periódica composta.
- Explique aos estudantes o processo de transformação de dízima periódica em fração geratriz, com base nos exemplos apresentados no Livro do Estudante.

Uma aplicação da equação do 1º grau: cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica

Vamos estudar como as equações do 1º grau nos auxiliam no cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica.

Dízima periódica

Algumas vezes, ao transformar um número escrito na forma de fração para um número escrito na forma decimal, obtemos uma dízima periódica. Por exemplo, para escrever a fração $\frac{1}{3}$ na forma decimal, poderíamos efetuar 1 : 3. Veja.



ID/BR

Observe que o resto 1 se repete indefinidamente e que isso também acontece com o algarismo 3 do quociente. O resultado dessa divisão é uma **dízima periódica**, ou seja, um número decimal com infinitas casas decimais que se repetem.

O conjunto de algarismos que se repetem em uma dízima periódica é chamado de **período**. Podemos também colocar um traço acima do período em vez de usar as reticências. Na divisão anterior, o período é 3 e podemos indicar essa dízima por 0,333... ou por $0,\overline{3}$.

Uma dízima periódica pode ser simples ou composta. Quando o período inicia na primeira casa decimal, a dízima é simples. Caso contrário, quando o período não inicia na primeira casa decimal, a dízima é composta. Por exemplo, $5,\overline{25}$ é uma dízima periódica simples, e $3,1\overline{23}$ é uma dízima periódica composta.

Fração geratriz de uma dízima periódica

A fração em que a divisão do numerador pelo denominador gera uma dízima periódica é chamada de **fração geratriz**.

Acompanhe como podemos utilizar as equações do 1º grau com uma incógnita para determinar a fração geratriz de uma dízima.

Exemplos

A. Vamos determinar a fração geratriz da dízima $0,\overline{7}$.

Indicando por x a fração geratriz da dízima $0,\overline{7}$ ou 0,777..., temos:

$$x = 0,777... \quad \text{(I)}$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 10, obtemos no 2º membro uma dízima cujo período é o mesmo que o anterior.

$$10 \cdot x = 10 \cdot 0,777...$$
$$10x = 7,777... \quad \text{(II)}$$

OUTRAS FONTES

Calculadora de fração geratriz. Matemática Didática. Disponível em: https://www.matematicadidatica.com.br/CalculadoraFracaoGeratriz.aspx. Acesso em: 10 jun. 2022.

Esse *site* tem um aplicativo que converte dízimas periódicas em frações geratrizes. Para cada dízima resolvida, ele apresenta uma explicação sobre o desenvolvimento do processo do cálculo para a obtenção da fração.

Agora, subtraímos a equação I da equação II:

$$\begin{array}{r} 10x = 7{,}777... \\ - \quad x = 0{,}777... \\ \hline 9x = 7 \\ x = \dfrac{7}{9} \end{array}$$

Portanto, a fração geratriz da dízima periódica 0,777... é $\frac{7}{9}$.

B. Vamos determinar a fração geratriz da dízima $0{,}\overline{13}$.

Indicando por x a fração geratriz da dízima $0{,}\overline{13}$ ou 0,1313..., temos:

$$x = 0{,}131313... \quad \text{(I)}$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 100, obtemos no 2º membro uma dízima cujo período é o mesmo que o anterior.

$$100 \cdot x = 100 \cdot 0{,}131313...$$

$$100x = 13{,}1313... \quad \text{(II)}$$

Agora, subtraímos a equação I da equação II:

$$\begin{array}{r} 100x = 13{,}1313... \\ - \quad x = 0{,}1313... \\ \hline 99x = 13 \\ x = \dfrac{13}{99} \end{array}$$

Portanto, a fração geratriz da dízima periódica 0,131313... é $\frac{13}{99}$.

C. Vamos determinar a fração geratriz da dízima $9{,}7\overline{4}$.

Indicando por x a fração geratriz da dízima $9{,}7\overline{4}$ ou 9,7444..., temos:

$$x = 9{,}7444...$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 10, obtemos no 2º membro uma dízima periódica simples.

$$10 \cdot x = 10 \cdot 9{,}7444...$$

$$10x = 97{,}444... \quad \text{(I)}$$

Agora, para obter outro número na forma decimal com o mesmo período (4), multiplicamos os dois membros dessa igualdade por 10.

$$10 \cdot 10x = 10 \cdot 97{,}444...$$

$$100x = 974{,}444... \quad \text{(II)}$$

Então, subtraímos a equação I da equação II:

$$\begin{array}{r} 100x = 974{,}444... \\ - \quad 10x = 97{,}444... \\ \hline 90x = 877 \\ x = \dfrac{877}{90} \end{array}$$

Portanto, a fração geratriz da dízima periódica 9,7444... é $\frac{877}{90}$.

- Peça aos estudantes que analisem as equações obtidas nos quatro exemplos apresentados no Livro do Estudante. É importante que eles comparem e percebam as diferenças e as semelhanças nos quatro exemplos.
- Explique aos estudantes que devem chamar de x a dízima periódica com a qual pretendem realizar o procedimento de determinação da fração geratriz.
- Comente com os estudantes que em cada um dos exemplos foi escolhido um ou mais múltiplos de dez para multiplicar os dois membros da equação.

  A escolha correta do múltiplo de 10 que será utilizado para multiplicar os dois membros da equação, para que se obtenha no 2º membro uma dízima periódica cujo período é o mesmo que o período que aparece na dízima da equação anterior, é fundamental para que o método de determinação da fração geratriz seja eficiente.
- No exemplo **A**, multiplica-se por 10, pois o período tem um algarismo e a dízima é simples. Já no exemplo **B**, a dízima também é simples, mas o período tem dois algarismos. Nos exemplos **C** e **D**, as dízimas são compostas e, por isso, é necessária mais de uma transformação (por meio da multiplicação por um múltiplo de 10), já que primeiro deve-se transformar a dízima composta em simples para, depois, obter outra dízima com o mesmo período, como nos exemplos **A** e **B**.

DE OLHO NA BASE

Os exemplos propostos nestas páginas permitem que os estudantes reconheçam procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz de uma dízima periódica, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA05**.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Organize os estudantes em pequenos grupos e peça que compartilhem entre eles os procedimentos de transformação de dízimas em fração geratriz por meio de equações do 1º grau.

Proponha, inicialmente, algumas dízimas simples de período com apenas um algarismo e aumente a complexidade progressivamente, passando para as dízimas simples de período com dois ou mais algarismos. Em seguida, apresente dízimas compostas de período com um e, depois, com dois ou mais algarismos.

Sugira aos estudantes que utilizem a calculadora para verificar se acertaram, fazendo a divisão do numerador pelo denominador da fração geratriz encontrada e comparando com a dízima apresentada a eles.

EQUAÇÃO DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

- Assim como na definição apresentada para as equações do 1º grau com uma incógnita, neste momento também não apresentamos a que conjunto numérico os coeficientes *a*, *b* e *c* pertencem, pois os estudantes ainda não conhecem o conjunto dos números reais. Portanto, avalie a relevância de apresentar essa informação a eles.
- Releia o exemplo apresentado no Livro do Estudante e explique aos estudantes a relação entre as idades das filhas de Júlio. Comente o fato de uma idade variar em relação à outra sem aprofundar muito, pois o exemplo será retomado e analisado a seguir.

D. Vamos determinar a fração geratriz da dízima $2{,}10\overline{25}$.

Indicando por x a fração geratriz da dízima $2{,}10\overline{25}$ ou 2,102525..., temos:

$$x = 2{,}10252525...$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade por 100, obtemos no 2º membro uma dízima periódica simples. Veja.

$$100 \cdot x = 100 \cdot 2{,}10252525...$$
$$100x = 210{,}252525... \quad \text{(I)}$$

Agora, para obter outro número na forma decimal com o mesmo período (25), multiplicamos os dois membros dessa igualdade por 100.

$$100 \cdot 100x = 100 \cdot 210{,}252525...$$
$$10\,000x = 21\,025{,}252525... \quad \text{(II)}$$

Então, subtraímos a equação I da equação II:

$$\begin{array}{rl} 10\,000x = & 21\,025{,}252525... \\ -\quad 100x = & 210{,}252525... \\ \hline 9\,900x = & 20\,815 \end{array}$$

$$x = \frac{20\,815}{9\,900}$$

Portanto, a fração geratriz da dízima periódica 2,10252525... é $\frac{20\,815}{9\,900}$.

Podemos verificar se a fração geratriz encontrada está correta fazendo a divisão do numerador pelo denominador. Se o resultado dessa divisão for a dízima inicial, trata-se da fração geratriz.

Exemplos

A. $\frac{7}{9}$ é a fração geratriz de $0{,}\overline{7}$, pois $7 : 9 = 0{,}777777...$

B. $\frac{13}{99}$ é a fração geratriz de $0{,}\overline{13}$, pois $13 : 99 = 0{,}131313...$

C. $\frac{20\,815}{9\,900}$ é a fração geratriz de $2{,}10\overline{25}$, pois $20\,815 : 9\,900 = 2{,}10252525...$

Equação do 1º grau com duas incógnitas

Júlio tem duas filhas. Sabendo que a soma das idades das meninas, Beatriz e Camila, é 10 anos, qual é a idade de cada uma?

Se representarmos por x a idade de Beatriz e por y a idade de Camila, podemos indicar essa situação por meio de uma equação com duas incógnitas:

$$x + y = 10$$

A equação que expressa a soma das idades das filhas de Júlio é um exemplo de equação do 1º grau com duas incógnitas.

Uma **equação do 1º grau com duas incógnitas** é qualquer equação que pode ser escrita na forma $ax + by = c$, em que x e y são as incógnitas, a, b e c são os coeficientes e $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Nas equações do 1º grau com duas incógnitas, há, no máximo, uma incógnita em cada termo da equação, e cada incógnita apresenta expoente 1.

Exemplos

A. A equação $4x - 10y = 36$ é uma equação do 1º grau com duas incógnitas, x e y, e coeficientes $a = 4$, $b = -10$ e $c = 36$.

B. A equação $\frac{1}{2}wt = 5$ não é uma equação do 1º grau, pois há mais de uma incógnita no mesmo termo da equação.

C. A equação $8x + 3y + 2x - 3y = 5$ não é uma equação do 1º grau com duas incógnitas, pois, ao desenvolver a equação, obtemos $10x = 5$, que é uma equação do 1º grau com uma incógnita.

PARA EXPLORAR

***Equação: o idioma da Álgebra*, de Oscar Guelli. São Paulo: Ática, 1999 (Coleção Contando a História da Matemática).**

Muitas vezes, para resolver problemas de Matemática, o melhor caminho é traduzi-los para a linguagem da Álgebra.

Esse livro conta a história do desenvolvimento desse "idioma" em várias épocas e culturas.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Quais das equações a seguir são do 1º grau com uma incógnita? **Alternativas a e d.**

a) $3x - x = 8 + 3$

b) $\frac{a^2}{2} = 5{,}5$

c) $25{,}8 + 2x - 13{,}2 = 12{,}6 + 2x$

d) $5y + 3y = 14 - 6$

2. Determine a fração geratriz de cada uma das dízimas periódicas a seguir.

a) $0{,}\overline{2}$ **$\frac{2}{9}$**

b) $1{,}\overline{18}$ **$\frac{117}{99}$**

c) $0{,}3\overline{42}$ **$\frac{339}{990}$**

d) $0{,}181\overline{3}$ **$\frac{1\,632}{9\,000}$**

3. Escreva três números racionais na forma fracionária que sejam frações geratrizes de dízimas periódicas maiores que $0{,}\overline{1}$ e menores que $\frac{7}{8}$. **Resposta possível: $\frac{3}{9}$, $\frac{27}{99}$ e $\frac{7\,747}{9\,900}$.**

4. Faça o que se pede em cada item.

a) Copie o quadro no caderno e, depois, complete-o.

	Fração geratriz	Forma decimal	Período
$6{,}\overline{8}$; 8	$\frac{62}{9}$		
$\frac{435}{990}$; 39		$0{,}4\overline{39}$	
$\frac{39}{9}$; 3		$4{,}\overline{3}$	
$0{,}1\overline{3}$; 3	$\frac{4}{30}$		

b) Quais das dízimas periódicas do quadro do item anterior são simples? E quais são compostas? **Simples: $6{,}\overline{8}$; $4{,}\overline{3}$; compostas: $0{,}4\overline{39}$; $0{,}1\overline{3}$.**

5. Identifique quais equações representam equações do 1º grau com duas incógnitas.

a) $x = 8$

b) $2x - 3y = 9$

c) $\frac{1}{2} + w = 1$

d) $3(x - 4) = 2y + 1$

e) $\frac{x}{2} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{y}{4}$

Alternativas b, d e e.

6. Observe as afirmações sobre as equações do 1º grau com duas incógnitas e responda: Todas as afirmações são verdadeiras? Justifique sua resposta.

I A sentença $xy = 12$ não é uma equação do 1º grau com duas incógnitas, pois as incógnitas estão relacionadas entre si por uma multiplicação.

II A sentença $x - 27 = 13 + x - 13y$ é uma equação do 1º grau com duas incógnitas, pois, ao ser simplificada, obtemos uma equação com as incógnitas x e y.

III A sentença $x + y^3 = -15$ não é uma equação do 1º grau com duas incógnitas, pois o expoente da incógnita y é diferente de 1.

6. Não. A afirmação II é falsa. Trata-se de uma equação do 1º grau com uma incógnita (y).

- Retome a descrição de equação do 1º grau com duas incógnitas com base nos exemplos apresentados na página do Livro do Estudante, caso verifique que os estudantes não entenderam esse conceito.
- Explique a eles que, em uma equação do 1º grau com duas incógnitas, não podem existir termos com mais de uma incógnita, como na equação $xy - 2x + 3y = 9$, em que o termo xy apresenta mais de uma incógnita.
- Na atividade **3**, sugira aos estudantes que registrem seus resultados em uma reta numérica. Lembre-os de que, para transformar uma fração em número na forma decimal, basta dividir o numerador pelo denominador.
- Na atividade **6**, é fundamental comentar cada afirmação. Para a afirmação **I**, deve-se reforçar que as operações permitidas entre as incógnitas, em uma equação do 1º grau com duas incógnitas, são adição e subtração. Na afirmação **II**, é conveniente explicá-la na lousa para que todos os estudantes possam entender que, após a simplificação, a equação ficará apenas com a incógnita y. Na afirmação **III**, reforce com os estudantes que, como o expoente da incógnita y é diferente de 1, a equação não é uma equação do 1º grau com duas incógnitas.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nessa página permitem que os estudantes utilizem procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz de uma dízima periódica, desenvolvendo a habilidade **EF08MA05**.

- Explique aos estudantes que foram apresentados apenas alguns pares que são solução da equação $x + y = 5$. Proponha a eles que verifiquem outros dois pares que satisfaçam essa equação.
- Retome a leitura do problema sobre Júlio da página 68 do Livro do Estudante. Reapresente o quadro com os pares ordenados na lousa, para que todos possam visualizar e perceber a relação entre as idades das filhas de Júlio. Depois, organize os estudantes em duplas para que possam responder à questão referente às idades das irmãs Beatriz e Camila.
- O quadro apresentado nesta página do Livro do Estudante indica valores que variam, em x (idade de Beatriz), de 1 a 9. Pergunte aos estudantes se há possibilidade de esses números serem menores que 1 ou maiores que 9. Espera-se dos estudantes duas respostas: para $x = 0$, Beatriz não haveria nascido ou, ainda, pode-se considerar que este é o momento em que ela nasce. O mesmo ocorre para $y = 0$, pois Camila não teria nascido ou estaria nascendo nesse momento. Para valores maiores que 9, o limite proposto pelo problema é ultrapassado (a soma das idades é 10 anos).

DE OLHO NA BASE

Discutir com os estudantes as possíveis soluções para um problema permite a eles sintetizar suas conclusões e expressar suas respostas por meio de diferentes registros, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 6**.

Soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas

Todos os pares ordenados que satisfazem uma equação do 1º grau com duas incógnitas são soluções dessa equação.

Para encontrar um par ordenado que seja solução de uma equação do 1º grau com duas incógnitas, analisamos o conjunto universo, atribuímos um valor para uma das incógnitas e determinamos o valor da outra incógnita resolvendo a equação obtida.

Vamos determinar alguns pares ordenados (x, y) que sejam soluções da equação $x + y = 5$, em que x e y são números racionais.

- Para $x = 2$:

$$2 + y = 5$$
$$y = 5 - 2$$
$$y = 3$$

Par ordenado: (2, 3).

- Para $x = -\frac{1}{2}$:

$$-\frac{1}{2} + y = 5$$
$$y = 5 + \frac{1}{2}$$
$$y = \frac{11}{2}$$

Par ordenado: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

- Para $y = 2$:

$$x + 2 = 5$$
$$x = 5 - 2$$
$$x = 3$$

Par ordenado: (3, 2).

- Para $y = 0$:

$$x + 0 = 5$$
$$x = 5$$

Par ordenado: (5, 0).

SÍMBOLO $\Rightarrow$

Lemos a expressão "$A \Rightarrow B$" como "A implica B" ou "se A, então B".

Nesse caso, se A for verdadeiro então B é também verdadeiro; se A for falso, então nada pode ser dito sobre B.

Assim, os pares ordenados (2, 3), $\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$, (3, 2) e (5, 0) são algumas das soluções da equação $x + y = 5$.

Agora, vamos voltar ao problema que explora as idades de Beatriz e Camila e descobrir quantos anos as irmãs podem ter, ou seja, vamos dar valores para x (idade de Beatriz) e descobrir valores de y (idade de Camila) que satisfaçam a equação $x + y = 10$.

x	$x + y = 10$	y	Par ordenado (x, y)
1	$1 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 1 = 9$	9	(1, 9)
2	$2 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 2 = 8$	8	(2, 8)
3	$3 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 3 = 7$	7	(3, 7)
4	$4 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 4 = 6$	6	(4, 6)
5	$5 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 5 = 5$	5	(5, 5)
6	$6 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 6 = 4$	4	(6, 4)
7	$7 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 7 = 3$	3	(7, 3)
8	$8 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 8 = 2$	2	(8, 2)
9	$9 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 9 = 1$	1	(9, 1)

PARE E REFLITA

Reúna-se com um colega para responder à pergunta: Quantos anos podem ter as irmãs Beatriz e Camila?

Beatriz: 1 ano e Camila: 9 anos; Beatriz: 2 anos e Camila: 8 anos; Beatriz: 3 anos e Camila: 7 anos; Beatriz: 4 anos e Camila: 6 anos; Beatriz: 5 anos e Camila: 5 anos; Beatriz: 6 anos e Camila: 4 anos; Beatriz: 7 anos e Camila: 3 anos; Beatriz: 8 anos e Camila: 2 anos; Beatriz: 9 anos e Camila: 1 ano.

Portanto, os pares ordenados determinados no quadro são soluções da equação $x + y = 10$.

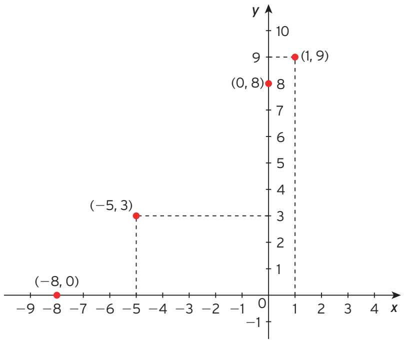
Solução gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas

Podemos representar as soluções de uma equação com duas incógnitas no plano cartesiano. Acompanhe a situação a seguir.

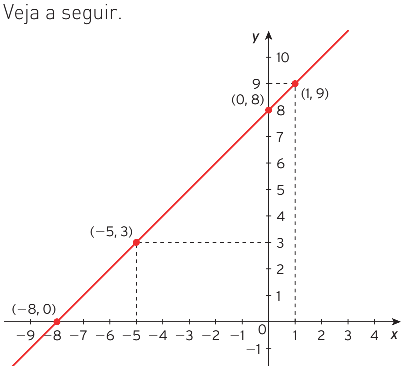
Vamos determinar alguns pares ordenados de números racionais que são soluções da equação $x - y = -8$ e representá-los graficamente.

- Para $x = 0$, temos:
  $0 - y = -8 \Rightarrow -y = -8 \Rightarrow$
  $\Rightarrow y = 8$
  Par ordenado: (0, 8).
- Para $x = -8$, temos:
  $-8 - y = -8 \Rightarrow y = 0$
  Par ordenado: (−8, 0).
- Para $x = -5$, temos:
  $-5 - y = -8 \Rightarrow -y = -8 + 5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow -y = -3 \Rightarrow y = 3$
  Par ordenado: (−5, 3).
- Para $x = 1$, temos:
  $1 - y = -8 \Rightarrow y = 9$
  Par ordenado: (1, 9).

Observe a representação desses pares ordenados no plano cartesiano.



Repare que os pontos estão alinhados e, portanto, estão contidos na mesma reta, ainda que não "completem" toda a reta, pois estamos trabalhando no conjunto dos números racionais. Essa reta contém todos os pontos da solução gráfica da equação $x - y = -8$, com x e y racionais. Qualquer ponto que pertença a essa reta é solução gráfica da equação $x - y = -8$. Veja a seguir.



Ilustrações: ID/BR

De modo geral, os pontos correspondentes aos pares ordenados que são soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas estão contidos na mesma reta. Logo, se conhecermos dois pares ordenados que são solução da equação, podemos traçar a reta que contém todas as outras soluções da equação.

- Retome a representação de pontos em um plano cartesiano para que os estudantes não apresentem dúvidas quanto a esse tipo de registro.
- Para a resolução gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas, solicite aos estudantes que coloquem uma régua sobre o gráfico, para que percebam que esses pontos estão alinhados, representando, assim, uma reta.
- Se julgar conveniente, comente com os estudantes que a reta é formada pelos pares ordenados de números que são soluções da equação $x - y = -8$.

71

- No item **a** da atividade **8**, aconselhe os estudantes a escrever, primeiro, em linguagem usual e, depois, em linguagem matemática, favorecendo o uso de dois registros.
  - 2 calças e 3 camisetas custam R$ 200,00
  - $2x + 3y = 200$

  Solicite aos estudantes que apresentem os cálculos que validem a resposta dada no item **b**.

  $2 \cdot (65) + 3 \cdot (30) = 130 + 90 = 220 \neq 200$

  No item **c**, verifique os valores que os estudantes atribuem a x e a y, uma vez que estamos considerando o preço de calças e de camisetas. Por exemplo, não é conveniente que o estudante atribua a x o valor 1, pois não é razoável que uma calça custe R$ 1,00.
- Nas atividades **9**, **10** e **11**, espera-se que os estudantes substituam nas equações os valores das coordenadas de alguns dos pontos representados no plano cartesiano.
- No item **c** da atividade **13**, verifique se os estudantes percebem que, como se trata da medida do perímetro, não podemos ter medidas negativas e, portanto, temos apenas um segmento de reta que representa o conjunto das soluções dessa equação. Já no item **d** dessa atividade, verifique se eles percebem que, como se trata de idade, devemos considerar solução apenas os pares ordenados formados por números naturais.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nessa página permitem que os estudantes associem uma equação do 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano, desenvolvendo a habilidade **EF08MA07**.

Além disso, representar as soluções para uma equação do 1º grau com duas incógnitas, utilizando registros algébricos e geométricos, contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 6**.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

7. Respostas possíveis: (0, 7); (21, 0); $\left(20, \frac{1}{3}\right)$.

7. Escreva três pares ordenados que sejam solução da equação a seguir.

$$x + 3y = 21$$

8. Marcos comprou duas calças e três camisetas e gastou, ao todo, R$ 200,00.

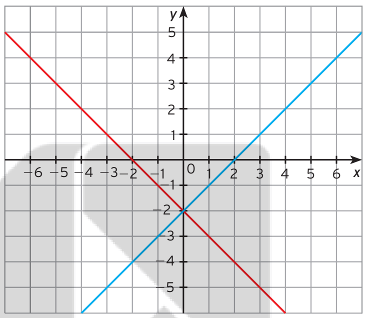
a) Sendo x o preço de uma calça e y o preço de uma camiseta, escreva a equação que representa essa situação.

b) É possível que cada calça tenha custado R$ 65,00 e que cada camiseta tenha custado R$ 30,00? **Não.**

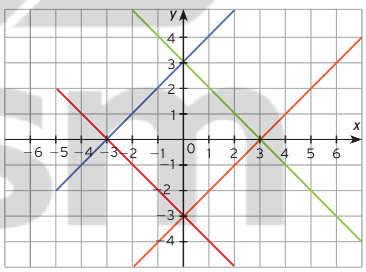
c) Determine pelo menos três soluções para a equação obtida no item **a**.

8. a) $2x + 3y = 200$
c) Respostas possíveis: Calça: R$ 55,00 e camiseta: R$ 30,00; calça: R$ 62,50 e camiseta: R$ 25,00; calça: R$ 25,00 e camiseta: R$ 50,00.

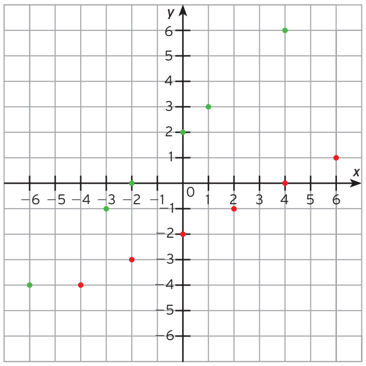
9. Observe as retas vermelha e azul no plano a seguir. Identifique qual delas contém as soluções da equação $x - y = 2$, em que x e y são números racionais. **A reta azul.**



10. A equação $-x + y = 3$ é representada por qual das retas apresentadas a seguir? Explique como você chegou a essa conclusão. **Pela reta roxa. Resposta pessoal.**



11. Observe os dois conjuntos de pontos (vermelhos e verdes) representados a seguir.



Ilustrações: ID/BR

Os pontos vermelhos são soluções de qual equação a seguir? E os pontos verdes?

a) $x = y - 2$

b) $x^2 + y = -3$

c) $7 = -x + 7y$

d) $2y = x - 4$

e) $y^2 = 3$

f) $x^2 + y^2 = 1$

Pontos verdes: item a; pontos vermelhos: item d.

12. Determine pelo menos quatro pares ordenados que sejam soluções da equação $2x + y = 6$. Em seguida, represente esses pares em um plano cartesiano. **Consulte a resposta neste manual.**

13. Represente a frase de cada item com uma equação do 1º grau com duas incógnitas. Depois, determine dois possíveis pares ordenados para cada equação e represente-os em um plano cartesiano, traçando a reta que contém as soluções de cada equação. **Consulte as respostas neste manual.**

a) O dobro de um número adicionado a outro número é igual a 16.

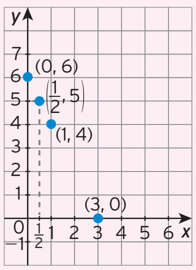
b) A diferença entre um número e o triplo de outro número é igual a 10.

c) A medida do perímetro de um retângulo é igual a 32.

d) A soma do dobro da idade de João com o triplo da idade de Mário é igual a 24.

RESPOSTAS

12. Respostas possíveis: (0, 6); (1, 4); (3, 0); $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$.

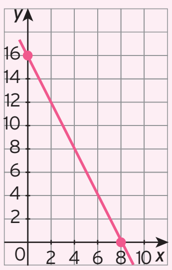


Ilustrações: ID/BR

13. Respostas possíveis:

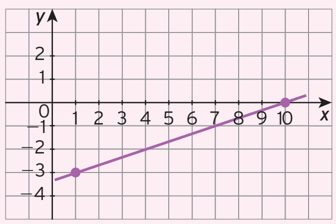
a) $2x + y = 16$

(0, 16); (8, 0)



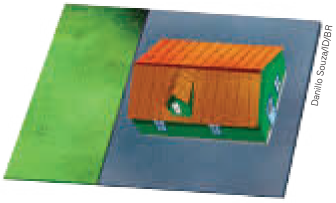
b) $x - 3y = 10$

(10, 0); (1, −3)



Equação do 2º grau com uma incógnita

Genivaldo decidiu reservar, na parte dos fundos da casa dele, um terreno com formato de um retângulo cuja área mede 50 m^2. A medida de um dos lados desse terreno é o dobro da medida de outro lado. Quais são as medidas dos lados desse terreno?


Danilo Souza/ID/BR

Indicando por x a medida do lado menor, a medida do outro lado é $2x$ e a medida da área desse terreno pode ser representada por $x \cdot 2x$.

Como a área do terreno mede 50 m^2, temos:

$$x \cdot 2x = 50$$
$$2x^2 = 50$$
$$2x^2 - 50 = 0$$

A equação $2x^2 - 50 = 0$ é um exemplo de **equação do 2º grau com uma incógnita**.

> Uma **equação do 2º grau com uma incógnita** é qualquer equação que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, em que x é a incógnita e a, b e c são os coeficientes.

Uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, na incógnita x, é completa quando todos os seus coeficientes (a, b e c) são diferentes de zero.

Quando b ou c ou ambos são iguais a zero, dizemos que a equação do 2º grau é incompleta.

Neste volume, vamos trabalhar somente com as equações do 2º grau incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$.

Resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Voltando ao problema do Genivaldo, observe como ele pensou para resolver a equação $2x^2 - 50 = 0$. Primeiro, ele isolou a incógnita no 1º termo:

$$2x^2 - 50 = 0$$
$$2x^2 = 50$$
$$x^2 = 25$$

Então, Genivaldo pensou em quais valores de x verificam essa equação, ou seja, quais números que, elevados ao quadrado, têm como resultado 25. Ele descobriu que são 5 e -5, pois $5^2 = 25$ e $(-5)^2 = 25$.

Continuando a resolução da equação, podemos escrever:

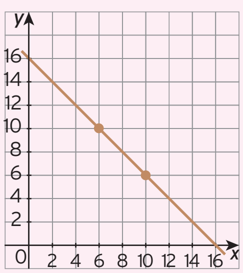
$$x = \pm\sqrt{25}$$
$$x = \pm 5$$

Nessa situação, o valor de x deve ser um número racional positivo, pois se trata de uma medida de comprimento. Portanto, a medida do lado menor é 5 m e a medida do lado maior é 10 m.

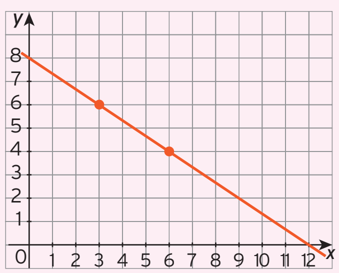
EQUAÇÃO DO 2º GRAU COM UMA INCÓGNITA

- Retome o conceito de área de uma região retangular.
- Diferencie as equações de 2º grau incompletas das completas, fornecendo diferentes exemplos de cada tipo.
- Assim como na definição apresentada para as equações do 1º grau com uma incógnita, neste momento também não é mostrado a que conjunto numérico os coeficientes a, b e c pertencem, pois os estudantes ainda não conhecem o conjunto dos números reais. Portanto, avalie a relevância de apresentar essa informação a eles.
- Pergunte aos estudantes por que a não pode ser zero em uma equação de 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$. Caso eles não compreendam o motivo, peça que substituam a por zero e verifiquem o que acontece. Espera-se que eles percebam que a equação passa a ser de 1º grau.
- Solicite aos estudantes que façam no caderno as substituições propostas na situação **1**. Comente que, por se tratar de um problema que envolve medidas de comprimento, o valor de x deve ser positivo.

c) $2x + 2y = 32$
(10, 6); (6, 10)



d) $2x + 3y = 24$
(6, 4); (3, 6)



Ilustrações: ID/BR

- Desenvolva as equações de cada situação apresentada no Livro do Estudante na lousa para que os estudantes possam acompanhar as passagens e se familiarizar com a resolução das equações utilizando as propriedades da igualdade.
- Na situação **2**, verifique se os estudantes compreenderam que zero é a raiz da equação dada.

Situação 2

O produto de um número por sua quarta parte é igual a zero. Vamos determinar que número é esse.

Em primeiro lugar, vamos escrever a equação que representa esse problema. Indicando por x o número procurado, temos:

$$x \cdot \frac{x}{4} = 0$$

Resolvendo a equação obtida, temos:

$$x \cdot \frac{x}{4} = 0$$

$$\frac{x^2}{4} = 0$$

$$\frac{x^2}{4} \cdot 4 = 0 \cdot 4$$

$$x^2 = 0$$

Precisamos descobrir o número que, elevado ao quadrado, é igual a 0.

O único número que, elevado ao quadrado, é igual a zero é o próprio zero. Logo, $x = 0$. Então, 0 é raiz da equação dada.

Situação 3

Vamos determinar as raízes da equação $x \cdot \frac{x}{9} = 4$.

Desenvolvendo a equação, temos:

$$x \cdot \frac{x}{9} = 4$$

$$\frac{x^2}{9} = 4$$

$$\frac{x^2}{9} \cdot 9 = 4 \cdot 9$$

$$x^2 = 36$$

Existem dois valores de x que verificam essa equação: 6 e -6, pois $6^2 = 36$ e $(-6)^2 = 36$. Vamos, então, continuar a resolução da equação:

$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$x = \pm 6$$

Logo, as raízes dessa equação são 6 e -6.

Situação 4

Abel quer determinar quais são as raízes da equação $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 1\,176$.

Desenvolvendo a equação, ele obteve:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 1\,176$$

$$\frac{x^2}{6} = 1\,176$$

$$\frac{x^2}{6} \cdot 6 = 1\,176 \cdot 6$$

$$x^2 = 7\,056$$

Abel resolveu usar a calculadora para determinar qual é a raiz quadrada de 7 056. Então, ele apertou as seguintes teclas na calculadora:

7 0 5 6 √

E no visor apareceu o seguinte resultado: 84

Note que a calculadora informa somente a raiz positiva dessa equação. Qual é sua outra raiz? **−84**

Então, quais são as raízes da equação $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 1\,176$? **84 e −84.**

Situação 5

O quadrado de um número negativo adicionado a 5 é igual a 26,16. Vamos determinar que número é esse.

Indicando por x o número procurado, temos:

$$x^2 + 5 = 26{,}16$$

Resolvendo a equação obtida, temos:

$$x^2 + 5 = 26{,}16$$
$$x^2 + 5 - 5 = 26{,}16 - 5$$
$$x^2 = 21{,}16$$
$$x = \pm\sqrt{21{,}16}$$
$$x = \pm 4{,}6$$

Assim, como as raízes da equação são 4,6 e −4,6, então o número negativo procurado é −4,6.

Situação 6

O produto de um número por seu triplo é igual a −432. Vamos determinar que número é esse.

Indicando por x o número procurado, temos:

$$x \cdot 3x = -432$$

Resolvendo a equação obtida, temos:

$$x \cdot 3x = -432$$
$$3x^2 = -432$$
$$\frac{3x^2}{3} = -\frac{432}{3}$$
$$x^2 = -144$$

Precisamos descobrir o número que, elevado ao quadrado, é igual a −144. Porém, o quadrado de qualquer número racional é sempre positivo.

Desse modo, essa equação não tem raiz racional, pois não existe nenhum número racional cujo quadrado seja igual a −144. Assim, não existe número racional que satisfaça a condição proposta.

- Explique aos estudantes que uma raiz quadrada é sempre um número positivo. Além disso, ao resolver $x^2 = 4$, por exemplo, existem dois valores que, elevados ao quadrado, resultam em 4 e, por esse motivo, escrevemos $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.
- Comente com os estudantes que, na situação **6**, a equação não tem solução no conjunto dos números racionais, pois não existe nenhum número racional que, elevado ao quadrado, resulte em um número negativo.

- Na atividade **15**, se julgar oportuno, proponha aos estudantes que comparem as equações com $ax^2 + c = 0$.
- Na atividade **20**, sugira aos estudantes que manipulem as equações até a forma $ax^2 = b$.
- Na atividade **26**, espera-se que os estudantes consigam elaborar um problema considerando o assunto estudado no capítulo.

RESPOSTAS

22. a) Equações dos itens **a**, **b** e **c**: são equações do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, em que c é um número racional negativo; suas soluções são racionais e opostas.

Equações dos itens **d**, **e** e **f**: são equações do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, em que c é um número racional positivo; não têm soluções racionais.

b) II, III, V e VI.

26. Resposta possível: Um retângulo possui a medida de seu lado maior igual ao quádruplo da medida do lado menor, e sua área mede 256 m^2. Determine a medida de seus lados.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nesta página permitem que os estudantes resolvam e elaborem problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$, desenvolvendo a habilidade **EF08MA09**.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

14. Escreva uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, em que o coeficiente de x^2 seja 18 e o termo independente de x seja 72. **$18x^2 + 72 = 0$**

15. Escreva qual é a incógnita, qual é o coeficiente a e qual é o coeficiente c em cada uma das equações a seguir.

a) $-12x^2 + 14 = 0$ **x; -12; 14**

b) $z^2 = \frac{36}{144}$ **z; 1; $-\frac{36}{144}$**

c) $0{,}64n^2 = 0$ **n; 0,64; 0**

16. O dobro do quadrado da nota final de Alexandre é zero. Qual é a sua nota final? **Zero.**

17. Encontre as soluções racionais, x_1 e x_2, da equação $10x^2 - 1\,000 = 0$. Em seguida, calcule a soma dos cubos de x_1 e x_2. **$x_1 = 10$ e $x_2 = -10$; $x_1^3 + x_2^3 = 0$.**

18. Escreva a alternativa correta no caderno.

Lúcia resolveu a equação $4x^2 - 100 = 0$ e encontrou as soluções: **Alternativa c.**

a) 5 e 5.

b) -5 e -5.

c) 5 e -5.

d) Não existe solução racional.

19. Utilizando uma calculadora, encontre as soluções racionais das equações a seguir.

a) $x^2 + 169 = 0$ **Não existem soluções racionais.**

b) $x^2 - 169 = 0$ **13 e -13.**

c) $2x^2 - 288 = 0$ **12 e -12.**

d) $4x^2 = 0$ **0**

e) $5x^2 - 3\,125 = 0$ **25 e -25.**

20. Resolva as equações do 2º grau a seguir em $\mathbb{Q}$.

a) $x^2 - 25 = 0$ **-5 e 5.**

b) $2x^2 + 7 = 5x^2 - 20$ **-3 e 3.**

c) $2x^2 + 10 = 0$ **Não tem soluções racionais.**

d) $5x \cdot \frac{2x}{3} = 0$ **0**

e) $3x^2 + 12 = 0$ **Não tem soluções racionais.**

f) $36 - x^2 = 0$ **-6 e 6.**

21. Resolva as equações a seguir em $\mathbb{Q}$.

a) $x^2 - 4 = 0$

b) $x^2 - 9 = 0$

c) $x^2 - 361 = 0$

d) $x^2 + 4 = 0$

e) $x^2 + 9 = 0$

f) $x^2 + 361 = 0$

22. Observe as equações e as raízes da atividade anterior. **Consulte as respostas neste manual.**

a) O que as equações dos itens **a**, **b** e **c** têm em comum? E quanto às equações dos itens **d**, **e** e **f**?

b) Sem resolver as equações a seguir, identifique as que não têm soluções.

I. $x^2 - 11 = 0$

II. $x^2 + 8 = 0$

III. $x^2 + 5 = 0$

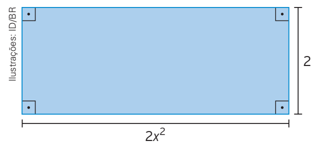
IV. $2x^2 - 7 = 0$

V. $x^2 + 3 = 0$

VI. $3x^2 + 25 = 0$

21. a) -2 e 2.
b) -3 e 3.
c) -19 e 19.
d) Não tem soluções racionais.
e) Não tem soluções racionais.
f) Não tem soluções racionais.

23. Calcule o valor de x, sabendo que a medida do perímetro do retângulo representado a seguir é 29. **$x = \frac{5}{2}$**



Ilustrações: ID/BR

24. Uma tela retangular com 12 150 cm^2 de medida de área tem medida de largura igual a uma vez e meia a sua medida de altura. Quais são as dimensões dessa tela? **90 cm por 135 cm.**

25. Escreva a alternativa correta no caderno.

Resolvendo a equação $9x^2 - 1 = 0$, encontramos a(s) seguinte(s) solução(ões): **Alternativa c.**

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{9}{3}$

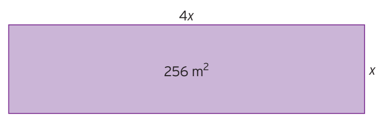
c) $-\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$

d) $-\frac{9}{4}$

e) 0 e 6

f) 3 e -3

26. Elabore um problema de acordo com a figura a seguir. Em seguida, peça a um colega que resolva o problema que você criou enquanto você resolve o problema que ele criou. **Resposta pessoal.**



ESTRATÉGIAS DE APOIO

Uma das maiores dificuldades dos estudantes é traduzir enunciados em linguagem matemática. Dessa forma, os exercícios a seguir se propõem a auxiliá-los na compreensão desse processo.

1. Represente as situações a seguir por meio de uma expressão algébrica.

a) A medida do perímetro de um retângulo cujas medidas dos lados são x e $x + 3$.

Relembre aos estudantes que em um polígono a medida do perímetro é a soma das medidas dos lados. Assim, eles poderão escrever:

$$x + x + x + 3 + x + 3 = 4x + 6$$

Alguns também poderão apresentar:

$$2x + 2(x + 3) = 4x + 6$$

b) O índice de massa corpórea de uma pessoa que tem mais de 18 anos de idade é obtido pela divisão entre a medida de sua massa p (em quilograma) e o quadrado da medida de sua altura a (em metro).

Solicite aos estudantes que grifem as palavras "divisão" e "quadrado". Desse modo, eles desenvolvem a competência leitora, ao mesmo tempo que se facilita a seleção de informações relevantes ao problema. Eles deverão, então, responder:

$$\text{IMC} = \frac{p}{a^2}$$

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. Escreva a alternativa correta no caderno.

Dada a equação $5x - 2y = 1$, quando $x = -3$, então: **Alternativa a.**

a) $y = -8$ c) $y = 27$
b) $y = 8$ d) $y = 7$

2. Transforme cada dízima periódica em uma fração irredutível.

a) $0,\overline{18}$ $\frac{2}{11}$ d) $0,3\overline{96}$ $\frac{131}{330}$
b) $2,\overline{13}$ $\frac{211}{99}$ e) $0,34\overline{71}$ $\frac{3\,437}{9\,900}$
c) $1,\overline{102}$ $\frac{367}{333}$ f) $1,45\overline{89}$ $\frac{3\,611}{2\,475}$

3. Escreva a alternativa correta no caderno.

Uma das soluções da equação $3x - 4y = 7$ é o par ordenado: **Alternativa c.**

a) (3, 1) b) (2, 5) c) (5, 2) d) (4, 1)

4. Encontre alguns pares ordenados que são soluções racionais da equação $x - \frac{1}{4} = 3 + \frac{y}{2}$. Depois, represente esses pares em um plano cartesiano. **Consulte a resposta neste manual.**

5. Escreva duas equações distintas do 1º grau com duas incógnitas que apresentem como solução o par ordenado (3, 4). Em seguida, verifique se as equações que você escreveu são as mesmas que seu colega escreveu.

6. Indique no caderno a alternativa correta.

A equação $2x^2 - 2 = 0$ tem como solução: **Alternativa d.**

a) −2 e 2. d) −1 e 1.
b) apenas 0. e) −2 e 0.
c) apenas 1.

7. Que número positivo multiplicado por sua terça parte dá 48? **12**

8. Uma tira de papelão com formato retangular tem 726 cm² de medida de área. Sabendo que a medida do seu comprimento é seis vezes a medida de sua largura, calcule as dimensões dessa tira. **11 cm por 66 cm.**

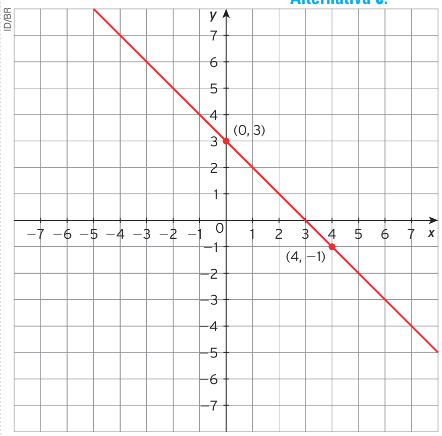
9. Mesmo sem resolver uma equação do tipo $ax^2 + c = 0$ é possível saber se ela tem solução ou não. Identifique a alternativa que indica a equação que não tem solução racional.

a) $10x^2 - 160 = 0$ c) $2x^2 + 50 = 0$
b) $10x^2 - 90 = 0$ d) $2x^2 - 50 = 0$

Alternativa c.

10. Registre no caderno a alternativa correta.

(Saresp) Indique a equação que define a reta representada no plano cartesiano a seguir. **Alternativa c.**



a) $x - y = 3$ c) $x + y = 3$
b) $-x - y = 3$ d) $3x + 3y = 0$

11. Luísa tem um terreno com formato quadrado. Ela pretende comprar um terreno de 180 m² que faz divisa com o dela. Desse modo, ela ficaria com um terreno retangular de 964 m². Qual é a medida do lado do terreno que Luísa tem? **28 m**

12. Quantos reais Rosana tem, sabendo que, subtraindo R$ 192,00 do dobro do quadrado dessa quantia, restam R$ 200,00? **R$ 14,00**

13. Aline trocou o piso de seu escritório por carpete de madeira. Para esse serviço, ela pagou R$ 3 750,00 pelo material. Sabendo que o metro quadrado do carpete custou R$ 50,00 e que o escritório é retangular, com a medida de seu comprimento igual a três vezes a medida de sua largura, calcule as dimensões do escritório. **5 m por 15 m.**

14. Represente a situação a seguir com uma equação. Depois, resolva-a.

Em uma partida de bolinha de gude, João perdeu 5 bolinhas, ficando sem nenhuma. Quantas bolinhas João tinha inicialmente?

$x - 5 = 0$; 5 bolinhas.

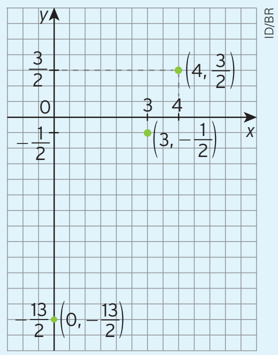
5. Resposta pessoal. Resposta possível: $x + y = 7$ e $2x - 3y = -6$.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Tanto para a atividade **1** como para a atividade **3**, relembre os estudantes de substituir o valor de uma das variáveis e determinar o outro, reforçando, assim, a relação entre elas.
- Na atividade **10**, sugira aos estudantes que utilizem os pontos (3, 0) e (0, 3). Comente que eles podem usar quaisquer pontos pertencentes à reta dada. Utilizar pontos que possuem uma das coordenadas zero facilita a resolução.
- Verifique se os estudantes perceberam que, na atividade **11**, a medida da área do terreno de Luísa é dada pela diferença entre a medida da área total após a compra e a medida da área do terreno que ela pretende comprar.

RESPOSTA

4. Resposta possível: $\left(0, -\frac{13}{2}\right)$; $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(4, \frac{3}{2}\right)$



Outro ponto a abordar é a relação entre as variáveis. Proponha, então, a atividade a seguir:

2. Qual das equações a seguir relaciona os valores dos pares p e q que estão no quadro?

p	−2	0	1	5
q	−3	1	3	11

a) $q = 2p - 1$ **c)** $q = 2p + 1$
b) $q = p - 2$ **d)** $q = 3p - 1$

Nesse caso, solicite aos estudantes que, primeiro, substituam o ponto (0, 1) em todos os itens para verificar que a única equação que se apresenta como correta é a do item **c** ($2 \cdot 0 + 1 = 1$). Peça, então, que substituam outros pontos nas demais equações, verificando que, ao não satisfazerem, apresentam-se como contraexemplos.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.
- Resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.
- Análise da solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas por meio de representação gráfica.
- Classificação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas em: SPD, SI ou SPI.

Objetivos

- Determinar soluções para sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.
- Desenvolver diferentes estratégias para resolver sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.
- Representar e resolver problemas por meio de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de avançar no estudo das equações do 1º grau com duas incógnitas, relacionando as representações algébrica e geométrica na resolução de sistemas de equações e atribuindo significado a esses cálculos. Esse estudo permite introduzir o estudante nas relações entre variáveis, favorecendo o processo progressivo do pensamento computacional.

SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

- Apresente aos estudantes a situação proposta no Livro do Estudante e peça a eles que resolvam o problema registrando a maneira como pensaram.
- Peça aos estudantes que socializem as respostas e as estratégias utilizadas.
- Comente com os estudantes que é possível verificar se a resposta encontrada satisfaz o problema e peça a eles que façam a verificação.

Capítulo 2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Para a compreensão dos conteúdos apresentados neste capítulo, é importante que os estudantes tenham aprendido os conceitos relacionados a equações e dominem as estratégias utilizadas para realizar operações com números racionais.

Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas

O espetáculo de teatro e música *As cangaceiras, guerreiras do sertão* foi inspirado em depoimentos de mulheres que seguiam os bandos nordestinos no sertão, atuando contra a desigualdade social da região.

Em certa temporada, o valor do ingresso para essa peça custava R$ 60,00 a meia-entrada e R$ 120,00 a entrada inteira.

A família de Renato gosta muito de ir ao teatro. No fim de semana, a família toda foi assistir a essa peça. Sabendo que a família dele é formada por cinco pessoas, entre adultos e crianças, e que eles gastaram, entre ingressos de entrada inteira e de meia-entrada, R$ 480,00, quantos ingressos de meia-entrada e quantos de entrada inteira foram comprados?

Adriano Doria/Acervo do fotógrafo

Amanda Acosta, Marco França, Vera Zimmermann, Luciana Ramanzini, Luciana Lyra, Rebeca Jamir, Jessé Scarpellini, Marcello Boffat, Milton Filho, Pedro Arrais, Nábia Villela, Carol Bezerra e Eduardo Leão, que compõem o elenco do espetáculo *As cangaceiras, guerreiras do sertão*, no teatro Riachuelo, Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2022.

OUTRAS FONTES

Souza, E. T. de O. *Uma abordagem prática no estudo de sistemas de equações lineares para o Ensino Fundamental.* Universidade Estadual do Centro-Oeste, p. 1-27. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2458-8.pdf. Acesso em: 10 jun. 2022.

Nesse artigo, a autora retrata uma experiência com metodologia diferenciada para o ensino de sistema de equações de 1º grau, com base em situações-problema e em experimentos.

Para representar essa situação, vamos usar duas equações de 1º grau, cada uma com duas incógnitas:

- $60\underbrace{x}_{\text{quantidade de ingressos de meia-entrada}} + 120\underbrace{y}_{\text{quantidade de ingressos de entrada inteira}} = \underbrace{480}_{\text{total gasto com ingressos}}$

- $\underbrace{x}_{\text{quantidade de ingressos de meia-entrada}} + \underbrace{y}_{\text{quantidade de ingressos de entrada inteira}} = \underbrace{5}_{\text{total de pessoas}}$

Assim, podemos representar essa situação com um **sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas**:

$$\begin{cases} 60x + 120y = 480 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Para resolver um **sistema de equações**, devemos determinar um par ordenado que satisfaça as duas equações.

Vamos fazer tentativas para encontrar o par ordenado que é solução do sistema dado anteriormente.

Para isso, vamos testar alguns valores considerando as informações fornecidas e verificar se obtemos sentenças verdadeiras.

- 1ª tentativa: considerando $x = 3$ e $y = 2$

$60x + 120y = 480$

$60 \cdot 3 + 120 \cdot 2 = 480$

$180 + 240 = 480$

$\underbrace{420 = 480}_{\text{sentença falsa}}$

$x + y = 5$

$\underbrace{3 + 2 = 5}_{\text{sentença verdadeira}}$

Logo, o par ordenado (3, 2) não é solução do sistema, pois, apesar de satisfazer a segunda equação, não satisfaz a primeira equação.

- 2ª tentativa: considerando $x = 2$ e $y = 3$

$60x + 120y = 480$

$60 \cdot 2 + 120 \cdot 3 = 480$

$120 + 360 = 480$

$\underbrace{480 = 480}_{\text{sentença verdadeira}}$

$x + y = 5$

$\underbrace{2 + 3 = 5}_{\text{sentença verdadeira}}$

Logo, o par ordenado (2, 3) é solução do sistema.

Portanto, foram comprados 2 ingressos de meia-entrada e 3 ingressos de entrada inteira.

- Explique aos estudantes que um sistema de equações é formado por diferentes equações que possuem a mesma solução. Resolver um sistema de equações, então, é determinar uma ou mais soluções que satisfaçam todas as equações do sistema.
- Monte as equações com a participação dos estudantes, por meio da leitura do problema. Peça a eles que identifiquem primeiro as incógnitas. Espera-se que eles percebam que as incógnitas são as quantidades de ingressos comprados de cada tipo (meia-entrada e entrada inteira).
- Partindo das informações do enunciado, escreva as duas equações: uma representando o total pago pelos ingressos e outra representando o total de pessoas da família de Renato que assistiram ao espetáculo.
- Certifique-se de que os estudantes compreenderam que $60x$ representa o valor gasto com ingressos de meia-entrada e que $120y$ representa o valor gasto com ingressos inteiros. Assim, a soma dos dois valores resulta no total gasto com a compra de todos os ingressos.

sm

RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

- Explique aos estudantes que existem diferentes métodos para resolver um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas e que pode-se escolher o método mais conveniente em cada situação.
- Incentive os estudantes a montar as equações com base nos dados do problema. Relacione cada frase com a equação que a representa. A frase que está sendo representada pela primeira equação é: Ana foi à padaria, comprou um sonho e um pão de queijo e pagou R$ 7,00. A frase que está sendo representada pela segunda equação é: Ana gostaria de ter comprado um pão de queijo e dois sonhos, mas não tinha dinheiro suficiente, pois eles custam R$ 11,00.
- Reforce a importância de relacionar as incógnitas de acordo com o que elas representam no problema para que, ao final, ao encontrar os valores correspondentes a cada incógnita, os estudantes consigam associá-los ao que se pretendia determinar.
- Peça aos estudantes que verifiquem se os valores encontrados satisfazem as duas equações que representam o problema.
- Observe se os estudantes compreendem que no método da substituição, uma vez que se determina o valor de uma das incógnitas, podemos substituí-lo em qualquer uma das equações do sistema para encontrar o valor da outra incógnita.

Resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas

Um sistema de equações pode ser resolvido por meio de diferentes métodos. Vamos estudar três deles: o método da substituição, o método da adição e o método da comparação.

Método da substituição

Ana foi à padaria, comprou um sonho e um pão de queijo e pagou R$ 7,00. Ela gostaria de ter comprado um pão de queijo e dois sonhos, mas não tinha dinheiro suficiente, pois eles custariam R$ 11,00. Qual é o preço do sonho e do pão de queijo nessa padaria?

Podemos escrever esse problema como um sistema de equações. Indicando por x o preço do pão de queijo e por y o preço do sonho, temos:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema pelo método da substituição, vamos inicialmente escolher uma das equações e isolar uma das incógnitas.

Vamos isolar x na primeira equação:

$$x + y = 7$$
$$x = 7 - y \qquad \text{(I)}$$

A equação obtida, que chamamos de I, mostra que as expressões algébricas x e $7 - y$ representam o mesmo número.

Agora, na segunda equação, substituímos a incógnita x pela expressão equivalente.

$$x + 2y = 11$$
$$7 - y + 2y = 11$$

Note que obtemos uma equação com uma incógnita. Então, basta resolvê-la e determinar o valor dessa incógnita.

$$7 - y + 2y = 11$$
$$y = 11 - 7$$
$$y = 4$$

Da equação I, temos $x = 7 - y$. Basta substituir y por 4 nessa equação para determinar o valor de x:

$$x = 7 - y$$
$$x = 7 - 4$$
$$x = 3$$

Assim, a solução do sistema é o par ordenado (3, 4).

Portanto, o pão de queijo custa R$ 3,00 e o sonho custa R$ 4,00.

Método da adição

Observe o comentário que Fernando fez para sua prima Elisabete depois da festa de aniversário dela.

Podemos descobrir quantos rapazes e quantas garotas foram à festa de Elisabete representando essa situação por meio de um sistema de equações.

Para isso, vamos indicar por g a quantidade de garotas que foram à festa e por r a quantidade de rapazes. Dessa maneira, temos:

$$\begin{cases} g + r = 37 \\ g - r = 3 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema pelo método da adição, precisamos identificar se pelo menos uma das incógnitas tem coeficientes opostos. Como podemos notar, o coeficiente de r na primeira equação é 1 e na segunda é -1. Então, podemos adicionar, membro a membro, as duas equações. Veja.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} g + r = 37 \\ g - r = 3 \end{cases} + \\ \hline 2g + 0r = 40 \end{array}$$

Agora, basta resolver a equação obtida:

$$2g = 40$$
$$g = \frac{40}{2}$$
$$g = 20$$

Em seguida, substituímos em qualquer uma das equações o valor de g encontrado e, assim, determinamos o valor da outra incógnita.

Vamos substituir g por 20 na primeira equação para determinar o valor de r.

$$g + r = 37$$
$$20 + r = 37$$
$$r = 37 - 20$$
$$r = 17$$

Logo, a solução do sistema é o par ordenado (20, 17).

Portanto, foram à festa de Elisabete 20 garotas e 17 rapazes.

- No método de adição, verifique se os estudantes compreendem o motivo pelo qual uma das incógnitas deve apresentar coeficientes opostos nas duas equações.
- É importante que eles entendam que a intenção de adicionar as equações é fazer com que a nova equação tenha apenas uma incógnita e, então, possa ser resolvida.
- Explique aos estudantes que, ao adicionar duas equações de um sistema, o resultado não é alterado e que a equação obtida também possui a mesma solução que as anteriores, ou seja, também pertence ao sistema.

- Explique aos estudantes que multiplicar uma equação por um número corresponde a multiplicar cada um de seus termos por esse número e que esse procedimento não altera a solução da equação, pois a equação obtida será equivalente e também fará parte do sistema.
- Reforce com os estudantes que o método da adição implica que os coeficientes de uma mesma incógnita sejam opostos nas duas equações. Por isso, em alguns casos pode ser necessário transformar uma ou ambas as equações do sistema para obter coeficientes opostos, como mostra o exemplo **B**.
- Se considerar oportuno, solicite aos estudantes que resolvam no caderno o sistema do exemplo **B**, mas escolhendo a incógnita x para ter coeficientes opostos nas duas equações. Uma possível resolução seria:

$$\begin{cases} 5x + 4y = 8 \\ 2x - 3y = 17 \end{cases}$$

$$5x + 4y = 8 \xRightarrow{\cdot(-2)} -10x - 8y = -16$$

$$2x - 3y = 17 \xRightarrow{\cdot(5)} 10x - 15y = 85$$

Obtemos então o sistema:

$$\begin{cases} -10x - 8y = -16 \\ 10x - 15y = 85 \end{cases}$$

Resolvendo pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} -\cancel{10x} - 8y = -16 \\ \cancel{10x} - 15y = 85 \end{cases} +$$

$$-23y = 69$$

$$y = -\frac{69}{23}$$

$$y = -3$$

Substituindo y por -3 na equação $2x - 3y = 17$, obtemos:

$$2x - 3 \cdot (-3) = 17$$

$$2x + 9 = 17$$

$$2x = 17 - 9$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

Logo, a solução do sistema é $(4, -3)$.

Quando as equações do sistema não apresentam a mesma incógnita com coeficientes opostos, podemos preparar o sistema usando a multiplicação.

Exemplos

A. $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$

Esse sistema tem a incógnita x com coeficientes iguais, mas, para resolvê-lo pelo método da adição, precisamos encontrar coeficientes opostos para a mesma incógnita. Assim, vamos multiplicar uma das equações por -1. Por exemplo, a equação $2x + 3y = 14$:

$$2x + 3y = 14 \xRightarrow{\cdot(-1)} -2x - 3y = -14$$

Obtemos, então, o sistema:

$$\begin{cases} -2x - 3y = -14 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$$

Agora, podemos resolvê-lo.

$$\begin{cases} -\cancel{2x} - 3y = -14 \\ \cancel{2x} + 5y = 18 \end{cases} +$$

$$0x + 2y = 4$$

$$2y = 4$$

$$y = \frac{4}{2}$$

$$y = 2$$

Substituindo y por 2 na equação $2x + 5y = 18$, encontramos o valor de x:

$$2x + 5y = 18$$

$$2x + 5 \cdot 2 = 18$$

$$2x + 10 = 18$$

$$2x = 18 - 10$$

$$2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

Portanto, a solução do sistema é $(4, 2)$.

B. $\begin{cases} 5x + 4y = 8 \\ 2x - 3y = 17 \end{cases}$

Como esse sistema não tem nenhuma incógnita com coeficientes opostos, precisamos escolher uma incógnita e fazer transformações para encontrar esses coeficientes. Vamos escolher a incógnita y e fazer as seguintes multiplicações:

$$5x + 4y = 8 \xRightarrow{\cdot(3)} 15x + 12y = 24$$

$$2x - 3y = 17 \xRightarrow{\cdot(4)} 8x - 12y = 68$$

Obtemos, então, o sistema:

$$\begin{cases} 15x + 12y = 24 \\ 8x - 12y = 68 \end{cases}$$

Agora, podemos resolvê-lo.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 15x + \cancel{12y} = 24 \\ 8x - \cancel{12y} = 68 \end{cases} + \\ \hline 23x + 0y = 92 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 23x &= 92 \\ x &= \frac{92}{23} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Substituindo x por 4 na equação $5x + 4y = 8$, encontramos o valor de y:

$$\begin{aligned} 5x + 4y &= 8 \\ 5 \cdot 4 + 4y &= 8 \\ 20 + 4y &= 8 \\ 4y &= 8 - 20 \\ y &= -\frac{12}{4} \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é $(4, -3)$.

Método da comparação

Sônia e Márcia foram fazer compras para os filhos. Sônia comprou 5 camisetas e 3 calças e pagou R$ 500,00, e Márcia comprou 2 camisetas e 4 calças e pagou R$ 424,00. Quanto custou cada camiseta e cada calça?

Para descobrir quanto custou cada peça de roupa, podemos montar um sistema de equações. Indicando por x o preço da camiseta e por y o preço da calça, temos:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 500 \\ 2x + 4y = 424 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema pelo método da comparação, determinamos o valor de uma mesma incógnita em ambas as equações e, em seguida, igualamos os resultados.

Assim, vamos expressar x em função de y nas duas equações. Observe.

- Na primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 500 \\ 5x &= 500 - 3y \\ x &= \frac{500 - 3y}{5} \qquad \text{(I)} \end{aligned}$$

- No método da comparação, enfatize que a mesma incógnita deve ser isolada nas duas equações para, em seguida, igualar os membros em que ela não aparece.
- Assim como sugerido para o método da adição, proponha aos estudantes que resolvam no caderno o sistema do exemplo, mas expressando y em função de x.
- Explore com os estudantes a verificação da solução nos exemplos apresentados no Livro do Estudante.

83

- Nas atividades **4**, **5** e **6**, os estudantes podem escolher o método que acharem mais apropriado para resolver os sistemas obtidos. É importante que eles saibam utilizar os três métodos apresentados para escolher qual é o mais conveniente em cada situação.
- Na atividade **4**, verifique se os estudantes representam as equações do sistema corretamente, pois uma das equações representa a medida do perímetro do retângulo e a outra, a relação entre as medidas de seus lados.
- Após os estudantes montarem o sistema para a resolução da atividade **5**, verifique qual é o método de resolução que eles preferem utilizar para resolver o sistema.

DE OLHO NA BASE

Nas atividades apresentadas, ao ter liberdade para escolher o método de resolução que desejam utilizar, os estudantes ampliam a capacidade de argumentar com base em fatos, contribuindo com o desenvolvimento da **competência geral 7**.

- Na segunda equação, temos:

$$2x + 4y = 424$$
$$2x = 424 - 4y$$
$$x = \frac{424 - 4y}{2}$$
$$x = 212 - 2y \qquad \text{(II)}$$

Agora, para encontrar o valor de y, basta igualar as equações I e II.

$$\frac{500 - 3y}{5} = 212 - 2y$$
$$500 - 3y = 1\,060 - 10y$$
$$-3y + 10y = 1\,060 - 500$$
$$7y = 560$$
$$y = \frac{560}{7}$$
$$y = 80$$

Agora, basta substituir o valor de y na equação I ou na equação II. Vamos fazê-lo na equação II:

$$x = 212 - 2y$$
$$x = 212 - 2 \cdot 80$$
$$x = 212 - 160$$
$$x = 52$$

Logo, a solução do sistema é (52, 80).

Portanto, cada camiseta custou R$ 52,00 e cada calça, R$ 80,00.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Resolva os sistemas a seguir utilizando o método da substituição.

a) $\begin{cases} x - 4y = -8 \\ 3x + y = 15 \end{cases}$ **(4, 3)**

b) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 5y = -23 \end{cases}$ **(2, −5)**

2. Resolva os sistemas a seguir utilizando o método da adição.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$ **(8, −3)**

b) $\begin{cases} 5x + y = 14 \\ 7x + 3y = 42 \end{cases}$ **(0, 14)**

3. Resolva os sistemas a seguir utilizando o método da comparação.

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x + 3y = 14 \end{cases}$ **(5, 3)**

b) $\begin{cases} 5x - y = 14 \\ 7x - 3y = 42 \end{cases}$ **(0, −14)**

4. Usando uma corda de 120 cm de comprimento, dois estudantes formaram uma figura que lembra um retângulo. A medida do lado maior é o triplo da medida do lado menor. Determine a medida de cada lado do retângulo. **15 cm e 45 cm.**

5. Em uma lanchonete, o sanduíche custa R$ 13,00 a mais que o suco de laranja. Para comprar 2 sanduíches e 3 sucos, foram gastos R$ 63,00.

a) Qual é o preço do sanduíche? **R$ 20,40**

b) Qual é o preço do suco de laranja? **R$ 7,40**

6. Uma loja vende livros de inglês por R$ 40,00 cada um e livros de espanhol por R$ 30,00 cada um. Roberto comprou 15 livros e pagou R$ 500,00. Quantos livros de cada língua Roberto comprou? **5 livros de inglês e 10 livros de espanhol.**

Solução de um sistema de equações do 1º grau por meio da representação gráfica

Podemos representar no plano cartesiano a solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Primeiro, vamos determinar a solução gráfica de cada uma das equações do sistema, que corresponde a uma reta. O ponto comum a essas duas retas representa o par ordenado que é a solução do sistema.

Exemplo

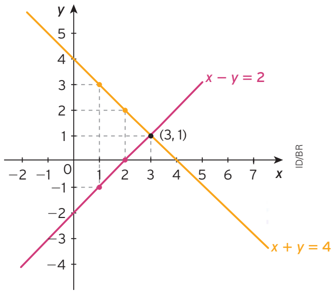
Vamos considerar o sistema: $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Em cada equação, atribuímos dois valores a uma das incógnitas e calculamos os valores correspondentes para a outra incógnita, obtendo pares ordenados.

$x + y = 4$		
x	y	(x, y)
1	3	(1, 3)
2	2	(2, 2)

$x - y = 2$		
x	y	(x, y)
1	−1	(1, −1)
2	0	(2, 0)

Em seguida, localizamos esses pares ordenados no plano cartesiano e traçamos as retas determinadas pelos pontos obtidos.



Observe que as retas se cruzam em um único ponto, o par ordenado (3, 1), que é a solução do sistema. Podemos verificar que esse par ordenado é solução do sistema substituindo essas coordenadas nas equações.

Classificação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

Podemos classificar os sistemas de acordo com o número de soluções.

Sistema possível e determinado

Um sistema é **possível e determinado** quando tem uma única solução. Na representação gráfica da solução desse sistema, as retas que representam as soluções das equações se cruzam em um único ponto, ou seja, são concorrentes.

SOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU POR MEIO DA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

- A resolução de sistemas pelo método gráfico favorece a transferência da linguagem algébrica para a gráfica e vice-versa, além de propiciar aos estudantes que compreendam que a solução do sistema é a solução comum às duas equações, representada pelo ponto de intersecção das duas retas que representam as soluções das equações do sistema.

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

- Se possível, permita que os estudantes façam os gráficos propostos no Livro do Estudante, à mão ou com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, para que percebam as diferenças entre os sistemas.
- A resolução algébrica deve ser feita concomitantemente para que se reforce a representação com diferentes registros.

DE OLHO NA BASE

Utilizar processos e ferramentas matemáticas para modelar e resolver problemas cotidianos, validando estratégias e resultados, possibilita aos estudantes desenvolver a **competência específica de Matemática 5**.

85

- Discuta com os estudantes os exemplos apresentados nestas páginas do Livro do Estudante e, depois, solicite a eles que escrevam no caderno, com as próprias palavras, as definições de sistema possível e determinado, possível e indeterminado e impossível, para que possam fixar as diferenças entre eles.

Exemplo

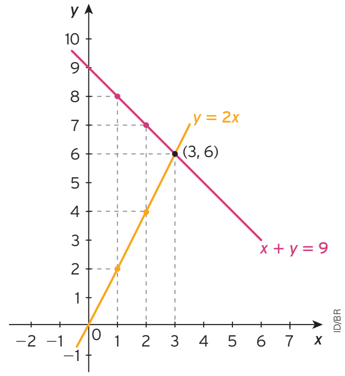
Considere o sistema: $\begin{cases} x + y = 9 \\ y = 2x \end{cases}$

Usando o método da substituição, obtemos o par ordenado (3, 6), que é a solução do sistema. Quando encontramos um par ordenado como solução do sistema, concluímos que o sistema é possível e determinado.

Agora, observe a representação da solução desse sistema no plano cartesiano.

$x + y = 9$		
x	y	(x, y)
1	8	(1, 8)
2	7	(2, 7)

$y = 2x$		
x	y	(x, y)
1	2	(1, 2)
2	4	(2, 4)



As retas se cruzam em um único ponto, o par ordenado (3, 6), que é a única solução do sistema.

Sistema impossível

Um sistema é **impossível** quando não tem solução. Na representação gráfica da solução desse sistema, as retas que representam as soluções das equações são distintas e paralelas, ou seja, não têm pontos em comum.

Exemplo

Considere o sistema: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$

Vamos resolver o sistema pelo método da substituição.

Isolando x na primeira equação, temos:

$$x + y = 3$$
$$x = 3 - y$$

Substituindo x na segunda equação, obtemos:

$$2x + 2y = 8$$
$$2 \cdot (3 - y) + 2y = 8$$
$$6 - 2y + 2y = 8$$
$$\underbrace{6 = 8}_{\text{sentença falsa}}$$

Quando isso acontece, não existe solução para o sistema. Logo, o sistema é impossível.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Os *softwares* de geometria dinâmica podem ser aliados importantes no ensino de sistemas de equações.

Uma das maneiras de estudar um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é utilizando o método gráfico, que consiste em representar graficamente cada uma das equações do sistema e analisar as representações obtidas.

Assim, reserve com antecedência a sala de informática e proponha aos estudantes que determinem a solução de um sistema de equações do 1º grau com uma incógnita usando um *software* de geometria dinâmica.

Como exemplo, vamos apresentar a resolução do sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

Primeiro, oriente os estudantes a escrever na caixa de entrada a primeira equação: $2x + y = 7$. Espera-se que eles obtenham algo como o mostrado na Figura 1.

Depois, oriente-os a escrever na caixa de entrada a segunda equação: $3x - y = 8$. Espera-se que eles obtenham algo como o mostrado na Figura 2.

Por fim, oriente-os a aproximar o *mouse* do ponto de intersecção das duas retas e a inserir um ponto. De maneira geral, o *software* indica, automaticamente, onde o ponto deve ser colocado.

Além disso, o *software* indica as coordenadas do ponto, como pode ser visto na Figura 3.

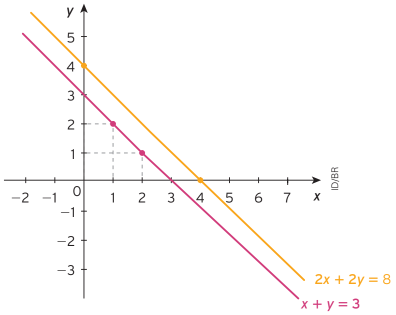
Observe se os estudantes compreendem que as coordenadas do ponto inserido, (3, 1), formam o par ordenado que corresponde à solução do sistema.

Aproveite o momento e proponha outros sistemas para serem resolvidos dessa maneira.

Agora, observe a representação da solução desse sistema no plano cartesiano.

$x + y = 3$		
x	y	(x, y)
1	2	(1, 2)
2	1	(2, 1)

$2x + 2y = 8$		
x	y	(x, y)
0	4	(0, 4)
4	0	(4, 0)



As retas são paralelas, ou seja, não têm pontos em comum.

Assim, não é possível encontrar o par ordenado (x, y) que corresponde à solução do sistema.

Sistema possível e indeterminado

Um sistema é **possível e indeterminado** quando tem infinitas soluções. Na representação gráfica da solução desse sistema, as retas que representam as soluções das equações são coincidentes.

Exemplo

Considere o sistema: $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 3x + 9y = 18 \end{cases}$

Vamos resolver esse sistema pelo método da adição. Inicialmente, multiplicamos a primeira equação por (-3):

$$x + 3y = 6 \overset{\cdot(-3)}{\Rightarrow} -3x - 9y = -18$$

Agora, montamos o novo sistema e o resolvemos:

$$\begin{cases} \cancel{-3x} - \cancel{9y} = \cancel{-18} \\ \cancel{3x} + \cancel{9y} = \cancel{18} \end{cases} +$$
$$0x + 0y = 0$$

Perceba que qualquer par de números racionais (x, y) satisfaz a equação obtida: $0x + 0y = 0$.

Logo, para que (x, y) seja solução do sistema, basta que satisfaça uma das equações. Portanto, o sistema tem infinitas soluções.

Quando isso acontece, dizemos que o sistema é possível e indeterminado ou que o sistema é indeterminado.

• Chame a atenção dos estudantes para a resolução gráfica do exemplo apresentado no Livro do Estudante. Verifique se eles percebem que, como as retas são paralelas, elas não têm pontos em comum, o que indica ser um sistema impossível.

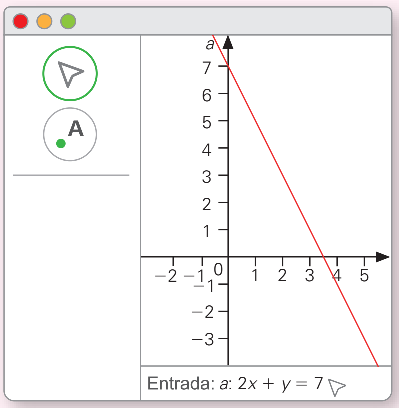


Figura 1

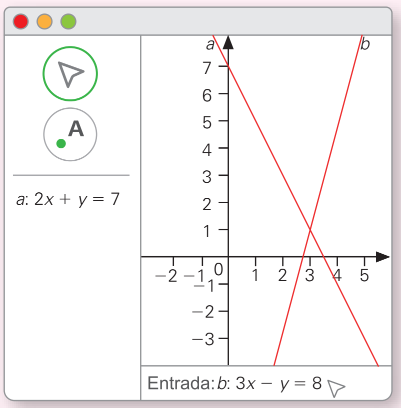


Figura 2

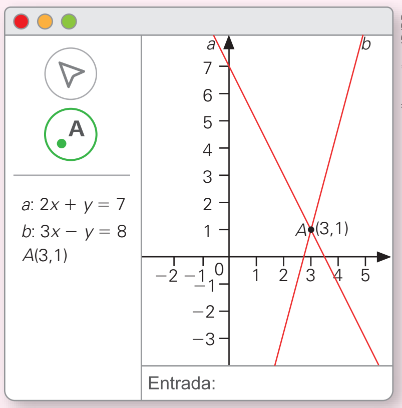


Figura 3

Ilustrações: ID/BR

87

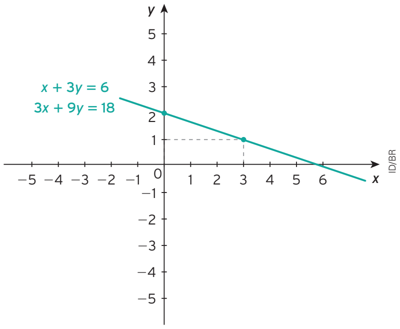
- Proponha aos estudantes que reproduzam no caderno o mapa conceitual com a classificação dos sistemas de equações, para fixação dos conceitos. Incentive-os a incrementar o mapa inserindo exemplos.
- Para a resolução da atividade **7**, é importante informar aos estudantes que as retas representadas no gráfico são, aos pares, constituintes de cada sistema.
- No item **a** da atividade, espera-se que os estudantes percebam que a primeira equação do sistema é representada pela reta *r* e que a segunda equação do sistema é representada pela reta *u*. Como essas retas são coincidentes, o sistema é possível e indeterminado. Para classificar os sistemas dos demais itens, espera-se que eles utilizem o mesmo raciocínio.
- Para complementar a atividade **7**, peça aos estudantes que expliquem e registrem os argumentos que os levaram à classificação dos sistemas, o que favorece o desenvolvimento dos diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático. Esta é uma atividade exclusivamente visual, não havendo a necessidade de resolução algébrica.
- Por fim, peça os estudantes que justifiquem as respostas dadas em cada item escrevendo argumentos lógicos. Por exemplo, no item **d**, eles podem escrever:
  - Se um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é possível e determinado, então ele tem solução única.
  - Como as retas *r* e *t* são concorrentes, então o sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas do item **d** tem solução única.

  Logo, o sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas do item **d** é possível e determinado.

Agora, observe a representação da solução desse sistema no plano cartesiano.

$x + 3y = 6$		
x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
3	1	(3, 1)

$3x + 9y = 18$		
x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
3	1	(3, 1)



As retas são coincidentes, ou seja, têm infinitos pontos em comum. Assim, o sistema tem infinitas soluções.

Veja em um organizador gráfico como podemos classificar um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas:

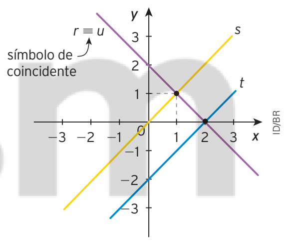
SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

- Sistema possível
  - Determinado (SPD)
    - Solução única.
    - Representação no plano cartesiano: retas concorrentes.
  - Indeterminado (SPI)
    - Tem infinitas soluções.
    - Representação no plano cartesiano: retas coincidentes.
- Sistema impossível (SI)
  - Não tem solução.
  - Representação no plano cartesiano: retas paralelas.

ATIVIDADE

Responda sempre no caderno.

7. Considere a representação gráfica das equações r: $x + y = 2$, s: $x - y = 0$, t: $x - y = 2$ e u: $2x + 2y = 4$.



Classifique os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$

7. a) Sistema possível e indeterminado.
b) Sistema impossível.
c) Sistema possível e determinado.
d) Sistema possível e determinado.
e) Sistema possível e determinado.
f) Sistema possível e determinado.

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

2. a) Indicando por x a quantidade de cabras e por y a quantidade de gansos, temos: $\begin{cases} x + y = 30 \\ 4x + 2y = 100 \end{cases}$

1. Em cada rodada de determinado jogo, o jogador ganha 1 ponto quando acerta e perde 2 pontos quando erra. Edu jogou 20 rodadas e fez 11 pontos. Quantas rodadas ele acertou e quantas ele errou? **Acertou 17 rodadas e errou 3.**

2. Em um sítio, há 30 animais, entre cabras e gansos. A quantidade total de patas desses animais é 100.

a) Escreva no caderno um sistema de equações para representar essa relação.

b) Quantas cabras há nesse sítio? E quantos gansos? **Há 20 cabras e 10 gansos nesse sítio.**

3. Guto tem 5 anos a mais que seu irmão Caio, e a mãe deles tem 42 anos. Daqui a 3 anos, a idade da mãe será o triplo da soma da idade atual dos filhos.

a) Qual é a idade de Guto? **10 anos.**

b) Qual é a idade de Caio? **5 anos.**

4. Um ônibus saiu da cidade de Alegria com 42 assentos ocupados. Esse ônibus vai até a cidade de Tranquilidade, passando pela cidade de Felicidade. Para quem foi somente até Felicidade, a passagem custou R$ 32,00. Para quem foi até Tranquilidade, a passagem custou R$ 34,00. A empresa de ônibus arrecadou R$ 1360,00 nessa viagem. Quantas pessoas foram até Tranquilidade? **8 pessoas.**

5. Uma pilha com 22 livros tem 90 cm de altura. Alguns livros têm 5 cm de espessura e outros, 3 cm.

a) Qual é a quantidade de livros com 3 cm de espessura? **10 livros.**

b) Quantos livros com 5 cm de espessura há nessa pilha? **12 livros.**

6. Na festa de um clube, os convites foram vendidos por preços diferentes: R$ 15,00 para associados e R$ 20,00 para convidados. Com 300 convites vendidos, foram arrecadados R$ 5300,00. Quantos foram os convites vendidos apenas para os associados do clube? **140 convites.**

7. Uma papelaria vendeu cadernos de capa mole por R$ 12,00 cada um e cadernos de capa dura por R$ 15,00 cada um. No total, foram vendidos 125 cadernos e obtidos R$ 1680,00 com as vendas. Quantos cadernos de cada tipo essa papelaria vendeu? **60 cadernos de capa dura e 65 cadernos de capa mole.**

8. Tomás recebe R$ 10,00 por hora de trabalho regular e R$ 15,00 por hora extra. Em um mês, ele trabalhou, ao todo, 180 horas (contando seu turno regular e as horas extras) e recebeu R$ 1900,00. Quantas horas regulares e quantas horas extras Tomás trabalhou nesse mês? **160 horas regulares e 20 horas extras.**

9. No caderno, escreva um sistema de equações para cada situação. Depois, resolva cada sistema.

a) A soma de dois números é 200 e a diferença entre eles é 70. Quais são esses números? **135 e 65.**

b) Fernanda comprou 6 revistas e 3 álbuns de figurinhas por R$ 75,00. Alexandre pagou, na mesma banca de jornal, R$ 30,00 por duas revistas e dois álbuns iguais aos de Fernanda. Quanto custou cada álbum? E cada revista? **Álbum de figurinhas: R$ 5,00. Revista: R$ 10,00.**

10. Considere que o estado A tem 7 vezes o número de deputados estaduais do estado B, que tem 36 deputados estaduais a menos que o estado C. Adicionando o número de deputados do estado C ao triplo do número de deputados do estado B, o resultado ultrapassa apenas em 6 o número de deputados do estado A. Qual é o número de deputados estaduais de cada um desses estados?

11. Tenho 20 moedas de euro. Algumas delas são de 20 centavos e outras, de 10 centavos. Se as moedas de 10 centavos fossem as de 20 e se as de 20 centavos fossem as de 10, eu teria 60 centavos a mais do que tenho agora. Quantas moedas de 10 centavos e quantas de 20 centavos eu tenho? **7 moedas de 20 centavos e 13 moedas de 10 centavos.**

12. Sônia disse a Teresa: "Se você me der 20% do dinheiro que possui, ficarei com uma quantia igual ao dobro do que lhe restará. Mas, se eu lhe der R$ 300,00 do meu dinheiro, ficaremos com quantias iguais". Quanto cada uma tem em dinheiro? **Sônia: R$ 2100,00; Teresa R$ 1500,00.**

13. Elabore um problema cuja resolução seja por meio do sistema a seguir. Depois, troque de problema com um colega. **Resposta pessoal.**

$$\begin{cases} x + y = 56 \\ 10x + 50y = 1200 \end{cases}$$

10. Estado A: 70 deputados, estado B: 10 deputados e estado C: 46 deputados.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Para todas as atividades, é importante que os estudantes analisem se as respostas são plausíveis antes de verificar se estão corretas pelo método da substituição. Por exemplo, em um problema em que a incógnita é a idade ou o número de pessoas, deve-se obter necessariamente um número natural. Já em problemas em que as incógnitas são medidas ou uma quantia monetária, é possível que a solução seja um número racional.
- Na atividade **1**, o total de rodadas é 20; então, se chamarmos de a a quantidade de rodadas que ele acertou e de e aquelas que ele errou, podemos escrever a soma $a + e = 20$. A outra equação relaciona a quantidade de pontos: $1 \cdot a + (-2) \cdot e = 11$.
- Na atividade **3**, podemos escrever a relação entre as idades dos irmãos: $g = c + 5$. Se a mãe tem 42 anos, daqui a 3 anos ela terá 45. Então, a soma das idades deles hoje é um terço de 45, ou seja, 15 anos. Assim, $c + g = 15$.
- Na atividade **10**, chame a atenção dos estudantes para o fato de que, apesar de o sistema formado ter três incógnitas, também temos três equações e, portanto, é possível resolver o sistema.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nessa seção possibilitam aos estudantes resolver e elaborar problemas relacionados ao seu cotidiano, que podem ser representados por sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA08**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Observe como os estudantes realizam as atividades propostas nesta página. É possível que alguns deles encontrem dificuldade em traduzir as situações-problema para a linguagem algébrica. Isto é, eles podem apresentar dificuldade em montar o sistema de equações que representa a situação-problema.

Uma estratégia que pode auxiliar os estudantes com dificuldade é organizar a turma em duplas ou em trios para que resolvam as atividades.

A troca de ideias durante a resolução favorece a ampliação do repertório de cada um e do grupo.

Ao fazer a correção, também é importante que os estudantes possam expor aos demais de que maneira pensaram para determinar as equações em cada problema. Valorize diferentes estratégias e não enfatize apenas o resultado correto, mas o modo como pensaram para chegar ao resultado.

Sugira a cada dupla ou trio que explique aos demais colegas da turma como resolveu pelo menos uma das atividades propostas. Faça uma pré-seleção das atividades que cada grupo vai apresentar, certificando-se de que estão corretas. Escolha resoluções criativas e diferentes uma das outras para que os estudantes possam comparar diferentes procedimentos para resolver um mesmo tipo de problema.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Resolver um problema usando a estratégia "observação de padrões" permite que os estudantes desenvolvam um raciocínio característico da estrutura da Matemática: a observação de padrões e de regularidades. Essa característica colabora para que eles compreendam também como construir o pensamento algébrico.
- As sequências formadas por quadrados proporcionam aos estudantes situações de aprendizagem que desenvolvem noções de pensamento computacional (identificação de padrões), mobilizando diferentes processos cognitivos, na medida em que eles reconhecem as regras de formação das sequências e estabelecem relações entre a posição de cada figura e a sua quantidade de quadrados.
- É interessante propor aos estudantes que resolvam esse problema de outra maneira e compartilhem essas estratégias, para que criem um repertório de resolução. Se julgar oportuno, sugira a eles que resolvam esse problema utilizando a estratégia "tradução para a linguagem algébrica".
- O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes deve ser preservada. Para isso, valorize situações em que eles se sintam acolhidos, incentivando o desenvolvimento da empatia e da solidariedade.

  Os processos cognitivos como percepção, memorização, raciocínio, imaginação e resolução de problemas podem contribuir para elevar a autoestima dos estudantes.

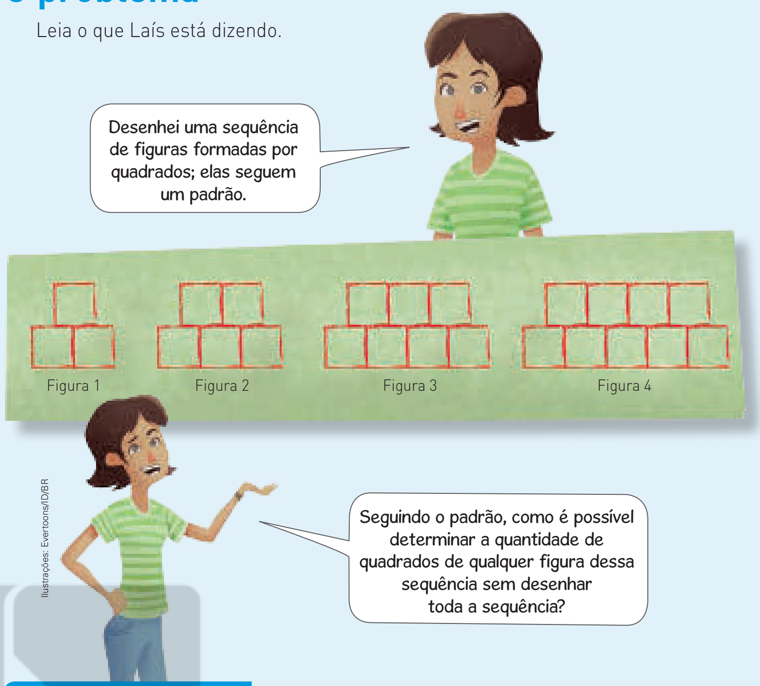
COMPREENSÃO DO PROBLEMA

- Para a compreensão de um problema, é necessário que os estudantes leiam o problema e extraiam do enunciado os dados importantes para desenvolver a resolução. Assim, eles devem observar que as figuras seguem um padrão e que a quantidade de quadrados de cada figura também segue um padrão numérico, que pode ser relacionado com o número da figura.

RESOLVENDO PROBLEMAS

O problema

Leia o que Laís está dizendo.



Ilustrações: Evertoons/ID/BR

Compreensão do problema

1. Quantos quadrados compõem cada figura? **Figura 1: 3 quadrados; Figura 2: 5 quadrados; Figura 3: 7 quadrados; Figura 4: 9 quadrados.**
2. É possível observar alguma relação entre essas quantidades? Explique o que você observa. **Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes observem que de uma figura para a outra a quantidade de quadrados aumenta em duas unidades.**
3. Seguindo o padrão da sequência de figuras de Laís, desenhe no caderno como seria a Figura 5. 

Resolução do problema

1. Observando a quantidade de quadrados que compõem cada figura da sequência de Laís, quantos quadrados tem a Figura 5? **11 quadrados.**
2. É possível relacionar a quantidade de quadrados de cada figura dessa sequência ao número dela? **Sim.**
3. Como você pode explicar com palavras uma maneira de calcular a quantidade de quadrados que compõem a Figura 8 sem desenhá-la? **Resposta pessoal.**
4. Sua explicação na resposta à questão anterior é válida para descobrir a quantidade de quadrados de qualquer figura da sequência de Laís? **Sim.**

RESPOSTAS – *MAIS PROBLEMAS*

1. No sexto dia, estarão empilhadas 28 caixas.
2. O cachorro receberá 135 pontos se superar todos os obstáculos.
3. Ricardo terá 37 bolinhas de gude no 17º dia.

Reflexão sobre o problema

Respostas pessoais.

1. Você gostou de resolver esse problema? Por quê?
2. Você encontrou dificuldades para resolver esse problema? Se sim, quais foram as dificuldades?
3. Você fez anotações dos dados do problema que o ajudaram a compreendê-lo?
4. Qual estratégia você usou para resolver esse problema?
5. Seus colegas utilizaram estratégias diferentes da sua? Se sim, quais?
6. Você pode apresentar outra maneira de resolver esse mesmo problema? Se sim, qual?

Mais problemas

Consulte as respostas neste manual.

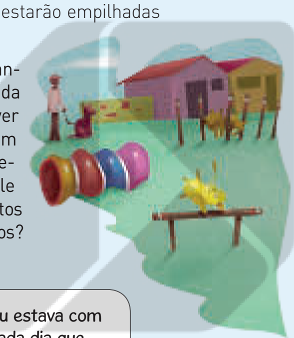
1. Quando sai da escola, Marcos sempre passa com seu tio em uma padaria. Ele observou dia a dia um funcionário empilhando caixas de determinado produto e desenhou as figuras a seguir.

1º dia 2º dia 3º dia 4º dia

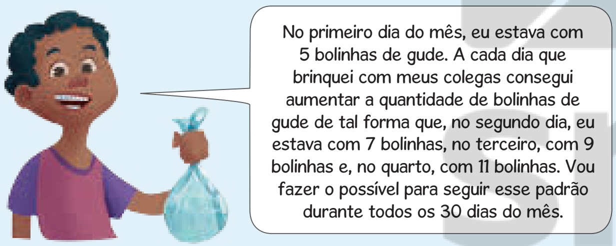
Ilustrações: Evertoons/ID/BR

Se o funcionário continuar seguindo esse padrão, quantas caixas estarão empilhadas no 6º dia?

2. Foi organizada uma competição entre os cachorros de uma vizinhança. Nessa competição, há 10 obstáculos em um circuito. Para cada obstáculo que o cachorro superar, ele ganhará pontos. Se houver empate de pontos, ganhará aquele que completar os obstáculos em menor tempo. O primeiro obstáculo não vale nenhum ponto. O segundo obstáculo vale 3 pontos, o terceiro vale 6 pontos, o quarto vale 9 pontos, e esse padrão continua até o último obstáculo. Quantos pontos obterá um cachorro que conseguir superar os 10 obstáculos?



3. Veja o que Ricardo diz e responda à questão.



Se esse padrão continuar, quantas bolinhas de gude Ricardo terá no 17º dia?

DE OLHO NA BASE

Essa seção contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**, permitindo que os estudantes sintam segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

Além disso, os problemas propostos auxiliam os estudantes a enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo situações imaginadas, a expressar suas respostas e a sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens, desenvolvendo a **competência específica de Matemática 6**.

O debate sobre diferentes maneiras de se resolver um problema permite aos estudantes criar um repertório e aumentar seu poder de argumentação, desenvolvendo também a **competência geral 7**.

REFLEXÃO SOBRE O PROBLEMA

- Esse item é necessário para que você verifique se o tipo de problema apresentado foi interessante para os estudantes e se poderá ser utilizado em outro momento. Além disso, ele é importante para conhecer as dificuldades que os estudantes enfrentaram ao resolvê-lo, assim como para os próprios estudantes, que devem se conscientizar disso. Por outro lado, se foi muito fácil para os estudantes, isso pode desmotivá-los a resolver problemas em outro momento.
- A observação da própria estratégia de resolução é importante para os estudantes, pois permite que eles a compreendam melhor e a utilizem em outros momentos da vida escolar. Além disso, deparar-se com diferentes estratégias de resolução de problema amplia a visão e o repertório deles na compreensão e na resolução de problemas que, em Matemática pode ter mais de uma estratégia de resolução. No caso do problema em questão, a observação de padrões é uma opção.
- Na questão **3**, vale salientar que a percepção de padrões e regularidades contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes.
- Na questão **5**, as várias soluções apresentadas pela turma devem ser discutidas em sala de aula, pois esse é um importante momento de reflexão dos estudantes para conhecer outros pensamentos matemáticos.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade. Assim, elas podem ser utilizadas para avaliar o aprendizado dos estudantes.
- Na atividade **2**, verifique se os estudantes escrevem um sistema, em que cada equação representa uma compra.
- Proponha aos estudantes que resolvam a atividade **6** algébrica e graficamente.
- Na atividade **8**, é importante ressaltar aos estudantes que a pontuação das derrotas não será computada.
- A atividade **14** pode ser resolvida de diferentes maneiras. É importante chamar a atenção dos estudantes para que eles percebam que a diferença das idades é uma constante. Uma maneira de resolver esse problema é somar a quantidade de anos de cada alternativa nas idades do pai e do filho e, assim, verificar se uma é o triplo da outra.
- Verifique se os estudantes percebem que, a primeira informação importante do enunciado da atividade **15** é que Beto e Carol são irmãos. Quando consideramos os irmãos e as irmãs de Beto e, depois, os irmãos e as irmãs de Carol, devemos levar em conta que eles também são filhos em ambas as equações. Assim, devemos escrever as equações relacionando os filhos do pai deles, e não os irmãos de cada um.

