GERAÇÃO
ALPHA

Matemática

7

Ensino Fundamental
Anos finais | 7º ano

Componente curricular: Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

Carlos N. C. de Oliveira
Felipe Fugita

Editora responsável:
Isabella Semaan

Organizadora: SM Educação
Obra coletiva concebida, desenvolvida
e produzida por SM Educação.

CÓDIGO DA COLEÇÃO
0102P24010002020
PNLD 2024 • OBJETO 1
MATERIAL DE DIVULGAÇÃO
Amostra da versão submetida à avaliação

sm

GERAÇÃO
ALPHA

Matemática 7

Ensino Fundamental | Anos finais | 7º ano
Componente curricular: Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

Carlos N. C. de Oliveira
Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática
e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP).
Especialista em Educação Matemática pelo
Centro Universitário Fundação Santo André (FSA).
Mestre em Educação Matemática pela
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).
Professor e coordenador de ensino de Matemática.

Felipe Fugita
Licenciado em Matemática pelo IME-USP.
Professor de Matemática.

Editora responsável: Isabella Semaan
Bacharela em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal do ABC (UFABC).
Editora e elaboradora de conteúdo para materiais didáticos.

Organizadora: SM Educação
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação.

São Paulo, 4ª edição, 2022

***Geração Alpha* Matemática 7**
© SM Educação
Todos os direitos reservados

Direção editorial Cláudia Carvalho Neves
Gerência editorial Lia Monguilhott Bezerra
Gerência de *design* e produção André Monteiro

Edição executiva Isabella Semaan
Edição: Cármen Matricardi, Carolina Maria Toledo, Cristiano Oliveira da Conceição, Diana Maia, Eduardo Chavante, Luana Fernandes de Souza
Suporte editorial: Fernanda de Araújo Fortunato

Coordenação de preparação e revisão Cláudia Rodrigues do Espírito Santo
Preparação: Ana Paula Perestrelo, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares
Revisão: Ana Paula Perestrelo, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares, Renata Tavares
Apoio de equipe: Maria Clara Loureiro

Coordenação de *design* Gilciane Munhoz
***Design*:** Carla Almeida Freire, Tiago Stéfano, Victor Malta (Interação)

Coordenação de arte Andressa Fiorio
Edição de arte: Vitor Trevelin
Assistência de arte: Viviane Ayumi Yonamine
Assistência de produção: Júlia Stacciarini Teixeira

Coordenação de iconografia Josiane Laurentino
Pesquisa iconográfica: Camila D'Angelo, Fabio Matsuura
Tratamento de imagem: Marcelo Casaro

Capa João Brito/Gilciane Munhoz
Ilustração da capa: Denis Freitas

Projeto gráfico Rafael Vianna Leal
Pré-impressão Américo Jesus
Fabricação Alexander Maeda
Impressão

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Oliveira, Carlos N. C. de
Geração alpha matemática : 7º ano : ensino fundamental : anos finais / Carlos N. C. de Oliveira, Felipe Fugita ; editora responsável Isabella Semaan ; organizadora SM Educação ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação. — 4. ed. — São Paulo : Edições SM, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-65-5744-755-0 (aluno)
ISBN 978-65-5744-756-7 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Fugita, Felipe. II. Semaan, Isabella. III. Título.

22-111781 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

4ª edição, 2022

SM Educação
Avenida Paulista, 1842 – 18º andar, cj. 185, 186 e 187 – Condomínio Cetenco Plaza
Bela Vista 01310-945 São Paulo SP Brasil
Tel. 11 2111-7400
atendimento@grupo-sm.com
www.grupo-sm.com/br

MANUAL DO PROFESSOR

Prezado professor,

O mundo contemporâneo apresenta muitos desafios para quem discute e pratica educação. Estamos cercados de informações e de situações que requerem estratégias e ferramentas diferentes das que eram usadas há algumas décadas. Como podemos olhar criticamente para a sociedade em que vivemos e ensinar nossos estudantes a enfrentar as demandas cotidianas, a solucionar problemas e a tomar decisões?

A reflexão sobre essas questões nos faz perceber que educar, nos dias de hoje, exige um empenho voltado para a formação de estudantes que não fique restrita ao consumo de informações do mundo contemporâneo, mas que os leve a serem capazes de interpretar a realidade, articulando os conhecimentos construídos às habilidades de investigação e aos valores de convivência com a diversidade, com o espaço e com a natureza.

Esperamos que esta coleção seja de grande apoio nessa tarefa e que, assim, possamos participar da construção de um mundo mais justo e solidário para todos.

Bom trabalho!

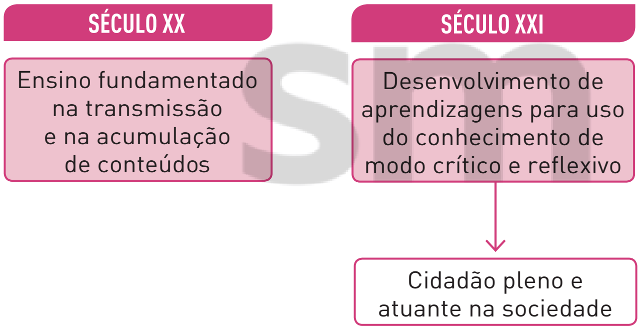
Equipe editorial

Sumário

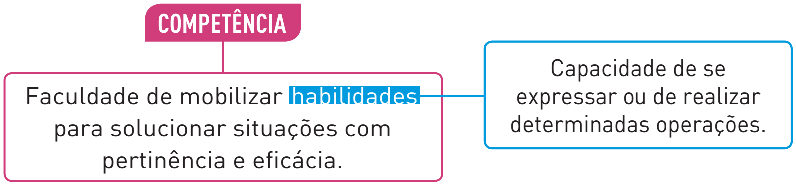
A ESCOLA NO SÉCULO XXI – EDUCAÇÃO PARA COMPETÊNCIAS

Já há algumas décadas, vêm perdendo espaço os modelos tradicionais de aprendizagem, nos quais o ensino é baseado na figura do professor como detentor do conhecimento e responsável por transmiti-lo aos estudantes, que, por sua vez, devem memorizá-lo. No decorrer do século XX, pesquisadores do campo da educação, fundamentando-se nos estudos da psicologia do desenvolvimento e da aprendizagem, passaram a defender outros modos de ensinar e de aprender, com base nas atitudes do estudante e no contexto em que está inserido. Essas novas ideias ganharam força não apenas porque propõem um ensino mais motivador, mas também porque defendem que, para haver aprendizagem real, é necessário que o estudante esteja envolvido no processo, estabelecendo relações que vão resultar no próprio conhecimento. Em suma, **o estudante deve ser o sujeito da aprendizagem**.

Esses pesquisadores colocaram aos profissionais da educação o desafio de mudar a maneira de ensinar, e de fato alguns avanços vêm ocorrendo desde então. No entanto, as transformações deste século impõem ações mais assertivas na busca por uma educação mais eficiente. O início do século XXI tem sido marcado por inovações em diferentes âmbitos, e as mudanças ocasionadas na tecnologia da informação e da comunicação têm alterado os modos de usufruir e de compartilhar conteúdos, já que uma parte expressiva do conhecimento produzido pelos seres humanos está atualmente disponível na internet. Essa facilidade de acesso a qualquer tipo de informação traz novos desafios à educação formal. O ensino do início do século passado, fundamentado na transmissão e na acumulação de conteúdos, não atende às demandas contemporâneas. A escola hoje deve auxiliar o estudante a desenvolver aprendizagens para usar de modo crítico e reflexivo seu conhecimento tecnológico e as informações a que tem acesso, para que se torne um cidadão pleno e atuante na sociedade do século XXI.