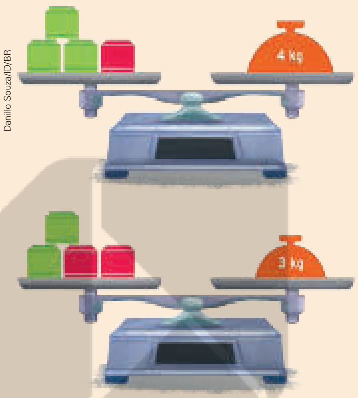
ATIVIDADES INTEGRADAS

2. O valor do ingresso comum é R\$ 32,00, e o valor do ingresso de estudante é R\$ 20,00.

1. Mariana é técnica de basquete e de vôlei de uma escola. Em suas aulas, ela usa as 27 bolas disponíveis na escola. A quantidade de bolas de vôlei é o dobro da quantidade de bolas de basquete. Escreva um sistema de equações que represente essa situação e, depois, determine a quantidade de bolas de basquete e de vôlei que Mariana usa nas aulas. **Consulte a resposta neste manual.**

2. Laís vai ao teatro com os amigos. Ela comprou 5 ingressos comuns e 3 ingressos de estudante (que têm valor menor que o ingresso comum). No dia seguinte, ela comprou 4 ingressos comuns e 6 de estudante para outros amigos. Na primeira compra, Laís gastou R\$ 220,00 e, na segunda, R\$ 248,00. Qual é o valor de cada tipo de ingresso?

3. Observe que as balanças representadas a seguir estão equilibradas.



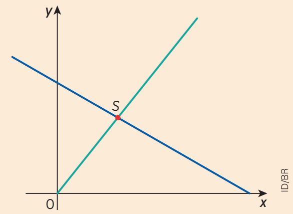
Danilo Souza/ID/BR

a) Sabendo que as latas de cores iguais têm massas iguais, escreva no caderno um sistema de equações que represente essa situação. **Consulte a resposta neste manual.**

b) Resolva o sistema de equações do item **a** utilizando o método da comparação. **Lata verde (x): 1,25 kg; lata vermelha (y): 0,25 kg.**

4. Felipe retirou R\$ 1 100,00 de sua conta em uma agência bancária. O caixa eletrônico do banco dispunha de apenas dois tipos de cédula: de 100 reais e de 50 reais. Se Felipe recebeu 12 cédulas, quantas eram de 100 reais e quantas eram de 50 reais? **10 cédulas de 100 reais e 2 cédulas de 50 reais.**

5. As retas do plano cartesiano a seguir representam graficamente um sistema de equações.



ID/BR

a) De acordo com a representação gráfica, como podemos classificar esse sistema? **SPD**

b) O que representa o ponto S? **A solução do sistema.**

6. Sendo x e y números racionais, resolva os sistemas a seguir.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ **(2, 0)**

b) $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ **(1, 2)**

c) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 6 \end{cases}$ **(3, −3)**

d) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$ $\left(\frac{23}{7}, -\frac{6}{7}\right)$

7. Registre a sua resposta no caderno.
(Fuvest-SP) Um supermercado adquiriu detergentes nos aromas limão e coco. A compra foi entregue, embalada em 10 caixas, com 24 frascos em cada caixa. Sabendo-se que cada caixa continha 2 frascos de detergentes a mais no aroma limão do que no aroma coco, o número de frascos entregues, no aroma limão, foi:

a) 110.
b) 120.
c) 130.
d) 140.
e) 150.

Alternativa c.

8. Numa competição, um time participou de 19 jogos e fez 48 pontos, tendo perdido 3 jogos. Sabendo que cada vitória dá 3 pontos, cada empate dá 1 ponto e cada derrota não conta pontos, quantas vitórias esse time obteve na competição? E quantos empates? **16 vitórias e nenhum empate.**

9. Bia e Lia fizeram juntas um trabalho de digitação de 120 páginas, pelo qual receberam R\$ 240,00. Elas querem dividir o dinheiro proporcionalmente a quanto cada uma trabalhou. Quanto cada uma deve receber, sabendo que, se Bia tivesse digitado três páginas a mais, teria feito exatamente o dobro de páginas que Lia fez? **Bia deve receber R\$ 158,00 e Lia, R\$ 82,00.**

RESPOSTAS

1. $\begin{cases} b + v = 27 \\ v = 2b \end{cases}$

Mariana usa nas aulas 18 bolas de vôlei e 9 bolas de basquete.

3. a) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$

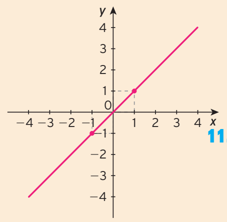
DE OLHO NA BASE

As atividades dessa seção possibilitam aos estudantes resolver problemas relacionados ao seu cotidiano, que podem ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas, e interpretá-los utilizando, inclusive, o plano cartesiano, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA08**.

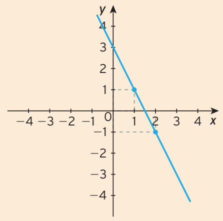
Responda sempre no caderno.

10. Qual das representações gráficas a seguir apresenta a reta que contém as soluções da equação $2x + y = 3$, considerando x e y números racionais? **II**

I.

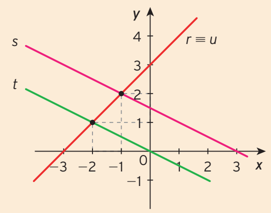


II.



11. No plano cartesiano a seguir, estão representadas as retas:

- $r: x - y = -3$
- $t: -2x - 4y = 0$
- $s: -x - 2y = -3$
- $u: 3x - 3y = -9$



Considere essas informações para classificar cada um dos sistemas a seguir.

a) $\begin{cases} x - y = -3 \\ -x - 2y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - 2y = -3 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x - 2y = -3 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = -3 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases}$

11. a) Sistema possível e determinado. b) Sistema possível e determinado. c) Sistema impossível. d) Sistema possível e indeterminado. e) Sistema possível e determinado. f) Sistema possível e determinado.

12. Em uma festa de formatura, os convites foram vendidos por preços diferentes: R\$ 30,00 para estudantes e R\$ 40,00 para convidados. Foram vendidos 600 convites e arrecadados R\$ 21 600,00.

a) Quantos foram os convites vendidos para os estudantes na formatura? **240 convites.**

b) Quantos convites foram vendidos para os convidados? **360 convites.**

13. Antônio decidiu dividir sua coleção de moedas antigas entre seus netos. Ele dividiu 120 moedas entre as netas e 165 moedas entre os netos. Desse modo, todos receberam a mesma quantidade de moedas.

a) Sabendo que há 3 netos a mais que netas, qual é o número de netas e de netos de Antônio? **8 netas e 11 netos.**

b) Quantas moedas cada um dos netos e netas de Antônio recebeu? **Cada um recebeu 15 moedas.**

14. Registre sua resposta no caderno.

(OBM) Um pai tem 33 anos e seu filho, 7 anos. Depois de quantos anos a idade do pai será o triplo da idade do filho? **Alternativa d.**

a) 3
b) 7
c) 9
d) 6
e) 13

15. Beto tem três irmãos a mais que irmãs. Carol, a irmã de Beto, tem o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Quantos filhos ao todo tem o pai de Beto e Carol? **16 filhos, sendo 10 filhos e 6 filhas.**

16. Nélson é dono de uma concessionária de carros. Ele vai premiar os dois funcionários com maiores vendas no último trimestre: Renata, que vendeu 17 carros, e Gustavo, que vendeu 15 carros. Para calcular o prêmio de cada um, Nélson vai dividir o valor do prêmio, que é de R\$ 7540,00, proporcionalmente à quantidade de carros vendidos por cada funcionário. Quanto cada um ganhará? **Renata ganhará R\$ 4005,63 e Gustavo, R\$ 3534,37.**

17. Em um país, existem dois tipos de poço de petróleo: A e B. Sabe-se que 4 poços A e 3 poços B produzem, em 5 dias, a mesma quantidade de barris que 3 poços A e 5 poços B produzem em 4 dias. Qual dos dois tipos de poço produz mais? **O poço B.**

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Compreendi o processo de transformação de dízimas periódicas em frações e vice-versa?
- Compreendi a interdependência entre as duas incógnitas em uma equação com duas incógnitas?
- Fui capaz de transformar, com autonomia, problemas em linguagem materna para a linguagem algébrica?
- Consegui reconhecer a resolução gráfica de equações e de sistemas de equações?
- Sei relacionar uma equação do 1º grau a uma reta no plano cartesiano?
- Aprendi os diferentes métodos para resolver sistemas de equações?
- Consegui reconhecer uma equação de 2º grau e utilizar métodos para solucionar equações do tipo $ax^2 = b$?
- Procurei conversar com os colegas ou o professor para esclarecer minhas dúvidas?
- Ampliei meus conhecimentos em relação à resolução de problemas que envolvem equações e sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas?

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para auxiliar os estudantes a resolver os problemas escrevendo as equações que representam as situações apresentadas, é importante verificar se eles conseguem traduzir da linguagem usual para a linguagem algébrica as informações do enunciado.

Peça aos estudantes que leiam os problemas e destaquem as informações necessárias para compor os sistemas.

Primeiro, deve-se identificar o que se quer descobrir em cada situação-problema, ou seja, as incógnitas. Em seguida, enfatize as frases que apresentam relações entre as incógnitas ou entre uma incógnita e os valores numéricos. Assim, os estudantes poderão escrever em forma de equação essas relações.

É importante salientar que todas as soluções encontradas devem ser verificadas para se certificar de que estão de acordo com os dados iniciais e realmente satisfazem as equações de cada problema.

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
7 e 9.

Competências específicas de Matemática
3 e 7.

Temas Contemporâneos Transversais
Meio Ambiente e Cidadania e Civismo.

Habilidade
(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

UNIDADE 4

TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

SOBRE A UNIDADE

Nesta unidade, os estudantes vão retomar a condição de existência do triângulo e ampliar seus conhecimentos sobre seus elementos, reconhecendo segmentos e pontos notáveis do triângulo. Vão estudar também os casos que possibilitam a identificação de congruência de triângulos e as propriedades dos triângulos isósceles.

Além disso, vão retomar os elementos dos quadriláteros e aprofundar os conhecimentos sobre os paralelogramos e os trapézios, estudando a classificação desses tipos de quadrilátero e suas propriedades.

É fundamental estabelecer relações entre o estudo dos triângulos e o dos quadriláteros. Ao estudar os quadriláteros, pode-se decompor esses polígonos em triângulos e, pela aplicação dos conceitos de congruência, verificar, por exemplo, se os triângulos obtidos na decomposição são congruentes.

CAPÍTULO 1
Triângulos

CAPÍTULO 2
Quadriláteros

Jochen Tack/Alamy/Fotoarena

PRIMEIRAS IDEIAS

Você já ouviu falar de uma técnica de construção chamada enxaimel?

Em alguns países da Europa, a técnica de construção enxaimel está presente em muitas casas. Essa técnica consiste em utilizar estacas de madeira encaixadas entre si em posições verticais, horizontais ou inclinadas para formar as paredes, dando sustentação a elas.

Depois, essas paredes são preenchidas normalmente com pedras ou tijolos.
Em algumas cidades do Brasil, é possível observar belas construções feitas com essa técnica. Uma delas é Joinville, em Santa Catarina.

1. O que mais chama sua atenção nesta imagem? Por quê?
2. Há elementos nas construções que lembram triângulos e quadriláteros. Você consegue perceber? Em caso afirmativo, quais são esses elementos?

← Freudenberg, cidade histórica alemã onde é possível observar a técnica enxaimel nas construções. Foto de 2021.

PRIMEIRAS IDEIAS

- Peça aos estudantes que observem a imagem de abertura e pergunte a eles se conhecem alguma construção que utiliza a técnica enxaimel, usada nas edificações retratadas na imagem.
- Um trabalho interdisciplinar com o componente curricular Geografia pode ser encaminhado para analisar as características dessas construções, a culinária e outros costumes, associando-os à influência de certos povos e nações que constituem a população brasileira, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08GE02** [Relacionar fatos e situações representativas da história das famílias do Município em que se localiza a escola, considerando a diversidade e os fluxos migratórios da população mundial.].
- Verifique se os estudantes conseguem identificar elementos que lembram figuras geométricas e se percebem a formação de ângulos quando as madeiras se cruzam. Se julgar oportuno, revise alguns conceitos sobre ângulos, como correspondentes, alternos internos, opostos pelo vértice, etc.
- Verifique se os estudantes se recordam de como classificar os triângulos e os quadriláteros.
- Se julgar oportuno, pergunte aos estudantes se eles lembram o que são segmentos congruentes e o que são ângulos congruentes e, depois, peça que expliquem o que são triângulos congruentes.

RESPOSTAS

1. Respostas pessoais. Verifique se os estudantes percebem que todas as edificações seguem o mesmo padrão, tendo sempre a mesma cor nas paredes e nos telhados.
2. Sim. Respostas possíveis: nos telhados, nas janelas, nos detalhes das fachadas das casas.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Elementos e classificação dos triângulos.
- Condição de existência ou desigualdade triangular.
- Relação entre um ângulo externo e dois ângulos internos não adjacentes a ele.
- Cevianas de um triângulo.
- Mediatriz do lado de um triângulo.
- Pontos notáveis do triângulo: ortocentro, baricentro, incentro e circuncentro.
- Casos de congruência de triângulos.

Objetivos

- Classificar os triângulos quanto aos lados e aos ângulos.
- Compreender a condição de existência de um triângulo.
- Conhecer a relação entre um ângulo externo e dois ângulos internos não adjacentes a ele.
- Reconhecer algumas cevianas e a mediatriz do lado de um triângulo.
- Reconhecer pontos notáveis do triângulo.
- Reconhecer triângulos congruentes.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo de triângulos para conhecer suas cevianas e seus pontos notáveis. Os casos de congruência serão explorados para que eles compreendam as demonstrações das propriedades de triângulos e de quadriláteros, levando-os a desenvolver o raciocínio dedutivo e o abdutivo, o que possibilitará que eles extrapolem a verificação experimental.

ELEMENTOS DE UM TRIÂNGULO

- Comente com os estudantes que, entre todos os polígonos, o triângulo é o único que apresenta como característica a rigidez geométrica. Uma vez construído, é impossível modificar a abertura de seus ângulos, sem mudar a medida de seus lados, e formar outro triângulo. Essa propriedade tem muito valor e é utilizada em diversas áreas. Por essa razão, é muito comum o uso de estruturas formadas por triângulos em construções e objetos para evitar deformações. Por exemplo, os telhados são construídos com base em uma estrutura cuja forma lembra uma composição de triângulos. Assim, a rigidez característica dos triângulos proporciona maior estabilidade e suporte para as telhas.
- Pergunte aos estudantes se eles conhecem outros objetos que possuem estruturas triangulares para evitar deformações. Armários, prateleiras e telhados, por exemplo, são alguns dos objetos que apresentam esse formato geométrico, mas ele também é muito utilizado nas construções arquitetônicas e nas artes plásticas.

Capítulo 1

TRIÂNGULOS

Para desenvolver os conteúdos deste capítulo, os estudantes devem ter compreendido os conceitos de segmentos de reta e de ângulos. Além disso, compreender os conteúdos trabalhados neste capítulo vai ajudá-los nas construções e nas transformações geométricas, que serão estudadas mais adiante.

Elementos de um triângulo

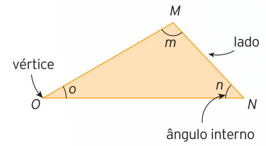
Alguns artistas se valem do valor estético de figuras geométricas, como o triângulo, em suas obras. Engenheiros e projetistas, por sua vez, valem-se das propriedades estruturais dos triângulos, como a rigidez, para construir as estruturas de torres de energia, de telhados e de pontes.

Triângulo é um polígono de três lados.

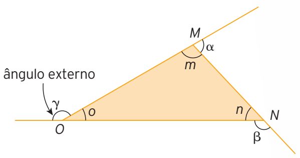
Nomeando-se os vértices de um triângulo por M, N e O, podemos identificá-lo por $\triangle MNO$ (lê-se: triângulo MNO).

Os elementos básicos dos triângulos são:

- vértices: M, N e O;
- lados: $\overline{MN}$, $\overline{NO}$ e $\overline{OM}$;
- ângulos internos: $\hat{m}$, $\hat{n}$ e $\hat{o}$.

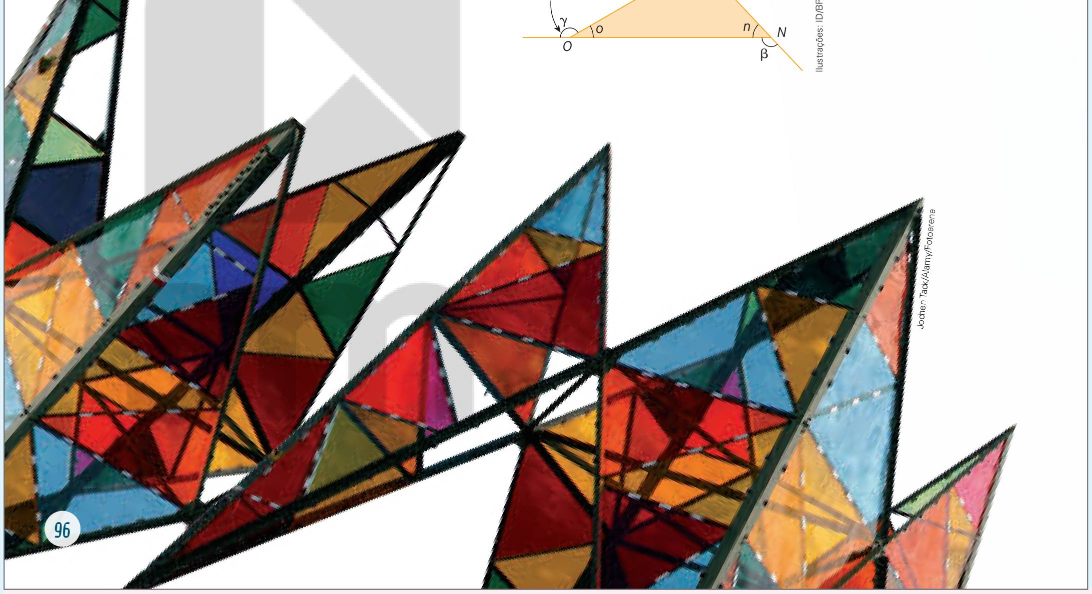


Ao prolongar os lados do $\triangle MNO$, obtemos os ângulos externos $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$.



Ilustrações: ID/BR

Detalhe da obra de arte intitulada *Art-path* (Caminho da arte, em tradução livre), na Alemanha.



Jochen Tack/Alamy/Fotoarena

96

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Reúna os estudantes em trios. Utilize palitos de sorvete e percevejos para construir com eles alguns modelos de polígonos com diferentes quantidades de lados: triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, etc. Peça que verifiquem a rigidez de cada modelo de polígono que cada grupo construiu e, também, que tentem alterar o formato de cada um deles.

Com essa atividade, os estudantes podem verificar concretamente que outros modelos de polígono permitem deformações, enquanto uma estrutura triangular não se deforma.

Classificação dos triângulos

Os triângulos podem ser classificados quanto aos lados e quanto aos ângulos. Observe.

CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS QUANTO AOS:

- **Lados**
  - **Isósceles**: Pelo menos dois lados congruentes; quando isso ocorre, os dois ângulos opostos a esses lados têm medidas iguais.
  - **Equilátero**: Três lados congruentes e três ângulos congruentes.
  - **Escaleno**: Medidas dos lados e medidas dos ângulos diferentes.
- **Ângulos**
  - **Acutângulo**: Três ângulos agudos (menores que 90°).
  - **Obtusângulo**: Um ângulo obtuso (maior que 90°).
  - **Retângulo**: Um ângulo reto (igual a 90°).

Jochen Tack/Alamy/Fotoarena

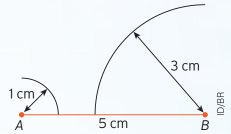
Condição de existência de um triângulo ou desigualdade triangular

Um triângulo é formado por três segmentos de reta; no entanto, não é sempre que, com três segmentos de reta quaisquer, é possível construir um triângulo.

Para saber se é possível construir um triângulo com três segmentos de reta específicos, devemos verificar se esses segmentos atendem à condição de existência de um triângulo, também chamada de desigualdade triangular.

> A medida de um lado do triângulo é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Utilizando régua e compasso, vamos tentar construir, por exemplo, um triângulo com segmentos de reta cujas medidas sejam 5 cm, 1 cm e 3 cm. Veja a figura que obtemos ao tentar construir um triângulo com essas medidas.



Perceba que os arcos não se cruzam. De acordo com a condição de existência, temos:

- $3 < 5 + 1$ ⟶ Verdadeiro, pois: $3 < 6$.
- $1 < 5 + 3$ ⟶ Verdadeiro, pois: $1 < 8$.
- $5 < 3 + 1$ ⟶ Falso, pois: $5 > 4$.

Portanto, não é possível construir um triângulo cujos lados meçam 5 cm, 1 cm e 3 cm.

CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

- A classificação dos triângulos, de acordo com os lados e com os ângulos, vem sendo trabalhada com os estudantes desde o 6º ano e, por isso, espera-se que eles não apresentem mais dificuldades no desenvolvimento desse tópico.

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO OU DESIGUALDADE TRIANGULAR

- Se achar oportuno, solicite aos estudantes que se reúnam em duplas e, utilizando uma régua, tentem construir o triângulo com lados cujas medidas sejam 5 cm, 1 cm e 3 cm. Em seguida, peça-lhes que escolham as medidas de um novo triângulo considerando a condição de existência do triângulo e tentem desenhá-lo usando régua e compasso.
- Comente com os estudantes que podemos também apresentar a condição de existência de um triângulo da seguinte maneira:

  A medida de um lado do triângulo é maior que a diferença das medidas dos outros dois lados.

RELAÇÃO ENTRE UM ÂNGULO EXTERNO E DOIS ÂNGULOS INTERNOS NÃO ADJACENTES

- Construa um triângulo na lousa e, usando um transferidor, meça os ângulos desse triângulo, mostrando aos estudantes que a medida de cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Ao fazer a verificação dessa relação, os estudantes têm a oportunidade de desenvolver o raciocínio dedutivo.
- As atividades **1** a **4** trabalham com a condição de existência de um triângulo, enquanto a atividade **5** trabalha com a relação entre um ângulo externo e dois ângulos internos não adjacentes a ele.
- Na atividade **4**, comente com os estudantes que uma possível resolução é pensar nos múltiplos de 7 e ir testando se esses múltiplos podem ser a medida do terceiro lado do triângulo.

RESPOSTA

2. a) Sim.

$13 < 10 + 4 \Rightarrow 13 < 14$ (verdadeiro)

$10 < 13 + 4 \Rightarrow 10 < 17$ (verdadeiro)

$4 < 13 + 10 \Rightarrow 4 < 23$ (verdadeiro)

b) Não.

$8 < 9 + 1 \Rightarrow 8 < 10$ (verdadeiro)

$1 < 9 + 8 \Rightarrow 1 < 17$ (verdadeiro)

$9 < 8 + 1 \Rightarrow 9 < 9$ (falso)

c) Sim.

$3 < 4 + 5 \Rightarrow 3 < 9$ (verdadeiro)

$4 < 3 + 5 \Rightarrow 4 < 8$ (verdadeiro)

$5 < 3 + 4 \Rightarrow 5 < 7$ (verdadeiro)

d) Não.

$15 < 20 + 5 \Rightarrow 15 < 25$ (verdadeiro)

$5 < 20 + 15 \Rightarrow 5 < 35$ (verdadeiro)

$20 < 15 + 5 \Rightarrow 20 < 20$ (falso)

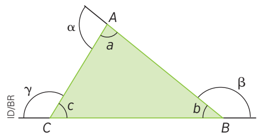
Relação entre um ângulo externo e dois ângulos internos não adjacentes

Vamos verificar em um triângulo a relação entre um ângulo externo e dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Considere o triângulo a seguir, cujos ângulos internos medem a, b e c e cujos ângulos externos medem α, β e γ.

Como em cada vértice do triângulo o ângulo interno e o ângulo externo são adjacentes suplementares, temos:

- $\alpha + a = 180°$
- $\beta + b = 180°$
- $\gamma + c = 180°$



Sabemos que $a + b + c = 180°$, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°. Assim, podemos relacionar qualquer uma das igualdades anteriores com a igualdade da soma dos ângulos internos de um triângulo.

- Como $\alpha + a = 180°$ e $a + b + c = 180°$, temos:
$$\alpha + a = a + b + c \Rightarrow \alpha = b + c$$
- Como $\beta + b = 180°$ e $a + b + c = 180°$, temos:
$$\beta + b = a + b + c \Rightarrow \beta = a + c$$
- Como $\gamma + c = 180°$ e $a + b + c = 180°$, temos:
$$\gamma + c = a + b + c \Rightarrow \gamma = a + b$$

A medida de cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

3. As possíveis medidas, em centímetro, são: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Calcule mentalmente a maior medida inteira possível do lado de um triângulo, sabendo que os outros dois lados medem 4 cm e 6 cm. **9 cm**

2. Verifique se é possível existirem triângulos cujos lados tenham as medidas indicadas a seguir em centímetro. Justifique suas respostas no caderno.

a) 13, 10 e 4.
b) 8, 9 e 1.
c) 3, 4 e 5.
d) 20, 15 e 5.

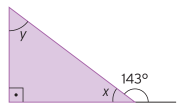
Consulte as respostas neste manual.

3. Dois lados de um triângulo medem 6 cm e 9 cm. Quais são as medidas inteiras, em centímetro, que o terceiro lado desse triângulo pode ter?

4. Dois lados de um triângulo medem 10 cm e 28 cm. Encontre as possíveis medidas, em centímetro, do terceiro lado, sabendo que é um número múltiplo de 7. **21 cm, 28 cm ou 35 cm.**

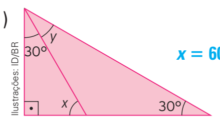
5. Calcule o valor de x e y em grau.

a)



$x = 37°$; $y = 53°$

b)



$x = 60°$; $y = 30°$

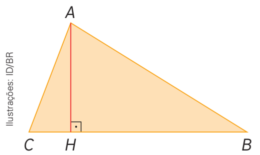
Cevianas de um triângulo

Qualquer segmento de reta com uma extremidade em um vértice de um triângulo e a outra extremidade na reta suporte do lado oposto a esse vértice é chamado de **ceviana**.

As cevianas mais importantes de um triângulo são: altura, mediana e bissetriz interna. Vamos estudá-las a seguir.

Altura

Observe o $\triangle ABC$ a seguir.



$\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{CB}$.

Altura de um triângulo é uma ceviana perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo.

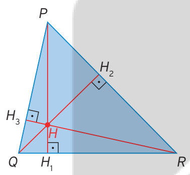
Ortocentro

Todo triângulo tem três alturas, cada uma relativa a um de seus lados. As retas suportes das três alturas se intersectam em um ponto, denominado **ortocentro** (***H***) do triângulo.

Vamos estudar a posição do ortocentro nos triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo.

Triângulo acutângulo

O $\triangle PQR$ ao lado é um triângulo acutângulo.

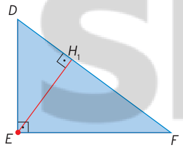


- $\overline{PH_1}$ é a altura relativa ao lado $\overline{QR}$.
- $\overline{QH_2}$ é a altura relativa ao lado $\overline{PR}$.
- $\overline{RH_3}$ é a altura relativa ao lado $\overline{PQ}$.
- O ponto H é o ortocentro do $\triangle PQR$.

No triângulo acutângulo, o ortocentro é **interno** ao triângulo.

Triângulo retângulo

O $\triangle DEF$ ao lado é um triângulo retângulo em E.



- $\overline{DE}$ é a altura relativa ao lado $\overline{EF}$.
- $\overline{FE}$ é a altura relativa ao lado $\overline{DE}$.
- $\overline{EH_1}$ é a altura relativa ao lado $\overline{DF}$.
- O ponto E é o ortocentro do $\triangle DEF$.

No triângulo retângulo, o ortocentro é o **vértice** do ângulo reto.

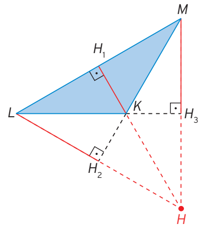
CEVIANAS DE UM TRIÂNGULO

- Comente com os estudantes que o nome “ceviana” tem origem nos estudos de Giovanni Ceva, matemático, físico e engenheiro hidráulico italiano nascido em Milão. Ele formulou o teorema de Ceva, que estabelece uma condição necessária e suficiente para que três cevianas sejam concorrentes.
- Se achar oportuno, comente com os estudantes que “altura” em francês escreve-se *hauteur* e, por isso, usa-se a letra *h* para representar a altura nas figuras geométricas.
- Se julgar oportuno, solicite aos estudantes que construam um triângulo *ABC* qualquer em uma folha de papel avulsa, tracem as alturas e identifiquem o ortocentro. Depois, peça a eles que comparem os triângulos com os dos colegas, para que verifiquem que as retas suportes das três alturas de um triângulo se intersectam em um ponto, que é o ortocentro.

• Se julgar oportuno, solicite aos estudantes que construam um triângulo acutângulo, um triângulo retângulo e um triângulo obtusângulo em uma folha de papel avulsa. Depois, peça a eles que tracem as medianas e identifiquem o baricentro de cada um desses triângulos. Em seguida, peça que comparem os triângulos com os dos colegas, para que verifiquem que as três medianas de um triângulo se intersectam em um ponto, que é o baricentro.

Triângulo obtusângulo

O $\triangle KLM$ a seguir é um triângulo obtusângulo.



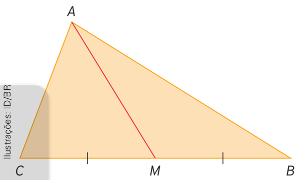
- $\overline{KH_1}$ é a altura relativa ao lado $\overline{LM}$.
- $\overline{LH_2}$ é a altura relativa ao lado $\overline{KM}$.
- $\overline{MH_3}$ é a altura relativa ao lado $\overline{KL}$.
- O ponto H é o ortocentro do $\triangle KLM$.

No triângulo obtusângulo, o ortocentro é **externo** ao triângulo.

Mediana

Observe o $\triangle ABC$ a seguir.

Ilustrações: ID/BR



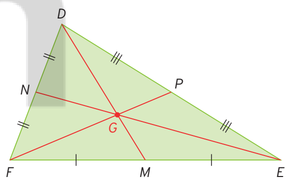
M é o ponto médio do lado $\overline{BC}$.
Assim, $\overline{BM} \cong \overline{MC}$.

Mediana de um triângulo é uma ceviana que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a ele.

Assim, $\overline{AM}$ é uma das medianas do triângulo ABC. Dizemos que $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ ou, ainda, que $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao vértice A.

Baricentro

Todo triângulo tem três medianas, cada uma relativa a um de seus lados. As medianas se intersectam em um ponto, denominado **baricentro** (***G***) do triângulo.



$\overline{DM}$, $\overline{EN}$ e $\overline{FP}$ são as medianas do $\triangle DEF$.

O ponto G é o baricentro do $\triangle DEF$.

CENTRO DE GRAVIDADE

Baricentro é o nome dado ao ponto de equilíbrio ou centro de gravidade de um corpo. Se um corpo for suspenso pelo seu centro de gravidade, ou seja, pelo baricentro, ele ficará em equilíbrio.

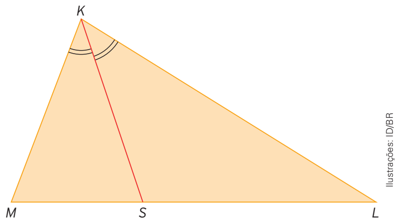
ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Se possível, leve os estudantes à sala de informática, se a escola dispuser de uma, e peça a eles que façam duas atividades no *software* GeoGebra que lhes permitam explorar os pontos notáveis e as medianas de um triângulo qualquer. Nessas atividades, ao mover os vértices do triângulo, os estudantes poderão visualizar diversos triângulos com seus pontos notáveis e as respectivas medianas e o baricentro.

As atividades estão disponíveis em: https://www.geogebra.org/m/czh9fx4a e https://www.geogebra.org/m/pnh5kkbm. Acessos em: 13 jun. 2022.

Bissetriz interna

Observe o $\triangle KLM$.



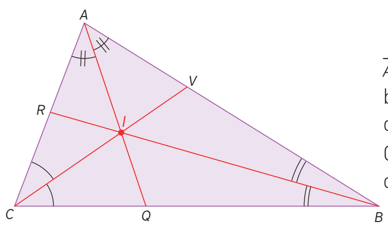
O segmento $\overline{KS}$ tem extremidades no vértice K e no lado oposto a esse vértice ($\overline{LM}$). Ele divide o ângulo interno $L\hat{K}M$ em dois ângulos adjacentes congruentes: $L\hat{K}S \cong S\hat{K}M$.

> **Bissetriz interna** de um triângulo é a ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos adjacentes congruentes.

Assim, o segmento $\overline{KS}$ é uma bissetriz interna do $\triangle KLM$. Dizemos que $\overline{KS}$ é a bissetriz interna relativa ao vértice K ou, ainda, $\overline{KS}$ é a bissetriz interna relativa ao ângulo $L\hat{K}M$.

Incentro

Todo triângulo tem três bissetrizes internas, cada uma relativa a um de seus lados. As bissetrizes internas se intersectam em um mesmo ponto, denominado **incentro** (*I*) do triângulo.



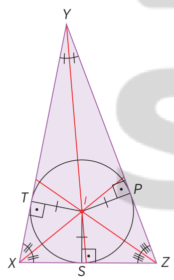
$\overline{AQ}$, $\overline{BR}$ e $\overline{CV}$ são as bissetrizes internas do $\triangle ABC$.

O ponto I é o incentro do $\triangle ABC$.

Propriedade do incentro

O incentro é um ponto equidistante aos lados do triângulo.

É possível traçar uma circunferência inscrita em um triângulo: o centro dela é o incentro. Essa circunferência tangencia (intersecta em um único ponto) cada um dos lados do triângulo. No $\triangle XYZ$ ao lado, isso acontece nos pontos T, P e S.



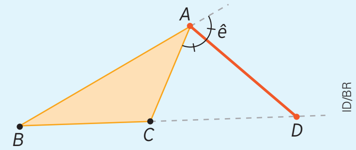
$IT = IP = IS = r$

raio da circunferência de centro I

OBSERVAÇÃO

Nos ângulos do triângulo *KLM*, utilizamos representações iguais para indicar ângulos de mesma medida.

- Desenhe um triângulo *ABC* na lousa e demonstre aos estudantes que todo triângulo tem três bissetrizes internas e que o ponto de interseção dessas bissetrizes é o incentro.
- Se julgar oportuno, mostre aos estudantes que a bissetriz externa de um triângulo é a ceviana, que divide o ângulo externo em dois ângulos congruentes.



101

DESCUBRA MAIS

A atividade prática desse boxe tem como objetivo a determinação do baricentro e do incentro de um triângulo. Explique aos estudantes que os pontos notáveis do triângulo são elementos de grande importância e estão presentes em todos os triângulos e que, para defini-los, é necessário determinar a intersecção das medianas, das bissetrizes internas, das mediatrizes e das alturas.

Para realizar o passo **2** do *Como fazer*, os estudantes precisam amarrar a borracha em uma das extremidades do barbante ou da linha e amarrar a outra ponta na tachinha.

Ao prender a tachinha em um dos vértices do triângulo de papelão, é provável que o triângulo mude de lugar assim que for solto, da mesma forma como é provável que a linha com a borracha balance um pouco depois que a tachinha for presa na parede. Só depois que o triângulo e a linha com a borracha estiverem estáveis é que se deve marcar o ponto em que a linha cruza o lado oposto ao vértice. Esse ponto corresponde ao ponto médio do lado oposto ao vértice no qual se localiza a tachinha.

No final da atividade, incentive os estudantes a desenhar outros triângulos no papelão, caso nenhum deles tenha desenhado triângulos equiláteros.

DE OLHO NA BASE

O boxe *Descubra mais* contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**, permitindo que os estudantes sintam segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

- O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes deve ser preservada. Para isso, valorize situações em que eles se sintam acolhidos, incentivando o desenvolvimento da empatia e da solidariedade.

Os processos cognitivos como percepção, memorização, raciocínio, imaginação e resolução de problemas podem contribuir para elevar a autoestima dos estudantes.

DESCUBRA MAIS

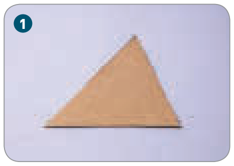
Baricentro e incentro de um triângulo

Vamos determinar, de maneira prática, o baricentro e o incentro de um triângulo?

Materiais

- quadrado de papelão medindo 20 cm de lado
- tesoura com pontas arredondadas
- régua
- compasso
- canetas de cores diferentes
- tachinha
- barbante ou linha
- transferidor
- borracha

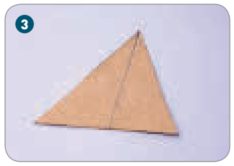
Como fazer

1 

Escolha um tipo de triângulo (escaleno, isósceles ou equilátero). Desenhe o triângulo escolhido no papelão e recorte-o. Tente utilizar o máximo da área do quadrado do papelão.

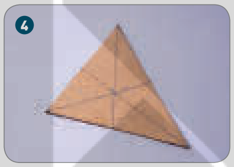
2 

Usando uma parede como apoio, espete com a tachinha um dos vértices do triângulo. Marque sobre o triângulo o ponto em que a linha cruza o lado oposto ao vértice.

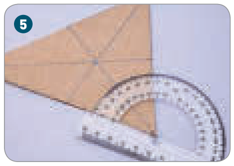
3 

Retire a tachinha e apoie o triângulo sobre uma mesa. Com a régua, trace uma reta ligando o vértice em que estava a tachinha ao ponto marcado no triângulo.

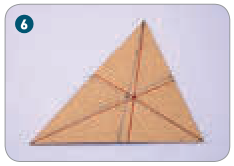
Fotografias: Sérgio Dotta Jr./ID/BR

4 

Repita os procedimentos 2 e 3 para os outros dois vértices do triângulo. Use a mesma cor de caneta. No encontro das três retas traçadas, está o baricentro do triângulo.

5 

Agora, com o transferidor, trace as bissetrizes internas do triângulo usando outra cor de caneta.

6 

Destaque o ponto de encontro dessas bissetrizes, o incentro.

Para concluir

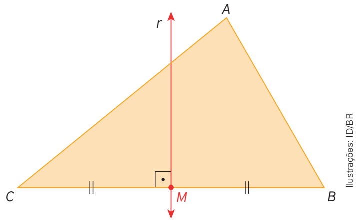
Responda sempre no caderno.

1. Tente equilibrar o triângulo de papel que você construiu. Primeiro, apoie a tachinha no incentro e, depois, no baricentro. Em qual desses pontos o triângulo fica equilibrado? **No baricentro.**
2. Compare a distância entre o baricentro e o incentro do seu triângulo com a distância encontrada por colegas que construíram triângulos de formatos diferentes. Em algum deles esses pontos coincidiram? Em qual tipo de triângulo isso aconteceu? **Espera-se que os estudantes percebam que isso acontece no triângulo equilátero.**

102

Mediatriz

Observe o $\triangle ABC$ a seguir.



Note que a reta r é perpendicular ao lado $\overline{BC}$ e o intersecta em seu ponto médio M.

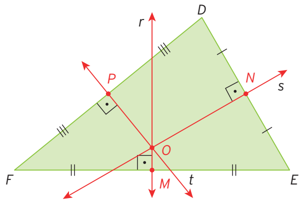
Mediatriz do lado de um triângulo é a reta perpendicular a esse lado e que o intersecta em seu ponto médio.

Dizemos, então, que r é mediatriz do $\triangle ABC$ relativa ao lado $\overline{BC}$.

Circuncentro

Todo triângulo tem três mediatrizes, cada uma relativa a um de seus lados. As mediatrizes se intersectam em um ponto, denominado **circuncentro** (***O***) do triângulo.

Observe o triângulo a seguir e o ponto de intersecção das mediatrizes, ou seja, seu circuncentro.



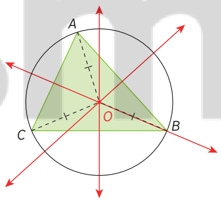
Nesse triângulo:

- r é a mediatriz relativa ao lado $\overline{EF}$.
- s é a mediatriz relativa ao lado $\overline{DE}$.
- t é a mediatriz relativa ao lado $\overline{DF}$.
- O ponto O é o circuncentro do $\triangle DEF$.

Propriedade do circuncentro

As medidas das distâncias entre os vértices e o circuncentro de um triângulo são iguais, ou seja, o circuncentro é equidistante dos vértices do triângulo.

É possível traçar uma circunferência circunscrita ao triângulo: o centro dela é o circuncentro do triângulo. Essa circunferência contém os três vértices do triângulo.



MEDIATRIZ

- Peça aos estudantes que desenhem um triângulo em uma folha de papel avulsa, tracem as mediatrizes correspondentes a cada lado do triângulo e, depois, identifiquem o circuncentro. Em seguida, solicite a eles que meçam as distâncias entre os vértices e o circuncentro do triângulo para que possam concluir que são iguais.

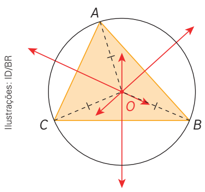
• Na atividade **8**, se julgar oportuno, peça aos estudantes que classifiquem os triângulos em acutângulo, retângulo ou obtusângulo antes de identificar qual ponto notável o ponto *O* indica em cada um dos triângulos.

RESPOSTA

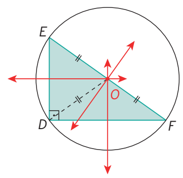
7. Não é possível, pois as medianas de um triângulo sempre são internas a ele, e o baricentro é o ponto determinado pela intersecção das medianas.

Agora, vamos estudar a posição do circuncentro nos triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo.

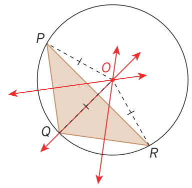
Triângulo acutângulo
O circuncentro é interno a ele.



Triângulo retângulo
O circuncentro é o ponto médio do maior lado do triângulo.



Triângulo obtusângulo
O circuncentro é externo a ele.

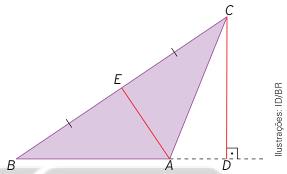


ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

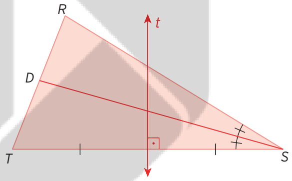
6. Copie no caderno as sentenças de cada item e complete-as.

a)



- O segmento $\overline{AE}$ é uma ■ do triângulo. **mediana**
- O segmento $\overline{CD}$ é uma ■ do triângulo. **altura**

b)

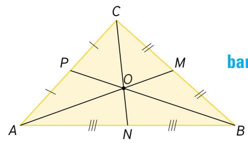


- O segmento $\overline{SD}$ é uma ■ do triângulo. **bissetriz interna**
- A reta *t* é a ■ do lado $\overline{ST}$ do triângulo. **mediatriz**

7. Junte-se a um colega para responder à pergunta: É possível que o baricentro de um triângulo seja externo a ele?
Consulte a resposta neste manual.

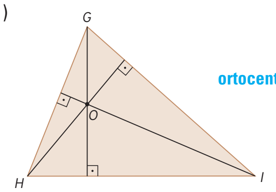
8. Escreva o nome do ponto que está representado pela letra *O* em cada triângulo a seguir.

a)



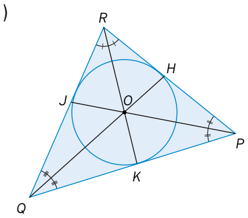
baricentro

b)



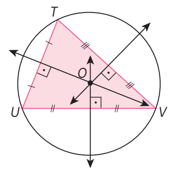
ortocentro

c)



incentro

d)

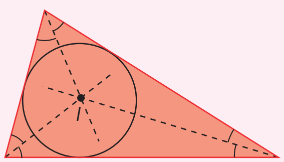


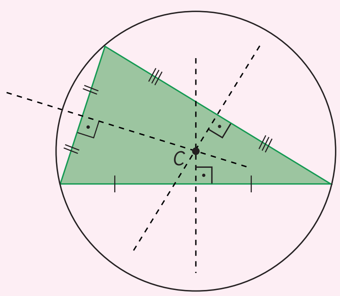
circuncentro

(IN)FORMAÇÃO

O centro de uma figura. Qual?

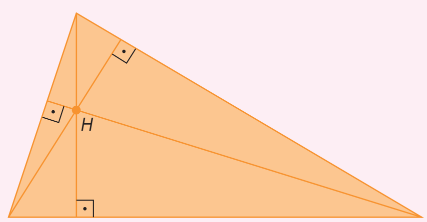
[...] De modo geral, não é possível falar em *centro* de uma figura, sem ambiguidade. É claro que, para determinadas figuras, a noção pura e simples de centro é bem definida. Não há dúvida sobre o que seja centro de um círculo ou de um quadrado. Para os polígonos regulares, em geral, centro tem um significado único. Entretanto, o que é *centro* de um triângulo qualquer? Se estamos interessados no *centro* da circunferência inscrita nele, temos o *incentro*, que é o encontro das três bissetrizes internas.





O *centro* da circunferência circunscrita ao triângulo é o seu *circuncentro*, que é o encontro das mediatrizes.

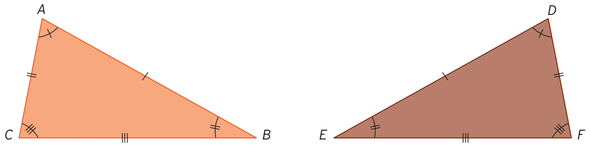
O encontro das alturas define um outro centro, que é o *ortocentro*, e o encontro das medianas define o *baricentro* do triângulo.



Congruência de triângulos

Dois triângulos são congruentes quando seus lados e seus ângulos correspondentes são respectivamente congruentes.

Observe os triângulos a seguir.



Ilustrações: ID/BR

Ao comparar os triângulos *ABC* e *DEF*, concluímos que:

- os vértices *A*, *B* e *C* do $\triangle ABC$ correspondem respectivamente aos vértices *D*, *E* e *F* do $\triangle DEF$;
- os lados correspondentes são congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$;
- os ângulos correspondentes são congruentes: $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$.

Então, os triângulos *ABC* e *DEF* são congruentes: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

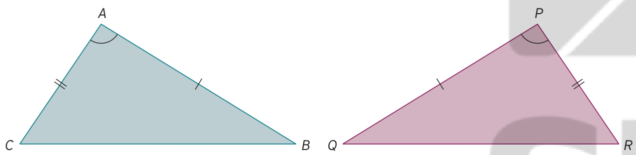
Casos de congruência de triângulos

Para verificar se dois triângulos são ou não congruentes, não é necessário medir os três lados e os três ângulos de cada triângulo e, então, compará-los. Existem casos específicos de congruência, apresentados a seguir, nos quais é possível medir apenas três elementos, escolhidos adequadamente, para saber se dois triângulos são congruentes.

Caso lado-ângulo-lado (LAL)

Dois triângulos são congruentes quando têm dois lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes.

Exemplo

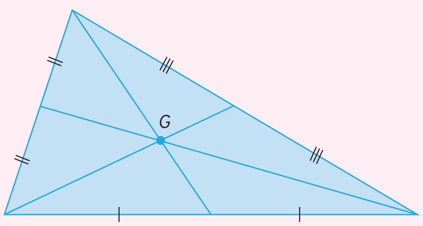


- Lado: $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$
- Ângulo: $\hat{A} \cong \hat{P}$
- Lado: $\overline{AC} \cong \overline{PR}$

Portanto, $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

- Pergunte aos estudantes: Se fosse possível sobrepor o triângulo *ABC* de modo que ele coincidisse com o triângulo *DEF*, eles se encaixariam perfeitamente? Espera-se que os estudantes respondam que sim, pois os dois triângulos são congruentes.
- Observe se os estudantes entenderam que, para verificar se dois triângulos são congruentes entre si, não é necessário conferir se os três pares de lados são congruentes e se os três pares de ângulos correspondentes são congruentes. Com os casos de congruência de triângulos apresentados, podemos comparar somente três elementos dos triângulos para verificar se eles são congruentes ou não. Esse tipo de verificação contribui para o desenvolvimento do raciocínio abdutivo, uma vez que os estudantes podem criar hipóteses para explicar como comprovar se os triângulos são congruentes e inferir a melhor explicação.



ID/BR

Portanto, um triângulo qualquer tem quatro centros, em geral distintos.

É importante que nossos alunos percebam que a definição de algum centro está associada a alguma ideia: a ideia que motiva a definição. Se estamos interessados no ponto em que a figura fica equilibrada na ponta do lápis, então definimos o baricentro. Se, como os cartógrafos e geógrafos, pretendemos um ponto que, na medida do possível, equidiste dos quatro extremos do Brasil, então devemos raciocinar com as mediatrizes.

[...] Para nós, professores de Matemática, acostumados com a precisão e o rigor desta ciência, estes procedimentos imprecisos podem, às vezes, chocar-nos. Entretanto, se pretendemos relacionar a Matemática com as coisas do mundo, será preciso entender o que se passa. O rigor e a precisão da Matemática são possíveis porque trabalhamos no mundo abstrato das ideias. Não estamos afirmando que estas ideias abstratas não têm relação com as coisas que nos rodeiam. É claro que têm. Mas as outras ciências lidam mais de perto com a realidade palpável, que é sempre complexa e repleta de variáveis. As aproximações, nesses casos, são inevitáveis.

IMENES, L. M. P. O centro de uma figura. Qual? *Revista do Professor de Matemática*, n. 12, [s.d.]. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/12/4.htm. Acesso em: 13 jun. 2022.

- Se julgar oportuno, depois de estudar todos os casos de congruência de triângulos, peça aos estudantes que se reúnam em grupos de 3 ou 4 integrantes e desenhem um par de triângulos congruentes de acordo com cada caso.

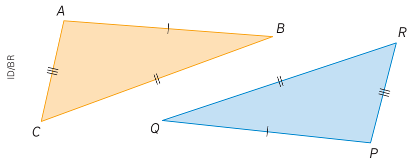
DE OLHO NA BASE

Estudar os casos de congruência de triângulos contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14**.

Caso lado-lado-lado (LLL)

Dois triângulos são congruentes quando têm os três lados respectivamente congruentes.

Exemplo



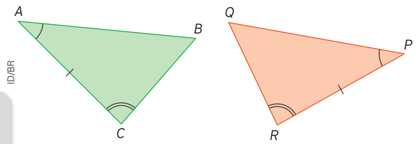
- Lado: $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$
- Lado: $\overline{BC} \cong \overline{QR}$
- Lado: $\overline{AC} \cong \overline{PR}$

Portanto, $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

Caso ângulo-lado-ângulo (ALA)

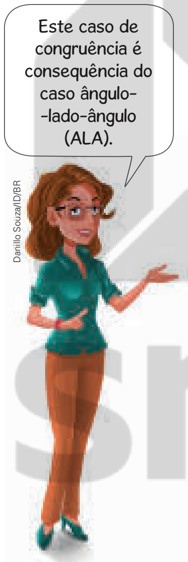
Dois triângulos são congruentes quando têm dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos respectivamente congruentes.

Exemplo



- Ângulo: $\hat{A} \cong \hat{P}$
- Lado: $\overline{AC} \cong \overline{PR}$
- Ângulo: $\hat{C} \cong \hat{R}$

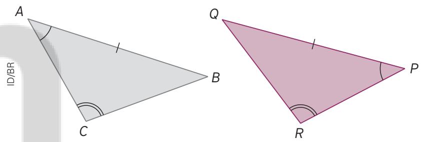
Portanto, $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.



Caso lado-ângulo-ângulo oposto (LAA$_0$)

Dois triângulos são congruentes quando têm um lado, o ângulo adjacente a esse lado e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.

Exemplo



- Lado: $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$
- Ângulo: $\hat{A} \cong \hat{P}$
- Ângulo oposto: $\hat{C} \cong \hat{R}$

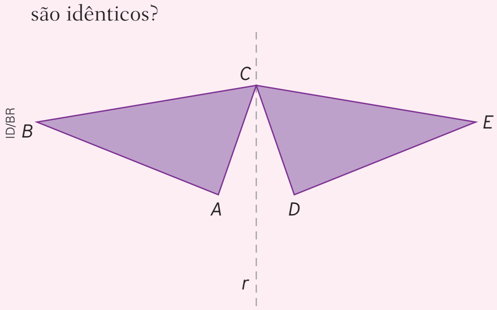
Portanto, $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

(IN)FORMAÇÃO

Congruência, o que é isto?

Em Matemática, não falamos em triângulos idênticos, mas em triângulos congruentes. Por que usar uma palavra tão difícil?

Repare: você diria que os dois triângulos abaixo são idênticos?



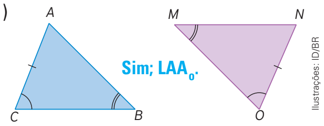
Parece que os dois estão virados. Um tem o lado maior à esquerda, o outro tem o lado maior à direita. Totalmente idênticos eles não são. Mas se recortarmos o desenho de um deles, virarmos do outro lado, ele se encaixará exatamente sobre o outro. Então dizemos que eles são congruentes. Significa que poderemos levar um deles a coincidir sobre o outro. Para que isso aconteça, todos os lados e ângulos de um deles devem ser iguais aos lados e ângulos do outro.

MENEZES, M. B.de; RAMOS, W. M. (org.). Coleção Proinfantil: Módulo II – Unidade 7 – Livro de estudo, v. 1. Brasília: MEC/SEB/Seed, 2005. p. 44. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000012740.pdf. Acesso em: 13 jun. 2022.

ATIVIDADES

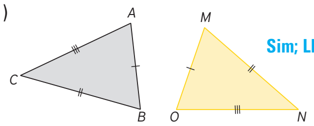
Responda sempre no caderno.

9. Escreva se os triângulos de cada item a seguir são congruentes. Se sim, diga qual é o caso de congruência. Observação: Marcas iguais indicam medidas iguais.

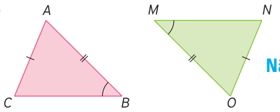
a) 

Sim; LAA_o.

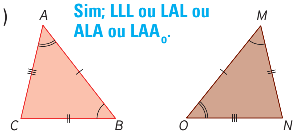
Ilustrações: ID/BR

b) 

Sim; LLL.

c) 

Não.

d) 

Sim; LLL ou LAL ou ALA ou LAA_o.

10. Leia a afirmação a seguir.

> Se dois lados de um triângulo são congruentes a dois lados de outro, então os triângulos são congruentes.

Converse com alguns colegas sobre essa afirmação e classifique-a em verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta. **Consulte a resposta neste manual.**

11. Em dois triângulos, *ABC* e *PQR*, tem-se:

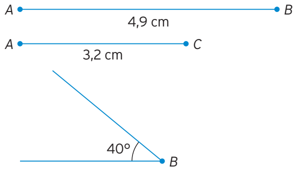
- $AB = PQ = 7$ cm;
- $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{P}) = 40°$;
- $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{Q}) = 30°$.

a) Os triângulos *ABC* e *PQR* são congruentes? Justifique sua resposta. **Sim, pelo caso ALA.**

b) Quanto medem os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{R}$? **110° e 110°.**

12. Considere os triângulos *ABC* e *DEF*. Podemos garantir a congruência desses triângulos sabendo somente que $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{E}) = 30°$? Justifique sua resposta. **Consulte a resposta neste manual.**

13. No caderno, construa com régua e compasso um triângulo *ABC* formado pelos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e pelo ângulo $\hat{B}$, representados a seguir.



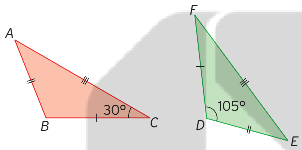
Compare o triângulo que você construiu com o de um colega. Os triângulos que vocês construíram são congruentes? Justifique sua resposta. **Consulte a resposta neste manual.**

14. Reúna-se com um colega para explicar por que: **Consulte as respostas neste manual.**

a) AAA (ângulo-ângulo-ângulo) não é um caso de congruência de triângulos;

b) LAA_o (lado-ângulo-ângulo oposto) é uma consequência do caso de congruência ALA (ângulo-lado-ângulo).

15. Observe os triângulos a seguir.

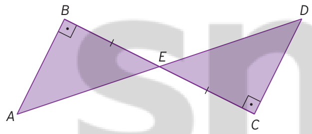


a) Eles são congruentes? Se sim, qual é o caso de congruência? **Sim; LLL.**

b) Calcule a medida dos ângulos internos de cada triângulo. **$\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{E}) = 45°$, $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{D}) = 105°$, $\text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{F}) = 30°$.**

16. Na figura, temos:

- $AE = 60$
- $CD = 40$
- $AB = 6x - 2$
- $DE = 4y + 16$

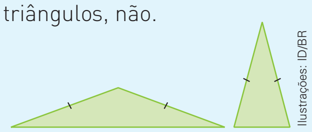


a) Os triângulos *ABE* e *DCE* são congruentes? Se sim, qual é o caso de congruência? **Sim; ALA.**

b) Calcule os valores de *x* e *y*. **$x = 7$; $y = 11$.**

RESPOSTAS

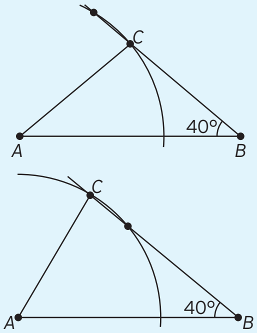
10. A afirmação é falsa. Um contraexemplo é apresentado nos dois triângulos a seguir, nos quais os dois pares de lados indicados são congruentes, mas os triângulos, não.



Ilustrações: ID/BR

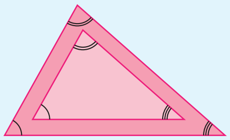
12. Não, pois sabe-se apenas que dois ângulos são congruentes. Seriam necessárias mais informações para tentar enquadrá-los em algum dos casos de congruência.

13. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes construam um dos seguintes triângulos:



Se os triângulos comparados tiverem o lado $\overline{BC}$ com a mesma medida de comprimento, eles serão congruentes pelo caso LLL. Entretanto, se os triângulos comparados tiverem o lado $\overline{BC}$ de medidas de comprimento diferentes, eles não serão congruentes.

14. a) Pode haver triângulos cujos ângulos tenham medidas iguais, mas cujos lados não tenham medidas iguais, conforme a figura a seguir.



Outro exemplo são os triângulos equiláteros, pois todos têm ângulos de 60°, mas nem todos são congruentes.

b) Vamos considerar $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ pelo caso ALA, sendo:

$$\hat{A} \cong \hat{P}, \overline{AB} \cong \overline{PQ} \text{ e } \hat{B} \cong \hat{Q}.$$

Desses triângulos, temos:

$\text{med}(\hat{C}) = 180° - \text{med}(\hat{A}) - \text{med}(\hat{B})$

$\text{med}(\hat{R}) = 180° - \text{med}(\hat{P}) - \text{med}(\hat{Q})$

Como, pela congruência, temos $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{P})$ e $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{Q})$, então $\text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{R})$.

Assim, conhecendo dois pares de ângulos congruentes nos triângulos, é possível concluir que o terceiro par de ângulos também é congruente.

Logo, podemos dizer que os triângulos *ABC* e *PQR* são congruente pelo caso LAA_o, pois:

$$\overline{AB} \cong \overline{PQ}, \hat{A} \cong \hat{P} \text{ e } \hat{C} \cong \hat{R}.$$

PROPRIEDADES DOS TRIÂNGULOS ISÓSCELES

- Pergunte aos estudantes o que eles sabem a respeito do triângulo isósceles. Provavelmente, eles responderão que no triângulo isósceles há dois lados congruentes. Explique-lhes, então, que há outras propriedades relativas ao triângulo isósceles, que serão estudadas a seguir.
  - 1ª propriedade: em todo triângulo isósceles, a mediana, a bissetriz e a altura relativas à base coincidem;
  - 2ª propriedade: em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.
- A leitura e a compreensão das demonstrações de propriedades geométricas são uma oportunidade para os estudantes desenvolverem o raciocínio dedutivo.

Propriedades dos triângulos isósceles

Um triângulo isósceles é formado por dois lados congruentes e pelo terceiro lado, que é chamado de base.

Vamos estudar a seguir duas propriedades dos triângulos isósceles.

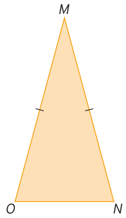
1ª propriedade

Em todo triângulo isósceles, a mediana, a bissetriz e a altura relativas à base coincidem.

Demonstração

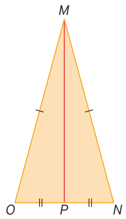
Considere o $\triangle MNO$, isósceles, representado a seguir.

Ilustrações: ID/BR



- $\overline{MN} \cong \overline{MO}$
- $\overline{NO}$ é a base do triângulo MNO.

Ao traçarmos a mediana $\overline{MP}$ relativa à base NO, formam-se os triângulos MNP e MOP. Veja a seguir.



Considerando os triângulos MNP e MOP, temos:

- $\overline{MP}$ é um lado comum aos dois triângulos.
- $\overline{NP} \cong \overline{OP}$, pois P é o ponto médio do lado $\overline{NO}$.
- $\overline{MN} \cong \overline{MO}$, pois $\triangle MNO$ é isósceles.

Portanto, pelo caso LLL, os triângulos MNP e MOP são congruentes.

Como $\triangle MNP \cong \triangle MOP$, então $O\hat{M}P \cong N\hat{M}P$.

Assim, $\overline{MP}$ é a bissetriz relativa à base do triângulo MNO.

Note que a mediana e a bissetriz relativas à base do triângulo isósceles MNO coincidem.

Agora, vamos utilizar o triângulo MNO para demonstrar que $\overline{MP}$ é a altura relativa à base.

Como já demonstramos, os triângulos MNP e MOP são congruentes. Portanto, $M\hat{P}N \cong M\hat{P}O$.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Esta atividade envolve a geometria de fractais e a congruência de triângulos para construir o triângulo de Sierpinski.

Ela pode ser realizada com folha de papel avulsa, lápis, tesoura com pontas arredondadas, régua e compasso e, posteriormente, pode ser realizada no laboratório de informática com um *software* de geometria dinâmica.

Para desenhar o triângulo de Sierpinski, siga estes passos:

- Inicie desenhando um triângulo equilátero que ocupe o maior espaço possível na folha de papel avulsa.
- Os vértices do triângulo serão os pontos A, B e C.
- Encontre os pontos médios dos segmentos AB, BC e AC e una-os.
- Os pontos médios dos três lados, juntamente com os vértices do triângulo original, formam quatro triângulos congruentes, cujos lados medem metade da medida do lado do triângulo original.
- Repete-se, com cada um desses triângulos, o procedimento anteriormente descrito.

Fonte de pesquisa: Paixão, F. de C. *et al*. Aprendendo matemática com o triângulo de Sierpinski. Minicurso Educação Matemática na contemporaneidade: desafios e possibilidades. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, São Paulo, jul. 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5516_2870_ID.pdf. Acesso em: 13 jun. 2022.

Além disso, esses ângulos são suplementares.

Logo:

$$\begin{cases} \text{med}(M\hat{P}N) + \text{med}(M\hat{P}O) = 180° & \text{(I)} \\ \text{med}(M\hat{P}N) = \text{med}(M\hat{P}O), \text{ pois } M\hat{P}N \cong M\hat{P}O & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo II em I, temos:

$$\text{med}(M\hat{P}N) + \text{med}(M\hat{P}N) = 180°$$
$$2 \cdot \text{med}(M\hat{P}N) = 180°$$
$$\text{med}(M\hat{P}N) = 90°$$

Portanto, $\overline{MP}$ é a altura relativa à base do triângulo MNO.

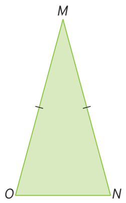
Assim, a mediana, a bissetriz e a altura relativas à base do triângulo isósceles MNO coincidem.

2ª propriedade

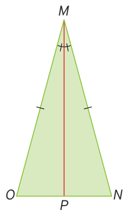
Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Demonstração

Considere o $\triangle MNO$ isósceles, com $\overline{MN} \cong \overline{MO}$.



Traçando a bissetriz $\overline{MP}$ em relação ao vértice M do triângulo MNO, formam-se os triângulos MNP e MOP. Veja a seguir.



Ilustrações: ID/BR

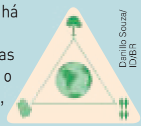
Considerando os triângulos MNP e MOP, temos:

- $\overline{MP}$ é um lado comum aos dois triângulos.
- $O\hat{M}P \cong N\hat{M}P$, pois $\overline{MP}$ é a bissetriz em relação ao vértice M do triângulo.
- $\overline{MN} \cong \overline{MO}$, pois o $\triangle MNO$ é isósceles.

Portanto, pelo caso LAL, os triângulos MNP e MOP são congruentes.

Como $\triangle MNP \cong \triangle MOP$, então $M\hat{N}P \cong M\hat{O}P$.

OS TRÊS VÉRTICES DO RESPEITO AO MEIO AMBIENTE



Danilo Souza/ID/BR

Atualmente, há uma crescente preocupação das empresas com o meio ambiente, uma vez que a população, de maneira geral, mostra-se mais exigente em relação à preservação dos recursos naturais, e cada vez mais pessoas têm optado pelo consumo consciente.

Como resposta a esse movimento, muitas empresas aderiram ao chamado triângulo da sustentabilidade, cujos vértices representam os aspectos econômico, social e ambiental.

Além disso, elas têm realizado esforços no sentido de não associar sua imagem à poluição, contaminação e degradação ambiental.

O conceito do triângulo da sustentabilidade representa a inter-relação entre a sociedade, a economia e o meio ambiente, demonstrando que esses aspectos estão interligados.

- **Converse com os colegas sobre quais ações as empresas devem promover para garantir o equilíbrio entre os vértices do triângulo da sustentabilidade. Pesquisem as práticas de algumas empresas das quais você e sua família costumam comprar produtos. Essas empresas conseguiram alcançar esse equilíbrio?**

Resposta pessoal.

Respeito

Converse com os estudantes sobre a preservação do meio ambiente e a relação entre consumo e descarte de produtos, como o lixo têxtil. Incentive-os a refletir sobre a necessidade real de comprar uma roupa e o descarte incorreto desse produto no meio ambiente, além da produção que envolve uma série de poluentes despejados na natureza até chegar às lojas de roupas. Se julgar necessário, mostre a eles um texto sobre as consequências e os dados sobre o lixo têxtil, disponível em: https://piaui.folha.uol.com.br/de-cada-100-toneladas-de-lixo-textil-produzidas-por-ano-no-brasil-apenas-20-sao-recicladas-enquanto-80-sao-descartadas-indevidamente/; acesso em: 21 jul. 2022. O objetivo desse debate é que os estudantes compreendam o conceito do triângulo da sustentabilidade, que é definido como o desenvolvimento que atende às necessidades das presentes gerações sem prejudicar as necessidades das gerações futuras e que deve ser ao mesmo tempo ecologicamente equilibrado, economicamente viável e socialmente justo. Essa conversa contribui para o desenvolvimento do **Temas Contemporâneos Transversais** Educação Ambiental e Educação para o consumo, que pertencem à macroárea **Meio Ambiente**.

DE OLHO NA BASE

Discutir com os estudantes o conceito do triângulo da sustentabilidade e como ele impacta a sociedade possibilita que eles argumentem com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta, contribuindo com o desenvolvimento da **competência geral 7**.

O estudo do tema da sustentabilidade leva os estudantes a discutir questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza, auxiliando na aprendizagem da **competência específica de Matemática 7**.

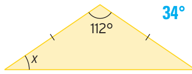
- Na atividade **18**, espera-se que os estudantes percebam que qualquer triângulo isósceles que tenha um ângulo de 60° é um triângulo equilátero, tanto para o caso em que o ângulo do vértice oposto à base tenha a medida de 60° como para o caso em que essa seja a medida de um dos ângulos da base.
  - Caso esse ângulo seja um ângulo da base, o outro ângulo da base também terá a medida de 60°; assim, como a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é 180°, o terceiro ângulo também deve medir 60°; portanto, esse triângulo isósceles é equilátero.
  - Caso esse ângulo não pertença à base, conclui-se que a soma das medidas dos ângulos da base deve ser 120° (para que a soma das medidas dos ângulos internos seja 180°). Mas, como o triângulo é isósceles, conclui-se que ambos devem ter medidas iguais. Então, cada um dos ângulos da base mede 60°, ou seja, esse triângulo isósceles é equilátero.
- Na resolução da atividade **23**, os estudantes devem determinar a medida x do ângulo $\widehat{Q}$, sabendo que o triângulo é isósceles; portanto, eles devem perceber que os ângulos da base são congruentes.
- A atividade **27** visa ao cálculo da medida do perímetro de um losango formado pela composição de dois triângulos isósceles congruentes. Verifique se os estudantes percebem que, quando o losango é formado, tem-se dois ângulos agudos e dois obtusos. Assim, o ângulo de 60° é um dos ângulos agudos.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

17. Determine x, em grau, nos casos a seguir.

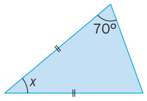
a)



34°

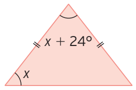
Ilustrações: ID/BR

b)



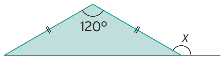
40°

c)



52°

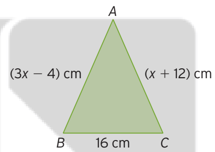
d)



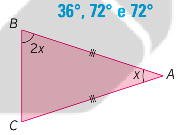
150°

18. O que é possível afirmar sobre um triângulo isósceles que tem um ângulo de 60°? Que ele é um triângulo equilátero.

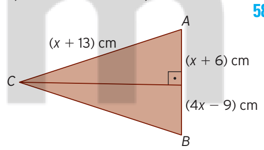
19. Calcule a medida do perímetro do $\triangle ABC$ a seguir, considerando que ele é isósceles de base $\overline{BC}$. 56 cm



20. Calcule as medidas dos ângulos internos, em grau, do $\triangle ABC$ a seguir. 36°, 72° e 72°

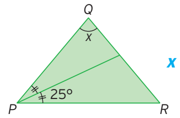


21. Sabendo que a medida de $\overline{AC}$ é igual à medida de $\overline{BC}$, calcule a medida do perímetro, em centímetro, do $\triangle ABC$ a seguir. 58 cm



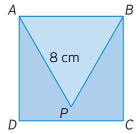
22. Determine a medida de um ângulo interno de um triângulo equilátero. 60°

23. Na figura a seguir, o triângulo PQR é isósceles, de base $\overline{PR}$. Calcule x.



$x = 80°$

24. A figura a seguir é composta de um quadrado sobreposto por um triângulo equilátero.



Calcule:

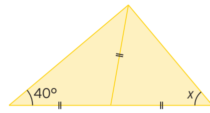
a) a medida do perímetro do triângulo; 24 cm

b) a medida do perímetro do quadrado; 32 cm

c) a medida de $P\widehat{A}B$; 60°

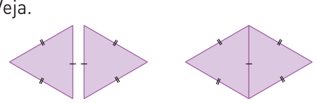
d) a medida de $P\widehat{A}D$. 30°

25. Determine x, em grau, no triângulo a seguir. 50°



26. Determine as medidas dos ângulos internos de um triângulo isósceles, sabendo que a altura relativa à base e a bissetriz de um dos ângulos internos formam um ângulo de 50°. 20°, 80° e 80°.

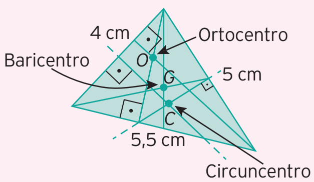
27. Juntando dois triângulos isósceles congruentes, podemos formar um losango. Veja.



Após fazer esse procedimento, Diego obteve um losango com uma diagonal medindo 12 cm oposta a um ângulo de 60°. Qual é a medida do perímetro do losango formado por Diego? 48 cm

RESPOSTAS – *DIVERSIFICANDO*

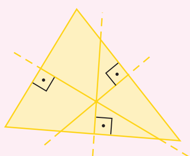
2. a)



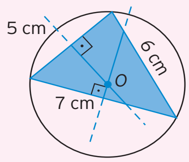
Ilustrações: ID/BR

b) Resposta pessoal.

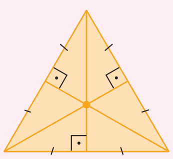
4. Possível desenho:



5. Possível desenho:

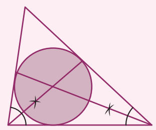


7. Possível desenho:

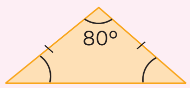


Em todo triângulo equilátero o baricentro, o ortocentro e o circuncentro coincidem.

8. Construção possível:



9. Construção possível:

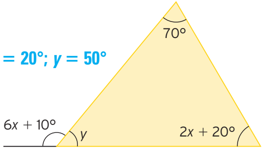


DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

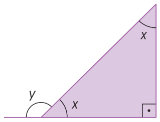
1. Calcule *x* e *y* em grau.

a)



$x = 20°$; $y = 50°$

b)



$x = 45°$; $y = 135°$

2. Desenhe no caderno um triângulo escaleno de lados medindo 4 cm, 5 cm e 5,5 cm. **Consulte as respostas neste manual.**

a) Encontre o baricentro, o ortocentro e o circuncentro desse triângulo.

b) O que você pode observar sobre esses pontos?

3. No caderno, desenhe outro triângulo escaleno com medidas diferentes das do triângulo da atividade **2**. Depois, faça o mesmo que foi solicitado nos itens **a** e **b** daquela atividade. Aconteceu o mesmo que nos pontos encontrados na atividade **2**? **Resposta pessoal; sim.**

4. Desenhe no caderno um triângulo escaleno com medidas à sua escolha. Depois, trace a mediatriz de cada um dos lados. **Consulte a resposta neste manual.**

5. Construa no caderno um triângulo de lados medindo 5 cm, 6 cm e 7 cm e trace uma circunferência circunscrita a ele. **Consulte a resposta neste manual.**

6. Responda às seguintes questões:

a) Todo triângulo tem circuncentro? **Sim.**

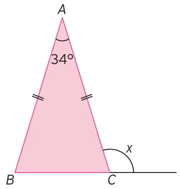
b) Dados três pontos quaisquer, é sempre possível traçar uma circunferência que passe por eles? **Não.**

7. No caderno, desenhe um triângulo equilátero e determine o baricentro, o ortocentro e o circuncentro. O que se pode observar sobre esses pontos? **Consulte a resposta neste manual.**

8. Construa um triângulo escaleno no caderno e trace a circunferência inscrita nele. **Consulte a resposta neste manual.**

9. Construa um triângulo isósceles em que a medida do ângulo oposto à base seja 80°. **Consulte a resposta neste manual.**

10. Sabendo que o triângulo *ABC* a seguir é isósceles, calcule *x* em grau. **107°**



11. Responda às seguintes questões.

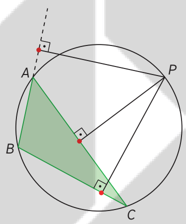
a) É possível traçar um triângulo cujos lados meçam 8 cm, 6 cm e 10 cm? **Sim.**

b) É possível traçar um triângulo cujos lados meçam 5 cm, 3 cm e 2cm? **Não.**

12. Construa no caderno um triângulo escaleno *ABC* e a circunferência nele inscrita. Ligue cada vértice do triângulo ao ponto em que a circunferência toca o lado oposto a esse vértice. O que você observa?

13. Desenhando um triângulo escaleno *ABC* e a circunferência circunscrita a ele, escolhe-se um ponto *P* dessa circunferência e traçam-se por *P* as perpendiculares às retas que contêm os lados do triângulo, obtendo-se a figura a seguir.

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que os pontos são colineares para qualquer ponto *P* que pertença à circunferência.



O que você pode observar sobre os pontos vermelhos (que são os "pés" das perpendiculares)? Compare sua resposta com as dos colegas.

14. Reúna-se com um colega para demonstrar a seguinte propriedade.

> Em qualquer triângulo equilátero, os três ângulos internos são congruentes, cada um medindo 60°. **Consulte a resposta neste manual.**

Atenção: Vocês podem traçar bissetrizes para fazer essa demonstração.

12. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes observem que os três segmentos passam pelo mesmo ponto.

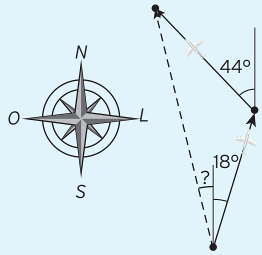
ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- No item **b** da atividade **2**, espera-se que os estudantes percebam que o baricentro, o ortocentro e o circuncentro de um triângulo escaleno não coincidem.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para certificar-se de que os estudantes assimilaram os conteúdos que envolvem as propriedades dos triângulos isósceles, proponha a seguinte atividade:

(Obmep) A figura mostra dois trechos de 300 km cada um percorridos por um avião. O primeiro trecho faz um ângulo de 18° com a direção norte e o segundo, um ângulo de 44°, também com a direção norte.

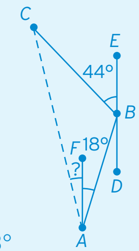


Se o avião tivesse percorrido o trecho assinalado em pontilhado, qual seria o ângulo desse trecho com a direção norte?

a) 12° **b)** 13° **c)** 14° **d)** 15° **e)** 16°

Uma possível solução para essa questão é:

Sendo *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* os pontos indicados na figura ao lado, temos que os segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{BE}$ apontam para o norte e, por isso, são paralelos. Assim:



$med(F\hat{A}B) = med(D\hat{B}A) = 18°$

Logo:

$med(C\hat{B}A) + med(C\hat{B}E) + med(D\hat{B}A) =$
$= 180°$

$med(C\hat{B}A) = 180° - 44° - 18°$

$med(C\hat{B}A) = 118°$

Como $\overline{CB} \cong \overline{AB}$, pois medem 300 km cada um, temos:

$med(A\hat{C}B) = 18° + med(C\hat{A}F)$

Portanto:

$med(A\hat{C}B) + (18° + med(C\hat{A}F)) +$
$+ med(C\hat{B}A) = 180°$

$(18° + med(C\hat{A}F)) + (18° + med(C\hat{A}F)) +$
$+ med(C\hat{B}A) = 180°$

$2 \cdot (18° + med(C\hat{A}F)) + 118° = 180°$

$2 \cdot med(C\hat{A}F) = 180° - 118° - 36°$

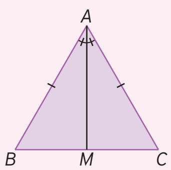
$med(C\hat{A}F) = \frac{26°}{2}$

$med(C\hat{A}F) = 13°$

Portanto, a resposta é a alternativa **b**.

14. Possível demonstração:

Considere o $\triangle ABC$ equilátero. Traçando a bissetriz $\overline{AM}$ em relação ao vértice *A*, formam-se os triângulos *ABM* e *ACM*.

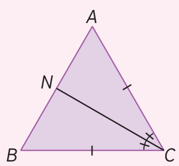


Considerando esses triângulos, temos:

- $\overline{AM}$: lado comum aos dois triângulos;
- $B\hat{A}M \cong C\hat{A}M$, pois $\overline{AM}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$;
- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, pois o triângulo *ABC* é equilátero.

Portanto, pelo caso LAL, os triângulos *ABM* e *ACM* são congruentes e, por isso, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são congruentes.

Repetindo esse procedimento no $\triangle ABC$, porém traçando a bissetriz $\overline{AN}$ em relação ao vértice C, obtém-se os triângulos *CBN* e *CAN*.



Analogamente, podemos concluir que, pelo caso LAL, os triângulos *CBN* e *CAN* são congruentes e, por isso, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{A}$ são congruentes.

Portanto, em qualquer triângulo equilátero, os três ângulos internos são congruentes, cada um medindo 60° (180° : 3 = 60°).

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Elementos de um quadrilátero.
- Classificação dos quadriláteros.
- Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo.
- Paralelogramos: classificação e propriedades.
- Trapézios: classificação e propriedades.

Objetivos

- Classificar quadriláteros.
- Compreender a demonstração da soma dos ângulos internos do quadrilátero convexo.
- Reconhecer e aplicar as propriedades dos paralelogramos.
- Reconhecer e aplicar as propriedades dos trapézios.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo de paralelogramos e trapézios, utilizando conceitos como a congruência de triângulos e as relações entre as medidas de ângulos para compreender as propriedades desses quadriláteros, além de ser uma oportunidade para desenvolverem noções de pensamento computacional. Desse modo, eles poderão descobrir novas afirmações e novos modos de organizar informações já conhecidas.

ELEMENTOS DE UM QUADRILÁTERO

- De todos os polígonos, os triângulos e os quadriláteros são os que recebem maior atenção nos estudos. E isso não ocorre por acaso. No caso dos quadriláteros, basta olhar ao redor para perceber a grande quantidade de objetos com o formato desse polígono. O mesmo não ocorre com os triângulos. Então, qual é o motivo do empenho em estudá-lo? Um dos motivos para essa atenção especial aos triângulos é a possibilidade de decompor em polígonos triangulares qualquer região poligonal; dessa forma, pode-se estudar todos os polígonos a partir de triângulos.
- Explique aos estudantes que os quadriláteros são formados por quatro lados, quatro vértices, quatro ângulos internos e quatro externos e duas diagonais.

Capítulo 2 QUADRILÁTEROS

Para desenvolver os conteúdos deste capítulo, os estudantes devem ter compreendido os conceitos de ângulos e de segmentos de reta.

Elementos de um quadrilátero

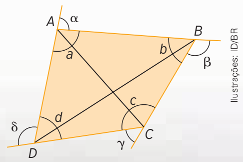
Vivemos rodeados por objetos que lembram quadriláteros – a película que protege a tela de um celular, por exemplo, ou uma folha de papel.

Outro exemplo são as telas em que estamos acostumados a ver imagens projetadas em cinemas ou exibidas em televisores, cujo formato é retangular. Existem cinemas, ao ar livre, que projetam filmes em telas retangulares com alta definição.

Quadrilátero é um polígono de quatro lados.

Os elementos básicos dos quadriláteros, exemplificados a seguir com os do quadrilátero *ABCD*, são:

- vértices: *A*, *B*, *C* e *D*;
- lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$;
- diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$;
- ângulos internos: $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$;
- ângulos externos: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ e $\hat{\delta}$.



Chamamos dois lados não consecutivos de um quadrilátero de **lados opostos**. Nessa figura, há dois pares de lados opostos: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$.

Cinema ao ar livre, com tela de 15 metros de medida de altura, na autoestrada A8, em Pforzheim, Alemanha. Foto de 2021.

112

(IN)FORMAÇÃO

Qual é mesmo a definição de polígono convexo?

Quando pensamos num polígono convexo, imaginamos seus vértices todos apontando para fora, ou seja, que ele não possui vértices reentrantes. Como os dois polígonos da esquerda na Figura 1.

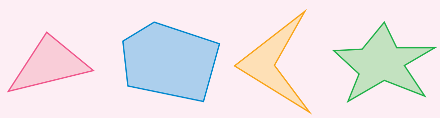


Fig. 1. Dois polígonos convexos e dois polígonos não convexos.

Essa ideia intuitiva necessita, entretanto, [de] uma formulação mais precisa, para poder ser usada com segurança e generalidade. Além disso, há outras maneiras de pensar num polígono convexo. Conforme o contexto, uma dessas definições pode ser mais adequada do que as outras. Por isso é conveniente conhecer as principais alternativas e saber mostrar que elas são equivalentes.

[…]

Chamamos polígono a uma linha poligonal fechada sem autointerseções, isto é, cada lado tem apenas um ponto comum com o lado anterior e com o seguinte, mas não com os demais.

Às vezes, a palavra “polígono” também designa a região do plano limitada por essa linha poligonal fechada sem autointerseções. Por exemplo, quando falamos da área de um polígono, é claro que nos referimos à região poligonal, não à linha que a limita.

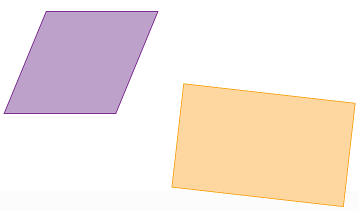
Um subconjunto *F* do plano chama-se uma *figura plana convexa* quando, para quaisquer

Classificação dos quadriláteros

Entre os quadriláteros convexos, existem dois tipos que se destacam: os paralelogramos e os trapézios.

Paralelogramos

Paralelogramo é um quadrilátero convexo que tem os lados opostos paralelos. Veja alguns exemplos de paralelogramos.



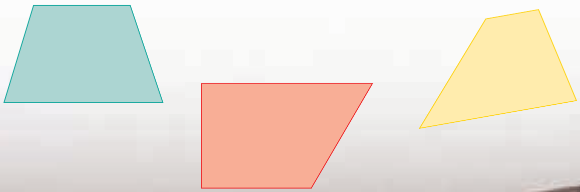
Ilustrações: ID/BR

POLÍGONOS CONVEXOS

Quando, para quaisquer dois pontos *A* e *B* pertencentes ao interior de um polígono, o segmento $\overline{AB}$ estiver totalmente contido no interior dele, esse polígono é convexo.

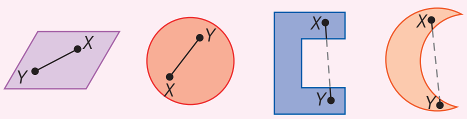
Trapézios

Trapézio é um quadrilátero convexo que tem dois lados paralelos e dois lados não paralelos. Veja alguns exemplos de trapézios.



Uli Deck/DPA/Alamy/Fotoarena

dois pontos X e Y em F, o segmento de reta XY está inteiramente contido em F.



Ilustrações: ID/BR

Fig. 2. Duas figuras planas convexas e duas figuras planas não convexas.

LIMA, E. L. Qual é mesmo a definição de polígono convexo? *Revista do Professor de Matemática*, n. 21. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/21/10.htm. Acesso em: 13 jun. 2022.

CLASSIFICAÇÃO DOS QUADRILÁTEROS

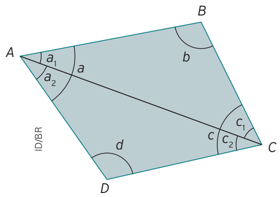
- Os quadriláteros podem ser classificados em grupos distintos: os paralelogramos, os trapézios e outros quadriláteros.
- Neste capítulo, estudaremos apenas os paralelogramos e os trapézios.
- Certifique-se de que os estudantes compreenderam que a característica que distingue os quadriláteros é o fato de eles possuírem, ou não, lados paralelos e a quantidade de pares de lados paralelos que eles apresentam, ou seja, um ou dois pares.
- O estudo da classificação dos quadriláteros proporciona aos estudantes situações de aprendizagem que desenvolvem noções de pensamento computacional (identificação de padrões), mobilizando diferentes processos cognitivos, na medida em que reconhecem que é possível formar classes de figuras que seguem determinado padrão, agrupando-as de acordo com as medidas dos lados e dos ângulos internos.

SOMA DAS MEDIDAS DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM QUADRILÁTERO CONVEXO

- É fundamental estabelecer relações entre o estudo dos triângulos e dos quadriláteros. Ao estudar os quadriláteros, pode-se decompor esses polígonos em triângulos e, mediante a aplicação dos conceitos de congruência, verificar, por exemplo, se os triângulos obtidos na decomposição são congruentes.
- É importante que os estudantes percebam que, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e os quadriláteros podem ser decompostos em dois triângulos, então a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°.

Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo

Observe o quadrilátero *ABCD* a seguir.



Note que esse quadrilátero é formado pelo $\triangle ABC$ e pelo $\triangle ACD$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, temos:

$$a_1 + b + c_1 = 180°$$
$$a_2 + d + c_2 = 180°$$

Adicionando as duas equações, temos:

$$a_1 + b + c_1 + a_2 + d + c_2 = 180° + 180°$$
$$\underbrace{a_1 + a_2}_{a} + b + \underbrace{c_1 + c_2}_{c} + d = 360°$$
$$a + b + c + d = 360°$$

Portanto, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°.

1. Os estudantes podem desenhar qualquer quadrilátero *CDEF* convexo.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Desenhe no caderno um quadrilátero *CDEF* convexo. Em seguida, escreva:

a) seus lados; **$\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{CF}$.**

b) seus vértices; **C, D, E e F.**

c) suas diagonais; **$\overline{CE}$ e $\overline{DF}$.**

d) seus ângulos internos. **$\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$ e $\hat{f}$.**

2. Copie a alternativa correta no caderno. **Alternativa c.**

a) Os quadriláteros são polígonos que têm quatro lados, e os lados opostos são paralelos.

b) Todo quadrilátero é um quadrado.

c) Quadrilátero é uma figura geométrica plana e poligonal que tem quatro lados.

d) Quadriláteros são polígonos que têm quatro lados, dois deles paralelos.

e) Quadriláteros são figuras que têm quatro lados congruentes.

3. Copie a alternativa correta no caderno. **Alternativa e.**

a) Um paralelogramo é um quadrilátero que tem lados paralelos.

b) Um paralelogramo é um quadrilátero que tem lados congruentes.

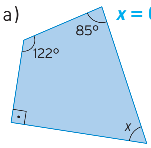
c) Um paralelogramo não é um quadrilátero.

d) Um trapézio é um quadrilátero que tem lados paralelos.

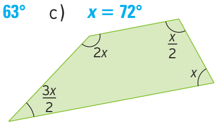
e) Um trapézio é um quadrilátero que tem dois lados paralelos e dois lados não paralelos.

4. Determine *x* nos quadriláteros a seguir.

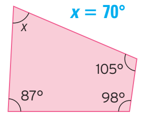
a) **$x = 63°$**



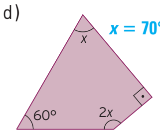
c) **$x = 72°$**



b) **$x = 70°$**



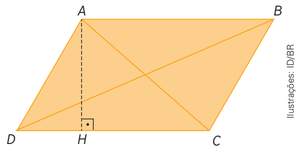
d) **$x = 70°$**



114

Paralelogramos

Vimos que paralelogramo é um quadrilátero convexo que tem os lados opostos paralelos. Observe o paralelogramo *ABCD*.



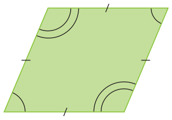
Nesse paralelogramo, temos:

- Os lados opostos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos.
- Os lados opostos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos.
- Qualquer lado pode ser considerado base do paralelogramo.
- O segmento $\overline{AH}$ é uma altura relativa à base $\overline{CD}$.
- Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais do paralelogramo.
- Os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são opostos.
- Os ângulos $D\hat{A}B$ e $D\hat{C}B$ são opostos.
- A soma das medidas dos ângulos internos é 360°.

Alguns paralelogramos podem ser classificados em losango, retângulo e quadrado.

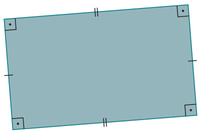
Losango

Paralelogramo que tem os quatro lados congruentes, ou seja, com mesma medida.



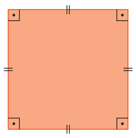
Retângulo

Paralelogramo que tem os quatro ângulos internos retos.



Quadrado

Paralelogramo que tem os quatro ângulos internos retos e os quatro lados congruentes.



Incentive os estudantes a perceber que o quadrado é um retângulo e um losango ao mesmo tempo.

PARALELOGRAMOS

- Enfatize aos estudantes que os paralelogramos são quadriláteros que têm os lados opostos paralelos e que os paralelogramos mais conhecidos são classificados como: losango, retângulo e quadrado.
- Peça aos estudantes que desenhem no caderno um paralelogramo qualquer e, depois, pergunte a eles se sabem identificar se esse paralelogramo desenhado pode ser classificado como um retângulo, um losango ou um quadrado.
- Verifique se eles conhecem as principais características do retângulo, do quadrado e do losango.

- Peça aos estudantes que desenhem no caderno, com o auxílio de um transferidor, um paralelogramo (pode ser um retângulo para facilitar). Depois, solicite-lhes que meçam os ângulos opostos e verifiquem se são congruentes, como descreve a 1ª propriedade.
- Em seguida, sendo *a*, *b*, *c* e *d* as medidas dos ângulos consecutivos do paralelogramo desenhado, solicite aos estudantes que meçam esses ângulos para constatar o que descreve a 2ª propriedade:

$$a + b = 180°$$
$$b + c = 180°$$
$$c + d = 180°$$
$$a + d = 180°$$

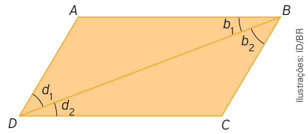
Algumas propriedades dos paralelogramos

1ª propriedade

Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

Demonstração

Considere o paralelogramo *ABCD* a seguir.



Traçando a diagonal $\overline{BD}$, decompomos o paralelogramo *ABCD* em dois triângulos: *BAD* e *DCB*. Analisando os elementos desses triângulos, temos:

- $\widehat{b_1} \cong \widehat{d_2}$, pois eles são ângulos alternos internos formados pelos segmentos paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ com a diagonal $\overline{BD}$.
- $\overline{BD}$ é lado comum dos triângulos.
- $\widehat{b_2} \cong \widehat{d_1}$, pois eles são ângulos alternos internos formados pelos segmentos paralelos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ com a diagonal $\overline{BD}$.

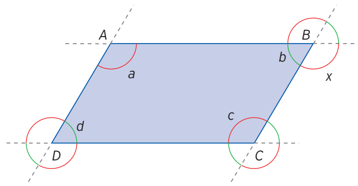
Pelo caso ALA, os triângulos *BAD* e *DCB* são congruentes. Portanto, $\widehat{A} \cong \widehat{C}$. De modo análogo, se traçarmos a diagonal $\overline{AC}$, demonstramos que os triângulos *ADC* e *CBA* são congruentes e, por isso, $\widehat{B} \cong \widehat{D}$.

2ª propriedade

Os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

Demonstração

Considere o paralelogramo *ABCD* a seguir.



Como os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos, $\hat{a} \cong \hat{x}$, pois são ângulos correspondentes (as medidas dos ângulos congruentes estão indicadas na figura com cores iguais). Então, $a = x$.

Como $x + b = 180°$ e $x = a$, temos $a + b = 180°$.

Portanto, $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são ângulos suplementares.

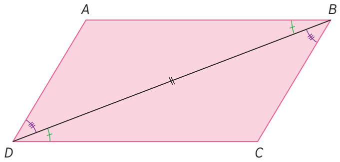
De modo análogo, temos: $a + d = 180°$, $b + c = 180°$ e $c + d = 180°$.

3ª propriedade

> Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

Demonstração

Considere o paralelogramo *ABCD* a seguir.



Traçando a diagonal $\overline{BD}$, dividimos o paralelogramo em dois triângulos: *ABD* e *CDB*.