Nesse contexto, as noções de habilidade e de competência vêm sendo amplamente debatidas na educação. De acordo com Perrenoud (1999), podemos considerar que habilidade é a capacidade de se expressar verbalmente ou de realizar determinadas operações matemáticas, por exemplo. Competência, porém, é a faculdade de mobilizar um conjunto de saberes, de capacidades, de informações, etc. – ou seja, de habilidades – para solucionar com pertinência e eficácia uma série de situações. Assim, a habilidade de realizar operações matemáticas e a habilidade de se expressar verbalmente podem ser usadas em conjunto, por exemplo, para negociar com os colegas e solucionar um problema de orçamento.



A construção de uma competência é própria de cada indivíduo e se realiza nos momentos em que ele é capaz de mobilizar conhecimentos prévios e ajustá-los a determinada situação. Em síntese, “a competência é agir com eficiência, utilizando com propriedade conhecimentos e valores na ação que desenvolve e agindo com a mesma propriedade em situações diversas” (Cruz, 2001, p. 31). A educação do século XXI deve se voltar ao desafio de proporcionar ao estudante o desenvolvimento de certas habilidades e competências, ou seja, deve formar pessoas que:

- dominem a escrita e a leitura;
- consigam se comunicar com clareza;
- saibam buscar informações e consigam utilizá-las com propriedade para elaborar argumentos e tomar decisões;
- sejam capazes de trabalhar em equipe, de construir um olhar crítico sobre a sociedade, de criar soluções para os problemas e, principalmente, de avaliar a própria aprendizagem.

Ao professor, cabe uma mudança de metodologia para auxiliar os estudantes a desenvolver habilidades e competências. Na sociedade da informação, mais do que ensinar conceitos, a escola e o professor devem proporcionar situações que permitam ao estudante explorar diferentes universos e aplicar os saberes construídos para atuar com eficiência em sua vida pessoal, comunitária e, futuramente, profissional.

O professor converte-se, então, em facilitador ou mediador da aprendizagem, e não na fonte única e exclusiva de conhecimentos que devem ser memorizados. Nesse cenário, torna-se muito mais importante valorizar: a investigação como processo de aprendizagem, em vez da transmissão de conceitos; o estudante como protagonista de seu processo de aprendizagem, em vez do professor como figura central desse processo; e o desenvolvimento de diversas habilidades cognitivas, em vez da rápida memorização dos conteúdos.

É preciso, portanto, que o professor tenha consciência do papel que ocupa no processo de ensino-aprendizagem e assuma sua responsabilidade quanto a isso. Machado (2004) defende que, nesse ponto, não há simetria entre estudante e professor, e o profissional é o professor. Como participantes de um processo de mão dupla, ainda que não necessariamente simétrico, professores e estudantes ocupam, cada um a seu modo, o centro de um destes dois espaços privilegiados: o ensino e a aprendizagem, respectivamente.

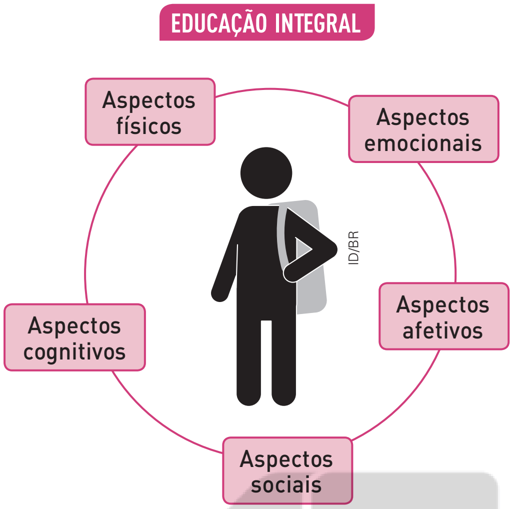
Dessa maneira, até mesmo professores especialistas podem diversificar as ferramentas de ensino de seu componente curricular para trabalhar habilidades e competências. Em atividades específicas, pode-se apresentar diferentes situações-problema ao estudante com o objetivo de trabalhar conjuntamente uma série de habilidades e competências. Assim, ele pode desempenhar um papel mais ativo na construção do próprio conhecimento, tornando-se capaz de realizar aprendizagens significativas. O estudante também pode ter mais oportunidades de refletir sobre o próprio aprendizado ao realizar uma constante autoavaliação de suas resoluções e procedimentos, de modo que esteja sempre os aprimorando. Consequentemente, ele pode situar-se criticamente e de forma autônoma na sociedade.

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) teve sua formulação coordenada pelo Ministério da Educação, com ampla consulta à comunidade educacional e à sociedade. Trata-se de um documento que define as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica, em conformidade com o Plano Nacional de Educação (PNE).

A BNCC está orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, conforme determinam as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN).

Denomina-se **educação integral** a formação voltada ao desenvolvimento humano global, integrando a dimensão intelectual cognitiva e a dimensão afetiva, segundo o processo complexo e não linear do desenvolvimento da criança, do adolescente e do jovem, em um ambiente de aprendizagem e de democracia inclusiva, afirmada nas práticas de não discriminação, de não preconceito e de respeito às diversidades.

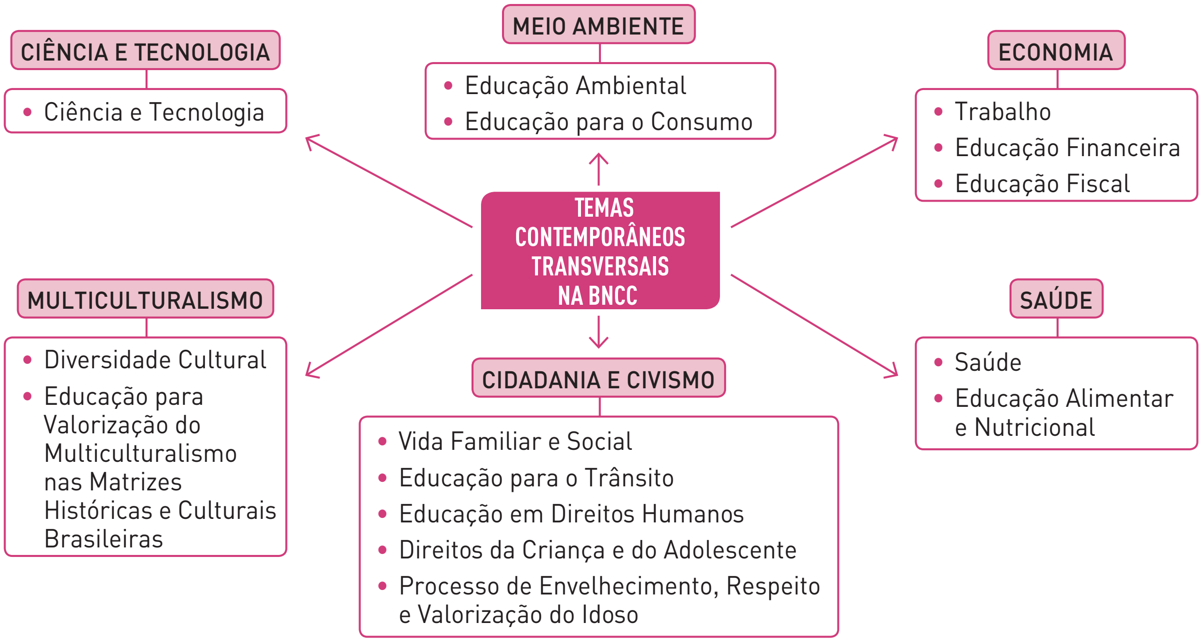


ID/BR

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS

Em consonância com o propósito de promover uma aprendizagem mais significativa aos estudantes e o engajamento deles com as situações de aprendizagem, vem se consolidando nas últimas décadas a necessidade da inclusão de questões sociais e de situações próprias da realidade dos discentes como objeto de reflexão e aprendizagem. Nessa perspectiva, cabe aos sistemas e às redes de ensino incluir em seus currículos “temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora” (Brasil, 2018a, p. 19), ou seja, os chamados Temas Contemporâneos Transversais (TCTs).

Os TCTs não fazem parte de uma área de conhecimento específica, mas perpassam todas elas, e estabelecem ligações entre diferentes componentes curriculares. A BNCC organiza esses temas em seis macroáreas: Meio Ambiente, Economia, Saúde, Cidadania e Civismo, Multiculturalismo, e Ciência e Tecnologia. Cada uma dessas áreas pode ser dividida nos temas indicados no esquema a seguir.



TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS NA BNCC

CIÊNCIA E TECNOLOGIA
- Ciência e Tecnologia

MEIO AMBIENTE
- Educação Ambiental
- Educação para o Consumo

ECONOMIA
- Trabalho
- Educação Financeira
- Educação Fiscal

MULTICULTURALISMO
- Diversidade Cultural
- Educação para Valorização do Multiculturalismo nas Matrizes Históricas e Culturais Brasileiras

CIDADANIA E CIVISMO
- Vida Familiar e Social
- Educação para o Trânsito
- Educação em Direitos Humanos
- Direitos da Criança e do Adolescente
- Processo de Envelhecimento, Respeito e Valorização do Idoso

SAÚDE
- Saúde
- Educação Alimentar e Nutricional

Nesta coleção, a abordagem de um Tema Contemporâneo Transversal baseia-se na problematização da realidade e das situações de aprendizagem, na integração das habilidades e competências curriculares em sua articulação com a resolução de problemas, e na visão do conhecimento como uma construção coletiva.

AS COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

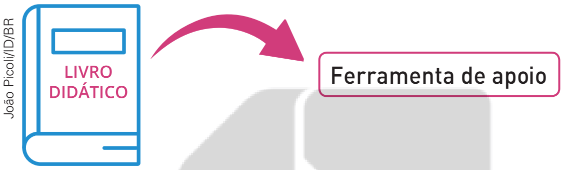
A BNCC propõe que, ao longo da Educação Básica, o aprendizado deve concorrer para que o estudante desenvolva as dez competências gerais, a saber:

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
> 3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
> 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
> 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
> 8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
> 9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
> 10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.
>
> (Brasil, 2018a, p. 9-10)

A determinação dessas competências pela BNCC, em consonância com o que foi apresentado anteriormente, evidencia a proposta de um ensino com foco na capacidade de aprender a aprender, de saber lidar com a disponibilidade cada vez maior de informações, de atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, de aplicar conhecimentos para resolver problemas, de ter autonomia para tomar decisões, de ser proativo para identificar os dados em uma situação e buscar soluções e de conviver em harmonia com as diversidades.

A BNCC explicita as aprendizagens essenciais a serem desenvolvidas em cada componente curricular sem fixar currículos, mas incentivando especialmente a contextualização do que se aprende e o protagonismo do estudante. Essa abordagem possibilita maior equidade educacional, pois busca assegurar que todos – sem distinção de raça, gênero ou condição socioeconômica – tenham acesso à educação.

O desafio atual é compreender o conjunto de propostas da BNCC e colocá-lo em prática na realidade de cada escola. Nesse sentido, o livro didático pode ser uma ferramenta de apoio às redes de ensino e aos professores, que devem ter em mente que esse material não impõe um currículo nem deve ser encarado como única fonte de informação e conhecimento.



João Picoli/ID/BR

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS E HABILIDADES DE MATEMÁTICA

A Matemática é fundamental em nossa sociedade, sobretudo como recurso para lidar com diversas situações do cotidiano. Trata-se de uma ferramenta básica para o desenvolvimento de várias habilidades e competências e para a compreensão e o aprendizado de outras áreas do conhecimento. É também parte integrante da cultura científica e da tecnológica, apresentando-se como uma ciência com características próprias de investigação e linguagem.

Desse modo, é necessário que, como componente curricular, a **Matemática seja percebida como um instrumento de análise e compreensão da realidade que favorece a tomada de decisão diante de situações-problema do dia a dia**. Se a realidade requer habilidades matemáticas, também é fato que a escola é um local privilegiado para que elas se desenvolvam, pois no ambiente escolar os indivíduos podem exercitar diferentes situações de análise, discussão e prática dos conhecimentos formais. Além de desenvolver as habilidades e o senso crítico, na atividade escolar os estudantes podem participar de diversas ações de cooperação, solidariedade e respeito às normas e às diferenças culturais e sociais, que são oportunidades para o exercício da ética e da cidadania consciente. O aprimoramento dessas habilidades pode ocorrer ainda pelo contato crítico dos estudantes com a realidade interpretada: por notícias de jornal, televisão e outras mídias; por filmes e séries de televisão; por textos de publicidade e propaganda; pelo uso da internet e pela participação em redes sociais; e pela leitura variada de textos, como receitas, histórias em quadrinhos, livros de literatura, etc.

Desde o início do contato formal dos estudantes com a Matemática, é importante levá-los a perceber que esse componente curricular, ensinado e aprendido em sala de aula, está presente nas mais diversas situações da vida social (por exemplo, nas relações comerciais cotidianas e no orçamento doméstico) e da cultura (como na arquitetura, nas artes plásticas, na literatura e nos esportes). Em geral, a simples aproximação do conhecimento a situações cotidianas não é suficiente para estabelecer conexões entre o conhecimento empírico – adquirido na prática – e o conhecimento científico. No entanto, apesar de tal contextualização não ser capaz de transformar propriamente o conhecimento empírico em científico, ela permite explorar certas contradições e limitações de ambos os saberes, de modo a incentivar os estudantes a refletir sobre seus conhecimentos prévios.

Não há exagero em afirmar que, durante o processo de ensino e aprendizagem, o professor e o estudante estabelecem uma relação de cumplicidade. O papel do educador é de fundamental importância, já que suas atitudes são sempre observadas e avaliadas pela turma.

Ao estabelecer conexões entre o conhecimento prévio dos estudantes e o novo conhecimento, é possível desenvolver uma aprendizagem significativa e duradoura, capaz de permitir aos estudantes que apliquem seus conhecimentos nas mais diversas situações da vida escolar e cotidiana.

> [...]
>
> A vinda da criança para a instituição tem um objetivo claro e determinado: aprender determinados conhecimentos e, para tanto, dominar instrumentos específicos que lhe possibilitem esta aprendizagem.
>
> A relação da criança com o adulto, na escola, é mediada, então, pelo conhecimento formal. O professor detém o conhecimento formal que o educando deverá adquirir e a interação entre ambos deve ser tal que permita e promova a aprendizagem deste conhecimento. Desta forma, podemos dizer que a ação do professor é uma ação específica e apresenta, portanto, características que a distinguem da ação dos outros adultos com quem a criança convive.
>
> A ação pedagógica implica, portanto, numa relação especial em que o conhecimento é construído. Para tanto, exige do adulto uma ação adequada às possibilidades de desenvolvimento e aprendizagem de seus educandos. Esta relação não pode ser reduzida a uma atitude autoritária de quem detém o conhecimento e o transmite. Deve ser, antes, a atitude criativa de quem detém o conhecimento formal e possibilita a formulação deste conhecimento pelo aluno.
>
> (Lima, 2003, p. 21)

Corroborando essas ideias, a BNCC dá ênfase ao letramento e aos processos matemáticos, como podemos ver a seguir.

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**[1], definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição).
>
> [...] Os **processos matemáticos** de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional.
>
> (Brasil, 2018a, p. 266)

---

[1] Segundo a Matriz do Pisa 2012, o “letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.”. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 9 jun. 2022.

Com isso, deve-se garantir que os estudantes desenvolvam as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

(Brasil, 2018a, p. 267)

Em síntese, realizar descobertas, elaborar conhecimentos e aprimorar e ampliar estratégias são atividades que incentivam no estudante o desenvolvimento de competências cognitivas e a autonomia, bem como o aprimoramento de suas maneiras de expressão e comunicação, o que, em geral, contribui para um melhor relacionamento interpessoal.