Por raciocínio análogo à demostração da 1ª propriedade, analisando os elementos desses triângulos, podemos concluir, pelo caso ALA, que os triângulos *ABD* e *CDB* são congruentes.

Portanto:

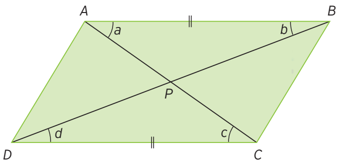
$$\overline{AD} \cong \overline{CB} \quad \text{e} \quad \overline{AB} \cong \overline{CD}$$

4ª propriedade

> As diagonais de um paralelogramo se intersectam em seus pontos médios.

Demonstração

Considere o paralelogramo *ABCD* a seguir.



Ilustrações: ID/BR

Traçando as duas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, obtemos os triângulos *ABP* e *CDP*. Analisando os elementos desses triângulos, temos:

- $\hat{a} \cong \hat{c}$, pois são ângulos alternos internos formados pelos segmentos paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ com a diagonal $\overline{AC}$.
- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, pois são lados opostos de um paralelogramo (3ª propriedade).
- $\hat{b} \cong \hat{d}$, pois são ângulos alternos internos formados pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ com a diagonal $\overline{BD}$.

Logo, pelo caso ALA, os triângulos *ABP* e *CDP* são congruentes.

Portanto: $\overline{AP} \cong \overline{CP}$ e $\overline{BP} \cong \overline{DP}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

- Para melhor compreensão da 3ª propriedade, peça aos estudantes que recortem o paralelogramo desenhado. Em seguida, peça que tracem as diagonais e recortem os triângulos formados. Ao sobrepor os triângulos cujas bases são os lados opostos do paralelogramo, eles poderão verificar que os lados desses triângulos são congruentes.

- Solicite aos estudantes que desenhem dois retângulos congruentes (*ABCD* e *EFGH*) em uma folha de papel avulsa, tracem as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{EG}$ e, depois, as meçam com a régua, comprovando que as medidas das diagonais são congruentes. Em seguida, peça a eles que recortem os retângulos e os separem pelas diagonais traçadas. Solicite que sobreponham os triângulos obtidos e observem que eles são congruentes.
- Se julgar necessário, solicite aos estudantes que desenhem um losango em uma folha de papel avulsa e acompanhem a demonstração de sua propriedade com base na figura recortada.

DE OLHO NA BASE

Demonstrar as propriedades dos retângulos, dos losangos e dos quadrados, utilizando como estratégia a identificação da congruência de triângulos, possibilita que os estudantes desenvolvam a habilidade **EF08MA14**.

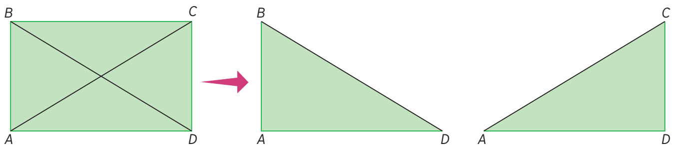
Propriedade do retângulo

Um retângulo é todo paralelogramo que tem os quatro ângulos internos retos. Logo, as propriedades dos paralelogramos também são válidas para o retângulo. Além delas, é válida a seguinte propriedade:

As diagonais de um retângulo são congruentes.

Demonstração

No retângulo *ABCD*, traçamos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, obtendo os triângulos *ADB* e *DAC*.



Ilustrações: ID/BR

Comparando os elementos desses triângulos, temos:

- $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, pois são lados opostos de um paralelogramo (3ª propriedade).
- $\hat{A} \cong \hat{D}$, pois ambos são ângulos retos.
- $\overline{AD}$ é o lado comum dos triângulos.

Logo, os triângulos *ADB* e *DAC* são congruentes pelo caso LAL.

Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{DB}$.

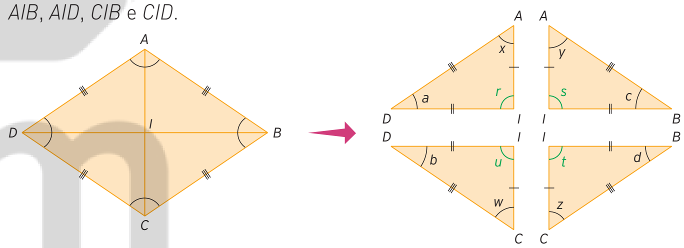
Propriedade do losango

Um losango é um paralelogramo que tem os quatro lados congruentes. Logo, todas as propriedades do paralelogramo também são válidas para o losango. Além delas, os losangos apresentam a seguinte propriedade:

As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e coincidem com as bissetrizes dos ângulos internos.

Demonstração

No losango *ABCD*, traçamos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, obtendo os triângulos *AIB*, *AID*, *CIB* e *CID*.



Como o losango é um paralelogramo, temos: $AI = IC$ e $BI = ID$ (4ª propriedade). Pelo caso LLL, os triângulos *AIB*, *AID*, *CIB* e *CID* são congruentes. Então: $\hat{x} \cong \hat{y} \cong \hat{z} \cong \hat{w}$ e $\hat{a} \cong \hat{b} \cong \hat{c} \cong \hat{d}$.

Assim:

- Como $x = y$, então $\overrightarrow{AC}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$.
- Como $a = b$, então $\overrightarrow{DB}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{D}$.

Por raciocínio análogo, prova-se que $\overrightarrow{CA}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{C}$ e que $\overrightarrow{BD}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{B}$.

Além disso, como os triângulos são congruentes, temos: $\hat{r} \cong \hat{s} \cong \hat{t} \cong \hat{u}$.

Sabemos que $r + s + t + u = 360°$, então concluímos que:

$$r = s = t = u = 90°$$

Assim, demonstramos que as diagonais do losango são perpendiculares.

Propriedade do quadrado

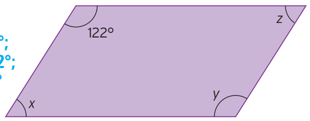
Por ser simultaneamente um retângulo e um losango, o quadrado apresenta todas as propriedades estudadas até aqui. Isso significa que as diagonais de um quadrado são congruentes, coincidem com as bissetrizes dos ângulos internos, são perpendiculares entre si e se intersectam no ponto médio.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

5. Determine x, y e z, em grau, nos paralelogramos a seguir.

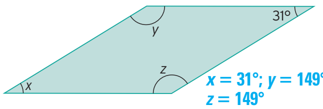
a)



$x = 58°$; $y = 122°$; $z = 58°$

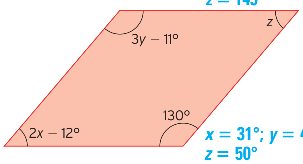
Ilustrações: ID/BR

b)



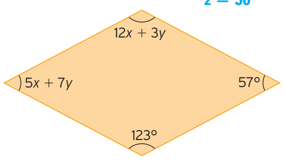
$x = 31°$; $y = 149°$; $z = 149°$

c)



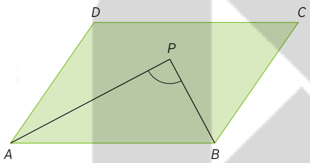
$x = 31°$; $y = 47°$; $z = 50°$

d)



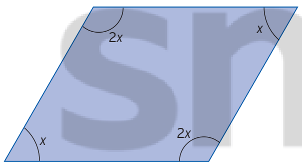
$x = 10°$; $y = 1°$

6. Na figura a seguir, *ABCD* é um paralelogramo e $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BP}$ são bissetrizes dos ângulos internos.



Determine a medida do ângulo $A\hat{P}B$. $90°$

7. As medidas dos ângulos internos de um paralelogramo são tais que uma é o dobro da outra.



Quanto medem os ângulos desse paralelogramo em grau? 60°, 60°, 120°, 120°.

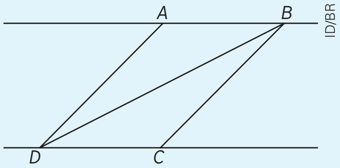
- Ressalte aos estudantes que as propriedades do quadrado são idênticas às propriedades dos demais polígonos analisados até o momento.
- Para a resolução da atividade **6**, os estudantes devem determinar a medida do ângulo indicado aplicando a 2ª propriedade de um paralelogramo (a soma das medidas dos ângulos consecutivos de um paralelogramo é 180°) e devem lembrar que a bissetriz de um ângulo o divide em dois ângulos congruentes.

119

- Na atividade **10**, os estudantes devem ligar os pontos e perceber que o quadrilátero formado é um quadrado.

RESPOSTAS

8. Possível desenho:



Traçando a diagonal $\overline{BD}$, temos que os ângulos $C\hat{D}B$ e $A\hat{B}D$ são alternos internos e, por isso, são congruentes. Como $\overline{CD} \cong \overline{AB}$, então os triângulos CDB e ADB são congruentes pelo caso LAL, pois:

- $\overline{CD} \cong \overline{AB}$
- $C\hat{D}B \cong A\hat{B}D$
- $\overline{DB} \cong \overline{BD}$ (lado comum)

Assim, temos $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ e $B\hat{C}D \cong B\hat{A}D$.

Logo, o quadrilátero $ABCD$ tem os lados opostos congruentes, satisfazendo a 3ª propriedade dos paralelogramos. Além disso, como os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{A}$ são congruentes e $\overline{CD} // \overline{AB}$, então $\overline{BC} // \overline{AD}$.

Portanto, $ABCD$ é um paralelogramo.

13. a) Verdadeira.

b) Falsa. Correção possível: As diagonais de um losango são perpendiculares entre si.

c) Verdadeira.

d) Falsa. Correção possível: Se um quadrilátero tem diagonais perpendiculares e elas se cruzam em seus pontos médios, então ele é um losango.

e) Falsa. Correção possível: Se um paralelogramo tem diagonais congruentes, então ele é um retângulo.

f) Falsa. Correção possível: As diagonais de um losango são bissetrizes dos ângulos internos.

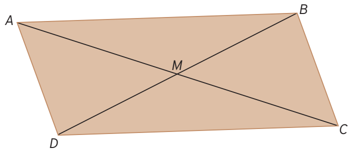
DE OLHO NA BASE

Ao resolver as atividades desta página, que envolvem as propriedades dos paralelogramos, os estudantes estão aplicando os conhecimentos obtidos sobre a congruência de triângulos, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA14**.

Responda sempre no caderno.

8. Desenhe duas retas paralelas. Em uma delas, trace um segmento $\overline{AB}$. Na outra, trace um segmento $\overline{CD}$ de medida igual a $\overline{AB}$. O quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo? Justifique sua resposta. **Consulte a resposta neste manual.**

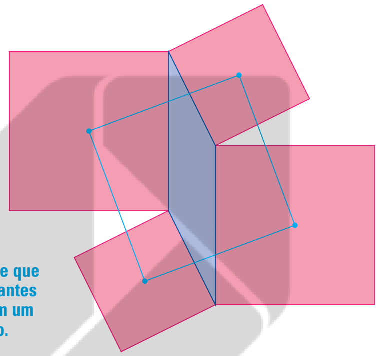
9. $ABCD$ é um paralelogramo.



Considerando os valores desconhecidos x e y na mesma unidade de medida, determine as medidas das diagonais desse paralelogramo, sabendo que: **$AC = 26$; $BD = 20$.**

- $AM = 19 - y$;
- $CM = 2y + 1$;
- $BM = x + y$;
- $DM = 4x - 6$.

10. Construa no caderno um paralelogramo. Em seguida, construa quadrados sobre os lados do paralelogramo e externos a ele, como mostra a figura a seguir.

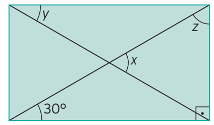


Espera-se que os estudantes obtenham um quadrado.

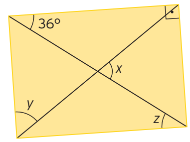
Use uma régua para determinar os centros desses quadrados. Depois, ainda com a régua, trace o quadrilátero cujos vértices são esses centros. O que você pode observar? Converse com os colegas e verifique se eles obtiveram o mesmo quadrilátero que você.

11. É possível que um paralelogramo tenha diagonais congruentes? Tente desenhar uma figura assim. A que conclusão você chegou?

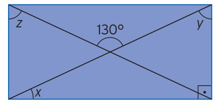
12. Determine as medidas de x, y e z, em grau, nos paralelogramos a seguir.

a)


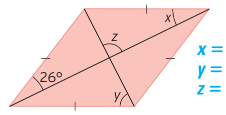
$x = 60°$; $y = 30°$; $z = 60°$

b)


$x = 72°$; $y = 54°$; $z = 36°$

c)


$x = 25°$; $y = 65°$; $z = 65°$

d)


$x = 26°$; $y = 64°$; $z = 90°$

13. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Quando forem falsas, apresente uma correção.

a) As diagonais de um retângulo são congruentes. **Consulte a resposta neste manual.**

b) As diagonais de um losango são congruentes.

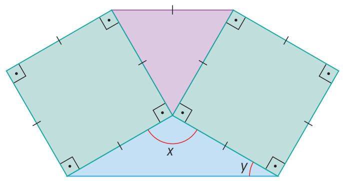
c) Se um quadrilátero é um losango, então suas diagonais são perpendiculares.

d) Se um quadrilátero tem diagonais perpendiculares, então ele é um losango.

e) Se um quadrilátero tem diagonais congruentes, então ele é um retângulo.

f) As diagonais de um retângulo são bissetrizes dos ângulos internos.

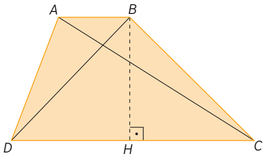
14. Determine as medidas de x e y, em grau, na figura a seguir. **$x = 120°$; $y = 30°$**



11. Sim, basta que o paralelogramo seja um retângulo ou um quadrado, pois, para que um paralelogramo tenha diagonais congruentes, é necessário que ele tenha ângulos internos medindo 90°.

Trapézios

Vimos que trapézio é o quadrilátero convexo que tem dois lados paralelos e dois lados não paralelos. Observe o trapézio *ABCD*.



Nesse trapézio, temos:

- $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.
- $\overline{AB}$ é a base menor e $\overline{DC}$ é a base maior.
- Qualquer segmento com extremidades nas duas bases e perpendicular a elas é chamado de altura do trapézio; por exemplo, $\overline{BH}$.
- $A\hat{D}C$ e $D\hat{A}B$ são pares de ângulos suplementares.
- $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são pares de ângulos suplementares.
- $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais do trapézio.

SÍMBOLO DE PARALELO

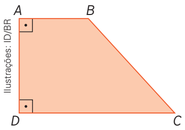
O símbolo **//** indica que duas retas ou dois segmentos de reta são paralelos.

Os trapézios podem ser classificados em trapézio retângulo, trapézio isósceles e trapézio escaleno.

Trapézio retângulo

O trapézio retângulo tem dois ângulos de 90°.

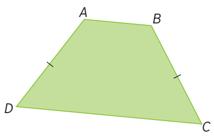
Ilustrações: ID/BR



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{AD}$ é perpendicular a $\overline{AB}$.
$\overline{AD}$ é perpendicular a $\overline{DC}$.
$med(\hat{A}) = med(\hat{D}) = 90°$

Trapézio isósceles

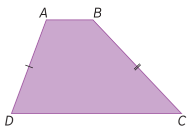
No trapézio isósceles, os dois lados não paralelos são congruentes.



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{BC} \cong \overline{AD}$

Trapézio escaleno

O trapézio escaleno tem os lados não paralelos não congruentes.



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

TRAPÉZIOS

- Comente com os estudantes a definição e a classificação de trapézio. O trapézio é um quadrilátero convexo que tem dois lados paralelos e dois lados não paralelos. Peça a eles que desenhem no caderno pelo menos dois exemplos de trapézios retângulo, isósceles e escaleno.

- Explique aos estudantes que o trapézio isósceles, por ter os lados opostos não paralelos congruentes, tem propriedades específicas: os ângulos adjacentes a uma das bases são congruentes e as diagonais também são congruentes.
- Explore as propriedades dos trapézios isósceles solicitando aos estudantes que escrevam argumentos lógicos relacionados às demonstrações apresentadas no Livro do Estudante. Por exemplo, na 1ª propriedade, eles podem escrever:
  - Se um trapézio é isósceles, então os ângulos adjacentes a uma das bases desse trapézio são congruentes.
  - *ABCD* é um trapézio cujos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos.
  - Como *ABCD* é um trapézio isósceles, então os lados não paralelos, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, são congruentes.
  - Como o segmento $\overline{BE}$ traçado é paralelo ao lado $\overline{AD}$, então o quadrilátero *ABED* é um paralelogramo.
  - Como *ABED* é um paralelogramo, então $\overline{BE} \cong \overline{AD}$ e $B\widehat{E}D$ e $A\widehat{D}E$ são suplementares.
  - Como $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ e $\overline{BE} \cong \overline{AD}$, então $\overline{BE} \cong \overline{BC}$ e o triângulo *BCE* é isósceles.
  - Como o triângulo *BCE* é isósceles, então $B\widehat{C}E \cong B\widehat{E}C$.
  - Como $B\widehat{E}C$ e $A\widehat{D}E$ são correspondentes, então $B\widehat{E}C \cong A\widehat{D}E$.
  - Como $B\widehat{C}E \cong B\widehat{E}C$ e $B\widehat{E}C \cong A\widehat{D}E$, então $B\widehat{C}E \cong A\widehat{D}E$.

  Portanto, os ângulos adjacentes a uma das bases do trapézio são congruentes.

Propriedades dos trapézios isósceles

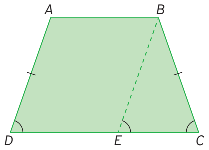
Como vimos, o trapézio isósceles tem os lados não paralelos congruentes. Para esse trapézio, são válidas as propriedades a seguir.

1ª propriedade

Os ângulos adjacentes a uma das bases de um trapézio isósceles são congruentes.

Demonstração

Em um trapézio isósceles *ABCD* qualquer, traçamos, pelo vértice *B*, um segmento paralelo a $\overline{AD}$, determinando o ponto *E*.



Ilustrações: ID/BR

Dessa maneira, construímos o paralelogramo *ABED*. Assim:

- $\overline{AD} \cong \overline{BE}$, pois são lados opostos de um paralelogramo.
- $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, pois *ABCD* é um trapézio isósceles.

Como $\overline{AD} \cong \overline{BE}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, então $\overline{BE} \cong \overline{BC}$.

Portanto, o triângulo *BEC* é isósceles.

Além disso:

- med($B\widehat{C}E$) = med($B\widehat{E}C$), pois são ângulos da base de um triângulo isósceles.
- med($A\widehat{D}E$) = med($B\widehat{E}C$), pois são ângulos correspondentes.

Como med($B\widehat{C}E$) = med($B\widehat{E}C$) e med($A\widehat{D}E$) = med($B\widehat{E}C$), então med($B\widehat{C}E$) = = med($A\widehat{D}E$). Portanto, $\widehat{C} \cong \widehat{D}$.

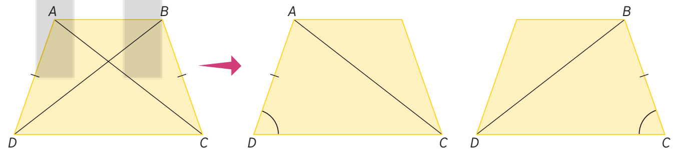
De maneira análoga, podemos demonstrar que $\widehat{A} \cong \widehat{B}$.

2ª propriedade

As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Demonstração

No trapézio isósceles *ABCD*, traçamos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, obtendo os triângulos *ADC* e *BCD*.



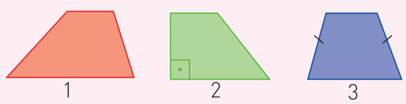
(IN)FORMAÇÃO

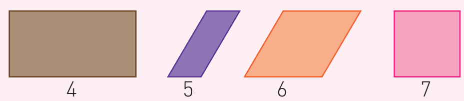
Sobre definições de trapézios isósceles

Encontramos nos livros didáticos duas definições para o trapézio.

A primeira é: *Trapézio é um quadrilátero com um par de lados paralelos (ou de uma maneira equivalente, trapézio é um quadrilátero que tem dois lados paralelos).*

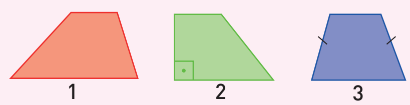
Essa definição permite que ambos os pares de lados opostos sejam paralelos, ou seja, permite que um paralelogramo seja um trapézio. Com ela, temos 7 tipos de figuras que representam trapézios.





A segunda definição é: *Trapézio é um quadrilátero que apresenta um único par de lados paralelos.*

Assumindo essa definição, temos 3 tipos de figuras que representam trapézios.



Ilustrações: ID/BR

Como definir um trapézio isósceles?

Assumindo a primeira definição de trapézio, temos várias maneiras de definir um trapézio isósceles.

Assim, temos:

- $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, pois $ABCD$ é um trapézio isósceles.
- $\text{med}(A\widehat{D}C) = \text{med}(B\widehat{C}D)$, pois são ângulos congruentes (1ª propriedade).
- $\overline{DC}$ é o lado comum.

Logo, pelo caso LAL, os triângulos ADC e BCD são congruentes.

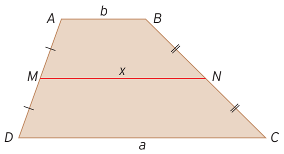
Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Propriedade da base média de um trapézio

A base média de um trapézio é o segmento cujas extremidades são os pontos médios dos lados não paralelos desse trapézio.

> A base média de um trapézio é paralela às bases do trapézio e mede a metade da soma das medidas das bases.

Demonstração

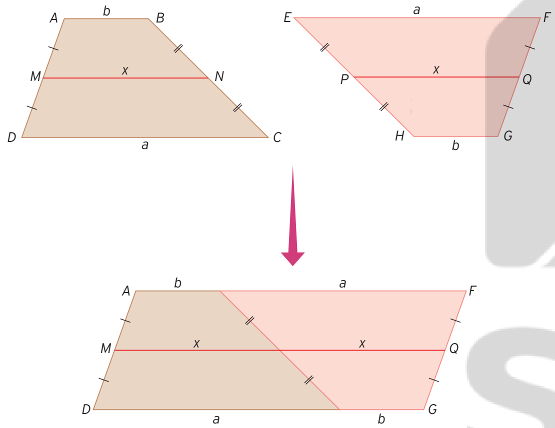


$\overline{MN} \,//\, \overline{AB}$

$\overline{MN} \,//\, \overline{CD}$

$x = \dfrac{a + b}{2}$

Perceba que essa relação é válida pela seguinte situação: ao duplicar um trapézio, podemos compor as duas figuras e obter um paralelogramo, como mostrado a seguir.



Ilustrações: ID/BR

Como $\overline{MQ}$ é paralelo a $\overline{AF}$ e a $\overline{DG}$ e $AM = FQ$, temos que $AFQM$ também é um paralelogramo.

Assim, temos $AF = MQ$, ou seja: $2x = a + b \Rightarrow x = \dfrac{a + b}{2}$

- Proponha aos estudantes que façam o desenho de um trapézio no caderno e encontrem a base média, identificando os pontos médios dos lados não paralelos do trapézio. A base média de um trapézio é paralela às bases do trapézio e mede a metade da soma das medidas das bases.

DE OLHO NA BASE

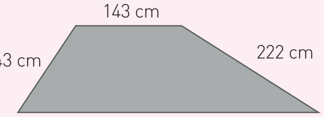
Compreender as propriedades dos trapézios por meio da identificação da congruência de triângulos possibilita que os estudantes desenvolvam a habilidade **EF08MA14**.

Trapézio isósceles é o trapézio que tem no mínimo um par de lados opostos congruentes [...].

Nesse caso, todos os paralelogramos são trapézios isósceles. O inconveniente dessa definição é que não se pode mais dizer que os ângulos da base de um trapézio isósceles são congruentes, pois os paralelogramos são trapézios.

Mas dizer que os ângulos da base de um trapézio isósceles são congruentes é uma prática incorporada por alunos e professores. Então, que definição é mais coerente com a nossa prática?

Poderia dizer: *Trapézio isósceles é um trapézio que tem um único par de lados congruentes?* Não. Essa definição também apresenta um problema. Vejam a figura [a seguir]. O trapézio apresenta um único par de lados congruentes sem ser um trapézio isósceles, segundo a nossa expectativa.



Mas, nesse caso, basta acrescentar a palavra *opostos* para que essa definição se torne consistente com os nossos propósitos.

Trapézio isósceles é um trapézio que tem um único par de lados opostos congruentes (ou de uma maneira equivalente: *trapézio isósceles é um trapézio que apresenta um único eixo de simetria*). Dessa forma eliminam-se as figuras 1, 2, 4, 5, 6 e 7, permanecendo apenas a figura 3.

Poderíamos também ter definido o trapézio isósceles como o trapézio cujas diagonais são congruentes. Nesse caso, eliminaríamos os casos 1, 2, 5, 6, mas seríamos coerentes em manter os ângulos da base congruentes entre si. Tudo é uma questão de gosto.

Ilustrações: ID/BR

E quanto à segunda definição de trapézio? Nesse caso, a definição é muito mais simples: *Trapézio isósceles é um trapézio que tem os lados opostos não paralelos congruentes.*

BONGIOVANNI, V. Sobre definições de trapézios isósceles. *Revista do Professor de Matemática*, n. 72. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/72/3.html. Acesso em: 13 jun. 2022.

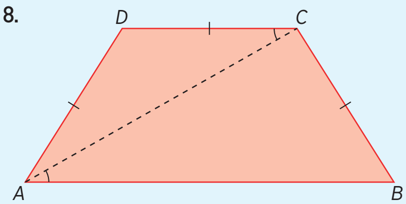
- As atividades desta página possibilitam aos estudantes a aplicação e a consolidação dos conceitos aprendidos sobre o trapézio.
- Na atividade **20**, os estudantes podem determinar a soma das medidas indicadas no trapézio utilizando a propriedade da base média do trapézio. Observe se eles percebem que o degrau de medida y fica exatamente no meio da estrutura e, por isso, y é a média aritmética das medidas dos degraus dos extremos, 40 cm e 60 cm, ou seja, $y = \dfrac{40 + 60}{2} = 50$. Com o mesmo raciocínio, os estudantes podem calcular o valor de x e de z.

RESPOSTAS

16. Um possível desenho é:

Espera-se que os estudantes, ao compararem as medidas, percebam que, mesmo variando os ângulos, nos trapézios isósceles os ângulos opostos são suplementares.

18.



a) Que esse triângulo é isósceles.

b) Porque são ângulos da base de um triângulo isósceles.

c) Sim, pois são ângulos alternos internos.

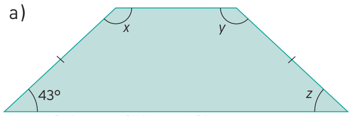
d) Porque med($D\widehat{C}A$) = med($C\widehat{A}B$) e med($D\widehat{C}A$) = med($D\widehat{A}C$); então med($C\widehat{A}B$) = med($D\widehat{A}C$).

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

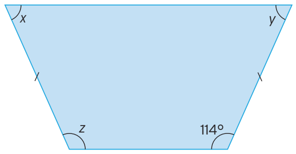
15. Determine x, y e z, em grau, nos trapézios a seguir.

a)



$x = 137°$; $y = 137°$; $z = 43°$

b)

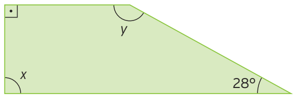


$x = 66°$; $y = 66°$; $z = 114°$

c)

$x = 46°$; $y = 134°$; $z = 46°$

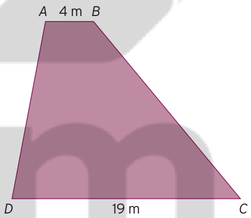
d)



$x = 90°$; $y = 152°$

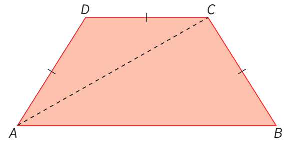
16. Desenhe um trapézio isósceles. Meça com o transferidor um par de ângulos opostos. Compare a medida que você encontrou com a medida encontrada por um colega. O que vocês perceberam? **Consulte a resposta neste manual.**

17. Um terreno cuja forma lembra um trapézio, como representado a seguir, tem o ângulo interno $\widehat{A}$ com medida igual ao dobro da medida do ângulo interno $\widehat{C}$. Calcule a medida do lado $\overline{AD}$. **15 m**



Dica: Copie a figura no caderno e, pelo vértice A, trace o segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$.

18. Desenhe um trapézio isósceles de modo que a base menor seja congruente aos lados oblíquos, como mostra a figura a seguir. **Consulte as respostas neste manual.**



a) O que se pode afirmar sobre o $\triangle ACD$?

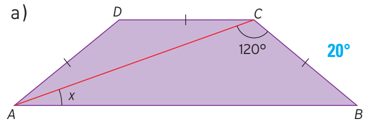
b) Por que os ângulos $D\widehat{A}C$ e $D\widehat{C}A$ são congruentes?

c) med($D\widehat{C}A$) = med($C\widehat{A}B$)? Justifique sua resposta.

d) Por que $\overline{AC}$ é bissetriz de $D\widehat{A}B$?

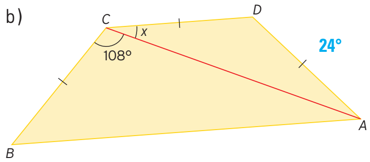
19. Nos trapézios a seguir, a base menor é congruente aos lados oblíquos. Calcule as medidas, em grau, indicadas por x.

a)



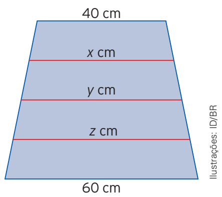
20°

b)



24°

20. A figura a seguir representa uma estrutura de madeira e tem o formato de um trapézio isósceles cujas bases medem 60 cm e 40 cm. Um marceneiro deseja construir três degraus igualmente espaçados entre essas bases para formar uma escada. Quanto medirá o comprimento total $x + y + z$ desses degraus? **150 cm**



DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

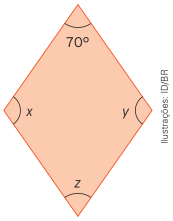
1. Um quadrilátero tem os ângulos internos medindo $(x - 50°)$, x, x e $\left(\frac{x}{2} - 10°\right)$. Calcule a medida, em grau, de cada ângulo desse quadrilátero. **70°, 120°, 120° e 50°.**

2. Sabendo que a e b são os ângulos da base de um paralelogramo e que a é o triplo de b, responda:

a) Qual é a medida do ângulo b? **45°**

b) Qual é a diferença entre a e b? **90°**

3. Catarina quer construir uma pipa em formato de losango. Porém, o esboço recebido só indica um ângulo. Quais são as medidas dos ângulos x, y e z? **$x = 110°$; $y = 110°$; $z = 70°$**

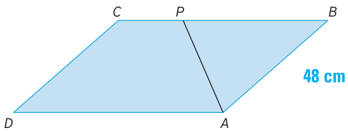


Ilustrações: ID/BR

4. Desenhe um retângulo $ABCD$ que não seja quadrado. Trace as diagonais e nomeie como P o ponto em que elas se intersectam. O que se pode afirmar sobre os triângulos PAB, PBC, PCD e PDA? **Consulte a resposta neste manual.**

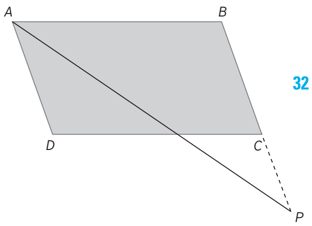
5. Em cada item a seguir, $\overrightarrow{AP}$ é bissetriz de $B\hat{A}D$, $AB = 10$ cm e $PC = 4$ cm. Determine a medida do perímetro do paralelogramo $ABCD$.

a)



48 cm

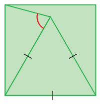
b)



32 cm

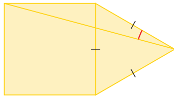
6. As figuras a seguir mostram quadrados e triângulos equiláteros. Calcule as medidas dos ângulos indicados em vermelho.

a)



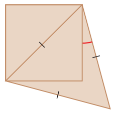
75°

b)



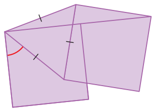
15°

c)



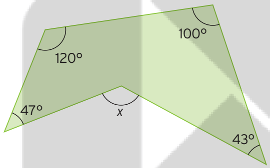
15°

d)



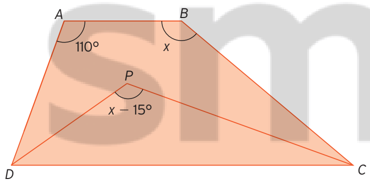
45°

7. Uma bandeira tem o formato mostrado a seguir.



Calcule o valor de x em grau. **130°**

8. $ABCD$ é um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$. Se $\overline{DP}$ e $\overline{CP}$ são bissetrizes dos respectivos ângulos, determine o valor de x em grau. **140°**

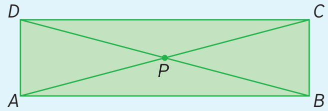


ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta página, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.

RESPOSTA

4. Possível desenho:



Como as diagonais de um retângulo se intersectam em seus pontos médios e são congruentes, P é ponto médio das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Logo:

$$DP = PB = AP = PC$$

Como os lados opostos de um retângulo são congruentes, $AD = BC$ e $CD = AB$.

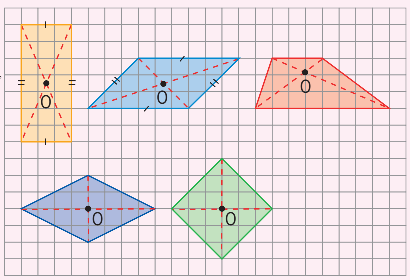
Portanto, os triângulos PBC e PDA e os triângulos PCD e PAB são congruentes pelo caso LLL.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Se os estudantes ainda encontrarem dificuldade em observar as propriedades dos quadriláteros em relação a suas diagonais, proponha a atividade a seguir.

Observe os quadriláteros e suas diagonais e, depois, preencha o quadro a seguir.

Ilustrações: ID/BR



Diagonal \ Quadrilátero	Paralelogramo	Retângulo	Losango	Quadrado	Trapézio
Cortam-se ao meio.	X	X	X	X	
Têm a mesma medida.		X		X	
São perpendiculares.			X	X	
Formam triângulos congruentes dois a dois.	X	X	X	X	
Formam quatro triângulos congruentes.			X	X	

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Essa seção aborda o Código de Defesa do Consumidor (CDC). Faça a leitura do texto com os estudantes e verifique se eles têm alguma dúvida. É muito importante que todo cidadão conheça seus direitos na sociedade, para que possa saber quando deve cobrá-los. Você e os estudantes devem saber seus direitos e deveres e como respeitá-los.
- Se julgar oportuno, pergunte aos estudantes se eles, ou algum conhecido, já passaram por uma situação em que não gostaram do produto que compraram e quiseram devolvê-lo. Em caso positivo, peça que relatem se foi possível realizar a devolução e como foi esse processo.
- A ideia de um passo a passo (algoritmo) para que um cliente busque seus direitos de consumidor favorece o desenvolvimento, do ponto de vista matemático e computacional, da análise crítica, criativa e propositiva de temas afeitos aos princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano, na medida em que compreendem os procedimentos necessários caso um cliente não fique satisfeito com um produto ou um serviço. Isso reforça a ideia de que as relações entre clientes e fornecedores são fundamentadas em direitos e deveres que precisam ser respeitados.

DE OLHO NA BASE

Refletir sobre esse tema possibilita aos estudantes argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias e pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam o consumo responsável, desenvolvendo a **competência geral 7**.

Justiça

O assunto tratado nessa seção possibilita aos estudantes a aproximação com o valor justiça, ao refletir sobre as questões relativas ao Direito do Consumidor, e a compreensão dos direitos e deveres diante de algumas situações vivenciadas na sociedade. Incentive-os a socializar outras possíveis situações a que as pessoas têm direito e como podem exigi-los. Essa conversa desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação em Direitos Humanos, que pertence à macroárea **Cidadania e Civismo**.

AMPLIANDO HORIZONTES

CONHEÇA SEUS DIREITOS

Quem poderá nos defender?

Você já comprou equipamento eletrônico que, depois de apenas dois meses, parou de funcionar? Você já ouviu alguém reclamar de uma instituição financeira que enviou um cartão de crédito sem ter sido pedido? Já teve de esperar muito tempo para ter seu quarto reformado porque a pessoa contratada para fazer o serviço levou parte do dinheiro e não terminou a obra? Essas e outras situações geram muitos problemas e prejuízos aos consumidores. Mas como resolver esses problemas? Quem poderá nos defender?

É importante conhecer seus direitos como consumidor, em especial os garantidos por uma lei de 1990, chamada de Código de Defesa do Consumidor (CDC).

CÓDIGO DE DEFESA DO CONSUMIDOR

Lei n. 8078, de 11 de setembro de 1990.

Desde que entrou em vigor, o Código de Defesa do Consumidor (CDC) ajuda a população a se defender de injustiças. Utilizado exclusivamente em situações de consumo, ele traça as normas que regulam as relações entre **consumidores** e **fornecedores** de **produtos** e **serviços**, definindo responsabilidades, padrões de conduta, prazos, mecanismos para reparação de danos, etc.

Veja o significado de cada um desses termos.

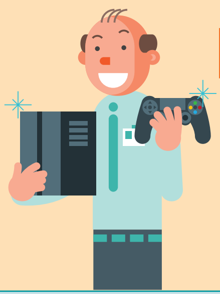
- **Consumidor** é toda pessoa física ou jurídica que adquire ou utiliza um produto ou serviço como destinatário final.
- **Fornecedor** é toda pessoa física ou jurídica que produz, comercializa, importa ou distribui um produto ou que presta um serviço.
- **Produto** é qualquer bem móvel ou imóvel, material ou imaterial.
- **Serviço** é qualquer atividade oferecida no mercado de consumo pela qual você tem de pagar.

Fonte de pesquisa: Procon-SP. *Código de proteção e defesa do consumidor*. Disponível em: https://www.procon.sp.gov.br/wp-content/uploads/files/CDCcompleto.pdf. Acesso em: 9 mar. 2022.

O QUE O CONSUMIDOR DEVE FAZER SE NÃO FICAR SATISFEITO COM UM PRODUTO OU SERVIÇO:

Exemplos:
Mau funcionamento de produto, especificações não atendidas, baixa qualidade, prazos de entrega não atendidos, etc.

1 Tente resolver a questão com o fornecedor ou o vendedor. Se o problema for resolvido e você ficar satisfeito com a solução, maravilha!



2 Se não chegar a um acordo que resolva o problema logo de cara, registre, na ouvidoria da loja ou do fornecedor, que o problema não foi resolvido.

OUTRAS FONTES

Código de Proteção e Defesa do Consumidor. Disponível em: https://www.procon.sp.gov.br/wp-content/uploads/files/CDCcompleto.pdf. Acesso em: 14 jun. 2022.

O Código de Proteção e Defesa do Consumidor deve ser consultado sempre que necessário, visto que descreve os direitos e os deveres dos consumidores.

O CDC apresenta uma série de práticas consideradas abusivas. Na lista a seguir, destacamos quatro delas:

1. **Venda casada:** O vendedor leva você a comprar um produto para adquirir outro, violando seu direito de livre escolha.
2. **Envio de produtos e serviços sem solicitação prévia:** A iniciativa tem sempre de partir do consumidor.
3. **Cobrança indevida:** O vendedor/fornecedor cobra por algo que não entregou ou por um serviço que não foi prestado.
4. **Produtos e serviços sem especificação legal:** Produtos só podem ser vendidos depois de serem analisados pelos órgãos responsáveis. Celulares, alimentos e equipamentos esportivos, por exemplo, quando fora das especificações causam riscos à saúde e à segurança dos consumidores.

Mas... lembre-se de que, assim como você tem direitos, você tem deveres. É sempre importante ler a embalagem e se informar antes de comprar um produto. Se ocorrer algum problema, não demore a tomar providências. Quando não resolvidos logo, pequenos problemas podem se transformar em grandes prejuízos e aborrecimentos. Cumprir sua parte do acordo é sempre importante. A justiça tem de valer tanto para quem vende como para quem compra.

Para refletir

Responda sempre no caderno.

Consulte as respostas neste manual.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir.

1. Você conhece alguém que já precisou recorrer ao Procon? Se sim, conte aos colegas como foi a situação e como o problema foi resolvido.
2. Mariana compra sempre o mesmo xampu. Nos últimos meses, porém, ela só encontra esse produto em uma única farmácia e em um combo que traz, além do xampu, um condicionador e um sabonete. Mariana percebeu que comprar os produtos no combo é mais barato que comprá-los separadamente. O combo, porém, é 50% mais caro que o preço do xampu. Como você avalia a prática dessa farmácia?

CUIDADOS AO CONTRATAR PROFISSIONAIS


Mario Kanno/ID/BR

1. Deixe registrado um orçamento ou contrato do que vai ser feito, e isso inclui não somente os valores a serem pagos, mas também os prazos, a forma de pagamento e os dados de quem executa o serviço.
2. A indicação de uma pessoa de confiança costuma ser uma atitude muito prudente, mas, mesmo assim, não deixe de tomar as devidas precauções.
3. Se ainda assim não resolver, registrar uma queixa no Procon é um caminho que pode ajudar a, enfim, ter as coisas em seu devido lugar.
4. Finalmente, o Procon pode orientar o consumidor a encaminhar o caso à Justiça, em que os advogados entram em ação para tentar reparar o prejuízo causado.

O QUE É O PROCON?
É um órgão do Poder Executivo municipal ou estadual ou do Distrito Federal destinado à proteção e à defesa dos direitos e interesses dos consumidores. É ele que mantém contato mais direto com os cidadãos e suas solicitações. Cumpre-lhe basicamente as funções de acompanhamento e fiscalização das relações de consumo ocorridas entre fornecedores e consumidores.

RESPOSTAS

DE OLHO NA BASE

Ao se reunir em duplas e discutir as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, desenvolvendo também a **competência geral 9**.

1. Resposta pessoal. Depois de os estudantes comentarem a situação, pergunte a eles se resolveriam o problema de outra forma.
2. Resposta pessoal. Os estudantes devem perceber que esse combo é vantajoso para o consumidor que compra os três itens, mas para aquele que, como Mariana, compra apenas o xampu, é uma prática abusiva, pois ela gasta 50% a mais do que gastaria comprando apenas o produto de que gostaria. Pergunte aos estudantes: Nessa situação, será que temos um caso de venda casada, visto que a farmácia não dá a opção de comprar o produto separadamente? Ou seria uma promoção que permite comprar três produtos com um bom desconto? Discuta essa questão com os estudantes levantando aspectos como liberdade de escolha, orçamento apertado, violação do CDC, entre outros.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, os estudantes vão fazer uma pesquisa de campo, ou seja, vão escolher um tema e entrevistar as pessoas.
- Para realizar essa pesquisa, os estudantes deverão focar na seleção de amostras de determinada população e elaborar um questionário que será respondido na entrevista a ser realizada. Depois, eles vão produzir um relatório de pesquisa que deverá ser apresentado, em um dia agendado, aos entrevistados da pesquisa. Essas atividades permitem aos estudantes desenvolver habilidades relacionadas às práticas de pesquisa, bem como utilizar os conhecimentos matemáticos sobre seleção de amostras de modo a não produzir *fake news* na produção do relatório.

PARA COMEÇAR

- Leia com os estudantes o parágrafo que inicia a seção para que fique claro o objetivo da atividade. Deixe-os citar possíveis exemplos de como realizar uma pesquisa que represente uma grande quantidade de pessoas e, depois, faça algumas perguntas: Tendo em vista a população desta escola, é possível entrevistar todas as pessoas? E as do nosso bairro? E as do nosso município? Quanto maior a amostra, os resultados da pesquisa serão mais confiáveis? Ao questionar os estudantes, é possível a turma rever os pontos de vista abordados anteriormente e reorganizar os próprios conhecimentos sobre esse tipo de pesquisa. Se julgar necessário, retome os significados das palavras "população" e "amostra".

PROCEDIMENTOS

- Na *Parte I*, organize a turma em seis grupos. Os temas propostos no item **2** visam a diferentes populações.

DE OLHO NA BASE

Ao se reunir com os colegas, os estudantes estão contribuindo para a troca de ideias, o levantamento de hipóteses, a pluralidade de ideias, a criatividade e a divisão de tarefas. Verifique se, no momento do planejamento da pesquisa, as ideias estão sendo respeitadas e se eles conseguem exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, desenvolvendo a **competência geral 9**.

- Promova, de maneira recorrente, rodas de conversa que possibilitem aos estudantes sentir que o ambiente escolar é um espaço livre de quaisquer atos violentos (verbais e não verbais), no qual o respeito a diferentes opiniões e posicionamentos sejam constantemente desenvolvidos. Aproveite esses momentos para buscar soluções coletivas e democráticas de maneira que seja possível identificar, prevenir e reverter situações de conflito no ambiente escolar. Desse modo, os estudantes podem ter sentimentos de pertencimento à escola e reconhecê-la como um espaço saudável de convivência.

INVESTIGAR

Escolhendo a melhor amostra

Para começar

Como saber a opinião de uma grande quantidade de pessoas sobre um assunto?

Nesta atividade, você e os colegas vão realizar uma pesquisa de campo. Mas, antes, é necessário definir os entrevistados. Ao final da entrevista, vocês vão apresentar o relatório dos resultados obtidos em uma mostra voltada a todos os envolvidos na pesquisa.

O PROBLEMA

- O que é uma amostra e como escolher uma amostra representativa?

A INVESTIGAÇÃO

- **Prática de pesquisa:** pesquisa de campo.
- **Instrumentos de coleta:** questionário e entrevista.

Procedimentos

Parte I – Planejamento

1. A turma vai ser organizada em seis grupos.
2. Cada grupo vai realizar uma pesquisa sobre um tema diferente. Os temas podem ser os seguintes:
   - Atividade preferida dos estudantes da turma em momentos de lazer
   - Estilo musical favorito dos professores da escola
   - O(a) melhor cantor(a) da atualidade
   - O melhor restaurante do bairro, segundo os pais e/ou responsáveis dos estudantes da turma
   - O esporte predileto dos estudantes do 8º ano
   - A comida preferida dos funcionários da escola

Parte II – Coleta de dados

1. Produzam um questionário de acordo com o tema pelo qual o grupo ficou responsável. As perguntas devem ser claras e objetivas.
2. Além das perguntas, devem ser apresentadas alternativas de resposta. É importante inserir a alternativa "Outro(a)" para o caso de a resposta do entrevistado não estar entre as previstas. Nesse caso, a resposta deve ser anotada separadamente.
3. Escolham as pessoas que vocês vão entrevistar. Para isso, considerem as informações a seguir.
   - Nesse tipo de pesquisa, consideramos que a população é todo o grupo ao qual a pesquisa é aplicada. Geralmente, não é possível entrevistar toda a população. Nesse caso, é necessário selecionar uma amostra.
   - A amostra da população sempre deve ser representativa. Ou seja, a escolha das pessoas que vão ser entrevistadas deve ser feita de modo que todos tenham as mesmas chances de participar. Se isso não ocorrer, a amostra vai ser tendenciosa e invalidará a pesquisa. Quanto maior o número de entrevistados, melhor!

128

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO

- Após as etapas de procedimentos, organize a turma em uma roda de conversa para compartilhar as experiências vividas durante a realização da pesquisa.
- Antes de os estudantes responderem às questões do item **1**, retome com eles o conceito de população e amostra. Verifique se eles compreendem que, na proposta dessa seção, as populações são: estudantes da turma, professores da escola, estudantes da escola, pais e/ou responsáveis dos estudantes da turma e funcionários da escola.
- Para a questão proposta no item **2**, chame a atenção dos estudantes para o fato de que uma amostra representativa deve ser selecionada, pesquisando-se o maior número possível de indivíduos da população visada e possibilitando que todos tenham igual probabilidade de participar.

COMUNICAÇÃO DOS RESULTADOS

- Combine um dia para que os entrevistados se reúnam na escola. Prepare com eles o espaço onde acontecerá a exposição. Os relatórios de pesquisa podem ficar sobre mesas em um local de destaque, para que todos possam manuseá-los e lê-los. No momento oportuno, os grupos podem fazer a exposição oral. Durante a apresentação, se possível, os estudantes podem exibir os gráficos que elaboraram. Após a apresentação de cada grupo, pode-se abrir um momento para que os participantes do evento façam perguntas sobre a pesquisa.
- Auxilie os grupos na preparação da exposição oral. Provavelmente, não é possível que todos

4. Com base nessas orientações, respondam às perguntas a seguir.
   Quantas pessoas compõem a população de sua pesquisa? É possível entrevistar todas? Se não for possível, informe a quantidade de pessoas entrevistadas e o perfil delas. Todas as pessoas da população têm as mesmas chances de serem escolhidas para participar da pesquisa?
5. Subdividam o grupo em duplas para realizar as entrevistas.
6. Abordem educadamente o entrevistado, expliquem o objetivo da pesquisa e apliquem o questionário, anotando cuidadosamente cada resposta.

Parte III – Organização de dados

1. Reúnam todos os resultados obtidos pelo grupo e os organizem em uma tabela. Lembrem-se de anotar também as respostas da alternativa "Outro(a)".
2. Calculem as porcentagens de cada resposta.
3. Com base nos dados da tabela, elaborem um gráfico, em uma planilha eletrônica, com os resultados obtidos.

Parte IV – Produção do relatório

1. O relatório deve ser produzido coletivamente. Nele:
   - apresentem a pergunta feita durante a pesquisa e reproduzam o questionário que utilizaram;
   - expliquem os critérios que o grupo usou para selecionar a amostra, quando for o caso;
   - contem como o grupo se organizou para realizar as entrevistas e relatem como foi a experiência;
   - apresentem o perfil dos entrevistados;
   - reproduzam a tabela e o gráfico e analisem os resultados obtidos (o maior número de respostas, o menor número de respostas, alguma unanimidade, etc.);
   - concluam explicando em que os resultados encontrados ajudam a entender a população pesquisada e avaliem a experiência da pesquisa de campo.


Gil Tokio/ID/BR

Questões para discussão

Consulte as respostas neste manual.

1. O que é a população em uma pesquisa? E uma amostra? Por que, muitas vezes, a amostra é necessária?
2. Como essa pesquisa poderia ter sido realizada sem a etapa das entrevistas?
3. Qual é a vantagem de utilizar gráficos para apresentar os resultados de pesquisa?

Comunicação dos resultados

Mostra dos relatórios de pesquisa

Convidem as pessoas que participaram da pesquisa para a exposição dos resultados em um dia agendado pelo professor. Além de uma breve exposição oral sobre o processo da pesquisa e os respectivos resultados, os relatórios devem ficar disponíveis para leitura no dia da mostra.

129

os integrantes falem, mas os que não tiverem a oportunidade de participar podem auxiliar de outras maneiras, como na elaboração do roteiro e na exibição dos gráficos. Antes do dia da apresentação, reserve um tempo para que os estudantes possam fazer ensaios.

RESPOSTAS

1. População é o grupo que está sendo pesquisado. Amostra é um subconjunto da população e é necessária quando o conjunto da população é grande e, por isso, é inviável pesquisar todas as pessoas que o representam.
2. As fichas poderiam ser entregues às pessoas para que elas mesmas as preenchessem.
3. Os gráficos organizam os dados por meio de elementos textuais e não textuais, o que contribui para a compreensão das informações.

Promover a cultura de paz possibilita aos estudantes exercitar a empatia e elaborar estratégias de resolução de conflitos não violenta na convivência escolar.

"A atitude não violenta tem como referência a filosofia indiana e está baseada em dois pilares: não causar sofrimento a si ou a outro de nenhuma forma e não se omitir frente a uma circunstância que cause sofrimento."

Fonte: *Convivência escolar e cultura de paz*. Brasília: SEEDF/Subeb, 2020. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 14 jun. 2022.

- Na *Parte II*, a intenção é incentivar a reflexão dos estudantes sobre o recorte que vão fazer ao selecionar a amostra, ou seja, os entrevistados. São propostos alguns temas, mas a turma tem a liberdade de escolher outros que julgar mais interessantes.

  Os estudantes devem produzir o questionário. Ressalte a eles que, após escolherem o problema da pesquisa, eles devem produzir as perguntas de acordo com o que instiga o grupo. Esteja atento a possibilidades de pergunta e resposta que podem prejudicar o levantamento da informação; por isso, faça mediações no momento da elaboração do questionário.

  Ressalte aos estudantes que, para representar a opinião geral de uma população, é preciso que a amostra tenha pessoas de diferentes idades, sexo, classe social, etc. Incentive-os a refletir sobre como deve ser a escolha dos entrevistados.
- Na *Parte III*, se julgar necessário, ajude os estudantes a calcular a porcentagem dos valores que encontraram e, em seguida, peça que elaborem uma tabela com base nos dados coletados na entrevista realizada. Se a escola tiver uma sala de informática, solicite a eles que criem a tabela e construam um gráfico com o auxílio de uma planilha eletrônica.

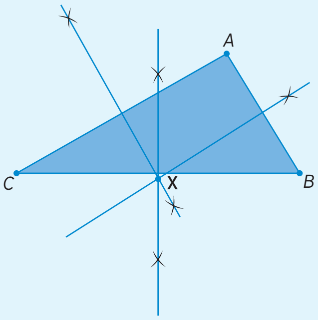
  O trabalho de organização e análise dos dados para a posterior comunicação dos resultados proporciona o desenvolvimento, do ponto de vista matemático e computacional, da análise crítica, criativa e propositiva da produção, circulação e recepção de textos de divulgação científica e de mídias sociais.
- Na *Parte IV*, solicite aos estudantes que produzam o gênero textual relatório de pesquisa de acordo com todas as etapas realizadas anteriormente. Nele, devem ser apresentados o resultado da pesquisa com representações gráficas, como tabela, gráfico, esquema, etc., o objetivo da pesquisa, como foi realizada, quais dados foram coletados, a análise e os resultados obtidos.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nestas páginas, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Na atividade **10**, verifique se os estudantes levantam a hipótese de construir a mediatriz referente a cada segmento. Informe-os de que não é necessário construir as três mediatrizes, pois o encontro de duas delas é suficiente para determinar o ponto **X** procurado.
- Na atividade **11**, se julgar conveniente, relembre os estudantes de que as diagonais do retângulo se cruzam no ponto médio e, por isso, eles podem utilizar o caso LLL para afirmar a congruência de cada par de triângulos.
- Na atividade **13**, verifique se os estudantes atentaram para o fato de que, de acordo com os dados do enunciado, os triângulos *CDE*, *ABC* e *BCD* são isósceles.

RESPOSTA

10.



ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Copie as afirmações a seguir no caderno e complete-as de modo que sejam verdadeiras.

a) Em um triângulo, a medida de comprimento do menor lado é 3 cm e a do maior lado é 5 cm. O maior e o menor valor inteiro que a medida do comprimento do terceiro lado do triângulo pode ter, respectivamente, são ■ e ■.

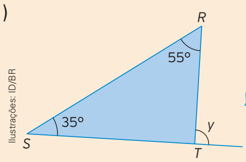
1. a) 7 cm e 3 cm.

b) No triângulo *RST*, temos: med($\hat{R}$) = $3x - 16°$, med($\hat{T}$) = $2x + 18°$ e med($\hat{S}$) = $x - 2°$. A medida do maior ângulo desse triângulo é ■. **78°**

c) As medidas dos ângulos externos de um triângulo são x, $x + 30°$ e $x - 30°$. As medidas dos ângulos internos desse triângulo são, respectivamente, em grau, ■, ■ e ■. **60°, 30° e 90°.**

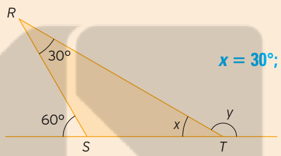
2. Determine a medida dos ângulos x e y em cada caso.

a)



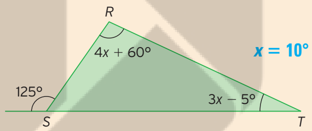
y = 90°

b)



x = 30°; y = 150°

c)



x = 10°

3. A medida do perímetro de um triângulo *CDE* é 30 cm. Sabendo que $\overline{CM}$ é uma das medianas desse triângulo e que a medida do comprimento do lado $\overline{CD}$ é 9 cm e do lado $\overline{DE}$ é 11 cm, determine as medidas de $\overline{CE}$, $\overline{DM}$ e $\overline{EM}$.
***CE* = 10 cm; *DM* = 5,5 cm; *EM* = 5,5 cm**

4. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas e justifique.

a) A medida do perímetro de um triângulo isósceles de 9 cm de base é 30 cm. Logo, a medida dos outros dois lados é 10,5 cm. **Verdadeira.**

b) Dois triângulos equiláteros são sempre congruentes.

5. Escreva a alternativa correta no caderno.

> Um professor propôs o seguinte desafio aos estudantes:
> — Construam um triângulo escaleno cujas medidas de comprimento de dois lados sejam 3 cm e 10 cm e a medida de comprimento do terceiro lado seja um número inteiro.
> De imediato, Pedro questionou o professor:
> — Mas, professor, qual deles?
> — Existem vários, disse o professor.

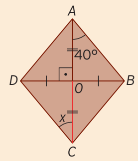
Diante do desafio proposto, podemos afirmar que o número de triângulos não congruentes que podem ser construídos é:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

Alternativa a.

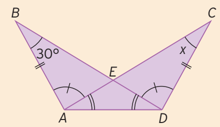
6. Em cada item, determine pelo menos um par de triângulos congruentes e o caso de congruência. Depois, determine x em grau.

a)



Os triângulos *ABO*, *CBO*, *CDO* e *ADO* são congruentes entre si pelo caso LAL. Os triângulos *BDA* e *BDC* e os triângulos *BAC* e *DAC* são congruentes pelo caso ALA; *x* = 40°.

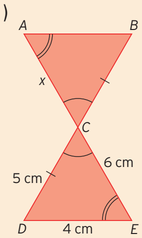
b)



Os triângulos *ABD* e *DCA* e os triângulos *ABE* e *DCE* são congruentes pelos casos LAL e ALA, respectivamente; *x* = 30°.

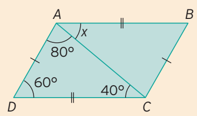
7. Em cada item, os pares de triângulos são congruentes. Determine o caso de congruência e o valor de x.

a)



LAA$_o$; *x* = 6 cm

b)



LLL; *x* = 40°

4. b) Falsa. Justificativa possível: Apesar de todos os ângulos terem a mesma medida (60°) nos dois triângulos, a medida dos lados de um triângulo equilátero pode ser diferente da medida dos lados do outro triângulo equilátero.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

As atividades destas páginas podem ser utilizadas como um recurso para avaliar a compreensão dos estudantes em relação aos conteúdos desenvolvidos na unidade. Se perceber que eles apresentam dificuldade, retome a teoria com eles, esclarecendo possíveis dúvidas.

Além disso, para o desenvolvimento dos conteúdos relacionados à unidade temática Geometria, sempre que possível faça uso de materiais concretos, de modo que os estudantes possam visualizar as propriedades. Atividades que utilizam esse recurso facilitam a compreensão do conteúdo e permitem que os estudantes identifiquem com mais precisão onde estão com dificuldade.

Responda sempre no caderno.

8. d) Falsa. Nos triângulos obtusângulos, o circuncentro é externo ao triângulo e, nos triângulos retângulos, ele é o ponto médio da hipotenusa.

8. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas e justifique no caderno.

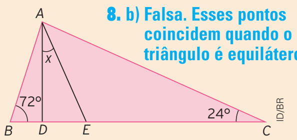
a) O ortocentro de um triângulo retângulo é o vértice do ângulo reto.

b) Em todo triângulo acutângulo, o incentro, o ortocentro e o baricentro coincidem.

c) Em todo triângulo isósceles, o incentro e o ortocentro coincidem.

d) Em qualquer triângulo, o circuncentro pertence ao seu interior.

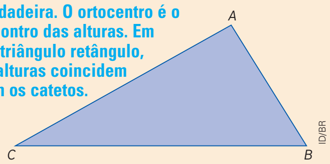
9. Calcule x em grau no triângulo ADE, sabendo que $\overline{AD}$ é a altura do triângulo ABC e que $\overline{AE}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$. **24°**



8. b) Falsa. Esses pontos coincidem quando o triângulo é equilátero.

10. Os pontos A, B e C representam os centros de três cidades. Deseja-se construir um parque de diversões à mesma distância dessas cidades.

8. a) Verdadeira. O ortocentro é o encontro das alturas. Em um triângulo retângulo, as alturas coincidem com os catetos.



Reproduza essa figura no caderno e, usando régua e compasso, determine o ponto em que deverá ser construído o parque. Marque a localização com um **X**. **Consulte a resposta neste manual.**

11. Lígia está tirando uma dúvida com Paula:

> — Paula, quando traçamos as diagonais de um retângulo, não ficam determinados quatro triângulos congruentes?
>
> — Ficam! Há quatro triângulos congruentes quando traçamos as diagonais de um retângulo.

O que você acha? Paula está certa ou não? Converse com um colega. O que vocês concluíram?

12. Escreva a alternativa correta no caderno.

(UFSC) Considere as afirmações:

I. Se num triângulo a altura relativa a um lado coincide com a bissetriz do ângulo oposto a ele, o triângulo é necessariamente isósceles.

II. Num triângulo isósceles qualquer, as três medianas são necessariamente congruentes.

III. Se um triângulo tem duas alturas congruentes, então ele é necessariamente equilátero.

Pode-se afirmar que: **Alternativa c.**

a) I e II são corretas, III é falsa.

b) Todas são falsas.

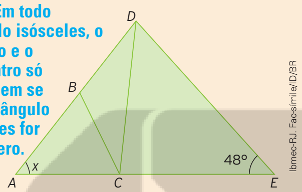
c) I é correta, II e III são falsas.

d) I e III são corretas, II é falsa.

e) II é correta, I e III são falsas.

13. Escreva a alternativa correta no caderno.
(Ibmec-RJ) No triângulo ADE da figura, em que B e C são pontos dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$, respectivamente, $AB = AC$; $BC = BD$ e $CD = CE$.

8. c) Falsa. Em todo triângulo isósceles, o incentro e o ortocentro só coincidem se esse triângulo isósceles for equilátero.



Então: **Alternativa c.**

a) $x = 48°$.

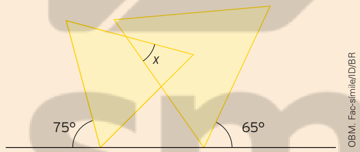
b) $x = 50°$.

c) $x = 52°$.

d) $x = 54°$.

e) $x = 56°$.

14. Escreva a alternativa correta no caderno.
(OBM) Na figura, os dois triângulos são equiláteros.



Qual é o valor do ângulo x? **Alternativa b.**

a) 30°

b) 40°

c) 50°

d) 60°

e) 70°

11. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes percebam que, quando traçamos as diagonais de um retângulo, os triângulos são congruentes dois a dois, mas os quatro triângulos só serão congruentes se o retângulo for um quadrado.

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Compreendi os significados dos termos baricentro, mediana, incentro, bissetriz, ortocentro, altura, circuncentro e mediatriz?
- Sei distinguir os casos de congruência do triângulo?
- Sei que a soma dos ângulos internos do triângulo é igual a 180° e que a dos quadriláteros é 360°?
- Compreendi as diferentes características dos paralelogramos?
- Entendi as diferenças entre os trapézios isósceles, retângulo e escaleno?
- Procurei conversar com os colegas ou o professor para esclarecer minhas dúvidas?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

NESTA UNIDADE...

Competências gerais

3, 7, 8 e 9.

Competências específicas de Matemática

2 e 7.

Temas Contemporâneos Transversais
Meio Ambiente, Cidadania e Civismo e Multiculturalismo.

Habilidades

(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.

(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.

(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

UNIDADE 5

SEQUÊNCIAS E PROPORCIONALIDADE

SOBRE A UNIDADE

O estudo das sequências é fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois observar e compreender padrões e regularidades contribui para o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático e possibilita aos estudantes desenvolver o pensamento abstrato a partir de generalizações, tornando a linguagem matemática mais significativa.

A capacidade de raciocínio proporcional é importante não só para a resolução de problemas de Matemática, mas também para a aprendizagem de conceitos de outras áreas de estudo e da resolução de problemas do cotidiano.

Nesta unidade, o estudo das sequências será feito a partir da análise de padrões, sejam figurais ou numéricos, e da determinação dos termos gerais, pelo uso de expressões algébricas. Já no estudo da proporcionalidade, serão abordadas definições de razão e de proporção com base em situações do cotidiano, além da exploração do cálculo mental em situações envolvendo proporcionalidade para a construção do conhecimento sobre esse tema. Ao longo dos dois capítulos, serão desenvolvidas atividades para ajudar os estudantes a compreender os conceitos de sequências e proporcionalidade.

RESPOSTAS

1. Respostas pessoais. Peça aos estudantes que comentem o que acharam dos objetos, se tiveram contato com o povo que o produziu, etc.
2. Sim, eles têm padrões geométricos. Comente com os estudantes, por exemplo, que, no cesto que se encontra ao centro, na parte de cima da imagem o padrão é formar losangos. Aproveite o momento para verificar o que os estudantes entendem por padrão.

CAPÍTULO 1
Sequências

CAPÍTULO 2
Proporcionalidade

Fabio Colombini/Acervo do fotógrafo

Cestaria de cipó-imbé e fibras de taquara feita pelos indígenas Guarani Mbya. Aldeia guarani Tenondé Porã em Parelheiros, São Paulo (SP).

PRIMEIRAS IDEIAS

No Brasil, vários povos indígenas têm o costume de produzir cestos trançando fibras vegetais, que são utilizados para transportar e armazenar mantimentos e utensílios, entre outras coisas. Além dos cestos, com o trançado de fibras são produzidos apetrechos como pulseiras, cintos e colares. Cada povo indígena produz os trançados de acordo com suas particularidades, levando em consideração o tipo de objeto que se deseja fazer e a melhor fibra a ser usada para essa finalidade; por isso, é comum ver diferentes formatos e estampas de cestos. Um tipo de estampa muito comum desses trançados é o de desenhos geométricos.

1. Você já viu algum objeto produzido por um povo indígena? Se sim, o que era e onde você o encontrou?
2. Há algum padrão visual nos cestos da imagem? Em caso afirmativo, qual?

133

DE OLHO NA BASE

O tema abordado nessa abertura valoriza as manifestações artísticas e culturais locais, como o artesanato indígena do país, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 3**.

A abertura também auxilia no desenvolvimento da **competência geral 9**, de modo que os estudantes acolham e valorizem a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

PRIMEIRAS IDEIAS

- Converse com os estudantes sobre a imagem apresentada na abertura da unidade. Incentive-os a socializar se já viram ou conhecem alguns materiais confeccionados por algum povo indígena, como os reproduzidos na imagem da abertura. Peça a eles que observem os detalhes e descrevam os padrões geométricos retratados nessas cestarias. Se julgar necessário, apresente a eles as diversas funcionalidades da cestaria por meio do vídeo do canal Tukanape, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=7KZU4GpiAF8 (acesso em: 15 jul. 2022). Esse trabalho promove positivamente a cultura dos povos indígenas.
- Realize um trabalho interdisciplinar com o componente curricular Geografia, de maneira a discutir em que regiões do Brasil há aldeias indígenas, se elas sempre estiveram nessas regiões, como se desenvolveram e como estão atualmente em meio a tentativas de exploração ilegal dessas áreas. Para ampliar essa discussão, acessem o *site* do ISA, que mostra terras indígenas distribuídas pelo território brasileiro, e pesquisem a região escolhida pelos grupos. Terras Indígenas no Brasil. Disponível em: https://terrasindigenas.org.br/. Acesso em: 25 mar. 2022.
- Também pode ser realizado um trabalho interdisciplinar com Arte para que a turma aprenda a técnica da cestaria indígena por meio de materiais como jornal e tinta para colorir. Essa reflexão desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras, que pertence à macroárea **Multiculturalismo**.

- Promova, de maneira recorrente, rodas de conversa que possibilitem aos estudantes sentir que o ambiente escolar é um espaço livre de quaisquer atos violentos (verbais ou não verbais), em que o respeito a diferentes opiniões e posicionamentos seja constantemente desenvolvido. Aproveite esses momentos para buscar soluções coletivas e democráticas, de maneira que seja possível identificar, prevenir e reverter situações de conflito no ambiente escolar. Desse modo, os estudantes podem ter sentimentos de pertencimento à escola e reconhecê-la como um espaço saudável de convivência.
- Nos dias atuais, é de suma importância conscientizar os estudantes sobre o combate à violência contra negros, povos indígenas, imigrantes e refugiados e qualquer atitude racista presente em diversas áreas da sociedade. O ambiente escolar é um dos núcleos sociais onde se promovem ações que visam à informação e à prevenção de tais comportamentos, garantindo aos estudantes o direito e o respeito às suas singularidades de acordo com suas vivências geográficas e sociais, para que não sejam alvo de preconceito e/ou de atitudes discriminatórias e percebam a riqueza da pluralidade na sociedade em que estão inseridos. É importante garantir que todos os estudantes se sintam pertencentes à comunidade escolar, de modo que sejam igualmente acolhidos e possam estabelecer vínculos sociais e gerenciar emoções de maneira intra e interpessoal.

O racismo e seus desdobramentos, presentes na sociedade, habitam também o ambiente escolar, reproduzindo-se por ação ou omissão. Ciente disso, a escola deve não apenas adotar medidas de prevenção e combate ao preconceito e à discriminação racial, como precisa estar sempre atenta às manifestações diárias de cunho racista no sentido de intervir, mediar e, portanto, nunca ignorar. Importante considerar ainda que se trata de situações sobre as quais pode incidir responsabilidade penal ao serem tipificadas como crime de racismo ou injúria racial.

Fonte: *Convivência escolar e cultura de paz*. Brasília: SEEDF/Subeb, 2020. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 15 jul. 2022.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Sequências recursivas e não recursivas.
- Termos de uma sequência.

Objetivos

- Compreender o conceito de sequência figural e numérica.
- Observar e identificar padrões e regularidades em sequências.
- Descobrir o próximo termo e elementos ausentes em sequências.
- Determinar o termo geral de uma sequência.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de compreender a ideia de sequência, seja ela formada por números, seja por figuras, e conhecer a fórmula para determinar um termo geral de uma sequência, por meio de expressões algébricas. Esses estudos propiciam aos estudantes momentos de investigação de padrões e regularidades, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático e possibilita aos estudantes desenvolver o pensamento algébrico a partir de generalizações.

SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E SEQUÊNCIAS DE FIGURAS

- Aproveite a imagem de abertura deste capítulo e pergunte a eles se conhecem o piso paulista, calçamento que ficou famoso ao representar a cidade de São Paulo. Esses contornos foram idealizados pela desenhista Mirthes Bernardes (1934-2020), que venceu um concurso municipal, em 1965, para padronizar as calçadas da cidade. Incentive a turma a socializar outras manifestações culturais da sua própria cidade ou do estado que evidenciem a identidade de um povo como força de sua representação regional, geográfica e social. São exemplos: o calçadão de Copacabana, Rio de Janeiro; o de Sorocaba, interior de São Paulo; o de Registro, Vale do Ribeira; e as famosas calçadas de Açores, em Portugal. Se eles não se lembrarem de alguma calçada que tenha um padrão ou sequência, deixe-os citar livremente suas ideias, como obras de arte. Essa conversa desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Diversidade Cultural, que pertence à macroárea **Multiculturalismo**.
- Converse com os estudantes sobre padrões que eles encontram em sua residência, em seu caminho para a escola, em roupas ou em figuras. Se julgar pertinente, peça a eles que pesquisem obras de arte que apresentam padrões.

Capítulo 1

SEQUÊNCIAS

Para desenvolver os conteúdos deste capítulo, os estudantes devem ter compreendido os conceitos de expressões algébricas e de operações com números racionais.

Sequências numéricas e sequências de figuras

Uma sequência é uma lista ordenada de elementos, como números, objetos ou figuras. Cada elemento de uma sequência é chamado de **termo**. Em diversas situações, podemos identificar sequências: sequência dos números pares e dos números ímpares e sequência dos números dos anos em que ocorrem eleições para presidente no Brasil, por exemplo.

Observe a foto a seguir. Você consegue perceber algum padrão?

Os ladrilhos foram dispostos de modo a formar figuras que lembram o mapa do estado de São Paulo. Note que em cada linha podemos identificar uma sequência de ladrilhos.

↓ Parte de uma calçada no município de São Paulo (SP). Foto de 2021.

OUTRAS FONTES

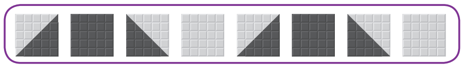
Abdounur, O. J. *Aspectos histórico-culturais de razões e proporções*. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2003 (Coleção História da Matemática para Professores).

O livro é dirigido para formação continuada e busca identificar características de propostas pedagógicas para os anos finais do Ensino Fundamental e integrar a História da Matemática na prática docente.

Coxford, A. F. E.; Shulte, A. P. *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1994.

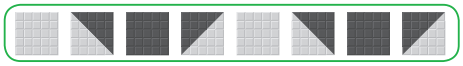
Essa importante obra auxilia no ensino de Álgebra. Um dos elementos discutidos no livro é a ideia e a percepção de padrões e regularidades.

Em uma parte da imagem, temos a seguinte sequência de ladrilhos:



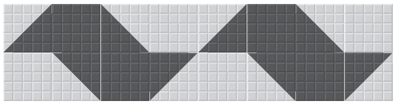
ID/BR

Em outra, temos a sequência:



ID/BR

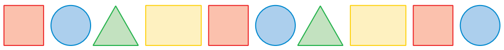
Ao compor as duas sequências, obtemos as representações do mapa do estado de São Paulo. Veja.



ID/BR

Agora, vamos analisar outros exemplos de sequências.

Exemplos

A.  ...

ID/BR

As reticências colocadas no final dessa sequência indicam que ela continua indefinidamente. Além disso, nessa sequência, o 1º termo é um quadrado vermelho, o 2º termo é um círculo azul, o 3º termo é um triângulo verde, o 4º termo é um retângulo amarelo, o 5º termo é um quadrado vermelho e assim por diante.

B. 15, 20, 25, 30, 35, ...

Nessa sequência, o 1º termo é 15, o 2º termo é 20, o 3º termo é 25, o 4º termo é 30 e assim por diante.

C. 

João Picoli/ID/BR

Essa sequência apresenta 9 termos. Observe que o 1º e o 2º termos são iguais: carrinho azul; o 3º e o 4º termos também são iguais: carrinho vermelho; e assim por diante, até chegar ao 9º termo: carrinho azul.

D. 12, 24, 48, 96, 192

Nessa sequência, o 1º termo é 12, o 3º termo é 48 e o 5º termo é 192.

Identificando regularidades

Algumas sequências apresentam regularidade ou padrão. Conhecer o padrão de uma sequência nos permite continuar essa sequência ou descobrir os elementos ausentes nela.

PARE E REFLITA

Você percebeu que, nas sequências dos ladrilhos apresentadas, foram utilizados apenas três tipos de ladrilho e que para compor as figuras eles apenas foram colocados em posições diferentes?

Resposta pessoal.

PARA EXPLORAR

Com um responsável, faça um passeio pela região em que você mora e observe sequências de figuras (no piso da calçada, em ladrilhos, etc.). Anote ou fotografe suas observações e, depois, compartilhe com os colegas e o professor.

- As relações entre sequências e expressões algébricas proporcionam aos estudantes situações de aprendizagem que desenvolvem noções de pensamento computacional (identificação de padrões), mobilizando diferentes processos cognitivos, na medida em que reconhecem as regras de formação das sequências e representam variáveis por meio de linguagem matemática. Além disso, para identificar os padrões das sequências, os estudantes levantam hipóteses e fazem conjecturas, o que permite desenvolver o raciocínio lógico-matemático.
- Explique aos estudantes que, em uma sequência, nem sempre as reticências significam que a sequência é infinita.

  Apresente um exemplo de sequência em que as reticências apareçam, mas que mostre que a sequência não é infinita; por exemplo: 3, 9, 27, 81, ..., 6 561. Esclareça que, como existe um primeiro e um último termo nessa sequência, ela não pode ser infinita.
- Converse com os estudantes sobre a diferença entre sequências figurais e sequências numéricas.

135

- Na situação **1**, observa-se o padrão de figuras de cachorros e gatos. Ajude os estudantes a buscar um padrão para os termos que formam a sequência, levando-os a perceber que a sequência é formada a partir da repetição dos quatro elementos; então, cada um deles aparecerá a cada quatro termos.
- Os estudantes podem dar outra resposta à pergunta “Qual será a próxima figura dessa sequência?”. É importante que as ideias deles sejam debatidas de modo que sejam validadas ou não.

Situação 1

Observe a sequência de figuras a seguir.

Ilustrações: Danilo Souza/ID/BR

Qual será a próxima figura dessa sequência? **Gato cinza.**

Observe que essa sequência apresenta um padrão. Ela é formada por 4 figuras diferentes que se repetem na mesma ordem: cachorro marrom, cachorro preto, gato cinza e gato branco.

Mas e se quiséssemos descobrir qual é a figura correspondente ao 103º termo dessa sequência? Uma possibilidade seria desenhar todos os termos até o 103º termo, porém isso seria muito trabalhoso. Então, vamos pensar em outra estratégia.

Pensando nas posições ocupadas por cada uma das figuras, temos:

- cachorro marrom: 1, 5, 9, ...
- cachorro preto: 2, 6, 10, ...
- gato cinza: 3, 7, 11, ...
- gato branco: 4, 8, 12, ...

Você percebeu que, para cada uma das figuras, as posições em que elas aparecem aumentam de 4 em 4? **Resposta pessoal.**

Podemos descrever as sequências de posições da seguinte maneira:

- Cachorro marrom: múltiplos de 4 acrescidos de 1 unidade.

$\underbrace{1}_{0+1},\ \underbrace{5}_{4+1},\ \underbrace{9}_{8+1},\ ...$

- Cachorro preto: múltiplos de 4 acrescidos de 2 unidades.

$\underbrace{2}_{0+2},\ \underbrace{6}_{4+2},\ \underbrace{10}_{8+2},\ ...$

- Gato cinza: múltiplos de 4 acrescidos de 3 unidades.

$\underbrace{3}_{0+3},\ \underbrace{7}_{4+3},\ \underbrace{11}_{8+3},\ ...$

- Gato branco: múltiplos de 4 acrescidos de 4 unidades.

$\underbrace{4}_{0+4},\ \underbrace{8}_{4+4},\ \underbrace{12}_{8+4},\ ...$

Para determinar o 103º termo da sequência, precisamos descobrir qual figura ocupa a 103ª posição. Para isso, temos de encontrar em qual dessas descrições está o número 103. Acompanhe o raciocínio.

Se a figura dessa posição é o cachorro marrom, deve ser possível escrever 103 como um múltiplo de 4 acrescido de 1 unidade. Veja.

$$103 = ? + 1$$
$$103 = 102 + 1$$

Mas 102 não é múltiplo de 4, pois, ao dividir 102 por 4, obtemos resto 2.

Se a figura dessa posição é o cachorro preto, deve ser possível escrever 103 como um múltiplo de 4 acrescido de 2 unidades. Veja.

$$103 = ? + 2$$
$$103 = 101 + 2$$

Mas 101 não é múltiplo de 4, pois, ao dividir 101 por 4, obtemos resto 1.

Se a figura dessa posição é o gato cinza, deve ser possível escrever 103 como um múltiplo de 4 acrescido de 3 unidades. Veja.

$$103 = ? + 3$$
$$103 = 100 + 3$$

100 é múltiplo de 4. Então, a figura que ocupa a 103ª posição dessa sequência é o gato cinza.

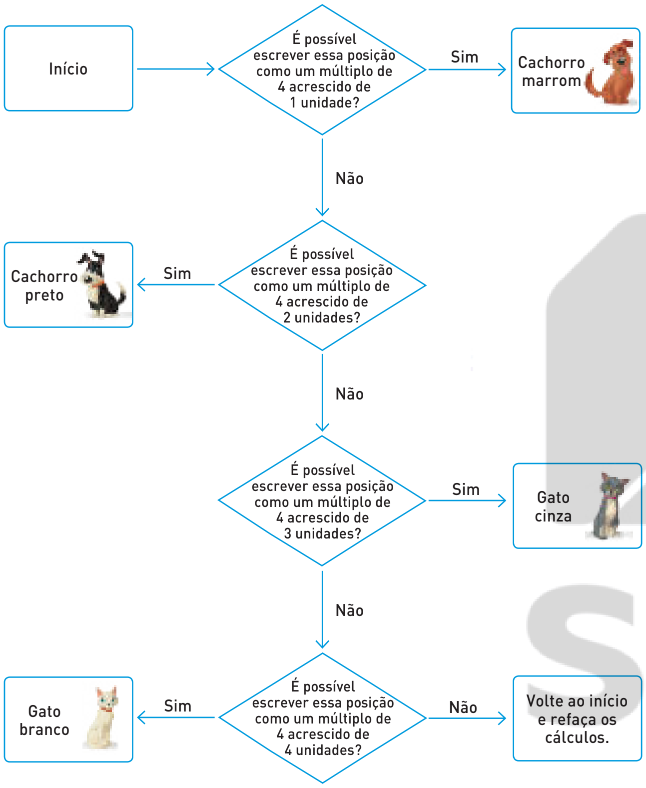
Note que a figura da 103ª posição não poderia ser o gato branco, pois deveria ser possível escrever 103 como um múltiplo de 4 acrescido de 4 unidades:

$$103 = ? + 4$$
$$103 = 99 + 4$$

Mas 99 não é múltiplo de 4, pois, ao dividir 99 por 4, obtemos resto 3.

Observe que, na regra de formação dessa sequência, cada termo não depende do anterior. Quando isso acontece, dizemos que a regularidade ou a regra dessa sequência **não é recursiva**.

Veja como podemos representar por meio de um fluxograma a figura ocupada em cada posição.



Ilustrações: Danillo Souza/ID/BR

DE OLHO NA BASE

Identificar a regularidade de uma sequência figural não recursiva e compreender o fluxograma que permite indicar as figuras seguintes nessa sequência favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA10**.

- Dizemos que a regra de uma sequência é recursiva quando precisamos de informações dos termos anteriores da sequência para determinar o próximo termo.
- Analise o fluxograma da situação **1** de modo que os estudantes compreendam como ocorre a regularidade da sequência.

- A situação **2** apresenta o conceito de termo geral em uma sequência numérica.
- Discuta com os estudantes sobre o que significa determinar o termo geral da sequência, ou seja, sobre a possibilidade de determinar uma regra que permita obter qualquer termo da sequência sem escrever todos os termos anteriores a ele.
- Explore o fluxograma como ferramenta, explicando aos estudantes que se trata de um dos métodos para determinar os elementos de uma sequência. Peça-lhes que o comparem com o método do termo geral. Essa comparação facilitará a passagem da linguagem verbal para a linguagem algébrica.

DE OLHO NA BASE

Identificar a regularidade de uma sequência numérica não recursiva e compreender o fluxograma que permite indicar os números seguintes favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA10**.

Outra maneira de descobrir qual figura ocupa determinada posição nessa sequência é observar o resto da divisão do número dessa posição por 4: se o resto for zero, será um gato branco; se o resto for 1, será um cachorro marrom; se o resto for 2, será um cachorro preto; e, se o resto for 3, será um gato cinza.

Desse modo, se quisermos descobrir qual será o 103º termo dessa sequência, basta dividir 103 por 4 e verificar o resto dessa divisão:

$$\begin{array}{r|l} 103 & 4 \\ \hline 23 & 25 \\ 3 & \end{array}$$

Como o resto da divisão é 3, o 103º termo é o gato cinza.

Situação 2

Observe esta sequência numérica:

$$\frac{7}{3},\ 4,\ \frac{17}{3},\ \frac{22}{3},\ 9,\ \frac{32}{3},\ \frac{37}{3},\ 14,\ \ldots$$

É possível determinar o 32º termo dessa sequência sem escrever todos os termos anteriores a ele? **Resposta pessoal.**

Podemos determinar uma regra que permita obter um termo da sequência sem escrever todos os termos anteriores a ele. Para isso, vamos utilizar uma expressão algébrica.

Nessa sequência, verificamos que o 1º termo é $\frac{7}{3}$, o 2º termo é 4, o 3º termo é $\frac{17}{3}$ e assim por diante. Note que $4 = \frac{12}{3}$.

Uma possível regra que representa qualquer número dessa sequência é $\frac{5n + 2}{3}$, sendo n a posição do número na sequência. Assim, podemos determinar qualquer número a_n dessa sequência fazendo:

$$\underbrace{a_n = \frac{5n + 2}{3}}_{\text{termo geral da sequência}}$$

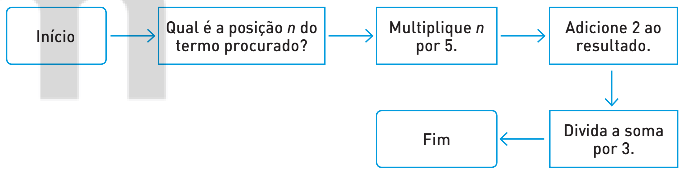
Note que n é um número natural diferente de zero, pois não há termo de posição zero nem de posição negativa. Isso acontece para a regra de qualquer sequência.

Assim, para saber qual é o 32º termo dessa sequência, podemos usar o termo geral:

$$a_{32} = \frac{5 \cdot 32 + 2}{3} = \frac{160 + 2}{3} = \frac{162}{3} = 54$$

Portanto, o 32º termo dessa sequência numérica é o número 54.

Agora, vamos representar em um fluxograma como obter os termos dessa sequência:



OUTRAS FONTES

SAHD, L. O que é a sequência de Fibonacci? *Superinteressante*, 27 dez. 2021. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/o-que-e-a-sequencia-de-fibonacci/. Acesso em: 11 mar. 2022.

A reportagem relaciona a sequência de Fibonacci com a razão áurea e traz exemplos interessantes nos quais o número de ouro é encontrado na natureza.

Situação 3

Observe o que Laís está dizendo.

Danilo Souza/ID/BR

Podemos observar que, nessa sequência:

- o 1º termo é igual a 7, ou seja, $a_1 = 7$;
- a partir do 2º termo, qualquer termo dessa sequência pode ser obtido multiplicando por 2 o termo anterior.

$$7 \xrightarrow{\cdot 2} 14 \xrightarrow{\cdot 2} 28 \xrightarrow{\cdot 2} 56 \xrightarrow{\cdot 2} 112 \xrightarrow{\cdot 2} 224, \ldots$$

Assim, o termo geral dessa sequência pode ser dado por:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1}, \text{ com } a_1 = 7$$

Agora, vamos encontrar o 7º termo dessa sequência. Para isso, basta usar a regra do termo geral:

$$a_7 = 2 \cdot a_6$$

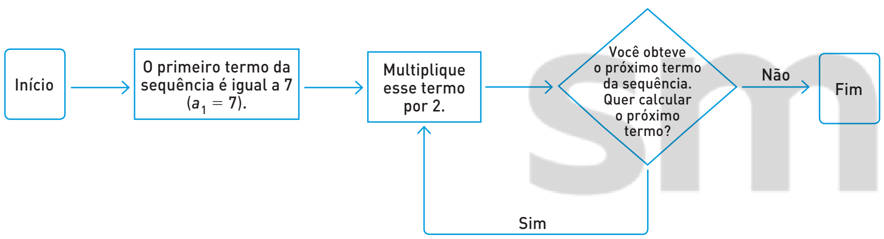
Observando a sequência, temos que o 6º termo é igual a 224. Logo, o 7º termo é dado por:

$$a_7 = 2 \cdot 224 = 448$$

Então, o 7º termo dessa sequência é igual a 448.

Em sequências numéricas, regras que dependem do termo anterior para serem escritas são chamadas de **regras recursivas**. Note que, para usar esse tipo de regra, precisamos saber qual é o 1º termo da sequência, pois não é possível determiná-lo.

Observe como podemos representar em um fluxograma o modo de construir essa sequência.



- Discuta com os estudantes a sequência da situação **3** e deixe que eles busquem o padrão que ela apresenta e o termo geral que a determina. Peça a eles que trabalhem em grupos e elaborem sua própria regra para descrever a sequência. Ajude-os a escrever tal regra com símbolos matemáticos.
- Solicite aos grupos que apresentem suas regras aos outros. Depois, compare as regras de cada grupo para observar similaridades e diferenças e, também, compare-as com a regra apresentada no Livro do Estudante.
- Analise o fluxograma com os estudantes para que possam compreender o modo como ele descreve um processo, visando habilitá-los na construção de fluxogramas para determinar outras sequências.

DE OLHO NA BASE

Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e compreender o fluxograma que permite indicar os termos seguintes favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA11**.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

A sequência de Fibonacci é um exemplo clássico de sequência que pode ser descrita com uma regra recursiva. Por meio dela, é possível discutir elementos da natureza em que ela aparece e sua relação com o número de ouro.

Apresente aos estudantes a sequência de Fibonacci:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...)

Solicite a eles que encontrem sua lei de formação. Trata-se de uma sequência recursiva, na qual um termo é igual à soma dos dois termos anteriores a ele. Em seguida, peça aos estudantes que façam, com uma calculadora, a divisão de cada termo pelo seu anterior com aproximação de três casas decimais e anotem os resultados em um quadro, como mostrado a seguir.

a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
a_{n-1}		1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$\frac{a_n}{a_{n-1}}$		1	2	1,5	1,667	1,6	1,625	1,616	1,619	1,618	1,618	1,618	1,618

Espera-se que os estudantes percebam que os quocientes vão convergir para o número de ouro ($\varphi \simeq 1{,}618$).

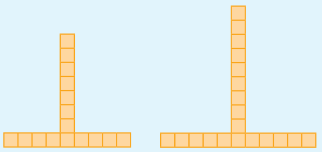
- Para resolver a atividade **2**, os estudantes deverão observar que é possível relacionar os elementos da sequência com o resto obtido ao efetuar a divisão cujo dividendo é a posição ocupada pela figura e o divisor é 4.
- Na atividade **4**, uma regra de formação dos termos da sequência pode ser: a partir do segundo termo, subtrair 7 do termo anterior, representada algebricamente por:

$$a_n = a_{n-1} - 7$$

- Na atividade **5**, pergunte aos estudantes qual é o padrão de cada sequência. Incentive-os, sempre que possível, a determinar com palavras, e também algebricamente, uma regra que permita calcular o próximo termo e um termo qualquer das sequências apresentadas.
- Na atividade **6**, os elementos dessa sequência são as distâncias a serem percorridas. Se julgar necessário, comente com os estudantes que n é um número natural menor que 16, pois o carro será testado por 15 dias.

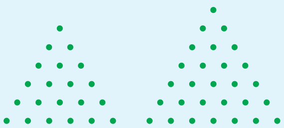
RESPOSTAS

1. a)



ID/BR

b)



ID/BR

3. a)

b)

Joao Picoli/ID/BR

DE OLHO NA BASE

As atividades destas páginas abordam sequências numéricas e figurais recursivas e não recursivas, por meio de algoritmos e fluxogramas, desenvolvendo as habilidades **EF08MA10** e **EF08MA11**.

Colaboram também para que os estudantes desenvolvam o raciocínio lógico e o espírito de investigação e busquem produzir argumentos para convencer o outro da validade das relações matemáticas usadas para a resolução das atividades e dos problemas, desenvolvendo a **competência específica de Matemática 2**.

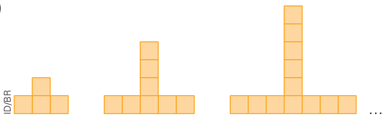
A prática da argumentação para justificar as respostas favorece o desenvolvimento da **competência geral 7**.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

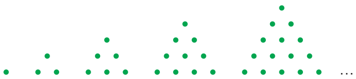
1. Identifique o padrão em cada sequência e, depois, escreva os dois próximos termos.
Consulte as respostas dos itens a e b neste manual.

a)



ID/BR

b)



ID/BR

c) 6, 10, 14, 18, 22, ... **26, 30**

d) 2, 4, 6, 8, 10, ... **12, 14**

e) 2, 4, 8,16, 32, ... **64, 128**

f) 1, 4, 9, 16, 25, ... **36, 49**

g) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... **34, 55**

h) 11, 101, 1 001, 10 001, 100 001, ... **1 000 001, 10 000 001**

i) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ $\mathbf{\frac{1}{6}, \frac{1}{7}}$

2. Observe a sequência de figuras a seguir.

João Picoli/ID/BR

Desenhe no caderno o 15º, o 30º e o 124º termos dessa sequência.

15º 30º 124º

3. Observe a sequência a seguir.

João Picoli/ID/BR

a) Desenhe os dois próximos termos dessa sequência. **Consulte as respostas dos itens a e b neste manual.**

b) Desenhe o 9º termo dessa sequência.

c) Escreva uma regra para descrever a quantidade de bolinhas dos termos dessa sequência. **Resposta possível: $a_n = 2n - 1$**

d) Quantas bolinhas tem o 16º termo? **31 bolinhas.**

4. Determine o 15º termo da sequência. **−80**

18, 11, 4, −3, ...

5. Determine os três termos seguintes de cada sequência.

a) 2, 5, 8, 11, 14, 17, ... **20, 23, 26**

b) −1, 0, 3, 8, 15, 24, ... **35, 48, 63**

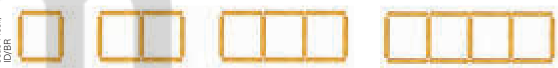
c) $4, \frac{19}{3}, \frac{26}{3}, 11, \frac{40}{3}, \frac{47}{3}, \ldots$ $\mathbf{18, \frac{61}{3}, \frac{68}{3}}$

6. Um novo modelo de veículo será testado durante 15 dias. No primeiro dia, o veículo vai percorrer 35 quilômetros, no segundo dia, 55 quilômetros, no terceiro dia, 75 quilômetros e assim por diante.

a) Escreva o termo geral dessa sequência. **Resposta possível: $a_n = 15 + 20n$, sendo n um número natural, diferente de zero e menor que 16.**

b) Quantos quilômetros o veículo percorrerá no último dia de teste? **315 km**

7. A sequência de figuras quadradas a seguir foi construída com palitos de sorvete. Note que o número de palitos utilizados varia de acordo com o número de figuras quadradas montadas.



João Picoli/ID/BR

1 2 3 4

a) Determine o termo geral dessa sequência. **Resposta possível: $a_n = 3n + 1$**

b) Alguma figura nessa sequência pode ser construída com 295 palitos? **Sim, a figura que ocupa a 98ª posição.**

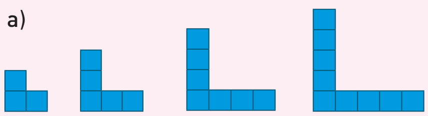
ESTRATÉGIAS DE APOIO – *DIVERSIFICANDO*

Os estudantes podem apresentar dificuldade em traduzir o termo geral da linguagem verbal para a algébrica. Apresente a eles diversos exemplos de sequências e peça que determinem a regra de formação e escrevam uma expressão para representá-la.

Veja algumas atividades que podem colaborar para isso.