ESTRATÉGIAS E ABORDAGENS

AS INTERAÇÕES DISCIPLINARES NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Uma das características marcantes de nosso sistema de ensino é a fragmentação do conhecimento. Transferimos para as salas de aula uma divisão do saber em componentes curriculares, característica do modo de trabalho acadêmico. Para Lopes (2008, p. 54):

> O entendimento do que vem a ser uma disciplina é particularmente calcado na compreensão epistemológica de uma disciplina científica: uma forma específica de organizar e delimitar um território de pesquisa, que redunda em um conjunto específico de conhecimentos com características comuns – tanto do ponto de vista de sua produção teórico-metodológica quanto do ponto de vista de sua transmissão no ensino e na divulgação.

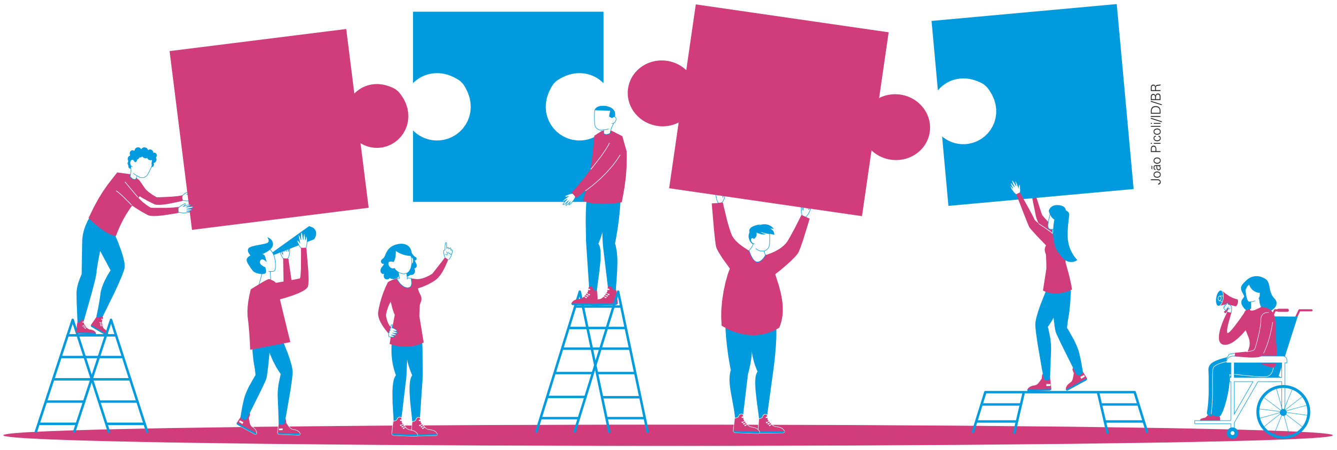
Os críticos à compartimentalização do conhecimento argumentam que o espelhamento entre os componentes curriculares acadêmicos e os componentes curriculares escolares não são compatíveis com os objetivos da educação atual, para a qual uma das grandes metas é que o estudante adquira uma visão global e torne-se um cidadão capaz de avaliar e resolver problemas, atuando criticamente na sociedade.

Vemo-nos, então, em um dilema. Se acreditamos que a Matemática tem uma maneira própria de abordar questões e de construir conhecimento sobre o mundo, reconhecemos o caráter único desse componente curricular e focamos em colaborar para que os estudantes compreendam seus eixos estruturantes.

Ainda assim, devemos perceber que apresentar aos estudantes essa visão fragmentada do conhecimento não contribui para uma visão de mundo global, para o reconhecimento de problemas e sua análise crítica. Desse modo, a aprendizagem de Matemática se reduziria a fragmentos ou detalhes, cada vez mais específicos, descontextualizados, que tenderiam, portanto, a não apresentar um significado para os estudantes.

Sem ter a visão do todo ou sem estar ao menos ciente de que há um todo, fica praticamente impossível a um aprendiz unir as peças e remontar, pelo menos em parte, o quebra-cabeça que as diversas ciências vêm compondo sobre o mundo. É óbvio, portanto, que a visão fragmentada do mundo e, em especial, a fragmentação no processo de ensino e aprendizagem precisam ser superadas. No entanto, como fazê-lo?

É certo que não temos respostas simples e que revolucionem a tradição do ensino compartimentado. Porém, o trabalho interdisciplinar e transdisciplinar, a inclusão de Temas Contemporâneos Transversais e a realização de projetos interáreas e intra-áreas do conhecimento nos fazem avançar nesse sentido.



João Picoli/ID/BR

Tais estratégias são válidas e permitem ganhos expressivos em eficácia na aprendizagem. Há em Matemática, por exemplo, noções e conceitos-chave que permeiam os muitos componentes curriculares. A seleção e a eleição dessas noções ou conceitos centrais como foco de trabalho interdisciplinar podem ser muito instigantes.

As ideias de operações numéricas e de transformação entre as unidades de medida, por exemplo, estão presentes e são relevantes em diversas áreas científicas, da Física à História, da Geologia à Geografia, passando pela Química e pela Biologia. Essas noções de natureza interdisciplinar podem, portanto, ser uma motivação especial para a abordagem da Matemática.

Os Temas Contemporâneos Transversais, por sua vez, representam o viés social que também se deseja no ensino. O trabalho com os temas propostos na BNCC, por exemplo, contribui de maneira significativa para a compreensão de questões consideradas de urgência social e de interesse da sociedade, de modo geral, ou que representem interesses locais vinculados diretamente à realidade ou a aspectos da vida social.

Vale lembrar que, quando se trata de relações entre componentes, o objetivo principal é combinar análise e síntese. A análise é necessária como procedimento e como habilidade cognitiva a ser desenvolvida pelos estudantes. A síntese reunifica os fatos e permite uma visão mais abrangente da situação que está sendo estudada. Assim, o trabalho conjunto e a aproximação com outros componentes curriculares, como História, Ciências e Arte, também devem ser vistos como estratégias que potencializam a aprendizagem da Matemática.

RELAÇÕES ENTRE COMPONENTES CURRICULARES

ANÁLISE
Procedimento e habilidade cognitiva a ser desenvolvida pelos estudantes.

+

SÍNTESE
Reunifica os fatos e possibilita uma visão mais abrangente da situação estudada.

=

ESTRATÉGIAS QUE POTENCIALIZAM A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA.

METODOLOGIAS ATIVAS

As demandas da sociedade atual exigem que a escola altere o modo como orienta a construção de conhecimentos, já que os estudantes hoje são rodeados de tecnologias e ferramentas digitais que lhes permitem acessar informações de forma rápida – não cabendo, portanto, que sejam meros receptores de conteúdo.

Nesse sentido, a expressão “metodologias ativas” vem sendo bastante usada no meio educacional, tanto para tratar de abordagens que tornem as aulas experiências significativas de aprendizagem quanto para se referir a estratégias de ensino que privilegiam o estudante como autor do próprio aprendizado, em oposição ao uso exclusivo de abordagens tradicionais, que se valem somente da exposição de conteúdo.

O contexto contemporâneo propicia o uso dessas metodologias, pois vivemos um momento em que se combinam a disponibilidade das tecnologias de informação e de comunicação com as demandas de transformação da sociedade.

> A metodologia ativa se caracteriza pela inter-relação entre educação, cultura, sociedade, política e escola, sendo desenvolvida por meio de métodos ativos e criativos, centrados na atividade do aluno com a intenção de propiciar a aprendizagem.

(Almeida *in* Bacich; Moran, 2018, p. XI)

As metodologias ativas são estratégias de ensino que indicam novos caminhos para as práticas pedagógicas. Visam deixar as aulas mais interessantes e dinâmicas e possibilitar maior autonomia aos estudantes, valorizando suas opiniões, reflexões, conhecimentos prévios e experiências, de modo a torná-los mais preparados para atuar na vida em sociedade.

Ao se engajarem nas propostas de aprendizagem, os estudantes passam a ocupar o centro desse processo e, assim, podem ter iniciativa, debater, tomar decisões, resolver problemas, realizar experimentos, questionar e testar, colaborar em equipe, gerenciar projetos e coordenar tempos pessoais e coletivos, adquirindo habilidades e competências que transbordam os limites da vida escolar, o que lhes propicia experiências significativas e geradoras de novas práticas em direção ao conhecimento.

METODOLOGIAS ATIVAS →

- Participação efetiva dos estudantes na construção da aprendizagem
- Aulas mais interessantes e dinâmicas
- Maior autonomia dos estudantes
- Valorização de opiniões, reflexões, conhecimentos prévios e experiências
- Preparação para atuar na vida em sociedade

Como sugere Moran (2018), a aprendizagem por meio de questionamento e experimentação é mais desafiadora e, por sua vez, motivadora para os estudantes, pois torna o conhecimento mais prático, flexível, interligado e híbrido.

> [...] envolve pesquisar, avaliar situações e pontos de vista diferentes, fazer escolhas, assumir riscos, aprender pela descoberta e caminhar do simples para o complexo. Os desafios bem planejados contribuem para mobilizar as competências desejadas, sejam intelectuais, emocionais, pessoais e comunicacionais.
>
> (Moran, 2018, p. 15)

Logo, é fundamental incentivar as potencialidades individuais, como a criatividade, o foco e a sensibilidade, contribuindo para que os estudantes desenvolvam seu potencial. Diante disso, esta coleção propicia a utilização de metodologias ativas, com as seguintes propostas:

- atividades desafiadoras;
- produções que combinam percursos pessoais com participação significativa dos grupos;
- trabalhos colaborativos, com foco em pesquisa e investigação a partir de uma situação-problema;
- criação de eventos;
- utilização de tecnologias adequadas para a realização dessas práticas.

Para viabilizar a condução dessas propostas, a obra oferece uma variedade de estratégias didáticas, como discussão em grupo, trabalho em equipe com distribuição de tarefas, debate sobre temas atuais e execução de projetos.

Na seção *Investigar* há exemplos mais evidentes de como as metodologias ativas são aplicadas na obra, pois os estudantes partem de uma situação a ser investigada por eles com base em procedimentos de coleta, organização e análise de dados. Os resultados obtidos são, então, divulgados à comunidade escolar, de acordo com o propósito da pesquisa. Neste volume, após a unidade 4, a proposta dessa seção é investigar quais arquitetos têm o estilo marcado pelo destaque dado às formas e pelo uso de figuras geométricas em seus projetos, e após a unidade 8 a seção propõe uma pesquisa de campo com a utilização de questionário. Outro exemplo evidente de trabalho com metodologias ativas ocorre na seção *Interação*, em que os estudantes são convidados a desenvolver um projeto de pesquisa sobre reciclagem.

ARGUMENTAÇÃO

Uma educação voltada à formação de sujeitos críticos, conscientes, questionadores e que agem orientados por princípios éticos e democráticos propicia o desenvolvimento da **competência argumentativa** dos estudantes. Essa competência lhes possibilita reconhecer sensos comuns, separar fatos de opiniões, analisar premissas e pressupostos


João Picoli/ID/BR

e avaliar argumentos de autoridades para formar opiniões próprias com base em critérios objetivos. Além disso, favorece a participação atuante na sociedade ao oferecer subsídios para que os estudantes exponham suas ideias e seus conhecimentos com clareza, organização e respeito aos direitos humanos. Como explica Fiorin (2016), a vida em sociedade

> [...] trouxe para os seres humanos um aprendizado extremamente importante: não se poderiam resolver todas as questões pela força, era preciso usar a palavra para persuadir os outros a fazer alguma coisa. Por isso, o aparecimento da argumentação está ligado à vida em sociedade e, principalmente, ao surgimento das primeiras democracias. No contexto em que os cidadãos eram chamados a resolver as questões da cidade é que surgem também os primeiros tratados de argumentação. Eles ensinam a arte da persuasão.
>
> Todo discurso tem uma dimensão argumentativa. Alguns se apresentam como explicitamente argumentativos (por exemplo, o discurso político, o discurso publicitário), enquanto outros não se apresentam como tal (por exemplo, o discurso didático, o discurso romanesco, o discurso lírico). No entanto, todos são argumentativos: de um lado, porque o modo de funcionamento real do discurso é o dialogismo; de outro, porque sempre o enunciador pretende que suas posições sejam acolhidas, que ele mesmo seja aceito, que o enunciatário faça dele uma boa imagem. Se, como ensinava Bakhtin, o dialogismo preside à construção de todo discurso, então um discurso será uma voz nesse diálogo discursivo incessante que é a história. Um discurso pode concordar com outro ou discordar de outro. Se a sociedade é dividida em grupos sociais, com interesses divergentes, então os discursos são sempre o espaço privilegiado de luta entre vozes sociais, o que significa que são precipuamente o lugar da contradição, ou seja, da argumentação, pois a base de toda a dialética é a exposição de uma tese e sua refutação.
>
> (Fiorin, 2016, p. 9)

É fundamental, portanto, que os estudantes desenvolvam o raciocínio lógico e construam argumentos bem embasados, de modo que estejam aptos a defender seus posicionamentos e a negociar com seus interlocutores para, junto a eles, tomar as melhores decisões. Por essa razão, nesta obra, além do trabalho com foco no reconhecimento, na apreensão e no uso de estratégias argumentativas por meio da análise e da produção de textos dessa natureza, há diversas oportunidades em que se incentivam discussões sobre temas relevantes. Por exemplo, antes e depois da realização de atividades propostas, os estudantes são convidados a expor suas opiniões, seus conhecimentos prévios e suas impressões gerais sobre as estratégias utilizadas na resolução de um problema. A argumentação se apresenta por meio de atividades discursivas orais ou escritas. Em algumas atividades há momentos reservados à discussão e ao posicionamento sobre um tema. Já nas atividades propostas nas seções especiais há o incentivo à pesquisa e à análise de dados, o que, por conseguinte, requer discussão em grupo para avaliação das fontes e dos dados obtidos.

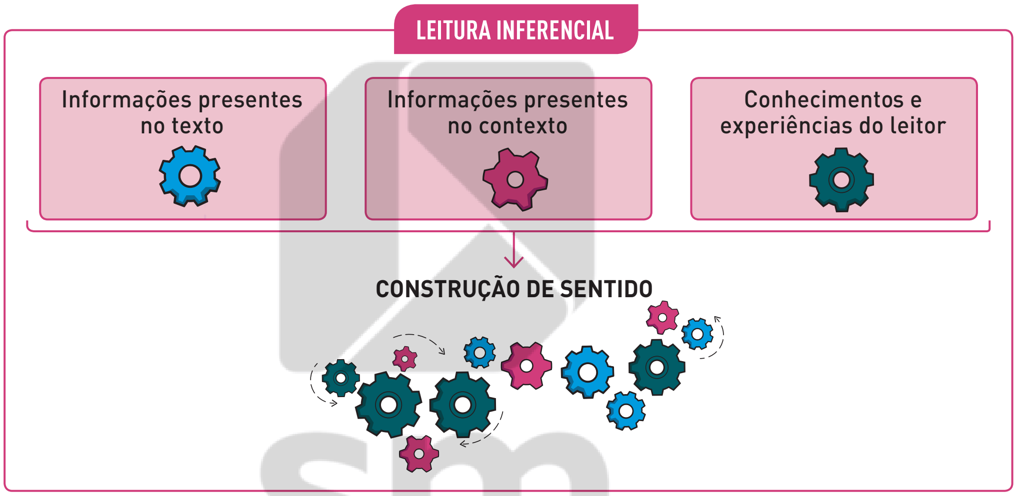
Assim, esta coleção contribui para que os estudantes desenvolvam a competência argumentativa de forma sistemática e orgânica, garantindo respeito à pluralidade de ideias e ao lugar de fala dos jovens e favorecendo, sobretudo, o desenvolvimento da competência geral 7 da BNCC.