1. Observe as 4 primeiras figuras de cada sequência e determine a regra de formação delas.

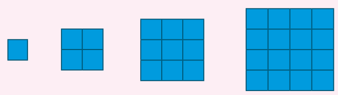
a)



1 2 3 4

Resposta possível: A primeira figura é composta de três quadrados. A cada figura acrescentam-se mais dois quadrados. Assim: $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 2$. Há outras possibilidades de resposta.

b)



ID/BR

As figuras são quadrados cuja medida das áreas, em quadradinho, equivale ao quadrado da posição da figura na sequência. Assim, $a_n = n^2$.

2. Quantos quadrados são necessários para compor a figura que ocupará a 24ª posição na primeira sequência?

A figura que ocupará a 24ª posição é composta de 49 quadrados.

DIVERSIFICANDO

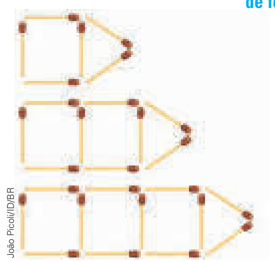
Responda sempre no caderno.

7. Não, pois, apesar de ser possível existir uma boneca com 11 cm de altura, como o conjunto só tem oito bonecas, a maior delas mede 8,3 cm.

1. Observe a representação dos movimentos de uma ginasta. Ela repetirá esses movimentos nessa mesma ordem mais algumas vezes.

Mantendo essa sequência de movimentos, em qual posição a ginasta estará no 22º movimento? **Na posição 1.**

2. Quantos palitos são necessários para formar o 10º termo da sequência a seguir? **33 palitos de fósforo.**



⋮

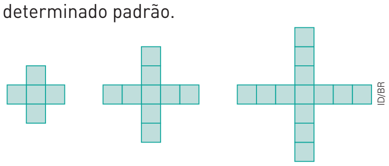
3. Faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Escreva os cinco primeiros termos da sequência dos números ímpares positivos. **1, 3, 5, 7, 9**

b) Determine o 10º termo dessa sequência. **19**

c) Escreva o termo geral dessa sequência. **Resposta possível: $a_n = 2n - 1$**

4. Na figura a seguir, estão representados os três primeiros termos de uma sequência de determinado padrão.



1º termo — 2º termo — 3º termo

a) Quantos quadradinhos são necessários para construir o 8º termo dessa sequência?

b) Qual é a regra para determinar quantos quadradinhos tem cada figura dessa sequência?

c) Algum termo dessa sequência tem 185 quadradinhos? E 188 quadradinhos? **Sim, o 46º termo. Não.**

4. a) 33 quadradinhos. **b) Resposta possível: $a_n = 4n + 1$**

5. Determine os próximos dois termos da sequência a seguir.

F, N, G, M, H, L, ... **I, K**

6. Considere uma sequência em que o 1º termo é 730. A regra para a obtenção dos termos seguintes pode ser escrita como: adicione 2 ao termo anterior e, depois, divida o resultado por 3.

a) Escreva essa regra em linguagem matemática.

b) Determine o terceiro termo dessa sequência. **82**

7. *Matrioska* é um brinquedo tradicional da Rússia constituído por uma série de bonecas que são colocadas umas dentro das outras. Em uma série de *matrioskas*, a menor mede 2 cm de altura. Cada uma das outras mede 0,9 cm de altura a mais do que a maior boneca em seu interior. Supondo que exista um conjunto de 8 bonecas que segue essa regra, é possível haver na sequência uma *matrioska* com 11 cm de altura? Justifique sua resposta.

8. Em um programa de condicionamento físico, a pessoa deve correr 600 metros no primeiro dia, 750 metros no segundo, 900 metros no terceiro, 1 050 metros no quarto e assim por diante.

a) Qual é a regra que descreve a distância percorrida no enésimo dia por alguém que siga esse programa? **$a_n = 150n + 450$**

b) Quantos metros a pessoa deve percorrer no oitavo dia de treinamento? **1 650 m**

c) Em qual dia do programa serão percorridos 2 700 metros? **No 15º dia.**

9. Escreva uma regra recursiva para o termo geral de cada sequência a seguir.

a) 5, 8, 11, 14, 17, 20, ... **$a_n = a_{n-1} + 3$**

b) 8, 12, 20, 36, 68, 132, ... **$a_n = 2a_{n-1} - 4$**

c) 688, 352, 184, 100, 58, 37, ... **$a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2} + 8$**

d) 10, 53, 268, 1 343, 6 718, 33 593, ... **$a_n = 5a_{n-1} + 3$**

10. Identifique o padrão e, depois, construa um fluxograma para escrever os números de cada sequência. **Consulte as respostas neste manual.**

a) 11, 19, 27, 35, 43, 51, ...

b) $1, \dfrac{3}{2}, 2, \dfrac{5}{2}, 3, \dfrac{7}{2}, ...$

c) 3, 9, 33, 129, 513, 2 049, ...

d) 2, 5, 11, 23, 47, 95, ...

6. a) $a_n = \dfrac{a_{n-1} + 2}{3}$

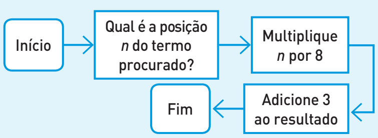
ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **2**, pode ser difícil para os estudantes perceberem que sempre serão acrescentados três palitos para cada termo da sequência. Isso ocorre porque eles podem pensar que cada quadrado necessita de quatro palitos. Ajude-os a observar isso.

RESPOSTAS

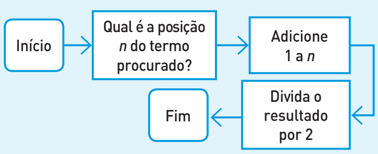
10. a) Resposta possível:

Padrão: cada termo pode ser obtido por meio da multiplicação do número da posição dele por 8 e da adição de 3 a esse produto.



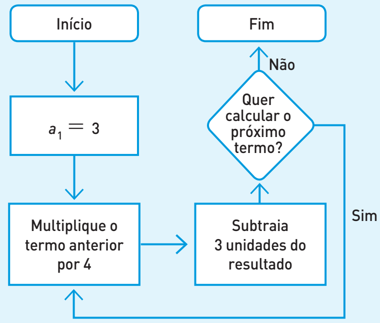
b) Resposta possível:

Padrão: cada termo pode ser obtido por meio da adição de 1 ao número da posição dele e da divisão do resultado por 2.



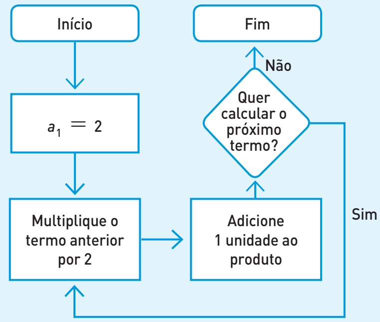
c) Resposta possível:

Padrão: 1º termo igual a 3 e os demais termos podem ser obtidos multiplicando o termo anterior por 4 e subtraindo 3 desse produto.



d) Resposta possível:

Padrão: 1º termo igual a 2 e os demais termos podem ser obtidos adicionando 1 ao dobro do termo anterior.



- Após realizar a atividade **10**, peça aos estudantes que escrevam uma regra de formação de cada sequência. Observe a sugestão de resposta.

a) $a_n = 8n + 3$

b) $a_n = \dfrac{n + 1}{2}$

c) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 4a_{n-1} - 3,\ n \geqslant 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1,\ n \geqslant 2 \end{cases}$

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Grandezas direta e inversamente proporcionais.
- Constante de proporcionalidade.
- Grandezas não proporcionais.

Objetivos

- Reconhecer grandezas proporcionais e diferenciá-las de grandezas não proporcionais.
- Diferenciar grandezas diretamente proporcionais de grandezas inversamente proporcionais.
- Compreender e expressar algebricamente e no plano cartesiano relações de proporcionalidade direta e inversa.
- Calcular a constante de proporcionalidade.
- Resolver e elaborar problemas de proporcionalidade.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de continuar o estudo envolvendo grandezas direta e inversamente proporcionais, compreendendo e utilizando diversas estratégias de cálculo para determinar valores desconhecidos. Com esses estudos, espera-se aperfeiçoar a capacidade dos estudantes com relação ao raciocínio proporcional, possibilitando maior autonomia na resolução de problemas do cotidiano deles.

GRANDEZAS E SEQUÊNCIAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

- Converse com os estudantes sobre a situação da orla marítima no município de Balneário Camboriú (SC), que aparece na foto de abertura deste capítulo. Sugira a eles que observem as sombras dos prédios projetadas na orla e incentive-os a refletir a respeito das consequências da verticalização dessa região para os banhistas, os moradores e a vida marinha. Depois de eles socializarem algumas possibilidades de resposta, cite exemplos da interferência humana no meio ambiente e a relação com algumas situações observadas, como o sombreamento dos arranha-céus no início da tarde e a obra de alargamento realizada em uma faixa de areia para os banhistas aproveitarem mais a luminosidade do Sol. Ressalte que essa obra não resolveu o problema do sombreamento na areia e que, durante essas obras, o ambiente marinho pode ter sido alterado, uma vez que, ao dragar camadas de areia do fundo oceânico, organismos marinhos ficaram suspensos, atraindo peixes que, por sua vez, podem ter atraído tubarões. Essa conversa desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação Ambiental, que pertence à macroárea **Meio Ambiente**.
- Procure saber se os estudantes entendem a ideia de proporcionalidade e se conhecem grandezas direta ou inversamente proporcionais. Inicie o trabalho com base nas ideias apresentadas por eles.

Capítulo 2

PROPORCIONALIDADE

Para desenvolver os conteúdos deste capítulo, os estudantes devem ter compreendido as operações com números racionais.

Grandezas e sequências diretamente proporcionais

A cidade de Balneário Camboriú, em Santa Catarina, é famosa por ter belas praias e paisagens. Para que um maior número de pessoas tenha acesso à vista do mar e para valorizar seus imóveis, empreendedores têm construído prédios cada vez mais altos. Os edifícios dessa cidade estão entre os mais altos do Brasil. Veja o nome e a altura de alguns deles.

- One Tower: 280 metros
- Infinity Coast Tower: 237 metros
- Boreal Tower: 220 metros
- Sky Tower: 210 metros

Esses prédios oferecem uma vista incrível do mar, mas sua altura tem gerado um sério problema: a praia fica sob a sombra dos prédios, impedindo que banhistas aproveitem o sol.

guilhermespengler/Shutterstock.com/ID/BR

Vista de parte do município de Balneário Camboriú (SC). Foto de 2021.

142

OUTRAS FONTES

Smoothey, M. *Atividades e jogos com razão e proporção*. São Paulo: Scipione, 2006.

Esse livro aborda de forma lúdica os temas de quantidade, divisão, grandezas discretas, grandezas contínuas e noção de semelhança, por meio de situações cotidianas, quebra-cabeças, jogos, trilhas, labirintos e dobraduras.

Para o mesmo instante, a altura de um prédio e o comprimento de sua sombra são **grandezas diretamente proporcionais**. Por exemplo, se compararmos dois prédios e se um deles tem o dobro da medida da altura do outro, veremos que o prédio mais alto projeta uma sombra que tem o dobro da medida de comprimento da sombra projetada pelo outro.

Quando duas grandezas são **diretamente proporcionais**, ao dobrarmos o valor de uma, a outra também dobra; quando triplicamos o valor de uma, a outra também triplica; quando reduzirmos o valor de uma à metade, a outra também fica reduzida à metade; e assim por diante.

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre os valores correspondentes das duas grandezas é sempre a mesma.

LEMBRE-SE!

A razão entre dois números a e b, com $b \neq 0$, nessa ordem, é o quociente de a por b. Essa razão é indicada por $\frac{a}{b}$ ou $a : b$. (lê-se: "razão de a para b" ou "a para b").

Para compreender melhor a relação entre grandezas diretamente proporcionais, vamos estudar a relação entre duas sequências de números diretamente proporcionais.

Observe, por exemplo, as sequências de números a seguir.

2, 3, 4, 5 e 4, 6, 8, 10

Vamos calcular as razões entre os termos da primeira sequência e os termos correspondentes da segunda sequência. Veja.

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

Observe que, ao calcular essas razões, obtivemos sempre o mesmo valor.

Dizemos que os termos da primeira sequência são **diretamente proporcionais** aos termos correspondentes da segunda sequência. A razão entre os termos correspondentes nas duas sequências é chamada de **razão** ou **fator de proporcionalidade**. Nesse caso, dizemos que $\frac{1}{2}$ é a razão de proporcionalidade.

Os números racionais não nulos da sequência $(a_1, a_2, ..., a_n)$ são **diretamente proporcionais** aos números não nulos correspondentes da sequência $(b_1, b_2, ..., b_n)$ quando:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k$$

em que k é a razão ou fator de proporcionalidade.

- Se julgar necessário, retome os conceitos de frações, de operações com frações e de suas propriedades, pois eles serão necessários para desenvolver os conteúdos deste capítulo.
- Explique aos estudantes, por meio de exemplos cotidianos, que há grandezas que variam em relação a outras. Inicie a discussão pedindo a eles que, observando a foto de abertura do capítulo, comparem as alturas dos prédios e as sombras que cada um faz. Espera-se que eles percebam que os prédios mais altos estão fazendo sombras maiores. Depois, peça a eles outros exemplos de grandezas que variam proporcionalmente.
- Discuta os exemplos apresentados pelos estudantes, enfatizando a relação entre as grandezas diretamente proporcionais.
- Relembre aos estudantes o conceito de razão entre dois números.
- Solicite aos estudantes que observem as sequências de números do exemplo, (2, 3, 4, 5) e (4, 6, 8, 10), e identifiquem regularidades. Eles podem observar que, enquanto a primeira sequência aumenta de 1 em 1, a segunda aumenta de 2 em 2. Além disso é possível verificar que os números da primeira sequência são a metade dos números correspondentes na segunda sequência. Essas observações auxiliam na compreensão da razão entre os termos correspondentes de cada uma das sequências, ou seja, 1 para 2 ou $\frac{1}{2}$.

- As situações **1** e **2** apresentam ideias relacionadas a grandezas diretamente proporcionais: tempo e distância percorrida a uma velocidade constante; e quantidade de água e tempo em que a torneira fica aberta.
- Na situação **2**, aproveite para discutir com os estudantes sobre a quantidade de litros de água desperdiçados ao deixar uma torneira aberta, um chuveiro aberto mais tempo que o necessário, etc. Discussões como essa podem incluir reflexões sobre educação financeira e ambiental, pois, quanto mais água se gasta, mais alta será a conta de água da residência, além de acarretar problemas para o meio ambiente e para a sociedade, como é o caso da escassez de água.

DE OLHO NA BASE

As situações analisadas nestas páginas permitem aos estudantes identificar grandezas diretamente proporcionais e compreender que elas podem ser expressas por sentenças algébricas e pela representação no plano cartesiano, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA12**. Além disso, os estudantes poderão analisar diferentes estratégias utilizadas na resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA13**.

Discutir o tema do consumo e do gasto de água, na situação **2**, ajuda os estudantes a refletir sobre questões de urgência social, com base em princípios sustentáveis, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, como mencionado na **competência específica de Matemática 7**.

Vamos analisar outras situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais.

Situação 1

Um caminhão percorre 70 km em 1 hora, com velocidade constante. Quantos quilômetros ele percorrerá em 5 horas se mantiver essa velocidade constante?

Nessa situação, as grandezas são diretamente proporcionais, pois, ao dobrarmos o tempo da viagem, a distância percorrida também dobrará; triplicando o tempo da viagem, a distância percorrida também triplicará; e assim por diante. Então:

$$\begin{tikzcd} 1\text{ hora} \arrow[r] \arrow[d, bend right, "\cdot 5"'] & 70\text{ km} \arrow[d, bend left, "\cdot 5"] \\ 5\text{ horas} \arrow[r] & 350\text{ km} \end{tikzcd}$$

Nessas condições, a razão entre os valores correspondentes de cada uma das grandezas é sempre a mesma. Veja.

$$\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo de viagem}} = \frac{70}{1} = \frac{140}{2} = \frac{210}{3} = \frac{280}{4} = \frac{350}{5} = 70$$

A razão ou o fator de proporcionalidade é 70.

Sendo x o valor correspondente à "distância percorrida" e y o valor correspondente ao "tempo de viagem", podemos escrever:

$$\frac{x}{y} = 70 \text{ ou } x = 70y$$

Utilizamos as letras x e y para expressar a relação entre as duas grandezas. Essas variáveis dependem uma da outra, ou seja, ao atribuir um valor para uma delas, podemos determinar o valor da outra. Assim, para $y = 5$, temos:

$$x = 70 \cdot 5 = 350$$

Logo, em 5 horas o caminhão percorrerá 350 quilômetros.

Situação 2

A razão entre a quantidade de água que sai de uma torneira e o tempo que ela fica aberta é constante. Se essa torneira ficar aberta por 2 minutos, sairão 30 litros de água. Quantos litros de água sairão dessa torneira em 3 minutos?

Como a razão entre a quantidade de água e o tempo é constante, essas grandezas são diretamente proporcionais e, assim, podemos calcular a razão de proporcionalidade:

$$\frac{\text{quantidade de água}}{\text{tempo}} = \frac{30}{2} = 15$$

Sendo x o valor correspondente à "quantidade de água" e y o valor correspondente ao "tempo", podemos escrever:

$$\frac{x}{y} = 15 \text{ ou } x = 15y$$

Assim, para $y = 3$, temos $x = 15 \cdot 3 = 45$.

Logo, em 3 minutos, sairão 45 litros de água dessa torneira.

OUTRAS FONTES

Poggio, A. M. P. P. *Um diagnóstico sobre o conceito de proporcionalidade de alunos do Ensino Médio na perspectiva dos Três Mundos da Matemática*. 2012. 237 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com//handle/123456789/3515. Acesso em: 18 jul. 2022.

Nessa dissertação, a autora discute o conceito de proporcionalidade desenvolvido por estudantes até o Ensino Médio. Nela, há atividades interessantes para serem aplicadas aos estudantes nos anos finais do Ensino Fundamental.

E se tivessem saído 105 litros de água dessa torneira, por quanto tempo ela teria ficado aberta?

Nesse caso, atribuímos o valor para a variável x e então descobrimos o valor correspondente para a variável y.

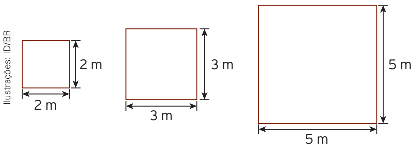
Assim, para $x = 105$, temos:

$$105 = 15 \cdot y$$
$$y = \frac{105}{15}$$
$$y = 7$$

Portanto, a torneira teria ficado aberta por 7 minutos.

Situação 3

Camila quer cercar 3 regiões quadradas do seu terreno para fazer um pomar, uma horta e um jardim. Observe a seguir a representação dessas partes do terreno.



O quadro a seguir relaciona as medidas dos lados de cada região quadrada do terreno à medida do seu perímetro:

Medida do lado (em metro)	Medida do perímetro (em metro)
2	8
3	12
5	20

Ao calcular a razão entre as medidas dos lados de cada região quadrada do terreno e a medida de seu perímetro, observamos que ela é sempre a mesma.

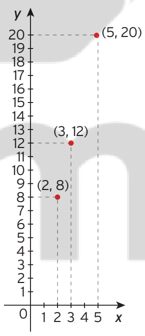
$$\frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Assim, a razão ou o fator de proporcionalidade é $\frac{1}{4}$.

Então, podemos dizer que a medida do lado de um quadrado é diretamente proporcional à medida do perímetro dele.

A variação dessas grandezas (comprimento do lado e perímetro) pode ser representada em um plano cartesiano. Para isso, escrevemos as medidas do lado e as do perímetro como pares ordenados.

Sendo x o valor correspondente à "medida do lado" e y o valor correspondente à "medida do perímetro", temos os seguintes pares ordenados: (2, 8), (3, 12) e (5, 20). Observe a representação desses pares ordenados no plano cartesiano ao lado.



- Na situação **3**, observa-se uma relação de proporcionalidade direta entre a variação da medida do lado de um quadrado e a medida do seu perímetro. Se julgar oportuno, pergunte aos estudantes o que eles podem observar em relação ao alinhamento dos pares ordenados ao representá-los no plano cartesiano.
- Mostre aos estudantes que os pares representados no plano cartesiano apresentam uma tendência crescente, pois, à medida que os valores de x aumentam, os valores de y também aumentam.

GRANDEZAS E SEQUÊNCIAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

- Se necessário, retome com os estudantes o conceito de inverso de um número.
- Apresente, por meio de exemplos, grandezas inversamente proporcionais, de forma que os estudantes compreendam que também há uma razão de proporcionalidade entre elas, mas essa razão é inversa, ou seja, quando uma grandeza aumenta, a outra diminui.

DE OLHO NA BASE

Os exemplos apresentados nestas páginas permitem aos estudantes identificar grandezas inversamente proporcionais e compreender que elas podem ser expressas por sentenças algébricas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA12**.

A situação **1** também contribui para o desenvolvimento da **competência geral 8**, de modo que os estudantes conheçam, apreciem e cuidem de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

- O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes seja preservada. Para isso, valorize situações em que os estudantes se sintam acolhidos, incentivando o desenvolvimento da empatia e da solidariedade.

Além de melhorar a aptidão física, o exercício físico regular também pode melhorar a capacidade cognitiva e reduzir os níveis de ansiedade e estresse [em] geral. Os exercícios melhoram a autoestima, a imagem corporal, a cognição e a função social de pacientes em risco de saúde mental.

Prefeitura de Extrema (MG). Disponível em: https://www.extrema.mg.gov.br/noticias/educacao-em-saude-mes-de-julho-mente-sa-corpo-sao/. Acesso em: 18 jul. 2022.

- Após explorar a situação **1**, leve os estudantes a compreender o que aconteceria se, por equívoco, eles considerassem que as grandezas apresentadas são diretamente proporcionais. Solicite a eles que escrevam uma premissa falsa e, depois, tentem desenvolver um raciocínio lógico. Por exemplo, eles podem considerar que ambas as grandezas aumentariam na mesma proporção:
  - Se a velocidade da bicicleta aumentar, então o tempo do percurso vai aumentar na mesma proporção.
  - Júlia pedalou à velocidade constante de 4 m/s e deu uma volta ao redor da lagoa em 160 s.
  - Como 8 é o dobro de 4, então a velocidade de 8 m/s é o dobro da velocidade de 4 m/s.
  - Júlia pedalou à velocidade constante de 8 m/s e deu uma volta ao redor da lagoa em 80 s, mas 80 não é o dobro de 160.
  - Portanto, a velocidade da bicicleta e o tempo do percurso não aumentam na mesma proporção.

Grandezas e sequências inversamente proporcionais

Vamos analisar as situações a seguir.

Situação 1

Júlia gosta de pedalar ao redor da lagoa perto de sua casa. Certo dia, ela anotou em um quadro quanto tempo demorou para dar cada volta na lagoa. Júlia manteve uma velocidade constante em cada volta que deu.

Velocidade (m/s)	4	8	10
Tempo (s)	160	80	64

Observe que a velocidade de Júlia e o tempo que ela demora para dar uma volta são **grandezas inversamente proporcionais**: quanto maior a velocidade, menos tempo ela demora para completar uma volta.

Quando duas grandezas são inversamente proporcionais, ao dobrarmos o valor de uma delas, a outra é reduzida à metade; quando quadruplicamos o valor de uma, a outra é dividida por 4; e assim por diante.

LEMBRE-SE!

Dado um número natural não nulo, o inverso dele sempre é uma fração cujo numerador é 1 e cujo denominador é igual ao número natural.

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira grandeza e os inversos dos valores correspondentes da segunda grandeza é sempre a mesma.

Para compreender melhor a relação entre duas grandezas inversamente proporcionais, vamos estudar a relação entre duas sequências de números inversamente proporcionais.

Observe, por exemplo, as sequências de números obtidas com base nos dados do quadro.

4, 8, 10 160, 80, 64

Ao calcular as razões entre um termo da primeira sequência e o inverso do termo correspondente na segunda sequência, obtemos sempre o mesmo valor. Veja.

$$\frac{4}{\frac{1}{160}} = 640 \qquad \frac{8}{\frac{1}{80}} = 640 \qquad \frac{10}{\frac{1}{64}} = 640$$

Dizemos que os termos da primeira sequência são **inversamente proporcionais** aos termos da segunda sequência. A razão entre os termos da primeira sequência e os inversos dos termos da segunda sequência é chamada de **razão** ou **fator de proporcionalidade**. Nesse caso, dizemos que 640 é a razão de proporcionalidade.

Também podemos observar que o produto dos termos correspondentes nas duas sequências é sempre o mesmo.

$$4 \cdot 160 = 640 \qquad 8 \cdot 80 = 640 \qquad 10 \cdot 64 = 640$$

Os números racionais não nulos da sequência $(a_1, a_2, ..., a_n)$ são **inversamente proporcionais** aos números não nulos correspondentes da sequência $(b_1, b_2, ..., b_n)$ quando:

$$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = ... = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}} = k$$

em que k é a razão ou fator de proporcionalidade.

Situação 2

Um automóvel, movendo-se com velocidade constante de 40 quilômetros por hora (km/h), completou determinado percurso em 4 horas. Em quanto tempo esse automóvel faria o mesmo percurso se sua velocidade fosse de 80 quilômetros por hora?

Nessa situação, as grandezas são inversamente proporcionais, pois, ao dobrarmos a velocidade, o tempo diminui pela metade; ao triplicarmos a velocidade, o tempo será reduzido à terça parte; e assim sucessivamente. Então:

$$\begin{array}{ccc} \cdot 2 \; \big\downarrow \; 40 \text{ km/h} & \longrightarrow & 4 \text{ horas} \; \big\downarrow \; :2 \\ 80 \text{ km/h} & \longrightarrow & 2 \text{ horas} \end{array}$$

Nessas condições, a razão entre o valor de uma das grandezas e o inverso do valor correspondente é sempre a mesma. Veja.

$$\frac{\text{velocidade}}{\frac{1}{\text{tempo}}} = \frac{40}{\frac{1}{4}} = \frac{80}{\frac{1}{2}} = 160$$

A razão ou fator de proporcionalidade é 160.

Sendo x o valor correspondente à “velocidade” e y o valor correspondente ao “tempo”, podemos escrever:

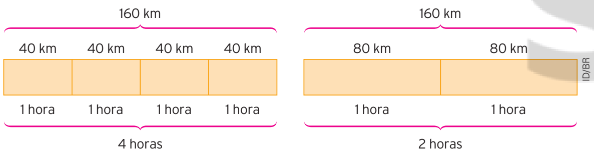
$$\frac{x}{\frac{1}{y}} = 160 \quad \text{ou} \quad x = 160 \cdot \frac{1}{y} \quad \text{ou} \quad x = \frac{160}{y}$$

Assim, para $x = 80$, temos:

$$80 = \frac{160}{y}$$
$$y = \frac{160}{80}$$
$$y = 2$$

Logo, viajando a 80 km/h, o automóvel faz o mesmo percurso em 2 horas.

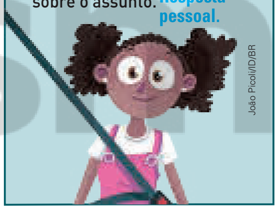
Veja agora como podemos interpretar essa situação por meio de um esquema.



RESPONSABILIDADE NO TRÂNSITO

Respeitar as leis que regulamentam os limites de velocidade nas vias de trânsito é muito importante para garantir a segurança das pessoas, tanto do motorista como de passageiros e pedestres. No Brasil, além das leis que determinam a velocidade máxima nas vias, existem diversas outras que regulamentam o trânsito. Você sabia, por exemplo, que o uso do cinto de segurança é obrigatório para o motorista e para os passageiros desde 1997? De acordo com o artigo 65 do Código de Trânsito Brasileiro, o uso do cinto de segurança é obrigatório para o condutor e para os passageiros em todas as vias do território nacional, salvo em situações regulamentadas pelo Conselho Nacional de Trânsito (Contran).

- **Em duplas, pesquisem e conversem sobre a importância do uso de cinto de segurança no banco de trás. Depois, elaborem e compartilhem, com toda a turma, as informações encontradas. Confeccionem um cartaz para ser afixado no mural da escola para conscientizar outros colegas sobre o assunto.** Resposta pessoal.



João Picoli/ID/BR

- Discuta com os estudantes os esquemas apresentados na situação **2**, mostrando a eles que a distância percorrida é sempre a mesma.
- É importante que os estudantes percebam que, à medida que a velocidade aumenta, o tempo para se percorrer uma distância fixa diminui na mesma proporção.
- Explique aos estudantes que tempo e distância são grandezas diretamente proporcionais quando a velocidade é constante. Já velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais quando a distância é constante.

Responsabilidade

Discuta com os estudantes o tema responsabilidade no trânsito para fomentar o cumprimento das leis de trânsito, a observação de medidas de segurança e a atitude responsável que cada um, motorista e pedestre, deve ter em relação a esse assunto. Converse com eles, por exemplo, sobre a velocidade que um carro pode alcançar e mostre, em *sites* ou em vídeos, o impacto desse veículo ao colidir em velocidades maiores que a máxima permitida nas vias urbanas e os danos que ele pode causar a passageiros e a pedestres. Amplie essa discussão também para áreas rurais e como essas leis são aplicadas a moradores dessa região. Essa conversa desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação para o Trânsito, que pertence à macroárea **Cidadania e Civismo**.

- Reforce com os estudantes que, na situação **3**, o rendimento dos operários é constante ao longo da jornada de trabalho. Assim, pode-se considerar que as horas trabalhadas por dia são inversamente proporcionais aos dias de trabalho.
- Mostre aos estudantes que os pares ordenados representados no plano cartesiano apresentam uma tendência decrescente, pois, à medida que os valores de x aumentam, os valores de y diminuem.

DE OLHO NA BASE

As situações apresentadas nestas páginas permitem aos estudantes identificar grandezas inversamente proporcionais e compreender que elas podem ser expressas por sentenças algébricas e pela representação no plano cartesiano, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA12**. Essas situações também apresentam problemas que envolvem grandezas inversamente proporcionais, a ser resolvidos por meio de estratégias variadas, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA13**.

Situação 3

Uma equipe de operários realiza determinada obra em 24 dias se trabalhar 8 horas por dia. Considere que o rendimento deles seja constante ao longo da jornada de trabalho. Se o número de horas de serviço for reduzido para 4 horas por dia, em quantos dias essa equipe fará o mesmo trabalho?

As grandezas envolvidas nessa situação são inversamente proporcionais, pois, ao reduzir pela metade a quantidade de horas trabalhadas por dia, a quantidade de dias de trabalho duplica; se reduzirmos à terça parte a quantidade de horas por dia de trabalho, a quantidade de dias de trabalho triplica; e assim por diante.

Como o serviço é feito em 24 dias se a equipe trabalhar 8 horas por dia, podemos calcular a razão:

$$\frac{\text{horas trabalhadas por dia}}{\frac{1}{\text{dias de trabalho}}} = \frac{8}{\frac{1}{24}} = 8 \cdot 24 = 192$$

Sendo x o valor correspondente à “quantidade de horas trabalhadas por dia” e y o valor correspondente à “quantidade de dias de trabalho”, podemos escrever:

$$\frac{x}{\frac{1}{y}} = 192 \text{ ou } x \cdot y = 192 \text{ ou } x = \frac{192}{y}$$

Assim, para $x = 4$, temos:

$$4 = \frac{192}{y} \Rightarrow y = \frac{192}{4} = 48$$

Logo, essa equipe fará o mesmo serviço em 48 dias se o número de horas trabalhadas por dia for reduzido para 4, considerando que o rendimento dos operários nas horas trabalhadas seja constante.

E, se o serviço for feito em 32 dias, quantas serão as horas de trabalho por dia da equipe?

Nesse caso, atribuímos o valor para a variável y e então descobrimos o valor correspondente para a variável x.

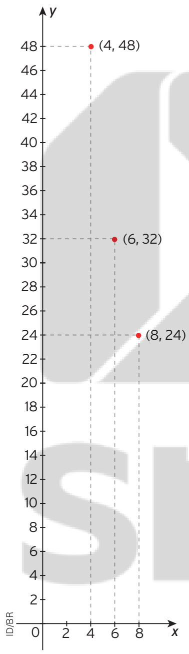
Assim, para $y = 32$, temos:

$$x = \frac{192}{32} = 6$$

Logo, a jornada da equipe será de 6 horas por dia nesse caso.

Podemos representar a variação da quantidade de horas trabalhadas por dia e da quantidade de dias de trabalho no plano cartesiano. Para isso, escrevemos o número de horas trabalhadas por dia e a quantidade de dias necessários como pares ordenados.

Sendo x o valor correspondente à “quantidade de horas trabalhadas por dia” e y o valor correspondente à “quantidade de dias de trabalho”, temos os seguintes pares ordenados: (8, 24), (6, 32) e (4, 48). Observe a representação desses pares ordenados no plano cartesiano ao lado.



Situações que não envolvem grandezas proporcionais

Existem algumas situações que envolvem grandezas em que não é possível estabelecer uma relação de proporcionalidade. Veja alguns exemplos.

Situação 1

Na cidade em que Ana mora, a corrida de um táxi é calculada da seguinte maneira: uma taxa fixa (bandeirada) de R$ 5,50 mais R$ 4,00 por quilômetro rodado. Observe o quadro que relaciona a quantidade de quilômetros rodados com o valor da corrida a ser pago.

Quilômetros rodados	Valor da corrida a ser pago (em real)
5	25,50
25	105,50
50	205,50

Vamos verificar se essa variação é proporcional. Ao observar os valores das grandezas "distância" e "preço", é possível perceber que ambos aumentam. Mas isso não basta para que as grandezas sejam diretamente proporcionais. É preciso verificar se a razão entre esses valores permanece constante. Veja.

$$\frac{5}{25{,}50} \neq \frac{25}{105{,}50} \neq \frac{50}{205{,}50} \qquad 0{,}1960... \neq 0{,}2369... \neq 0{,}2433...$$

Como a razão entre os valores correspondentes de cada uma das grandezas não é sempre a mesma, as grandezas "distância" e "preço" não são proporcionais.

Situação 2

Observe o quadro a seguir, que indica a quantidade de canetas por pacote e o preço de cada caneta.

Quantidade de canetas por pacote	Preço de cada caneta (em real)
3	1,25
4	1,00
6	0,95
12	0,80

Vamos verificar se essa variação é proporcional. Ao observar os valores da "quantidade de canetas" e do "preço de cada caneta", é possível observar que, quando a quantidade de canetas no pacote aumenta, o preço unitário diminui. Mas isso não basta para que as grandezas sejam inversamente proporcionais. É preciso verificar se a razão entre os valores da "quantidade de canetas" e o inverso dos valores do "preço de cada caneta" permanece constante. Veja.

$$\frac{3}{\frac{1}{1{,}25}} \neq \frac{4}{\frac{1}{1{,}00}} \neq \frac{6}{\frac{1}{0{,}95}} \neq \frac{12}{\frac{1}{0{,}80}} \qquad 3{,}75 \neq 4{,}00 \neq 5{,}70 \neq 9{,}60$$

Assim, a "quantidade de canetas" e o "preço de cada caneta" não são proporcionais.

SITUAÇÕES QUE NÃO ENVOLVEM GRANDEZAS PROPORCIONAIS

- Nas situações mencionadas nesta página, é importante que os estudantes observem que, apesar de haver uma relação entre as grandezas apresentadas, tal relação não é de proporcionalidade, isto é, não há uma constante de proporcionalidade entre as grandezas.
- No caso da situação **1**, o valor a ser pago aumenta conforme a quantidade de minutos utilizados aumenta, mas não de maneira proporcional. Portanto, os minutos utilizados e o valor a ser pago não são diretamente proporcionais.
- Na situação **2**, à medida que a quantidade de canetas no pacote aumenta, o valor a ser pago por cada caneta diminui, mas não de maneira proporcional. Logo, a quantidade de canetas por pacote e o preço unitário da caneta não são inversamente proporcionais.

- As atividades desta página envolvem grandezas direta e inversamente proporcionais, além de grandezas que não apresentam proporcionalidade. Aproveite para aprofundar a discussão sobre a relação entre diferentes grandezas, levando os estudantes a analisar os novos conceitos e a relacioná-los com seus conhecimentos prévios sobre o assunto.
- Para realizar a atividade **4**, deve-se primeiro verificar se a relação entre as grandezas é direta ou inversa para, em seguida, analisar se há proporcionalidade. No item **a**, à medida que o horário aumenta, a medida de temperatura também aumenta; logo, a relação entre as grandezas é direta. Porém, ao observar a variação de 4 h para 8 h, verifica-se que o horário dobrou, mas a medida de temperatura não dobrou. Portanto, não são grandezas diretamente proporcionais.

RESPOSTAS

2. São grandezas inversamente proporcionais, pois, se 10 máquinas produzem 200 tapetes em 6 dias, o dobro de máquinas produzirá essa quantidade de tapetes na metade do tempo.

3. a) São inversamente proporcionais e o fator de proporcionalidade é $k = 126$.

b) São inversamente proporcionais e o fator de proporcionalidade é $k = 440$.

c) Não são inversamente proporcionais.

d) Não são inversamente proporcionais.

DE OLHO NA BASE

As atividades desta página, ao propor situações-problema que envolvem grandezas direta e inversamente proporcionais, além de grandezas em que não há proporcionalidade, permitem aos estudantes usar estratégias variadas na sua resolução, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA13**.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Se um trem-bala desenvolve velocidade constante de 270 km/h, em quantas horas ele fará um percurso de 405 km?
Em 1,5 hora.

2. Com 10 máquinas de tecelagem, uma empresa precisa de 6 dias para produzir 200 tapetes. A quantidade de máquinas e o tempo necessários para produzir 200 tapetes são grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais? Justifique.
Consulte a resposta neste manual.

3. Em cada item, verifique se os números da primeira sequência são inversamente proporcionais aos números da segunda sequência. Em caso afirmativo, identifique o fator de proporcionalidade.
Consulte as respostas neste manual.

a) 2, 3, 7 e 9 — 63, 42, 18 e 14

b) 5, 8, 10 e 11 — 88, 55, 44 e 40

c) 1, 3, 5 e 7 — 105, 40, 21 e 18

d) 2, 4, 6 e 8 — 100, 25, 17 e 12

4. Classifique as grandezas de cada item em diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

a)

Horário	Temperatura
4 h	10 °C
6 h	12 °C
8 h	14 °C
10 h	18 °C
12 h	20 °C

Não proporcionais.

b)

Quantidade de máquinas utilizadas	Quantidade de ovos embalados
1	900
2	1 800
3	2 700
8	7 200
11	9 900

Diretamente proporcionais.

c)

Velocidade (m/s)	Tempo (s)
5	200
8	125
10	100
16	62,5
20	50

Inversamente proporcionais.

5. Viajando a uma velocidade de 60 km/h, um trem realiza uma viagem de uma cidade A para uma cidade B em 10 horas.

a) A velocidade do trem e o tempo de viagem são grandezas direta ou inversamente proporcionais? **Inversamente proporcionais.**

b) Em quanto tempo esse trem faria a mesma viagem se viajasse a uma velocidade de 120 km/h? **Em 5 horas.**

6. Um fazendeiro tem ração suficiente para alimentar 200 galinhas durante 45 dias.

a) Se ele tivesse de alimentar 500 galinhas com essa mesma quantidade de ração, o número de dias que a ração iria durar seria menor ou maior que 45 dias? **Menor que 45 dias.**

b) Nessa situação, o número de dias e o número de galinhas são grandezas direta ou inversamente proporcionais? **Inversamente proporcionais.**

7. Uma equipe com 8 integrantes digita um livro em 15 dias. Supondo que todos eles tenham a mesma produtividade e que a produtividade seja constante, quantos integrantes são necessários para digitar a mesma obra em 10 dias? **12 integrantes.**

8. De acordo com a Lei nº 8 723, de 28 de outubro de 1993, a mistura de álcool etílico anidro (etanol) na gasolina pode ser de até 27,5%. Jorge abasteceu seu carro em um posto em que a mistura de etanol na gasolina é de 25%, ou seja, em 1 L de gasolina há 0,25 L de etanol.

a) Na gasolina, a quantidade de etanol e a quantidade de gasolina são grandezas direta ou inversamente proporcionais?

b) O tanque do carro de Jorge tem capacidade para 50 L de combustível. Quantos litros de etanol estão no tanque de combustível do carro dele, sabendo que está totalmente cheio?
12,5 L de etanol.

8. a) Diretamente proporcionais.

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

6. b) Não. Se em 2 minutos há 4 000 bactérias, em 3 minutos haverá 8 000 bactérias. Se em 3 minutos o número de bactérias triplicasse, haveria 3 000 bactérias.

1. Um alfaiate comprou 96 metros de tecido e quer cortá-lo em pedaços de mesmo tamanho. Copie o quadro no caderno e complete-o.

Número de pedaços	Comprimento de cada pedaço (em metro)
4	24
8	12
12	8
16	6
24	4
32	3

   a) As grandezas do quadro são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais? **Inversamente proporcionais.**

   b) Qual é o fator de proporcionalidade entre essas grandezas? **96**

2. Uma fábrica produz 400 bonecas em 5 horas. Quanto tempo é necessário para que ela produza 1 000 bonecas? **12,5 horas.**

3. Um ciclista se desloca em uma pista com velocidade constante de 25 km/h. Quantos quilômetros ele percorre em uma hora e meia, mantendo a mesma velocidade? **37,5 km**

4. Um navio cargueiro com 30 marinheiros dispõe de alimento para 60 dias. Um outro navio cargueiro teve problemas e os marinheiros que lá estavam foram acolhidos pelo primeiro navio, que, agora, abriga 90 marinheiros. Mantendo-se as condições, por quantos dias os marinheiros conseguirão ter provisão de alimentos? **Por 20 dias.**

5. Três torneiras idênticas enchem determinada piscina em 10 horas. Em quantas horas 10 torneiras idênticas enchem a mesma piscina? **Em 3 horas.**

6. A população de uma colônia de bactérias dobra a cada minuto.

   a) Se em um momento existem 1 000 bactérias nessa colônia, quantas bactérias existirão após 2 minutos? **4 000 bactérias.**

   b) Podemos afirmar que em 3 minutos o número de bactérias da colônia triplica? Por quê?

   c) Nessa colônia, "tempo" e "número de bactérias" são grandezas proporcionais? Justifique.

7. Uma empresa especializada em pavimentação de vias asfaltou 54 quilômetros de vias em 18 dias. Quantos dias são necessários para que ela pavimente uma estrada de 81 quilômetros de extensão, sabendo que a produção é constante? **27 dias.**

8. Paula tem um *hamster* e, para alimentá-lo, compra um saco de ração que dura 20 dias. Se Paula tivesse 5 *hamsters*, quantos dias esse pacote de ração duraria? Considere que a quantidade de ração consumida por cada *hamster* é a mesma. **4 dias.**

9. Determinada máquina de churros prepara aproximadamente 9 600 unidades do produto em 6 horas. **9. a) Sim. Diretamente proporcionais.**

   a) As grandezas envolvidas – "tempo" e "quantidade de churros produzidos" – são proporcionais? Em caso afirmativo, são direta ou inversamente proporcionais?

   b) Com base nas informações, copie o quadro a seguir no caderno e complete-o, relacionando a quantidade de unidades produzidas e o tempo.

Unidades produzidas	Tempo (em hora)
1 600	1
3 200	2
6 400	4
8 000	5
11 200	7
16 000	10

   c) Qual é o fator de proporcionalidade entre essas grandezas? **1 600**

   d) Escreva no caderno uma sentença algébrica para representar a relação entre essas grandezas.

10. Elabore um problema que envolva grandezas diretamente proporcionais e um problema que envolva grandezas inversamente proporcionais. Em seguida, peça a um colega que resolva os problemas criados por você e você resolve os que ele criou. Por fim, conversem sobre como pensaram tanto para elaborar como para resolver os problemas. **Respostas pessoais.**

9. d) Sendo x o valor correspondente às unidades produzidas e y o valor correspondente ao tempo, temos: $x = 1\,600y$.

6. c) Não, pois os valores não são constantes em todas as razões.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Antes de realizarem as atividades propostas, peça aos estudantes que identifiquem nelas quais são as grandezas envolvidas e escrevam a relação entre elas.
- Na atividade **2**, a quantidade de bonecas produzidas e o tempo são diretamente proporcionais.
- Na atividade **3**, a distância percorrida e o tempo são diretamente proporcionais.
- Na atividade **4**, a quantidade de marinheiros e a quantidade de dias são inversamente proporcionais.
- Na atividade **5**, a quantidade de torneiras e a quantidade de horas são inversamente proporcionais.
- Na atividade **7**, a quantidade de quilômetros pavimentados e a quantidade de dias são diretamente proporcionais.
- Na atividade **8**, a quantidade de *hamsters* e a quantidade de dias que a ração dura são inversamente proporcionais.
- Um tema que pode ser sugerido aos estudantes na atividade **10** é o cálculo do consumo de energia dos eletrodomésticos relacionado ao tempo de uso. Esse assunto permite um trabalho interdisciplinar com o componente curricular Ciências, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF08CI04** [Calcular o consumo de eletrodomésticos a partir dos dados de potência (descritos no próprio equipamento) e tempo médio de uso para avaliar o impacto de cada equipamento no consumo doméstico mensal.].

DE OLHO NA BASE

Elaborar problemas envolvendo grandezas direta ou inversamente proporcionais, como proposto na atividade **10**, favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA13**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Uma dificuldade que os estudantes podem apresentar na resolução das atividades desta página é determinar se duas grandezas são direta ou inversamente proporcionais.

Para que os estudantes possam analisar cada uma das situações propostas nessas atividades, sugira que construam quadros com alguns valores de cada grandeza envolvida. Isso permitirá que analisem mais de uma informação e possam tirar conclusões fundamentadas sobre a natureza da relação entre elas.

Para perceber se a relação entre as grandezas é direta ou inversa, ainda que não haja proporcionalidade, os estudantes devem perguntar o que acontece com uma das grandezas analisadas quando a outra diminui (ou aumenta).

Por exemplo, na atividade **4**, a situação envolve a quantidade de marinheiros e a quantidade de dias. A pergunta deve ser, então: "Dispondo da mesma quantidade de alimento, se eu tiver mais marinheiros para alimentar, o alimento vai durar mais ou menos dias?".

Caso os estudantes tenham dúvidas relacionadas a grandezas não proporcionais, apresente outras situações em que é possível estabelecer uma relação inversa ou direta, mas não há proporcionalidade entre elas. Por exemplo, a medida do lado de um quadrado e a medida de sua área.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, o tema abordado são os seguros. Convide os estudantes a pensar, com base no texto e nas perguntas, sobre a importância de se proteger em diversas situações, inclusive na vida financeira.
- É muito comum que adolescentes e jovens sejam mais impulsivos, seja pelo momento de vida em que estão, seja porque ainda terão oportunidade de vivenciar muitas outras situações. Por isso, podem tomar decisões precipitadas que colocam em risco seus projetos de vida. Discutir a sensação de que nada de ruim pode acontecer e que por isso não é importante usar equipamentos de proteção pode ajudar nessa percepção, ajudando os estudantes a abrir mão de fazer algo que possa colocar em risco sua integridade física ou a tomar todas as medidas de segurança de modo antecipado e planejado.
- Se julgar oportuno, pergunte se os estudantes sabem como os seguros funcionam e se os familiares deles já contrataram esse tipo de serviço.

DE OLHO NA BASE

Refletir sobre esse tema auxilia os estudantes a conhecer-se, a apreciar-se e a cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana, desenvolvendo assim a **competência geral 8**.

Responsabilidade

O assunto tratado nessa seção possibilita promover a reflexão sobre o olhar para o futuro de forma responsável, calculando vantagens e desvantagens, benefícios e prejuízos, dentro da perspectiva da cultura de prevenção.

AMPLIANDO HORIZONTES

Imprevistos acontecem

Você pratica algum esporte? Em toda prática esportiva há sempre o risco de se machucar. O que geralmente tentamos (ou deveríamos fazer) é nos proteger, diminuindo a chance de nos machucar. Para isso, usamos tênis, caneleira, boné, capacete, joelheira, óculos, entre outros equipamentos de segurança.

Mas o que esse papo de esportes tem a ver com educação financeira? Imprevistos e acidentes fazem parte da vida das pessoas em diversas situações, e não somente na prática esportiva. Considerando que a vida e as pessoas são mais importantes que os bens materiais, é necessário pensar em maneiras de protegê-las. Além da proteção que o Estado tem obrigação legal de oferecer – sistemas públicos de saúde, de segurança, de prevenção de acidentes, etc., sustentados pelos impostos pagos pela população –, existem outras formas privadas de complementar essa proteção. Entre elas, há os seguros, que visam dar proteção e reparação às pessoas que os contratam.

Em um seguro, o segurado paga ao segurador uma quantia para se proteger de determinado risco de sinistro por certo tempo. Quando o sinistro ocorre no período contratado, o segurador paga ao segurado a quantia acordada no contrato. Caso não haja ocorrência de sinistro, o segurador fica com o dinheiro contratado.

É muito comum, principalmente nas grandes cidades, que as pessoas façam seguro de carro (contra acidentes, fenômenos naturais, roubos e furtos) e até mesmo seguro de vida.

O preço de um seguro depende de fatores diversos, entre eles o valor financeiro daquilo que corre o risco, bem como o risco assumido pelo segurador por aquilo que será segurado. Em um seguro de vida, o risco assumido pelo segurador pode depender da idade do segurado, de seus hábitos de lazer, dos índices de criminalidade da região em que vive, entre outros fatores.

Os seguros têm um custo e, portanto, devem ser planejados e incluídos no orçamento doméstico.

OUTRAS FONTES

LEONARD, A. *A história das coisas*, *obsolescência programada*. The Story of Stuff Project. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=2URu0cWVJYs. Acesso em: 18 jul. 2022.

Esse vídeo propõe uma boa oportunidade para se discutir o consumo e o consumismo, bem como para fazer conexões com os seguros e com as garantias estendidas.

BANCO Central do Brasil. *O pão da avó*. Série Eu e Meu Dinheiro. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=b7usobdYpso. Acesso em: 18 jul. 2022.

Esse vídeo mostra como tratar de maneira inteligente a questão da cultura da previsão em um ambiente familiar.

Para refletir

Responda sempre no caderno.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir. **Consulte as respostas neste manual.**

1. Qual é a relação entre a prática de esportes e a cultura de prevenção apresentada no texto? Dê exemplos de situações em que vocês poderiam se proteger e acabaram se machucando porque não quiseram usar a proteção.

2. João mora na cidade A e José, na cidade B. Ambos compraram o mesmo modelo de carro zero-quilômetro, da mesma montadora, pagando o mesmo valor pelo automóvel. Entretanto, quando foram contratar o seguro dos carros, com a mesma seguradora, os valores ficaram bem diferentes. Vejam o quadro a seguir.

	Seguro de João	Seguro de José
Cidade	A	B
Valor	R$ 2500,00	R$ 3500,00

a) Na opinião de vocês, por que o custo do seguro de João ficou menor do que o custo do seguro de José? Apresentem possíveis causas que expliquem a diferença entre os valores desses dois seguros.

b) José ficou intrigado com essa diferença e resolveu verificar qual seria o valor cobrado se ele morasse na mesma cidade que João. Observem o valor dos seguros de João e de José na cidade de João.

	Seguro de João	Seguro de José
Cidade	A	A
Valor	R$ 2500,00	R$ 3000,00

Respondam novamente à pergunta do item **a**, considerando também que José tem 21 anos e João, 40 anos.

3. Garantia estendida é um serviço para proteger o produto que você comprou depois que a garantia do fabricante acabar. Se o produto tiver algum defeito após o término da garantia do fabricante e você tiver contratado a garantia estendida, seu produto é consertado ou trocado por um novo sem necessidade de pagar por isso. Considerem que Maria comprou um equipamento eletrônico por R$ 2000,00 e que Joana comprou outro, por R$ 4000,00, ambos com garantia de um ano dada pelo fabricante. As garantias estendidas cobradas estão representadas no quadro a seguir.

	Valor do equipamento	Prazo da garantia estendida	Preço da garantia estendida
Maria	R$ 2000,00	12 meses	R$ 312,00
		24 meses	R$ 432,00
Joana	R$ 4000,00	12 meses	R$ 624,00
		24 meses	R$ 864,00

a) Na opinião de vocês, vale a pena adquirir garantia estendida em alguma dessas situações? Expliquem.

b) Podemos dizer que o preço da garantia estendida é diretamente proporcional ao valor do equipamento? Por que isso acontece? Justifiquem sua resposta.

c) Podemos dizer que o preço da garantia estendida é diretamente proporcional ao tempo da garantia estendida? Por que isso acontece? Justifiquem sua resposta.

Estúdio Nina Maria/ID/BR

DE OLHO NA BASE

Ao se reunirem em duplas e discutirem as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza, desenvolvendo a **competência geral 9**.

- Reunir os estudantes em duplas para responder às questões possibilita que eles se sintam mais à vontade para compartilhar exemplos.
- Na questão **1**, incentive os estudantes a falar abertamente, mas respeitando os que preferirem não se expor.
- No item **a** da questão **3**, aceite diferentes respostas por parte dos estudantes, desde que as justificativas sejam coerentes. No item **b**, incentive os estudantes a levantar hipóteses sobre o motivo de o preço da garantia estendida do equipamento ser diretamente proporcional ao valor do equipamento. No item **c**, incentive-os a levantar hipóteses sobre o motivo de o preço da garantia estendida do equipamento ser diretamente proporcional ao tempo da garantia estendida.

RESPOSTAS

1. Resposta possível: A relação está na possibilidade de que as coisas não saiam da melhor forma possível, conforme o esperado. Resposta pessoal.

2. **a)** Resposta pessoal. Resposta possível: O valor do seguro depende da idade do motorista, da cidade em que o carro será usado, se o carro fica em estacionamento, entre outros fatores.

b) Resposta pessoal. Resposta possível: O fator idade contribui para a diferença de valores e, aparentemente, o seguro é mais caro para pessoas mais jovens.

3. **a)** Resposta pessoal.

b) Resposta possível: Ao dobrar o preço do equipamento, o preço da garantia estendida em um mesmo período de tempo também dobrou. Logo, os valores são diretamente proporcionais. Justificativa pessoal.

c) Resposta possível: Ao dobrar o tempo, considerando o valor do produto constante, o valor da garantia não dobra. O prazo e o preço da garantia aumentam, mas não na mesma proporção. Logo, os valores não são diretamente proporcionais.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Aproveite a oportunidade para fazer um a verificação do aprendizado dos estudantes, de forma que possam compreender quais conteúdos ainda precisam ser trabalhados e quais eles já compreenderam.
- A atividade **1** permite aos estudantes, por meio da identificação do padrão, descobrir o dia da entrega na região 135 sem precisar preencher todo o quadro. Divide-se 135 por 6 e o resto da divisão indicará o dia da semana em que será feita a entrega na região. É importante que os estudantes entendam por que se divide por 6 (a cada 6 regiões esgota-se o número de dias da semana em que são feitas as entregas) e por que o resto indica o dia da semana da entrega (o resto permite associar o número que representa qualquer região aos números das seis primeiras regiões, pois a distribuição dos números associados às regiões pelos dias da semana é cíclica).
- Na atividade **3**, a cada cinco figuras o padrão se repete. O mesmo raciocínio pode ser utilizado para resolver a atividade **4**. Verifique se os estudantes relacionam o número pelo qual se deve dividir a posição da figura que se quer determinar com a posição da última figura do padrão, ou seja, uma figura antes de se repetir a primeira figura da sequência.
- Na atividade **5**, como o valor total pago e o número de horas trabalhadas são inversamente proporcionais, o produto entre elas é constante e igual a 2 000. Logo, $25x = 2\,000$ e $125y = 2\,000$. Então, $x = 80$ e $y = 16$.
- Na atividade **7**, como os números são diretamente proporcionais, a constante de proporcionalidade é dada pela razão $\frac{128}{32} = 4$. Então:

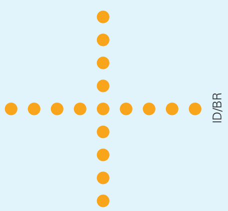
$$\frac{72}{y} = 4 \Rightarrow y = 18$$

$$\frac{40}{x} = 4 \Rightarrow x = 10$$

- Para resolver a atividade **9**, é interessante observar que, na primeira mesa, há 4 lugares e, a cada mesa que se junta, acomodam-se mais duas pessoas. Isso quer dizer que o termo geral dessa sequência pode ser escrito como $a_n = 4 + 2 \cdot (n - 1)$, em que n representa a quantidade de mesas. Assim, juntando 16 mesas, é possível acomodar 34 pessoas.

RESPOSTA

8. a)



ATIVIDADES INTEGRADAS

1. b) Resposta pessoal. Resposta possível: Regiões cujo número deixa resto 5 na divisão por 6.

1. Para entregar botijões de gás em uma cidade, uma distribuidora dividiu a cidade em 180 regiões e estabeleceu o seguinte calendário:

Dia da semana	Região de entrega		
Segunda-feira	1	7	...
Terça-feira	2	8	...
Quarta-feira	3	9	...
Quinta-feira	4	10	...
Sexta-feira	5	11	...
Sábado	6	12	...

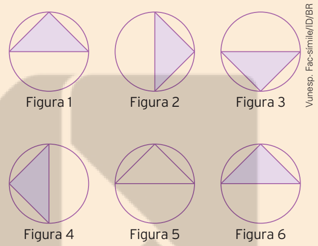
a) Em que dia da semana a região 135 será atendida? **Quarta-feira.**

b) Descreva, em palavras, as regiões servidas pela entrega de gás às sextas-feiras.

2. Dada a sequência (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...), determine a soma do 8º com o 9º termo. **145**

3. Escreva no caderno a alternativa correta.

(Vunesp) Observe a sequência de figuras a seguir.



Se a partir da figura 6 a sequência se repete na ordem apresentada, ou seja, a figura 6 é igual à figura 1, a figura 7 é igual à figura 2, a figura 8 é igual à figura 3, e assim por diante, então, a figura 169 será igual à figura: **Alternativa a.**

a) 4.
b) 3.
c) 2.
d) 5.
e) 1.

4. Observe o padrão a seguir.

1	2	3	4	5	6	7	8
↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖

9	10	11	12	13	14	15	16
↑	↗	→	↘	↓	↙	←	↖

Qual figura está na 955ª posição na sequência? E qual figura está na 2028ª posição? **955ª: →; 2028ª: ↘**

5. Registre a resposta no caderno.

(Vunesp) Três estudantes de arquitetura construíram uma maquete em conjunto e combinaram que o valor total gasto com a compra dos materiais necessários seria dividido entre eles, de forma inversamente proporcional ao número de horas que cada um trabalhou na elaboração da maquete. Observe a tabela.

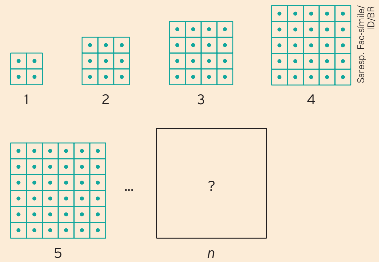
	Bruno	Eduardo	Flávio
Valor pago (R$)	100	x	125
Nº de horas trabalhadas	20	25	y

Nesse caso, pode-se afirmar que x e y valem, respectivamente: **Alternativa b.**

a) R$ 125,00 e 18 horas.
b) R$ 80,00 e 16 horas.
c) R$ 80,00 e 18 horas.
d) R$ 70,00 e 16 horas.
e) R$ 60,00 e 14 horas.

6. Registre a resposta no caderno.

(Saresp) As figuras a seguir representam caixas numeradas de 1 a n, contendo bolinhas, em que a quantidade de bolinhas em cada caixa varia em função do número dessa caixa.



A observação das figuras permite concluir que o número de bolinhas da enésima caixa é dado pela expressão: **Alternativa c.**

a) n^2.
b) $(n - 1)^2$.
c) $(n + 1)^2$.
d) $n^2 + 1$.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Na resolução das atividades dessa seção, os estudantes podem apresentar dificuldade quanto à determinação do termo geral de uma sequência. A representação de um padrão na linguagem algébrica ainda não é natural para a maioria dos estudantes nessa etapa do Ensino Fundamental. Por isso, atividades em que os estudantes precisam determinar uma regra de formação de uma sequência dada são interessantes para desenvolver o raciocínio algébrico.

A cada atividade, peça aos estudantes que analisem o padrão apresentado, descrevam com suas palavras esse padrão e somente depois tentem traduzir o que entenderam para a linguagem algébrica. Para auxiliar os estudantes que apresentarem dificuldades nas atividades e nas situações-problema envolvendo relação direta ou inversa entre as grandezas, incentive-os a elaborar situações em que aparecem duas ou mais grandezas e a determinar qual é a relação entre elas.

É importante os estudantes perceberem que as grandezas podem apresentar relações diretas ou inversas, independentemente de essas relações apresentarem proporcionalidade. Mas apenas as grandezas que são direta ou inversamente proporcionais possuem uma constante de proporcionalidade.

7. Os números x, y e 32 são diretamente proporcionais aos números 40, 72 e 128. Determine os valores de x e de y. **$x = 10$; $y = 18$**

8. Considere a seguinte sequência de figuras:

8. a) Consulte a resposta neste manual.

ID/BR

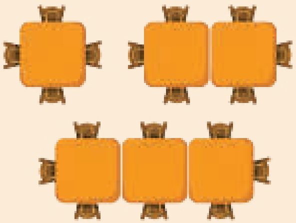
8. b) 41 pontos.

a) Represente no caderno a próxima figura dessa sequência.

b) Quantos pontos tem a figura da 10ª posição?

c) Escreva uma regra que permita calcular quantos pontos tem cada figura dessa sequência. **$a_n = 4n + 1$**

9. Considere que uma mesa quadrada acomoda quatro pessoas. Juntando duas mesas desse mesmo tipo, acomodam-se seis pessoas, e assim sucessivamente, como é mostrado na figura a seguir.

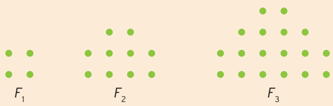


João Picoli/ID/BR

Nas mesmas condições, juntando 16 mesas idênticas a essa, qual é a quantidade de pessoas que poderão ser acomodadas? **34 pessoas.**

10. Registre no caderno a alternativa correta.

(Unioeste-PR) A figura F_1 é representada por 4 pontos formando um quadrado. Para obtermos a figura F_2, marcamos mais 6 pontos ao redor da figura F_1, formando 4 quadrados. A figura F_3 foi obtida marcando mais 8 pontos ao redor da figura F_2, formando 9 quadrados, e assim sucessivamente.



ID/BR

Continuando esse processo e considerando-se quadrados formados por apenas 4 pontos, pode-se afirmar que a figura F_{16} terá: **Alternativa a.**

a) 256 quadrados.

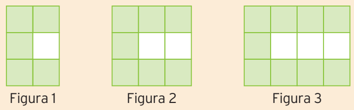
b) 428 quadrados.

c) 760 quadrados.

d) 248 quadrados.

e) 128 quadrados.

11. Observe a seguinte sequência de figuras:



ID/BR

Escreva uma regra que indique:

a) o número de quadrados brancos das figuras dessa sequência; **$a_n = n$**

b) o número de quadrados verdes das figuras dessa sequência; **$a_n = 2n + 3$**

c) o número total de quadrados das figuras dessa sequência. **$a_n = 3n + 3$**

12. Registre no caderno a alternativa correta.

(Enem) A sombra de uma pessoa que tem 1,8 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, ao seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,0 m. Se mais tarde a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir quanto? **Alternativa b.**

a) 30 cm

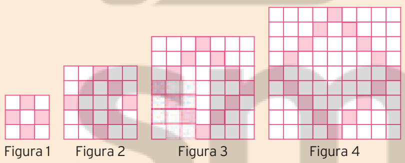
b) 45 cm

c) 50 cm

d) 80 cm

e) 90 cm

13. Cada uma das quatro figuras a seguir faz parte de uma sequência de figuras que foi construída de acordo com o mesmo padrão.



ID/BR

Suponha que a Figura 5 seja construída com o mesmo padrão das demais. Quantos quadradinhos brancos terá a Figura 5?
101 quadradinhos brancos.

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Entendi o que são sequências?
- Consegui identificar padrões e regularidades em sequências?
- Aprendi a determinar a regra de formação de uma sequência?
- Compreendi que a relação entre grandezas pode ser direta ou inversa?
- Aprendi que existem grandezas que se relacionam diretamente ou inversamente, mas não de maneira proporcional?
- Consegui determinar em uma situação-problema se as grandezas envolvidas têm uma relação direta ou inversa?
- Aprendi a calcular a constante de proporcionalidade?
- Tive dificuldade em elaborar problemas envolvendo grandezas diretamente e inversamente proporcionais?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

NESTA UNIDADE...

Competência geral
7

Competência específica de Matemática
6

Temas Contemporâneos Transversais
Ciência e Tecnologia e Multiculturalismo.

Habilidades

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

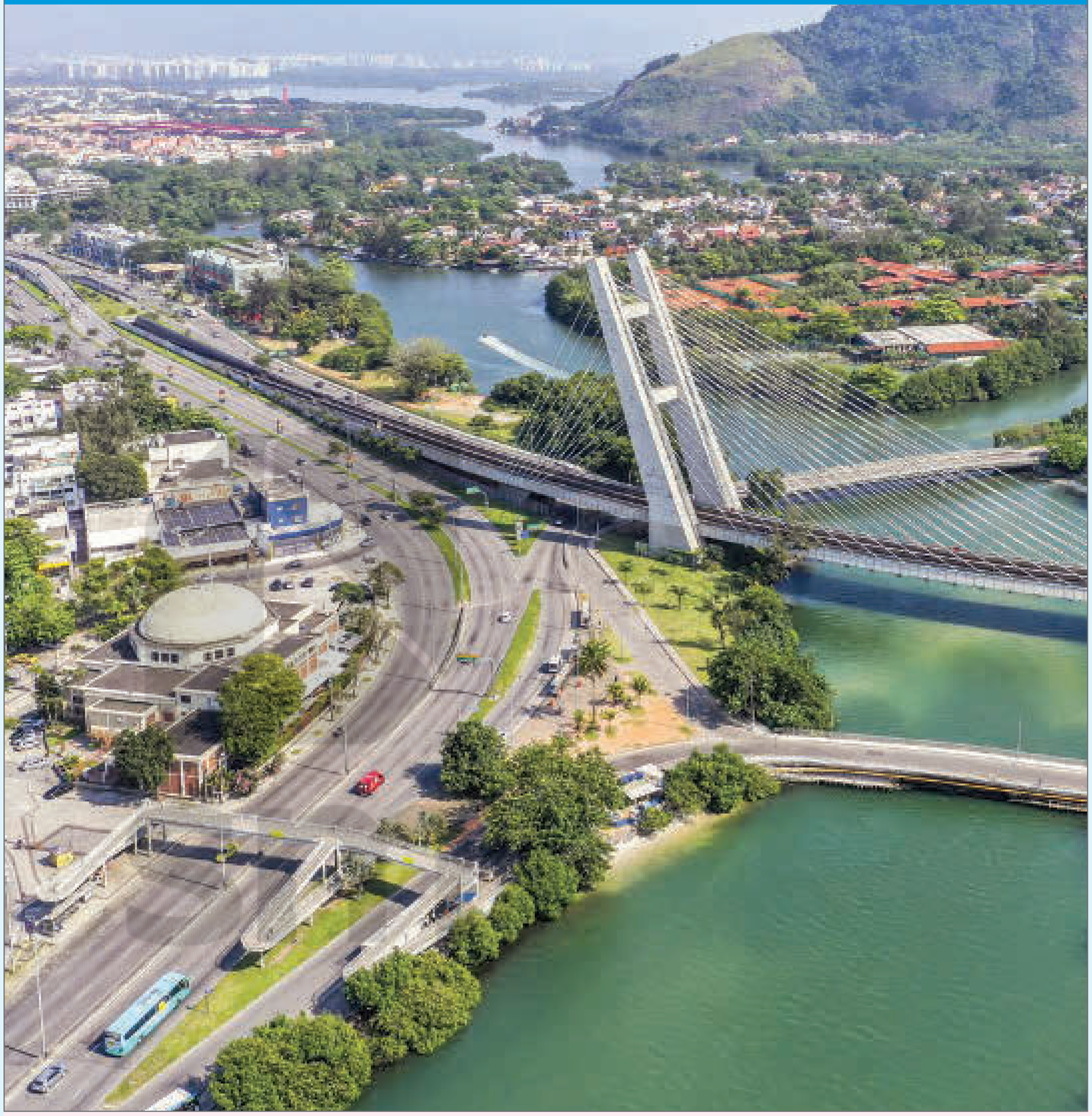
(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.

(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

UNIDADE 6

CONSTRUÇÕES E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS



SOBRE A UNIDADE

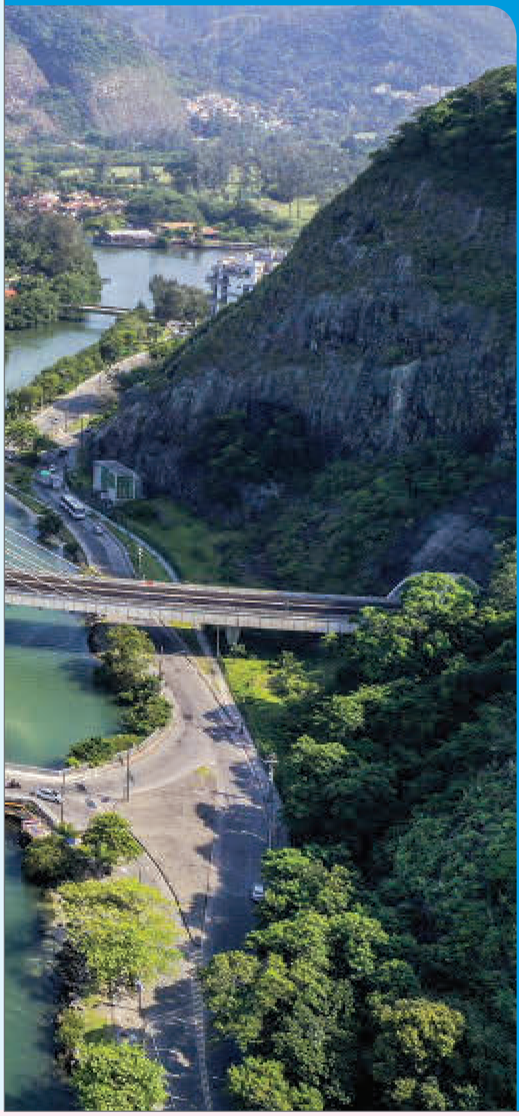
Nesta unidade, os estudantes terão a oportunidade de desenvolver a percepção sobre vários tópicos da Geometria, como polígonos e construções geométricas. Desenvolvem-se os conceitos e a construção da bissetriz de um ângulo e da mediatriz de um segmento como lugar geométrico e suas aplicações na resolução de problemas. O estudo de polígonos propicia a integração entre os componentes curriculares Matemática, Arte e Língua Portuguesa. Em Arte, os estudantes podem treinar o manuseio de instrumentos como régua, compasso, transferidor e esquadro. Em Língua Portuguesa, pode-se retomar o estudo de prefixos (tri, quadri, penta, hexa, etc.) e sufixos (gono, edro, etc.), pesquisando o significado de alguns que extrapolam o tema matemático. Assim, a nomenclatura da Geometria (pentágono, hexaedro, etc.) ganha significado para os estudantes.

A unidade dá ênfase ao estudo da Geometria por meio das construções geométricas, com a manipulação de instrumentos de desenho geométrico.

Além disso, aborda o conceito de isometria, tratando as transformações geométricas – reflexão, translação e rotação – e ampliando o estudo sobre a composição de transformações.

CAPÍTULO 1
Construções geométricas

CAPÍTULO 2
Transformações geométricas no plano



Rubens Chaves/Pulsar Imagens

PRIMEIRAS IDEIAS

Uma ponte estaiada é uma ponte suspensa por cabos de sustentação que partem de mastros e vão até o tabuleiro da ponte. Ela tem sido usada como alternativa para a construção de pontes e apresenta características que misturam elementos da ponte pênsil, que necessita de maior estrutura de cabos, e da ponte fixa, cuja estrutura de sustentação é mais elaborada e cara.

A primeira ponte estaiada brasileira foi inaugurada em 2002, em São Paulo. De lá para cá, muitas outras foram inauguradas pelo país, como é o caso da ponte estaiada da Barra da Tijuca, mostrada nesta imagem, inaugurada em 2016, no Rio de Janeiro (RJ).

1. Você conhece alguma ponte estaiada?
2. A engenharia civil é uma área em que são necessários muitos conhecimentos de Geometria e construções geométricas. Em qual outra área são necessários conhecimentos de Geometria?

← Vista aérea da ponte estaiada da Linha 4 do Metrô, entre os bairros Barra da Tijuca e Ipanema, no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2021.

157

PRIMEIRAS IDEIAS

- Peça aos estudantes que observem a imagem que abre esta unidade e pergunte: Que elementos da ponte lembram figuras geométricas? Espera-se que eles respondam, por exemplo, que os cabos se parecem com linhas retas.
- Discuta com os estudantes as diversas aplicações da Geometria na engenharia civil e na arquitetura. Comente que os conhecimentos geométricos podem ser utilizados tanto para garantir a estrutura de uma construção como para conferir elegância ao projeto arquitetônico.
- Se julgar oportuno, peça aos estudantes que pesquisem mais informações sobre a Ponte Estaiada da Barra da Tijuca.
- Incentive os estudantes a pesquisar outros exemplos de construções que se tornaram cartões-postais, como a ponte Rio-Niterói, ressaltando sua importância na ligação entre essas duas cidades.

RESPOSTAS

1. Resposta pessoal. Proponha aos estudantes que pesquisem em jornais, revistas ou na internet imagens de outras pontes estaiadas. Explique a eles que há dois tipos de ponte estaiada: a do tipo harpa, na qual os cabos partem paralelos a partir do mastro, e a do tipo leque, na qual os cabos de sustentação partem do topo do mastro.
2. Resposta pessoal. Os estudantes podem mencionar a arquitetura ou o *design*.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Conceito e construção de bissetriz de um ângulo e de mediatriz de um segmento com régua e compasso.
- Construção de ângulos de 30°, 45°, 60° e 90° com régua e compasso.
- Polígonos regulares inscritos em uma circunferência.
- Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência.
- Construção de polígonos regulares (triângulo equilátero, quadrado e octógono regular) inscritos em uma circunferência, com o auxílio de régua e compasso.
- Construção de polígonos regulares (pentágono regular, dodecágono regular e hexágono regular) inscritos em uma circunferência pelo ângulo central.

Objetivos

- Identificar e construir a bissetriz de um ângulo.
- Identificar e construir a mediatriz de um segmento.
- Reconhecer a bissetriz de um ângulo e a mediatriz de um segmento como lugar geométrico e resolver situações-problema que envolvam esses conceitos.
- Construir com régua e compasso ângulos de 30°, 45°, 60° e 90°.
- Identificar polígonos regulares inscritos em uma circunferência.
- Construir polígonos regulares inscritos em uma circunferência, com o auxílio de régua e compasso pelo ângulo central.
- Resolver situações-problema que envolvam os conceitos de ângulo central e polígono inscrito em uma circunferência.
- Compreender e descrever, por escrito e mediante um fluxograma, como construir um polígono regular inscrito em uma circunferência.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de realizar construções geométricas utilizando régua, esquadros e compasso, aprofundando conceitos vistos em momentos anteriores e atribuindo significado a cada um deles por meio de representações geométricas. Essa prática permite que eles desenvolvam o raciocínio lógico, a organização e a criatividade.

Capítulo 1

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Para o desenvolvimento deste capítulo, os estudantes precisam conhecer os conceitos de reta, semirreta, segmento de reta, ângulo (adjacente, consecutivo), retas paralelas, retas concorrentes, retas perpendiculares, polígono e circunferência. Precisam também saber construir ângulos com transferidor e manusear esquadro, régua e compasso.

Bissetriz

A bússola e a rosa dos ventos são instrumentos de localização extremamente comuns em todos os meios de navegação, antigos e atuais. Em 1302, o navegador italiano Flávio Gioja introduziu o desenho da rosa dos ventos na bússola.

Observe na imagem que na rosa dos ventos estão representados os pontos cardeais – Norte (N), Sul (S), Leste (L) e Oeste (O) – e os pontos colaterais – Nordeste (NE), Noroeste (NO), Sudeste (SE) e Sudoeste (SO).

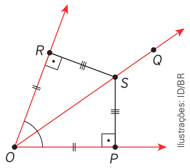
Para construir uma rosa dos ventos, utilizam-se alguns conceitos matemáticos. Note que a linha norte-sul é perpendicular à linha leste-oeste, ou seja, elas formam quatro ângulos de 90°. Observe que as linhas nordeste-sudoeste e noroeste-sudeste formam 45° com as linhas norte-sul e leste-oeste. Essas linhas foram construídas na direção das bissetrizes dos pontos cardeais.

Bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna a esse ângulo com origem em seu vértice e que o divide em dois ângulos congruentes.

Bússola de bronze.

Doomu/Shutterstock.com/ID/BR

Observe a figura.



Note que os triângulos OSP e OSR são congruentes, pelo caso LLL. Então, os ângulos $P\hat{O}S$ e $R\hat{O}S$ também são congruentes.

Assim, a semirreta $\overrightarrow{OQ}$ forma com cada um dos lados do ângulo $P\hat{O}R$ um ângulo cuja medida é igual à metade da medida do ângulo $P\hat{O}R$. Isso significa que a semirreta $\overrightarrow{OQ}$ é a bissetriz do ângulo $P\hat{O}R$.

Na figura, S é um ponto da bissetriz $\overrightarrow{OQ}$. Como os triângulos OSP e OSR são congruentes, temos que $\overline{SP} \cong \overline{SR}$. Desse modo, temos que S equidista de $\overrightarrow{OR}$ e de $\overrightarrow{OP}$.

Para qualquer ponto da bissetriz $\overrightarrow{OQ}$ podemos construir triângulos congruentes que têm lado comum em $\overrightarrow{OQ}$. Assim, todo ponto de $\overrightarrow{OQ}$ equidista dos lados do ângulo $P\hat{O}R$.

Qualquer ponto que pertença à bissetriz de um ângulo equidista dos lados desse ângulo. Assim, a bissetriz de um ângulo também pode ser entendida como o conjunto dos pontos que equidistam dos lados desse ângulo.

LUGAR GEOMÉTRICO

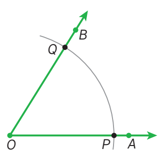
Lugar geométrico é o conjunto de todos os pontos que têm uma propriedade em comum.

A bissetriz é um lugar geométrico.

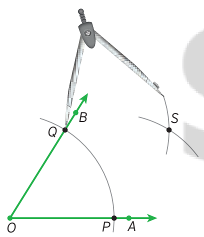
Construção da bissetriz de um ângulo com régua e compasso

Dado um ângulo $A\hat{O}B$ de abertura qualquer, vamos construir sua bissetriz.

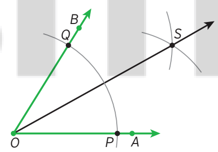
1º passo: Com a ponta-seca do compasso em O e uma abertura qualquer entre a ponta-seca e a grafite, trace um arco que determina, nos lados do ângulo $A\hat{O}B$, os pontos P e Q. As construções seguintes serão feitas na região do ângulo $A\hat{O}B$.



2º passo: Com a mesma abertura do compasso do passo anterior e com a ponta-seca em P, trace um segundo arco. Mantendo a abertura do compasso e com a ponta-seca em Q, trace um arco que determina, no segundo arco traçado, o ponto S.



3º passo: Trace a semirreta $\overrightarrow{OS}$. Essa semirreta é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, pois se traçarmos os triângulos POS e QOS, eles serão congruentes, e por isso os ângulos $P\hat{O}S$ e $Q\hat{O}S$ são congruentes.



BISSETRIZ

- Converse com os estudantes sobre o uso da bússola, instrumento de localização inventado pelos chineses, composta de uma agulha imantada e que utiliza o campo magnético da Terra para obter essa interação magnética. Incentive a turma a refletir sobre outros tipos de tecnologia que foram se aprimorando ao longo dos séculos e a contribuição desses instrumentos para diversas áreas da sociedade.
- Peça aos estudantes que citem alguns instrumentos que se aprimoraram ao longo dos tempos até os dias atuais, como a bússola para o *GPS* (sigla em inglês que significa Sistema de Posicionamento Global), que orienta os motoristas e pedestres a se localizar e a realizar itinerários. Instigue a criatividade da turma para que cite possíveis instrumentos utilizados na sociedade que poderiam ter novas funcionalidades para ajudar o cotidiano das pessoas. Essa reflexão desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Ciência e Tecnologia, que pertence à macroárea **Ciência e Tecnologia**.
- Utilize a figura da bússola para conceituar bissetriz aos estudantes. Mostre-lhes que o ponto cardeal Nordeste fica localizado numa linha entre o Norte e o Leste, que divide o ângulo de 90° em dois ângulos congruentes, com a mesma medida, no caso com 45° cada um. Depois, explique a eles que essa linha que indica o Nordeste coincide com a bissetriz do ângulo formado entre Norte e Leste. De maneira similar, mostre aos estudantes outras linhas que coincidem com outras bissetrizes na bússola. Para isso, utilize outros pontos cardeais, como o Sudeste, que coincide com a bissetriz do ângulo formado entre o Sul e o Leste, ou mesmo o Norte, que está sobre a linha que divide o ângulo de 180°, formado entre Leste e Oeste, em dois ângulos congruentes, no caso medindo 90° cada um.
- Para o estudo de construções geométricas, retome com os estudantes os conceitos de reta, semirreta, segmento de reta, ângulos, ângulo adjacente, ângulo consecutivo, retas paralelas, retas concorrentes, retas perpendiculares, polígonos e circunferência. Além disso, reveja como construir ângulos com o transferidor e como manusear esquadro, régua e compasso.
- Verifique se os estudantes compreenderam que a bissetriz de um ângulo é um lugar geométrico, pois corresponde ao conjunto de todos os pontos equidistantes aos lados desse ângulo.
- Apresente aos estudantes o passo a passo para a construção da bissetriz de um ângulo usando régua e compasso e, se julgar oportuno, peça a eles que construam no caderno a bissetriz de um ângulo qualquer.

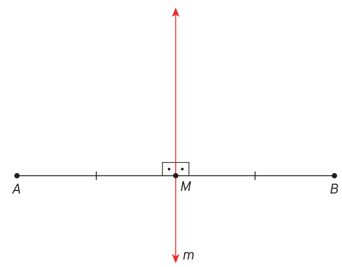
MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO

- Verifique se os estudantes compreenderam que a mediatriz de um segmento é um lugar geométrico, pois corresponde ao conjunto de todos os pontos equidistantes dos extremos desse segmento.
- Para apresentar a mediatriz como lugar geométrico, use conceitos e definições já conhecidos pelos estudantes, com o objetivo de desenvolver o raciocínio dedutivo.

Mediatriz de um segmento

Mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é a reta perpendicular que intersecta esse segmento em seu ponto médio.

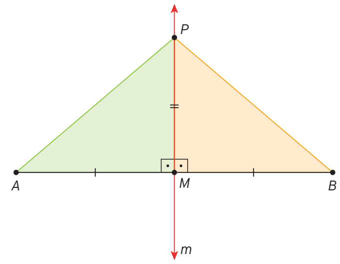
Observe a figura.



Note que a reta m é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e o intersecta em seu ponto médio M.

Dizemos então que a reta m é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Dado um ponto P pertencente a m, traçamos os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, e, a partir deles, podemos construir os triângulos AMP e BMP.



Ilustrações: ID/BR

Comparando os elementos desses triângulos, temos:

- $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, pois M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$.
- $A\widehat{M}P \cong B\widehat{M}P$
- $\overline{PM}$ é o lado comum aos dois triângulos.

Assim, pelo caso LAL, temos que os triângulos AMP e BMP são congruentes. Então, temos que $\overline{PA} \cong \overline{PB}$. Por isso, P é um ponto equidistante de A e de B.

Para qualquer ponto da mediatriz m podemos construir triângulos congruentes com lado comum em m. Assim, todo ponto de m equidista dos pontos A e B.

Qualquer ponto que pertença à mediatriz de um segmento equidista dos extremos desse segmento. Assim, a mediatriz também pode ser entendida como o conjunto dos pontos que equidistam dos extremos de um segmento, ou seja, a mediatriz é um lugar geométrico.

OUTRAS FONTES

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2013. v. 9.

Esse volume apresenta uma ampla abordagem sobre a Geometria plana, por meio de teoria, exercícios de aplicação e testes de vestibulares. Além disso, há vários artigos sobre a história da Matemática relacionados aos assuntos abordados.

EVES, H. *Geometria*. São Paulo: Atual, 2005 (Coleção Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula).

Esse livro traz exemplos do uso prático da Geometria, por meio de brincadeiras e curiosidades, entre as quais destacam-se Eratóstenes e a descoberta do tamanho da Terra, no século III a.C., a origem da palavra “geometria”, entre outras.

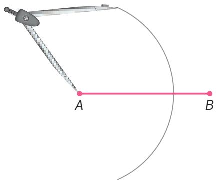
REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. Campinas: Ed. da Unicamp, 2011.

Esse livro aborda a Geometria plana, com base no modelo de teoria axiomática, com exemplos de aplicações de construções geométricas e de interações da Geometria com as demais áreas do conhecimento.

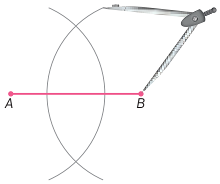
Construção da mediatriz com régua e compasso

Dado um segmento $\overline{AB}$, vamos construir sua mediatriz.

1º passo: Coloque a ponta-seca do compasso no ponto *A* e trace um arco cujo raio seja maior que a metade do segmento $\overline{AB}$.

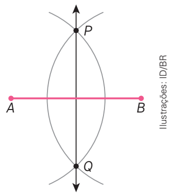


2º passo: Repita o procedimento, agora com a ponta-seca do compasso no ponto *B*, mantendo a abertura do compasso nos dois arcos.



3º passo: Marque os pontos *P* e *Q* de intersecção dos arcos e, em seguida, trace a reta que passa por esses pontos.

A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, pois *P* e *Q* são equidistantes de *A* e de *B*.



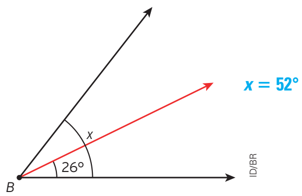
Ilustrações: ID/BR

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

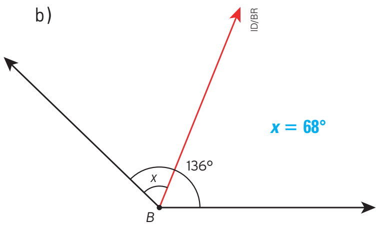
1. As figuras a seguir mostram alguns ângulos e suas respectivas bissetrizes. Determine, em cada caso, o valor de *x*.

a)



ID/BR

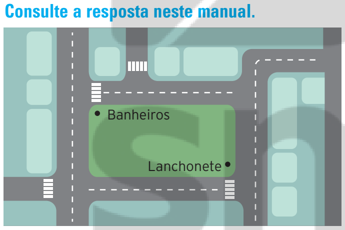
b)



ID/BR

2. Desenhe no caderno um ângulo obtuso. Utilizando um compasso, trace a bissetriz desse ângulo. **Consulte a resposta neste manual.**

3. A imagem a seguir mostra a planta de um parque. O administrador do parque quer colocar um bebedouro que esteja à mesma distância da lanchonete e dos banheiros. No caderno, reproduza a situação e mostre um possível lugar onde esse bebedouro deve ser construído. **Consulte a resposta neste manual.**

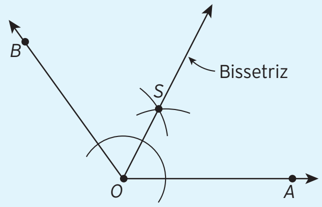


João Picoli/ID/BR

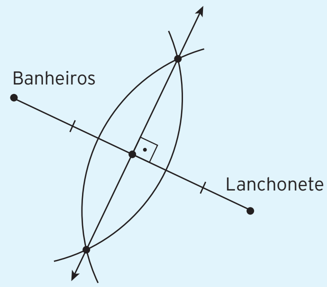
4. Desenhe no caderno um segmento qualquer e construa sua mediatriz. **Consulte a resposta neste manual.**

RESPOSTAS

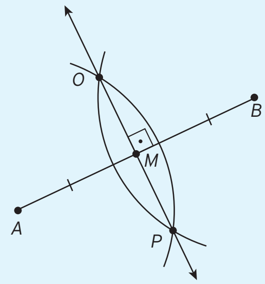
2. Construção possível:



3. O bebedouro deve ser construído em qualquer lugar sobre a mediatriz do segmento com extremidades nos pontos que representam a lanchonete e os banheiros:



4. Construção possível:



DE OLHO NA BASE

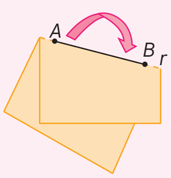
As atividades **2**, **3** e **4** possibilitam aos estudantes construir, utilizando instrumentos de desenho, a mediatriz de um segmento e a bissetriz de um ângulo, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA15**.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

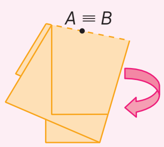
Esta atividade possibilita aos estudantes se apropriar do conceito de mediatriz, com o uso de dobraduras, e pode ser sugerida antes do trabalho efetivo com a régua e o compasso.

Oriente os estudantes nos passos a seguir.

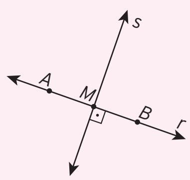
1º passo: Marque em uma folha de papel avulsa dois pontos, *A* e *B*, e ligue-os formando o segmento $\overline{AB}$. Dobre a folha de maneira que o vinco coincida com o segmento $\overline{AB}$, determinando a reta *r*.



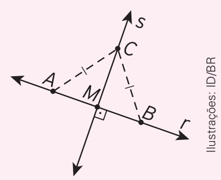
2º passo: Dobre novamente o papel, agora fazendo coincidir o ponto *A* com o ponto *B*.



3º passo: Desdobre o papel. O segundo vinco determina a reta *s*. Nomeie de *M* o ponto de intersecção das retas *r* e *s*.



4º passo: Marque um ponto *C*, não coincidente com *M*, sobre a reta *s*. Em seguida, faça uma dobra que coincida com o segmento $\overline{AC}$ e outra coincidindo com $\overline{BC}$.



Ilustrações: ID/BR

Desdobrando o papel, é possível verificar que $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são segmentos congruentes e que a reta *s* é perpendicular a $\overline{AB}$ e passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$; portanto, a reta *s* é a mediatriz de $\overline{AB}$.

CONSTRUÇÃO DE ÂNGULOS COM RÉGUA E COMPASSO

- Leia com os estudantes o passo a passo para a construção dos ângulos de 60°, 30°, 90° e 45°. Depois, se julgar conveniente, peça a eles que façam no caderno as construções desses ângulos.
- Na atividade **5**, chame a atenção dos estudantes para o fato de que, para se obter a medida do ângulo *x* da figura, basta calcular o ângulo suplementar de 60°.
- Amplie a atividade **7** propondo aos estudantes que construam um ângulo de 75° a partir do ângulo de 150°, utilizando o conceito de bissetriz.

DE OLHO NA BASE

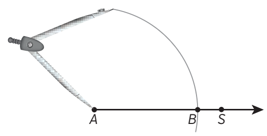
Na atividade **6**, os estudantes devem construir, utilizando instrumentos de desenho, ângulos de 90°, 60°, 45° e 15°, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA15**.

Construção de ângulos com régua e compasso

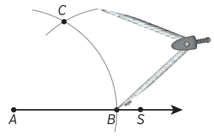
Vamos construir alguns ângulos utilizando régua e compasso.

Construção do ângulo de 60°

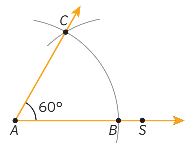
1º passo: Trace uma semirreta $\overrightarrow{AS}$. Com a ponta-seca do compasso em *A* e uma abertura qualquer, trace um arco que intersecta $\overrightarrow{AS}$ no ponto *B*.



2º passo: Com a mesma abertura do compasso, coloque a ponta-seca em *B* e trace um arco que intersecta o anterior, determinando o ponto *C*.



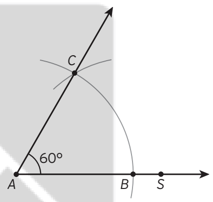
3º passo: Trace a semirreta $\overrightarrow{AC}$. Tem-se que med($B\hat{A}C$) = 60°, pois o triângulo *ABC* é equilátero.



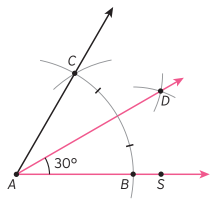
Ilustrações: ID/BR

Construção do ângulo de 30°

1º passo: Construa um ângulo de 60°.



2º passo: Trace a bissetriz do ângulo de 60°, obtendo um ângulo $B\hat{A}D$ cuja medida é a metade de 60°, ou seja, 30°.

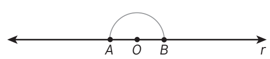


Construção do ângulo de 90°

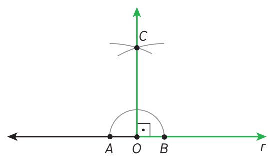
Veja a seguir duas maneiras diferentes de construir um ângulo de 90° com régua e compasso.

1ª maneira: Traçando a bissetriz do ângulo de 180°.

1º passo: Trace uma reta *r* e marque um ponto *O*. Com centro em *O*, trace um arco de circunferência de 180°, determinando em *r* os pontos *A* e *B*.



2º passo: Construa a bissetriz do ângulo de 180°, obtendo um ângulo $B\hat{O}C$ cuja medida é metade de 180°, ou seja, 90°.



162

(IN)FORMAÇÃO

Desenhar para aprender

Um grupo de professores e psicólogos de países de língua inglesa tem feito crescer um movimento para que atividades de desenho com estudantes rompam as fronteiras da educação artística e entrem nas aulas de ciências.

Uma série de novos estudos tem mostrado que alunos são capazes de construir melhores interpretações de conceitos científicos quando eles próprios se envolvem na produção de imagens para representá-los.

Iniciativas nos Estados Unidos, Reino Unido e Austrália têm tido sucesso tanto com crianças de dez anos quanto com estudantes de graduação em faculdades.

[…]

[Segundo os pesquisadores] A razão para o sucesso […] é que o desenho torna mais fácil para o docente identificar noções erradas sobre o que é ensinado.

“Quando você produz um desenho, é preciso ser muito explícito […]” [disse a coordenadora do movimento, que é inglesa]. “Não há onde se esconder quando você tem de expor sua compreensão sobre determinado assunto com um desenho.”

Segundo a pesquisadora, dinâmica semelhante ocorre quando os alunos têm de produzir um texto, mas alguns tópicos são mais sensíveis ao poder gráfico (que impede que estudantes apenas recitem frases de manuais).

O desenho em aulas de ciência é mais que uma ferramenta de avaliação da aprendizagem, mas também […] tem impacto no seu próprio processo. Seu uso mais importante, defendem os educadores, é dar oportunidade de construir raciocínios visuais.

[…]

O desenho também tem sido usado para que estudantes possam ensinar outros.

[…]

“Quando desenham, estão aproveitando para clarear as próprias ideias” [diz uma pesquisadora do uso de imagens para comunicação da ciência nos Estados Unidos].

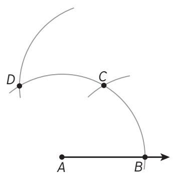
[…]

[…] deve-se gastar mais tempo pondo estudantes para desenhar.

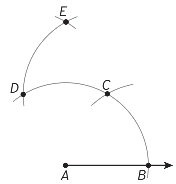
GARCIA, R. Desenhar para aprender. *Folha de S.Paulo*, 5 set. 2011, p. C9. Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br/fsp/saber/sb0509201101.htm. Acesso em: 14 jun. 2022.

2ª maneira: Construindo dois ângulos adjacentes de 60° e traçando a bissetriz do segundo ângulo de 60°, juntando um ângulo de 60° com um ângulo de 30°, obtendo um ângulo de 90°.

1º passo: Execute os passos 1 e 2 da construção de um ângulo de 60°. Com a mesma abertura do compasso, trace um arco, centrado em *C*, que intersecta o primeiro arco traçado no ponto *D*, diferente de *B*. Assim, med($B\hat{A}D$) = = 120°.

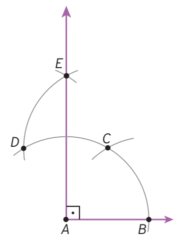


2º passo: Com a mesma abertura do compasso e ponta-seca em *D*, trace um arco que intersecta o arco traçado no ponto *E*.



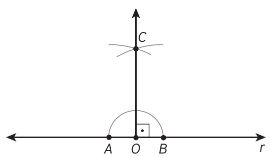
Ilustrações: ID/BR

3º passo: Trace a semirreta $\overrightarrow{AE}$, bissetriz do ângulo $C\hat{A}D$. Desse modo, med($B\hat{A}E$) = 90°. Observe que a semirreta $\overrightarrow{AE}$ é perpendicular à semirreta $\overrightarrow{AB}$ no ponto *A*.

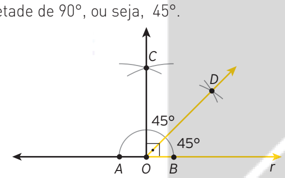


Construção do ângulo de 45°

1º passo: Construa um ângulo de 90°.



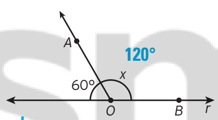
2º passo: Trace a bissetriz do ângulo de 90°, obtendo um ângulo $B\hat{O}D$ cuja medida é metade de 90°, ou seja, 45°.



ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

5. Observe a figura ao lado e indique qual é a medida do ângulo $A\hat{O}B$. **120°**



6. Construa ângulos com as seguintes medidas: **Consulte as respostas neste manual.**

a) 90° b) 60° c) 45° d) 15°

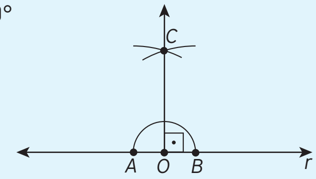
7. Construa um ângulo de 150° e outro de 75°: **Consulte as respostas neste manual.**

a) por adição de medidas de ângulos; b) por subtração de medida de ângulos.

RESPOSTAS

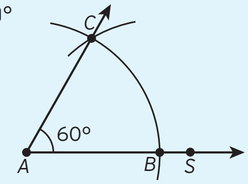
6. Construções possíveis:

a) 90°

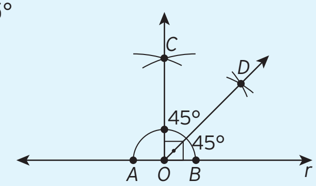


Ilustrações: ID/BR

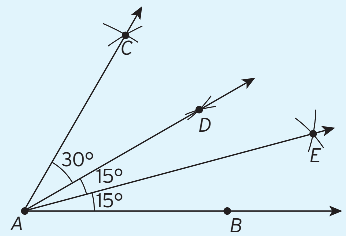
b) 60°



c) 45°

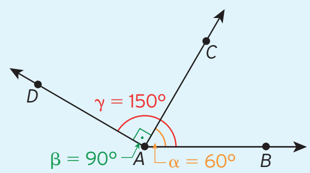


d) 15°

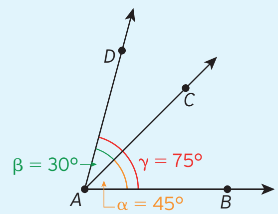


7. Respostas possíveis:

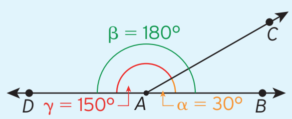
a) • 150° = 60° + 90°



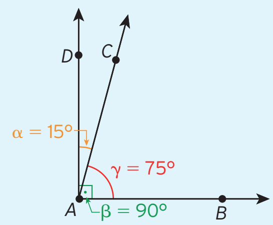
• 75° = 45° + 30°



b) • 150° = 180° − 30°

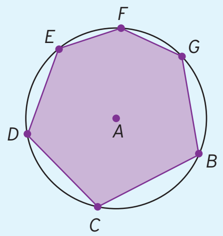


• 75° = 90° − 15°

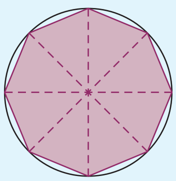


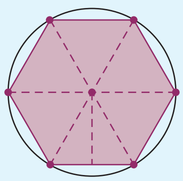
POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS EM UMA CIRCUNFERÊNCIA

- Mostre aos estudantes que polígonos regulares estão inscritos em uma circunferência quando todos os vértices são pontos da circunferência e os lados do polígono são cordas da circunferência. Nesse caso, pode-se dizer que a circunferência está circunscrita ao polígono.
- Se julgar conveniente, peça aos estudantes que desenhem livremente o esboço de alguns polígonos (regulares ou não) inscritos na circunferência. Por exemplo, o hexágono *BCDEFG* está inscrito na circunferência de centro *A* (ou a circunferência está circunscrita ao hexágono *BCDEFG*).

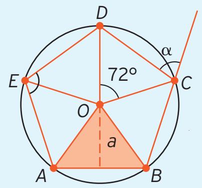


- Mostre aos estudantes que os polígonos regulares inscritos em uma circunferência podem ser divididos em triângulos congruentes, como no octógono e no hexágono regulares a seguir.


octógono regular


hexágono regular

- Reproduza na lousa um polígono regular inscrito em uma circunferência. Depois, identifique e nomeie os elementos desse polígono, como no pentágono regular a seguir:



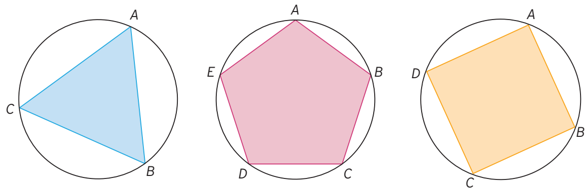
- *O* é o centro da circunferência na qual o polígono está inscrito;
- *a* é o apótema, altura do triângulo *AOB*;
- $C\hat{O}D$ é o ângulo central. Ele mede 72°, pois 360° : 5 = 72°;
- $A\hat{E}D$ é o ângulo interno. Ele mede 108°, pois $S_i = (5 - 2) \cdot 180° = 540°$; logo, $a_i = 540° : 5 = 108°$;
- α é o ângulo externo, que mede 72°, pois $a_i + a_e = 180°$.

LEMBRE-SE!

- Um polígono é regular se todos os seus lados forem congruentes e todos os seus ângulos forem congruentes.
- Um segmento que tem suas extremidades na circunferência chama-se **corda**.

Polígonos regulares inscritos em uma circunferência

Observe as figuras a seguir.

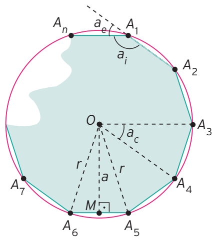


Ilustrações: ID/BR

Note que todos os vértices dos polígonos são pontos da circunferência, ou seja, todos os lados são cordas da circunferência. Dizemos que os polígonos dessas figuras estão **inscritos** na circunferência e que as circunferências estão **circunscritas** aos polígonos.

Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência

Na figura a seguir, destacamos alguns elementos de um polígono regular de *n* lados.



Centro (*O*): ponto equidistante a todos os vértices do polígono. Esse ponto corresponde ao centro da circunferência na qual o polígono está inscrito.

Apótema (*a*): segmento com extremos no centro do polígono e no ponto médio (*M*) de um de seus lados.

Ângulo central (a_c): ângulo de menor medida cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono.

Ângulo interno (a_i): ângulo de menor medida formado por dois lados consecutivos do polígono.

Ângulo externo (a_e): ângulo suplementar adjacente a um ângulo interno.

Observe que os segmentos $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$, ..., $\overline{OA_n}$ são raios (*r*) da circunferência circunscrita ao polígono e representam a distância do centro do polígono a um vértice dele.

Note também que em um polígono a quantidade de ângulos centrais é igual à quantidade de vértices que ele possui e que, se o polígono é regular, todos os ângulos centrais têm a mesma medida.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

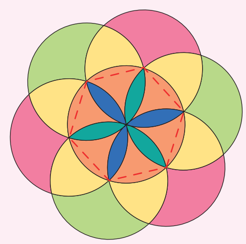
Esta atividade proporciona aos estudantes que utilizem o compasso de forma lúdica, desenhando uma rosácea e construindo um hexágono regular inscrito em uma circunferência.

1º passo: Em uma folha de papel avulsa, utilizando o compasso, trace uma circunferência. Ela será o centro da rosácea.

2º passo: Mantenha a mesma abertura do compasso e trace outra circunferência com centro sobre qualquer ponto da anterior.

3º passo: Mantenha a mesma abertura do compasso e, com a ponta-seca na intersecção das duas circunferências anteriores, trace uma nova circunferência.

4º passo: Repita o 3º passo até obter seis circunferências em torno da circunferência inicial. A circunferência inicial ficará dividida em seis partes congruentes, dando origem a um hexágono regular (linha pontilhada em vermelho) inscrito na circunferência.


Ilustrações: ID/BR

Construção de polígonos regulares inscritos em uma circunferência

Observe como podemos construir alguns polígonos regulares inscritos em uma circunferência.

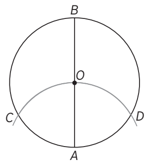
Triângulo equilátero

Vamos inscrever um triângulo equilátero em uma circunferência de raio de medida *r* qualquer.

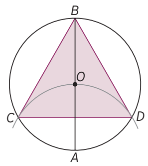
1º passo: Trace uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r*.

2º passo: Trace o diâmetro $\overline{AB}$.

3º passo: Com a ponta-seca do compasso em *A* e raio de medida *r*, trace um arco, determinando os pontos *C* e *D*.



4º passo: Trace $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$, determinando o triângulo equilátero *BCD*.



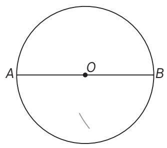
Ilustrações: ID/BR

Quadrado

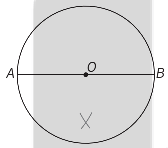
Vamos inscrever um quadrado em uma circunferência de raio de medida *r* qualquer.

1º passo: Trace uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r*.

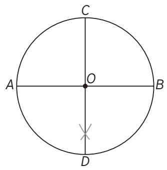
2º passo: Trace o diâmetro $\overline{AB}$. Com a ponta-seca do compasso em *B* e a abertura do compasso maior que a medida do raio, trace um arco.



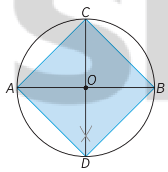
3º passo: Com a ponta-seca do compasso em *A* e mantendo a abertura do compasso, trace um arco que intersecta o arco traçado no passo anterior.



4º passo: Trace o segmento que passa por *O* e pelo ponto de intersecção dos arcos desenhados nos passos anteriores, de maneira a traçar o diâmetro $\overline{CD}$, perpendicular ao diâmetro $\overline{AB}$.



5º passo: Trace $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, determinando o quadrado.



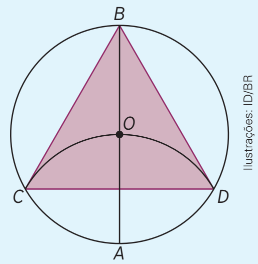
- Explore com os estudantes as técnicas de construção do triângulo equilátero, do quadrado e do octógono regular inscritos na circunferência com o auxílio da régua e do compasso.
- Solicite aos estudantes que realizem a construção dessas figuras, prestando atenção ao traçado e à nomenclatura adequada, sempre observando os elementos que compõem essas figuras, assim como suas propriedades. Isso lhes propiciará a construção de uma figura mais precisa e embasará o estudo dos elementos dessas figuras na Geometria.

DE OLHO NA BASE

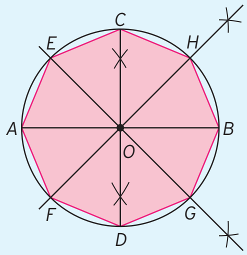
As atividades propostas nesta página permitem aos estudantes construir, utilizando instrumentos de desenho, polígonos regulares, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA15**.

RESPOSTAS

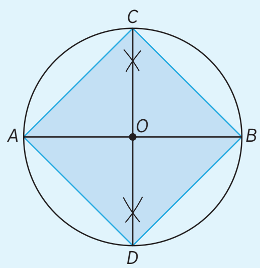
8. Construção possível:



9. Construção possível:



10. Construção possível:

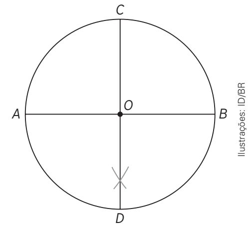


Octógono regular

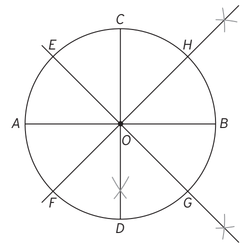
Vamos inscrever um octógono regular em uma circunferência de raio de medida *r* qualquer.

1º passo: Trace uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r*.

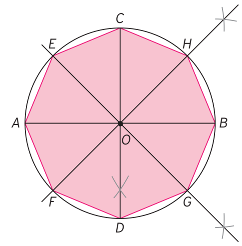
2º passo: Trace os diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ perpendiculares entre si.



3º passo: Com um compasso, trace as bissetrizes dos ângulos formados por $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, determinando os pontos *E*, *F*, *G* e *H* sobre a circunferência.



4º passo: Trace $\overline{AF}$, $\overline{FD}$, $\overline{DG}$, $\overline{GB}$, $\overline{BH}$, $\overline{HC}$, $\overline{CE}$ e $\overline{EA}$, determinando o octógono regular.



ATIVIDADES Consulte as respostas neste manual. Responda sempre no caderno.

8. Construa um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio medindo 3 cm.

9. Divida uma circunferência de raio medindo 4,5 cm em oito partes iguais e inscreva nela o polígono correspondente.

10. Inscreva um quadrado em uma circunferência de raio medindo 5 cm.

Construção de polígonos regulares pelo ângulo central

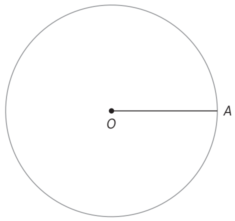
Adicionando todas as medidas dos ângulos centrais de um polígono, obtemos 360°. Dessa forma, para construir um polígono regular pelo ângulo central, precisamos primeiro determinar a medida desse ângulo dividindo 360° pelo número de lados do polígono regular que desejamos construir.

Pentágono regular

O pentágono regular é um polígono que possui cinco lados congruentes. Assim, a medida de cada ângulo central será de 72° (360° : 5 = 72°).

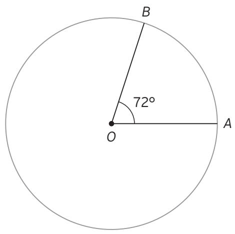
1º passo: Trace uma circunferência de raio de medida *r* qualquer e centro *O*.

2º passo: Trace o raio $\overline{OA}$, marcando o ponto *A* na circunferência.

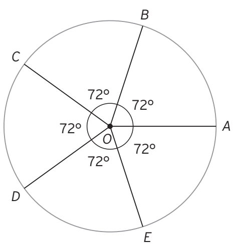


Ilustrações: ID/BR

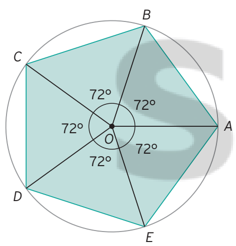
3º passo: Com o transferidor, marque o ângulo de 72° com um dos lados em $\overline{OA}$ e trace o raio $\overline{OB}$.



4º passo: Repita o 3º passo três vezes, determinando os raios $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OE}$.



5º passo: Trace os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$, obtendo o pentágono regular.



- Retome com os estudantes que a circunferência mede 360°. Explique a eles que, para construir um polígono regular inscrito em uma circunferência pelo ângulo central, precisamos inicialmente determinar a medida do ângulo central do polígono que queremos construir.
- Reforce para os estudantes que a medida do ângulo central de um polígono regular é o quociente entre 360° e a quantidade de lados do polígono em questão. Dessa maneira, é possível construir qualquer polígono regular inscrito em uma circunferência com o auxílio de um transferidor.
- Se julgar conveniente, peça aos estudantes que construam no caderno um quadro com o número de lados de alguns polígonos regulares e a medida do ângulo central correspondente a cada um desses polígonos.

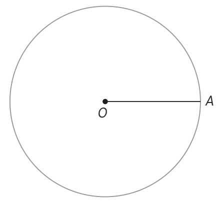
- Comente com os estudantes que, além do transferidor, eles podem utilizar os esquadros para construir o ângulo central quando este medir 30°, 45°, 60° ou 90°.
- É importante verificar se os estudantes estão posicionando o esquadro de maneira correta, ou seja, verifique se o vértice do instrumento coincide com o centro da circunferência.

Dodecágono regular

O dodecágono regular é um polígono que possui doze lados congruentes. Assim, a medida de cada ângulo central será de 30° (360° : 12 = 30°).

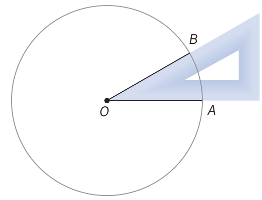
1º passo: Trace uma circunferência de raio de medida *r* qualquer e centro *O*.

2º passo: Trace o raio $\overline{OA}$, marcando o ponto *A* na circunferência.

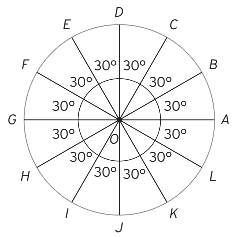


Ilustrações: ID/BR

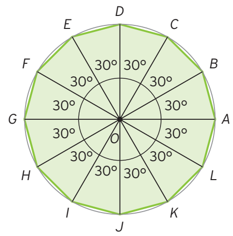
3º passo: Com o esquadro, marque o ângulo de 30° com um dos lados em $\overline{OA}$ e trace o raio $\overline{OB}$.



4º passo: Repita o 3º passo dez vezes, determinando os raios $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{OG}$, $\overline{OH}$, $\overline{OI}$, $\overline{OJ}$, $\overline{OK}$ e $\overline{OL}$.



5º passo: Trace os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$, $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$, $\overline{KL}$ e $\overline{LA}$, obtendo o dodecágono regular.



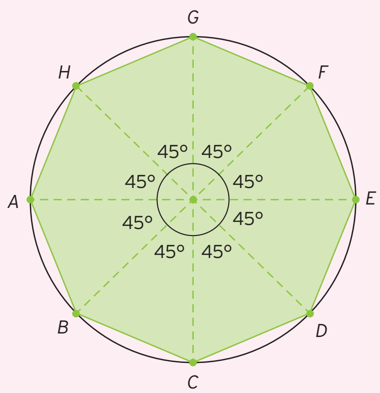
ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Construa um octógono regular inscrito em uma circunferência de raio medindo 5 cm, utilizando um esquadro de 45° e um compasso.

Para realizar a atividade, os estudantes devem construir com o compasso uma circunferência de raio medindo 5 cm e calcular o valor do ângulo central do octógono:

360° : 8 = 45°

Para construir o octógono, eles devem construir os ângulos centrais com o auxílio do esquadro de 45°, obtendo, desse modo, a figura pedida, como mostra a figura ao lado.



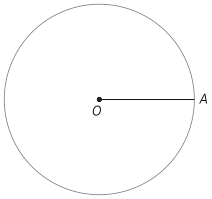
ID/BR

Hexágono regular

O hexágono regular é um polígono que possui seis lados congruentes. Assim, a medida de cada ângulo central será de 60° (360° : 6 = 60°).

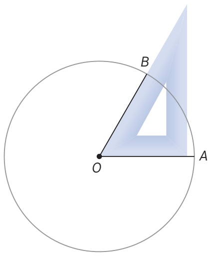
1º passo: Trace uma circunferência de raio de medida *r* qualquer e centro *O*.

2º passo: Trace o raio $\overline{OA}$, marcando o ponto *A* na circunferência.

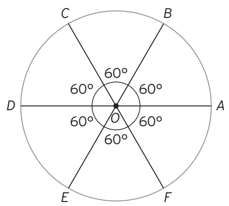


Ilustrações: ID/BR

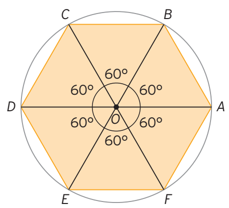
3º passo: Com o esquadro, marque o ângulo de 60° com um dos lados em $\overline{OA}$ e trace o raio $\overline{OB}$.



4º passo: Repita o 3º passo quatro vezes, determinando os raios $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$.



5º passo: Trace os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$, obtendo o hexágono regular.



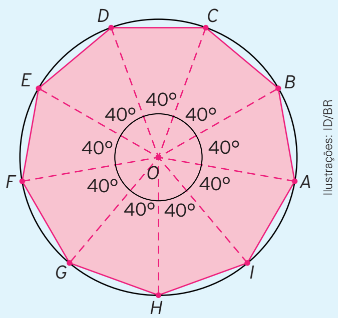
- Se julgar oportuno, solicite aos estudantes que escolham um ou dois polígonos regulares para construir, no caderno, utilizando o esquadro ou o transferidor.

DE OLHO NA BASE

O conteúdo desta página busca apresentar aos estudantes um algoritmo, representado em um fluxograma, para a construção de um hexágono regular de qualquer medida de área, a partir da medida do ângulo central e com a utilização de um compasso e de um esquadro (ou transferidor), favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA16**. Espera-se que, ao compreender esse fluxograma, os estudantes sejam capazes de expandir o conhecimento e descrever, com autonomia, fluxogramas com algoritmos, para a construção de outros polígonos regulares.

RESPOSTA

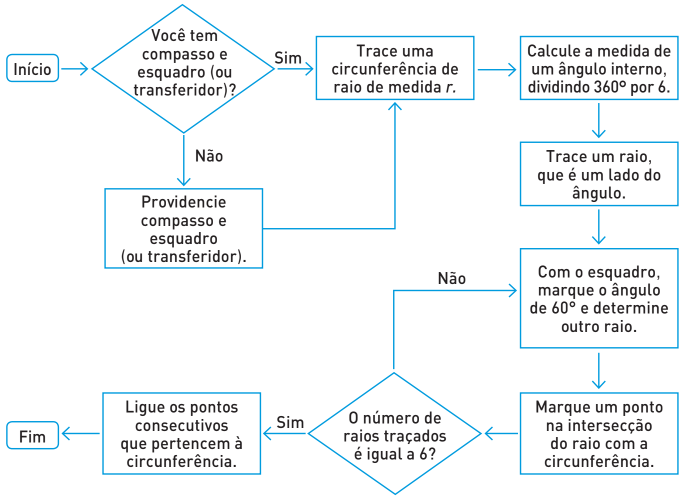
12. Construção possível:



O polígono obtido foi o eneágono regular.

Podemos representar a construção de polígonos regulares com um fluxograma. Veja a seguir o fluxograma para construir um hexágono regular.

Se julgar oportuno, proponha aos estudantes que construam um hexágono regular utilizando o fluxograma apresentado.



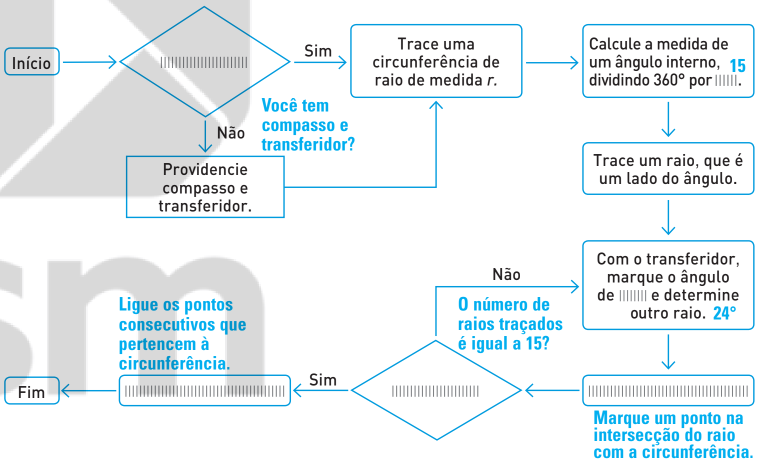
ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

11. Utilizando o esquadro de 45°, que polígonos regulares podemos inscrever em uma circunferência? **Quadrado e octógono regular.**

12. Utilizando compasso e transferidor, construa um polígono regular cujo ângulo central meça 40°. Que polígono você obteve? **Consulte a resposta neste manual.**

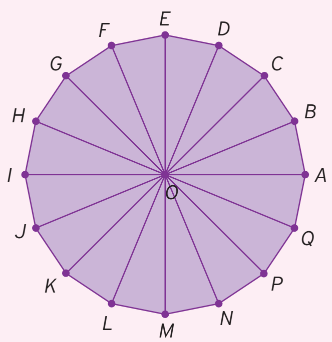
13. Copie e complete, no caderno, o fluxograma a seguir para a construção de um pentadecágono regular (polígono de 15 lados).



170

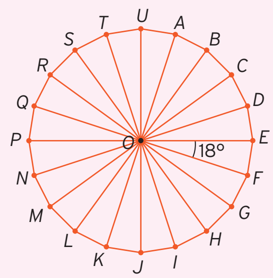
RESPOSTAS – SEÇÃO *DIVERSIFICANDO*

3. Construção possível:



8. a) Descrição possível: Trace uma circunferência de centro O e raio medindo 4 cm. Divida 360° pelo número de lados do polígono: $\frac{360°}{20} = 18°$. Trace o raio $\overline{OA}$, que é um lado do ângulo. Com o transferidor, marque o ângulo de 18° e determine o raio $\overline{OB}$. Com a ponta-seca do compasso em A e a ponta do grafite em B, obtenha a abertura do compasso correspondente à medida do lado do icoságono. Transporte esse segmento formando os demais vértices e, por fim, ligue-os, obtendo o icoságono.

b)

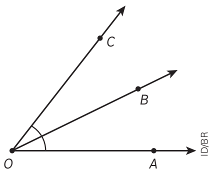


c) Resposta pessoal.

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. Observe a figura.

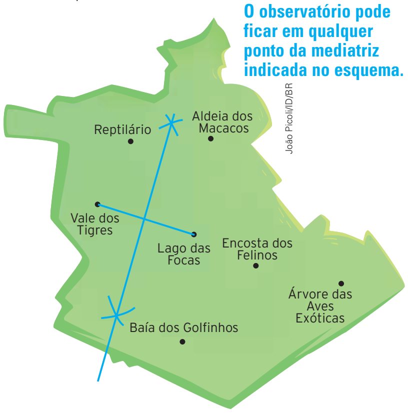


A semirreta $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$ e o ângulo $A\hat{O}B$ mede 28°. Qual é a medida dos ângulos $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C$? **$B\hat{O}C$ = 28°; $A\hat{O}C$ = 56°**

2. Em um parque estadual de preservação ambiental será construída uma área para viveiros. O esquema mostra como deverá ser feita essa área. Pretende-se colocar um pequeno observatório que esteja à mesma distância do vale dos Tigres e do lago das Focas.

Reproduza a situação no caderno e mostre onde poderia ficar esse observatório.

O observatório pode ficar em qualquer ponto da mediatriz indicada no esquema.

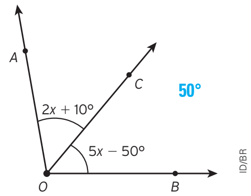


3. Seguindo os passos da construção de um polígono regular por meio de seu ângulo central e utilizando um transferidor para a construção do ângulo, construa no caderno um polígono regular de 16 lados. **Consulte a resposta neste manual.**

4. Usando um transferidor, construa no caderno um ângulo de 135°. Depois, construa sua bissetriz. Quanto mede cada ângulo formado pela bissetriz do ângulo que você construiu? **Construção pessoal. 67° 30′.**

5. Construa um ângulo de 105° e descreva o procedimento que você usou. **Resposta pessoal.**

6. Encontre a medida de $B\hat{O}C$, sabendo que a semirreta $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.



50°

7. Ao construir a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ a seguir e obter o ponto M, qual será a medida dos segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$? **3,5 cm**

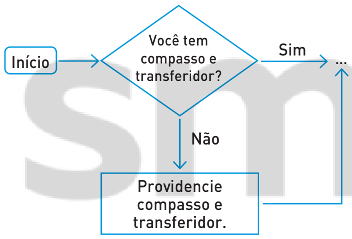
8. Um icoságono é um polígono de 20 lados. Reúna-se com um colega para fazer o que se pede em cada item. **Consulte as respostas neste manual.**

a) Descrevam, com suas palavras, o passo a passo de como construir, com régua e transferidor, um icoságono regular inscrito em uma circunferência de raio medindo 4 cm.

b) Troquem a descrição que vocês fizeram com outra dupla e construam o polígono descrito por ela.

c) A descrição feita pela outra dupla foi parecida com a de vocês? Conversem com os colegas e o professor.

d) Copiem no caderno o início do fluxograma a seguir e completem-no de modo que ele descreva o passo a passo da construção de um icoságono regular inscrito em uma circunferência.



ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **5**, os estudantes podem usar adição ou subtração de ângulos para obter o ângulo de 105°:
  - $60° + 45° = 105°$
  - $90° + 45° - 30° = 105°$
  - $180° - 30° - 45° = 105°$

DE OLHO NA BASE

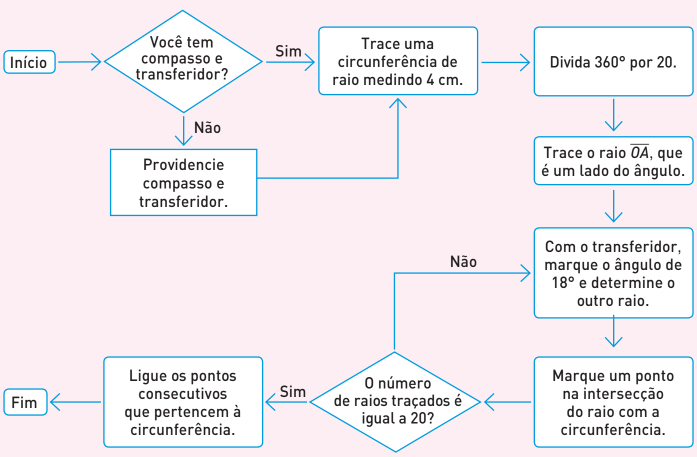
A atividade **2** permite aos estudantes aplicar o conceito de mediatriz de um segmento como lugar geométrico para resolver uma situação-problema, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA17**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Caso os estudantes apresentem dificuldade, proponha as atividades a seguir, procurando auxiliá-los. Esclareça as dúvidas que porventura permanecerem.

1. Construa, com o auxílio de um transferidor, um ângulo agudo, um obtuso e outro maior que 180° e menor que 360°. Em seguida, trace, utilizando régua e compasso, a bissetriz de cada um deles.
2. Trace três segmentos não congruentes. Em seguida, utilizando régua e compasso, trace a mediatriz de cada um deles.
3. Construa um polígono regular utilizando apenas régua e compasso. Em seguida, construa o mesmo polígono utilizando também o transferidor.
4. Compare as duas maneiras para construir o polígono da atividade anterior e explique as diferenças entre elas.
5. Escolha uma das duas maneiras e monte um fluxograma que represente a construção do polígono que você escolheu.

d)



CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Isometrias.
- Transformações geométricas por reflexão, translação e rotação.

Objetivos

- Compreender a translação como o deslocamento de todos os pontos de uma figura, em uma mesma direção, um mesmo sentido e uma mesma distância.
- Entender que a rotação é a transformação de uma figura por meio de um giro por um ângulo fixo em torno de um ponto também fixo.
- Compreender que a reflexão acontece quando dois pontos são simétricos em relação a uma reta.
- Reconhecer figuras com simetria em relação a uma reta, com simetria central, transladadas e com composição de transformações.
- Construir figuras por transformações geométricas no plano.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo das transformações geométricas, compreendendo aquelas que envolvem a composição de transformações, utilizando como suporte malhas quadriculadas e *softwares* de geometria dinâmica. Essas atividades contribuem para o desenvolvimento do raciocínio espacial, permitindo que o estudante seja capaz de projetar mentalmente as transformações geométricas apresentadas.

ISOMETRIAS

- Aproveite a imagem de abertura deste capítulo para comentar sobre o pião, que é um brinquedo cujo registro data há mais de 4 mil anos e esteve presente em diversas civilizações.
- Pergunte se os estudantes conhecem esse brinquedo, se já brincaram com ele e se eles sabem se seus pais, avós ou responsáveis tinham o costume de brincar com ele. Se possível, realize uma atividade interdisciplinar com o componente curricular Educação Física para desenvolver a interação entre os estudantes e a coordenação motora deles, além de preservar a tradição da cultura de jogos tradicionais. Essa reflexão desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal** Diversidade Cultural, que pertence à macroárea **Multiculturalismo**.
- Comunique aos estudantes que o estudo das transformações de figuras no plano – por reflexão, rotação e translação – e da simetria entre o objeto e a imagem tem diversas aplicações no cotidiano e em outras áreas de conhecimento, como na Física e na Biologia.

Capítulo 2 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

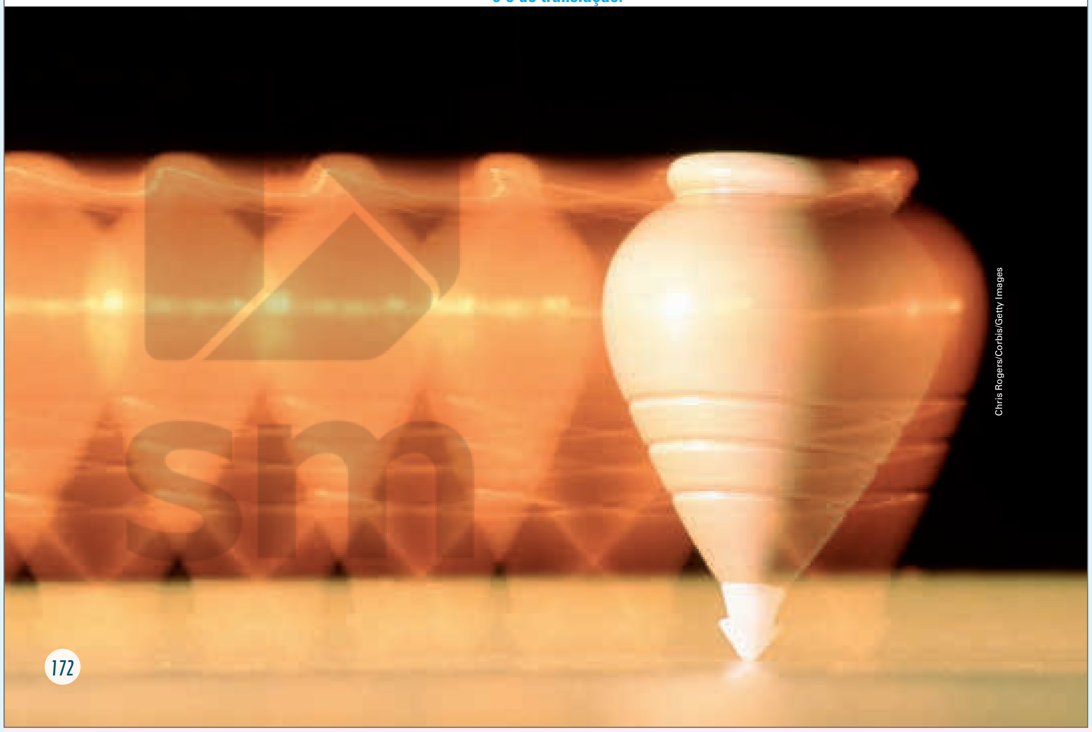
Para o desenvolvimento deste capítulo, os estudantes precisam ter algum conhecimento sobre transformações geométricas no plano, saber manusear instrumentos de desenho e conhecer *software* de geometria dinâmica.

Isometrias

A imagem a seguir é o registro de um pião em movimento. Para brincar com esse tipo de pião, é preciso enrolar um cordão, chamado de fieira, em torno dele. Segurando a ponta do cordão, o jogador lança o pião com habilidade no chão, para que ele gire rapidamente e por longo tempo. Esse brinquedo é encontrado em diversas culturas. Registros arqueológicos indicam que sua origem é muito antiga. Na Grécia e em Roma, por exemplo, adultos e crianças jogavam piões para mostrar sua habilidade. Os gregos chamavam-no de *strombos*, e os romanos, de *turbo*, talvez por sua velocidade ao girar. Ele foi trazido ao Brasil pelos portugueses na época da colonização e tornou-se uma das brincadeiras favoritas das crianças durante muito tempo.

Na imagem, é possível perceber pelo menos dois tipos de movimento que o pião faz. Reúna-se com um colega para tentar descrever quais são esses movimentos. **Espera-se que os estudantes descrevam o movimento de rotação e o de translação.**

↓ Pião em movimento.



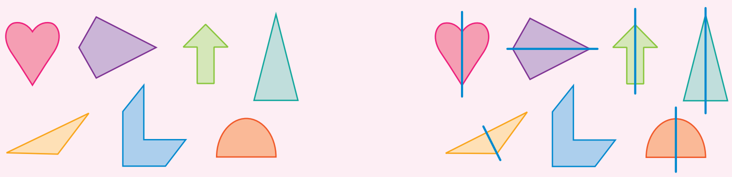
Chris Rogers/Corbis/Getty Images

172

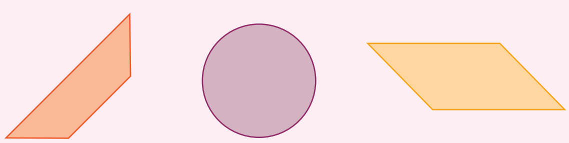
ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Para verificar se os estudantes compreenderam as transformações por reflexão, proponha as atividades a seguir.

1. Utilizando uma régua, trace o eixo de simetria (se houver) de cada figura deste grupo.



2. Quantos eixos de simetria tem cada uma destas figuras?



1 | infinitos | nenhum

Ilustrações: ID/BR

Quando analisamos os efeitos de movimento do pião na imagem da página anterior, temos a ideia dos movimentos de translação e de rotação.

Neste capítulo, vamos estudar esses movimentos no plano. Movimentos como esses são chamados de **isometrias**. As isometrias transformam uma figura em outra figura geometricamente igual, ou seja, o comprimento dos segmentos é mantido e a amplitude dos ângulos também. Dessa forma, a única coisa que se altera em uma isometria é a posição da figura.

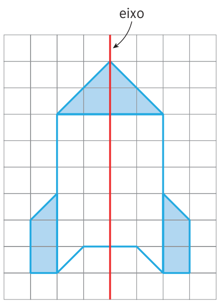
Vamos retomar as transformações geométricas – reflexão, translação e rotação – e ampliar o estudo conhecendo a composição de transformações.

Reflexão

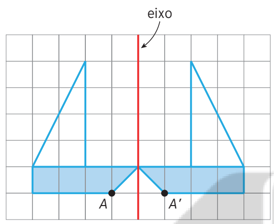
Na reflexão em relação a um eixo, cada ponto da figura original é transformado em seu simétrico em relação a esse eixo, sendo que o eixo pode estar na figura ou fora dela.

Exemplos

A. Eixo de simetria na figura.



B. Eixo de simetria fora da figura.

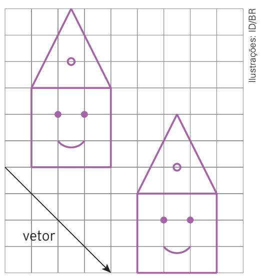


Translação

A translação é o deslocamento de todos os pontos de uma figura em uma mesma direção, em um mesmo sentido e a uma mesma distância.

Exemplo

O vetor indica a direção, o sentido e a distância do deslocamento da figura.

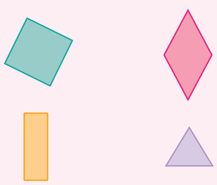


Ilustrações: ID/BR

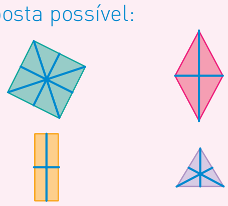
173

- Mencione para os estudantes que é possível observar no cotidiano a simetria em imagens de diversos objetos, como automóvel, navio, avião, sapato, vestido, calças, bola, panela, cadeira, janela, tela de televisor, embalagens, etc.
- Explique aos estudantes que essas transformações são isométricas, ou seja, nelas são mantidas também as medidas do objeto, permitindo o estudo de congruência de figuras.
- Destaque que a simetria de reflexão pode ser observada, por exemplo, no estudo de espelhos planos, no campo da óptica e na simetria de diversos organismos, como na superfície de uma estrela-do-mar, na Biologia. Já a simetria de translação pode ser vista, por exemplo, nas portas e nos portões de correr, quando são abertos ou fechados.
- Aproveite a oportunidade para conversar com os estudantes sobre o conceito de palíndromos: palavras, frases ou números considerados simétricos pela característica de serem lidos nos dois sentidos, desconsiderando-se os sinais ortográficos e a disposição das letras em relação às palavras.
- Mostre alguns exemplos de palíndromos aos estudantes, como as palavras "Ana", "ovo" e "reviver" e a frase: anotaram a data da maratona. Em Matemática, podemos identificar essa característica em números, por exemplo, 1771. Pergunte a eles se conhecem outros exemplos e peça-lhes que os compartilhem entre si.

3. Em uma folha de papel avulsa colorida, desenhe um quadrado, um losango, um retângulo e um triângulo equilátero. Todas essas figuras têm mais de um eixo de simetria. Recorte-as e dobre-as, indicando, assim, os eixos de simetria de cada uma.

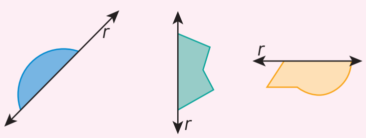


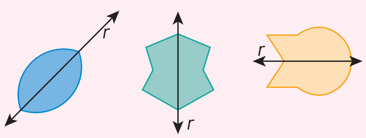
Resposta possível:



Ilustrações: ID/BR

4. Nas figuras a seguir, a reta *r* é um eixo de simetria. Desenhe a outra parte de cada figura. Use um pedaço de papel transparente para copiar as figuras.





- Comente com os estudantes que a simetria de rotação pode ser vista, por exemplo, nas hélices de um ventilador residencial ou de uma fazenda eólica.
- Peça aos estudantes que pesquisem mais exemplos de situações cotidianas que lembrem essas transformações. Caso tenham dificuldade, ajude-os com mais alguns exemplos.
- Aproveite o tema para promover uma atividade interdisciplinar com seus estudantes, por exemplo, conversando com o professor de Ciências.
- Na atividade **1**, se achar necessário, comece na lousa a translação de um dos lados da figura para que os estudantes compreendam como podem realizar a translação de cada parte de uma figura.
- Na atividade **2**, da mesma maneira que na atividade anterior, se achar necessário, comece na lousa o desenho da parte simétrica da figura para que os estudantes continuem.

Rotação

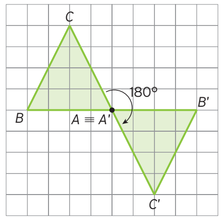
A rotação de uma figura é a transformação por meio de um giro por um ângulo fixo em torno de um ponto também fixo. O giro pode ser no sentido horário ou anti-horário. Em qualquer rotação, é necessário especificar seu centro, o ângulo e o sentido da rotação.

IMAGEM

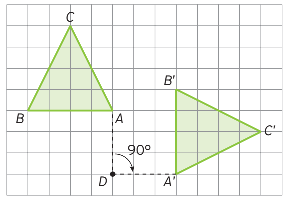
Imagem de uma figura é aquela que se obtém por meio de uma transformação geométrica. Nos exemplos, a imagem do triângulo *ABC* é o triângulo *A'B'C'*.

Exemplos

A. Rotação de 180° no sentido horário em torno do ponto *A*.



B. Rotação de 90° no sentido horário em torno do ponto *D*.



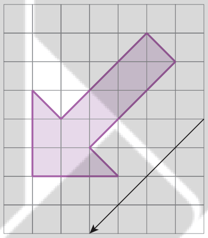
Ilustrações: ID/BR

ATIVIDADES

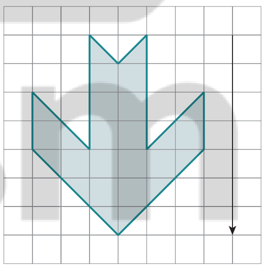
Responda sempre no caderno.

1. Reproduza, em uma malha quadriculada, as figuras a seguir. Depois, construa a imagem de cada uma delas segundo a translação indicada pelo vetor. **Consulte as respostas neste manual.**

a)

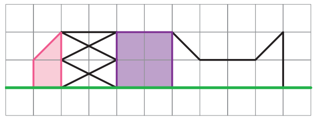


b)

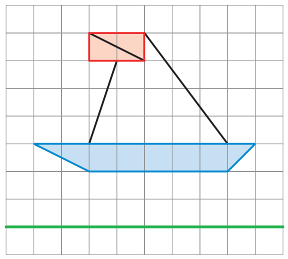


2. Reproduza as figuras a seguir em uma malha quadriculada. Depois, complete-as, sabendo que o eixo verde é um eixo de simetria. **Consulte as respostas neste manual.**

a)



b)



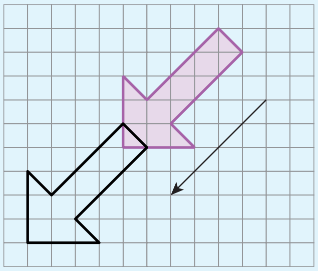
Ilustrações: ID/BR

3. Em uma malha quadriculada, construa um losango e chame de *O* um de seus vértices. Gire-o 90°, 180°, 270° e 360° no sentido anti-horário, em torno do ponto *O*. **Consulte a resposta neste manual.**

174

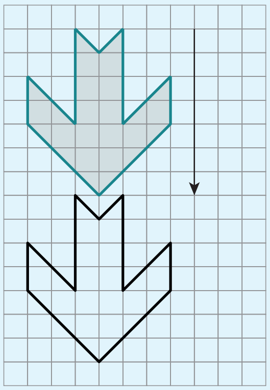
RESPOSTAS

1. a)

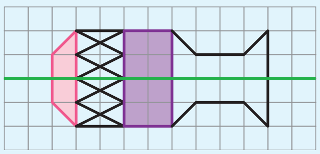


Ilustrações: ID/BR

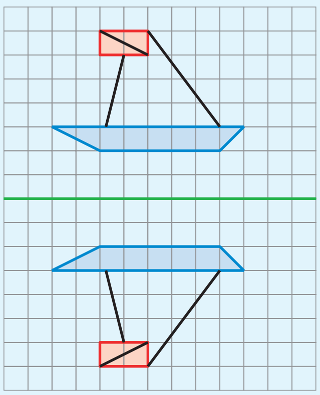
b)



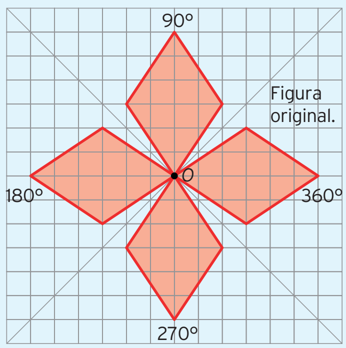
2. a)



b)



3. Construção possível:



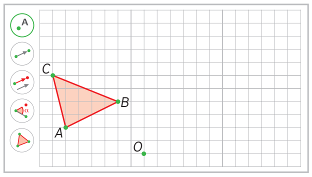
Composição de transformações

Chamamos de composição de transformações o efeito obtido quando aplicamos duas ou mais transformações em uma mesma figura.

Exemplos

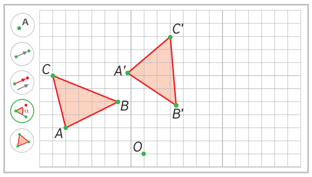
A. Vamos rotacionar o triângulo *ABC* 60° no sentido horário em torno do ponto *O* e depois transladá-lo sete unidades para a direita utilizando um *software* de geometria dinâmica.

1º passo: No *software*, reproduza o triângulo *ABC* e o ponto *O*.

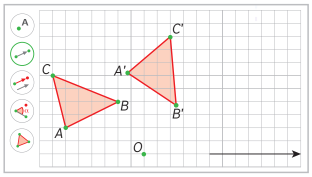


Ilustrações: ID/BR

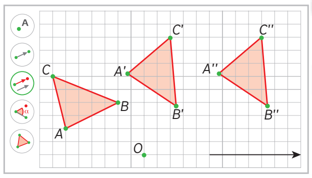
2º passo: Selecione a ferramenta , clique no triângulo, depois no ponto *O* e, por último, digite a medida do ângulo e selecione o sentido. Você obterá o triângulo *A'B'C'*.



3º passo: Selecione a ferramenta e construa um vetor horizontal de comprimento igual a sete unidades.

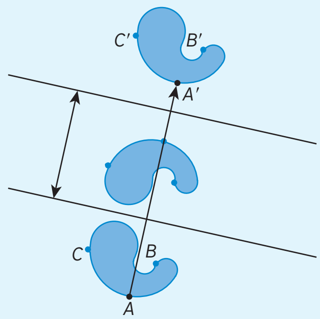


4º passo: Por último, selecione a ferramenta , clique no triângulo *A'B'C'* e depois no vetor. Você obterá o triângulo *A"B"C"*.



COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES

- Converse com os estudantes sobre as transformações isométricas: reflexão, translação e rotação. Comente que elas são movimentações que mantêm as características e as propriedades das figuras, permitindo o estudo da congruência de figuras. Solicite-lhes exemplos do dia a dia em que é possível observar cada uma dessas transformações.
- As transformações no plano podem ser combinadas, executando-se várias transformações em sequência, e a ordem em que elas são executadas é importante no resultado. Podem-se combinar reflexões e translações ou mesmo reflexões e reflexões.
- No caso de reflexões combinadas, há alguns aspectos que merecem um pouco mais de atenção. Se realizarmos uma reflexão de uma figura em relação a um eixo e, em seguida, fizermos uma reflexão dessa imagem em relação a um segundo eixo, paralelo ao primeiro, teremos a segunda imagem com a mesma orientação da figura original. Como resultado da primeira reflexão, obtém-se uma imagem espelhada da figura original em relação ao primeiro eixo de reflexão e, aplicando-se uma segunda reflexão à imagem utilizando o segundo eixo de reflexão, obtém-se uma segunda imagem, de mesma orientação da figura original, como a ilustração a seguir:

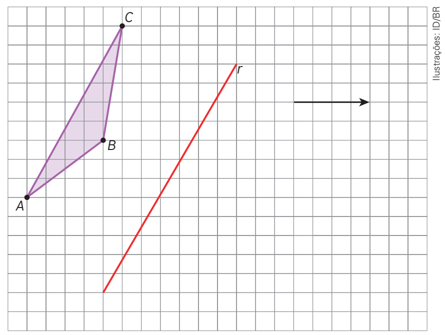


ID/BR

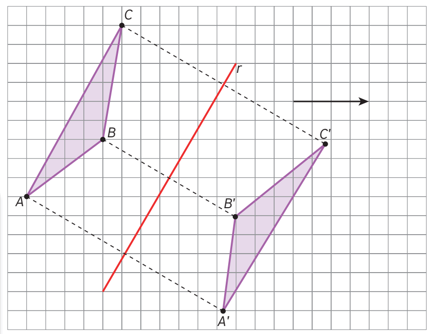
- Leve os estudantes a perceber que a combinação de duas reflexões tem o mesmo resultado de uma translação.
- A criação de ilustrações utilizando transformações geométricas com o suporte de *software* pode contribuir para o desenvolvimento da habilidade **EF69AR35** [Identificar e manipular diferentes tecnologias e recursos digitais para acessar, apreciar, produzir, registrar e compartilhar práticas e repertórios artísticos, de modo reflexivo, ético e responsável.], permitindo um trabalho interdisciplinar com o componente curricular Arte.

- O uso de malhas quadriculadas para o trabalho com simetria facilita a compreensão dos estudantes na determinação da distância entre os pontos da figura a ser refletida e o eixo sobre o qual a figura será refletida; consequentemente, auxilia na determinação da distância entre os pontos da imagem e o eixo. Esse recurso auxilia principalmente em atividades que apresentam situações análogas à apresentada no exemplo **B**, pois, nessa situação, o fato de o eixo estar inclinado em relação à orientação da página pode ser um fator de complicação para os estudantes.

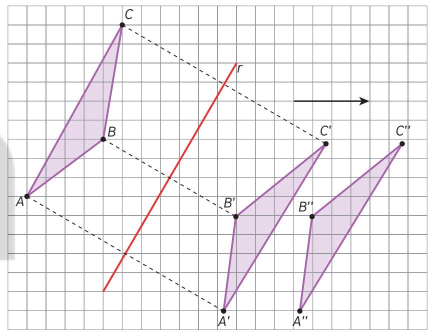
B. Dado o triângulo *ABC*, vamos fazer uma reflexão em relação à reta *r* e depois uma translação de acordo com o vetor dado.



1º passo: Faça a reflexão do triângulo *ABC* em relação ao eixo vermelho, obtendo o triângulo *A'B'C'*.



2º passo: Translade o triângulo *A'B'C'* 4 unidades para a direita, na horizontal, obtendo o triângulo *A"B"C"*.



(IN)FORMAÇÃO

Geoplano

A geometria é um conteúdo matemático que pode ser bem explorado para a resolução de problemas e tem muitas aplicações que aparecem no mundo real.

O geoplano é um dos recursos que pode auxiliar o trabalho desta área da matemática, desenvolvendo atividades com figuras e formas geométricas – principalmente planas –, características e propriedades delas (vértices, arestas, lados), ampliação e redução de figuras, simetria, área e perímetro.

O raciocínio geométrico abrange um conjunto de habilidades importantes para uma percepção mais apurada do mundo que cerca o indivíduo. Desse modo, este indivíduo observa para construir, ou constrói para observar, ou ainda representa e constrói.

Desde a Educação Infantil a criança se depara com atividades de dobrar, recortar e girar. Essas mesmas atividades poderiam ser utilizadas, por exemplo, para introduzir a noção de simetria.

O geoplano é um material criado pelo matemático inglês Calleb Gattegno. Constitui-se por uma placa de madeira, marcada com uma malha quadriculada ou pontilhada. Em cada vértice dos quadrados formados fixa-se um prego, onde se prenderão os elásticos, usados para "desenhar" sobre o geoplano. Podem-se criar geoplanos de vários tamanhos, de acordo com o número de pinos de seu lado, por exemplo, 5 × 5, ou seja, cada lado do geoplano tem 5 pinos (pregos).

Parecidas com o geoplano, as malhas quadriculadas ou pontilhadas são outro recurso de trabalho, e, assim como o geoplano, sua função é ajudar o aluno na observação das formas geométricas e nos desenhos que ela [*sic*] fará a partir das propriedades da figura que observou e montou no geoplano.

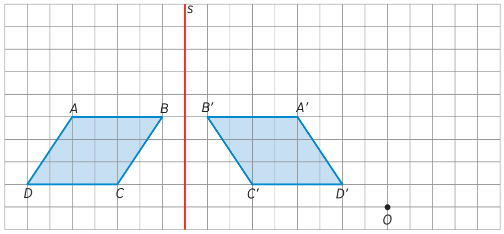
[...]

GEOPLANO. Disponível em: paje.fe.usp.br/~labmat/edm321/1999/material/_private/geoplano.htm. Acesso em: 15 jun. 2022.

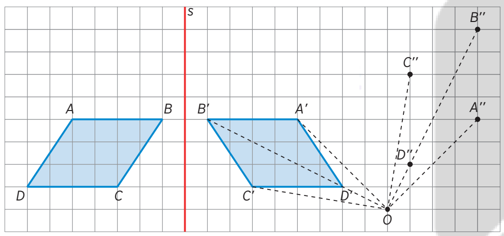
C. Vamos fazer a reflexão do paralelogramo *ABCD* em relação à reta *s* e depois rotacioná-lo 90° no sentido horário em torno do ponto *O*.

1º passo: Desenhe o paralelogramo *ABCD* e a reta *s* em uma malha quadriculada.

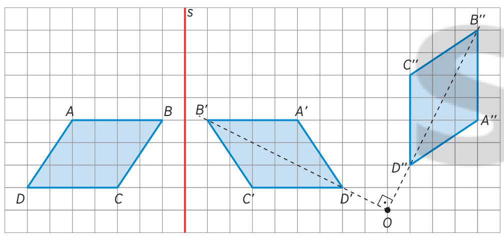
2º passo: Faça a reflexão do paralelogramo *ABCD* em relação ao eixo, obtendo o paralelogramo *A'B'C'D'*.



3º passo: Utilizando transferidor e régua, rotacione os vértices do paralelogramo *A'B'C'D'* 90° no sentido horário, obtendo os pontos *A''*, *B''*, *C''* e *D''*.



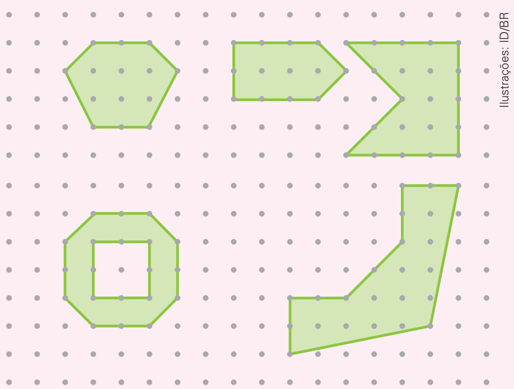
4º passo: Por fim, utilizando régua, trace os lados do paralelogramo.



- Discuta com os estudantes as diferenças entre a composição de transformações do triângulo e do paralelogramo, analisados nos exemplos **B** e **C**, e proponha atividades complementares para que eles entendam as características de cada tipo de transformação.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

1. Utilize o geoplano para obter as figuras apresentadas a seguir e, com um elástico de cor diferente, obtenha os eixos de simetria destas figuras.



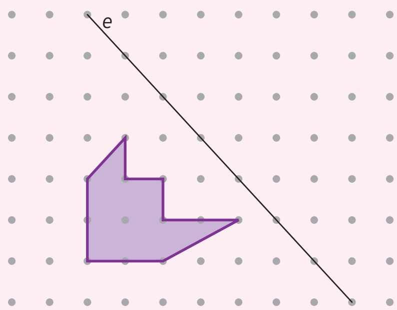
2. No geoplano, desenhe figuras que apresentem:

a) apenas um eixo de simetria;

b) dois eixos de simetria;

c) três eixos de simetria.

3. Use o geoplano para obter a figura a seguir e, depois, construa uma figura simétrica em relação ao eixo *e*.



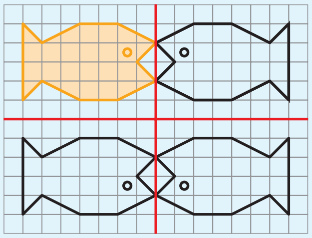
- No exemplo **D**, reforce que as imagens apresentadas são figuras planas que representam um objeto tridimensional, e não o próprio objeto.
- Na atividade **5**, se julgar necessário, inicie fazendo na lousa uma das reflexões.
- Para justificar a resposta da atividade **6**, os estudantes devem levantar hipóteses com base nos conhecimentos sobre transformações geométricas, o que contribui para o desenvolvimento de diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas permitem que os estudantes reconheçam e construam figuras obtidas por transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o auxílio de instrumentos de desenho, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA18**.

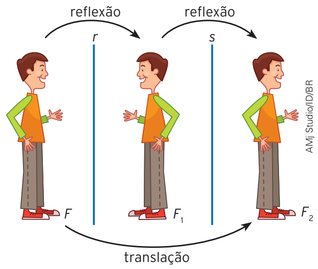
RESPOSTA

5.



ID/BR

D. Observe as figuras F, F_1 e F_2.



AMj Studio/ID/BR

Note que:

- em relação à reta r, F_1 é a imagem refletida de F;
- em relação à reta s, F_2 é a imagem refletida de F_1;
- F_2 é a imagem transladada de F à distância de 4,1 cm na direção horizontal, da esquerda para a direita.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

4. Observe as figuras e responda às questões.

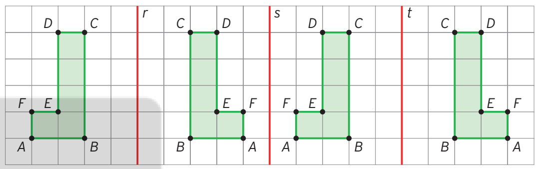


Figura I Figura II Figura III Figura IV

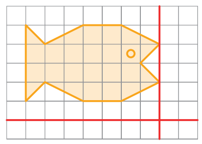
Ilustrações: ID/BR

a) As medidas dos lados correspondentes de cada figura se mantêm? **Sim.**

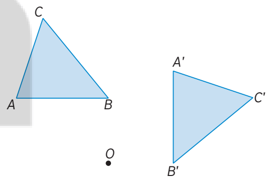
b) Há alteração na medida dos ângulos correspondentes em cada figura? **Não.**

c) Há figuras que estão na mesma posição? Quais? **Sim: I e III; II e IV.**

5. Copie esta figura em uma malha quadriculada. Em seguida, faça três reflexões: primeiro, reflita a figura que você copiou em relação ao eixo vertical; depois, reflita a figura obtida em relação ao eixo horizontal; por fim, reflita esta última figura obtida em relação ao eixo vertical. **Consulte a resposta neste manual.**



6. Que tipo de transformação foi feita com o triângulo ABC a seguir? Justifique sua resposta.



Rotação, pois o triângulo $A'B'C'$ foi obtido a partir do triângulo ABC por meio de um giro de 90° em torno do ponto O no sentido horário.

DIVERSIFICANDO

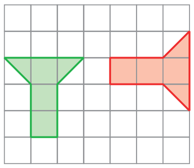
Responda sempre no caderno.

1. Identifique as transformações geométricas presentes na faixa decorativa a seguir. Em seguida, converse com os colegas para confrontar suas opiniões. **Reflexão e translação.**

Danilo Souza/ID/BR

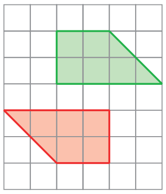
2. É possível rotacionar uma figura em torno de um ponto pertencente à própria figura? Dê um exemplo. **Consulte a resposta neste manual.**

3. Em cada item a seguir, a figura em vermelho corresponde à figura verde após uma rotação. Determine o ângulo da rotação e o sentido (horário ou anti-horário) dela.

a) 

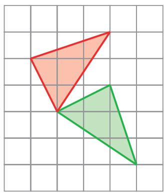
ID/BR

90°; sentido horário.

b) 

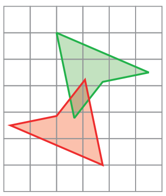
ID/BR

180°; sentido anti-horário.

c) 

ID/BR

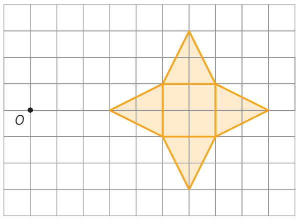
90°; sentido anti-horário.

d) 

ID/BR

180°; sentido horário.

4. Reproduza a figura a seguir em uma malha quadriculada.



ID/BR

Depois, desenhe as imagens obtidas por rotações de centro *O* e ângulos de 90°, 180° e 270° no sentido horário. **Consulte a resposta neste manual.**

5. A frase a seguir é simétrica.

ID/BR

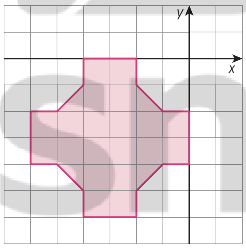
Qual tipo de simetria podemos observar? **Rotação de 180°.**

6. Observe a figura a seguir.

ID/BR

Qual é a menor medida de rotação da figura, em grau, para que ela recaia sobre si mesma? **120°**

7. Reproduza a figura a seguir em uma malha quadriculada e faça a reflexão dela em relação aos dois eixos. **Consulte a resposta neste manual.**



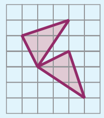
ID/BR

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

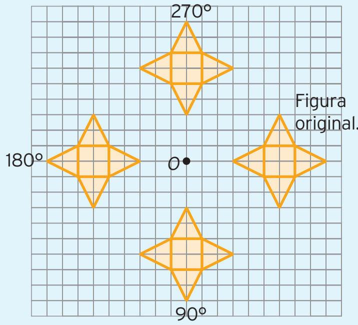
- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.

RESPOSTAS

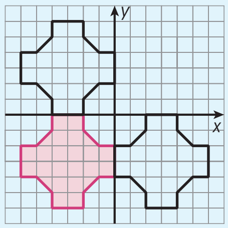
2. Sim. Exemplo:



4.



7.



Ilustrações: ID/BR

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Resolver um problema usando a estratégia "tradução para linguagem algébrica" permite aos estudantes transformar as informações apresentadas no enunciado para a linguagem algébrica, possibilitando sua resolução por meio de cálculos.
- É interessante que os estudantes percebam que, em algumas situações-problema, eles poderão usar outras estratégias que já tenham conhecido, porém eles encontrarão diversas situações em que será necessário converter a linguagem natural para a linguagem algébrica.

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

- Para a compreensão de um problema, é necessário que os estudantes extraiam do enunciado os dados importantes para desenvolver a resolução. Assim, eles devem identificar quantos produtos há de cada tipo em cada caixa (grampeadores e agendas). Além disso, devem relacionar a quantidade de grampeadores e de agendas em cada caixa, seus respectivos valores unitários e o valor pago por cada caixa.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

- Para resolver esse problema, os estudantes precisarão representar algebricamente a relação entre a quantidade de grampeadores e de agendas de cada caixa, seus respectivos valores unitários e o valor pago por cada caixa, para determinar o valor unitário de cada produto.
- O item **1** propõe escolher uma incógnita para representar o valor unitário do grampeador e outra incógnita para representar o valor unitário da agenda. É possível escolher qualquer letra para representar essas incógnitas. Por exemplo, a letra *g* para grampeadores e a letra *a* para agenda.

RESOLVENDO PROBLEMAS

O problema

Acompanhe a situação a seguir.

Ilustrações: Evertoons/ID/BR

Compreensão do problema

Compreensão do problema – 2. Sim. Nas duas caixas existem grampeadores e agendas.

1. Quantos tipos de produto existem em cada caixa? **Dois tipos de produto.**
2. Os produtos são os mesmos nas duas caixas? Quais são eles?
3. A quantidade de cada produto é a mesma nas duas caixas? **Não.**
4. Qual é a quantidade de grampeadores na caixa azul? E qual é a quantidade de agendas que há nessa caixa? **8 grampeadores; 4 agendas.**
5. Qual o valor total pago pelos grampeadores e agendas da caixa azul? **R$ 176,00**
6. Qual é a quantidade de grampeadores na caixa vermelha? E qual é a quantidade de agendas que há nessa caixa? **6 grampeadores; 8 agendas.**
7. Qual o valor total pago pelos grampeadores e agendas da caixa vermelha? **R$ 202,00**

Resolução do problema

Resolução do problema – 2. Considerando *g* o valor unitário do grampeador e *a* o valor unitário da agenda, temos: caixa azul: $8g + 4a = 176$; caixa vermelha: $6g + 8a = 202$.

1. Escolha uma incógnita para representar o valor unitário do grampeador e outra para representar o valor unitário da agenda. **Resposta pessoal.**
2. Como é possível representar algebricamente a relação entre as quantidades e os valores unitários dos grampeadores e das agendas com o valor pago em cada caixa?

180

RESPOSTAS – *MAIS PROBLEMAS*

1. O valor da letra *a* é 5 e o da letra *e*, 4.
2. Cada carta amarela vale 3 pontos e cada carta vermelha, 5 pontos.
3. Os números em que Joana pensou são 20 e 4.

3. É possível encontrar o valor de cada incógnita a partir das relações encontradas na questão anterior? Como podemos fazer isso?

Resolução do problema – 3. Sim, montando um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas com as equações obtidas na questão anterior e resolvendo-o.

4. Qual é o valor unitário de cada grampeador e de cada agenda?

Cada grampeador custa R$ 15,00 e cada agenda, R$ 14,00.

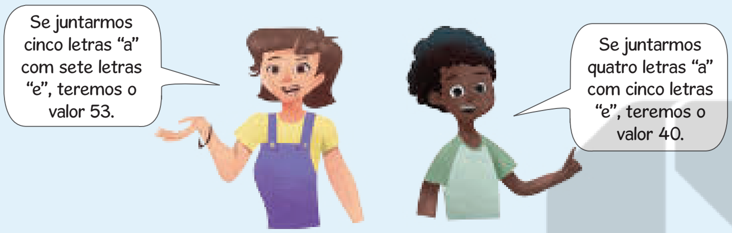
Reflexão sobre o problema

Respostas pessoais.

1. Você gostou de resolver este problema? Por quê?
2. Você encontrou dificuldades para resolver este problema? Em caso afirmativo, quais foram as dificuldades?
3. Você desenhou alguma figura para ajudá-lo a compreender o problema?
4. Qual estratégia você usou para resolver este problema?
5. Seus colegas utilizaram estratégias diferentes da sua? Em caso afirmativo, quais?
6. Você pode apresentar outra maneira de resolver este mesmo problema? Qual?

Mais problemas

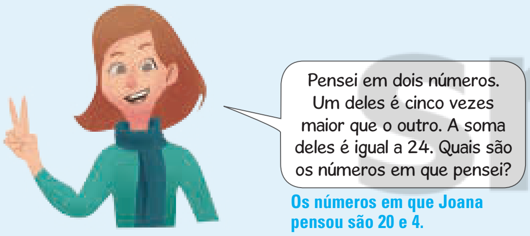
1. Andrea e Marcos estavam participando de uma brincadeira em que era dado um valor para cada letra do nosso alfabeto. Veja o que eles estão dizendo.



Qual é o valor da letra “a”? E qual é o valor da letra “e”? **O valor da letra "a" é 5 e o valor da letra "e" é 4.**

2. Em um jogo com cartas coloridas, cada cor tem uma pontuação diferente. João tem em sua mão dez cartas, seis amarelas e quatro vermelhas, tendo um total de 38 pontos. Pedro, também com dez cartas, tem quatro amarelas e seis vermelhas, tendo um total de 42 pontos. Quantos pontos valem cada carta amarela e cada carta vermelha? **Cada carta amarela vale 3 pontos e cada carta vermelha, 5 pontos.**

3. Leia o que Joana diz e descubra quais são os números em que ela pensou.



Ilustrações: Evertoons/ID/BR

Os números em que Joana pensou são 20 e 4.

REFLEXÃO SOBRE O PROBLEMA

- Reflexões sobre o problema são importantes, pois é necessário que você saiba se o tipo de problema apresentado foi interessante para os estudantes e se pode ser utilizado em outro momento. Além disso, é necessário saber as dificuldades que eles enfrentaram ao resolvê-lo, assim como os próprios estudantes devem se conscientizar disso. Se a situação proposta foi muito fácil para os estudantes, isso poderá desmotivá-los a resolver problemas em outro momento.
- A observação da própria estratégia de resolução é importante para os estudantes, pois lhes permite compreendê-la melhor e utilizá-la em outros momentos da vida escolar. Além disso, deparar-se com diferentes estratégias de resolução amplia a visão e o repertório de resolução de problemas e a compreensão de que um problema, em Matemática, pode ter mais de uma estratégia de resolução. No caso do problema em questão, o método da tentativa e erro é uma das estratégias possíveis. Outra estratégia útil para resolver os problemas dessa seção é a utilização de esquemas ou tabelas.
- No item **3**, vale salientar que fazer representações gráficas auxilia na compreensão dos dados trazidos pelo enunciado, o que contribui para a continuidade do desenvolvimento do raciocínio dos estudantes durante a resolução de problemas. A leitura do enunciado, o registro das informações trazidas por ele, o desenvolvimento do raciocínio de resolução e a composição de uma resposta que esteja de acordo com o que o enunciado pede são etapas essenciais a serem utilizadas na resolução de problemas.
- É importante incentivar os estudantes a falar sobre a estratégia de resolução do problema. Você deve permitir que eles desenvolvam as próprias estratégias de resolução de problemas e auxiliá-los na construção do conhecimento, o que muitas vezes implica a apresentação de métodos de organização e de resolução de problemas.

DE OLHO NA BASE

Os problemas propostos nessa seção podem auxiliar os estudantes a enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo situações fictícias, a expressar suas respostas e a sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens, desenvolvendo a **competência específica de Matemática 6**.

Além disso, o debate sobre diferentes meios de resolver um problema permite aos estudantes criar um repertório e aumentar seu poder de argumentação, desenvolvendo também a **competência geral 7**.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

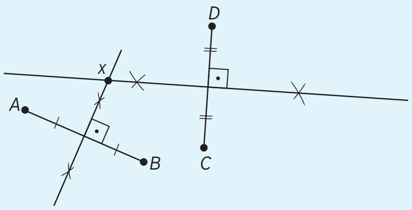
- Nestas páginas, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Na atividade **9**, pergunte aos estudantes como seria a figura final se, inicialmente, eles fizessem a reflexão em relação ao eixo *y* e, depois, em relação ao eixo *x*. Espera-se que eles concluam que a figura final seria a mesma obtida quando se faz a reflexão primeiro em relação ao eixo *x* e, depois, em relação ao eixo *y*.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nessa seção auxiliam os estudantes a reconhecer e a construir figuras obtidas por transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o auxílio de instrumentos de desenho, desenvolvendo a habilidade **EF08MA18**.

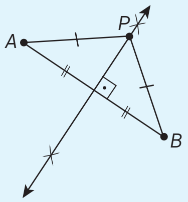
RESPOSTAS

1. Construção possível dos itens **a** a **d**:



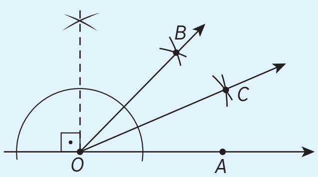
Ilustrações: ID/BR

2. Construção possível:



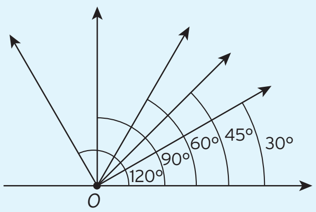
Resposta pessoal. Os estudantes devem encontrar a mesma medida para os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$.

3. Construção possível:



med($A\hat{O}C$) = 22,5°

4. Construção possível:



ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Consulte as respostas dos itens a a d neste manual.

1. No caderno, faça o que se pede.

a) Trace dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, de modo que não estejam alinhados e nem se cruzem.

b) Trace a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

c) Trace a mediatriz do segmento $\overline{CD}$.

d) Determine o ponto *X* no encontro da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ com a mediatriz do segmento $\overline{CD}$.

e) O ponto *X* está equidistante de *A* e de *B*? **Sim.**

f) O ponto *X* está equidistante de *C* e de *D*? **Sim.**

2. Construa no caderno um segmento $\overline{AB}$. Em seguida, construa a mediatriz desse segmento e determine o ponto *P* sobre ela. Qual é a medida dos segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$? **Consulte a resposta neste manual.**

3. Utilizando régua e compasso, construa um ângulo $A\hat{O}B$ de 45°. Em seguida, construa a semirreta $\overrightarrow{OC}$, bissetriz desse ângulo. Qual é a medida em grau do ângulo $A\hat{O}C$? **Consulte a resposta neste manual.**

4. Construa, em uma mesma figura, os ângulos de 120°, 90°, 60°, 45° e 30°. **Consulte a resposta neste manual.**

5. Podemos construir polígonos regulares a partir da medida de seu ângulo central. Dê a medida do ângulo central do:

a) triângulo equilátero; **120°**

b) pentágono; **72°**

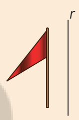
c) octógono; **45°**

d) dodecágono; **30°**

e) pentadecágono. **24°**

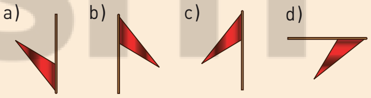
6. Escreva no caderno a alternativa correta.

(AAP-SP) A professora Marli pediu para a sua aluna Ana Paula observar a figura e fazer um desenho mostrando como fica a reflexão da bandeirinha sobre o eixo de simetria *r*. **Alternativa b.**

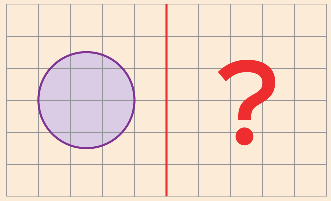


AAP-SP Fac-símile/ID/BR

a) b) c) d)

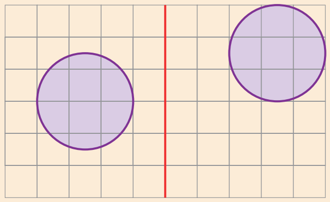


7. Escreva no caderno qual alternativa a seguir representa a reflexão correta do círculo em relação ao eixo na primeira figura. **Alternativa d.**



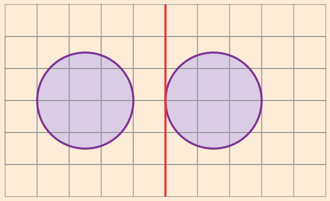
ID/BR

a)



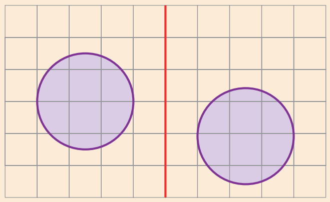
ID/BR

b)



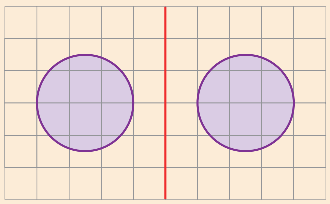
ID/BR

c)



ID/BR

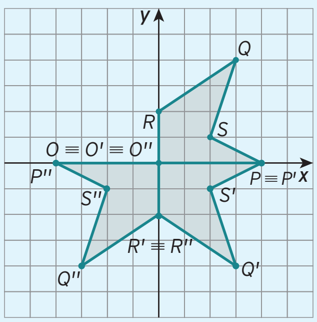
d)



ID/BR

182

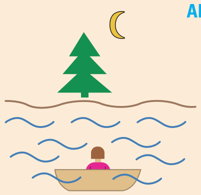
9.



8. Registre no caderno a alternativa correta.

(AAP-SP) Catarina está passeando de barco num lago. Veja a ilustração a seguir.

Alternativa d.



AAP-SP Fac-símile/ID/BR

Das figuras a seguir, a que mais se aproxima da imagem que ela vê refletida no lago é a:

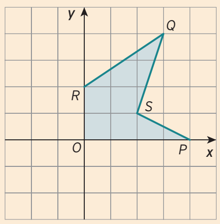
a) 

c) 

b) 

d) 

9. A figura a seguir foi construída no plano cartesiano. Construa a reflexão dela no caderno em relação ao eixo x e, depois, uma reflexão da imagem obtida em relação ao eixo y.

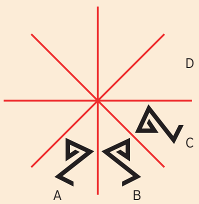


ID/BR

Consulte a resposta neste manual.

10. Registre no caderno a alternativa correta.

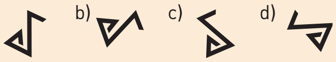
(Saresp) No desenho a seguir, o círculo deve ser ornamentado por meio de reflexões do mesmo motivo em torno das retas indicadas.



Saresp. Fac-símile/ID/BR

A figura a ser desenhada em D é: **Alternativa b.**

a) b) c) d)

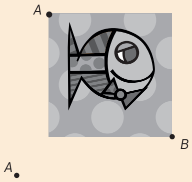


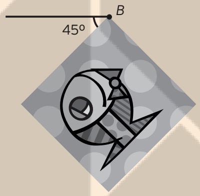
Saresp. Fac-símile/ID/BR

11. Escreva no caderno a alternativa correta.

(Enem) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos *A* e *B*.

Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.





Enem. Fac-símile/ID/BR

Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360°. A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de: **Alternativa b.**

a) 90° no sentido horário.

b) 135° no sentido horário.

c) 180° no sentido anti-horário.

d) 270° no sentido anti-horário.

e) 315° no sentido horário.

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Identifiquei e construí a bissetriz de um ângulo dado?
- Reconheci e desenhei a mediatriz de um segmento dado?
- Construí, com régua e compasso, ângulos de 30°, 45°, 60° e 90°?
- Identifiquei polígonos regulares inscritos em uma circunferência?
- Desenhei polígonos regulares inscritos em uma circunferência, com o auxílio de régua e compasso e pelo ângulo central?
- Solucionei situações-problema que envolvam os conceitos de ângulo central e ângulo inscrito em uma circunferência?
- Entendi a translação como o deslocamento de todos os pontos de uma figura, segundo uma mesma direção, um mesmo sentido e uma mesma distância?
- Compreendi que a rotação é a transformação de uma figura, por meio de um giro de um ângulo definido, em torno de um ponto fixo?
- Aprendi que a reflexão ocorre quando dois pontos são simétricos em relação a uma reta?
- Reconheci figuras com simetria em relação a uma reta, com simetria central, com translação e com composição de transformações geométricas?
- Construí figuras usando transformações geométricas?
- Ampliei meus conhecimentos em Matemática?

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Converse com os estudantes sobre a presença da simetria em imagens que representam situações cotidianas, como fotos de paisagens, de objetos, de animais e de rostos de pessoas. Se possível, traga para a sala de aula algumas imagens que apresentem esse tipo de simetria e outras que não sejam simétricas, para que eles as observem e identifiquem as simetrias.

Outra atividade possível é solicitar aos estudantes que tragam para a aula imagens de jornais, revistas ou publicações na internet que apresentem simetria. Na sala de aula, organize-os em grupos e promova a troca das imagens entre eles, pedindo a cada grupo que identifique e trace os eixos de simetria dessas imagens.

Para as atividades com malhas quadriculadas, se necessário, reproduza um modelo desse tipo de malha e entregue-o aos estudantes. Se julgar oportuno, proponha atividades com outros tipos de malha, como a triangular.

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
6 e 9.

Competências específicas de Matemática
3, 4 e 8.

Temas Contemporâneos Transversais
Meio Ambiente, Ciência e Tecnologia e Cidadania e Civismo.

Habilidades

(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

(EF08MA24) Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.

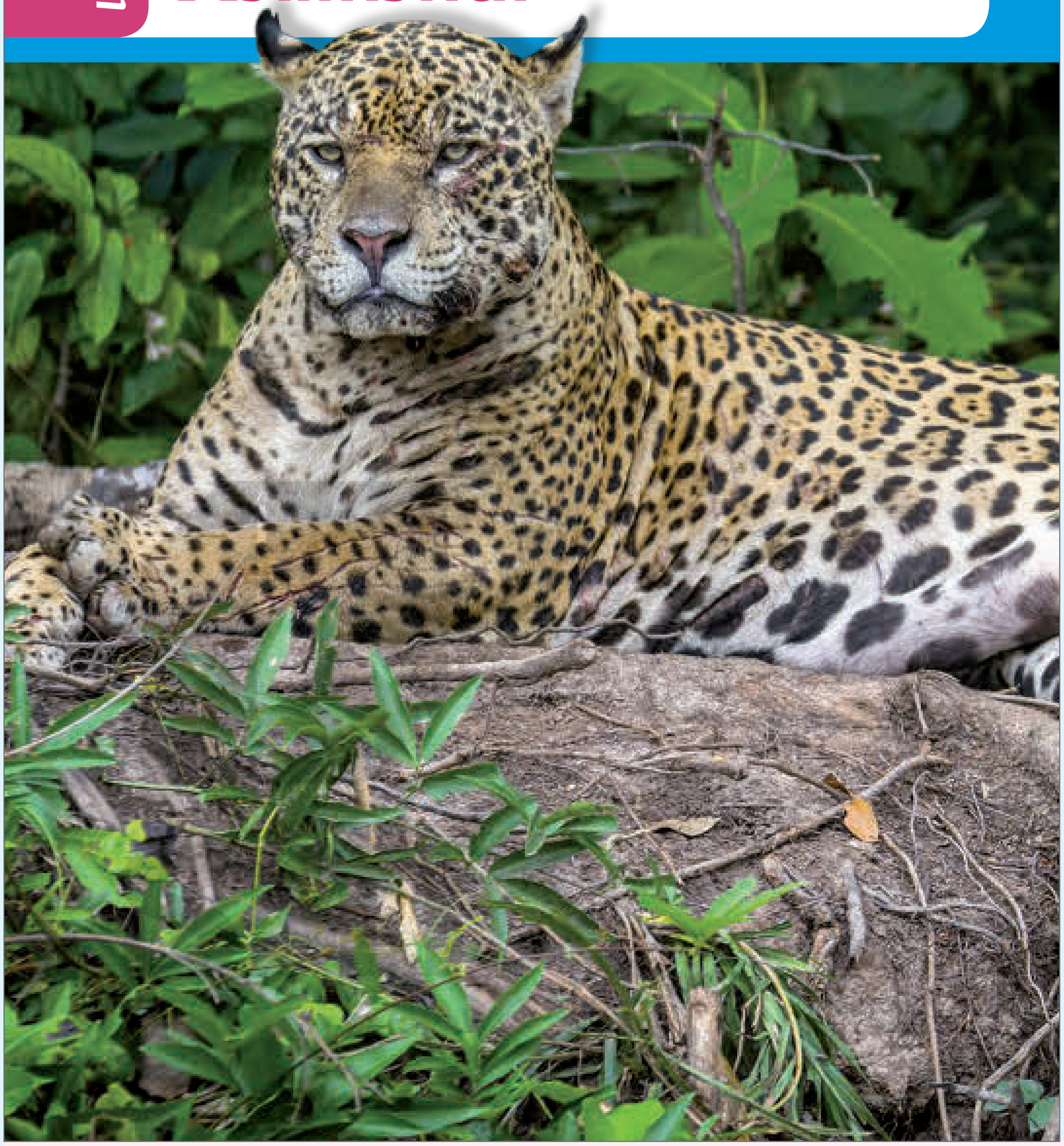
(EF08MA25) Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.

(EF08MA26) Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada).

(EF08MA27) Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.

UNIDADE 7

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA



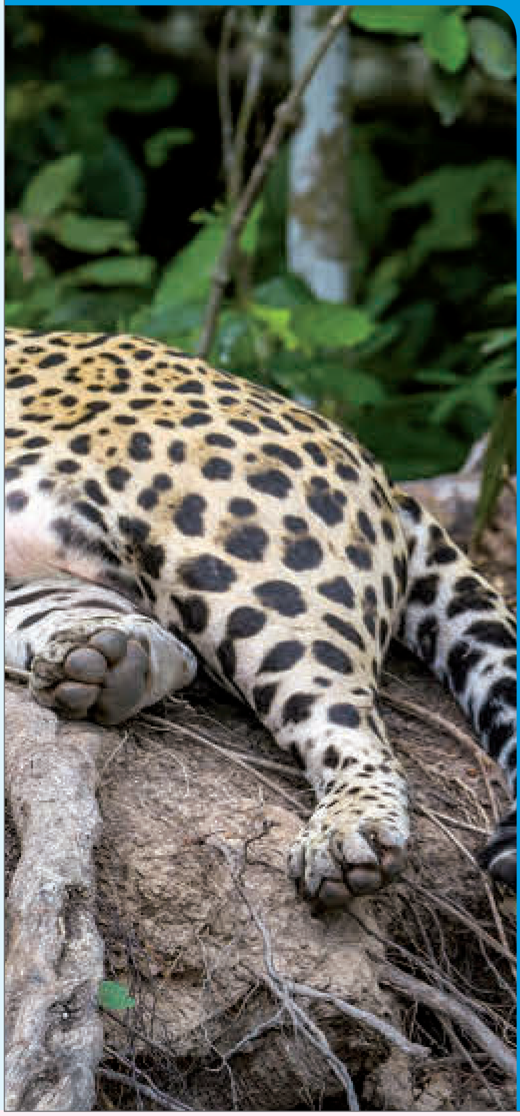
SOBRE A UNIDADE

Nesta unidade, vamos auxiliar os estudantes a ampliar conceitos relativos à probabilidade e estatística estudados em anos anteriores, favorecendo o reconhecimento da aplicabilidade de conhecimentos matemáticos em contextos cotidianos mais imediatos.

Os estudantes vão analisar e resolver situações-problema envolvendo conceitos probabilísticos e estatísticos que vão incentivar a tomada de decisões com base na análise e na construção de argumentos, contribuindo para a autonomia e o pensamento crítico.

CAPÍTULO 1
Probabilidade

CAPÍTULO 2
Estatística



André Dib/Pulsar Imagens

PRIMEIRAS IDEIAS

A fauna brasileira é composta de mais de 8 930 espécies de vertebrados. Desse total, 1 173 espécies estão ameaçadas de extinção – entre elas a onça-pintada.

A tabela a seguir apresenta dados sobre a quantidade de espécies de animais extintas ou que correm risco de extinção.

Quantidade de espécies por categoria de ameaça em 2014

Categoria de ameaça	Quantidade de espécies
Extinta da natureza	1
Criticamente em perigo	318
Em perigo	406
Vulnerável	448
Total	**1 173**

Fonte de pesquisa: Brasil. Ministério do Meio Ambiente. Biodiversidade – Fauna. Disponível em: https://antigo.mma.gov.br/mma-em-numeros/biodiversidade.html. Acesso em: 4 abr. 2022.

1. Que tipo de gráfico você escolheria para representar a quantidade de espécies ameaçadas de acordo com cada categoria?

2. Em qual categoria de ameaça há mais espécies?

← Maior felino das Américas, a onça-pintada é uma espécie da fauna brasileira que se encontra ameaçada de extinção.

PRIMEIRAS IDEIAS

- Inicie a seção com a leitura do texto e converse com os estudantes sobre animais em extinção. Peça a eles que façam uma pesquisa sobre os animais ameaçados de extinção, os respectivos biomas onde vivem, alguns fatores que podem provocar a extinção de uma espécie e o que podemos fazer para preveni-la. Cite alguns exemplos, como ações humanas de desmatamento, contaminação da água e do solo, tráfico de animais, etc. Incentive-os a refletir sobre algumas atitudes do cotidiano que podem contribuir para ajudar na preservação das espécies, como reduzir a compra de produtos plásticos, o consumo de carne e de laticínios e o uso de óleo de cozinha, plantar flores e outras plantas para ajudar na polinização, entre outras. Essa conversa desenvolve o **Tema Contemporâneo Transversal Meio Ambiente**.
- Dê atenção especial à leitura da tabela, principalmente aos títulos das colunas, auxiliando no desenvolvimento da competência leitora dos estudantes.

DE OLHO NA BASE

A questão **1** permite aos estudantes avaliar a adequação de diferentes tipos de gráfico para representar um conjunto de dados, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA23**.

RESPOSTAS

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes escolham gráficos de barras, de colunas ou de setores.

2. Na categoria Vulnerável. Se julgar oportuno, comente com os estudantes que, de acordo com a União Internacional para a Conservação da Natureza e dos Recursos Naturais (IUCN), a vulnerabilidade representa que há alto risco de extinção de uma espécie em um futuro próximo causado, principalmente, por perda ou destruição de seu hábitat. Consulte a classificação da Lista Vermelha da IUCN, disponível em: https://oeco.org.br/dicionario-ambiental/27904-entenda-a-classificacao-da-lista-vermelha-da-iucn/; acesso em: 15 jun. 2022.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Árvore de possibilidades.
- Princípio fundamental da contagem.
- Conceitos iniciais de probabilidade: experimento aleatório, espaço amostral e evento.
- Cálculo da probabilidade de um evento.
- Eventos complementares.

Objetivos

- Resolver problemas de contagem, inclusive os que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como a construção de esquemas e de tabelas e o uso da árvore de possibilidades.
- Desenvolver o raciocínio combinatório por meio da resolução de problemas envolvendo contagem.
- Entender e aplicar os conceitos de espaço amostral e de evento para o cálculo de probabilidade.
- Identificar experimentos aleatórios.
- Determinar o número de elementos de um espaço amostral e de um evento.
- Calcular a probabilidade de um evento.
- Reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos em um espaço amostral é igual a 1.
- Reconhecer que a soma das probabilidades de dois eventos complementares é igual a 1.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo de probabilidade, buscando relações com o princípio fundamental da contagem e a representação por meio de esquemas, árvore de possibilidades, entre outros recursos, para aprimorar técnicas de cálculos no campo da Probabilidade, tornando-se cidadãos mais críticos e capazes de ler, entender, comprender e resolver problemas de diversas áreas do conhecimento.

ÁRVORE DE POSSIBILIDADES

- Verifique os conhecimentos prévios dos estudantes referentes ao diagrama de árvore, estudado nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Converse sobre a facilidade que essa representação traz para a compreensão da situação-problema, já que é um recurso visual muito útil para a resolução de problemas que envolvem esse tema. Certifique-se de que eles compreendem que o diagrama apresenta todas as possibilidades de ocorrer em determinada situação.

Capítulo 1

PROBABILIDADE

Para o desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes estejam familiarizados com cálculo de porcentagem e retomem as ideias que envolvem probabilidade trabalhadas em anos anteriores.

Árvore de possibilidades

Um planetário é uma espécie de auditório circular, coberto por uma cúpula na qual se projetam imagens de estrelas e de outros corpos celestes, simulando o céu.

O Planetário Aristóteles Orsini, localizado em São Paulo, foi o primeiro inaugurado no Brasil. Para representar as sessões exibidas nesse local em um fim de semana do mês de fevereiro de 2022, podemos utilizar um esquema chamado **árvore de possibilidades** ou **diagrama de árvore**. Veja.

Dia da semana	Horário da sessão	Opção formada
Sábado	13:00	Sábado às 13:00
	15:00	Sábado às 15:00
	17:00	Sábado às 17:00
	19:00	Sábado às 19:00
Domingo	13:00	Domingo às 13:00
	15:00	Domingo às 15:00
	17:00	Domingo às 17:00
	19:00	Domingo às 19:00

Para cada um dos dois dias do fim de semana, houve quatro horários de exibição. Portanto, nesse fim de semana foram exibidas 8 sessões (2 · 4).

Planetário Aristóteles Orsini, no parque do Ibirapuera, em São Paulo (SP). À esquerda há um destaque para a vista superior. Fotos de 2021.

Quando a quantidade de combinações possíveis não é grande, podemos enumerá-las uma a uma. Mas como fazer quando elas são muitas?