LEITURA INFERENCIAL

O processo inferencial permite a organização dos sentidos elaborados pelo leitor em sua interação com o texto. A capacidade de realizar uma leitura em níveis inferenciais é uma característica essencial para a compreensão da linguagem, pois, da mesma maneira que o leitor memoriza as informações óbvias no texto, ele absorve as informações inferidas. Desse modo, compreender a linguagem é entender as relações entre o que está explícito no texto e aquilo que o leitor pensa, conclui e infere por conta própria, com base em seu conhecimento de mundo e em suas experiências de vida. Fazer inferências possibilita ao leitor, com base em informações presentes no texto, refletir e gerar novos conhecimentos, os quais passam então a fazer parte do conjunto de saberes desse leitor.

A inferência é um processo cognitivo que vai além da leitura e passa pelo entendimento ou pela suposição de algo desconhecido, fundamentado na observação e no repertório cultural do leitor. Trata-se, então, da conclusão de um raciocínio ou do levantamento de um indício com base no estabelecimento de relações.

A compreensão de um texto depende da qualidade e da quantidade de inferências geradas durante a leitura, visto que os textos contêm informações explícitas e implícitas, deixando lacunas a serem preenchidas pelo leitor. Ao associar informações explícitas a seus conhecimentos prévios, o estudante dá sentido ao conteúdo do texto e apreende detalhes e sequências, bem como as relações de causa e efeito. Portanto, a inferência ocorre com a interação do leitor com o texto, ou seja, por meio da leitura. As capacidades de concluir, deduzir, levantar hipóteses, ressignificar informações e formular novos sentidos são essenciais para a atuação consciente e responsável do estudante na sociedade, pois assim ele estará preparado para entender contextos históricos, compreender disputas políticas ou mesmo projetar soluções para problemas reais e cotidianos. Ao gerar uma nova informação partindo de uma anterior, já dada, o estudante desenvolve sua capacidade de reconhecer os diversos pontos de uma situação e de propor resoluções factíveis que beneficiem a maioria dos envolvidos.



João Picoli/ID/BR

Nesta coleção, o exercício da leitura inferencial é realizado de diversas formas, tanto na abordagem dos conteúdos como na execução das atividades. Por exemplo, em muitos momentos há perguntas que motivam o estudante a antecipar informações e a verificar se suas hipóteses são plausíveis, instigando-o a acessar seus conhecimentos prévios nesse processo. Com isso, pode-se levar o estudante a explicar o que está implícito em um texto, a preencher lacunas de informação com base em dados já fornecidos e a excluir ou confirmar hipóteses levantadas durante a leitura.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Costuma-se imaginar que o pensamento computacional diz respeito a saber navegar na internet, utilizar as redes sociais, enviar *e-mails* ou usar ferramentas digitais para elaborar um texto ou resolver uma equação, porém o conceito de pensamento computacional está relacionado, na verdade, a estratégias voltadas a solucionar problemas de maneira eficaz.

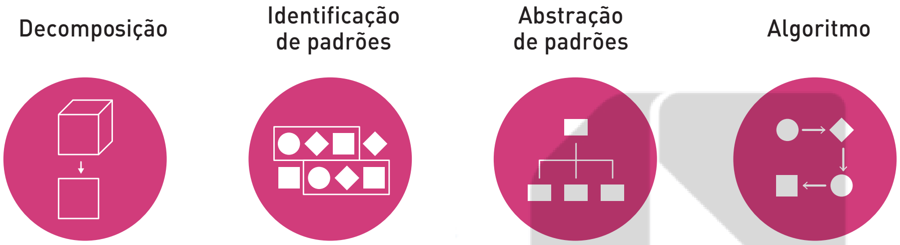
> O Pensamento Computacional é uma distinta capacidade criativa, crítica e estratégica humana de saber utilizar os fundamentos da Computação, nas mais diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de identificar e resolver problemas, de maneira individual ou colaborativa, através de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente.

(Kurshan, 2016 *apud* Brackmann, 2017, p. 29)

Essa estratégia de ensino e aprendizagem está próxima do pensamento analítico, que – assim como a Matemática, a Engenharia e a Ciência – busca, entre outras questões, aprimorar a proposição de soluções para problemas. De acordo com a BNCC, o pensamento computacional:

> [...] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos.
>
> (Brasil, 2018a, p. 474)

Em síntese, o pensamento computacional pode ser entendido como uma habilidade para identificar e resolver problemas em que a solução proposta pode ser executada por meio de um computador. Para que isso aconteça, podem-se utilizar conceitos e práticas comuns à computação, mas não restritos a ela, como a simplificação de situações-problema com base na identificação de seus elementos essenciais e na similaridade com contextos anteriores (também definida como abstração), a decomposição de problemas em partes menores e a definição de sequências de ações para a realização e a automação de tarefas (Grover; Pea, 2013).



João Picoli/ID/BR

De maneira geral, o pensamento computacional pode ser organizado em quatro etapas: decomposição, identificação de padrões, abstração de padrões e algoritmo.

Atividades direcionadas podem desenvolver algumas formas de pensar próprias, marcadas pelo pensamento algorítmico, como a linguagem específica da tecnologia computacional para descrever processos regrados por etapas bem definidas. Entre esses recursos de linguagem estão os fluxogramas e os algoritmos destacados nas habilidades da BNCC para descrever o processo de resolução de problemas.

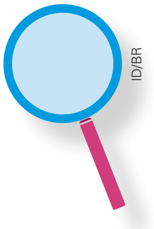
Nesse sentido, a problematização favorece diferentes maneiras de pensar, compreender e analisar um mesmo problema, colaborando para o desenvolvimento das seguintes habilidades que compõem o pensamento computacional:

- formulação de problemas;
- análise de dados de forma lógica e organizada;
- representação da realidade por meio de abstrações;
- proposição de soluções por meio de identificação e análise crítica dos problemas;
- transferência da solução encontrada para resolver problemas análogos.

Compreendendo a lógica que aproxima a resolução de problemas ao pensamento computacional, as atividades propostas aos estudantes nesta coleção podem contribuir para o desenvolvimento de competências fundamentais no século XXI, como produzir algo por meio da abstração, raciocinar sobre a resolução de um problema e correlacionar estratégias utilizadas na computação com a Matemática e com outras áreas de conhecimento, permitindo que os estudantes trabalhem a criatividade e elaborem novas ideias.

Esta coleção propõe experiências didáticas para que o pensamento computacional possa integrar a formação dos estudantes, tornando-os aptos a intervir de forma cidadã no meio em que vivem. Como exemplo dessas práticas, temos as situações-problema em que os estudantes devem reconhecer padrões, identificando as características de problemas apresentados na seção *Resolvendo problemas* e definindo estratégias de resolução por meio das seguintes etapas: *Compreensão do problema*, *Resolução do problema* e *Reflexão sobre o problema*. Além disso, há o encadeamento de processos, como o de construção de gráficos estatísticos.

INVESTIGAÇÃO E PRÁTICAS DE PESQUISA


ID/BR

A proposição de questões ou problemas deve servir ao processo típico do pensar e do fazer científicos, que envolve a admiração e o questionamento dos estudantes diante de algo, a ponto de formularem hipóteses ou suposições e sentirem-se motivados a empreender uma investigação.

Portanto, a proposição de uma questão ou de um problema inicial é fundamental. Ela é o estopim do processo de pensar e agir cientificamente. Mas, tão importante quanto a problematização ou a geração de um conflito inicial é possibilitar meios para que os estudantes percorram o caminho investigativo que os levará à solução do problema e à aprendizagem de fato.

O que chamamos aqui de investigação ou de estratégias investigativas envolve grande variedade de atividades, como a realização de experimentos, as entrevistas e as pesquisas em livros e em multimeios. Assim, nas aulas de Matemática, investigação envolve todo o tipo de atividade acompanhada de situações problematizadoras que levem à busca ativa de dados ou informações – que, uma vez analisados e discutidos, conduzam à solução de um problema ou à geração de informações que evidenciem ou contradigam uma ou mais hipóteses ou suposições formuladas.