Neste capítulo, vamos estudar a árvore de possibilidades e o princípio fundamental da contagem – um método para se obter a quantidade de possibilidades sem contar os elementos um a um.

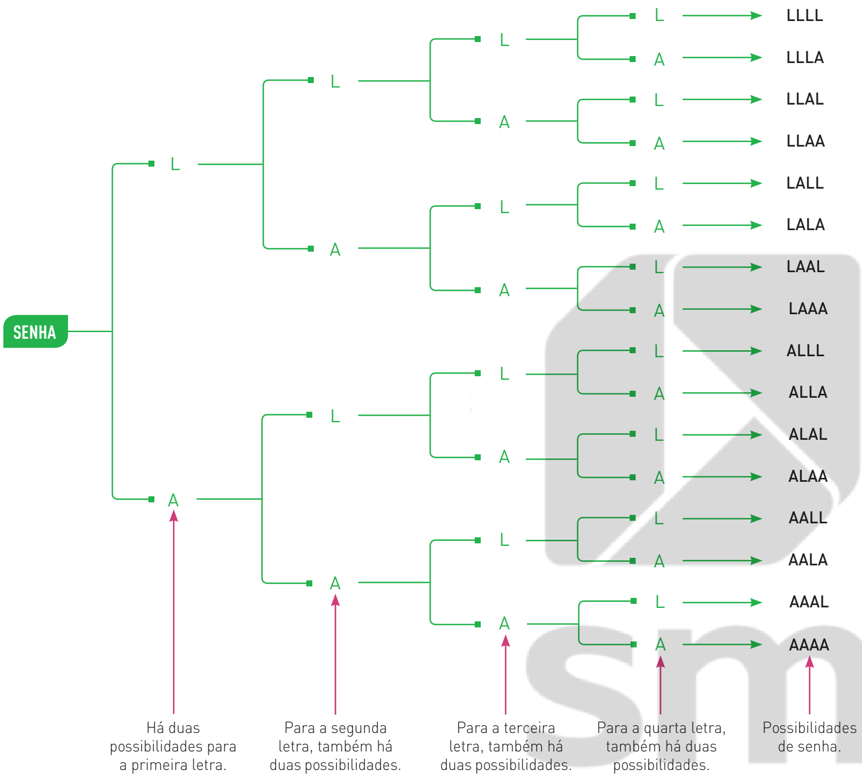
Acompanhe a situação a seguir.

Mariana precisa desbloquear um computador e não consegue se lembrar da senha, mas se recorda de que ela é formada por quatro letras e que usou apenas as letras L e A.

Para testar todos os casos possíveis e desbloquear o computador, ela construiu uma árvore de possibilidades.

A **árvore de possibilidades** (ou **diagrama de árvore**) é usada para representar todas as possibilidades de algo acontecer.

Veja a árvore de possibilidades que Mariana construiu.



Contando as possibilidades, Mariana concluiu que há 16 possibilidades de senha para tentar desbloquear seu computador.

- Informe aos estudantes que o planetário Aristóteles Orsini foi o primeiro a ser construído no Brasil, em 1957, e é considerado patrimônio histórico, científico e cultural. O objetivo de sua construção era para que os astrônomos à época pudessem observar o céu noturno da cidade de São Paulo, em virtude do excesso de iluminação artificial, fenômeno chamado poluição luminosa, que impede a observação de planetas e de constelações. Pergunte aos estudantes se costumam observar o céu à noite e se conseguem ver as estrelas. Peça a eles que pesquisem os impactos causados pela poluição luminosa no ser humano, nas plantas, nos animais e nos microrganismos e citem possíveis contribuições da ciência para reduzir os impactos desse tipo de poluição. Para uma experiência imersiva de um planetário com a turma, peça que acessem, no telefone celular ou na sala de informática, *sites*, aplicativos ou redes sociais que reproduzam o céu, as crateras da Lua e de Marte, como o *Stellarium Web*, *Google Earth*, *Google Sky*, *Hubble Space Telescope*, disponíveis, respectivamente, em: https://earth.google.com; https://stellarium-web.org/; https://www.google.com/sky/; https://www.instagram.com/nasahubble/; acessos em: 15 jun. 2022. Esse trabalho favorece o desenvolvimento dos **Temas Contemporâneos Transversais Meio Ambiente** e **Ciência e Tecnologia**.
- Apresente aos estudantes uma situação semelhante à da árvore de possibilidades de Mariana e peça-lhes que construam uma árvore de possibilidades para a situação proposta.
- Enfatize que mediante essa representação, além de descobrir a quantidade de possibilidades, é possível elencar quais são elas.
- É importante que os estudantes percebam que, na situação proposta, a cada etapa, a escolha feita na etapa anterior não afeta as opções de escolha da etapa seguinte.
- Converse com os estudantes sobre a necessidade de criar um esquema organizado e legível para que a contagem final dos agrupamentos que a árvore de possibilidades deve representar não fique confusa.

+ INTERESSANTE

Leia o texto sobre senhas e converse com os estudantes como tornar uma senha segura com base no texto apresentado. Peça a eles que diferenciem uma senha composta apenas de números de outra que, além de números e letras, ainda apresente símbolos, letras maiúsculas e letras minúsculas. Espera-se que eles percebam que essa atitude aumenta o número de possibilidades, dificultando a descoberta da senha.

Comente com os estudantes que é comum o uso de senha para tarefas do dia a dia e as consequências de usar as mesmas senhas em diversas redes sociais e no telefone celular. Converse com eles sobre a atitude de ser um cidadão digital ao utilizar as tecnologias digitais de maneira ética e segura, pois todos têm direito à segurança e à privacidade dos dados pessoais. Peça a eles que citem outros exemplos relacionados a esse tema que vão além da segurança digital no ambiente virtual. Esse trabalho desenvolve os **Temas Contemporâneos Transversais Ciência e Tecnologia** e **Cidadania e Civismo**.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

- O princípio fundamental da contagem remete diretamente à utilização do raciocínio probabilístico no campo multiplicativo.
- Reforce que, na situação apresentada, queremos descobrir quantos, e não quais, números são pares e têm dois algarismos.
- Retome a árvore de possibilidades de Mariana da página anterior e transforme-a em um esquema que relaciona a posição das letras à quantidade de possibilidades. Veja a seguir.

Posição	1ª	2ª	3ª	4ª
Possibilidades	2	2	2	2

Nessa situação, para cada posição, há duas possibilidades (L ou A). Por meio dessa representação, não se pode determinar quais são as possíveis senhas que Mariana possa ter escolhido, mas pode-se calcular rapidamente a quantidade de possibilidades de senhas.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

São 16 possibilidades de senhas no total.

vs148/Shutterstock.com/ID/BR

+ INTERESSANTE

Senhas seguras

Uma pesquisa feita em 2020 apontou as duzentas senhas mais usadas mundialmente. Veja a seguir as dez senhas mais utilizadas.

- 1º: 123456
- 2º: 123456789
- 3º: picture1
- 4º: password
- 5º: 12345678
- 6º: 111111
- 7º: 123123
- 8º: 12345
- 9º: 1234567890
- 10º: senha

Por questões de segurança, algumas empresas exigem que as senhas criadas pelos usuários sejam formadas por letras maiúsculas e letras minúsculas, além de símbolos e números. Senhas desse tipo são consideradas "fortes", pois são mais difíceis de serem descobertas.

Outra medida de segurança recomendada para criar senhas "fortes" é não utilizar palavras ou números que estejam relacionados ao usuário, como nomes de pessoas próximas ou datas de aniversário.

Fonte de pesquisa: Alisha Ebrahimji. '123456' e 'senha' estão entre as senhas mais usadas no mundo, segundo empresa. *CNN Brasil*, 19 nov. 2020. Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/business/123456-e-senha-estao-entre-as-senhas-mais-usadas-no-mundo-segundo-empresa/. Acesso em: 10 maio 2022.

Princípio fundamental da contagem

Em situações de contagem de possibilidades em que só precisamos saber a quantidade de opções, sem enumerá-las uma a uma, podemos utilizar o **princípio fundamental da contagem** ou **princípio multiplicativo**.

Em uma situação formada por duas etapas de escolha sequenciais, em que na primeira etapa a escolha pode ser feita de m modos e, na segunda, de n modos, qualquer que tenha sido a escolha feita na primeira etapa, o total de possibilidades da situação é dado pelo produto $m \cdot n$.
O total de possibilidades também pode ser calculado dessa maneira quando há mais de duas etapas em uma situação.

Problema 1

Vamos usar o princípio fundamental da contagem para descobrir quantos números naturais pares de dois algarismos existem.

Considerando as condições, temos:

algarismo das dezenas
9 opções

O algarismo das dezenas não pode ser zero, porque nesse caso o número formado seria de um algarismo. Então, há 9 opções possíveis: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

algarismo das unidades
5 opções

O algarismo das unidades deve ser 0, 2, 4, 6 ou 8, pois o número deve ser par. Então, há 5 opções possíveis.

O total de possibilidades é dado por: $9 \cdot 5 = 45$.

Assim, existem 45 números naturais pares de dois algarismos.

Problema 2

Vamos descobrir de quantas maneiras diferentes os amigos João (J), Lucas (L) e Antônio (A) podem sentar em uma fileira de avião com três poltronas.

A	B	C
Para a poltrona ao lado da janela, temos 3 possibilidades: J, L ou A.	Para a poltrona do meio, só há 2 possibilidades, já que um dos três amigos sentou na poltrona da janela.	Para a última poltrona, a do corredor, só sobrou 1 possibilidade.

Usando o princípio multiplicativo, temos:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Ou seja, há 6 maneiras diferentes de os três amigos ocuparem essas poltronas.

ATIVIDADES

1. a) Consulte a resposta neste manual.

Responda sempre no caderno.

1. Bruna está se preparando para ir a uma festa de aniversário. Ela tem em seu armário 4 blusas e 3 saias para montar uma combinação. Observe as opções que Bruna tem e, depois, faça o que se pede.

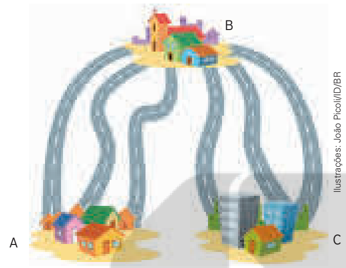
a) Construa um diagrama de árvore para mostrar todas as composições que Bruna pode fazer.

b) De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir para ir à festa? **De 12 maneiras diferentes.**

2. Escreva todos os números de três algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 2, 6 e 9. **269, 296, 629, 692, 926 e 962.**

3. Quantos números naturais ímpares de dois algarismos existem? **45 números.**

4. Existem três rodovias que ligam as cidades A e B e outras três rodovias que ligam as cidades B e C, como ilustrado a seguir.



Quantos caminhos diferentes um motorista pode escolher para ir da cidade A à cidade C, passando por B? **9 caminhos diferentes.**

5. Arlete, Cristina, Tânia e Clara disputaram uma corrida. As três primeiras colocadas vão receber medalhas. Sabendo que não houve empate, de quantas maneiras diferentes as medalhas podem ser distribuídas entre elas? **De 24 maneiras diferentes.**

6. Uma indústria fabrica sucos de três sabores diferentes (uva, limão e laranja) e os vende em dois tipos de embalagem (lata e garrafa plástica).

a) Quantos produtos diferentes são fabricados por essa indústria? **6 produtos.**

b) Se a empresa oferecesse mais um tipo de embalagem (caixinha, por exemplo), quantos produtos seriam acrescentados? **3 produtos.**

- Na atividade **2**, os estudantes precisam determinar quais são os números e, com isso, eles podem utilizar o diagrama de árvore. Verifique se eles compreendem o significado da palavra "distintos". Esclareça-os que, para formar cada número, não se pode repetir o mesmo algarismo. Para conferir se a quantidade de números representada está correta, sugira que apliquem o princípio multiplicativo, ou seja, são três possibilidades para o 1º algarismo, duas para o 2º e uma para o 3º. Assim:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Ou seja, há 6 números de três algarismos distintos formados com os algarismos 2, 6 e 9.

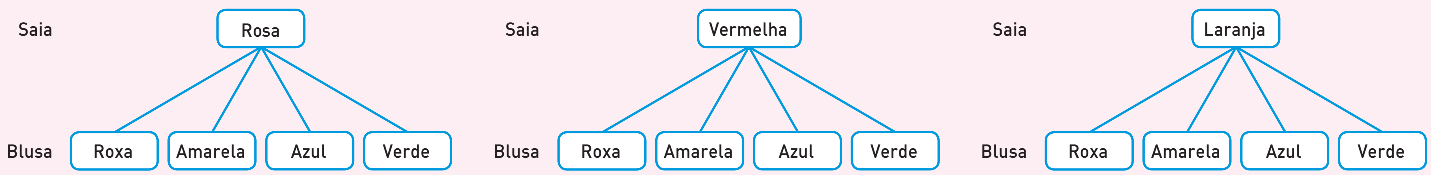
- Na atividade **3**, o objetivo é calcular a quantidade de números. Ela pode ser resolvida pelo princípio multiplicativo. Assim, para o algarismo das unidades, temos 5 possibilidades (1, 3, 5, 7 e 9). Já para o algarismo das dezenas, temos 9 possibilidades (1 a 9). Os estudantes também devem observar que o número zero não pode ocupar essa posição, o que resultaria em um número de apenas um algarismo.
- Explore a atividade **6** utilizando o diagrama de árvore. Peça aos estudantes que expliquem como pensaram para responder às questões. Além disso, verifique se eles compreenderam que a quantidade de produtos acrescentados pode ser obtida pensando desta maneira: se temos mais um tipo de embalagem e três sabores diferentes, então, serão acrescentados mais 3 produtos.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nesta página permitem aos estudantes resolver problemas de contagem cuja resolução envolve a aplicação do princípio multiplicativo, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA03**.

RESPOSTA

1. **a)** Resposta possível:



PROBABILIDADE

- Converse com os estudantes sobre conceitos envolvidos no estudo de probabilidade, solicitando a eles que, com as próprias palavras, conceituem experimento aleatório, espaço amostral, espaço amostral equiprovável e evento. O objetivo dessa proposta é perceber o conhecimento deles sobre esses conceitos e, assim, fazer as intervenções necessárias para a formalização desses conceitos.
- Utilize o experimento proposto na situação **1** e pergunte aos estudantes qual é a probabilidade de sair coroa. Se julgar necessário, faça os cálculos como foi feito para o evento “sair cara”.
- Enfatize aos estudantes que, na situação **2**, a soma da probabilidade de ocorrência de cada um dos elementos do espaço amostral é igual a 1 ou a 100%. Incentive-os a perceber que, ao adicionar a probabilidade de cada um dos elementos do espaço amostral, estamos calculando a probabilidade de um evento certo ocorrer, ou seja, a probabilidade de sair 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6.

LEMBRE-SE!

Em algumas situações, os resultados não podem ser previstos com certeza. Essas situações são chamadas de **experimentos aleatórios**.

Evento é um acontecimento relacionado a um experimento aleatório.

O conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de **espaço amostral**.

Um espaço amostral em que cada um dos elementos tem a mesma chance de ocorrer é chamado de **espaço amostral equiprovável**.

Em um experimento aleatório, um evento que não tem possibilidade de ocorrer é denominado **evento impossível**, e um evento em que se tem total certeza de sua ocorrência é chamado de **evento certo**.

A **probabilidade** de um evento ocorrer é um número que varia de 0 a 1 e pode ser expresso na forma de fração, na forma decimal ou em porcentagem.


Getty Images/iStockphoto

Probabilidade

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

As capitãs dos times de futebol, Paloma e Gabriela, vão disputar “cara ou coroa” para verificar quem vai escolher o lado do campo em que seu time começará jogando. Paloma escolheu cara e Gabriela, coroa. Será que é possível saber quem ganhará a disputa?

Não podemos afirmar com certeza quem ganhará o “cara ou coroa”, pois o lançamento de uma moeda é um **experimento aleatório**. Entretanto, podemos determinar, por exemplo, a probabilidade de Paloma ganhar.

O conjunto {cara, coroa} é o **espaço amostral** desse experimento. Sair cara (escolha de Paloma) é um **evento** relacionado a esse experimento.

Em um espaço amostral equiprovável, isto é, em que todos os eventos têm a mesma chance de ocorrer, a probabilidade P é a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis.

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

Portanto, a probabilidade de Paloma ganhar é:

$$P = \frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\%$$

Situação 2

Vamos calcular a probabilidade de sair o número 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 no lançamento de um dado comum. O espaço amostral S desse experimento é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e queremos calcular a probabilidade de ocorrência de todos os elementos do espaço amostral.

Para isso, podemos calcular a probabilidade de ocorrer cada um dos elementos do espaço amostral e, depois, adicionar todas essas probabilidades.

Primeiro, vamos calcular a probabilidade de sair o número 1.

Em um dado, há somente uma face com o número 1; então, o número de resultados favoráveis é igual a 1.

O número total de resultados possíveis é 6, pois qualquer um dos números das seis faces do dado pode sair.

Como todos os números do dado têm a mesma chance de ocorrer, a probabilidade P de sair o número 1 é dada por:

$$P(1) = \frac{1}{6}$$

Usando o mesmo raciocínio, podemos escrever:

$$P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Ao adicionar a probabilidade de ocorrência de cada um dos elementos do espaço amostral, obtemos:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1 = 100\%$$

A soma das probabilidades de ocorrência de cada um dos elementos do espaço amostral é igual a 1 ou 100%.

Observe que, ao adicionar as probabilidades de ocorrência de cada um dos elementos do espaço amostral, estamos calculando a probabilidade de um evento certo ocorrer.

Situação 3

No lançamento simultâneo de dois dados, um verde e outro preto, qual é a probabilidade de saírem dois números iguais?

krilldz/Shutterstock.com/ID/BR

Acompanhe duas maneiras diferentes de encontrar o número de elementos do espaço amostral.

1ª maneira: Por meio de um quadro.

		Dado preto					
		1	2	3	4	5	6
Dado verde	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

2ª maneira: Por meio do princípio fundamental da contagem.

dado verde — **6 resultados possíveis** (1, 2, 3, 4, 5 e 6) × dado preto — **6 resultados possíveis** (1, 2, 3, 4, 5 e 6) = **36**

Portanto, o espaço amostral tem 36 elementos.

Agora, vamos descrever quais são os elementos que pertencem ao evento E "saírem dois números iguais no lançamento simultâneo de dois dados":

$$E = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$$

Logo, existem 6 possibilidades de o evento E ocorrer.

Como todos os resultados têm a mesma chance de sair, a probabilidade de o evento E acontecer é dada por:

$$P(E) = \frac{6}{36} \simeq 0{,}17 = 17\%$$

Portanto, a probabilidade de saírem números iguais no lançamento simultâneo de dois dados é aproximadamente 17%.

- Reproduza na lousa o quadro apresentado na situação **3** e peça aos estudantes que apontem quais são os resultados favoráveis, ou seja, em quais resultados os números dos dados preto e verde são iguais.

DE OLHO NA BASE

Compreender as situações **2** e **3** apresentadas nestas páginas contribui para a aquisição da habilidade **EF08MA22**. Além disso, perceber a relação entre conceitos da Aritmética e da Probabilidade auxilia no desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

- Utilizando o quadro dos lançamentos dos dados preto e verde da página anterior, peça aos estudantes que apontem os resultados que representam o evento “não sair números iguais”, ou seja, no qual os números do segundo dado são diferentes dos do primeiro.
- Muitas vezes, é mais simples, e também mais eficiente, calcular a probabilidade do evento complementar. Portanto, é importante que os estudantes consigam compreender e determinar o evento complementar a um evento apresentado.
- Mostre aos estudantes alguns eventos em determinado espaço amostral e solicite a eles que apresentem o evento complementar. Por exemplo, o complementar de sair face 4 no lançamento do dado da situação **2** é não sair 4, ou seja, sair 1 ou 2 ou 3 ou 5 ou 6, cuja probabilidade de ocorrer é $\frac{5}{6}$, que também é a diferença entre 1 e $\frac{1}{6}$ (probabilidade do evento certo menos a probabilidade do evento “sair face 4”).
- Na atividade **7**, se julgar necessário, explique aos estudantes que um baralho comum tem 52 cartas, sendo 13 de cada naipe. Aceite também como corretas as respostas apresentadas na forma de porcentagem ou número na forma decimal. Os itens **a** e **c** são eventos complementares.
- Na atividade **10**, os eventos dos itens **c** e **d** e dos itens **e** e **f** são eventos complementares. O evento do item **f** pode ser entendido também como sair um número par e um número ímpar ou dois números pares.

RESPOSTA

8.

		Moeda 2	
		cara	coroa
Moeda 1	cara	(cara, cara)	(cara, coroa)
	coroa	(coroa, cara)	(coroa, coroa)

A probabilidade de obter coroa nas duas moedas é $\frac{1}{4}$.

PARE E REFLITA

Se fossem jogados três dados simultaneamente, qual é a probabilidade de saírem três números iguais?

$\frac{6}{216}$ ou, aproximadamente, 2,8%.

E se quiséssemos saber qual é a probabilidade de ocorrer o evento F “não saírem números iguais no lançamento simultâneo de dois dados, um verde e outro preto”?

Observando o quadro anterior, notamos que há 30 possibilidades de não saírem números iguais no lançamento simultâneo de dois dados. Assim, a probabilidade de o evento F ocorrer é dada por:

$$P(F) = \frac{30}{36} \simeq 0{,}83 = 83\%$$

Portanto, a probabilidade de não saírem números iguais no lançamento simultâneo de dois dados é aproximadamente 83%.

Você percebeu que o evento F é formado pelos elementos que não pertencem a E? Quando isso acontece, dizemos que o evento F é um evento **complementar** de E.

A soma das probabilidades de dois eventos complementares acontecerem é igual a 1. Veja.

$$P = P(F) + P(E) = \frac{30}{36} + \frac{6}{36} = \frac{36}{36} = 1 = 100\%$$

Isso acontece porque todos os elementos que não estão em um evento estão em seu evento complementar e, assim, os dois eventos apresentam todos os elementos do espaço amostral.

PARA EXPLORAR

***Vamos adivinhar*, de Cha Mi-Jeong e Choi Yu-Mi. São Paulo: Callis, 2010 (Coleção Tan Tan).**

Esse livro ensina noções de porcentagem e probabilidade com base em situações do cotidiano. Clara, a personagem da história, reflete sobre sua rotina tentando antecipar o que pode acontecer a cada momento e usa o pensamento lógico para fazer boas escolhas.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

7. Considere o sorteio de uma carta de um baralho comum e determine a probabilidade de:

a) sair um ás; $\frac{1}{13}$

b) sair ás de paus; $\frac{1}{52}$

c) não sair ás; $\frac{12}{13}$

d) sair rei ou dama; $\frac{2}{13}$

e) sair número par de naipe preto. $\frac{5}{26}$

8. Construa um quadro com todos os resultados que podem ser obtidos quando lançamos, simultaneamente, duas moedas honestas distintas. Depois, responda: Qual é a probabilidade de obter coroa nas duas moedas? Consulte as respostas neste manual.

9. Uma moeda honesta é lançada por duas vezes sucessivas. Em seguida, é registrada a face obtida em cada lançamento: cara ou coroa.

a) Determine o espaço amostral S desse experimento. S = {(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa)}

b) Dê um exemplo de evento impossível desse espaço amostral.

c) Dê um exemplo de evento certo desse espaço amostral. Resposta possível: Sair cara ou coroa no primeiro lançamento.

10. Considere o espaço amostral S correspondente ao lançamento simultâneo de dois dados comuns, um vermelho e outro amarelo.

a) Quantos e quais são os elementos desse espaço amostral?

b) Quantos e quais são os elementos do evento E “saírem dois números 6”? 10. b) 1 elemento; E = {(6, 6)}.

c) Qual é a probabilidade de saírem dois números 1? $\frac{1}{36}$

d) Qual é a probabilidade de não saírem dois números 1? $\frac{35}{36}$

e) Qual é a probabilidade de saírem dois números ímpares? $\frac{1}{4}$

f) Qual é a probabilidade de não saírem dois números ímpares? $\frac{3}{4}$

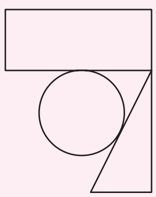
9. b) Resposta possível: Não sair cara ou coroa em um dos lançamentos.

10. a) 36 elementos; S = {(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6)}.

ESTRATÉGIAS DE APOIO – *DIVERSIFICANDO*

Para auxiliar os estudantes que apresentarem dificuldade nos conteúdos trabalhados, sugira as atividades a seguir.

1. Observe esta representação de 3 peças. Você pode pintar cada uma delas de azul, amarelo, vermelho, verde, preto, roxo, laranja, rosa e marrom.



Ilustrações: ID/BR

a) De quantos modos diferentes você pode pintar essas peças? 729 modos.

b) Se nenhuma dessas peças pode ter a mesma cor, de quantos modos diferentes você pode pintá-las? 504 modos.

2. Observe a promoção anunciada por uma lanchonete.

a) Quantas combinações podem ser feitas nessa promoção? 6 combinações.

b) Represente as combinações utilizando uma árvore de possibilidades.

1\. a) Consulte a resposta neste manual.

2\. a) 148; 158; 198; 154; 184; 194; 418; 458; 498; 514; 584; 594; 518; 548; 598; 814; 854; 894; 914; 954; 984; 918; 948 e 958.

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

6\. a) S = {bola verde, bola azul}
b) Não, pois a probabilidade de sortear uma bola azul é maior que a de sortear uma bola verde.

1. Maria, Joana, Rafaela e Patrícia estão participando de uma prova de natação.

a) Construa a árvore de possibilidades para as três primeiras colocadas.

b) Quantos são os resultados possíveis? **24 resultados.**

c) Em quantos desses resultados Joana aparece em segundo lugar? **Em 6 resultados.**

2. Utilizando os algarismos 1, 4, 5, 8 e 9, determine todos os números que sejam:

a) pares, formados por três algarismos distintos;

b) ímpares, formados por dois algarismos distintos. **15; 19; 41; 45; 49; 51; 59; 81; 85; 89; 91 e 95.**

3. Responda às questões a seguir.

a) Quantos números naturais de quatro algarismos existem em nosso sistema de numeração? **9 000 números.**

b) Quantos números naturais de quatro algarismos distintos existem em nosso sistema de numeração? **4 536 números.**

4. Cinco amigos vão se sentar em cinco cadeiras consecutivas em uma sala de cinema.


Danilo Souza/ID/BR

Determine de quantas maneiras diferentes eles podem se sentar:

a) nessas cadeiras; **De 120 maneiras diferentes.**

b) de modo que André, um dos amigos, ocupe a cadeira do meio. **De 24 maneiras diferentes.**

5. Lúcia precisa cadastrar uma senha. A senha deve ter duas letras e quatro algarismos. Para facilitar a memorização, ela decidiu usar as letras L e M no início da senha e na sequência os quatro primeiros algarismos (0, 1, 2, 3), sem repetição. Dessa maneira, quantas possibilidades Lúcia terá na escolha de sua senha? **48 possibilidades.**

7\. a) A = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60}

6. Considere o experimento: sortear uma bola colorida verde ou azul de uma caixa com 5 bolas azuis e 1 bola verde.

a) Determine o espaço amostral S desse experimento.

b) Esse espaço amostral é equiprovável? Por quê?

7. Cada cartela de um bingo é composta de 15 números distintos de 1 a 60. O sorteio do bingo é realizado retirando-se uma bola de uma urna com 60 bolas numeradas de 1 a 60.

a) Quais são os resultados favoráveis ao evento A "sair um número múltiplo de 3"?

b) Qual é a probabilidade de o número da bola sorteada ser múltiplo de 3? $\frac{1}{3}$

8. Após o término de um campeonato de futebol, o secretário de Esportes entregou um troféu para a equipe vitoriosa. Para receber o prêmio representando o clube, foi sorteado um dos 11 jogadores que estiveram em campo na final. Qual é a probabilidade de o jogador sorteado ser:

a) o goleiro? $\frac{1}{11}$

b) um dos três zagueiros? $\frac{3}{11}$

c) um dos dois atacantes? $\frac{2}{11}$

d) um dos cinco jogadores do meio-campo? $\frac{5}{11}$

e) um dos zagueiros, sabendo que o jogador sorteado não pode ser o goleiro? $\frac{3}{10}$

9. Usando uma calculadora, calcule em cada caso, escrevendo a resposta em porcentagem, a probabilidade de:

a) serem obtidas 4 caras em quatro lançamentos sucessivos de uma moeda; **6,25%**

b) uma mãe dar à luz 6 bebês do sexo feminino em seis gestações; **Aproximadamente 1,56%.**

c) tirar 6 em quatro lançamentos de um dado. **Aproximadamente 0,077%.**

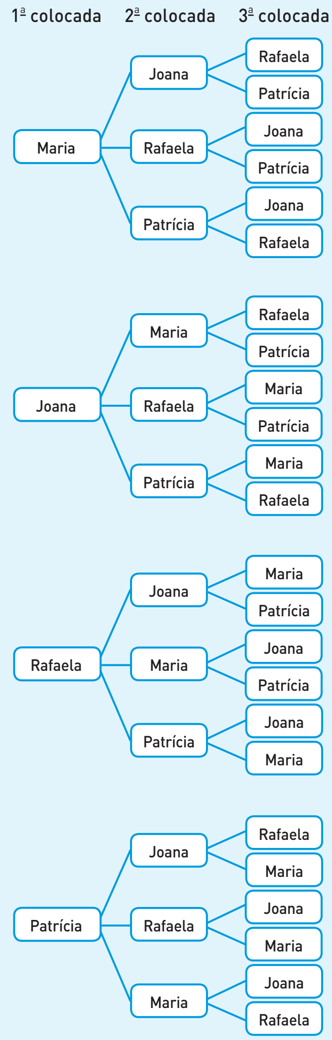
10. Elabore uma situação que envolva um campeonato qualquer, masculino, feminino, profissional, escolar ou amador. Formule perguntas sobre as possibilidades para encontrar o campeão e o vice. Pense em estabelecer condições para essa composição (campeão e vice). **Resposta pessoal.**

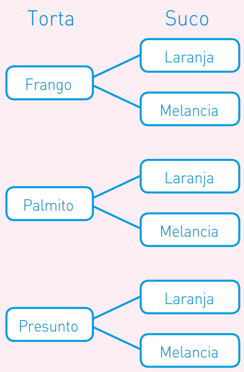
ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **7**, aceite também a representação na forma de porcentagem ou de número na forma decimal como resposta.

RESPOSTA

1. a) Resposta possível:





c) Um garoto escolheu o suco de melancia. Quantas são as opções de escolha de torta, sabendo que ele não gosta de torta de presunto? 2 opções: frango e palmito.

DE OLHO NA BASE

Ao realizar as atividades propostas, os estudantes poderão calcular a probabilidade de um evento por meio da construção do espaço amostral e também pelo princípio multiplicativo, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA22**.

Utilizar a calculadora para calcular as probabilidades da atividade **9** permite aos estudantes o desenvolvimento da habilidade **EF08MA04**.

A atividade **10** permite aos estudantes elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA03**.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Medidas de tendência central: média aritmética, média aritmética ponderada, mediana e moda.
- Medidas de dispersão: amplitude, desvio, variância e desvio-padrão.
- Frequência absoluta e frequência relativa.
- Histograma.
- Pesquisa amostral e pesquisa censitária.
- Representação de dados e análise dos diferentes tipos de gráfico.
- Planejamento e execução de pesquisa amostral.

Objetivos

- Compreender o significado de média aritmética simples e ponderada, mediana e moda como indicadores de tendência de um conjunto de dados, relacionando-os com as medidas de dispersão.
- Construir tabelas de frequência e histogramas.
- Entender o conceito de população, variável e os diferentes tipos de amostra em uma pesquisa estatística.
- Organizar, interpretar e analisar dados representados em gráficos e tabelas.
- Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráfico para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.
- Planejar e realizar pesquisa amostral e elaborar relatório analisando os resultados obtidos.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de estudar e compreender as medidas de tendência central e as medidas de dispersão, analisando as tabelas de distribuição de frequências, associando esses conceitos com representações gráficas em histogramas e gráficos de setores. Esses estudos vão fornecer aos estudantes ainda mais subsídios para resolverem os problemas da vida cotidiana, aplicando o que foi estudado na escola, tornando-se cidadãos mais críticos e autônomos.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

- Neste capítulo, são discutidos conceitos estatísticos que possibilitam aos estudantes ampliar a capacidade de interpretação das informações veiculadas por diversas áreas do conhecimento.
- A Estatística é utilizada por diferentes profissionais para o estudo e a análise de diversas situações, além da comunicação dos resultados. É necessário transcender os dados obtidos, possibilitando aos estudantes maior compreensão acerca das situações estudadas.

Capítulo 2

ESTATÍSTICA

Para desenvolver os conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes tenham noção de medidas de tendência central e saibam identificar diferenças entre pesquisas amostrais e censitárias.

Medidas de tendência central

Você já parou para pensar na importância de prever o tempo? Saber quando vai chover ou quando vai fazer calor contribui para a tomada de diversas decisões, que vão desde levar ou não um guarda-chuva até, no caso de governantes, destinar recursos para implementar medidas de precaução contra enchentes e/ou deslizamentos. Para os agricultores, é importante prever o volume de chuvas ou os períodos de seca para determinar a melhor época para o plantio e a colheita e estimar a safra do período.

Para realizar essas previsões, meteorologistas coletam diversos dados e, com base nesse conjunto de dados, simulam alguns cenários que produzem resultados bastante variados para a previsão do tempo. Para uma previsão mais segura, eles utilizam as **medidas de tendência central**.

Entre essas medidas destacam-se a média aritmética, a média aritmética ponderada, a mediana e a moda.

Pedestres enfrentam chuva na rua Augusta, em São Paulo (SP). Foto de 2019.

Alexandre Tokitaka/ Pulsar Imagens

194

OUTRAS FONTES

Cyberchase – Episódio “Amor e bruxaria”. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=mU89H6e5wF0. Acesso em: 17 jun. 2022.

Utilizando conceitos de estatística, em particular os relacionados às médias, os três amigos protagonistas dessa animação conseguem resolver enigmas e problemas para livrar o local dos desmandos do vilão Hacker. Os conceitos de mediana e de moda também são abordados nesse episódio.

Média aritmética

A **média aritmética** (***MA***), ou simplesmente **média** de um grupo de números, é o quociente entre a adição de todos os números do grupo e a quantidade de números do grupo.

Observe, na tabela a seguir, a quantidade de chuva em Valparaíso (SP) de 2017 a 2021.

Quantidade de chuva em Valparaíso (SP) por ano

Ano	2017	2018	2019	2020	2021
Quantidade de chuva (em mm)	1 942	1 123	1 338	903	829

Fonte de pesquisa: União Nacional da Bioenergia. Disponível em: https://www.udop.com.br/indices-pluviometricos-arquivos/35/1992a2022_historico_chuva_estacao_ridesa.pdf. Acesso em: 4 abr. 2022.

Para calcular a média *MA* de chuva em Valparaíso (SP) durante o período apresentado, devemos adicionar a quantidade de chuva de cada ano e dividir pelo número de anos.

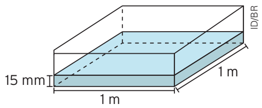
$$MA = \frac{1\,942 + 1\,123 + 1\,338 + 903 + 829}{5} = \frac{6135}{5} = 1\,227$$

Portanto, de 2017 a 2021, choveu em média 1227 mm por ano na cidade de Valparaíso.

CÁLCULO DO VOLUME DE CHUVA

O volume de chuva é sempre calculado em relação a 1 m^2. Dizer, por exemplo, que choveu 15 mm em certa região significa que nessa região choveu 15 mm de altura em uma área de 1 m^2.

(Representação sem proporção de tamanho)



Como 1 m^3 equivale a 1 000 litros, uma chuva de 15 mm equivale a dizer que choveu 15 litros em cada metro quadrado dessa região.

Média aritmética ponderada

A **média aritmética ponderada** (***MP***) é um tipo de média aritmética em que são atribuídos **pesos** para as variáveis em estudo. O peso indica a importância atribuída a cada um dos valores ou o número de vezes que esse valor se repete.

No quadro a seguir estão as notas que um estudante obteve no primeiro bimestre do ano. Veja.

Avaliação	Trabalho individual	Trabalho em equipe	Prova mensal
Nota	9,5	6,5	9,0
Peso	1,5	1,0	2,0

Para calcular a média *MP* desse estudante no primeiro bimestre do ano, devemos adicionar os produtos das notas que ele obteve pelos respectivos pesos e, então, dividir esse resultado pela soma dos pesos.

$$MP = \frac{9{,}5 \cdot 1{,}5 + 6{,}5 \cdot 1{,}0 + 9{,}0 \cdot 2{,}0}{1{,}5 + 1{,}0 + 2{,}0} = \frac{14{,}25 + 6{,}5 + 18{,}0}{4{,}5}$$

$$MP = \frac{38{,}75}{4{,}5} \simeq 8{,}6$$

Portanto, a média aritmética ponderada das notas desse estudante no primeiro bimestre do ano foi aproximadamente 8,6.

- O estudo da média arimética, da moda e da mediana permite medir a tendência central de alguns conjuntos de dados, possibilitando resumir, em poucas informações, as características dos dados apresentados.
- Sugira aos estudantes que utilizem a calculadora durante o estudo envolvendo os cálculos estatísticos.
- Resolva na lousa, com os estudantes, os dois exemplos apresentados nesta página, para que eles comparem e verifiquem as diferenças entre média aritmética e média aritmética ponderada.
- Peça aos estudantes que apresentem situações cotidianas em que é necessário calcular a média aritmética e a média aritmética ponderada.

DE OLHO NA BASE

Compreender o conceito da média aritmética e da média aritmética ponderada favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA25**.

- Enfatize a importância da ordenação (crescente ou decrescente) dos dados para determinar a mediana de uma amostra.
- Apresente aos estudantes alguns exemplos de amostras, com quantidades de dados indicadas por números pares ou ímpares, e peça a eles que determinem a mediana. Diversifique os exemplos com relação à homogeneidade dos dados.
- É importante que os estudantes compreendam que é possível determinar a mediana de qualquer conjunto de dados que possam ser ordenados.
- Ao apresentar o conceito de moda, peça aos estudantes que diferenciem os dois exemplos apresentados nestas páginas. Dessa maneira, eles podem determinar a moda de qualquer amostra em que há repetição de pelo menos um dado, seja ela composta de variáveis quantitativas ou qualitativas.

Mediana

Veja as notas dos estudantes do professor Elis no trabalho final.

5,0 9,5 10,0 1,0 3,0 3,0 2,5 9,5 1,5 2,0 1,0 4,0 6,0 6,5 8,0

Para estudar o desempenho da turma, depois de registrar as notas, Elis verificou que a média foi aproximadamente 4,8.

Ao observar as notas e o valor da média obtida, percebemos que, nessa situação, a média não representa bem os dados. Isso ocorre porque as notas dos estudantes variaram bastante. Ou seja, existem valores muito menores ou muito maiores que os demais valores do conjunto de dados. Repare que alguns estudantes tiveram nota 1,0, enquanto outros tiveram nota 9,5.

Quando isso ocorre, podemos representar os dados do conjunto utilizando uma medida de tendência central chamada **mediana** (***Md***).

A mediana é o valor que ocupa a posição central de uma amostra, quando os dados são organizados em ordem crescente ou decrescente.

Colocando as notas dos estudantes de Elis em ordem crescente e identificando a posição central, temos:

$$\underbrace{1{,}0 \quad 1{,}0 \quad 1{,}5 \quad 2{,}0 \quad 2{,}5 \quad 3{,}0 \quad 3{,}0}_{7 \text{ termos}} \quad \underbrace{4{,}0}_{8^{\text{a}} \text{ posição}} \quad \underbrace{5{,}0 \quad 6{,}0 \quad 6{,}5 \quad 8{,}0 \quad 9{,}5 \quad 9{,}5 \quad 10{,}0}_{7 \text{ termos}}$$

Portanto, a mediana dessa amostra é 4. Isso significa que metade dos estudantes teve nota menor ou igual a 4,0 e que a outra metade teve nota maior ou igual a 4,0.

Agora, imagine que Elis tenha mais um estudante e que ele tenha tirado nota 5,0 no trabalho. Como a amostra terá 16 termos, ou seja, um número par de elementos, temos dois termos centrais, que ocupam a 8ª e a 9ª posições.

$$\underbrace{1{,}0 \quad 1{,}0 \quad 1{,}5 \quad 2{,}0 \quad 2{,}5 \quad 3{,}0 \quad 3{,}0}_{7 \text{ termos}} \quad \underbrace{4{,}0}_{8^{\text{a}} \text{ posição}} \quad \underbrace{5{,}0}_{9^{\text{a}} \text{ posição}} \quad \underbrace{5{,}0 \quad 6{,}0 \quad 6{,}5 \quad 8{,}0 \quad 9{,}5 \quad 9{,}5 \quad 10{,}0}_{7 \text{ termos}}$$

Nesse caso, definimos a mediana como a média aritmética de 4,0 e 5,0.

$$Md = \frac{4 + 5}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Portanto, a mediana dessa nova amostra é 4,5.

Moda

Veja a tabela a seguir.


Danillo Souza/ID/BR

Membros da Associação de Jovens								
Idade	12	13	14	15	16	17	18	19
Quantidade de jovens	2	6	8	7	5	3	2	1

Dados fornecidos pela Associação de Jovens.

Observe que a idade que aparece mais vezes entre os membros da Associação de Jovens é 14 anos. Dizemos que 14 anos é a **moda** (***Mo***) da idade dos jovens e representamos essa informação por:

$$Mo = 14 \text{ anos}$$

A moda de uma amostra é o dado que aparece com maior frequência.

196

Na situação apresentada, determinamos a moda de uma variável quantitativa (idade). Também podemos determinar a moda de uma variável qualitativa. Por exemplo, considerando a tabela a seguir, que representa o esporte preferido dos estudantes de uma turma do 8º ano, o esporte que aparece com maior frequência é o vôlei, sendo o preferido por 10 estudantes. Então, nesse caso, a moda é vôlei.

Esporte preferido dos estudantes

Esporte	Quantidade de estudantes
Vôlei	10
Futebol	7
Atletismo	5

Dados obtidos pelo professor de Educação Física.

OBSERVAÇÃO

Há amostras em que não é possível determinar a moda por não apresentarem valores que se repetem.

Há também amostras que apresentam mais de uma moda por terem mais de um valor com a mesma frequência.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Determine a média aritmética dos conjuntos de números a seguir.
   a) 5; 7; 3; 11; 9; 6; 8 **7**
   b) 35; 19; 21; 28; 33; 26; 20 **26**

2. Considere a seguinte sequência:
   5, 4, 3, ■, 5, 8, 9, 11, 7, 8
   a) Determine o valor do termo ■, sabendo que a média aritmética de todos os números da sequência é 7. **10**
   b) Obtenha a mediana dos termos dessa sequência. **7,5**

3. A tabela a seguir mostra a idade dos estudantes de um curso de Educação de Jovens e Adultos (EJA).

Estudantes matriculados na EJA

Idade (em anos)	Quantidade
23	38
24	26
25	20
26	18
27	12
28	6
Total	**120**

Dados fornecidos pelo coordenador do curso.

   a) Calcule a idade média desses estudantes. **24,65 anos.**
   b) Qual é a moda da idade dos estudantes? **23 anos.**

4. Calcule a idade média de um grupo de 10 estudantes cujas idades são mostradas na tabela a seguir. **15 anos.**

Idade de um grupo de estudantes					
	Idade (em anos)	13	14	15	16
	Quantidade de estudantes	1	3	1	5

Dados obtidos pelo coordenador da escola.

5. Determine a mediana dos números a seguir.
   a) 21; 13; 38; 61; 17; 57; 62; 32; 25 **32**
   b) 17; 12; 8; 5; 17; 15; 10; 20; 25; 10 **13,5**

6. Júlia registrou em uma tabela a temperatura máxima na cidade em que mora durante os sete primeiros dias do mês de junho.

Temperatura máxima em junho

Dia	Temperatura (em °C)
1	21
2	17
3	19
4	20
5	22
6	24
7	21

Dados obtidos por Júlia.

   a) Qual é a moda das temperaturas máximas desses dias? **21 °C**
   b) Qual é a média dessas temperaturas? **Aproximadamente 20,57 °C.**

- Leia com os estudantes o texto do boxe *Observação* e diga a eles que chamamos as amostras que não apresentam moda de amodal e as com mais de uma moda, de bimodal (duas modas), trimodal (três modas), multimodal (mais de três modas). Se julgar pertinente, apresente a eles os exemplos a seguir.

1. Observe a medida da massa, em quilograma, de cinco voluntários de uma pesquisa.

   82 kg 65 kg 59 kg 74 kg 60 kg

   Podemos dizer que essa amostra é amodal, pois todas as medidas de massa são diferentes.

2. Álvaro fez uma pesquisa sobre a preferência musical de alguns estudantes do 8º ano de sua escola. Observe os dados coletados.

Gênero musical preferido do 8º ano

Gênero musical	Frequência
MPB	4
Forró	4
Pop	3
Samba	2
Sertanejo	1

Dados obtidos por Álvaro.

Podemos dizer que essa amostra é bimodal, pois MPB e forró são os gêneros musicais com frequências iguais.

- No item **b** da atividade **2** e na atividade **5**, verifique se os estudantes ordenaram corretamente os números antes de determinar a mediana. Reforce que a ordenação pode ser tanto crescente como decrescente.
- O item **a** da atividade **3** e a atividade **4** podem ser resolvidos calculando-se a média aritmética ponderada da idade dos estudantes. Verifique se eles percebem que a média aritmética das idades, que também é uma solução para o problema, seria muito trabalhosa e se notam que ambas as maneiras de calcular a média das idades são corretas e se relacionam.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nesta página permitem aos estudantes obter os valores de medidas de tendência central, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA25**.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

- Comente com os estudantes que os dados apresentados no contexto desta página foram obtidos por meio de uma pesquisa no *site* disponível em: https://www.prolivro.org.br/5a-edicao-de-retratos-da-leitura-no-brasil-2/a-pesquisa-5a-edicao/; acesso em: 17 jun. 2022.
- As medidas de dispersão determinam o grau de variabilidade de uma distribuição, ou seja, descrevem quão homogêneo é um conjunto de dados. Elas complementam as medidas de tendência central.
- Explique aos estudantes que as medidas estatísticas se complementam e que, para se obter uma melhor análise dos dados, é interessante combinar convenientemente algumas dessas medidas.
- Apresente dois grupos de dados, um com valores homogêneos e outro com valores heterogêneos, que tenham a mesma média e peça aos estudantes que calculem a média e a amplitude nos dois conjuntos de dados. Depois, solicite que apresentem uma breve síntese das conclusões que obtiveram depois de realizar os cálculos.
- É importante que os estudantes percebam que, quanto maior a amplitude, maior a dispersão ou a variabilidade dos valores da variável. Além disso, a amplitude tem o inconveniente de só levar em consideração os dois valores extremos do grupo de dados, desconsiderando os dados intermediários do grupo, o que pode invalidar a idoneidade do resultado, uma vez que ela é apenas uma indicação aproximada da dispersão.
- Verifique se os estudantes compreendem que a amplitude é uma medida instável e que, por isso, precisamos de outras medidas de dispersão para analisar os dados.

Medidas de dispersão

Segundo o Instituto Pró-Livro, de 2015 para 2019, no Brasil, o percentual de pessoas que leram pelo menos um livro nos três meses que antecederam a pesquisa caiu de 56% para 52%.

Depois de ler uma reportagem com essas informações, um bibliotecário decidiu fazer uma pesquisa com alguns dos frequentadores da biblioteca em que ele trabalha. Foram entrevistadas cinco pessoas ao acaso. Na tabela a seguir, estão representados os resultados da pesquisa.

Quantidade de livros lidos em um ano

Entrevistado	A	B	C	D	E
Quantidade de livros lidos	2	1	5	13	4

Dados obtidos pelo bibliotecário.

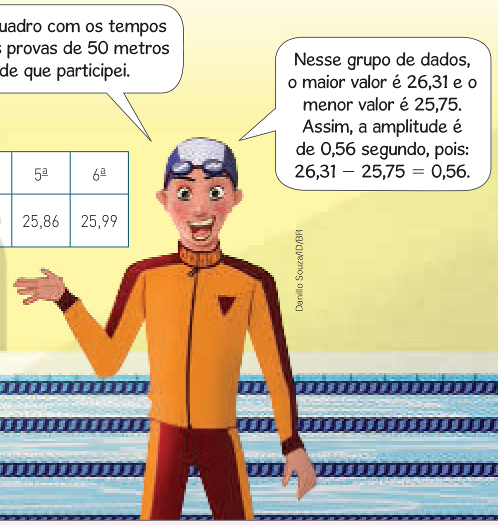
O bibliotecário fez os cálculos e verificou que cada entrevistado leu, em média, 5 livros em um ano.

Ao comparar o valor obtido para a média e os dados da tabela, ele percebeu que a média aritmética não representava adequadamente a realidade, pois a média foi de 5 livros lidos por pessoa, mas, por exemplo, o entrevistado B leu apenas 1 livro, enquanto o entrevistado D leu 13 livros. Ou seja, os dados obtidos na pesquisa são muito dispersos.

Em situações como essa, podemos utilizar outras medidas para analisar os dados, chamadas de **medidas de dispersão**. A seguir, vamos estudar algumas delas.

Amplitude

A **amplitude** (A) é uma medida de dispersão que determina a faixa de variação dos elementos de um grupo de dados numéricos. Ela corresponde à diferença entre o maior valor e o menor valor desse grupo. Veja um exemplo de como calcular a amplitude.



Prova	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Tempo (em segundo)	25,75	26,31	25,94	26,30	25,86	25,99

Danilo Souza/ID/BR

OUTRAS FONTES

Santos, J. *et al*. Processo de aprendizagem estatística com foco em medidas de tendência central e dispersão. *Educação Pública*, v. 17, n. 2, 24 jan. 2017. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/17/2/processo-de-aprendizagem-estatstica-com-foco-em-medidas-de-tendncia-central-e-disperso. Acesso em: 17 jun. 2022.

Esse artigo apresenta uma sequência didática para o ensino e para a compreensão do processo de aprendizagem estatística para estudantes da Educação Básica. O objetivo é a aprendizagem das medidas de tendência central e de dispersão por meio de aplicativos.

Desvio

Outra medida de dispersão são os **desvios** (*D*). Eles indicam o afastamento de cada um dos valores de um grupo de dados numéricos em relação à média aritmética dos valores desse grupo.

O desvio de um valor de um grupo de dados numéricos corresponde à diferença entre esse valor e o valor da média aritmética desse grupo de dados.

Como exemplo, vamos analisar o tempo que um ônibus de certa linha leva para ir do centro da cidade até a rodoviária, considerando seis viagens sob as mesmas condições e tempos expressos em minuto:

$$25, 29, 32, 27, 22, 21$$

Primeiro, calculamos o tempo médio (*MA*) de viagem:

$$MA = \frac{25 + 29 + 32 + 27 + 22 + 21}{6} = \frac{156}{6} = 26$$

Agora, para calcular os desvios (*D*), vamos determinar as diferenças entre cada tempo de viagem e o tempo médio.

$D(25) = 25 - 26 = -1$ $\quad$ $D(27) = 27 - 26 = 1$

$D(29) = 29 - 26 = 3$ $\quad$ $D(22) = 22 - 26 = -4$

$D(32) = 32 - 26 = 6$ $\quad$ $D(21) = 21 - 26 = -5$

Perceba que, diferentemente das medidas que vimos até o momento, o desvio não é uma medida que representa todo o conjunto de dados. Apesar disso, a observação dos desvios possibilita uma interpretação do conjunto de dados. Nesse caso, é possível notar que alguns dos desvios, em valor absoluto, não são pequenos, o que evidencia um alto grau de dispersão dos dados.

Variância

A **variância** (*V*) é uma medida de dispersão que está relacionada com os desvios. Ela corresponde à média aritmética dos quadrados dos desvios dos valores do conjunto de dados considerado.

Veja o grupo de dados formado pelas temperaturas, em grau Celsius, de um local, em cinco dias seguidos, no mesmo horário.

Gerson Gerloff/Pulsar Imagens

$$27, 25, 23, 18, 22$$

Vamos calcular a variância desse grupo de dados numéricos seguindo os passos a seguir.

1º passo: Calculamos a média aritmética *MA* desse grupo de dados.

$$MA = \frac{27 + 25 + 23 + 18 + 22}{5} = \frac{115}{5} = 23$$

2º passo: Calculamos o desvio *D* de cada valor desse grupo.

$D(27) = 27 - 23 = 4$ $\quad$ $D(18) = 18 - 23 = -5$

$D(25) = 25 - 23 = 2$ $\quad$ $D(22) = 22 - 23 = -1$

$D(23) = 23 - 23 = 0$

- Nesta página, apresentamos o desvio e a variância, que se baseia nos desvios em torno da média aritmética.
- É importante que os estudantes compreendam que o desvio relaciona cada valor do grupo de dados com a média aritmética dos valores do grupo de dados.
- Para abordar o conceito de variância, certifique-se de que os estudantes compreenderam os conceitos de média aritmética e de desvio vistos anteriormente.
- Destaque que os desvios podem ser positivos ou negativos, dependendo de o dado estudado ser maior ou menor que a média aritmética dos dados. Já a variância será sempre um valor positivo.

199

- Permita aos estudantes utilizar a calculadora para realizar os cálculos de desvio-padrão.
- Comente com eles que o desvio-padrão é a medida de dispersão utilizada com maior frequência.
- Esclareça-os que, quanto maior for a dispersão dos dados analisados em torno da média, maior será o desvio-padrão.

DE OLHO NA BASE

Compreender as medidas de dispersão auxilia na análise dos dados de uma pesquisa, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA25**.

3º passo: Elevamos ao quadrado cada desvio e obtemos um novo grupo de dados numéricos.

$$\underbrace{4^2}_{16} \quad \underbrace{2^2}_{4} \quad \underbrace{0^2}_{0} \quad \underbrace{(-5)^2}_{25} \quad \underbrace{(-1)^2}_{1}$$

4º passo: Por fim, para obter a variância, calculamos a média aritmética do grupo de dados numéricos estabelecidos no 3º passo.

$$\frac{16 + 4 + 0 + 25 + 1}{5} = \frac{46}{5} = 9{,}2$$

Portanto, a variância é 9,2.

Desvio-padrão

A variância utiliza os quadrados dos desvios, o que dificulta a comparação direta com o valor médio ou com os valores do grupo considerado. Assim, a medida de dispersão utilizada mais frequentemente para estudar a variação dos valores de um grupo em relação ao seu valor médio corresponde à raiz quadrada da variância e é chamada de **desvio-padrão** (*DP*).

Quanto maior for o desvio-padrão de um conjunto de dados, mais distantes da média estarão os valores desse conjunto (maior será a dispersão); quanto menor for o desvio-padrão, mais esses valores estarão próximos da média (menor será a dispersão).

Exemplos

A. Vamos determinar o desvio-padrão do grupo de dados a seguir.

805, 820, 817, 810

- Primeiro, calculamos a média *MA* desse grupo de dados.

$$MA = \frac{805 + 820 + 817 + 810}{4} = \frac{3\,252}{4} = 813$$

- Depois, calculamos a variância *V*.

$$V = \frac{(805 - 813)^2 + (820 - 813)^2 + (817 - 813)^2 + (810 - 813)^2}{4}$$

$$V = \frac{(-8)^2 + 7^2 + 4^2 + (-3)^2}{4}$$

$$V = \frac{64 + 49 + 16 + 9}{4} = \frac{138}{4} = 34{,}5$$

- Por fim, calculamos o desvio-padrão *DP*.

$$DP = \sqrt{V} = \sqrt{34{,}5} \simeq 5{,}87$$

Para facilitar a análise dos dados desse conjunto, vamos verificar quanto por cento o desvio-padrão representa da média aritmética.

$$\frac{5{,}87}{813} \simeq 0{,}007 = \frac{7}{1\,000} = \frac{0{,}7}{100} = 0{,}7\%$$

Como o desvio-padrão é pequeno (representa menos de 1% da média), concluímos que o grupo é pouco disperso. Isso indica que os valores do grupo estão próximos da média.

B. Rafaela organizou uma campanha de arrecadação de livros para a biblioteca de seu bairro e registrou as doações recebidas em cada dia. Veja.

5, 15, 0, 30, 55

Vamos calcular o desvio-padrão *DP* desse grupo de doações.

- Primeiro, calculamos a média *MA* desse grupo de dados.

$$MA = \frac{5 + 15 + 0 + 30 + 55}{5} = \frac{105}{5} = 21$$

- Depois, calculamos o desvio-padrão (raiz quadrada da variância) da seguinte maneira:

$$DP = \sqrt{\frac{(5 - 21)^2 + (15 - 21)^2 + (0 - 21)^2 + (30 - 21)^2 + (55 - 21)^2}{5}}$$

$$DP = \sqrt{\frac{(-16)^2 + (-6)^2 + (-21)^2 + 9^2 + 34^2}{5}}$$

$$DP = \sqrt{\frac{256 + 36 + 441 + 81 + 1\,156}{5}} = \sqrt{\frac{1\,970}{5}} = \sqrt{394} \simeq 19{,}8$$

Agora, vamos determinar que porcentagem o desvio-padrão representa da média aritmética.

$$\frac{19{,}8}{21} \simeq 0{,}943 = \frac{943}{1\,000} = \frac{94{,}3}{100} = 94{,}3\%$$

Como o desvio-padrão é grande (representa quase 100% da média), concluímos que o grupo é muito disperso. Isso indica que as doações recebidas estão distantes do valor médio.

C. Duas equipes, A e B, que participaram de um campeonato amador de basquete marcaram os seguintes pontos nas últimas partidas desse campeonato:


Danilo Souza/ID/BR

- Pontuações da equipe A: 100, 95, 90 e 87.
- Pontuações da equipe B: 120, 88, 84 e 72.

  Qual dessas equipes apresentou desempenho mais regular nos últimos 4 jogos do campeonato?

Podemos utilizar o cálculo do desvio-padrão de dois ou mais conjuntos de dados, para compará-los e verificar qual deles apresenta maior regularidade, ou seja, qual deles é menos disperso.

Vamos calcular o desvio-padrão da pontuação das duas equipes para determinar qual delas foi a mais regular.

- Equipe A

$$MA = \frac{100 + 95 + 90 + 87}{4} = \frac{372}{4} = 93$$

$$DP = \sqrt{\frac{(100 - 93)^2 + (95 - 93)^2 + (90 - 93)^2 + (87 - 93)^2}{4}}$$

$$DP = \sqrt{\frac{7^2 + 2^2 + (-3)^2 + (-6)^2}{4}} = \sqrt{\frac{49 + 4 + 9 + 36}{4}} = \sqrt{\frac{98}{4}}$$

$$DP = \sqrt{24{,}5} \simeq 4{,}95$$

- Explore com os estudantes os exemplos de desvio-padrão apresentados nestas páginas para reforçar e relacionar os conceitos de média, de desvio e de variância.
- Sugira aos estudantes que elaborem um mapa conceitual relacionando os conceitos estatísticos estudados até este momento. Depois, incentive-os a compartilhar entre si os mapas que elaboraram.

- Para resolver as atividades propostas, os estudantes podem utilizar o mapa conceitual sugerido anteriormente para fonte de consulta ou, se preferir, escreva na lousa cada conceito com o respectivo exemplo numérico para auxiliar a turma durante a resolução.
- Na atividade **12**, solicite aos estudantes que justifiquem suas escolhas pelo cálculo do desvio-padrão. Observe se eles argumentam que o grupo B é o mais regular, pois é o grupo que apresenta o desvio--padrão mais próximo de zero. Caso isso não ocorra, comente com eles e incentive-os a refletir sobre essa afirmação.
- As atividades, em que os estudantes precisam argumentar com base em conhecimentos matemáticos, contribuem para o desenvolvimento de diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático.
- Aproveite a atividade **13** para verificar se os estudantes compreenderam os conceitos trabalhados até o momento. E, se julgar necessário, retome a teoria e os exemplos apresentados no Livro do Estudante.
- Na atividade **14**, incentive os estudantes a justificar suas escolhas nos itens **b**, **c** e **d**, por exemplo: O grupo A é mais regular porque apresenta menor desvio-padrão. Espera-se que eles percebam que o grupo mais regular é aquele que apresenta menor desvio-padrão e, consequentemente, menor dispersão.

- Equipe B

$$MA = \frac{120 + 88 + 84 + 72}{4} = \frac{364}{4} = 91$$

$$DP = \sqrt{\frac{(120 - 91)^2 + (88 - 91)^2 + (84 - 91)^2 + (72 - 91)^2}{4}}$$

$$DP = \sqrt{\frac{29^2 + (-3)^2 + (-7)^2 + (-19)^2}{4}} = \sqrt{\frac{841 + 9 + 49 + 361}{4}} = \sqrt{\frac{1\,260}{4}}$$

$$DP = \sqrt{315} \simeq 17{,}75$$

Comparando o desvio-padrão das equipes A e B, percebemos que o desempenho da equipe A foi mais regular.

13. a) 626 quilômetros por hora.
b) 613 quilômetros por hora.
c) $D(426) = -200$
$D(838) = 212$
$D(819) = 193$
$D(822) = 196$
$D(225) = -401$
d) 64 282
e) Aproximadamente 253,54 quilômetros por hora.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

7. Copie o quadro a seguir no caderno e, depois, complete-o.

	Grupo de dados	Média aritmética	Amplitude
16,75; 6	20, 18, 14, 15	▒▒▒▒	▒▒▒▒
31; 43	42, 27, 12, 19, 55	▒▒▒▒	▒▒▒▒
108; 2	107, 108, 109, 108	▒▒▒▒	▒▒▒▒
23; 14	18, 25, 32, 22, 18	▒▒▒▒	▒▒▒▒

8. Uma estação de rádio forneceu as temperaturas de uma cidade ao longo de um dia. Veja.

22 °C | 18 °C | 25 °C
24 °C | 20 °C | 18 °C

Calcule a temperatura média e a amplitude térmica desse dia. **Temperatura média: aproximadamente 21,17 °C; amplitude térmica: 7 °C.**

9. Determine os desvios do grupo de dados a seguir.

108, 98, 110, 99, 103, 107

10. Calcule a variância de cada grupo de dados.

a) 18, 16, 22, 18, 20 **4,16**

b) 53, 54, 52, 53, 53, 53, 53, 53, 53 **Aproximadamente 0,22.**

11. Obtenha o desvio-padrão do grupo de dados a seguir. **Aproximadamente 2,98.**

35 | 38 | 33 | 38 | 42 | 40

12. Qual dos grupos a seguir é o mais regular? Como você chegou a essa conclusão?

- Grupo A: 25, 18, 22, 15, 18, 24
- Grupo B: 22, 23, 24, 23, 22, 23
- Grupo C: 25, 25, 20, 25, 28, 28

O grupo B; resposta pessoal.

13. Observe o grupo de dados formado pelas velocidades de uma aeronave, em quilômetro por hora, registradas a cada meia hora de voo.

426 | 838 | 819 | 822 | 225

Agora, faça o que se pede em cada item.

a) Calcule a média dessas velocidades.

b) Determine a amplitude desse grupo.

c) Calcule o desvio de cada velocidade.

d) Qual é o valor da variância?

e) Determine o desvio-padrão desse grupo de velocidades.

14. a) Grupo A: 23; grupo B: 77,2; grupo C: 44.

14. Considere os grupos de dados a seguir.

- Grupo A: 21, 22, 23, 24, 25
- Grupo B: 78, 65, 66, 78, 99
- Grupo C: 30, 44, 54, 30, 62

a) Qual é o valor médio de cada grupo?

b) Qual desses grupos tem o maior desvio-padrão? **O grupo C.**

c) Qual grupo tem a menor dispersão nos dados? **O grupo A.**

d) Que grupo de dados é o mais regular? **O grupo A.**

9. $D(108) = 3{,}83$; $D(98) = -6{,}17$; $D(110) = 5{,}83$; $D(99) = -5{,}17$; $D(103) = -1{,}17$; $D(107) = 2{,}83$.

202

Frequência absoluta e frequência relativa

Veja os pilotos que venceram pelo menos uma corrida na temporada 2021 de Fórmula 1. Próximo a eles é possível ver a quantidade de vitórias na temporada.

Fotografias: Max Verstappen: Cristiano Barni/Shutterstock.com/ID/BR; Lewis Hamilton: ANDREJ ISAKOVIC/AFP; Valtteri Bottas: Antonin Vincent/DPPI/LiveMedia/Alamy/Fotoarena; Sergio Perez: Mark Thompson/Equipe/Getty Images; Esteban Ocon: James Moy/Alamy/Fotoarena; Daniel Ricciardo: AlessioDeMarco/Shutterstock.com/ID/BR; Imagem de fundo: CARL DE SOUZA/AFP/Getty Images

Fonte de pesquisa: Formula One. 2021 race results. Disponível em: https://www.formula1.com/en/results.html/2021/races.html. Acesso em: 4 abr. 2022.

↑ Pilotos que venceram pelo menos uma corrida na temporada 2021 da Fórmula 1. Abaixo, carro usado por Lewis Hamilton durante o Grande Prêmio do Brasil de Fórmula 1, em 2021, em Interlagos, São Paulo (SP).

O número de vezes que determinada variável assume um valor é chamado de **frequência absoluta**. Nessa situação, por exemplo, o número de vezes que cada piloto venceu é sua frequência absoluta. Assim, a frequência absoluta correspondente às vitórias de Max Verstappen é 10; a de Lewis Hamilton é 8; a de Valtteri Bottas, Sergio Perez, Esteban Ocon e Daniel Ricciardo é 1.

A frequência de vitórias dos pilotos de Fórmula 1 é um bom indicador de quem disputará as primeiras colocações e poderá ser campeão.

Outro indicador que auxilia na análise dos dados é a **frequência relativa**. Ela corresponde à razão entre a frequência absoluta e o número total de resultados obtidos na pesquisa. Geralmente, essa frequência é expressa em porcentagem, mas também pode ser expressa na forma de fração.

Vitórias por piloto – Fórmula 1 (temporada 2021)

Piloto	Frequência absoluta	Frequência relativa
Max Verstappen	10	$\frac{10}{22} \simeq 0{,}45 = 45\%$
Lewis Hamilton	8	$\frac{8}{22} \simeq 0{,}36 = 36\%$
Valtteri Bottas	1	$\frac{1}{22} \simeq 0{,}05 = 5\%$
Sergio Perez	1	$\frac{1}{22} \simeq 0{,}05 = 5\%$
Esteban Ocon	1	$\frac{1}{22} \simeq 0{,}05 = 5\%$
Daniel Ricciardo	1	$\frac{1}{22} \simeq 0{,}05 = 5\%$
Total	**22**	$\mathbf{\frac{22}{22} = 1 = 100\%}$

Fonte de pesquisa: Formula One. 2021 race results. Disponível em: https://www.formula1.com/en/results.html/2021/races.html. Acesso em: 4 abr. 2022.

FREQUÊNCIA ABSOLUTA E FREQUÊNCIA RELATIVA

- Antes de iniciar o desenvolvimento do conteúdo desta página, relembre com os estudantes o cálculo de porcentagens relacionado à razão.
- Explique a eles que a relação entre o número de vitórias e o total de corridas será a frequência relativa de cada piloto.
- Enfatize aos estudantes que, geralmente, a frequência relativa é apresentada em porcentagem, mas também pode ser em forma decimal. É importante que eles percebam que a soma de todas as frequências relativas sempre será igual a 1 ou 100%.

- Explore com os estudantes os dados da tabela apresentada no final desta página. É importante que eles percebam que os dados foram retirados das velocidades dos veículos que estão ao lado da imagem do radar.
- Se considerar pertinente, reproduza as velocidades registradas pelo radar na lousa e utilize cores distintas para identificar os valores de cada intervalo. Por exemplo, contorne de vermelho as medidas de velocidade que pertencem ao intervalo: $80 \vdash 90$: 80,4; 80,2; 80,4; 89,8; 89,7; 80,3; 89,8; 80,0; 80,2; 80,1 e 80,3. Depois, contabilize os números contornados de vermelho para obter a frequência absoluta do intervalo $80 \vdash 90$. Repita esse procedimento para os demais intervalos, mas utilize cores distintas.
- Explique aos estudantes o significado do símbolo $\vdash$. Mostre que, no intervalo de 80 a 90, foram contados 11 valores; o símbolo indica que o número 80 entra na contagem e o número 90 não, pois ele entrará na contagem do próximo intervalo.
- Se julgar conveniente, esclareça aos estudantes que, em tabelas de classes, para indicar intervalos na tabela, também podemos utilizar os símbolos $-$, $\dashv$ e $\vdash\dashv$.

DE OLHO NA BASE

Compreender como definir o intervalo adequado para classificar as frequências de variáveis contínuas para resumir os dados de maneira adequada contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA24**.

Distribuição de frequência por intervalos

Imagine que uma pessoa queira organizar uma tabela com a frequência absoluta de algumas variáveis, como altura e massa de um grupo de 100 pessoas. Provavelmente, a maior parte dos valores apresentaria frequência absoluta 1 e, por isso, a tabela ficaria muito extensa.

Em casos como esse, é possível organizar as variáveis contínuas por **classes** ou **intervalos** e, então, agrupar algumas frequências. Tabelas organizadas dessa maneira são chamadas de **tabelas de distribuição de frequência**.

Nessas tabelas, os intervalos estabelecidos normalmente têm a mesma amplitude, ou seja, a mesma extensão, e cada dado coletado é registrado na tabela considerando o intervalo a que pertence.

Agora, acompanhe como podemos construir uma tabela de distribuição de frequências por intervalos.

A seguir, estão apresentadas as velocidades de veículos registradas por um radar durante determinado período de tempo.

bibiphoto/Shutterstock.com/ID/BR

Radar mostrando a velocidade de um veículo em determinado momento.

110,1	129,5	99,1	100,4	80,4
100,7	80,2	90,2	80,4	115,0
89,8	89,7	80,3	89,8	80,0
80,2	110,2	90,0	99,7	115,1
90,4	80,1	100,1	110,0	80,3

Note que os valores de velocidade são quase todos distintos e, por isso, ao organizar uma tabela com as frequências dessas velocidades, ela ficaria muito grande. Assim, vamos organizar os valores da variável velocidade em intervalos.

Começamos determinando a amplitude do intervalo, de modo que todos os valores apresentados se enquadrem em um dos intervalos. O intervalo $100 \vdash 110$, por exemplo, indica que o número 100 pertence ao intervalo e que o número 110, não.

Depois de definir a amplitude do intervalo, devemos contabilizar cada dado e relacioná-lo ao intervalo correspondente. Observe.

Distribuição das velocidades registradas

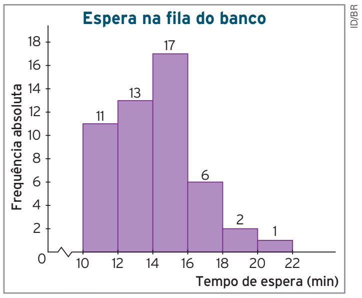
Velocidade (em km/h)	Frequência absoluta	Frequência relativa
$80 \vdash 90$	11	$\frac{11}{25} = 0{,}44 = 44\%$
$90 \vdash 100$	5	$\frac{5}{25} = 0{,}2 = 20\%$
$100 \vdash 110$	3	$\frac{3}{25} = 0{,}12 = 12\%$
$110 \vdash 120$	5	$\frac{5}{25} = 0{,}2 = 20\%$
$120 \vdash 130$	1	$\frac{1}{25} = 0{,}04 = 4\%$

Dados fictícios.

Histograma

O **histograma** é um gráfico utilizado para representar uma distribuição de frequências. Ele é composto de barras cujas larguras são iguais às amplitudes dos intervalos de classe, e as alturas são proporcionais às frequências das classes.

O histograma a seguir mostra a distribuição de frequências absolutas em relação ao tempo de espera na fila de um banco.



Dados fornecidos pelo banco.

De acordo com o histograma:

- 13 pessoas esperaram entre 12′ e 13′59″;
- 17 pessoas esperaram entre 14′ e 15′59″;
- 6 pessoas esperaram entre 16′ e 17′59″;
- Apenas 1 pessoa esperou entre 20′ e 21′59″.

Você percebeu que, nesse histograma, foi usado o símbolo ⁓ no eixo horizontal? Esse símbolo indica que o intervalo entre 0 e 10 não é proporcional aos demais intervalos representados no eixo.

Agora, acompanhe como podemos construir um histograma com base em uma tabela de distribuição de frequências.

A tabela a seguir traz os resultados de uma pesquisa realizada com 50 funcionários de uma empresa.

Distribuição do tempo semanal para a prática de atividades físicas

Horas semanais	Frequência absoluta	Frequência relativa
0 ⊢ 3	25	$\frac{25}{50} = 0{,}50 = 50\%$
3 ⊢ 6	10	$\frac{10}{50} = 0{,}20 = 20\%$
6 ⊢ 9	7	$\frac{7}{50} = 0{,}14 = 14\%$
9 ⊢ 12	5	$\frac{5}{50} = 0{,}10 = 10\%$
12 ⊢ 15	3	$\frac{3}{50} = 0{,}06 = 6\%$

Dados fornecidos pela empresa.

REPRESENTAÇÃO DE ALGUMAS MEDIDAS DE TEMPO

A representação de hora, minuto e segundo pode ser feita da seguinte maneira:

- hora: h;
- minuto: min ou ′;
- segundo: s ou ″.

Por exemplo, a representação 11′59″ significa 11 minutos e 59 segundos.

- Explore com os estudantes o histograma apresentado sobre o tempo de espera na fila do banco. Sugira a eles que construam uma tabela de distribuição de frequências com base nesse histograma, calculando a frequência relativa em porcentagem.

Espera na fila do banco

Tempo (em min)	Frequência absoluta	Frequência relativa
10 ⊢ 12	11	$\frac{11}{50} = 0{,}22 = 22\%$
12 ⊢ 14	13	$\frac{13}{50} = 0{,}26 = 26\%$
14 ⊢ 16	17	$\frac{17}{50} = 0{,}34 = 34\%$
16 ⊢ 18	6	$\frac{6}{50} = 0{,}12 = 12\%$
18 ⊢ 20	2	$\frac{2}{50} = 0{,}04 = 4\%$
20 ⊢ 22	1	$\frac{1}{50} = 0{,}02 = 2\%$

Dados fornecidos pelo banco.

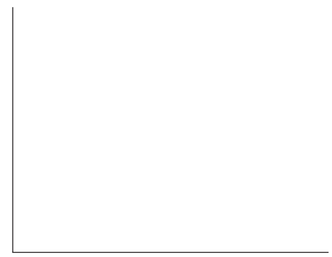
- Sugira aos estudantes que utilizem a calculadora para comprovar os valores obtidos para as frequências relativas.

205

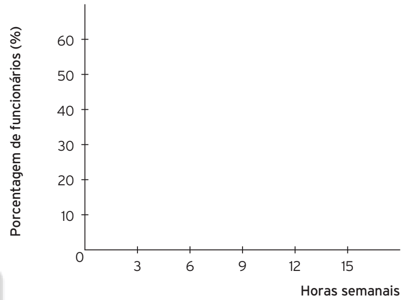
• Depois de os estudantes acompanharem o passo a passo da construção de um histograma, compare o histograma da distribuição do tempo semanal para a prática de atividades físicas, que apresenta as frequências relativas, com o histograma do tempo de espera na fila do banco, que apresenta a frequência. Solicite a eles que comparem os dois histogramas, para que percebam que a frequência relativa é representada por porcentagens, enquanto a frequência é representada por valores absolutos.

Vamos construir um histograma para representar os dados da tabela.

1º passo: Traçamos dois eixos perpendiculares entre si.

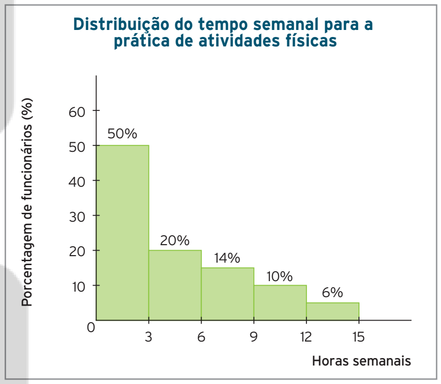


2º passo: No eixo das abscissas ("Horas semanais"), colocamos os intervalos em ordem crescente. No eixo das ordenadas ("Porcentagem de funcionários"), representamos as frequências relativas.



3º passo: Desenhamos as barras com a largura do intervalo e a altura igual à frequência. E, por fim, escrevemos o título e a fonte do gráfico.

Ilustrações: ID/BR



Dados fornecidos pela empresa.

Perceba que os dados da tabela e os dados do gráfico são os mesmos; a diferença está na maneira de representá-los.

15. a) Consulte a resposta neste manual.
b) 80 quilômetros por hora.
c) 130 quilômetros por hora.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

15. Uma revista de automobilismo realizou um teste de velocidade máxima com 25 modelos de carros antigos em condições idênticas, obtendo os seguintes resultados em quilômetro por hora:

115	100	90	80	90
130	80	90	110	80
100	90	80	90	100
100	80	90	100	110
80	110	80	115	80

a) Organize os dados em uma tabela de frequências absoluta e relativa.

b) Qual velocidade tem maior frequência?

c) Qual velocidade tem menor frequência?

d) É mais fácil responder a esses itens observando a frequência absoluta ou observando a frequência relativa? Seus colegas têm a mesma opinião que você? Apresente sua opinião e ouça a dos colegas. **Respostas pessoais.**

16. Cristina fez um levantamento dos gastos mensais, em real, de alguns dos estudantes do 8º ano na cantina.

120	100	80	50	60	75	90
110	95	130	70	85	100	130
125	105	75	65	70	90	50
100	90	110	85	100	80	90

a) Copie a tabela a seguir no caderno e complete-a. Se necessário, utilize uma calculadora.

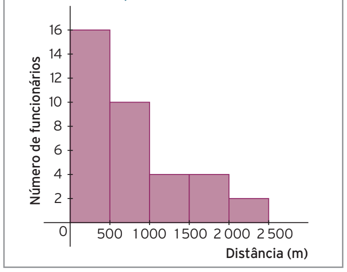
Gastos de alguns dos estudantes do 8º ano na cantina

	Gasto	Frequência absoluta	Frequência relativa
6; $\frac{3}{14}$	De 50 reais a 74 reais		
11; $\frac{11}{28}$	De 75 reais a 99 reais		
8; $\frac{2}{7}$	De 100 reais a 124 reais		
3; $\frac{3}{28}$	De 125 reais a 149 reais		

Dados fornecidos por Cristina.

b) Determine a porcentagem dos gastos mensais que não atingem 100 reais. **Aproximadamente 60,7%.**

17. Certa empresa construiu um histograma com a distribuição de frequência das distâncias, em metro, das casas dos seus funcionários até a empresa.



Dados fornecidos pela empresa.

Agora, responda.

a) Quantos funcionários trabalham nessa empresa? **36 funcionários.**

b) Quantos funcionários moram a uma distância entre 1500 metros e 2000 metros da empresa? **4 funcionários.**

c) Quantos funcionários moram a menos de 1000 metros da empresa? **26 funcionários.**

18. Observe os valores correspondentes aos salários, em real, dos funcionários de uma empresa de marcenaria.

1254	1600	2050	2800	3800	1254
1600	2250	3050	4050	1254	1600
2250	3050	4050	1300	1600	2400
3300	4500	1300	1600	2500	3300
4800	1400	1800	2550	3500	5400

a) Construa um histograma para representar esses dados. **Consulte a resposta neste manual.**

b) Compare o histograma que você construiu com o de um colega. Eles apresentam diferenças? Em caso afirmativo, quais são essas diferenças? **Respostas pessoais.**

- Incentive os estudantes a compartilhar e a justificar suas respostas referentes ao item **d** da atividade **15**.
- Peça aos estudantes que expliquem como pensaram para resolver a atividade **17**. Se julgar oportuno, solicite-lhes que construam uma tabela de distribuição de frequências para os dados do histograma.
- Na atividade **18**, sugira aos estudantes que organizem uma tabela com os dados dos salários dos funcionários da marcenaria. Auxilie-os na determinação dos intervalos. Para isso, oriente-os a identificar o menor e o maior salário (em real), nesse caso, 1 254 e 5 400, respectivamente. Sugira que o primeiro intervalo comece em 1 200 e que a amplitude de cada intervalo (em real) seja 500. Eles, porém, podem utilizar outros valores, daí a importância do item **b** em comparar o histograma com o do colega. É importante verificar se eles conseguiram construir um histograma que represente todos os dados, observando, por exemplo, se o último intervalo termina em 5 700, pois dessa maneira esse valor não poderá ser contado.

DE OLHO NA BASE

As atividades desta página permitem aos estudantes classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada. Portanto, elas contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA24**.

RESPOSTAS

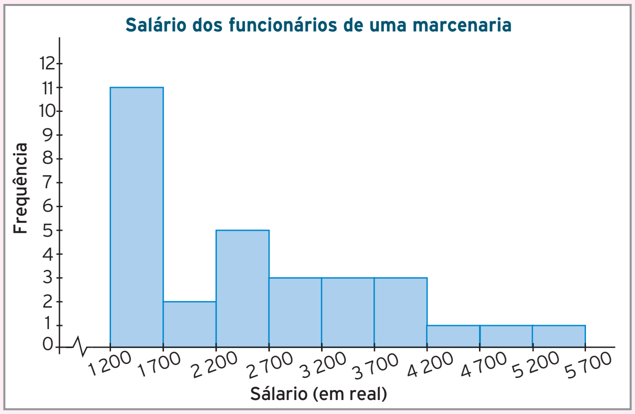
15. a)

Distribuição da velocidade máxima dos carros antigos testados

Velocidade (quilômetro por hora)	Frequência absoluta	Frequência relativa
80	8	0,32 = 32%
90	6	0,2v4 = 24%
100	5	0,2 = 20%
110	3	0,12 = 12%
115	2	0,08 = 8%
130	1	0,04 = 4%

Dados do enunciado.

18. a) Resposta possível:



Dados do enunciado.

PESQUISA ESTATÍSTICA

- Em anos anteriores, os estudantes já tiveram contato com o planejamento e a execução de pesquisas estatísticas. Entretanto, é recomendável que alguns conceitos e as etapas da realização de uma pesquisa desse tipo sejam retomados.
- Se julgar necessário, retome as etapas de uma pesquisa reproduzindo na lousa esquema a seguir:

Definição do problema
↓
Planejamento da pesquisa
↓
Coleta de dados
↓
Organização de dados
↓
Resultado de análises

- Leia o texto do Livro do Estudante com os estudantes ressaltando os conceitos de amostra e de população. Diferencie pesquisa censitária de pesquisa amostral.
- Se achar conveniente, leia para os estudantes o texto do *site* do IBGE, que traz um pouco da história do censo demográfico no Brasil, disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/22827-censo-2020-censo4.html; acesso em: 17 jun. 2022. Além desse texto, é possível apresentar o vídeo de Cimar Azeredo Pereira, diretor de Pesquisas do IBGE, que apresenta um panorama do censo de 2022, disponível em https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/32077-ibge-inicia-mobilizacao-nacional-para-o-censo-com-testes-nas-27-unidades-estaduais; acesso em: 17 jun. 2022.
- Outra alternativa para o desenvolvimento do conteúdo das páginas 208 a 212 é aplicar a metodologia de aprendizagem de sala de aula invertida e propor aos estudantes que leiam o conteúdo e anotem suas dúvidas para posterior discussão em sala de aula.

Pesquisa estatística

As pesquisas estatísticas são realizadas com diversos propósitos, como verificar a qualidade de um produto ou conhecer a opinião de uma comunidade sobre determinado assunto.

A definição do problema ou fenômeno a ser estudado é uma etapa importante no planejamento de uma pesquisa. É preciso estabelecer com exatidão qual é o objetivo da pesquisa.

As pesquisas estatísticas estudam um conjunto que contém todos os elementos que apresentam determinada característica e que vão ser o objeto de estudo. Chamamos esse conjunto de **população**. Entretanto, dependendo do caso, as pesquisas podem ser feitas com toda a população ou com apenas parte dela.

Pesquisa censitária

Quando todos os elementos da população são consultados para a realização de uma pesquisa estatística, ela é chamada **pesquisa censitária** ou **censo**.

No Brasil, a previsão para a realização de uma pesquisa censitária, que chamamos de censo demográfico, é a cada dez anos. Essa pesquisa é realizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e traz informações sobre as condições de vida da população em todos os municípios do país.

Devido à pandemia de covid-19, o censo de 2020 teve de ser realizado apenas em 2022.

Pesquisa amostral

Em muitas situações, é inviável consultar todos os elementos de uma população para realizar uma pesquisa. Nesses casos, apenas uma parte da população, chamada de **amostra**, é consultada.

Leia o texto a seguir, que traz um exemplo de pesquisa na qual seria inviável fazer uma consulta a toda população.


Sandro Pereira/Fotoarena

Modelo da nova urna eletrônica utilizada nas eleições brasileiras. Foto de 2021.

Pesquisa revela que 63,7% dos brasileiros confiam na urna eletrônica

Consulta realizada pela CNT em julho [de 2021] ouviu eleitores em 25 Unidades da Federação

A sociedade brasileira confia e tem segurança no atual sistema eletrônico de votação. É o que traduz uma pesquisa da Confederação Nacional do Transporte (CNT), divulgada na última semana, demonstrando que 63,7% da população acredita que o modelo das urnas eletrônicas é transparente e seguro.

Para a coleta de dados, os pesquisadores da entidade ouviram 2022 pessoas entre os dias 1 e 3 de julho [de 2021], em 137 cidades de 25 Unidades da Federação. Segundo a Confederação, a pesquisa tem margem de erro de 2,2 pontos percentuais. A pesquisa foi encomendada pela CNT e realizada pelo Instituto de Pesquisa MDA.

A entidade é uma das três maiores fontes de divulgação de pesquisas do Brasil, e é conhecida pela tecnicidade e metodologia consolidada. [...]

Pesquisa revela que 63,7% dos brasileiros confiam na urna eletrônica. Tribunal Superior Eleitoral, 13 jul. 2021. Disponível em: https://www.tse.jus.br/imprensa/noticias-tse/2021/Julho/pesquisa-cnt-revela-que-63-7-dos-brasileiros-confiam-na-urna-eletronica. Acesso em: 16 mar. 2022.


Marcelo Galli/Folhapress

As primeiras eleições no Brasil realizadas com o uso da urna eletrônica foram as de 1996. Na ocasião, 49% do eleitorado paulista votou com esse equipamento. A foto mostra um registro desse momento histórico. Foto de 1996.

A população brasileira já ultrapassa 212 milhões de habitantes, e a população apta a votar, certamente, é muito superior à quantidade de pessoas entrevistadas na pesquisa citada no texto (2022 pessoas). Você consegue imaginar o trabalho que daria e os inúmeros recursos que seriam necessários para fazer uma pesquisa com toda a população brasileira? Acredite, seria tão complexo que, provavelmente, ao terminar de fazê-la, os resultados já estariam ultrapassados. Assim, em pesquisas como essa, recorremos ao uso de amostras.

A amostra de uma população deve ser escolhida de modo que as informações obtidas na pesquisa representem corretamente a população. Existem diferentes métodos que podem ser utilizados para selecionar amostras representativas. A seguir, vamos estudar três deles.

Amostra casual ou aleatória simples

A prefeitura de uma cidade decidiu fazer uma pesquisa com os estudantes do Ensino Médio para saber o meio de transporte que eles utilizam para ir à escola. O número total de estudantes do Ensino Médio nesse município é 12325. Os responsáveis pela pesquisa decidiram utilizar uma amostra e entrevistar apenas 20% dessa população, ou seja, 2465 estudantes.

Para escolher quais seriam os 2465 estudantes a serem entrevistados, eles numeraram todos os 12325 estudantes e, depois, escreveram os números de 1 a 12325 em uma planilha eletrônica, cada um em uma célula. Por fim, utilizando um comando, sortearam 2465 dessas células e, então, formaram a amostra.

Nesse sorteio, todos os estudantes tinham a mesma chance de ser sorteados. Dizemos, então, que se trata de uma amostra casual ou aleatória simples.

Em uma **amostra casual** ou **aleatória simples**, cada elemento da população tem a mesma probabilidade de ser selecionado para a amostra.

DE OLHO NA BASE

A situação da eleição apresentada no tópico "Pesquisa amostral" contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**, para que os estudantes exercitem a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitem e promovam o respeito ao outro e aos direitos humanos.

- Promova, de maneira recorrente, rodas de conversa que possibilitem aos estudantes sentir que o ambiente escolar é um espaço livre de quaisquer atos violentos (verbais ou não verbais), em que o respeito a diferentes opiniões e posicionamentos sejam constantemente desenvolvidos. Aproveite esses momentos para buscar soluções coletivas e democráticas de maneira que seja possível identificar, prevenir e reverter situações de conflito no ambiente escolar. Desse modo, os estudantes podem ter sentimentos de pertencimento à convivência.

"Para a efetivação dos Direitos Humanos e da Cultura da Paz, é imprescindível a sua prática cotidiana, na qual a educação é um fator essencial, capaz de incentivar a reflexão crítica e a transformação de realidades violentas, excludentes e preconceituosas."

Fonte: *Convivência escolar e cultura de paz*. Brasília: SEEDF/Subeb, 2020. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.

- Explique aos estudantes que a amostra, em uma pesquisa amostral, pode ser definida de diferentes modos.
- É importante que eles percebam que, independentemente da maneira pela qual a amostra é obtida, ela deve ser representativa da população, para que possamos obter conclusões corretas sobre a população.

DE OLHO NA BASE

Compreender que a seleção de uma amostra pode ser feita de diferentes modos, diferenciando amostra casual, sistemática ou estratificada, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA26**.

- Explore as situações apresentadas nos exemplos **A** e **B** nestas páginas e certifique-se de que os estudantes compreenderam o procedimento para se obter uma amostra sistemática.

DE OLHO NA BASE

A análise dos exemplos aqui apresentados levam os estudantes a perceber os motivos que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA26**.

PARA EXPLORAR

IBGE Educa

Nesse *site*, você encontra diversas informações, brincadeiras e material de pesquisa sobre o Brasil.

Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/. Acesso em: 4 abr. 2022.

Amostra sistemática

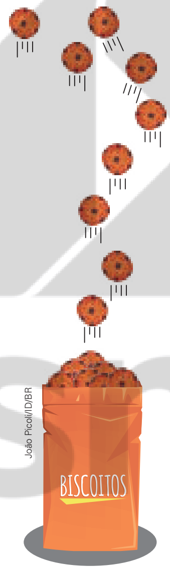
Quando os elementos da população já estão previamente ordenados, podemos utilizar uma amostragem sistemática. Por exemplo, imagine que todos os pacientes de um médico tenham que preencher uma ficha de cadastro na primeira consulta e que todas as fichas sejam numeradas sequencialmente de acordo com a ordem de preenchimento. Nesses casos, a seleção dos elementos que vão constituir a amostra pode ser feita por um sistema determinado pelo pesquisador.

Em uma amostra sistemática, os elementos são separados por um mesmo intervalo. Para definir esse intervalo, precisamos escolher o tamanho da amostra, ou seja, a quantidade de elementos que vão compor a amostra.

Para determinar o intervalo K, calculamos a razão entre o número N de elementos da população e o número n de elementos da amostra. Assim:

$$K = \frac{N}{n}$$

Depois de calcular o intervalo, devemos sortear o primeiro elemento dentro do primeiro intervalo e, depois, andar K elementos e selecionar o próximo elemento, até que tenhamos selecionado todos os n elementos da amostra.



Exemplos

A. Em uma fábrica de biscoitos, realizou-se uma pesquisa por amostragem para verificar se os pacotes confeccionados apresentavam defeitos. Em um dia de produção, a máquina da fábrica produz 600 pacotes de biscoitos, que são depositados em uma esteira e numerados de 1 a 600. O supervisor da fábrica optou por selecionar uma amostra com 40 pacotes. Para determinar quais seriam esses 40 pacotes, ele decidiu usar uma amostra sistemática.

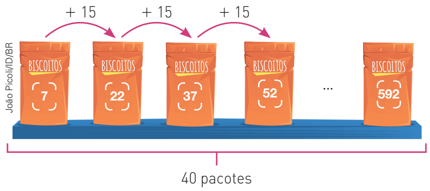
Vamos determinar quais serão esses pacotes.

O número N de elementos da população é 600, e o número n de elementos da amostra é 40. Portanto, o intervalo K dessa amostra é:

$$K = \frac{600}{40} = 15$$

Como os intervalos dessa amostra apresentam tamanho 15, temos de sortear 1 pacote entre os primeiros 15 pacotes e, depois, para determinar os outros elementos da amostra, devemos adicionar 15 ao número do elemento anterior, até termos os 40 elementos.

Imagine, por exemplo, que, no primeiro intervalo, o pacote sorteado tenha sido o de número 7. Os demais elementos da amostra seriam obtidos assim:



B. A prefeitura responsável por uma área verde de mata nativa deve decidir se essa área será destinada à construção de uma praça ou se será vendida para a construção de um condomínio residencial.

Para tomar essa decisão, os responsáveis querem saber a opinião dos moradores do bairro no qual está essa área. Eles decidiram fazer uma pesquisa amostral, consultando apenas 50 dos 8 000 moradores do bairro. Como os moradores do bairro possuem um cadastro ordenado, será utilizada uma amostra sistemática.

Acompanhe como é possível determinar quais serão os moradores selecionados.

O número N de elementos da população é 8 000, e o número n de elementos da amostra é 50. Portanto, o intervalo K dessa amostra é:

$$K = \frac{8\,000}{50} = 160$$

Se o primeiro morador sorteado foi o de cadastro número 32, os demais moradores serão os de cadastros:

$$32, \xrightarrow{+160} 192, \xrightarrow{+160} 352, \xrightarrow{+160} 512, \quad \ldots, \quad 7\,712, \xrightarrow{+160} 7\,872$$

Amostra estratificada

Outra maneira de escolher a amostra de uma pesquisa é usar a amostra estratificada. Ela é indicada quando os subgrupos da população **importam** para o resultado final da pesquisa.

Exemplo

A professora de Educação Física vai organizar um campeonato esportivo na escola. Para decidir qual será a modalidade do campeonato, ela fará uma pesquisa amostral para conhecer o esporte preferido dos estudantes. Analisando os registros de matrícula da escola, a professora encontrou os seguintes dados:

Sexo	Frequência absoluta	Frequência relativa
Feminino	640	64%
Masculino	360	36%
Total	**1 000**	**100%**

A professora decidiu que a pesquisa terá uma amostra de 200 estudantes.

- Explique aos estudantes que, muitas vezes, a população se divide em subpopulações chamadas estratos e, por isso, a amostragem estratificada é a mais indicada.
- Procure mostrar no quadro desta página que os estratos, nesse caso, são sexo feminino e sexo masculino.