Na realidade, o que faz com que uma atividade seja considerada de investigação é a forma como ela é apresentada e conduzida pelo professor e o caráter que ela assume nesse processo de ensino e aprendizagem.

> A atividade investigativa é aquela que possibilita, sobretudo, a reflexão crítica e o engajamento ativo. Esse tipo de atividade exige que os estudantes mobilizem várias habilidades (reflexão, discussão, pesquisa, relatório, explicação, construção, etc.), demanda a tomada de atitudes e a expressão de valores (colaboração, respeito, organização, criatividade, etc.) e requer da parte deles o conhecimento de variados conteúdos de natureza conceitual (informações, fatos, dados, conceitos, vocabulário específico, teorias já estabelecidas, etc.).

Para resolver um problema, os estudantes deverão mobilizar diferentes habilidades cognitivas e processuais. Entre essas habilidades estão aquelas relacionadas ao pensamento científico: a observação, a formulação de hipóteses, o planejamento e a construção de modelos, a realização de testes e experimentos, a coleta, a sistematização e a análise de dados e informações, o estabelecimento de sínteses e relações e a comunicação de conclusões, entre outras.

Além disso, as atividades investigativas oferecem aos estudantes oportunidades de desenvolver habilidades relacionadas à linguagem na modalidade oral – como a construção de um discurso oral coerente para apresentar uma explicação, argumentar ou relatar um experimento – e na modalidade escrita – como nas situações de comunicação de resultados, seja em um relatório ou em um cartaz, por exemplo. Inclusive, deve ser incentivado o uso de outras linguagens, como a linguagem típica da Geografia na produção e leitura de mapas.

Percebe-se, desse modo, que a escolha e o planejamento de atividades investigativas são fundamentais em uma proposta de ensino de Matemática que vise ao desenvolvimento do pensar e do agir de maneira científica, sem no entanto negligenciar a aquisição de conteúdos conceituais.

Ademais, se conduzidas de maneira colaborativa e solidária, atividades investigativas favorecem a consolidação de valores e atitudes e exemplificam a construção do conhecimento científico. Ou seja, elas possibilitam também vivenciar e debater o caráter coletivo, social e cultural do conhecimento científico.

Os estudantes devem aprender a pesquisar durante a Educação Básica, e para isso se faz necessário ensinar o **comportamento do pesquisador**. Esse comportamento, por sua vez, está intimamente relacionado ao desenvolvimento da intelectualidade, que envolve as capacidades de analisar, comparar, refletir, levantar hipóteses, estabelecer relações e sintetizar, entre outras.

Assim, é preciso um planejamento para que a aprendizagem do **ato de pesquisar** seja desenvolvida, trazendo aos estudantes habilidades inerentes a esse processo. São elas:

- localizar, selecionar e compartilhar informações;
- ler, compreender e interpretar textos;
- consultar, de forma crítica, fontes de informações diferentes e confiáveis;
- formar e defender opiniões;
- argumentar de forma respeitosa;
- sintetizar;
- expor oralmente o aprendizado, apoiando-se em diferentes recursos;
- generalizar conhecimentos;
- produzir gêneros acadêmicos.

A própria história da Matemática é um recurso para tal aprendizado. De acordo com a BNCC:

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, é importante incluir a **história da Matemática** como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar **integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos**.
>
> (Brasil, 2018a, p. 298, grifos nossos)

De acordo com Oliveira V., Oliveira C. e Vaz (2014), a história da Matemática é considerada um instrumento de investigação das origens e descobertas, das notações matemáticas e dos métodos desenvolvidos ao longo do tempo. Além disso, esses autores destacam que a base

> […] do que hoje conhecemos como Matemática foi desenvolvida ao longo de muitos anos, desde os primórdios da sociedade organizada até a contemporaneidade. Reconhecer esse processo histórico é fundamental para compreender as origens das ideias que deram forma à cultura, e também observar os aspectos humanos de seu desenvolvimento, enxergar os homens que contribuíram nesse processo evolutivo da ciência, bem como as circunstâncias que as desenvolveram.
>
> (Oliveira; Oliveira; Vaz, 2014, p. 459)

Ao propor aos estudantes a realização de uma pesquisa, é fundamental compartilhar com eles por que a pesquisa está sendo realizada e a relação dessa proposta com os conteúdos desenvolvidos, além de outras informações que contextualizem e problematizem a atividade.

O trabalho com atividades investigativas e práticas de pesquisa também tem papel fundamental no combate às *fake news*. Nos últimos anos, a expressão “*fake news*” ganhou notoriedade e se tornou pauta em rodas de conversa na rua, nas redes sociais, em casa e, principalmente, na escola. Aqui, estamos considerando *fake news* as informações falsas e caluniosas cujo objetivo é prejudicar ou descredibilizar instituições ou pessoas que não estão de acordo com o pensamento ideológico, político ou social de seus divulgadores. A dificuldade em identificar notícias falsas afeta até mesmo a população de países com altos índices de escolaridade.

Nesse sentido, ao propor de maneira sistemática atividades de investigação e pesquisa, estamos contribuindo para a criação de uma cultura de questionamento. Sempre que possível, essas atividades estão acompanhadas de orientações que incentivam os estudantes a construir seu repertório crítico.

CULTURA DE QUESTIONAMENTO →

- As informações do título se confirmam na leitura do material?
- Quem é o autor/a autora?
- Em que veículo de comunicação o material está publicado?
- Qual é a data de publicação?
- As informações estão contextualizadas?
- Existem outras fontes que abordam esse tema? As informações convergem?

CULTURA JUVENIL

Até o início do século XX, as noções de adolescência e de juventude sequer existiam. Foi o psicólogo e educador G. Stanley Hall (1844-1924) que, em 1904, explorou esses conceitos. Antes, a infância findava quando a vida adulta começava – o que, em geral, se dava aos 18 anos de idade. O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA, 1990), principal documento brasileiro que descreve os direitos e os deveres de crianças e jovens, em seu art. 2º, considera criança "a pessoa até doze anos de idade incompletos, e adolescente aquela entre doze e dezoito anos de idade" (ECA, p. 15).

Ainda existem divergências quando o assunto é definir quando começa ou finda a infância, a adolescência e a juventude, mas acreditamos ser consenso que os anos finais do Ensino Fundamental são a fase latente de transição da infância para a adolescência.

Com foco no desenvolvimento do protagonismo intelectual dos jovens e da capacidade deles em situar-se como cidadãos do/no mundo em suas dimensões emocional, intelectual, social e cultural, a BNCC apresenta a seguinte concepção de juventude, com base no Parecer CNE/CEB n. 5/2011:

> […] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.
>
> (Brasil, 2018a, p. 463)

A realidade de um jovem atualmente é muito diferente daquela de um jovem de vinte ou dez anos atrás. Uma diferença importante é que as crianças e os jovens do século XXI estão utilizando diversos modos de interação multimidiáticas e multimodais, em aplicativos educativos ou de entretenimento, por exemplo, e especialmente em sua atuação nas redes sociais.

O manejo consciente das tecnologias digitais é fundamental para a participação plena dos jovens no mundo contemporâneo. Embora no Brasil o acesso à internet não seja realidade para grande parcela da população, fomentar o debate sobre as responsabilidades e as potencialidades da rede dentro da escola amplia as possibilidades de uso dessas ferramentas, que transformam a cada dia o modo como são realizadas as atividades cotidianas.