211

- Na realização das atividades propostas nesta página, enfatize a importância de uma leitura cautelosa dos enunciados, para que os estudantes diferenciem os tipos de pesquisa e de amostra. Solicite a eles que destaquem as palavras-chave de cada um dos enunciados – palavras que remetam ao tipo de pesquisa. Por exemplo, na atividade **19**, ao lerem "uma pesquisa com todos os moradores", espera-se que eles destaquem a palavra "todos" e percebam que ela indica uma pesquisa censitária.

  Complemente a atividade perguntando ao estudantes quais são as possíveis vantagens e desvantagens de uma pesquisa censitária. Espera-se que eles percebam que, nesse tipo de pesquisa, é possível conhecer a resposta e/ou a opinião de todos os elementos da população. Entretanto, dependendo do tamanho da população, é possível que demore muito tempo para efetuar a coleta dos dados.
- Para realizar a atividade **23**, os estudantes devem adicionar a quantidade de pessoas que responderam "sim" com a quantidade de pessoas que responderam "não", para descobrir a quantidade de pessoas de cada modalidade. Em seguida, devem calcular a razão entre a quantidade de pessoas em cada modalidade pelo total de entrevistados.

Observe que, nessa situação, tanto a opinião dos estudantes do sexo feminino como a dos estudantes do sexo masculino é importante. Por isso, a professora vai utilizar uma amostra estratificada, composta da seguinte maneira:

- 64% dessa amostra serão estudantes do sexo feminino;
- 36% serão estudantes do sexo masculino.

Assim, temos:

- Sexo feminino: 64% de 200 $= \frac{64}{100} \cdot 200 = 128$
- Sexo masculino: 36% de 200 $= \frac{36}{100} \cdot 200 = 72$

Portanto, a amostra será composta de 128 estudantes do sexo feminino e de 72 estudantes do sexo masculino.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

19. O síndico de um condomínio realizou uma pesquisa com todos os moradores para saber quantos separam os materiais recicláveis do lixo orgânico e obteve os seguintes percentuais:

- 62% dos moradores separam todos os materiais recicláveis do lixo orgânico;
- 38% não separam o material reciclável do lixo orgânico.

Com base nessas informações, responda ao que se pede.

a) Qual poderia ter sido o objetivo do síndico ao realizar essa pesquisa?

b) O síndico realizou uma pesquisa censitária ou amostral? Justifique.

19. a) Resposta possível: Verificar a necessidade de promover uma campanha de conscientização ou de comprar mais lixeiras para os lixos orgânicos ou recicláveis.
b) Censitária, pois entrevistou todos os moradores do condomínio.

20. A professora Patrícia, de Língua Portuguesa, vai realizar uma pesquisa amostral para conhecer o gênero literário preferido dos estudantes da escola.

Para isso, ela vai selecionar uma amostra casual simples, composta de 1600 estudantes da escola. De que maneira a professora poderia selecionar essa amostra?

20. Resposta possível: A professora poderia sortear os estudantes que participarão da pesquisa pelo número de matrícula.

21. Uma empresa de telefonia selecionou uma amostra estratificada de 1500 clientes para responder à pergunta: O que pode melhorar no meu plano?

Os clientes da amostra foram organizados em grupos, de acordo com o tipo de plano contratado. No plano básico há 65% de clientes, e no plano *premium*, 35%.

a) Determine a quantidade de clientes selecionados para a amostra no plano básico e no plano *premium*. **975 clientes; 525 clientes.**

b) Para responder ao item anterior, era preciso conhecer o total de clientes da empresa de telefonia? **Não.**

22. Uma escola de dança com 360 estudantes quer realizar uma pesquisa amostral utilizando a amostra sistemática para verificar se os estudantes gostariam de realizar aulas de um novo ritmo. Sabendo que essa amostra terá 45 estudantes, qual deve ser o intervalo para selecioná-la? **8**

23. Uma pesquisa realizada com 1200 passageiros que utilizam diariamente o transporte público em seus deslocamentos perguntava se a criação de faixas exclusivas para ônibus era algo positivo para a mobilidade urbana. O resultado está representado na tabela.

Opinião dos usuários por tipo de transporte público utilizado

Modalidade	Sim	Não
Ônibus	550	50
Ônibus + Trem	230	70
Ônibus + Metrô	200	100

Dados fornecidos pela Secretaria de Transportes.

Sabendo que foi utilizada uma amostra estratificada, calcule o percentual de cada modalidade (Ônibus, Ônibus + Trem e Ônibus + Metrô). **Ônibus: 50%; Ônibus + Trem: 25%; Ônibus + Metrô: 25%.**

Tipos de gráfico

Tabelas e gráficos são recursos visuais importantes para apresentar os resultados de uma pesquisa estatística. Isso acontece porque, de maneira geral, a representação visual facilita a comparação e a análise dos dados.

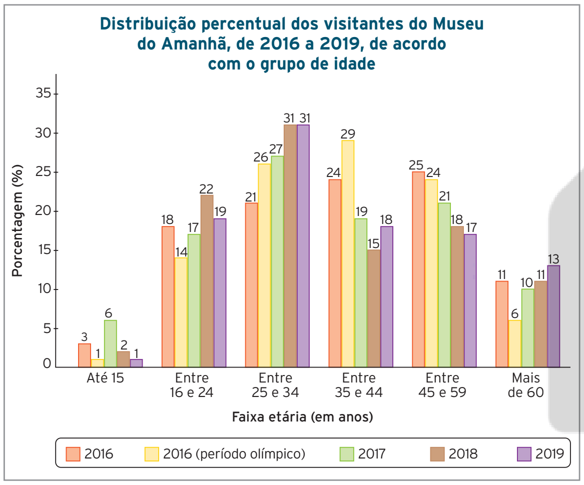
Você já sabe que existem diversos tipos de gráfico: de barras, de linhas, de setores, histogramas e outros. Mas será que, independentemente da situação, qualquer um deles pode ser utilizado?

Vamos retomar alguns dos gráficos que você já conhece e, depois, refletir sobre como determinar qual é o mais indicado para representar um conjunto de dados.

Gráfico de colunas

O gráfico a seguir traz alguns dados referentes a uma pesquisa relativa ao público do Museu do Amanhã, no Rio de Janeiro (RJ). Os dados mostram a quantidade (em %) de pessoas que visitaram o museu desde a sua inauguração, em 17 de dezembro de 2015, até o último dia de visitação, em 15 de março de 2020, quando as atividades foram temporariamente suspensas por conta da pandemia do novo coronavírus.

ID/BR



Fonte de pesquisa: Instituto de Desenvolvimento e Gestão. *O público do Museu do Amanhã*: pesquisa-síntese sobre os visitantes. Disponível em: https://museudoamanha.org.br/sites/default/files/Pesquisa_O%20p%C3%BAblico%20do%20Museu%20do%20Amanh%C3%A3_2015.12_2020.3%20%28V2%29.pdf. Acesso em: 4 abr. 2022.

O gráfico de colunas é constituído de barras verticais e é indicado para comparar as categorias de uma pesquisa. Repare que, no gráfico de colunas, as colunas têm a mesma largura, mas a altura de cada uma é proporcional à porcentagem que ela representa.

Chico Ferreira/Pulsar Imagens

O Museu do Amanhã, localizado na praça Mauá, região portuária do Rio de Janeiro (RJ), reabriu as portas no dia 8 de maio de 2021, após fechamento devido à pandemia do novo coronavírus. Foto de 2021.

GRÁFICOS DE BARRAS

Os gráficos de barras podem ser construídos com barras verticais ou horizontais. Nesta coleção, vamos chamar os gráficos de barras verticais de **gráficos de colunas** e os gráficos de barras horizontais simplesmente de **gráficos de barras**.

TIPOS DE GRÁFICO

- Analise com os estudantes o gráfico de colunas sobre a visitação ao Museu do Amanhã, fazendo questionamentos como: Em 2018, qual foi a faixa etária com maior representatividade entre os visitantes do museu? Como vocês pensaram para buscar essa informação no gráfico? Deixe-os se expressar livremente e faça as intervenções que considerar necessárias. O objetivo, nesse momento, é verificar os conhecimentos prévios deles a respeito dos diferentes tipos de gráfico.
- Com base no gráfico de colunas apresentado no Livro do Estudante peça aos estudantes que construam um ou mais gráficos desse tipo para representar outras informações que julgar necessárias. Proponha a construção de um gráfico que mostre o percentual de visitação de 2016, considerando o período regular e o período olímpico. Depois, incentive-os a refletir sobre o motivo pelo qual a pesquisa fez a distinção entre esses períodos. Verifique se eles percebem que, no período olímpico, é possível que muitos dos turistas que estavam na cidade para o evento aproveitaram a oportunidade para conhecer o museu.

DE OLHO NA BASE

Compreender que para um conjunto de dados há tipos de gráfico que são mais adequados que outros e avaliar a adequação de diferentes tipos de gráfico para representar o conjunto de dados de uma pesquisa contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA23**.

- Analise com os estudantes o gráfico de linha apresentado nesta página. Verifique se eles compreendem que a cada quantidade de medalhas conquistadas nas olimpíadas de 2008 e de 2012 pelo Brasil são iguais, mas, até 2020, nas demais olimpíadas as quantidades de medalhas são todas diferentes.
- Peça aos estudantes que apresentem afirmações que podem ser obtidas com base na observação do gráfico em questão. Para auxiliá-los, faça perguntas, como: O aumento do número de medalhas conquistadas entre 1992 e 2000 é maior, menor ou igual ao aumento do número de medalhas conquistadas entre 2012 e 2020?; Qual é a diferença entre o número de medalhas conquistadas nas olimpíadas de 1984 e 2016?
- Reforce que o gráfico de setores é utilizado para representar dados que se relacionam como parte de um todo.
- Na parte final do texto desta página do Livro do Estudante, é dito que, de maneira geral, os setores representam os valores percentuais da variável em estudo. Assim, somando os percentuais da variável em estudo, chega-se ao todo, ou seja, a 100%. Entretanto, algum estudante pode comentar que já viu gráficos em que o total não somava 100%. Assim, explique a eles que pequenas variações podem ocorrer em razão de arredondamentos, mas não devemos ter um gráfico de setores com um total que seja muito maior ou muito menor que 100%. Se nenhum estudante comentar sobre isso, diga a eles que essa possibilidade existe.

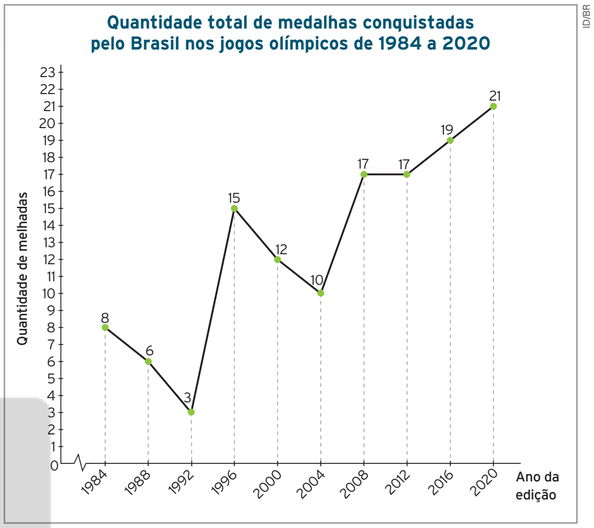
Na edição de 2020, em Tóquio, no Japão, a esqueitista Rayssa Leal, de 13 anos, se tornou a medalhista mais jovem da história olímpica do Brasil. Ela conquistou a medalha de prata na prova de *street*. A edição de 2020 aconteceu em 2021 devido à pandemia do novo coronavírus.

Gráfico de linha

O gráfico de linha, também chamado de gráfico de segmentos, é indicado quando desejamos analisar a tendência dos valores de uma variável ao longo de um período.

Nesse tipo de gráfico, as informações são representadas por pontos, e os pontos são unidos por segmentos de reta apenas para facilitar a comparação das informações. Vamos ver um exemplo?

O gráfico a seguir mostra o total de medalhas que o Brasil conquistou nas últimas dez edições dos jogos olímpicos, no período de 1984 a 2020.



Fonte de pesquisa: Comitê Olímpico Brasileiro. Medalhas olímpicas. Disponível em: https://www.cob.org.br/pt/cob/time-brasil/brasil-nos-jogos/medalhas-olimpicas. Acesso em: 4 abr. 2022.

Assim como os gráficos de barras podem ser de barras simples ou de barras múltiplas, os gráficos de linha também podem ser de linhas simples ou de linhas múltiplas. Caso quiséssemos representar o total de medalhas de ouro, de prata e de bronze ao longo das últimas edições dos jogos olímpicos, poderíamos utilizar um gráfico de linhas múltiplas.

Gráfico de setores

Os gráficos de setores têm a forma de um círculo dividido em setores circulares. Por esse motivo, usamos esses gráficos quando queremos comparar as partes de um todo.

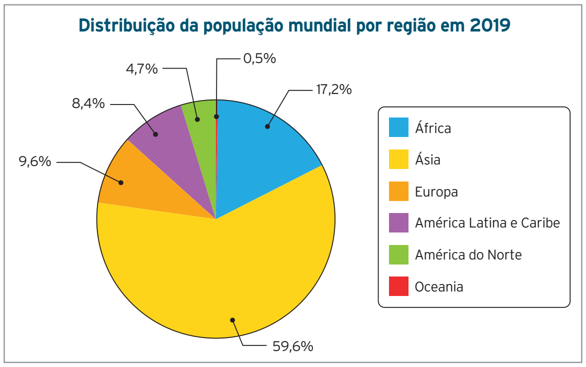
De maneira geral, os setores representam os valores percentuais da variável em estudo. Assim, somando os percentuais da variável em estudo, chega-se ao todo, ou seja, a 100%.

214

A tabela a seguir mostra a distribuição total da população (todo) por regiões (partes) e, ao lado, é possível ver o gráfico de setores correspondente aos dados da tabela.

Distribuição da população mundial por região em 2019

Região	População (em milhões)
África	1341
Ásia	4 641
Europa	748
América Latina e Caribe	654
América do Norte	369
Oceania	43



ID/BR

Fonte de pesquisa: Organização da Nações Unidas (ONU). Departamento de Assuntos Econômicos e Sociais (Desa). *World Population Prospects 2019* – Volume II: Demographic Profiles. Disponível em: https://population.un.org/wpp/Publications/Files/WPP2019_Volume-II-Demographic-Profiles.pdf. Acesso em: 4 abr. 2022.

Observando os setores do gráfico, podemos concluir com facilidade que a Ásia é o continente mais populoso e que a Oceania é o menos populoso. Repare que esse tipo de gráfico não é bom para representar um conjunto de dados dividido em muitas categorias, pois a leitura pode ficar prejudicada.

Agora, vamos ver como os setores são construídos.

Se os dados já estiverem em porcentagem, devemos apenas verificar quanto esse percentual representa em relação ao todo. Se os valores da variável não estiverem em porcentagem, para determinar a abertura de cada setor, é preciso estabelecer a razão entre o valor e o todo e, depois, verificar quantos graus essa razão representa em relação ao todo, ou seja, em relação aos 360 graus do círculo.

Por exemplo, acompanhe como foi determinada a abertura do setor correspondente à África.

- A população mundial em 2019 era 7 796 milhões; já a população do continente africano era 1341 milhões de habitantes. Assim, podemos calcular essa razão como:

$$\frac{1341}{7\,796} \simeq 0{,}172 = 17{,}2\%$$

- Como 100% representa os 360° do círculo, efetuamos uma regra de três e encontramos o valor de *x* graus que esse setor circular terá.

$$\begin{array}{ccc} 100\% & \text{———} & 360° \\ 17{,}2\% & \text{———} & x \end{array} \longrightarrow x = \frac{360° \cdot 17{,}2\%}{100\%} \simeq 61{,}9°$$

- Pergunte aos estudantes se esses mesmos dados poderiam ser representados em um gráfico de linhas. Espera-se que eles respondam que não é possível, pois esses dados não representam valores que podem ser analisados ao longo de um período. Além disso, eles são independentes, pois indicam a população total de cada continente.
- Solicite aos estudantes que calculem o percentual e a abertura do setor correspondente a cada região, assim como foi feito com a África.

215

• A compreensão do tópico "Representação adequada de dados" pelos estudantes é fundamental. Durante a fase escolar e em outras situações do cotidiano, é frequente que eles estejam sujeitos a situações nas quais deverão apresentar dados de pesquisa, e a escolha de como será feita essa apresentação é essencial. É importante que eles compreendam que, apesar de em muitas situações ser possível utilizar mais de um tipo de gráfico, a escolha do tipo de gráfico mais adequado contribui para a análise e a interpretação dos dados.

Representação adequada de dados

Já sabemos que podemos utilizar diversos tipos de tabela e de gráfico para representar os dados de uma pesquisa. Entretanto, é preciso estar atento para escolher o gráfico que melhor transmita a ideia que desejamos ou, ainda, que facilite a interpretação e a análise das informações. Dependendo dos tipos de variável da pesquisa estatística, nem sempre é possível utilizar um ou outro tipo de gráfico.

Acompanhe o exemplo a seguir.

Uma possibilidade para apresentar as informações relativas ao perfil da população de 5 anos ou mais em relação à leitura no Brasil, no período de 2007 a 2019, é utilizar uma tabela de dupla entrada.

Retrato da leitura no Brasil (população de 5 anos ou mais)

Perfil \ Ano	2007	2011	2015	2019
Leitores	55%	50%	56%	52%
Não leitores	45%	50%	44%	48%

Fonte de pesquisa: Zoara Failla (org.). *Retratos da leitura no Brasil 5*. Rio de Janeiro: Sextante, 2021.

Observe, no exemplo a seguir, que também poderíamos ter utilizado uma tabela para cada ano, mas a comparação entre os dados não seria tão eficiente.

Retrato da leitura no Brasil (população de 5 anos ou mais) em 2007

Perfil	Porcentagem
Leitores	55%
Não leitores	45%

Fonte de pesquisa: Zoara Failla (org.). *Retratos da leitura no Brasil 5*. Rio de Janeiro: Sextante, 2021.

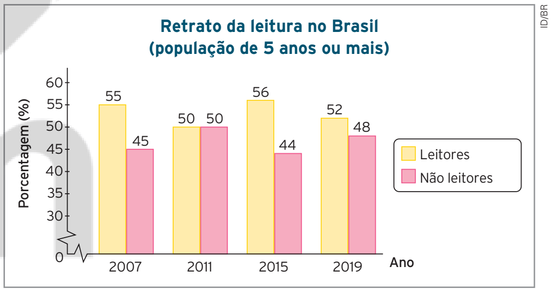
Retrato da leitura no Brasil (população de 5 anos ou mais) em 2011

Perfil	Porcentagem
Leitores	50%
Não leitores	50%

Fonte de pesquisa: Zoara Failla (org.). *Retratos da leitura no Brasil 5*. Rio de Janeiro: Sextante, 2021.

...

Agora, veja como poderíamos utilizar um gráfico de colunas para apresentar esses dados.



Fonte de pesquisa: Zoara Failla (org.). *Retratos da leitura no Brasil 5*. Rio de Janeiro: Sextante, 2021.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Se considerar oportuno, proponha aos estudantes a atividade a seguir, que retoma os tipos de variáveis estatísticas.

Observe o organizador gráfico a seguir e complete-o com a descrição de cada tipo de variável e alguns exemplos.

Variáveis
(características de interesse)

Qualitativa
Expressa uma qualidade ou classificação dos elementos estudados.

Nominal
Característica que não é ordenada.
Exemplos: cor dos olhos, religião.

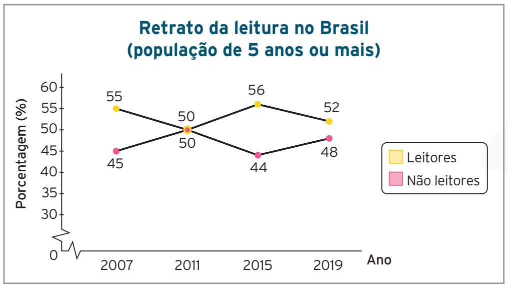
Ordinal
Característica que pode ser ordenada.
Exemplos: estágio de uma doença, grau de escolaridade.

Quantitativa
Expressa características descritas por valores numéricos.

Discreta
Característica que representa resultado de contagem.
Exemplos: número de filhos, número de irmãos.

Contínua
Característica mensurável em uma escala contínua.
Exemplos: tempo, altura.

Outra possibilidade seria utilizar um gráfico de linhas.



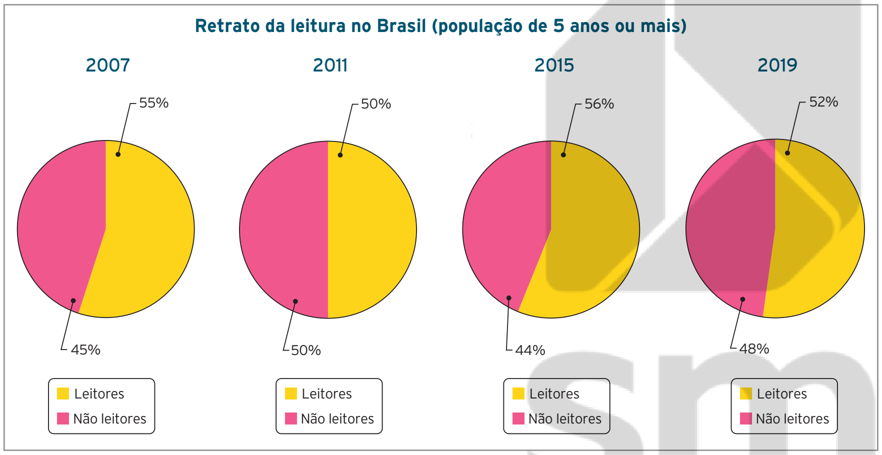
Ilustrações: ID/BR

Fonte de pesquisa: Zoara Failla (org.). *Retratos da leitura no Brasil 5*. Rio de Janeiro: Sextante, 2021.

New Africa/Shutterstock.com/ID/BR

Note que no gráfico de colunas a relação entre o perfil de leitores e de não leitores, em cada ano, é mais fácil de ser percebida, pois comparamos as alturas das colunas. Já o gráfico de linhas permite verificar com mais agilidade o comportamento do percentual do perfil dos leitores e dos não leitores ao longo dos anos em questão. Assim, dependendo da intenção a ser transmitida, a escolha do gráfico é fundamental.

Agora, será que essas informações poderiam ser representadas em um gráfico de setores? De maneira geral, utilizamos os gráficos de setores quando queremos estudar relações parte-todo. Portanto, nesse caso, poderíamos utilizar o gráfico de setores, mas um para cada ano.



Fonte de pesquisa: Zoara Failla (org.). *Retratos da leitura no Brasil 5*. Rio de Janeiro: Sextante, 2021.

Fique atento! Além de levarmos em consideração a intenção que desejamos transmitir, há situações em que utilizar um ou outro gráfico não é adequado.

- Outro aspecto fundamental diz respeito ao uso de gráficos inadequados. Nesse sentido, se considerar oportuno, retome com os estudantes os tipos de variáveis estatísticas. As variáveis podem ser classificadas em dois grupos: qualitativas ou quantitativas.
  - **Variável qualitativa**: expressa uma qualidade ou classificação dos elementos estudados. Se a característica de uma variável qualitativa pode ser ordenada, dizemos que ela é uma variável qualitativa **ordinal**. Caso a característica não possa ser ordenada, dizemos que se trata de uma variável qualitativa **nominal**.
  - **Variável quantitativa**: expressa características descritas por valores numéricos. Quando as características de uma variável quantitativa representam resultados de contagens, dizemos que se trata de variável quantitativa **discreta**. Se a característica pode ser medida em uma escala contínua, dizemos que a variável é quantitativa **contínua**.

Em seguida, incentive os estudantes a perceber que, para representar variáveis qualitativas e variáveis quantitativas discretas, podemos utilizar gráficos de colunas e de setores e que, para representar variáveis quantitativas contínuas, podemos utilizar gráficos de linha e de setores e histogramas. Para facilitar essa compreensão, comente, por exemplo, que não podemos utilizar um gráfico de linhas para representar a quantidade de conduções, por semana, que os estudantes de uma turma de 8º ano utilizam para ir à escola, pois essa variável é quantitativa discreta.

DESCUBRA MAIS

Verifique com antecedência a disponibilidade de computadores com um *software* de planilha eletrônica instalado.

Organize os estudantes em grupos, de acordo com a quantidade de computadores disponíveis, para que realizem a pesquisa proposta nesse boxe.

Se possível, realize antecipadamente a atividade no mesmo *software* que os estudantes vão utilizar, pois de um *software* para outro é possível que haja diferenças.

Verifique se os temas escolhidos informam com precisão o que se pretende pesquisar.

Oriente os estudantes a definir as variáveis da pesquisa e das perguntas que vão compor o questionário.

A escolha da amostra é de extrema importância. Aproveite para verificar se eles compreenderam os diferentes métodos que foram apresentados anteriormente e, se necessário, retome-os.

Explique aos estudantes que há diferentes maneiras de apresentar as perguntas aos entrevistados e que o entrevistador deve ser o mais imparcial possíveis na aplicação dos questionários para evitar uma contaminação dos resultados.

Auxilie os estudantes a tabular os dados e a selecionar o enfoque que darão na construção do gráfico, para que consigam decidir o tipo de gráfico que vão adotar.

Lembre os estudantes de que é necessário apresentar no relatório as possíveis medidas de tendência central e de dispersão que eles obtiveram.

Incentive-os a compartilhar com os demais grupos os motivos que os levaram a fazer cada uma das duas escolhas: tipo de amostra e tipo de gráfico.

DESCUBRA MAIS

Pesquisa estatística amostral

Com a orientação do professor, organizem-se em grupos para realizar uma pesquisa amostral sobre algum tema de relevância social para a comunidade escolar. Depois, vocês vão elaborar um relatório com os resultados obtidos e uma análise deles.

Materiais

- caderno para anotações
- lápis ou caneta
- dispositivo eletrônico com *software* de planilha eletrônica instalado

(Representações sem proporção de tamanho entre si)

Como fazer

1. Cada grupo deve escolher um tema para ser pesquisado. Lembrem-se de que o tema deve informar com precisão o que se pretende pesquisar. Por exemplo: “Quantidade de estudantes/professores/funcionários da escola que separam o lixo orgânico dos materiais recicláveis”.
2. Definam as variáveis da pesquisa e criem um questionário para as entrevistas que serão feitas. Antes de aplicá-lo, certifiquem-se de que ele permite que o problema da pesquisa seja investigado!
3. Conversem e escolham um método para selecionar a amostra da pesquisa. Lembrem-se: é fundamental que essa amostra represente a população estudada. Então, é indicado entrevistar diferentes pessoas da comunidade escolar, como estudantes, professores e funcionários.
4. Ao abordar os entrevistados, sejam atenciosos com eles e expliquem o objetivo da pesquisa. Tenham cautela ao fazer as perguntas, tomando cuidado para não influenciar as respostas ou deixar o entrevistado constrangido de alguma maneira.
5. Elaborem uma tabela e um gráfico para apresentar os resultados da pesquisa. Para isso, vocês podem utilizar uma planilha eletrônica.
6. Usem as tabelas construídas para determinar as possíveis medidas de tendência central e de dispersão que representam o conjunto de dados obtidos.
7. Por fim, escrevam um relatório, explicando desde o objetivo da pesquisa até as conclusões a que vocês chegaram depois de realizá-la.

Para concluir

Responda sempre no caderno.

1. Expliquem os fatores que levaram o grupo a escolher o tipo de amostra para representar a população estudada. **Resposta pessoal.**
2. Expliquem o significado das medidas de tendência central e das medidas de dispersão com base nos valores encontrados por vocês. **Resposta pessoal.**
3. Como vocês escolheram o tipo de gráfico para representar os resultados da pesquisa? **Resposta pessoal.**

DE OLHO NA BASE

Ao planejar e realizar a pesquisa estatística amostral proposta nesse boxe, por meio da seleção de uma técnica de amostragem adequada, da produção de um texto com as conclusões obtidas pela pesquisa, da elaboração de uma tabela e de um gráfico que representem apropriadamente os dados coletados e, ainda, da escolha apropriada de uma medida de tendência central ou de dispersão que represente o conjunto de dados, os estudantes estão desenvolvendo a habilidade **EF08MA27**.

Além disso, eles podem fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos, organizando, representando, comunicando e interpretando as informações obtidas, contribuindo, dessa maneira, para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 4**.

Ao discutir temas sociais nos quais os estudantes precisam interagir com os colegas de maneira cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e no desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo que identifiquem aspectos consensuais, ou não, na discussão de determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles, isso contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 8**.

ATIVIDADES

24. b) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes construam um gráfico de setores.

Responda sempre no caderno.

24. Camila e Júlia fizeram uma pesquisa com alguns estudantes da escola onde estudam para saber qual é a sobremesa preferida deles. Com base nas respostas obtidas, elas construíram uma tabela.

Sobremesa preferida dos estudantes	
Sobremesa	**Quantidade de pessoas**
Gelatina	18
Pudim	15
Frutas	24
Sorvete	32
Torta de morango	11

Dados obtidos por Camila e Júlia.

a) Com base nas informações da tabela, construa em uma planilha eletrônica um gráfico que apresente a porcentagem de estudantes que preferem cada sobremesa. Lembre-se de dar um título ao gráfico e indicar a fonte dos dados. **Resposta pessoal.**

b) Que tipo de gráfico você construiu? Em sua opinião, é mais fácil verificar qual foi a sobremesa mais votada observando a tabela ou o gráfico construído?

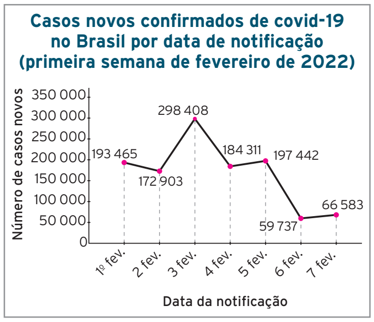
25. Para acompanhar a saúde de seu gato Mimi, Juliana utilizou uma balança para verificar a massa do animal de estimação nos últimos seis meses. Ela registrou os resultados em uma tabela. Veja.

Massa do Mimi nos últimos seis meses	
Mês	**Massa (em kg)**
1	0,5
2	0,8
3	1,2
4	1,8
5	2,2
6	2,5

Dados obtidos por Juliana.

Com base nos dados da tabela, construa um gráfico de linha para representar os dados obtidos por Juliana.
Consulte a resposta neste manual.

26. Observe o gráfico a seguir.

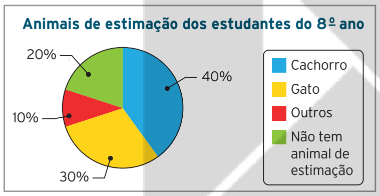


Fonte de pesquisa: Coronavírus Brasil. Painel coronavírus. Disponível em: https://covid.saude.gov.br/. Acesso em: 18 mar. 2022.

a) No período apresentado, em qual dia ocorreu a maior notificação de casos novos de covid-19 no Brasil? **Em 3 de fevereiro.**

b) Qual é a amplitude dos dados nesse gráfico? **238 671**

27. Marcos realizou uma pesquisa com 120 estudantes do 8º ano de sua escola para saber se tinham animal de estimação e, em caso positivo, quais espécies de animais os estudantes entrevistados tinham. Com base nas respostas, Marcos montou o gráfico a seguir.



Dados obtidos por Marcos.

Sabendo que nenhum dos estudantes que responderam à pesquisa tem mais de um animal de estimação, responda:

a) Quantos estudantes têm gato como animal de estimação? **36 estudantes.**

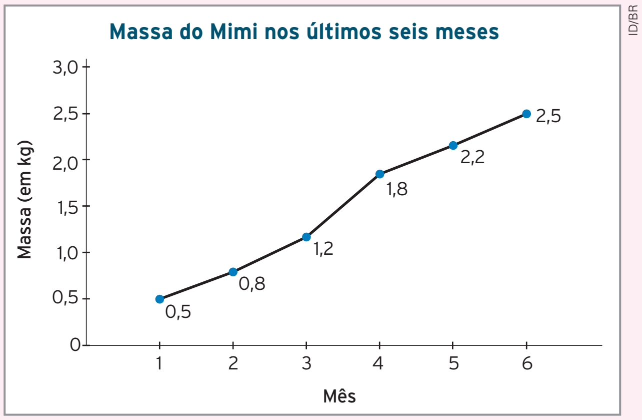
b) Quantos estudantes não têm animais de estimação? **24 estudantes.**

c) Quantos estudantes responderam que têm animais de estimação em casa? **96 estudantes.**

- Reforce para os estudantes a importância de colocar nos gráficos um título que represente adequadamente as informações apresentadas, além de indicar a fonte de pesquisa dos dados.
- Amplie a atividade **26** fazendo outras perguntas acerca do gráfico ou, ainda, pedindo aos estudantes que apresentem outras questões que possam ser respondidas por meio da análise do gráfico.
- Na atividade **27**, o total de estudantes representa 100% dos entrevistados. Se os estudantes não perceberem de imediato, sugira que adicionem as porcentagens que aparecem no gráfico e retome a ideia de que os gráficos de setores representam quantidades em relação ao todo.

RESPOSTA

25.



Dados obtidos por Juliana.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- No item **e** da atividade **1**, os estudantes devem analisar os desvios-padrão do tempo de cada piloto obtidos no item **d**. Quanto menor for o desvio-padrão, mais regular será o piloto em relação aos tempos de cada volta.
- Para o item **a** da atividade **4**, se achar oportuno, sugira aos estudantes que selecionem os estudantes representados pelos números pares.
- Verifique se os estudantes compreenderam que, no gráfico de linhas apresentado na atividade **6**, cada linha representada corresponde a uma raça/cor.

  O item **d** dessa atividade permite relacionar as habilidades de leitura de gráficos de linhas com os conhecimentos da área de Ciências Humanas, principalmente acerca do componente curricular História. Para responder à pergunta, os estudantes devem recordar aspectos da história do Brasil, como a instituição da escravização de pessoas – sistema no qual indígenas e africanos e seus descendentes foram comercializados e oficialmente destituídos de suas identidades. Os mais de trezentos anos de regime escravocrata deixaram marcas históricas que podem ser observadas até hoje em nosso país, como o racismo estrutural. O gráfico apresenta mais uma faceta da institucionalização do racismo: as crianças negras (grupo formado pelas crianças pardas e pretas, de acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE) apresentam os maiores percentuais de não aprendizagem no período abordado pelo gráfico. E essa situação foi agravada pela pandemia de covid-19, que levou ao fechamento das escolas em 2020 e durante boa parte de 2021. O gráfico mostra que as crianças de todas as raças/cores foram afetadas, mas o maior dano ocorreu entre aquelas que já eram as mais vulneráveis. É importante que os estudantes compreendam que o gráfico **não** aborda características relacionadas à capacidade de aprendizagem dos estudantes de diferentes raças/cores, mas evidencia uma problemática social e estrutural, que atingiu crianças brasileiras negras em todas as regiões do país.

  Já o item **e** dessa atividade incentiva os estudantes a compartilhar suas experiências escolares domésticas durante o período da pandemia de covid-19, conectando as informações do gráfico com as vivências deles. Incentive-os a refletir sobre os impactos desse evento sobre a vida deles, nos âmbitos pessoal e escolar. Para isso, faça perguntas, como: Quantos anos vocês tinham durante a pandemia?; Em qual ano escolar vocês estavam?; Assim como aconteceu com as crianças de 6 e 7 anos, vocês acham que o aprendizado de vocês foi prejudicado naquele período?; entre outras.

DIVERSIFICANDO

1. Uma equipe de rali realizou testes para contratar um novo piloto. Durante o teste, cada candidato deveria realizar quatro voltas em uma pista. Três candidatos (A, B e C) participaram do teste e obtiveram os seguintes tempos, em segundo, em cada uma das voltas:

- Candidato A: 110,5; 108,3; 107,1; 108,5
- Candidato B: 112,7; 100,1; 106,4; 118,2
- Candidato C: 110,1; 109,8; 109,9; 110,0

a) Calcule a média dos tempos de cada um dos candidatos.

b) Qual dos candidato teve o tempo médio mais baixo? **O candidato A.**

c) Qual candidato fez a volta mais rápida? **O candidato B.**

d) Determine o desvio-padrão dos tempos dos candidatos.

e) Qual dos candidatos foi o mais regular em relação aos tempos de cada volta? **O candidato C.**

1. a) Candidato A: 108,6 segundos; candidato B: 109,35 segundos; candidato C: 109,95 segundos.
d) Candidato A: aproximadamente 1,22 segundo; candidato B: aproximadamente 6,78 segundos; candidato C: aproximadamente 0,11 segundo.

2. O setor administrativo de certa empresa construiu um quadro com os salários, em real, de seus 40 funcionários. Veja.

2 500	1 800	2 200	1 700
1 600	1 750	1 800	1 520
3 000	2 800	2 100	1 880
3 500	1 900	1 980	2 650
3 800	3 900	3 100	1 550
1 950	1 250	1 980	2 100
2 450	1 490	1 600	2 000
2 300	2 750	3 200	3 700
2 700	2 900	2 600	2 800
1 800	2 100	3 700	3 100

Consulte as respostas neste manual.

Com base nesse quadro, faça o que se pede.

a) Organize esses dados em uma tabela, agrupando-os em intervalos de classe. Por exemplo, de 1000 a 1600.

b) Acrescente mais uma coluna na tabela que você construiu para a frequência relativa. Em seguida, complete-a.

c) Construa um histograma para representar essa situação.

3. Reúna-se com um colega para elaborar um problema que envolva porcentagem, usando os dados da tabela a seguir. Em seguida, troquem o problema criado por vocês com outra dupla. Vocês resolvem o problema criado por eles, e eles resolvem o problema criado por vocês. **Resposta pessoal.**

Área dos terrenos dos condomínios

Área (em m²)	Frequência absoluta
150 ⊢ 200	17
200 ⊢ 250	23
250 ⊢ 300	29
300 ⊢ 350	38
350 ⊢ 400	34
400 ⊢ 450	31
450 ⊢ 500	28

Dados fornecidos pela administração do condomínio.

4. O quadro a seguir apresenta o gênero de filme preferido dos estudantes do 8º ano.

Estudantes	Gênero de filme preferido
1	Comédia
2	Comédia
3	Terror
4	Animação
5	Drama
6	Drama
7	Terror
8	Animação
9	Comédia
10	Comédia
11	Drama
12	Comédia
13	Comédia
14	Animação
15	Comédia
16	Animação
17	Terror
18	Comédia
19	Drama
20	Terror
21	Animação

Respostas pessoais.

a) Selecione uma amostra casual simples de 10 estudantes. Quais estudantes você selecionou?

b) Com base em que critérios você escolheu a amostra?

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Se os estudantes tiverem dificuldade em organizar a tabela da atividade **2**, sugira a eles que escrevam os valores em ordem crescente para facilitar a contagem de valores de cada intervalo. Outra maneira é solicitar que copiem os valores em uma planilha eletrônica e utilizem a ferramenta classificar para organizar os valores do menor para o maior. Nesse caso, é importante que eles coloquem os valores um em cada célula, um abaixo do outro ou um ao lado do outro.

Agora, se eles apresentarem dificuldades na atividade **6**, retome a construção e a interpretação de um gráfico de linhas, pedindo-lhes que observem as escalas e fiquem atentos à legenda. E, se necessário, que transportem os dados do gráfico para uma tabela.

Responda sempre no caderno.

5. Resolva a atividade a seguir e indique a alternativa correta no caderno.

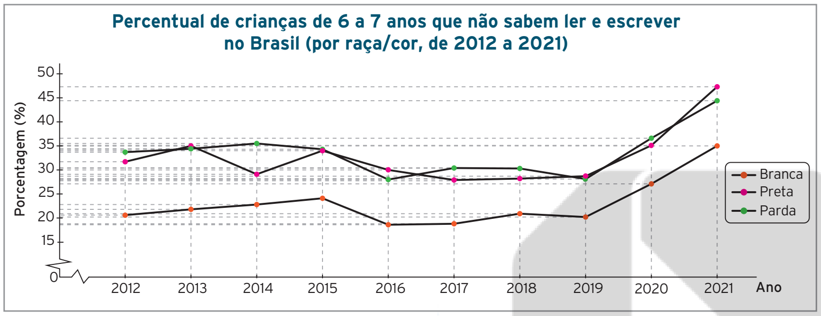
O quadro a seguir apresenta as notas obtidas por um estudante no 1º ano do Ensino Médio nas quatro áreas de conhecimento e em redação.

Área de conhecimento / Bimestre	Matemática e suas Tecnologias	Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Ciências Humanas e suas Tecnologias	Linguagens e suas Tecnologias	Redação
1º bimestre	9,0	8,5	7,0	8,0	7,5
2º bimestre	8,0	6,0	7,0	6,5	8,0
3º bimestre	10,0	6,0	9,5	6,5	8,0
4º bimestre	8,0	8,5	8,0	7,5	8,0

Considerando os dados apresentados, podemos afirmar que a maior média anual corresponde a: **Alternativa a.**

a) Matemática e suas Tecnologias.
b) Ciências da Natureza e suas Tecnologias.
c) Ciências Humanas e suas Tecnologias.
d) Linguagens e suas Tecnologias.
e) Redação.

6. O gráfico a seguir apresenta informações sobre a desigualdade racial em relação à educação de crianças de 6 a 7 anos no Brasil.



Fonte de pesquisa: Todos pela Educação. *Impactos da pandemia na alfabetização de crianças*. Fev. 2021. Disponível em: https://todospelaeducacao.org.br/wordpress/wp-content/uploads/2022/02/digital-nota-tecnica-alfabetizacao-1.pdf. Acesso em: 4 abr. 2022.

Considerando o período de 2012 a 2021, responda:

a) Em que ano houve um percentual maior de crianças pretas de 6 e 7 anos que não sabiam ler e escrever? **Em 2021.**

b) Qual é o percentual aproximado que representa as crianças pardas de 6 e 7 anos que não sabiam ler e escrever em 2018? **30%**

c) No período de 2012 a 2021, qual é a cor do grupo de crianças que sempre teve o menor percentual entre as que não sabiam ler e escrever? **Branca.**

d) Com base em seus conhecimentos sobre as desigualdades raciais no Brasil, debata com os colegas: Por que os grupos de crianças pretas e pardas apresentam os maiores percentuais em diferentes anos? Como isso pode ser relacionado ao preconceito racial? **Respostas pessoais.**

e) No ano de 2020, o Brasil e outros países do mundo enfrentaram a pandemia de covid-19. Para evitar novos contágios e conter o avanço da doença, as aulas presenciais foram suspensas e muitas crianças tiveram que estudar em casa. Como foi esse período para você? Comente suas experiências com a turma. **Resposta pessoal.**

Aproveite as informações do gráfico e amplie essa atividade solicitando outras perguntas, que podem ser elaboradas pelos estudantes organizados em duplas.

DE OLHO NA BASE

Por meio da elaboração e da resolução de um problema envolvendo o cálculo de porcentagens, a atividade **3** permite o desenvolvimento da habilidade **EF08MA04**.

RESPOSTAS

2. a)

Intervalos de classe de salários dos funcionários de uma empresa

Salário (em real)	Frequência absoluta
1 000 ⊢ 1 600	4
1 600 ⊢ 2 200	16
2 200 ⊢ 2 800	8
2 800 ⊢ 3 400	7
3 400 ⊢ 4 000	5

Dados obtidos pelo setor administrativo.

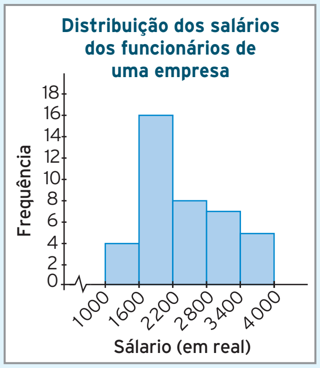
b)

Intervalos de classe de salários dos funcionários de uma empresa

Salário (em real)	Frequência absoluta	Frequência relativa
1 000 ⊢ 1 600	4	$\frac{4}{40} = 10\%$
1 600 ⊢ 2 200	16	$\frac{16}{40} = 40\%$
2 200 ⊢ 2 800	8	$\frac{8}{40} = 20\%$
2 800 ⊢ 3 400	7	$\frac{7}{40} = 17{,}5\%$
3 400 ⊢ 4 000	5	$\frac{5}{40} = 12{,}5\%$

Dados obtidos pelo setor administrativo.

c)



Dados obtidos pelo setor administrativo.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, o tema abordado é o efeito dos custos perdidos. Convide os estudantes a refletir, com base no texto e nas perguntas, sobre as questões comportamentais aplicadas a situações econômicas e financeiras.
- A situação abordada no texto é um dos resultados do efeito dos custos perdidos, chamados também de custos incorridos ou de custos irrecuperáveis. Muitas pessoas tomam decisões com base em custos que já aconteceram e que não deveriam ser levados em consideração na tomada de decisão, uma vez que estão perdidos e, portanto, não têm o poder de influenciar o futuro.

  Mas, apesar de não terem esse poder, o cérebro cria uma ilusão e as pessoas acabam achando que têm e, com isso, usam-no para tomar decisões. É importante que fique claro aos estudantes que esse tipo de comportamento pode ter consequências desagradáveis, como gerar uma perda muito maior e prejuzos que poderiam ser evitados com uma ação que não olhasse para os custos que ficaram para trás, mas, sim, para os que virão pela frente.

DE OLHO NA BASE

Refletir sobre esse tema auxilia os estudantes a valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e a apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhes possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade, desenvolvendo a **competência geral 6**.

Respeito

O assunto tratado nessa seção possibilita promover a reflexão sobre o efeito dos custos perdidos, auxiliando os estudantes a desenvolver o valor respeito, principalmente voltado para eles mesmos, na direção da autopreservação. Saber a hora certa de desistir de algo, independentemente do que foi previamente investido, pode evitar problemas futuros ainda maiores.

AMPLIANDO HORIZONTES

Agora já era!

Nesta seção, vamos falar de um comportamento chamado "efeito dos custos perdidos". O que é esse efeito e o que ele tem a ver com a nossa vida? Um dos pesquisadores mais importantes desse comportamento humano é o economista Richard Thaler. Em suas pesquisas sobre economia comportamental, Thaler mostrou a tendência que algumas pessoas têm de seguir adiante em um projeto ou um empreendimento uma vez que algum investimento – dinheiro, tempo, material, etc. – tenha sido efetuado. Ou seja, apesar da possibilidade de perder muito mais ou até de perder tudo, muitas pessoas insistem em não abandonar um projeto que tem grande chance de dar errado somente porque já gastaram muito com ele até ali.

Suponha que duas famílias, A e B, tenham ingressos para a final de um campeonato. A família A comprou os ingressos antecipadamente, pagando R$ 50,00 por ingresso, enquanto a família B deixou para comprar os ingressos um dia antes do jogo, pagando muito mais por eles – R$ 250,00 por ingresso! No dia do jogo, caiu uma forte tempestade e, com isso, todas as ruas na região do estádio ficaram alagadas e o acesso foi prejudicado. Ambas as famílias precisam decidir se vale ou não a pena ir ao jogo. O que você faria se estivesse no lugar delas?

Pesquisas experimentais que envolvem situações como essa revelaram que é mais provável que as pessoas que já tenham comprado os ingressos tentem ir ao jogo, seja qual for o valor pago ou quais circunstâncias tenham de enfrentar; o que importa é o valor gasto.

222

OUTRAS FONTES

Ferreira, V. R. de M. *Decisões econômicas*: você já parou para pensar? São Paulo: Évora, 2011.

Esse livro trata de decisões econômicas do ponto de vista da psicologia econômica, escrito por Vera Rita de Mello Ferreira, uma das maiores especialistas no assunto no Brasil.

Ferreira, V. R. de M. *Psicologia econômica*: estudo do comportamento econômico e da tomada de decisão. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

Essa tese de doutorado em Psicologia Social tem o objetivo de fornecer subsídios para a construção e instalação da Psicologia Econômica no Brasil para fomentar pesquisadores de diferentes áreas a construir uma rede de colaboração interdisciplinar.

Na situação apresentada, a chance de a família que pagou mais caro pelos ingressos ir ao jogo é maior ainda. Ou seja, o que já foi gasto influencia a decisão. Mas, se analisarmos racionalmente a situação, veremos que o custo não influencia os transtornos causados pela enchente nem o prazer que o jogo proporciona.

Esse exemplo ilustra que o tamanho do custo perdido é um fator importante para as pessoas nas tomadas de decisão. No caso das famílias do exemplo, ambas tinham os ingressos, mas era o custo que importava, independentemente de ser alto ou baixo.

E o que aprendemos com isso? É preciso avaliar se tomamos as decisões com base naquilo que as nossas escolhas podem nos proporcionar (do ponto de vista financeiro, social, ambiental e da saúde física e emocional), entendendo que os investimentos perdidos não modificam o futuro porque já aconteceram. As decisões que realmente modificam nosso presente e futuro são as tomadas daqui para a frente e, portanto, as que realmente importam.

Para refletir

Responda sempre no caderno.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir. **Consulte as respostas neste manual.**

1. O que são custos perdidos? Expliquem o que é o efeito dos custos perdidos.
2. Vocês já viveram alguma situação financeira em que tomaram uma decisão com base no efeito dos custos perdidos? Se fosse hoje, vocês tomariam uma decisão diferente?
3. Descrevam as situações ilustradas nestas páginas. O que vocês fariam se estivessem nessas situações?
4. De acordo com a situação abordada no texto, sobre os ingressos do campeonato, responda o que vocês teriam feito em cada uma das circunstâncias a seguir.
   a) Todos os ingressos custaram R$ 600,00.
   b) Os ingressos foram ganhos como cortesia.
   c) Cada ingresso custou R$ 100,00, e a família de vocês os comprou há 6 meses.
   d) Cada ingresso custou R$ 100,00, e a família de vocês os comprou ontem.

Raphael Mortari/ID/BR

PARA REFLETIR

- Na questão **2**, incentive os estudantes a compartilhar suas experiências e aproveite para salientar que as consequências de tomar uma decisão com base no efeito dos custos perdidos podem não ser muito positivas.
- Na questão **3**, a resposta sobre o que os estudantes fariam nessas situações é pessoal, mas você deve instigá-los a pensar se o valor investido compensa a dor (na primeira situação) e o tempo de lazer em família perdido (na segunda situação).
- Na questão **4**, solicite aos estudantes que respondam oralmente às questões. Enfatize que as decisões são pessoais e que, nem sempre, a opinião de uma pessoa vai ao encontro da opinião de outra. Incentive-os a levantar hipóteses sobre os motivos que levam as pessoas, diante do mesmo fato, a apresentar reações e a tomar decisões diferentes umas das outras.

RESPOSTAS

1. Custos perdidos são os custos que já foram incorridos, aquilo que já foi ou, em linguagem coloquial, "aquilo que já era". O efeito desse tipo de custo na decisão das pessoas é uma ilusão econômica produzida por nossa mente, pois, uma vez que o custo é perdido, ele não tem efeito nas decisões futuras e não deve (pelo menos não deveria) ter um papel em escolhas racionais.
2. Respostas pessoais.
3. Resposta possível: Na primeira situação, o rapaz comprou um tênis caro e desconfortável. Ele continua usando o tênis porque fica pensando no dinheiro que gastou, que era suficiente para comprar uma bicicleta. Na segunda situação, a família comprou ingressos para um filme do qual não está gostando e do qual pode ir embora a qualquer momento, mas não faz isso. Resposta pessoal.
4. Respostas pessoais.

DE OLHO NA BASE

Ao se reunir em duplas e discutir as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, desenvolvendo, assim, a **competência geral 9**.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Aproveite a atividade **1** para retomar as definições estudadas e os passos para calcular a média aritmética, a variância e o desvio-padrão.
- Na atividade **7**, os estudantes devem calcular a média, a mediana e a moda da distribuição e, depois, comparar os valores obtidos. No cálculo da mediana, eles devem compreender que o conjunto de dados é: 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5 e 7. Ou seja, é formado por 20 elementos. Já para obter a moda, os estudantes devem analisar o quadro dado no enunciado e verificar que o resultado mais obtido foi 0.
- Observe como os estudantes resolvem a atividade **8**. Espera-se que eles calculem a média de cada uma das microempresas e, depois, indiquem a alternativa que apresenta as duas com maiores médias.

DE OLHO NA BASE

A atividade **9** contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**, para que os estudantes exercitem a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitem e promovam o respeito ao outro e aos direitos humanos, acolham e valorizem a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

- Promova, de maneira recorrente, rodas de conversa que possibilitem aos estudantes sentir que o ambiente escolar é um espaço livre de quaisquer atos violentos (verbais ou não verbais), em que o respeito a diferentes opiniões e posicionamentos sejam constantemente desenvolvidos. Aproveite esses momentos para buscar soluções coletivas e democráticas de maneira que seja possível identificar, prevenir e reverter situações de conflito no ambiente escolar. Desse modo, os estudantes podem ter sentimentos de pertencimento à escola e reconhecê-la como um espaço saudável de convivência.

Nesse sentido, esteja atento a possíveis práticas de *bullying* para intervir e mediar qualquer manifestação de possível violência física ou psicológica, intencional e repetitiva praticada por algum estudante ou grupo, promovendo reflexões e acompanhando os envolvidos num processo de mediação e de reflexão de maneira que contribua para o processo de aprendizagem e o gerenciamento das emoções deles.

"É importante destacar que *bullying* é um fenômeno de violência bem específico que se caracteriza pela intimidação e humilhação sistemática e contínua entre pares, assim, quando um caso é identificado, é necessário atenção às pessoas envolvidas: à vítima que passou por um período de violência e sofrimento, ao/à agressor/a que, de alguma forma, vê a violência como um recurso e às pessoas que acompanharam como espectadoras as situações de *bullying* sem fazer interferências."

Fonte: *Convivência escolar e cultura de paz*. Brasília: SEEDF/Subeb, 2020. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.

Para obter mais informações sobre como prevenir e mediar o *bullying* na escola e evitar ações de violência autoprovocada, os educadores e gestores educacionais podem ter acesso a cartilhas elaboradas pela Organização Mundial de Saúde (OMS), pelo Ministério da Saúde e pelo Ministério Público do Estado de São Paulo, pela ordem dos Advogados do Brasil (OAB) e pelo Centro de Valorização da Vida (CVV).

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. c) $D(70) = 3{,}2$; $D(66) = -0{,}8$; $D(72) = 5{,}2$; $D(55) = -11{,}8$; $D(69) = 2{,}2$; $D(61) = -5{,}8$; $D(60) = -6{,}8$; $D(70) = 3{,}2$; $D(80) = 13{,}2$; $D(65) = -1{,}8$

1. Os atletas de um grupo têm estas massas:

70 kg	66 kg	72 kg	55 kg	69 kg
61 kg	60 kg	70 kg	80 kg	65 kg

a) Qual é a massa média desse grupo de atletas? **66,8 kg**

b) Determine a amplitude desses dados. **25 kg**

c) Quais são os desvios dessas massas em relação à massa média?

d) Qual é a variância do grupo? **44,96**

e) Calcule o desvio-padrão dessas massas. **Aproximadamente 6,71 kg.**

2. O *site* de uma fábrica de produtos esportivos permite que os clientes escolham as cores de seus próprios tênis, que são produzidos sob encomenda, conforme o quadro a seguir.

Cor de fundo	branca, cinza, preta ou bege
Cor secundária	branca, cinza, preta, vermelha, azul ou verde
Cor dos detalhes	branca, cinza, preta, amarela ou laranja

Quantos modelos diferentes de tênis podem ser produzidos com as opções do quadro? **120 modelos.**

3. Escreva no caderno a alternativa correta.

(Saresp) No final de um programa de televisão ficaram 5 candidatos. Um será escolhido campeão e outro será vice-campeão. O número de resultados possíveis para os dois premiados é:

a) 9. b) 10. c) 20. d) 25.

Alternativa c.

4. Indique no caderno a alternativa correta.

(Obmep) Luciano queria calcular a média aritmética dos números naturais de 1 a 15. Ao calcular a soma desses números, ele esqueceu de somar dois números consecutivos. Após dividir a soma dos treze números por 15, obteve 7 como resultado. Qual é o produto dos números que Luciano esqueceu de somar?

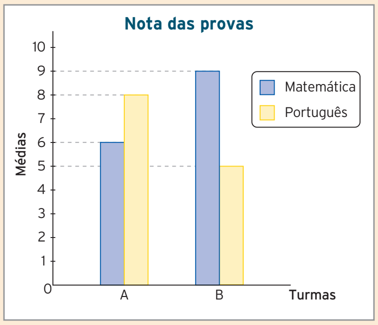
a) 30 c) 110 e) 210

b) 56 d) 182

Alternativa b.

5. Registre no caderno a alternativa correta.

(OBM) Numa escola, 20 alunos da sala A e 30 alunos da sala B fizeram a mesma prova de Matemática e a mesma de Português. As médias das notas obtidas nessas provas encontram-se no gráfico abaixo.



Dados fictícios.

5. Alternativa e.

Qual das afirmações a seguir é verdadeira?

a) A média de Português dos alunos da sala A é maior do que a média de Matemática dos alunos da sala B.

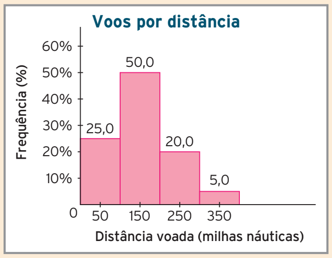
b) A média de Português é maior do que a média de Matemática em ambas as salas.

c) A média de Matemática dos alunos das duas salas juntas é menor do que 7,5.

d) A média das notas das duas provas na sala A é menor do que a da sala B.

e) A média geral das notas de todos os alunos nas duas matérias é 7.

6. (Anac – Adaptado) Com base no histograma abaixo, julgue a afirmação a seguir.



Dados fictícios.

Considerando que o histograma mostra a distribuição dos voos de certo aeroporto por distância voada, é correto afirmar que a distância média dos voos desse aeroporto é superior a 150 milhas? **Afirmação correta.**

7. Registre no caderno a alternativa que responde corretamente à atividade a seguir.
(Enem) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então:

a) $X = Y < Z$
b) $Z < X = Y$
c) $Y < Z < X$
d) $Z < X < Y$
e) $Z < Y < X$

Alternativa e.

8. Escreva no caderno a alternativa correta.
(Enem) A tabela a seguir mostra a evolução da receita bruta anual nos três últimos anos de cinco microempresas (ME) que se encontram à venda.

ME	2009 (em milhares de reais)	2010 (em milhares de reais)	2011 (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Um investidor deseja comprar duas das empresas listadas na tabela. Para tal, ele calcula a média da receita bruta anual dos últimos três anos (de 2009 até 2011) e escolhe as duas empresas de maior média anual.

As empresas que este investidor escolhe comprar são: **Alternativa d.**

a) Balas W e Pizzaria Y.
b) Chocolates X e Tecelagem Z.
c) Pizzaria Y e Alfinetes V.
d) Pizzaria Y e Chocolates X.
e) Tecelagem Z e Alfinetes V.

9. Leia o texto e, depois, responda às questões.

IBGE: um em cada dez estudantes já foi ofendido nas redes sociais

Aproximadamente um em cada dez adolescentes (13,2%) já se sentiu ameaçado, ofendido e humilhado em redes sociais ou aplicativos. Consideradas apenas as meninas, esse percentual é ainda maior, 16,2%. Entre os meninos é 10,2%. [...]

Ao todo, foram entrevistados quase 188 mil estudantes, com idade entre 13 e 17 anos, em 4 361 escolas de 1 288 municípios de todo o país. O grupo representa 11,8 milhões de estudantes brasileiros. A coleta dos dados foi feita antes da pandemia, entre abril e setembro de 2019. [...]

Mariana Tokarnia. IBGE: um em cada dez estudantes já foi ofendido nas redes sociais. *Agência Brasil*, 10 set. 2021. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2021-09/ibge-um-em-cada-dez-estudantes-ja-foi-ofendido-nas-redes-sociais#. Acesso em: 18 mar. 2022.

a) Qual é o tema da pesquisa?
9. a) Estudantes que já foram ofendidos nas redes sociais.

b) Essa pesquisa foi amostral? Se sim, qual foi a amostra? **Sim; Quase 188 mil estudantes do Brasil.**

10. Gílson é um pequeno agricultor de hortaliças orgânicas. Em um de seus canteiros, há 150 pés de alface. Para avaliar a qualidade do produto, ele fez uma pesquisa amostral: selecionou o primeiro pé de alface e depois um pé a cada 15, percorrendo toda a plantação.

a) Que método Gílson utilizou para selecionar a amostra? **Amostra sistemática.**

b) Qual é o tamanho da amostra selecionada por Gílson? **10 pés de alface.**

c) Em sua opinião, faria sentido Gílson utilizar uma amostragem estratificada? Explique.
Espera-se que os estudantes percebam que não faria sentido, pois a pesquisa não envolve categorias.

225

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Aprendi a resolver problemas de contagem?
- Sei aplicar o princípio multiplicativo?
- Consegui construir a árvore de possibilidades para resolver problemas de contagem?
- Ampliei meu raciocínio combinatório?
- Entendi e consegui aplicar os conceitos de espaço amostral e evento?
- Sei identificar experimentos aleatórios?
- Aprendi a determinar o número de elementos de um espaço amostral e de um evento?
- Consegui calcular a probabilidade de um evento?
- Compreendi o significado de média aritmética, média aritmética ponderada, mediana e moda?
- Aprendi a construir tabelas de frequência e histogramas?
- Aprendi o conceito de população, variável e os diferentes tipos de amostra em uma pesquisa estatística?
- Sei organizar, interpretar e analisar dados representados em gráficos e tabelas?
- Aprendi a escolher o tipo de gráfico para representar um conjunto de dados de uma pesquisa?
- Consegui planejar e realizar uma pesquisa amostral e elaborar o relatório, analisando os resultados obtidos?
- Ampliei meus conhecimentos em Matemática?

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Proponha aos estudantes que confeccionem individualmente mapas conceituais, relacionando os conceitos trabalhados nesta unidade.

Depois, organize-os em grupos. Os grupos podem ser definidos de acordo com os tópicos estudados na unidade, por exemplo:

- Probabilidade
- Medidas de tendência central
- Medidas de dispersão
- Gráficos
- Pesquisa estatística

Se possível, forme os grupos com estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, favorecendo a troca e a ampliação dos conhecimentos.

Solicite aos estudantes que compartilhem os mapas individuais que eles elaboraram com os demais colegas do grupo. Em seguida, oriente-os a, com base nos mapas individuais, construir um grande mapa conceitual em uma parede ou local disponível em sala de aula.

Durante a execução da tarefa, caminhe pela sala de aula e observe como os estudantes estabelecem as relações entre os conteúdos estudados e, se for o caso, faça intervenções.

Quando todos os grupos já tiverem terminado a atividade, incentive-os a observar o trabalho dos colegas. Espera-se que eles percebam que os conteúdos podem se relacionar de diversas maneiras.

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
5, 7, 8 e 9.

Competência específica de Matemática
7

Temas Contemporâneos Transversais
Meio Ambiente, Economia, Saúde e Ciência e Tecnologia.

Habilidades

(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.

(EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.

UNIDADE 8

GRANDEZAS E MEDIDAS

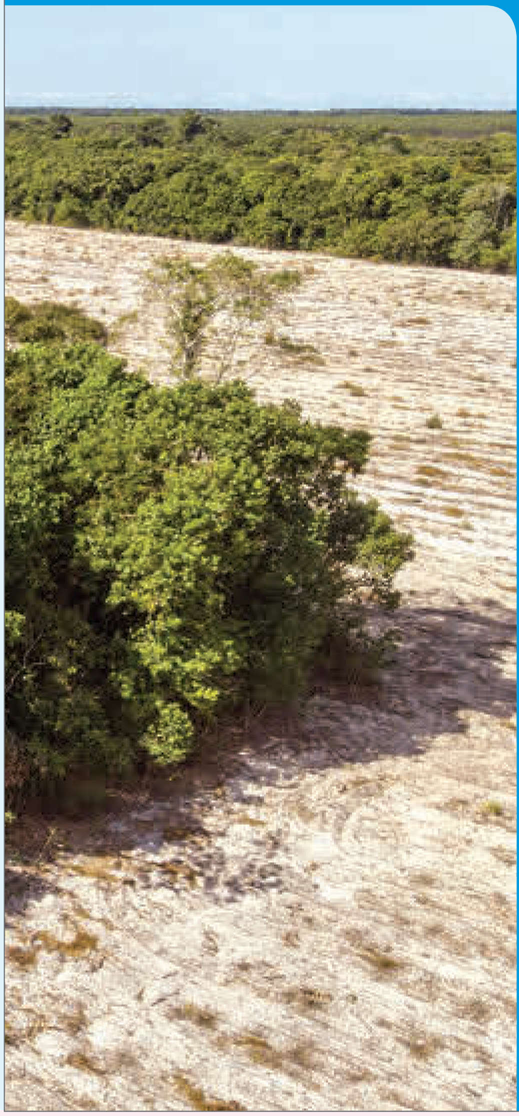
SOBRE A UNIDADE

Nesta unidade, os estudantes ampliarão seus conhecimentos a respeito de área de triângulos, quadriláteros e círculos, por meio da aplicação de expressões de cálculo. Além disso, eles compreenderão a relação entre volume e capacidade e ampliarão os conhecimentos sobre cálculo do volume do bloco retangular e do cilindro e resolverão situações-problema que envolvem esse conteúdo.

Os conteúdos referentes a grandezas e medidas contribuem para a formação dos estudantes, pois estão relacionados a diversas áreas da atividade humana e se aplicam em várias situações do cotidiano.

CAPÍTULO 1
Áreas

CAPÍTULO 2
Volumes e capacidades



Maurício Simonetti/Pulsar Imagens

PRIMEIRAS IDEIAS

Entre 2019 e 2020, o desmatamento da Mata Atlântica se intensificou em 10 dos 17 estados que compreendem o bioma, atingindo uma área equivalente a 13 mil campos de futebol.

No total, foram desmatados 13 053 hectares (130 quilômetros quadrados) entre 2019 e 2020 – dado que, apesar de 9% menor que o levantado entre 2018 e 2019 (14 375 hectares), representa um crescimento de 14% em relação a 2017 e a 2018 (11 399 hectares), quando se atingiu o menor valor da série histórica.

Fonte de pesquisa: Desmatamento: Mata Atlântica perde "13 mil campos de futebol" entre 2019 e 2020. *Um Só Planeta*, 26 maio 2021. Disponível em: https://umsoplaneta.globo.com/clima/noticia/2021/05/26/desmatamento-mata-atlantica-perde-13-mil-campos-de-futebol-entre-2019-e-2020.ghtml. Acesso em: 28 abr. 2022.

1. No texto, aparecem três unidades de medida de área. Duas delas são padronizadas e a outra, não. Quais são essas unidades?
2. Como você faria para calcular a medida da área de um campo de futebol conhecendo as medidas dos seus lados?

← Área de Mata Atlântica desmatada em Aracruz (ES). Foto de 2021.

227

PRIMEIRAS IDEIAS

- Peça aos estudantes que observem atentamente a imagem de abertura desta unidade, incentivando-os a descrever o tipo da vegetação e a parte da área desmatada, e pergunte se eles reconhecem o bioma representado. Informe a eles que se trata da Mata Atlântica, um dos biomas mais devastados do país, que atualmente está fragmentada ao longo da costa brasileira, no interior das regiões Sul e Sudeste, trechos nos estados de Goiás e do Mato Grosso do Sul e no interior de estados do Nordeste. Converse com a turma sobre o desmatamento e ressalte que sem as árvores se observa um desequilíbrio no planeta, o ar fica mais poluído, o ciclo das chuvas é alterado e ocorre a extinção de algumas espécies da flora e da fauna. Instigue-os a refletir também sobre o uso de tecnologias para inibir a interferência humana no meio ambiente com base no texto disponível em: https://oeco.org.br/noticias/mata-atlantica-passa-a-ser-monitorada-com-sistema-de-alertas-de-desmatamento/ (acesso em: 2 ago. 2022). Esse trabalho desenvolve os **Temas Contemporâneos Transversais** Educação Ambiental e Ciência e Tecnologia, que pertencem, respectivamente, às macroáreas **Meio Ambiente** e **Ciência e Tecnologia**.

DE OLHO NA BASE

Discutir assuntos que abordem sobretudo questões de urgência social, como o desmatamento, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, auxilia no desenvolvimento da **competência específica de Matemática 7**.

RESPOSTAS

1. Unidades de medida de área padronizadas: quilômetro quadrado e hectare. Unidade de medida não padronizada: campo de futebol.
2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes se lembrem de como calcular a área de uma região retangular, que corresponde ao produto das medidas de comprimento e de largura dessa região.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Área de um retângulo.
- Área de um quadrado.
- Área de um paralelogramo.
- Área de um triângulo.
- Área de um trapézio.
- Área de um losango.
- Área de um círculo.

Objetivos

- Compreender e aplicar o conceito de área de figuras planas.
- Entender e aplicar fórmulas para o cálculo da medida de área de superfícies planas.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de aprofundar o estudo a respeito das medidas de área de figuras geométricas planas, compreendendo o significado das fórmulas utilizadas por meio de decomposição e composição de figuras. Com esse aprofundamento no estudo de medidas, atrelado ao campo da Geometria, espera-se que eles aperfeiçoem o pensamento geométrico para resolver problemas do cotidiano, utilizando, de maneira autônoma, conhecimentos que adquiriram na escola.

RETOMANDO A IDEIA DE ÁREA

- Comente com os estudantes que o sistema padronizado de medidas surgiu da necessidade de se comunicar matematicamente de forma compreensível com todos. O metro quadrado é a unidade-padrão de medida de área no SI, mas também se utilizam com frequência seus múltiplos e submúltiplos.

Capítulo 1

ÁREAS

Para o desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes tenham consolidado as ideias apresentadas em anos anteriores relacionadas a esses assuntos. Além disso, eles precisam saber operar com números racionais e reconhecer características de figuras geométricas, como o quadrado e o triângulo.

Retomando a ideia de área

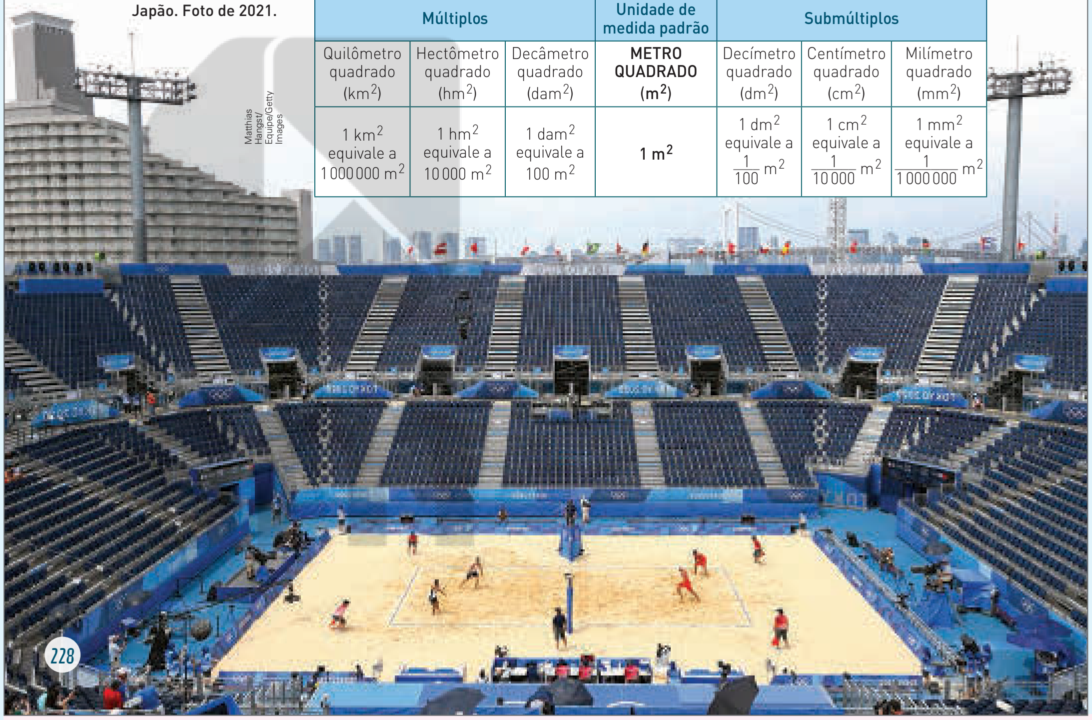
O vôlei de praia, apesar de muito popular no Brasil, foi praticado inicialmente nas areias da Califórnia, nos Estados Unidos, nos anos 1920. No Brasil, começou a ser jogado por amadores na década de 1930, nas praias de Copacabana e de Ipanema, no Rio de Janeiro (RJ).

Uma quadra oficial de vôlei de praia ocupa uma área que mede 128 m^2, enquanto as quadras de concreto, usadas no vôlei de quadra, ocupam uma área um pouco maior, de 162 m^2.

> **Área** é uma grandeza, e para expressar sua medida utilizamos uma unidade de medida.

O metro quadrado é a unidade-padrão de área no Sistema Internacional de Unidades (SI). Em nosso dia a dia, também utilizamos com frequência os múltiplos e os submúltiplos do metro quadrado. Observe.

Múltiplos			Unidade de medida padrão	Submúltiplos		
Quilômetro quadrado (km^2)	Hectômetro quadrado (hm^2)	Decâmetro quadrado (dam^2)	**METRO QUADRADO (m^2)**	Decímetro quadrado (dm^2)	Centímetro quadrado (cm^2)	Milímetro quadrado (mm^2)
1 km^2 equivale a 1 000 000 m^2	1 hm^2 equivale a 10 000 m^2	1 dam^2 equivale a 100 m^2	**1 m^2**	1 dm^2 equivale a $\frac{1}{100}$ m^2	1 cm^2 equivale a $\frac{1}{10\,000}$ m^2	1 mm^2 equivale a $\frac{1}{1\,000\,000}$ m^2



Partida de vôlei de praia masculino entre a equipe do México e a equipe ROC, no terceiro dia dos Jogos Olímpicos de Tóquio 2020, no Japão. Foto de 2021.

Matthias Hangst/Equipe/Getty Images

228

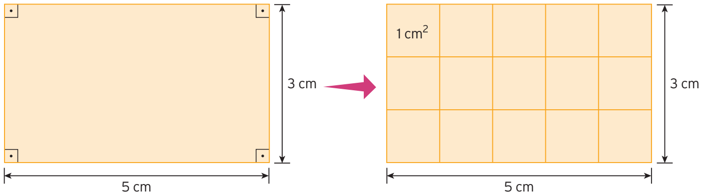
OUTRAS FONTES

Software educativo – Construtor de área. Disponível em: https://phet.colorado.edu/sims/html/area-builder/latest/area-builder_pt_BR.html. Acesso em: 2 ago. 2022.

Esse simulador permite retomar os conceitos de área e de perímetro por meio de desafios e construções interativas.

Área de um retângulo

Observe as figuras a seguir.



O retângulo foi dividido em quadradinhos de 1 cm^2. Observe que cabem exatamente 15 quadradinhos no retângulo. Ou seja, a área do retângulo mede 15 cm^2.

A medida A da área desse retângulo também poderia ser calculada da seguinte maneira:

$$A_{retângulo} = 5 \cdot 3 = 15$$

Como as unidades de medida estão em centímetro, dizemos que a área do retângulo mede 15 centímetros quadrados.

A medida A da área de um retângulo cuja base mede b e cuja altura relativa a essa base mede h é dada por:

$$A_{retângulo} = b \cdot h$$

Área de um quadrado

O quadrado é um caso particular de retângulo que apresenta a medida da base igual à medida da altura.

A medida A da área de um quadrado cujo lado mede ℓ é dada por:

$$A_{quadrado} = \ell^2$$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Calcule a medida da área dos retângulos cujas medidas dos lados estão indicadas em cada item.

a) 5 mm e 9 mm
b) 7 cm e 14 cm
c) 23 hm e 5 hm
d) 8,6 m e 7,5 m
e) 2,1 m e 4,3 m
f) 6 mm e 3,5 cm

1. a) 45 mm^2 b) 98 cm^2 c) 115 hm^2 d) 64,5 m^2 e) 9,03 m^2 f) 210 mm^2

2. Determine a medida da área de um quadrado cujo lado mede o valor indicado.

a) 9 km **81 km^2**
b) 6 dm **36 dm^2**
c) 7 cm **49 cm^2**
d) 2,5 m **6,25 m^2**
e) 4,6 mm **21,16 mm^2**
f) 3,1 hm **9,61 hm^2**

3. Um terreno retangular tem 69 750 m^2 de medida de área. Se o comprimento desse terreno mede 310 m, quanto mede sua largura? **225 m**

4. Determine a medida da área de uma sala quadrada, sabendo que a medida de seu lado é 4,90 m. **24,01 m^2**

5. Ana é engenheira e vai construir uma praça em uma região quadrada de 144 m^2. Quantos metros de fita Ana deverá usar para cercar e isolar essa região durante a obra? **48 m**

6. Sabendo que o perímetro de um quadrado mede 100 cm, qual é a medida da área delimitada por ele? **625 cm^2**

ÁREA DE UM RETÂNGULO

- A decomposição e a composição de figuras são um tipo de procedimento geométrico cuja finalidade é auxiliar na construção do conceito de área, considerando a relação de equivalência "ter a mesma área".
- Levar o estudante a perceber que a expressão do cálculo da medida de área do retângulo pode ser utilizada para o cálculo da medida de área do quadrado permite que eles utilizem o conhecimento geométrico sobre as características dessas figuras, o que contribui para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Esse tipo de raciocínio também é utilizado para deduzir as expressões de cálculo da medida de área de triângulos, paralelogramos, trapézios e losangos.
- Relembre os estudantes de que a medida da área do retângulo, exemplificada nesta página do Livro do Estudante, pode ser obtida pela contagem dos quadrados de 1 cm^2 que ocupam o retângulo. Espera-se que os estudantes compreendam que, para cada situação, existe uma unidade de medida mais adequada que as outras.

ÁREA DE UM QUADRADO

- Comente com os estudantes que o quadrado é um retângulo que possui medida dos lados igual e, por isso, é um caso particular de retângulo.
- Peça aos estudantes que expliquem como resolveram a atividade **3**. Observe se eles perceberam que a medida da área do terreno já foi dada e é preciso saber apenas a medida da largura.

DE OLHO NA BASE

Propor situações-problema que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo da medida de área do retângulo e do quadrado, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA19**.

ÁREA DE UM PARALELOGRAMO

- Recorde aos estudantes que os paralelogramos são quadriláteros que têm dois pares de lados paralelos. Dessa forma, um retângulo é um paralelogramo; por isso, a expressão que calcula a medida da área do paralelogramo é a mesma usada para o retângulo.
- Mostre aos estudantes a decomposição do paralelogramo em triângulo e trapézio e, depois, a composição do retângulo. Dessa maneira, é possível calcular a medida da área do paralelogramo a partir do retângulo, pois a medida da área do paralelogramo é equivalente à do retângulo, considerando que ambos possuam as mesmas medidas da base e da altura a ela correspondente. Outro detalhe importante é que a base *b* no paralelogramo corresponde ao segmento com extremidades em *D* e *C* e a base *b* no retângulo é representada pelo segmento com extremidades em *H* e *H'*.
- Leia com os estudantes a atividade **9**. Veja se eles percebem que essa atividade envolve duas unidades de medida diferentes: o metro e o centímetro. Faça a eles algumas perguntas, como: Qual é a unidade de medida (do comprimento e da largura) da sala retangular?; Qual é a unidade de medida dos lados da lajota?; É possível trabalhar com as duas unidades de medida ao mesmo tempo?

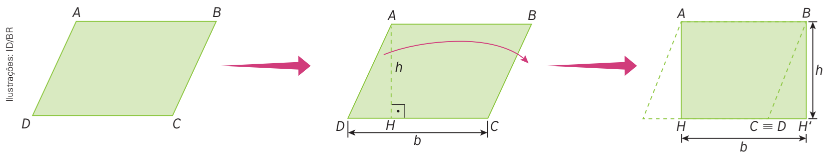
  Após essa conversa com a turma, veja se os estudantes optam por trabalhar com apenas uma das unidades, por exemplo, o centímetro.

DE OLHO NA BASE

Resolver problemas que envolvem área de terreno e área de paralelogramo, como proposto nas atividades, utilizando expressões de cálculo da medida de área, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA19**.

Área de um paralelogramo

Considere o paralelogramo *ABCD* representado a seguir.



Ao traçar a altura *h* relativa à base $\overline{DC}$, esse paralelogramo pode ser decomposto no triângulo *AHD* e no trapézio *ABCH*. Ao trocar a posição dessas figuras, podemos compor o retângulo *ABH'H*.

Assim, a área *A* do paralelogramo *ABCD* é equivalente à área do retângulo *ABH'H*.

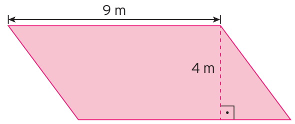
FIGURAS EQUIVALENTES

Dizemos que duas figuras são equivalentes quando elas possuem a mesma medida de área.

> A medida *A* da área de um paralelogramo cuja base mede *b* e cuja altura relativa a essa base mede *h* é dada por:
>
> $$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$$

Exemplo

Vamos calcular a medida *A* da área do paralelogramo a seguir.



$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h = 9 \cdot 4 = 36$$

Portanto, a área do paralelogramo mede 36 m².

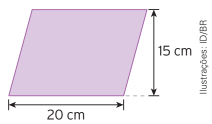
ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

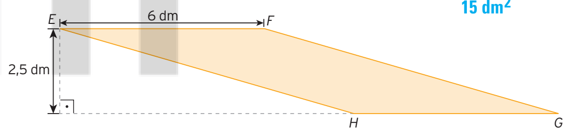
7. Determine a medida da área de um paralelogramo cuja base mede 6 cm e cuja altura mede 4,3 cm. **25,8 cm²**

8. Calcule a área de um terreno que possui a forma de um paralelogramo cuja base mede 10 m e cuja altura relativa a essa base mede 7 m. **70 m²**

9. Melissa vai revestir o piso de uma sala retangular que mede 3 m de comprimento por 2 m de largura. Ela pretende comprar lajotas com a forma de um paralelogramo como o ilustrado ao lado. De quantas lajotas Melissa precisa para revestir o piso da sala? **De 200 lajotas.**



10. Qual é a medida da área do paralelogramo *EFGH* representado a seguir? **15 dm²**



OUTRAS FONTES

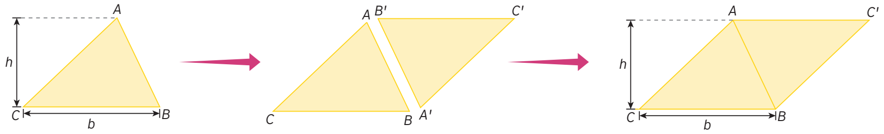
BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar I. *Matemática*: caderno de teoria e prática 4: medidas e grandezas. Brasília: MEC, 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/gestar/tpmatematica/mat_tp4.pdf. Acesso em: 2 ago. 2022.

Nesse volume, alguns dos aspectos discutidos são: o que é medir, o papel das unidades de medida, o porquê da padronização, entre outros.

Também há sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula.

Área de um triângulo

Ao duplicar o triângulo *ABC* representado a seguir, podemos compor o paralelogramo *AC'BC*.



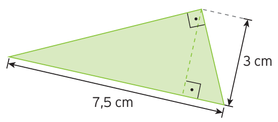
Ilustrações: ID/BR

Os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são congruentes e formam um paralelogramo de base e de altura com medidas respectivamente iguais à da base e à da altura do triângulo *ABC*. Portanto, a medida da área do triângulo *ABC* corresponde à metade da medida da área do paralelogramo *AC'BC*.

> A medida *A* da área de um triângulo cuja base mede *b* e cuja altura relativa a essa base mede *h* é dada por:
>
> $$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Exemplo

Vamos calcular a medida *A* da área do triângulo a seguir.



$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{7{,}5 \cdot 3}{2} = \frac{22{,}5}{2} = 11{,}25$$

Portanto, a medida da área do triângulo é 11,25 cm^2.

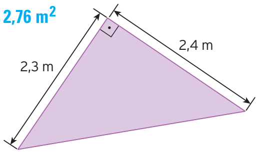
ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

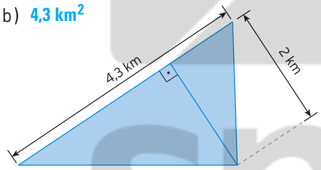
11. Calcule a medida da área de um triângulo, sabendo que um de seus lados mede 13 cm e que a altura relativa a esse lado mede 5 cm. **32,5 cm^2**

12. Calcule a medida da área dos triângulos indicados a seguir.

a) **2,76 m^2**

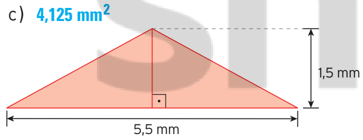


b) **4,3 km^2**



Ilustrações: ID/BR

c) **4,125 mm^2**



ÁREA DE UM TRIÂNGULO

- Acompanhe com os estudantes a composição dos triângulos *ABC* e *A'B'C'*, formando o paralelogramo *AC'BC*. Chame a atenção deles para o fato de que a soma das medidas das áreas dos dois triângulos é igual à medida da área do paralelogramo. Se julgar necessário, diga aos estudantes que na composição do paralelogramo *AC'BC* os pontos *A* e *A'* são coincidentes, assim como os pontos *B* e *B'*.
- Se julgar necessário, relembre que dois triângulos são congruentes quando seus lados e seus ângulos correspondentes são respectivamente congruentes.
- Antes de os estudantes iniciarem a resolução da atividade **12**, verifique se eles identificam a base e a altura correspondente de cada um dos triângulos. Aproveite também para retomar a multiplicação e a divisão de números na forma decimal.

DE OLHO NA BASE

As atividades apresentadas ajudam os estudantes a resolver problemas que envolvem medidas de área do triângulo, utilizando expressões de cálculo de medidas de área, contribuindo assim para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA19**.

ÁREA DE UM TRAPÉZIO

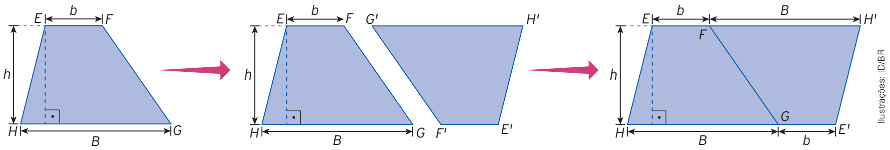
- Explique aos estudantes que, ao duplicar a região trapezoidal, do mesmo modo que foi feito com a área do triângulo, compõe-se o paralelogramo. Como o paralelogramo é formado por dois trapézios congruentes, a medida da área de um trapézio é dada pela medida da área do paralelogramo dividida por 2. Se julgar necessário, diga aos estudantes que na composição do paralelogramo *EH'E'H* os pontos *F* e *G'* são coincidentes, assim como os pontos *G* e *F'*.
- Antes de os estudantes iniciarem a atividade **13**, retome com eles os tipos de trapézio: o trapézio retângulo é aquele que possui dois ângulos retos; o trapézio isósceles é aquele cujos lados não paralelos são congruentes; e, finalmente, o trapézio escaleno é aquele em que os lados não paralelos não são congruentes.

Área de um trapézio

Para calcular a área de um trapézio, podemos proceder de maneira análoga ao caso da área de um triângulo.

Considere o trapézio *EFGH* representado a seguir.

Ao duplicar o trapézio, podemos compor o paralelogramo *EH'E'H*.

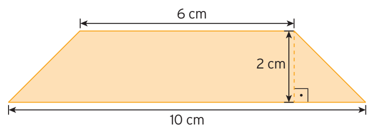


Os trapézios *EFGH* e *E'F'G'H'* são congruentes e formam um paralelogramo cuja medida de altura é igual à do trapézio *EFGH* e cuja medida da base é igual à soma das medidas das bases do trapézio *EFGH*. Portanto, a medida da área do trapézio *EFGH* corresponde à metade da medida da área do paralelogramo *EH'E'H*.

> A medida *A* da área de um trapézio cujas bases medem *B* e *b* e cuja altura relativa a essas bases mede *h* é dada por:
>
> $$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Exemplo

Vamos calcular a medida *A* da área do trapézio a seguir.



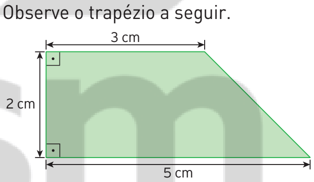
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(10 + 6) \cdot 2}{2} = \frac{(10 + 6) \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 10 + 6 = 16$$

Portanto, a área do trapézio mede 16 cm^2.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

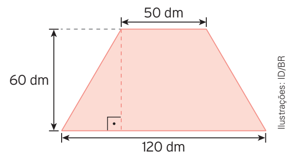
13. Observe o trapézio a seguir.



a) Classifique esse trapézio em escaleno, isósceles ou retângulo. **Trapézio retângulo.**

b) Qual é a medida da área desse trapézio? **8 cm^2**

14. Um grupo de amigos se uniu para cultivar uma horta. Para iniciar o cultivo, eles fizeram uma representação do terreno.



Qual é a medida da área desse terreno? **5 100 dm^2**

OUTRAS FONTES

HOFFMANN, D. S.; GRAVINA, M. A. Fórmulas de áreas através de recortes. Disponível em: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/atividades_diversas/ativ25/CabriJava/ativ25.htm#poligonos. Acesso em: 2 ago. 2022.

Esse material apresenta atividades que fazem uso de diferentes *softwares* e pressupõem algum conhecimento de seus recursos. As atividades podem servir como sugestões para trabalhos em sala de aula.

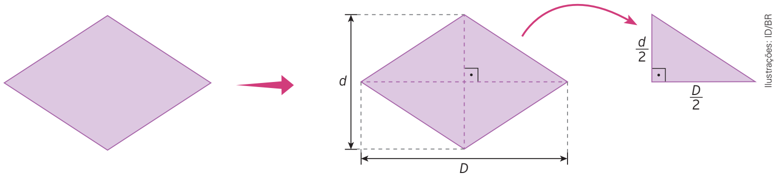
LAMAS, R. C. P. *et al.* Ensinando área no Ensino Fundamental. Prograd. São José do Rio Preto: Ibilce/Unesp, 2007. Disponível em: https://www.unesp.br/prograd/PDFNE2005/artigos/capitulo%205/ensinandoarea.pdf. Acesso em: 2 ago. 2022.

Esse artigo apresenta atividades que podem ser desenvolvidas com os estudantes para trabalhar área com materiais concretos. Nas páginas 436 e 437, a atividade proposta tem o objetivo de fazer com que eles verifiquem concretamente a validade da expressão que permite determinar a medida da área do trapézio.

Área de um losango

Observe o losango representado a seguir.

Traçando nesse losango as suas diagonais, *D* e *d*, ele é decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes.



A medida *A* da área de cada triângulo retângulo é dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2} = \left(\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{D \cdot d}{8}$$

Como a medida da área do losango equivale a quatro vezes a medida da área de um desses triângulos, temos:

$$A_{\text{losango}} = 4 \cdot A_{\text{triângulo}} = 4 \cdot \frac{D \cdot d}{8} = \cancel{4}^{1} \cdot \frac{D \cdot d}{\cancel{8}_{2}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Assim, a medida da área de um losango é igual à metade do produto das medidas de suas diagonais.

> A medida *A* da área de um losango cujas diagonais medem *D* e *d* é dada por:
>
> $$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

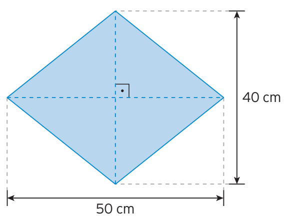
PARE E REFLITA

Você consegue pensar em outra maneira para obter a medida da área do losango?

Outra maneira de calcular a medida da área do losango é, em vez de dividir o losango em quatro triângulos, traçar retas que passem pelos vértices e sejam paralelas às diagonais de medidas *D* e *d*, de modo a obter um retângulo. Assim, a medida da área do losango corresponderia à metade da medida da área de um retângulo cujos lados medem *D* e *d*.

Exemplo

Vamos calcular a medida *A* da área do losango a seguir.



$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{40 \cdot 50}{2} = \frac{\cancel{40}^{20} \cdot 50}{\cancel{2}_{1}} = 20 \cdot 50 = 1\,000$$

Portanto, a área do losango mede 1 000 cm^2.

ATIVIDADE

Responda sempre no caderno.

15. A área de um losango mede 48 cm^2 e sua diagonal menor mede 6 cm. Qual é a medida da diagonal maior? **16 cm**

ÁREA DE UM LOSANGO

- Comente com os estudantes que, para determinar a medida da área do losango, é possível usar o processo de decomposição e composição de figuras cuja medida de área se sabe calcular. Ao traçar as diagonais do losango, *D* e *d*, ele será decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes.
- É importante observar se para os estudantes a ideia de mesma área está relacionada ao formato da figura ou dissociada do seu formato, quando se sugere, a partir de uma figura, a construção de outra de mesma área.

PALHANO, A. A. V.; KLOCK, M. C. L. Aprendendo Geometria plana com o uso do GeoGebra. *In:* PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. *Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE*: produções didático-pedagógicas. Curitiba: Seed/PR, 2016. v. II (Cadernos PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_ufpr_mat_pdp_ana_aparecida_vieira_palhano.pdf. Acesso em: 2 ago. 2022.

Material elaborado para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem da Geometria plana, aprofundando os conceitos de área e perímetro por meio de *software* de geometria dinâmica.

ÁREA DE UM CÍRCULO

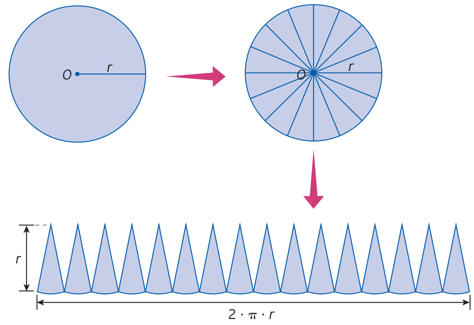
- O círculo é formado por uma circunferência e pelos infinitos pontos que preenchem o seu interior. A medida do perímetro de um círculo equivale à medida do comprimento da sua circunferência. A medida do comprimento de uma circunferência é dada por: $2\pi r$.
- Se achar oportuno, leve os estudantes para a sala de informática e peça a eles que acessem o *link* https://www.geogebra.org/m/fyqAUV22 (acesso em: 2 ago. 2022), para que eles possam visualizar o fatiamento de um círculo e o rearranjo das fatias.

LEMBRE-SE!

Setor circular é a parte do círculo que fica no interior de um de seus ângulos centrais.

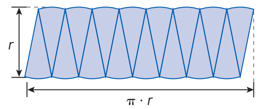
Área de um círculo

Considere um círculo de centro O e raio r. Decompondo o círculo em setores circulares congruentes, podemos dispor esses setores lado a lado e depois reagrupá-los. Observe.



Ilustrações: ID/BR

Reorganizando os setores circulares, podemos formar a seguinte figura:



A medida da área do círculo corresponde, aproximadamente, à medida da área de um paralelogramo de altura medindo r e base medindo πr. Essa aproximação se torna cada vez maior à medida que aumentamos o número de setores congruentes em que o círculo é dividido. Assim:

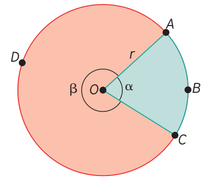
$$A_{\text{círculo}} = A_{\text{paralelogramo}} = \pi \cdot r \cdot r = \pi \cdot r^2$$

A medida A da área de um círculo cujo raio mede r é dada por:

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$$

Área de um setor circular

Na figura a seguir, há dois setores circulares: $OABC$ e $OCDA$. O setor $OABC$ está associado ao ângulo central de medida α, e o setor $OCDA$ está associado ao ângulo central de medida β.



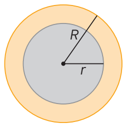
A medida da área de cada setor circular é diretamente proporcional à medida do ângulo central associado a ele. Então, sendo α a medida do ângulo central associado ao setor circular, podemos escrever:

$$\frac{A_{\text{setor circular}}}{A_{\text{círculo}}} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \frac{A_{\text{setor circular}}}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow A_{\text{setor circular}} = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360°}$$

Área de uma coroa circular

Você já reparou que a moeda de 1 real é formada por dois círculos de mesmo centro, mas com raios diferentes? Observe a imagem de uma moeda de 1 real e uma representação dela.

Banco Central/Reprodução fotográfica: ID/BR



Ilustrações: ID/BR

A parte dourada da moeda de 1 real é chamada de coroa circular.

Coroa circular é a região entre dois círculos de mesmo centro e que estão em um mesmo plano, com raios de medidas diferentes.

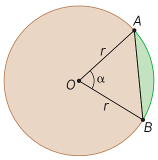
Para obter a medida da área de uma coroa circular, devemos subtrair a medida da área do círculo menor da medida da área do círculo maior. Assim:

$$A_{\text{coroa circular}} = A_{\text{círculo maior}} - A_{\text{círculo menor}} = \pi R^2 - \pi r^2 = (R^2 - r^2)\pi$$

$$A_{\text{coroa circular}} = (R^2 - r^2)\pi$$

Área de um segmento circular

No círculo a seguir, a parte verde é delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\widehat{AB}$. Dizemos que essa região é um segmento circular.



Segmento circular é a região de um círculo delimitada por uma corda e o arco correspondente a ela.

Observe que a medida da área do segmento circular adicionada à medida da área do triângulo *OAB* equivale à medida da área do setor circular associado ao ângulo central α.

Portanto, para obter a medida da área do segmento circular, subtraímos a medida da área do triângulo *OAB* da medida da área do setor circular associado ao ângulo α.

$$A_{\text{segmento circular}} = A_{\text{setor circular}} - A_{\text{triângulo}}$$

- Leve para a sala de aula uma moeda de R$ 1,00 e mostre aos estudantes que a parte dourada da moeda é um exemplo de coroa circular. Com base nesse exemplo do Livro do Estudante, explique a eles como obter a medida da área de uma coroa circular.
- Para mostrar como se calcula a medida da área do segmento circular, proponha aos estudantes que, em uma folha avulsa, desenhem um círculo e, em seguida, tracem um setor circular e o segmento $\overline{AB}$. Peça a eles que pintem a região entre o triângulo e o arco $\widehat{AB}$. Em seguida, solicite que recortem o setor circular. Comente com eles que a área pintada é chamada de segmento circular.

+ INTERESSANTE

Acredita-se que o cajueiro de Pirangi tenha sido plantado em 1888 e, desde então, continua a crescer. O cajueiro cresce para os lados, em vez de crescer para cima, e isso faz com que os galhos acabem encostando no chão. Uma vez que alcançam o chão, os galhos criam novas raízes e passam a se comportar como troncos de uma nova árvore, fazendo o cajueiro crescer exponencialmente.

Pergunte aos estudantes se eles já estiveram em um campo de futebol, ou se imaginam qual é a medida da área de um campo de futebol. Depois de ler o texto com eles, questione-os: O que significa dizer que a área ocupada pelo cajueiro é equivalente à área de um campo de futebol? Se a área desse cajueiro fosse equivalente à área de uma região quadrada, como a medida do lado dessa região poderia ser determinada?

Outro famoso cajueiro, conhecido como Cajueiro-Rei e que disputa o título de maior do mundo, está localizado no município de Cajueiro da Praia, no estado do Piauí. Mais informações a respeito do processo que busca essa certificação estão disponíveis em: https://cajueirodapraia.pi.gov.br/noticias/noticia/novo_estudo_confirma_que_cajueiro-rei_e_o_maior_do_mundo-195 (acesso em: 2 ago. 2022).

+INTERESSANTE

O maior cajueiro do mundo

Você conhece o maior cajueiro do mundo? O cajueiro de Pirangi fica em uma praia na cidade de Parnamirim (RN) e é considerado o maior cajueiro do mundo. A área ocupada por esse cajueiro é equivalente à área de um campo de futebol!

Nada convencional, o maior cajueiro do mundo atrai milhares de turistas todos os anos. Sua área mede cerca de 8500 m^2 e, na época de safra, que vai de novembro a janeiro, chega a produzir 80 mil cajus, o correspondente a 2,5 toneladas.

João Prudente/Pulsar Imagens

Turista observando o maior cajueiro do mundo, na praia de Pirangi do Norte, em Parnamirim (RN). Foto de 2019.

Não se sabe ao certo quando o cajueiro foi plantado, mas muitas versões afirmam que ele existe há mais de 120 anos.

Para explorar esse ponto turístico, foram criadas plataformas e um mirante que mede 9 metros de altura, que torna possível observar toda a copa do cajueiro.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

16. Calcule a medida da área de um círculo cujo raio mede 9 cm. (Use $\pi = 3{,}14$.) **254,34 cm^2**

17. Calcule a medida da área de uma praça circular cujo raio mede 23 m. **529π m^2**

18. Determine a medida da área de uma região circular que tem 15 cm de medida de diâmetro. (Use $\pi = 3{,}14$.) **176,625 cm^2**

19. Qual é a medida da área de uma região circular cuja circunferência mede 27π cm? **182,25π cm^2**

20. Determine a medida da área do setor circular de acordo com os dados em cada item.

a) $r = 2{,}5$ cm e $\alpha = 48°$ **$\frac{5\pi}{6}$ cm^2**

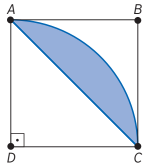
b) $r = 8$ cm e $\alpha = 270°$ **48π cm^2**

c) $r = 3$ cm e $\alpha = 30°$ **$\frac{3\pi}{4}$ cm^2**

d) $r = 4{,}5$ cm e $\alpha = 40°$ **2,25π cm^2**

21. Os docinhos de um aniversário foram arrumados em pratos circulares com 25 cm de medida de diâmetro. Quanto mede a área de cada um desses pratos? **$\frac{625\pi}{4}$ cm^2**

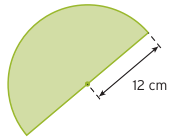
22. O lado do quadrado *ABCD* a seguir mede 6 cm. A linha curva representa um arco de circunferência com centro em *D*. Determine a medida da área da região colorida. **(9π – 18) cm^2**



Ilustrações: ID/BR

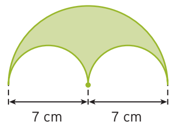
23. Determine a medida da área das regiões coloridas sabendo que todas as linhas curvas são semicircunferências.

a)



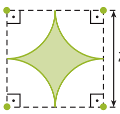
72π cm^2

b)



$\frac{49\pi}{4}$ cm^2

c)



(4 – π) cm^2

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. A sala da casa de Luís Guilherme é retangular e seus lados medem 4,5 m e 3 m. Ele decidiu trocar o revestimento do piso da sala e, para isso, usará placas quadradas de lado medindo 18 cm. Quantas placas, no mínimo, Luís Guilherme deverá comprar? **417 placas.**

2. Leia a seguinte afirmação:

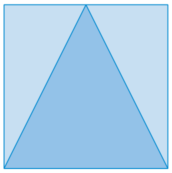
> É possível que um quadrado e um retângulo não quadrado sejam equivalentes.

Reúna-se com um colega para desenhar um retângulo não quadrado e um quadrado, de modo que eles tenham a mesma medida de área.

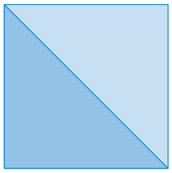
2. Resposta pessoal. Resposta possível: um retângulo de lados medindo 8 cm e 2 cm e um quadrado de lado medindo 4 cm.

3. Elisa trabalha com pintura residencial e recebe R\$ 15,00 por metro quadrado pintado. Ela vai pintar as paredes de uma sala retangular, de 5 m × 4 m. As paredes desse cômodo têm 2,5 m de medida de altura. O proprietário da casa informou que, nessa sala, há uma janela retangular de 2 m × 1,5 m e uma porta retangular de 0,8 m × 2,2 m, que não deverão ser pintadas. Com base nessas informações, quanto Elisa receberá por esse trabalho? **R\$ 603,60**

4. Um arquiteto pensou em dois modelos de vidro para decorar a fachada de um prédio. Os dois modelos têm a forma de um quadrado com lado medindo 3 m com um triângulo interposto. Para confeccionar os vidros, são utilizados dois materiais diferentes: o material utilizado na fabricação do triângulo custa R\$ 7,00 o metro quadrado, e o material usado para fabricar o restante do vidro custa R\$ 13,00 o metro quadrado. Qual modelo de vidro é mais barato?



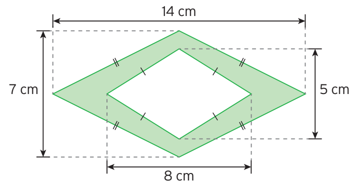
Modelo 1



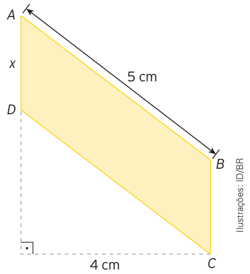
Modelo 2

Os dois modelos têm o mesmo custo: R\$ 90,00.

5. Calcule a medida da área pintada de verde da figura a seguir. **29 cm²**



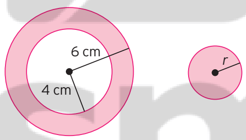
6. A professora de Sara lhe propôs o desafio de determinar a medida do lado x do paralelogramo $ABCD$, sabendo que sua área mede 8 cm^2.



Ajude Sara a resolver o desafio e registre no caderno o valor de x. **$x = 2$ cm**

7. Uma praça tem oito canteiros em forma de losango, nos quais serão plantadas mudas de flores. A diagonal maior de cada canteiro mede 5 m, e a menor, 4 m. Sabendo que serão plantadas 13 mudas por metro quadrado, quantas mudas serão plantadas ao todo nos canteiros dessa praça? **1 040 mudas.**

8. A coroa circular a seguir é equivalente a um círculo cujo raio mede r. Determine a medida desse raio em centímetro. **$2\sqrt{5}$ cm**



9. Elabore um problema cuja resolução envolva o cálculo da medida da área de um terreno quadrado, triangular ou circular. Depois, peça a um colega que resolva o problema criado por você, enquanto você resolve o dele. **Resposta pessoal.**

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **5**, verifique se os estudantes utilizam a estratégia de subtrair a medida da área do losango menor da medida da área do losango maior.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nesta página possibilitam resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de medida de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações do cotidiano, como determinar medida de terrenos, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA19**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

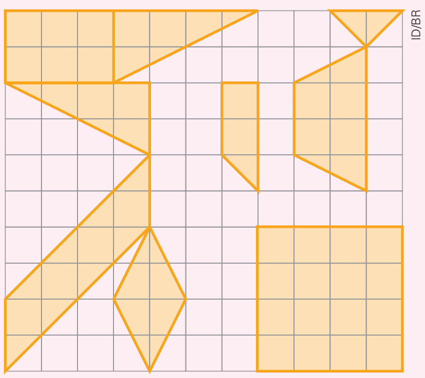
Caso os estudantes ainda tenham dificuldade no cálculo de medida de área, sugerimos o uso do geoplano.

O geoplano é um tabuleiro feito em madeira com pinos espaçados com distância regular e distribuídos de várias formas: quadrangular, triangular, hexagonal, circular, oval, dependendo do modo como se dispõem os pinos. Ao prender elásticos ou barbantes nos pinos, é possível construir figuras geométricas planas.

No geoplano, formam-se polígonos nos quais podem ser trabalhados os conceitos de medida, de vértice, de aresta, de lado, de simetria, de área, de perímetro, entre outros.

Proponha aos estudantes que, em duplas, realizem as seguintes atividades:

1. Construa no geoplano, com os elásticos, os polígonos representados na figura a seguir.



2. Efetue os cálculos das medidas das áreas dos polígonos, sem utilizar as fórmulas específicas para cada polígono.
3. Verifique se a soma das medidas das áreas dos polígonos é maior, menor ou igual à medida da área da região restante do geoplano.
4. Com o auxílio das fórmulas, efetue os cálculos das atividades **2** e **3** e verifique suas respostas.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Ideias associadas a volume e capacidade.
- Volume de um bloco retangular.
- Volume de um cilindro.

Objetivos

- Compreender e aplicar o conceito de volume.
- Compreender a relação entre volume e capacidade.
- Obter e utilizar fórmulas para o cálculo da medida do volume do bloco retangular e do cilindro.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de compreender o significado de fórmulas para o cálculo do volume de figuras geométricas não planas, fazendo relação entre as grandezas volume e capacidade. Com esses estudos, espera-se aprimorar as técnicas de resolução de problemas e o repertório matemático dos estudantes.

RETOMANDO AS IDEIAS ASSOCIADAS A VOLUME E CAPACIDADE

- Converse com os estudantes sobre as consequências para o ser humano do estado de alerta sobre o consumo de água, perguntando a eles se sabem o que significa um sistema entrar em estado de alerta, se já ouviram falar algo sobre o assunto e se na região onde moram eles vivenciaram o racionamento de água. Questione com os estudantes se eles sabem qual é a relação entre o estado de alerta e o volume da água.
- Solicite aos estudantes que se reúnam em duplas e discutam atitudes que poderiam ter diariamente para economizar água e ideias sustentáveis visando, por exemplo, reaproveitar a água da chuva para finalidades não potáveis. Em seguida, peça que compartilhem as sugestões com os colegas.
- Converse com os estudantes sobre o consumo de água e esclareça que o desperdício desse recurso não implica apenas pagar mais pela conta no mês. Comente que a água potável é fundamental para nossa sobrevivência e não está disponível em quantidade ilimitada em nosso planeta. Essa socialização desenvolve os **Temas Contemporâneos Transversais** Educação Ambiental e Educação para o Consumo, que pertencem à macroárea **Meio Ambiente**.

DE OLHO NA BASE

Discutir questões atuais que impactam o meio ambiente e nosso cotidiano possibilita aos estudantes argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, defendendo ideias e pontos de vista que respeitem e promovam a consciência socioambiental e o consumo responsável de água em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado do planeta, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 7**.

Capítulo 2 VOLUMES E CAPACIDADES

Neste capítulo, os estudantes vão retomar as ideias relacionadas ao volume e à capacidade. Além disso, eles precisam saber operar com números racionais e dominar conceitos de Geometria como bloco retangular e cilindro, e também saber calcular as medidas das áreas do quadrado, do retângulo e do círculo.

Retomando as ideias associadas a volume e capacidade

Leia o texto a seguir.

> O Sistema Cantareira entrou em estado de alerta na quarta-feira (11), quando chegou a 39,9% de sua capacidade de armazenamento. Considerado o maior reservatório de água da região metropolitana, o Cantareira abastece cerca de 7,3 milhões de pessoas por dia. Nesta sexta-feira (13), o manancial operava com 39,7%.
>
> Volume igual ou maior do que 30% e abaixo de 40% se caracteriza estado de alerta para a Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp). Para ser considerado normal, o volume de um reservatório tem de estar com pelo menos 60% de sua capacidade. [...]
>
> Bárbara Muniz Vieira. Cantareira entra em estado de alerta; armazenamento é de 39,7% nesta sexta, volume menor do que pré-crise hídrica. *G1*, 13 ago. 2021. Disponível em: https://g1.globo.com/sp/sao-paulo/noticia/2021/08/13/cantareira-entra-em-estado-de-alerta-armazenamento-e-de-397percent-nesta-sexta-volume-menor-do-que-pre-crise-hidrica.ghtml. Acesso em: 28 abr. 2022.

Para melhor compreender as informações desse texto, vamos relembrar o estudo sobre as grandezas **volume** e **capacidade**.

Represa Jaguari, que integra o Sistema Cantareira, durante a crise hídrica do estado de São Paulo. Foto de 2021.

Paulo Lopes/ Anadolu Agency/ Getty Images

238

OUTRAS FONTES

A ÁGUA no mundo (Pense Antes). Infográfico WWF. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=-Wq0yJdKewQ. Acesso em: 16 mar. 2022.

Esse vídeo apresenta dados da distribuição de água no planeta, o consumo e o desperdício em situações do dia a dia, por exemplo, como um buraco de 3 mm em um encanamento pode desperdiçar 3 200 litros de água por dia.

Volume é uma grandeza que está associada ao espaço ocupado por um objeto. Já **capacidade** é uma grandeza que corresponde ao volume interno de um recipiente.

A unidade de medida padrão para **volume** no SI é o **metro cúbico** (**m³**), mas também é muito comum utilizarmos seus múltiplos e submúltiplos. Observe o quadro a seguir.

Múltiplos			Unidade de medida padrão	Submúltiplos		
Quilômetro cúbico (km^3)	Hectômetro cúbico (hm^3)	Decâmetro cúbico (dam^3)	**METRO CÚBICO** (m^3)	Decímetro cúbico (dm^3)	Centímetro cúbico (cm^3)	Milímetro cúbico (mm^3)
1 km^3 equivale a 1 000 000 000 m^3	1 hm^3 equivale a 1 000 000 m^3	1 dam^3 equivale a 1 000 m^3	**1 m^3**	1 dm^3 equivale a $\frac{1}{1\,000}$ m^3	1 cm^3 equivale a $\frac{1}{1\,000\,000}$ m^3	1 mm^3 equivale a $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$ m^3

Já a unidade de medida padrão de **capacidade** é o **litro** (**L**). Assim como nas unidades de medida de comprimento e de volume, utilizamos com frequência os múltiplos e os submúltiplos do litro. Observe o quadro a seguir.

Múltiplos			Unidade de medida padrão	Submúltiplos		
Quilolitro (kL)	Hectolitro (hL)	Decalitro (daL)	**LITRO (L)**	Decilitro (dL)	Centilitro (cL)	Mililitro (mL)
1 kL equivale a 1 000 L	1 hL equivale a 100 L	1 daL equivale a 10 L	1 L	1 dL equivale a $\frac{1}{10}$ L	1 cL equivale a $\frac{1}{100}$ L	1 mL equivale a $\frac{1}{1\,000}$ L

Volume de um bloco retangular

Adílson trabalha em um supermercado e está organizando caixas com embalagens de leite. Ele sabe que o empilhamento máximo recomendado pelo fabricante é de 6 caixas. Veja a pilha que Adílson fez.

João Picoli/ID/BR

Sabendo que cada caixa mede 39,6 cm de comprimento, 18 cm de largura e 16,9 cm de altura, qual é a medida do volume do empilhamento em centímetro cúbico?

- Enfatize aos estudantes que volume é uma grandeza que está associada ao espaço ocupado por um objeto. O conceito de capacidade está intimamente ligado ao de volume, uma vez que a capacidade diz respeito ao volume interno de um recipiente.

VOLUME DE UM BLOCO RETANGULAR

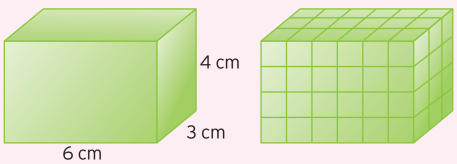
- Discuta com os estudantes o problema apresentado no texto, relacionado à quantidade de caixas empilhadas e à medida do volume do empilhamento em centímetro cúbico. Esse problema contribui para a consolidação do conceito de volume, que é o espaço ocupado por um objeto.
- Enfatize a ideia de que, para calcular a medida do volume de uma embalagem, utiliza-se o mesmo raciocínio empregado no cálculo da quantidade de embalagens do empilhamento.

DE OLHO NA BASE

O problema do empilhamento de embalagens, mencionado nesta página, envolve o cálculo da medida do volume de um recipiente no formato de bloco retangular, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA21**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Caso os estudantes apresentem dificuldade em compreender os cálculos de volume de um bloco retangular, retome com eles o conceito por meio da decomposição de figuras.



ID/BR

Cada uma das camadas do bloco é composta de 18 cubinhos ($3 \cdot 6 = 18$).

Como são quatro camadas no total, a quantidade de cubinhos no bloco é:

$$(3 \cdot 6) \cdot 4 = 18 \cdot 4 = 72$$

Assim, dizemos que a medida do volume desse bloco é 72 cm^3.

Para um bloco retangular com comprimento de medida a, largura de medida b e altura de medida c, a medida do volume é calculada dessa forma:

$$V_{bloco} = a \cdot b \cdot c$$

- Um bloco retangular é uma figura geométrica espacial limitada por seis retângulos, que são as suas faces. Os lados dos retângulos são chamados de arestas do bloco retangular. Um tijolo, por exemplo, lembra um bloco retangular.

VOLUME DE UM CUBO

- Relembre aos estudantes que o cubo é um caso particular de bloco retangular e, por isso, para medir o volume do cubo, basta elevar o valor da medida de sua aresta à terceira potência, uma vez que suas três dimensões (comprimento, largura e altura) têm a mesma medida.

VOLUME DE UM CILINDRO

- Discuta com os estudantes o problema que relaciona o procedimento do cálculo da medida do volume de um bloco retangular com o de um cilindro. A ideia é partir do cálculo da medida do volume do bloco retangular, que é conhecido, para o cálculo da medida do volume de outra figura geométrica não plana, como o cilindro.

Observe que o empilhamento tem a forma de um bloco retangular e há 3 caixas na largura, 2 no comprimento e 6 na altura. Portanto, no total há 36 caixas ($3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$).

Para calcular a medida do volume do empilhamento em centímetro cúbico, podemos, primeiro, calcular a medida do volume de uma caixa e, depois, multiplicar o resultado obtido pelo total de caixas empilhadas.

- Volume de uma caixa:

$$39{,}6 \cdot 18 \cdot 16{,}9 = 12\,046{,}32$$

- Volume total da pilha:

$$36 \cdot 12\,046{,}32 = 433\,667{,}52$$

Portanto, o volume do empilhamento mede 433 667,52 cm^3.

> A medida V do volume de um bloco retangular, com comprimento de medida a, largura de medida b e altura de medida c, é dada por:
>
> $$V_{\text{bloco retangular}} = a \cdot b \cdot c$$

Volume de um cubo

O cubo é um bloco retangular de seis faces quadradas; assim, podemos indicar a medida do comprimento, da largura e da altura por ℓ e, então, calcular a medida V do seu volume da seguinte maneira:

$$V_{\text{cubo}} = \ell \cdot \ell \cdot \ell$$
$$V_{\text{cubo}} = \ell^3$$

> A medida V do volume de um cubo é igual à medida de sua aresta ℓ elevada à terceira potência.
>
> $$V_{\text{cubo}} = \ell^3$$

Volume de um cilindro

Acabamos de estudar que a medida do volume de um bloco retangular pode ser calculada utilizando a relação $V = a \cdot b \cdot c$. Perceba que, se considerarmos que o produto de duas dimensões desse bloco retangular equivale à medida da área de uma de suas faces, poderemos escrever:

$$V_{\text{bloco retangular}} = \underbrace{a \cdot b}_{\text{área da base}} \cdot \overset{\text{altura do bloco}}{c}$$

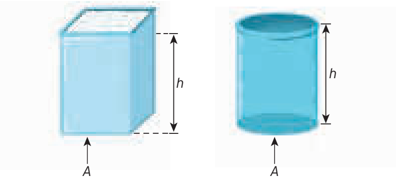
Chamando a área da base do bloco retangular de A_{base} e a altura de h, podemos escrever:

$$V_{\text{bloco retangular}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

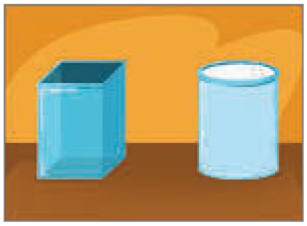
240

Agora, vamos analisar a situação a seguir.

Lucas tem duas latas: uma em formato de bloco retangular e uma cilíndrica. Ambas têm bases equivalentes e altura de mesma medida. A lata em formato de bloco retangular estava totalmente cheia de arroz. Veja.



Lucas despejou todo o arroz da lata em formato de bloco retangular na lata cilíndrica e observou que ela ficou totalmente preenchida.



Ilustrações: João Picoli/ID/BR

Essa situação ilustra o fato de que o volume de arroz que cabe nas duas latas é o mesmo. Então:

$$V_{\text{bloco retangular}} = V_{\text{cilindro}}$$
$$A_{\text{base}} \cdot h = V_{\text{cilindro}}$$

Como a base do cilindro é um círculo e a medida da área do círculo é dada por $\pi \cdot r^2$, podemos calcular a medida V do volume do cilindro da seguinte maneira:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Lucas mediu o diâmetro e a altura da lata cilíndrica e obteve 20 cm e 26 cm, respectivamente. Acompanhe como podemos calcular a medida V do volume da lata cilíndrica.

Como o diâmetro da lata cilíndrica mede 20 cm, então o raio mede 10 cm. Logo:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 26 = \pi \cdot 100 \cdot 26 = 2\,600\pi$$

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$$V_{\text{cilindro}} = 2\,600\pi = 2\,600 \cdot 3{,}14 = 8\,164$$

Portanto, o volume da lata cilíndrica mede 8 164 cm^3.

A medida V do volume de um cilindro cuja altura mede h e cuja base tem raio com medida igual a r é dada por:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

- Comente com os estudantes que, apesar de um cilindro circular reto ter a lateral arredondada, a medida do volume também pode ser calculada multiplicando a medida da área da base pela medida da altura.
- Explique aos estudantes o exemplo analisado nesta página para o cálculo da medida do volume do cilindro e, se achar necessário, apresente outras situações em que esse cálculo pode ser aplicado.

241

+ INTERESSANTE

Discuta com os estudantes a importância de obras como a do piscinão da praça da Bandeira para evitar alagamentos. Organize-os em grupos e peça que pesquisem informações sobre piscinões construídos na cidade onde moram, como localização e medida de capacidade. Além disso, incentive-os pesquisar atitudes que a população pode ter para evitar alagamentos.

RELAÇÕES ENTRE UNIDADES DE MEDIDA DE CAPACIDADE E DE VOLUME

- Leia com os estudantes o texto do Livro do Estudante em voz alta e observe se eles compreenderam o que ocorre em cada uma das situações mostradas.

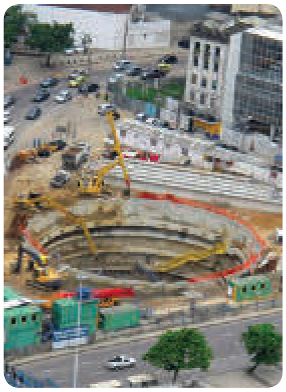
+ INTERESSANTE

Piscinão tem forma cilíndrica

Com o objetivo de diminuir os alagamentos durante as chuvas fortes na região da praça da Bandeira, zona norte da cidade do Rio de Janeiro (RJ), um grande reservatório de água foi construído.

O piscinão lembra um cilindro e tem capacidade para 18 000 000 L, com medidas de 20 m de profundidade e 35 m de diâmetro.

Os piscinões servem para captar a água da chuva de eventos intensos, acumulando os volumes e amortecendo os picos de vazão, evitando enchentes e transbordamento de rios. A água captada é liberada de maneira controlada para a rede de drenagem e os cursos de água, retardando a ida dos volumes para as regiões baixas das proximidades e impedindo os alagamentos.

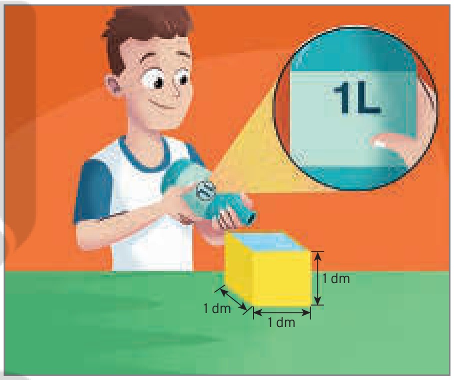


Genilson Araújo/Parceiro/Agência O Globo

Construção do piscinão da praça da Bandeira, na zona norte do Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2013.

Relações entre unidades de medida de capacidade e de volume

Imagine, por exemplo, que uma pessoa esteja enchendo de água uma caixa cúbica com 1 dm de medida de aresta. Nessa caixa, cabe exatamente 1 L.



João Picoli/ID/BR

Observe que estamos relacionando o volume da caixa com a sua capacidade. Ou seja, o volume de 1 dm^3 equivale à capacidade de 1 L.

$$\boxed{1\ dm^3 = 1\ L}$$

A capacidade de um recipiente em forma de um cubo com aresta de 1 dm corresponde a 1 L.

sm

Assim como estabelecemos a relação entre 1 L e 1 dm^3, também podemos relacionar qualquer múltiplo ou submúltiplo do litro com um múltiplo ou submúltiplo do metro cúbico. Veja algumas dessas relações.

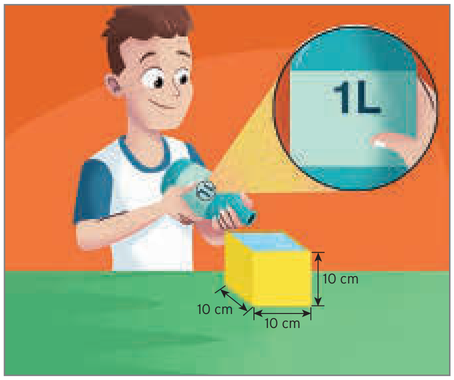
- Relação entre **litro** e **centímetro cúbico**:

  Como 1 dm = 10 cm, temos:

  $1\ dm^3 = 1\ dm \cdot 1\ dm \cdot 1\ dm = 10\ cm \cdot 10\ cm \cdot 10\ cm = 1\,000\ cm^3$

  Assim, se $1\ dm^3 = 1\ L$ e $1\ dm^3 = 1\,000\ cm^3$, podemos concluir que:

  $\boxed{1\ L = 1\,000\ cm^3}$



Ilustrações: João Picoli/ID/BR

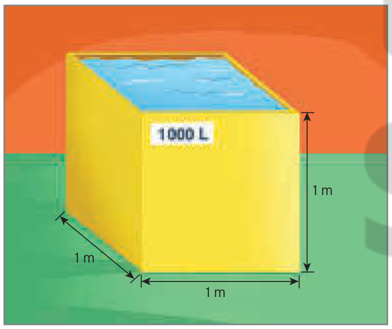
- Relação entre **litro** e **metro cúbico**:

  Como 1 m = 10 dm, temos:

  $1\ m^3 = 1\ m \cdot 1\ m \cdot 1\ m = 10\ dm \cdot 10\ dm \cdot 10\ dm = 1\,000\ dm^3$

  Assim, se $1\ dm^3 = 1\ L$, então $1\,000\ dm^3 = 1\,000\ L$. Como $1\,000\ dm^3 = 1\ m^3$, podemos concluir que:

  $\boxed{1\ m^3 = 1\,000\ L}$



- Destaque para os estudantes que as ilustrações retratadas não apresentam proporção entre si.
- Certifique-se de que os estudantes compreenderam que 1 litro, que é uma unidade de medida de capacidade bastante utilizada em nosso dia a dia, corresponde à medida da capacidade de um cubo de 1 decímetro de medida da aresta. Isso significa que 1 litro de água preenche completamente um cubo cuja aresta tem medida de comprimento igual a 1 decímetro.
- Seguindo o mesmo procedimento existente na relação entre litro e decímetro cúbico, certifique-se de que os estudantes compreenderam as demais relações apresentadas. Se considerar pertinente, peça a um estudante que se voluntarie para explicar aos demais o que está sendo mostrado em cada uma das cenas.

DE OLHO NA BASE

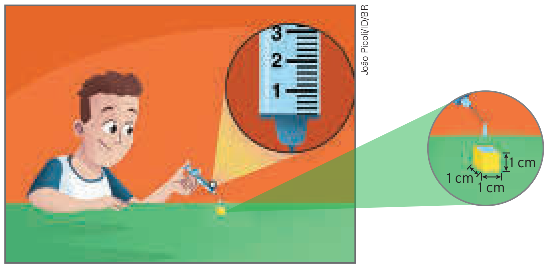
Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes, possibilita aos estudantes o desenvolvimento da habilidade **EF08MA20**.

- Na atividade **1**, se julgar necessário, explique aos estudantes que o sólido ilustrado pode ser entendido como a composição de dois blocos retangulares.
- Na atividade **4**, como não foi especificado um valor para o arredondamento de π, informe aos estudantes que eles devem calcular a medida do volume dos cilindros em cada item deixando os resultados em função de π.

- Relação entre **mililitro** e **centímetro cúbico**:

Como 1 L = 1 000 mL e 1 L = 1 000 cm^3, então 1 000 mL = 1 000 cm^3. Ou seja:

$$\boxed{1\ mL = 1\ cm^3}$$

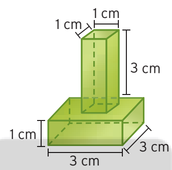


João Picoli/ID/BR

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Calcule a medida do volume do sólido a seguir. **12 cm^3**

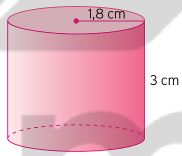


Ilustrações: ID/BR

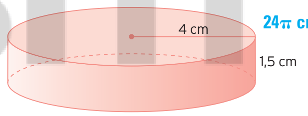
2. Determine a medida do volume de um bloco retangular, sabendo que suas dimensões são 34 cm, 18,5 cm e 12 cm. **7 548 cm^3**

3. Qual é a medida do volume de um cubo cujas arestas medem 7 cm de comprimento? **343 cm^3**

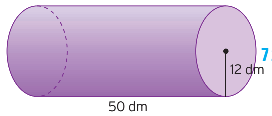
4. Determine a medida do volume dos cilindros a seguir.

a) 

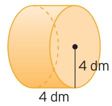
9,72π cm^3

b) 

24π cm^3

c) 

7 200π dm^3

d) 

64π dm^3

5. O volume de um cilindro mede 144π cm^3 e o raio de sua base mede 4 cm. Determine a medida da sua altura. **9 cm**

6. Determine, em litro, a medida da capacidade de um tubo cilíndrico com medidas de comprimento 12,5 m e de raio 1,5 cm. (Considere $\pi = 3{,}14$.) **Aproximadamente 8,83 L.**

7. Um reservatório subterrâneo de combustível em formato de cilindro tem 15 metros de medida de diâmetro e 5 metros de medida de altura. Qual é a medida da capacidade desse reservatório em litro? (Considere $\pi = 3{,}14$.) **883 125 L**

8. Joana comprou um recipiente de 5 litros de álcool em gel para colocar em potes cilíndricos medindo 5 cm de diâmetro e 7 cm de altura. (Considere $\pi = 3{,}14$.)

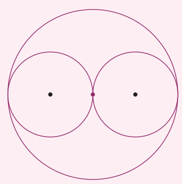
a) Qual é a medida da capacidade de cada pote, em mililitro? **Aproximadamente 137 mL.**

b) Quantos potes poderão ser totalmente preenchidos com os 5 litros de álcool em gel? **36 potes.**

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Paulo faz aniversário este mês e vai dar uma festa. Para isso, ele encomendou um bolo em uma confeitaria que oferece duas opções. A primeira opção é a de um bolo em formato cilíndrico, medindo 10 cm de altura e 20 cm de diâmetro, que custa R$ 20,00. A segunda opção também é de um bolo cilíndrico, de mesma altura, mas com o dobro do diâmetro, que custa R$ 60,00. Qual opção é mais vantajosa? Ou seja, qual opção oferece maior quantidade de bolo pela mesma quantia em dinheiro?

Pode ser que os estudantes pensem que a 1ª opção é mais vantajosa, por acreditarem que dois bolos medindo 20 cm de diâmetro equivalem a um bolo de 40 cm de diâmetro. Mas isso não é verdade. Observe a figura a seguir:


ID/BR

Para resolver a situação algebricamente, calcula-se a medida do volume de cada bolo. Como o formato dos bolos é cilíndrico, temos:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Assim, para o bolo que mede 20 cm de diâmetro, ou de raio medindo 10 cm, tem-se a seguinte medida do volume, em centímetro cúbico:

$$V_1 = \pi \cdot 10^2 \cdot 10 = 1\,000\pi$$

Para o bolo que mede 40 cm de diâmetro, ou 20 cm de raio, a medida do volume é, em centímetro cúbico:

$$V_2 = \pi \cdot 20^2 \cdot 10 = 4\,000\pi$$

Nesse caso, quando se duplica a medida do diâmetro, a medida do volume é multiplicada por 4.

Constata-se que a segunda opção é mais vantajosa, pois oferece 66,6π cm^3 de bolo para cada real, ao passo que a primeira opção oferece 50π cm^3 de bolo para cada real.

DIVERSIFICANDO

8. a) A medida do diâmetro ou do raio e a medida da altura da lata.

Responda sempre no caderno.

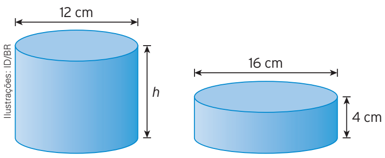
8. b) Os estudantes devem representar em um desenho a lata que providenciaram e indicar as medidas de seu diâmetro ou raio e de sua altura.

1. Determine a medida do volume de uma caixa de milho pré-cozido, como a ilustrada a seguir, sabendo que suas dimensões são 8,5 cm, 9,5 cm e 4,3 cm. **347,225 cm^3**

KsanaGraphica; Blackspring; Alhovik/Shutterstock.com/ID/BR

2. Uma piscina tem a forma de um bloco retangular medindo 50 m de comprimento, 25 m de largura e 2 m de profundidade. Qual é a medida do volume interno dessa piscina? Quantos litros de água cabem nela no máximo? **2500 m^3; 2500000 L**
3. Calcule mentalmente para responder: Se dobrarmos a medida da aresta de um cubo, quanto a medida do seu volume aumentará? **Oito vezes.**
4. Uma lata de ervilha em conserva em formato cilíndrico tem como dimensões 8 cm de diâmetro e 10 cm de altura. Calcule a medida do volume dessa lata. **160π cm^3**
5. Deseja-se construir um reservatório cilíndrico, de maneira que a medida do diâmetro da base tenha 5 m e a medida da sua capacidade máxima seja 50000 L. Qual deve ser a medida da altura desse reservatório? **$\frac{8}{\pi}$ m**
6. Duas latas estão expostas em uma prateleira de supermercado. Elas têm formato cilíndrico, com as medidas indicadas a seguir.

Ilustrações: ID/BR



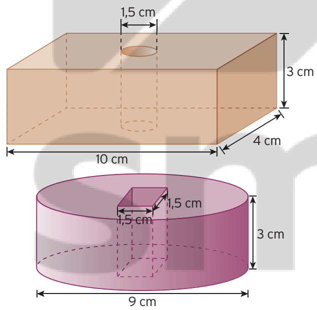
Sabendo que ambas as latas têm o mesmo volume, qual é a medida aproximada da altura h? **Aproximadamente 7,1 cm.**

7. Uma lata de tinta com a forma de um bloco retangular tem as dimensões indicadas na figura a seguir.

8. c) Resposta de acordo com as medidas obtidas pelos estudantes.

Essa lata será alterada: será mantida a forma de bloco retangular e o volume será reduzido pela metade. Nessas condições, quais serão as medidas da nova lata? **Resposta possível: 12 cm × 24 cm × 20 cm**

8. Providencie uma lata cilíndrica e reúna-se com um colega para fazer o que se pede.
   a) Que medidas da lata escolhida são necessárias para calcular a medida do seu volume?
   b) Desenhem um esquema para representar essas medidas.
   c) Calculem a medida do volume da lata.
9. Considere duas latas de extrato de tomate em formato cilíndrico de alturas iguais. Em uma delas, o raio da base mede 5 cm; na outra, o raio da base mede 8 cm. A primeira custa R$ 6,85 e a segunda, R$ 7,29. Qual dessas latas é economicamente mais vantajosa para o consumidor, considerando que todo o recipiente é preenchido com extrato de tomate? Para realizar os cálculos, despreze a espessura da lata. **A lata com raio da base medindo 8 cm.**
10. Observe as peças a seguir. Qual delas tem o maior volume? **A segunda peça.**



ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **8**, solicite aos estudantes que criem um problema com um contexto que envolva a lata cilíndrica e, depois, resolvam as questões propostas. Antecipe-se aos estudantes e reserve algumas latas ou outros objetos cilíndricos para disponibilizar a eles, caso não consigam dispor desse material.
- Na atividade **10**, a primeira peça é um paralelepípedo com um orifício no formato de um cilindro; a segunda peça é um cilindro com um orifício no formato de um paralelepípedo. Verifique se os estudantes reconhecem que para calcular a medida do volume total de cada peça, basta calcular a medida do seu volume total, desconsiderando o orifício, e depois subtrair a medida do volume desse orifício.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

É possível que alguns estudantes ainda apresentem dificuldade no cálculo da medida de volume. Assim, observe como eles resolvem as atividades propostas com o intuito de diagnosticar as possíveis dificuldades apresentadas. Alguns estudantes podem apresentar dificuldade na parte operacional (resolução das operações), e outros, na percepção espacial das formas cuja medida do volume se deseja determinar. Se a dificuldade estiver na conversão das unidades de medida, retome com os estudantes, registrando na lousa, as relações de equivalência entre as unidades de medida e observe se eles compreendem como essas relações são construídas. Caso a dificuldade seja operacional, permita que eles utilizem, por exemplo, a calculadora, pois, nesse momento, o objetivo não é desenvolver a prática da multiplicação. Outra possibilidade é retomar os algoritmos usados para resolver multiplicações. A percepção espacial e a identificação de formas é essencial para que os estudantes possam compreender a ideia de volume e, ainda, para diferenciá-la da ideia de área. Assim, retome com eles a diferença entre as figuras planas e as não planas, assim como o nome de algumas dessas figuras.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, o tema abordado é o cartão de crédito como meio de pagamento, bem como as possíveis vantagens e desvantagens de sua utilização. Realizar todas as compras e pagamentos no cartão pode gerar distúrbios no orçamento; mas, por outro lado, pode ajudar na aquisição de milhas que poderão ser utilizadas nas viagens de férias da família, por exemplo. Usar o cartão de crédito poderá ser melhor financeiramente se os descontos e os bônus, as milhas, os pontos, etc., decorrentes do volume de transações realizadas, forem maiores que a anuidade. Assim, o cartão pode produzir endividamento ou benefícios, e o autocontrole, a responsabilidade, entre outros aspectos, estão associados à sua utilização. A análise desses aspectos prepara os estudantes para situações cotidianas, formando-os para atuarem como cidadãos conscientes de suas escolhas financeiras.

Responsabilidade

O assunto tratado nessa seção contribui para que os estudantes reflitam sobre o uso consciente do cartão de crédito. Apesar de os estudantes dessa faixa etária serem muito jovens para contratar esse serviço, é possível que suas famílias e responsáveis utilizem esse recurso financeiro e, inclusive, forneçam a eles um cartão adicional. Desse modo, eles se podem se tornar sujeitos participativos na administração das finanças do dia a dia em seus respectivos lares. Além disso, a Educação Financeira também tem um papel importante na saúde mental dos estudantes, pois as situações-problema que envolvem o uso do dinheiro visam aproximar teoria e prática, desenvolvendo a capacidade deles de gerir as próprias finanças. Essa reflexão desenvolve os **Temas Contemporâneos Transversais** Educação Financeira e Saúde, que pertencem, respectivamente, às macroáreas **Economia** e **Saúde**.

AMPLIANDO HORIZONTES

O mundo mágico dos cartões de crédito

Cartão de crédito é um produto oferecido por bancos ou outras instituições financeiras e usado como forma de pagamento. A pessoa pode comprar e pagar o valor de todas as compras realizadas em um período de cerca de 30 dias em um só dia do mês. Os valores das compras e as datas em que elas foram efetuadas são listados em um documento chamado fatura. Ou seja, não há mágica alguma: ao usar um cartão de crédito, gasta-se dinheiro. O que muda é o dia em que o dinheiro sai do bolso – o do pagamento da fatura.

Uma vantagem de usar o cartão de crédito como forma de pagamento é poder comprar algo, como um produto importante ou algo emergencial, sem ter o dinheiro na hora da compra. Algumas pessoas também usam o cartão de crédito para obter benefícios, de modo que cada real gasto no cartão de crédito se transforma em bônus (milhas, pontos, etc.) que podem ser trocados por produtos, passagens aéreas e descontos. Outra vantagem para algumas pessoas é usar o cartão de crédito na organização e no controle dos gastos do mês, ajudando-as a não gastar mais do que ganham.

Mas será que cartão de crédito é de graça? Há algum custo por sua aquisição ou uso?

A instituição financeira que emite o cartão geralmente cobra um valor por ano, chamado anuidade. E aí cada pessoa precisa avaliar se o custo da anuidade vale a pena, ou seja, se os benefícios do cartão compensam os custos da anuidade.

Usar cartão de crédito exige responsabilidade, pois pessoas com dificuldades em administrar as próprias finanças podem criar a ilusão de aumento do poder de compra e comprar mais do que conseguem pagar, tendo de arcar com juros altíssimos nesse caso.

246

OUTRAS FONTES

MEU ACERTO. Endividamento entre jovens: como reverter esse crítico cenário. *Exame*, 5 nov. 2021. Disponível em: https://exame.com/colunistas/meu-acerto/endividamento-entre-jovens-como-reverter-esse-critico-cenario/. Acesso em: 2 ago. 2022.

Leia e discuta com os estudantes essa notícia, que trata da inadimplência entre brasileiros de 18 a 29 anos de idade.

PAGAR o mínimo ou parcelar a fatura: o que é melhor no cartão de crédito? Me Poupe!. Disponível em: https://mepoupe.com/dicas-de-riqueza/pagar-o-minimo-ou-parcelar-cartao-de-credito/. Acesso em: 2 ago. 2022.

Texto que apresenta um comparativo entre o pagamento mínimo e o parcelamento do valor total da fatura do cartão de crédito.

Então, muito cuidado! Se você não pagar o total da fatura na data do vencimento combinada entre você e a instituição que concedeu o cartão, serão cobrados juros altíssimos. Veja a situação ilustrada.

É preciso inteligência, autocontrole e planejamento para gastar somente aquilo pelo qual se pode pagar.

Para refletir — Responda sempre no caderno.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir.

1. Vocês ou seus pais ou responsáveis utilizam cartão de crédito? Em caso afirmativo, quando isso geralmente acontece? Existe algum critério? **Respostas pessoais.**
2. Conversem com seus pais ou responsáveis e respondam: Para a família de vocês, quais são as vantagens do cartão de crédito? **Resposta pessoal.**
3. Leiam atentamente o texto a seguir, extraído de uma matéria publicada em janeiro de 2022. **Consulte as respostas neste manual.**

> **Juros do rotativo do cartão disparam em 2021 e chegam a 350% ao ano**
>
> Em meio ao ciclo de alta da taxa básica de juros, a Selic, o juro médio total cobrado pelos bancos no rotativo do cartão de crédito subiu 21,8 pontos [percentuais] em 2021, informou nesta sexta-feira (28) o Banco Central. A taxa passou de 327,8% em dezembro de 2020 para 349,6% ao ano no fim de 2021, o maior valor desde agosto de 2017. A taxa subiu 3,7 pontos [percentuais] só em dezembro, em relação ao mês anterior.
>
> Juros do rotativo do cartão disparam em 2021 e chegam a 350% ao ano. *UOL Economia*, 28 jan. 2022. Disponível em: https://economia.uol.com.br/noticias/redacao/2022/01/28/banco-central-taxa-de-juros-janeiro-2022.htm. Acesso em: 28 abr. 2022.

a) O que significa a expressão “subiu 21,8 pontos percentuais”?

b) Uma pessoa deixou de pagar uma fatura no valor de R$ 1 000,00. Após um ano, qual será o valor dessa dívida, considerando a taxa anual de juro praticada em dezembro de 2021?

4. Por que usar o cartão de crédito como forma de pagamento pode ser perigoso para algumas pessoas propensas a comprar mais do que comprariam se pagassem em dinheiro? **Resposta pessoal.**

Daniel Wu/ID/BR

Série Eu e Meu Dinheiro – todos os episódios. Disponível em: https://www.youtube.com/playlist?list=PLhqfgkxuHXh7DCFzdNt3htR_0nJr8QAlj. Acesso em: 31 jul. 2022.

Série de vídeos que faz parte do programa Cidadania Financeira, do Banco Central do Brasil. Os vídeos mostram situações cotidianas relacionadas com Educação Financeira.

Varoufakis, Y. *Conversando sobre economia com a minha filha*. São Paulo: Planeta, 2015.

Escrito pelo economista grego Yanis Varoufakis, o livro tem como principal objetivo levar ao público jovem um texto esclarecedor sobre economia e que aproxime os adolescentes desse tema tão central e importante na sociedade. Os leitores poderão ver com outros olhos o colapso recente da economia social no mundo, assim como as razões pelas quais aqueles que detêm o poder se recusam obstinadamente a tomar as decisões que conduziriam à salvação das nossas sociedades na Grécia, na Europa e em todo o mundo.

PARA REFLETIR

- Na atividade **1**, incentive os estudantes a registrar suas impressões e a produzir seus significados e conhecimentos. O cartão de crédito é facilmente oferecido atualmente. Diferentes classes sociais fazem uso dele, e a frequência com que o utilizam depende muito da renda e da cultura da região.
- Após a realização da atividade **2**, amplie a discussão sobre as vantagens e as desvantagens do uso do cartão de crédito, reforçando que sua utilização requer muita disciplina, responsabilidade e cuidado.
- No item **b** da questão **3**, oriente os estudantes para que eles tenham o cuidado de não usar a taxa anual de juro de 2020 e, também, para não achar que a dívida seria composta apenas dos juros (um erro muito comum quando as taxas excedem a 100%).
- Na atividade **4**, espera-se que os estudantes percebam que o cartão de crédito exige muito autocontrole, pois somos bombardeados diariamente por propagandas ou convites para consumir. Quando não temos dinheiro na mão, não podemos comprar; se tivermos o cartão de crédito, podemos comprar, mas fazemos dívidas.

RESPOSTAS

3. a) Significa a diferença entre a taxa em dezembro de 2021 e a taxa anterior, em dezembro de 2020, ou seja:

$349{,}6\% - 327{,}8\% = 21{,}8\%$

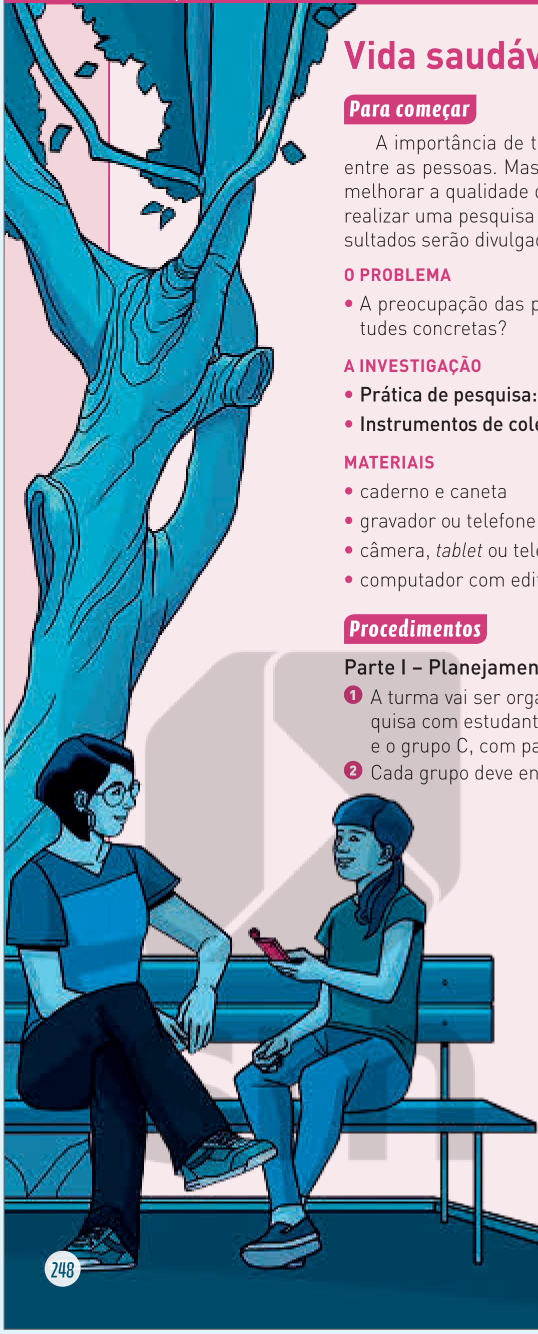
A alta em pontos percentuais é a diferença entre a taxa atual e a taxa anterior, o que é diferente da variação percentual entre as taxas. Por exemplo, passar de 400% para 440% representa um aumento de 10% em uma taxa e, ao mesmo tempo, um aumento de 40% em pontos percentuais.

b) A dívida será de R$ 4 496,00.

DE OLHO NA BASE

Ao se reunir em duplas e discutir as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 9**.

INVESTIGAR



Vida saudável

Para começar

A importância de ter uma vida saudável é um assunto muito discutido entre as pessoas. Mas será que elas realmente fazem algo concreto para melhorar a qualidade de vida delas? Nesta atividade, você e os colegas vão realizar uma pesquisa de campo para investigar esse tema. Ao final, os resultados serão divulgados em um vídeo produzido pela turma.

O PROBLEMA

- A preocupação das pessoas em ter uma vida saudável se efetiva em atitudes concretas?

A INVESTIGAÇÃO

- **Prática de pesquisa:** pesquisa de campo.
- **Instrumentos de coleta:** questionários e entrevistas.

MATERIAIS

- caderno e caneta
- gravador ou telefone com aplicativo gravador de voz
- câmera, *tablet* ou telefone celular para filmar
- computador com editor de vídeo

Procedimentos

Parte I – Planejamento

1. A turma vai ser organizada em três grupos: o grupo A vai realizar a pesquisa com estudantes da escola; o grupo B, com funcionários da escola; e o grupo C, com pais e/ou responsáveis de estudantes da escola.
2. Cada grupo deve entrevistar dez pessoas.

Parte II – Produção do questionário

1. Vocês vão elaborar um questionário comum a todos os grupos.
2. O questionário deve ser aberto, ou seja, os participantes da entrevista devem responder às perguntas com as próprias palavras.
3. O questionário deve conter três perguntas, que abordarão:
   - a opinião do entrevistado sobre ter atitudes para uma vida saudável;
   - as atitudes concretas que o entrevistado tem em seu dia a dia para uma vida saudável;
   - a opinião do entrevistado sobre o que fazer para ter uma vida mais saudável.

248

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, os estudantes vão realizar uma pesquisa de campo sobre ter uma vida saudável com integrantes da comunidade escolar (estudantes, funcionários e pais e/ou responsáveis de estudantes). Para isso, vão elaborar um questionário aberto, entrevistar as pessoas e transcrever as entrevistas. O produto final é a produção de um vídeo para divulgar os resultados coletados.
- Retome com eles os dois tipos de questionário: aberto e fechado. Ressalte que, quando o questionário é aberto, haverá inúmeras possibilidades de resposta, pois o entrevistado poderá usar linguagem própria e emitir opiniões ao responder às perguntas.

PARA COMEÇAR

- Leia com os estudantes o texto inicial e compartilhe o problema dessa seção. É provável que eles associem o tema apenas a alimentação e corpo saudáveis. Ter uma vida saudável tem ligação com vários fatores que estão relacionados ao modo como vivemos em nosso dia a dia, envolvendo aspectos socioeconômicos, culturais, etc. Portanto, instigue-os a refletir sobre isso, propondo questões como: O que vocês gostam de fazer em momentos de lazer?; Vocês realizam alguma atividade física?; Passam momentos em família?; Possuem uma alimentação saudável?; Vocês dormem bem?; Como vocês contribuem para tornar melhor o dia a dia da comunidade de vocês?

DE OLHO NA BASE

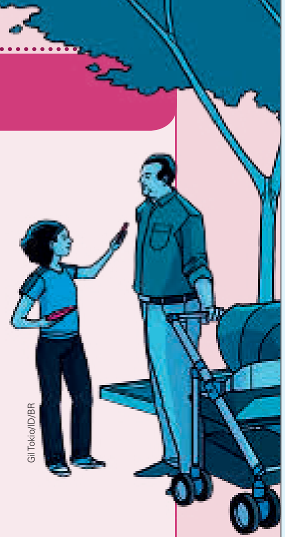
A seção contribui para o desenvolvimento da **competência geral 8**, pois permite que os estudantes conheçam, apreciem e cuidem de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

- O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes deve ser preservada. Para isso, valorize situações em que os estudantes se sintam acolhidos, incentivando o desenvolvimento da empatia e da solidariedade.

PROCEDIMENTOS

- Na *Parte I*, recomenda-se organizar a turma em três grupos, mas esse número pode variar de acordo com o perfil da turma. A quantidade de pessoas para a entrevista tem o objetivo de não sobrecarregar os estudantes, uma vez que eles terão de transcrever as entrevistas. Mas, dependendo do número de estudantes e da disponibilidade da turma, esse número pode ser maior.
- Na *Parte II*, propicie o trabalho coletivo da turma. Ajude os estudantes a elaborar as perguntas de forma clara e neutra. Quando as perguntas do questionário estiverem definidas, é importante que todos os estudantes as anotem, para que realizem as entrevistas.
- Na *Parte III*, organize a subdivisão dos grupos e esclareça aos estudantes que devem diversificar o perfil dos entrevistados. Por exemplo, o grupo A, que vai entrevistar os estudantes da escola, deve escolher estudantes de diferentes faixas etárias e gêneros; o grupo B deve escolher funcionários que trabalham em diferentes áreas da escola, inclusive professores; o grupo C deve escolher pessoas de diferentes profissões e gêneros; etc. A transcrição das entrevistas deve ser realizada de forma simples, mas com atenção à entonação no momento de transcrevê-la. Sugira aos grupos que cada integrante do grupo seja responsável por uma etapa após a entrevista, por exemplo, um estudante a transcreve; outro revisa a transcrição enquanto ouve a gravação. Ajude-os na análise das respostas dos entrevistados, para que percebam as nuances e contradições das respostas dos entrevistados. Todos os aspectos interessantes devem ser anotados por eles. Isso vai auxiliá-los na preparação do roteiro do vídeo.

4 Após a elaboração das perguntas, verifiquem se elas estão apropriadas.
- O participante vai compreender a pergunta?
- O participante vai poder responder livremente à pergunta ou a forma como a pergunta foi elaborada pode influenciar na resposta?



Gil Tokio/ID/BR

Parte III – Realização e análise das entrevistas

1 Os grupos devem se subdividir em duplas, e cada dupla vai entrevistar uma ou duas pessoas de cada vez.

2 Para a realização da entrevista, adotem os seguintes procedimentos:
- Se necessário, combinem dia e horário com o entrevistado.
- Escolham um local silencioso e tranquilo.
- Peçam autorização ao entrevistado para gravar a entrevista.
- Façam uma pergunta de cada vez. A pergunta seguinte deve ser feita quando o entrevistado tiver terminado de responder à anterior.
- Agradeçam ao entrevistado pela participação na pesquisa.

3 Cada dupla deve transcrever e compartilhar com o grupo a(s) entrevista(s) que realizou, isto é, deve ouvir a gravação e anotar tudo o que foi dito durante a entrevista.

4 O grupo deve se reunir e anotar, em tópicos, as respostas obtidas.

5 Contabilizem as respostas e anotem os aspectos mais interessantes, como respostas repetidas e as que apareceram apenas uma vez. Analisem, por meio dos números que obtiveram, se há coerência entre a importância que as pessoas dão a uma vida saudável e aos hábitos que adotam.

6 Apresentem essas informações aos demais grupos da turma.

7 Discutam com toda a turma as semelhanças e as diferenças encontradas no que estudantes, funcionários e pais e/ou responsáveis de estudantes da escola pensam sobre vida saudável.

Questões para discussão

Respostas pessoais.

1 Neste tipo de pesquisa, quais são as vantagens de aplicar um questionário aberto ao entrevistado em vez de um questionário fechado?

2 Em sua opinião, houve desvantagens em aplicar um questionário aberto ao entrevistado? Em caso positivo, quais?

3 Se o número de entrevistados fosse maior, isso ajudaria ou prejudicaria os objetivos da pesquisa? Explique.

Comunicação dos resultados

Produção, publicação e divulgação de vídeo

Com base nos resultados obtidos pelos grupos, a turma deve produzir um vídeo de curta duração e exibi-lo à comunidade escolar e a todos que se interessarem.

Primeiro, elaborem um roteiro indicando os participantes do vídeo e o que cada um vai realizar. Selecionem as informações mais relevantes da pesquisa. Escolham uma data e façam a filmagem. Depois, realizem a edição do vídeo, eliminando trechos desnecessários e acrescentando legenda e trilha sonora, por exemplo. Finalmente, publiquem o vídeo e divulguem-no para toda a comunidade escolar.

DE OLHO NA BASE

Mostre aos estudantes que uma vida saudável está intrinsecamente ligada a hábitos saudáveis consigo, com a família e com o outro. Com isso, é possível aprofundar o tema em cada uma das questões e levantar diversas opiniões a respeito da saúde, que é um tema amplo. Dessa maneira, os estudantes estarão desenvolvendo a **competência geral 8**, ao conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, reconhecendo suas emoções e a dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

Além disso, incentivá-los a perceber que, ao responder a um questionário aberto, as possibilidades de respostas são diversas, e que por isso é preciso respeitar as respostas dadas, contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**.

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO

- Organize a turma para debater as experiências vivenciadas nessa pesquisa para posterior produção de vídeo. Peça aos grupos que apresentem os resultados uns aos outros, aproveitando para questioná-los sobre se os hábitos dos entrevistados chamaram a atenção deles: As entrevistas trouxeram qual tipo de reflexão a vocês?; Quais são os impactos positivos e negativos dos hábitos deles?; O que significa agora ter uma vida saudável para vocês? Após esse momento de aquecimento e troca de ideias, realize as questões propostas.

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que o questionário fechado, com alternativas, limita as respostas das pessoas. O questionário aberto, por sua vez, possibilita respostas mais amplas e interessantes dos entrevistados.
2. Resposta pessoal. Esclareça que a utilização do questionário aberto é mais complexa pelo fato de as respostas serem mais longas e, por isso, podem precisar de maior tempo de análise.
3. Resposta pessoal. Diga aos estudantes que um número maior de entrevistados ajuda a compor um perfil mais completo das pessoas da comunidade escolar a respeito do tema pesquisado.

COMUNICAÇÃO DOS RESULTADOS

- É possível que muitos estudantes da turma tenham o hábito de gravar vídeos e editá-los pelo telefone celular, *tablet* ou computador, por exemplo. Aproveite a familiaridade deles com as mídias digitais para que compartilhem esse conhecimento entre eles.
- Auxilie os estudantes nos seguintes pontos:
  - roteiro (quantidade de sequências da cena, narração, efeitos, local, trilha sonora, duração, etc.);
  - a qualidade da imagem e do som. Ela pode variar com cada tipo de equipamento; portanto, peça aos estudantes que realizem previamente testes de filmagem para verificar o áudio e o vídeo;
  - ensaio de narração. A postura diante do vídeo é importante para os estudantes perceberem se a comunicação dos resultados está sendo clara;
  - publicação. O vídeo pode ser publicado em redes sociais ou em uma plataforma de vídeos;
  - compartilhamento. A divulgação pode ser feita via rede social da escola.

DE OLHO NA BASE

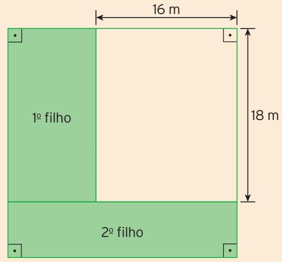
O gênero digital/vídeo tem o objetivo de ampliar a reflexão de temas sociais de extrema importância, aproximando a turma de novas linguagens e questões da sociedade. Assim, esse tipo de mídia contribui para os estudantes realizarem uma pesquisa seguindo alguns critérios e produzirem, posteriormente, o vídeo deles, tornando-os protagonistas de suas próprias produções e favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 5**.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nessa seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- A atividade **1** envolve a comparação das medidas de área de figuras planas. Verifique se os estudantes compreenderam a proposta da atividade. Se tiverem dificuldade em resolvê-la, retome os conceitos de área apresentados no capítulo 1.
- No item **b** da atividade **2**, espera-se que os estudantes digam que comprariam o terreno II, pois é o que apresenta a medida de área maior pelo mesmo valor.
- Na atividade **4**, verifique se os estudantes identificam que o vitral é formado por um retângulo e um semicírculo.

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. **Escreva no caderno a alternativa correta.**
Em seu testamento, um senhor resolveu deixar como herança parte de um terreno quadrado, que está representado a seguir, para seus dois filhos.



Sabendo que ambos os filhos receberam partes equivalentes de terreno, podemos afirmar que a medida do lado do terreno quadrado é:

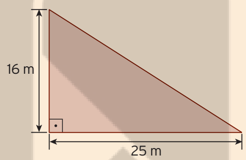
a) 20 m
b) 22 m
c) 24 m
d) 26 m
e) 28 m

Alternativa c.

2. **Ângelo constrói casas e estava em busca de um terreno de esquina para fazer seu trabalho. Ele encontrou três terrenos que estavam à venda pelo mesmo valor. Observe.**

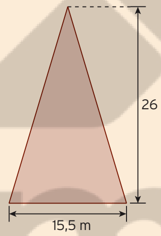
I

200 m²



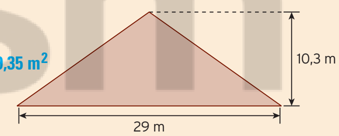
II

201,5 m²



III

149,35 m²

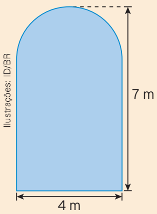


a) Calcule a medida da área de cada um dos terrenos.

b) Se você estivesse no lugar de Ângelo, que terreno compraria? Explique. **Resposta pessoal.**

3. **Considere um trapézio isósceles cujas medidas são 56 cm² de área e 34 cm de perímetro. Para que sua altura meça 8 cm, qual deve ser a medida de seus lados não paralelos?** **10 cm**

4. **Os vitrais de uma catedral têm formato de um retângulo justaposto a um semicírculo, conforme indicado na figura a seguir.**



Ilustrações: ID/BR

4. b) $(20 + 2\pi)$ m²

a) Determine a medida do perímetro de cada vitral. **$(14 + 2\pi)$ m**

b) Calcule a medida da área de cada vitral.

5. **Escreva no caderno a alternativa correta.**
Um pedreiro colocou azulejos nas quatro paredes e no piso de um banheiro em forma de bloco retangular. O banheiro mede 2,6 m de altura, 4 m de comprimento e 3 m de largura. No canto de uma das paredes de 4 m, há uma porta com medidas 2,2 m de altura e 1 m de largura. Em outra parede há uma janela medindo 40 cm de altura por 60 cm de largura. Cada caixa de azulejos tem 40 peças quadradas medindo 20 cm de lado e nenhum azulejo foi quebrado no transporte ou na instalação, ou seja, não houve desperdício.

O número mínimo de caixas que foram compradas para realizar o trabalho foi: **Alternativa e.**

a) 25 caixas.
b) 26 caixas.
c) 27 caixas.
d) 28 caixas.
e) 29 caixas.

6. **Registre no caderno a alternativa correta.**
(Enem) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Utilize as atividades dessa seção para avaliar se os estudantes ainda apresentam dificuldade nos conceitos e nas ideias relacionadas a área e volume. Caso perceba que há estudantes que apresentam dificuldade nesse sentido, proponha uma retomada desse conteúdo com a leitura do Livro do Estudante e com outras atividades que desenvolvam os conceitos de área e volume. Incentive a troca de conhecimento entre os próprios estudantes, pois, muitas vezes, a linguagem utilizada entre eles é mais compreensível. Se considerar pertinente, proponha outras atividades para que eles resolvam em duplas. Ao formar as duplas, tente colocar um estudante que apresenta mais dificuldade com um que conseguiu absorver melhor os conceitos desenvolvidos.

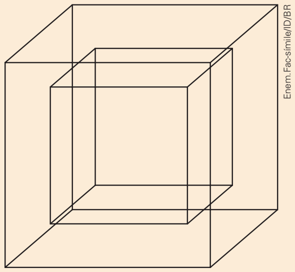
Se julgar conveniente, proponha aos estudantes que façam juntos uma retomada das fórmulas estudadas antes de iniciar a resolução das atividades. Ao fazer esse processo, eles compreendem o raciocínio envolvido e, então, memorizam as fórmulas com mais facilidade. Além disso, eles vão perceber que, ao compreender o raciocínio, não é preciso decorar as fórmulas. Essas atividades podem ser usadas tanto para retomar como para aprofundar os conhecimentos dos estudantes. Por isso, ao trabalhar cada uma delas, tenha sempre em mente os objetivos e as habilidades da unidade.

10. b) Primeira embalagem: 0,384 L; segunda embalagem: 0,120 L; terceira embalagem: 0,06075 L.

descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a: **Alternativa b.**

a) 5 cm.
b) 6 cm.
c) 12 cm.
d) 24 cm.
e) 25 cm.

7. Registre no caderno a alternativa correta.
(Enem) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



Enem/Fac-símile/ID/BR

O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de: **Alternativa d.**

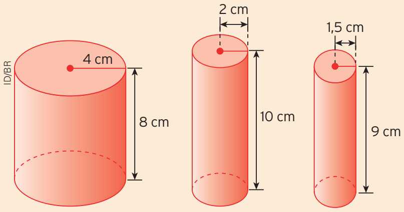
a) $12\ cm^3$.
b) $64\ cm^3$.
c) $96\ cm^3$.
d) $1\,216\ cm^3$.
e) $1\,728\ cm^3$.

8. Considere uma lata de leite em pó em formato cilíndrico cuja base tem raio medindo 5 cm e cuja altura mede 12 cm. Determine a medida do maior volume de leite em pó que a lata pode conter. **$300\pi\ cm^3$**

9. Veja o bolo representado a seguir e calcule a medida do volume ocupado por ele, desprezando as velas. **$2\,250\pi\ cm^3$**

Danilo Souza/ID/BR

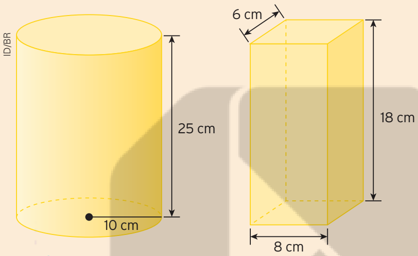
10. Observe as três possibilidades de embalagem de determinado produto.



ID/BR

a) Qual dessas embalagens pode conter o maior volume desse produto? **A primeira embalagem.**
b) Represente, em litro, a medida da capacidade de cada uma das embalagens. (Considere $\pi = 3$.)

11. No bairro onde Alice e Raul moram choveu muito. Antes de iniciar a tempestade, eles colocaram dois recipientes diferentes no quintal para medir a quantidade de água da chuva.



ID/BR

a) No cilindro: 0,015 m; no bloco retangular: 0,015 m.

No noticiário televisivo local, o repórter informou que havia chovido 15 L por metro quadrado na região. Considere $\pi = 3$ e responda:

a) Qual foi a medida da altura alcançada pela água em cada um dos recipientes?
b) Em certo momento, Alice e Raul verificaram que a medida da altura da água no recipiente cilíndrico era de 2,5 cm. Quantos litros por metro quadrado já havia chovido? **25 L**

12. Elabore um problema cuja resolução envolva o cálculo do volume de um bloco retangular. Depois, peça a um colega que resolva o problema criado por você, enquanto você resolve o dele. **Resposta pessoal.**

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação:

- Entendi o significado de área?
- Compreendi e sei calcular a medida da área de triângulos e de quadriláteros?
- Sei aplicar os cálculos das medidas de área de um círculo, de uma coroa e de um setor circular?
- Sei diferenciar e compreendi a relação entre volume e capacidade?
- Consegui calcular a medida do volume do bloco retangular e do cilindro?
- Procurei conversar com os colegas ou o professor para esclarecer minhas dúvidas?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

DE OLHO NA BASE

As atividades dessa seção possibilitam aos estudantes resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo do volume de recipiente no formato de um bloco retangular, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF08MA21**.

INTERAÇÃO

Conteúdos

- Cálculos com números racionais.
- Construção de tabela.
- Pesquisa.
- Escala.

Objetivos

- Realizar cálculos que envolvem o consumo de energia.
- Promover o debate e a reflexão acerca do tema energia sustentável.
- Realizar pesquisa em diferentes fontes.
- Construir uma tabela e elaborar uma lista.
- Construir uma maquete.

Justificativa

- Nesse projeto, os estudantes terão a oportunidade de experienciar um momento de trocas de ideias com o debate e a reflexão acerca do tema energia sustentável. Além disso, em grupos, eles deverão realizar uma pesquisa, apresentar o resultado dela e construir uma maquete. Assim, estão praticando a autonomia, a empatia e o trabalho em equipe, além de compreenderem, de modo significativo, a produção e o consumo de energia e os temas matemáticos explorados nesse contexto.

Sugestão de cronograma

- Propomos que esse projeto seja desenvolvido ao longo de um semestre, em 18 aulas, que não precisam ser consecutivas.
  - 1 aula – Divisão das equipes e debate sobre o que os estudantes conhecem a respeito da produção de energia elétrica, quais seus impactos e seus benefícios.
  - 3 aulas – Pesquisa sobre os tipos de usina mais utilizados no Brasil, quais os custos e a quantidade de kWh produzida mensalmente; elaboração de tabela que relacione os tipos de usina com a quantidade e os custos de kWh produzidos; e apresentação das tabelas e debate a respeito dos resultados encontrados.
  - 3 aulas – Levantamento de dados históricos de cada tipo de usina; pesquisa dos impactos ambientais e sociais; elaboração de relatório com dados encontrados e discussão dos resultados.
  - 3 aulas – Pesquisa das principais fontes renováveis de energia elétrica; levantamento dos custos do kWh de cada uma delas; elaboração de lista dos tipos de produção de eletricidade com menor custo de kWh; e debate sobre os resultados encontrados.
  - 4 aulas – Cálculo da quantidade de aparelhos eletrônicos que a escola possui e quanto tempo cada um fica ligado por mês; levantamento de quantos kWh cada um desses aparelhos utiliza por mês; pesquisa do custo do kWh no município; cálculo de quanto a escola gasta com energia elétrica por mês; elaboração de tabela que relacione a quantidade de kWh utilizada mensalmente pelos aparelhos e o valor, em dinheiro, gasto por eles; e debate sobre os resultados encontrados.
  - 3 aulas – Pesquisa, planejamento e elaboração das maquetes.
  - 1 aula – Exposição das maquetes.

Interdisciplinaridade

- Nesse projeto, a interdisciplinaridade se dará, mais especificamente, com o componente curricular Ciências. O projeto contribui para o desenvolvimento das seguintes habilidades:
  - EF08CI01
  - EF08CI04
  - EF08CI05
- O texto de cada uma dessas habilidades pode ser encontrado na BNCC, disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf (acesso em: 20 jul. 2022).

INTERAÇÃO

ESCOLA **SUSTENTÁVEL**

Para que o organismo humano esteja apto a realizar qualquer tarefa, desde respirar e pensar até exercer força e se deslocar, ele precisa das moléculas de ATP – adenosina trifosfato (*adenosine triphosphate* em inglês).

As moléculas ATP são geradas a partir dos nutrientes (proteínas, carboidratos e glicose) obtidos da alimentação e são nossa principal fonte de energia. Dentro do corpo humano, esses nutrientes são digeridos e quebrados em pequenas moléculas para que sejam absorvidos pelas células, onde são transformados em ATP.

NÃO CONFUNDA!

A molécula de **ATP não é energia**, embora a forneça. Ela é uma espécie de **combustível** utilizado em reações químicas para que o corpo humano seja capaz de realizar trabalhos, como respirar, pensar, manter-se aquecido, etc.

Assim como o corpo humano, qualquer corpo que se desloque, exerça força ou produza calor necessita de uma fonte de energia. O carro, por exemplo, precisa de combustível; a geladeira precisa de eletricidade; e o fogão precisa de eletricidade, eletromagnetismo, lenha, gás natural ou gás liquefeito de petróleo (GLP). No entanto, a maioria das fontes de energia utilizadas atualmente gera algum impacto ambiental, social ou econômico.

A utilização de combustíveis produzidos por processos naturais (os combustíveis fósseis), como carvão mineral, gás natural e derivados do petróleo, apesar do baixo custo de sua produção, libera alta quantidade de gás dióxido de carbono (CO_2), que é um dos gases responsáveis pelo efeito estufa.

Até mesmo a produção de eletricidade pode ter diversos impactos ambientais. Por exemplo, as usinas termelétricas, que utilizam combustíveis fósseis para produzir energia elétrica, liberam grande quantidade de poluentes na atmosfera. Mas essas usinas não são a única fonte de energia elétrica.

O que você sabe sobre fontes de energia elétrica? Quais são as maneiras de produção de energia elétrica? Você conhece os benefícios ou os impactos de algum desses tipos de produção?

Neste projeto, com a ajuda do professor, você e os colegas vão pesquisar e discutir sobre esse assunto, elaborar e expor um projeto de escola que utilize energia sustentável e construir uma maquete que represente essa escola.

Objetivos

- Pesquisar, em grupos, quais são as principais formas de produção de energia no Brasil, seus benefícios e seus impactos.
- Pesquisar o custo da energia elétrica no município em que moram e calcular o gasto mensal médio da escola com energia elétrica.
- Fazer um levantamento de fontes de energia sustentáveis.
- Planejar, construir e expor uma maquete de escola sustentável.

Planejamento

- Com a orientação do professor, formem cinco grupos com o mesmo número de integrantes (se necessário, um grupo poderá ter um integrante a mais ou a menos).
- Este projeto será realizado em seis partes:

Parte I – Conversa inicial
Parte II – Levantamento de dados e elaboração de tabela
Parte III – Pesquisa e elaboração de relatório
Parte IV – Elaboração de lista
Parte V – Pesquisa, cálculo e roda de conversa
Parte VI – Construção de maquete e exposição

Materiais

- Papel, lápis e caneta
- Computador com acesso à internet
- Jornais, revistas e livros
- 2 folhas de papel avulsas
- 1 placa de isopor com densidade de 30 kg/m³
- Régua, estilete, tesoura com pontas arredondadas, massa de modelar, pedaço de carpete usado, lona plástica, pedaço de papelão, substrato, vegetação, tinta guache, pincel, rolinho, copo plástico, papel-cartão, cola, tinta, garrafa PET, palito de madeira, etc. (o que for necessário para a construção da maquete).

Procedimentos

Parte I – Conversa inicial

1. Discutam sobre o que conhecem a respeito da produção de energia elétrica no Brasil e quais são os benefícios e os impactos ambientais de cada tipo de usina.
2. Elaborem uma lista com as conclusões do grupo sobre os tipos de usina no Brasil e quais trazem mais benefícios e geram menor impacto ambiental.

PARE E REFLITA!

- Você sabe como a eletricidade é produzida e chega às residências, à escola, etc.?
- Você sabe quais são os tipos de usina que mais produzem eletricidade no Brasil em quantidade e em capacidade de geração?
- Você conhece ou já estudou a respeito dos impactos ambientais causados por alguns tipos de usina?

Respostas pessoais.

Ilustrações: ekazanskI/iStock/Getty Images; Victor Malta/ID/BR

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Essa seção é um convite para que os estudantes participem de ações que desenvolvam as competências e as habilidades esperadas, aprendendo de modo autônomo e colaborativo. Propostas como essa podem ser realizadas com a metodologia de aprendizagem baseada em projetos.

A aprendizagem com base em projetos é uma metodologia ativa que propõe a atividade prática como instrumento para a aprendizagem.

PROCEDIMENTOS

- Na *Parte I*, incentive os estudantes a comentar o que conhecem a respeito de eletricidade, sua forma de produção, seus benefícios e seus impactos conforme os tipos específicos de produção. Fique atento aos conhecimentos prévios deles e complemente com informações de seu conhecimento. Anote as hipóteses dos estudantes para serem retomadas posteriormente, quando estiverem de posse de dados numéricos.

DE OLHO NA BASE

Organize os estudantes em grupos para discutirem as questões do boxe *Pare e reflita!*. Esse é um momento em que eles podem compartilhar suas respostas e opiniões, exercitando a empatia e o diálogo. Momentos como esse promovem o respeito ao outro e configuram uma excelente oportunidade de desenvolver a **competência geral 9**.

Além disso, ao refletir e argumentar sobre as questões propostas nesse boxe, os estudantes estarão promovendo os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 7**.

- Na *Parte II*, se possível, leve os estudantes ao laboratório de informática, se a escola dispuser de um. O *site* da Agência Nacional de Energia Elétrica (Aneel) apresenta informações e tabelas que podem auxiliar na pesquisa dos estudantes. Mostre a eles que as usinas produzem megawatt-hora (MWh) e que a eletricidade domiciliar é medida em quilowatt-hora (kWh). Assim, peça a eles que façam a conversão de MWh para kWh.

DE OLHO NA BASE

Na construção da tabela, incentive o uso de programas processadores de texto e de planilhas eletrônicas. Esse trabalho contribui para o desenvolvimento da **competência geral 5**, ao utilizar tecnologias digitais de informação para se comunicar, acessar e disseminar informações.

Após a elaboração da tabela que relaciona os tipos de usina que produzem mais kWh e os que fazem com menor custo, incentive o debate, perguntando aos estudantes se ficaram surpresos com algum dado, e utilize as hipóteses anotadas na *Parte I* para incentivar a conversa. Anote alguns comentários da turma para serem retomados posteriormente.

- Após o debate e a elaboração dos relatórios, peça a cada grupo que, na *Parte IV*, pesquise um tipo de fonte de energia renovável (eólica, solar, ondas e marés, geotérmica e biomassa), em consonância com a habilidade **EF08CI01**. Se possível, mostre aos estudantes o terceiro episódio da série Fontes renováveis de energia, produzido pela TV USP Piracicaba (disponível em: https://iptv.usp.br/portal/video.action?idItem=12090; acesso em: 20 jul. 2022) e peça a cada grupo que faça um levantamento dos custos do kWh relacionado à fonte de energia renovável pela qual o grupo ficou responsável. Solicite aos estudantes que conversem e elaborem em sala de aula uma tabela relacionando os tipos de produção de eletricidade com os custos do kWh.
- Na *Parte III*, leve os estudantes à biblioteca e incentive a pesquisa em livros, revistas e jornais. Sugira artigos e livros que tratem dos impactos ambientais e sociais causados pela construção de usinas ou dos acidentes de alguns tipos de usina (por exemplo, as usinas de Chernobyl e de Belo Monte). Peça a eles que discutam e elaborem um relatório a respeito das informações obtidas.

Parte II – Levantamento de dados e elaboração de tabela

1. Pesquisem quais são os principais tipos de usina no Brasil.
2. Façam um levantamento a respeito da quantidade de quilowatts-hora (kWh) produzida em cada tipo de usina e sobre o custo de produção do quilowatt-hora em cada um.

O QUE É KWH?

Quilowatt-hora (kWh) é a unidade de medida de energia elétrica que demonstra a quantidade de eletricidade consumida por um aparelho durante um período específico de funcionamento.

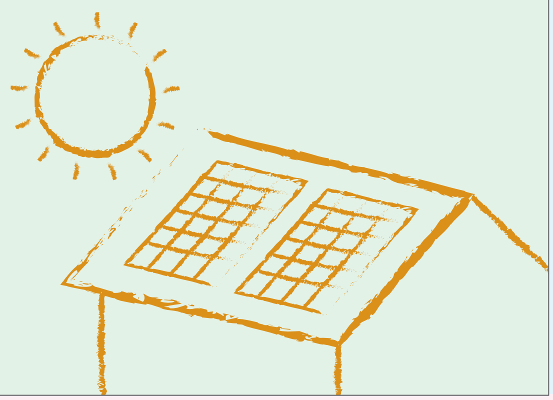
3. Elaborem uma tabela com as seguintes informações: os principais tipos de usina no Brasil, a quantidade de quilowatts-hora produzida em cada tipo de usina e o custo da produção do quilowatt-hora em cada um deles.
4. Os grupos devem apresentar, em sala de aula, os resultados encontrados e as tabelas elaboradas. Verifiquem se os dados obtidos na pesquisa estão de acordo com as hipóteses levantadas na **Parte I**.
5. Conversem sobre quais usinas produzem mais quilowatts-hora de energia elétrica por um menor custo, verificando se a usina de tipo mais produtivo também é a mais utilizada no Brasil.

Parte III – Pesquisa e elaboração de relatório

1. Com a orientação do professor, cada grupo ficará responsável por pesquisar um dos cinco tipos de usina mais utilizados no Brasil.
2. Pesquisem, em jornais, revistas, na internet, etc., dados históricos a respeito do tipo de usina.
3. Façam um levantamento dos impactos ambientais e sociais causados por esse tipo de usina.
4. Elaborem um relatório da pesquisa realizada.
5. Apresentem, em sala de aula, os resultados encontrados e o relatório elaborado.
6. Discutam quais tipos de usina apresentam maior risco ambiental e social e quais apresentam menor risco.

Parte IV – Elaboração de lista

1. Pesquisem quais são os principais tipos de produção de energia renovável e o custo de produção do quilowatt-hora em cada um.
2. Elaborem uma lista com as informações obtidas na pesquisa.
3. Apresentem, em sala de aula, os resultados encontrados e a lista elaborada.
4. Conversem sobre quais seriam as melhores opções para a produção de energia elétrica no Brasil, discutindo quais métodos de produção são mais sustentáveis e mais econômicos.



254

OUTRAS FONTES

Fontes renováveis de energia. Disponível em: https://iptv.usp.br/portal/video.action?idItem=12090. Acesso em: 20 jul. 2022.

Episódio da série especial sobre fontes renováveis de energia produzida pela TV USP Piracicaba. Mostra a opinião de especialistas da Universidade de São Paulo sobre o conceito de fontes renováveis e também sobre as hidrelétricas como alternativas do gênero.

PARE E REFLITA!

- Qual é o consumo mensal de energia elétrica da sua escola?
- Considerando os custos de produção da energia elétrica e os impactos ambientais e sociais causados pelas usinas, em sua opinião, quais são as melhores opções de produção de energia elétrica para o Brasil?
- Existe alguma alternativa aos métodos de produção utilizados?

Respostas pessoais.

Ilustrações: ekazansk/iStock/Getty Images; Victor Malta/ID/BR

Parte V – Pesquisa, cálculo e roda de conversa

1. Pesquisem a quantidade de aparelhos eletrônicos que a escola possui (lâmpadas, computadores, televisões, etc.) e quanto tempo por mês eles ficam ligados em média.
2. Pesquisem quantos quilowatts-hora cada aparelho utiliza por mês e calculem seu consumo.
3. Pesquisem o preço do quilowatt-hora no município em que moram.
4. Calculem quantos quilowatts-hora a escola consome por mês e o valor gasto com energia elétrica mensalmente.
5. Elaborem uma tabela que mostre quantos quilowatts-hora cada aparelho consome por mês.
6. Apresentem, em sala de aula, a tabela elaborada e conversem sobre quais são as melhores alternativas para que a escola utilize energia mais sustentável e econômica.

Parte VI – Construção de maquete e exposição

1. Elaborem um esboço de como seria uma escola sustentável.
2. Pesquisem diferentes tipos de maquete e as formas de montá-los.
3. Elaborem a planta da maquete.
4. Façam uma lista dos materiais necessários. Priorizem os descartados que podem ser utilizados no projeto.
5. Combinem com o professor a data de exposição das maquetes e façam a divulgação do evento.
6. Escolham três pessoas do grupo para que, durante a exposição, expliquem ao público qual é a proposta do trabalho e quais são as alterações representadas na maquete para tornar a escola sustentável.

Compartilhamento

Organizem a sala de aula de modo que todos possam expor as maquetes construídas.

A exposição das maquetes servirá como introdução para uma roda de conversa com a comunidade sobre os impactos causados pela produção de energia elétrica e as alternativas para a escola e a comunidade.

Avaliação

Respostas pessoais.

1. Como foram realizadas as pesquisas a respeito dos modos de produção de energia elétrica?
2. Você se surpreendeu com algum dado encontrado? Se sim, qual? Se sim ou se não, por quê?
3. Em sua opinião, deveria ocorrer alguma mudança no modo de consumo de energia elétrica?
4. Seu grupo conseguiu construir a maquete conforme planejado?
5. Como foi trabalhar em grupo? Houve cooperação durante o desenvolvimento do trabalho?
6. Foi interessante planejar, organizar, realizar e divulgar a exposição? De quais partes você mais gostou e quais partes gostaria de melhorar?
7. O que você aprendeu com a realização deste projeto?

- Na *Parte V*, em consonância com as habilidades **EF08CI04** e **EF08MA06**, os estudantes farão o levantamento e calcularão quantos aparelhos eletrônicos a escola possui, quanto tempo cada um fica ligado, quantos kWh esses aparelhos consomem e quais são os custos de cada aparelho para a escola e o valor médio da conta elétrica da escola. De posse dos resultados da pesquisa, eles farão uma tabela que apresente os dados encontrados.
- O levantamento da quantidade de eletrônicos pode ser feito de duas maneiras:
  - Os estudantes podem calcular quantas lâmpadas, por exemplo, uma sala de aula possui e multiplicar pela quantidade de salas da escola.
  - O professor pode levar os estudantes a um passeio pela escola para que contem quantos refrigeradores, televisões, projetores, etc. a escola possui.
- Por último, na *Parte VI*, os estudantes deverão pesquisar, planejar, construir e expor uma maquete de escola sustentável que apresente as alternativas apontadas por cada grupo. A construção da maquete possibilitará o trabalho com as habilidades **EF08MA15**, **EF08MA18** e **EF08MA19**. Incentive os estudantes a assistir a vídeos e a ler artigos que os auxiliem na construção da maquete.

DE OLHO NA BASE

Após a apresentação e a discussão dos dados encontrados em todas as etapas, para favorecer o desenvolvimento da habilidade **EF08CI05**, os estudantes deverão debater sobre as melhores opções de produção de energia elétrica e as melhores alternativas para a escola (de modo que a escola utilize menos eletricidade vinda de fontes não renováveis, substituindo aparelhos que consumam muitos kWh, etc.).

COMPARTILHAMENTO

- A exposição das maquetes à comunidade deverá servir de introdução para o debate a respeito das opções de energia sustentável.

Lista de siglas e bibliografia

Lista de siglas

AAP-SP	Avaliação da Aprendizagem em Processo
Anac	Agência Nacional de Aviação Civil
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
Fuvest-SP	Fundação Universitária para o Vestibular
Ibmec-RJ	Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
Obmep	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
Saresp	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
UEL-PR	Universidade Estadual de Londrina
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
Unioeste-PR	Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Vunesp	Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

Bibliografia comentada

BENDICK, J. *Pesos e medidas*. Tradução: Djalmir Ferreira de Mello. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1960 (Coleção O Mundo e Nós).

Nesse livro estão presentes ideias e conceitos acerca de pesos e medidas.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da Matemática*. Tradução: Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

Esse livro trata da história da relação da humanidade com o desenvolvimento da Matemática.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Alfabetização. *PNA*: Política Nacional de Alfabetização. Brasília: MEC/Sealf, 2019. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/images/banners/caderno_pna.pdf. Acesso em: 23 mar. 2022.

A Política Nacional de Alfabetização (PNA) foi instituída com o objetivo de melhorar a qualidade da alfabetização no Brasil e combater o analfabetismo no país. O documento aborda conceitos como alfabetização, literacia e numeracia.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 23 mar. 2022.

Elaborada pelo Ministério da Educação de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, de 1996, a Base Nacional Comum Curricular é um documento normativo que estabelece os conhecimentos, as competências e as habilidades que se espera que os estudantes desenvolvam ao longo da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Competências socioemocionais como fator de proteção à saúde mental e ao* bullying. Brasília: MEC/SEB, 2020. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/195-competencias-socioemocionais-como-fator-de-protecao-a-saude-mental-e-ao-bullying. Acesso em: 23 mar. 2022.

Nesse material é possível compreender como as competências socioemocionais estão presentes nas dez competências gerais descritas pela BNCC. Esse documento serviu como base para a elaboração de diversas propostas desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. *Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica*. Brasília: MEC/SEB/Dicei, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file. Acesso em: 23 mar. 2022.

Esse documento traz as diretrizes que estabelecem uma base nacional comum, responsável por orientar a organização, a articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas de todas as redes de ensino brasileiras.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 23 mar. 2022.

O trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) possibilita que os estudantes concluam sua educação formal reconhecendo e aprendendo os temas que são relevantes para sua atuação na sociedade. Esse documento apresenta os TCTs e traz propostas de práticas de implementação.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística básica*. São Paulo: Saraiva, 2017.

O livro é divido em três partes. A primeira trata da análise de dados uni e bidimensionais. A segunda traz conceitos básicos de probabilidade e variáveis aleatórias. E, por fim, a terceira trata dos principais tópicos da inferência estatística.

EVES, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2011.

Essa obra narra a história da Matemática desde a Antiguidade até os dias atuais por meio da observação da cultura de cada época retratada.

JANUÁRIO, A. J. *Desenho geométrico*. 4. ed. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2019.

Esse livro aborda de maneira simples conteúdos de desenho geométrico, possibilitando uma aprendizagem imediata. Muitas das propostas apresentadas nele inspiraram os autores na elaboração dos conteúdos de desenho geométrico desta coleção.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. *Noções de probabilidade e estatística*. São Paulo: Edusp, 2015.

O livro apresenta uma introdução à probabilidade e à estatística. Os conceitos de estatística descritiva são tratados em paralelo com outras teorias, possibilitando estabelecer uma relação entre estatística descritiva, probabilidade e variáveis aleatórias.

MILIES, C. P.; COELHO, S. P. *Números*: uma introdução à matemática. 3. ed. São Paulo: Edusp, 2013.

Esse livro apresenta a teoria dos números inteiros e mostra como o conjunto dos números racionais se constrói com base nos números inteiros. Além disso, trabalha com uma apresentação axiomática de Peano para os números naturais.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. 2. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2008.

Esse livro contribui para a descoberta e a compreensão da Geometria associada às demais áreas do conhecimento, além de contribuir para a organização do raciocínio lógico.

SURENDRA, V. *Ideias geniais*: os principais teoremas, teorias, leis e princípios científicos de todos os tempos. Tradução: Carlos Irineu da Costa. Belo Horizonte: Gutenberg, 2011.

A obra traz princípios, equações, teorias, teoremas e afins que formam os fundamentos da ciência.

256

2 1 1 8 1 4
ISBN 978-65-5744-752-9
2 900002 118148