Em contrapartida, é importante ressaltar que cultura digital não é sinônimo de cultura juvenil:

> O conceito de **cultura juvenil** está associado à forma como os jovens "tornam sua" ou reinterpretam essa cultura mais ampla na qual vivem, para ir definindo certos estilos de vida e traços de identidade – muitos deles relacionados com o seu tempo livre e lazer –, uma certa linguagem e estéticas com os seus códigos próprios, bem como outras formas de expressão, inclusive de criatividade artística ou científica próprios.
>
> Com **cultura digital**, estamos nos referindo a todas as formas de comunicação, expressão (individual e coletiva), consumo e participação cívica e institucional que são realizadas mediante a utilização de tecnologias digitais. Desde as vanguardas artísticas e científicas até a gestão burocrática (impostos, sanções administrativas etc.); desde a comunicação com amigos e familiares através de tecnologias digitais […] até o acesso e uso de todo o tipo de informação e conteúdos audiovisuais existentes na internet […].
>
> (Ruiz, 2017)

Assim, a cultura digital não é definidora da juventude, mas as ferramentas digitais potencializam as formas de expressão dos jovens. Essa perspectiva retoma as posturas de empoderamento e protagonismo que devem ser fomentadas.

Se já não podíamos antes dizer que existe uma juventude, no singular, e padronizar nossa abordagem com os estudantes, depois da publicação da BNCC e de tantos estudos nas áreas de educação, psicologia e sociologia, é inadmissível que olhemos hoje para as individualidades e não enxerguemos que um jovem de periferia de uma grande metrópole não tem as mesmas necessidades que um jovem residente em um pequeno município rural, por exemplo. Há grande diversidade de jovens e de juventudes no Brasil e no mundo; a fim de exemplificar, basta mencionar alguns fatores que evidentemente impactam a forma de vivenciar o mundo e ser jovem, como gênero, local de residência, etnia e cultura da comunidade em que se está inserido.

Equidade, como a própria BNCC explicita, significa, na prática, reconhecer que as necessidades dos estudantes são diferentes. Ao fazer as escolhas curriculares, é papel de cada rede considerar a comunidade que a integra, de maneira ampla, assim como ficam a cargo das escolas e dos professores as escolhas necessárias para que esse currículo dialogue com a realidade de seus estudantes e engaje-os no desejo de aprendizagem. Logo, a equidade se explicita a cada escolha feita pelos atores que compõem cada rede estadual e municipal de ensino, por cada escolha feita pelos atores que compõem cada comunidade escolar, e essas decisões devem, necessariamente, dialogar com os diferentes perfis culturais e socioeconômicos que cada sala de aula acolhe.

Sabemos que não é uma tarefa fácil. Por isso, sob essa perspectiva, é preciso engajamento, colaboração e respeito mútuo, para que possamos garantir um melhor índice nas aprendizagens e uma cultura de paz em todo nosso amplo território brasileiro. Nesse sentido, apresentamos, em momentos estratégicos, como na seção *Ampliando horizontes* das páginas 90 e 91, orientações que servem de apoio a uma prática pedagógica que faça com que os estudantes se sintam acolhidos, ouvidos e que se percebam pertencentes ao grupo como agentes do desenvolvimento de suas habilidades e de suas competências.

Outra maneira de engajar os jovens é propor a eles a elaboração de soluções criativas para questões comunitárias. Tal postura favorece a percepção sobre a responsabilidade cidadã quanto aos anseios de melhorias sociais, fortalece a autoestima dos jovens e os empodera em relação a seus papéis como cidadãos atuantes.

Por isso, nesta coleção, as culturas juvenis estão presentes nas propostas de discussão sobre problemas que atingem a sociedade global e a comunidade local, mostrando que os interesses e os anseios dos jovens são valorizados e que suas ações são importantes elementos de transformação social e, consequentemente, do espaço.

EDUCAÇÃO COM BASE EM VALORES

A formação consciente do indivíduo como membro atuante da sociedade, que analisa as situações do cotidiano e atua nelas de maneira crítica, é condição para a **construção de um mundo mais justo**. Portanto, assim como o desenvolvimento de habilidades e competências, a formação de valores deve permear todo o trabalho escolar, dentro e fora da sala de aula. O intuito é contribuir para a formação de um indivíduo capaz de interagir com a natureza e com outros indivíduos, fazendo a mediação entre os próprios interesses e as necessidades da sociedade.

O trabalho com valores na escola não apenas trata de como viver em sociedade, mas também propõe a reflexão acerca das melhores maneiras de fazê-lo, ou seja, estimula a escolha consciente dos valores que devem orientar nossos comportamentos nos diferentes contextos sociais. Dessa forma, o trabalho com a educação em valores oferece bases para que o estudante possa tomar decisões visando à ponderação entre o que deseja e o que é social e ambientalmente mais justo.

Um modo de a escola trabalhar valores é incentivando diálogos, discussões e reflexões. O ideal é que essas práticas estejam presentes não só nas aulas, mas em toda a dinâmica escolar, com políticas claras de mediação de conflitos e valorização do respeito, da empatia, da responsabilidade e da honestidade nas situações cotidianas. Ao tratar dos valores como algo a ser desenvolvido também na escola, criam-se situações de assimilação desse conhecimento.

Pressupõe-se que a produção do conhecimento é um processo ativo, que envolve não só a assimilação e a apropriação, mas também a significação e a ressignificação, como lembra Jerome Bruner (1973) e, posteriormente, César Coll (2000). Ou seja, não basta listar os valores para que os estudantes os decorem: **os valores devem fazer parte de seu cotidiano**.

Nesse sentido, a educação em valores determina, ainda, atitudes e funções do educador. Durante o processo de aprendizagem, cabe ao professor incentivar o desenvolvimento da responsabilidade e da liberdade de pensamento dos estudantes. Não se trata, portanto, de doutrinação, e sim da construção de um discurso e de uma prática que leve o estudante a conquistar cada vez mais autonomia e, sobretudo, a se imbuir de noções de responsabilidade social, tornando gradualmente mais coletiva a visão que, no início, estava voltada para si. É por meio do trabalho intencional durante a vida escolar que os valores passarão a ter significado para o estudante, consolidando-se de fato como aprendizados que poderão ser levados para a vida adulta.

Nesta coleção, os valores estão divididos em seis grandes pilares, apresentados a seguir.

JUSTIÇA →

- Direito à igualdade.
- Direito à alimentação.
- Direito à saúde.
- Direito à educação.
- Direito à paz.

RESPEITO →

- A nós mesmos: autoestima, dignidade, autopreservação, autoentendimento.
- Aos outros: empatia, escuta ativa, diálogo, resolução de conflitos.
- Às culturas: ideologias, línguas, costumes, patrimônios, crenças, etnias.
- À natureza: conservação, estima pela diversidade biológica e por todas as formas de vida.

SOLIDARIEDADE →

- Com as pessoas próximas que se sentem frágeis e indefesas em seu dia a dia.
- Com as pessoas que têm doenças graves ou algum tipo de limitação.
- Com imigrantes, refugiados e deslocados.
- Com as vítimas de desastres naturais.

RESPONSABILIDADE →

- Diante das tarefas pessoais e de grupo: esforço, compromisso e cooperação.
- Diante das regras sociais: civismo e cidadania.
- Diante dos conflitos e dos dilemas morais: informações confiáveis, senso crítico e posicionamento.
- Diante do consumo: consumo responsável e racional dos produtos.
- Diante das próximas gerações: desenvolvimento sustentável e ética global a longo prazo.

HONESTIDADE →

- Apreço pela verdade e sinceridade, para si e para os outros.
- Repúdio ao uso de atalhos para obtenção de vantagens.
- Recusa à fraude, à omissão, à corrupção e ao engano intencional.

CRIATIVIDADE →

- Impulso de buscar e de criar soluções para diferentes problemas materiais e sociais.
- Iniciativa, proatividade, confiança, visão de futuro, inovação, reaproveitamento de recursos, imaginação, curiosidade e desejo de saber.

Por meio do trabalho com cada um desses pilares, abordam-se empatia, reconhecimento de direitos, responsabilidade de consumo, recusa a vantagens ilícitas ou a atalhos para conseguir o que se deseja, respeito às diferentes culturas e individualidades e busca ativa de solução de problemas, entre outras questões.

SAÚDE MENTAL E *BULLYING*

Promover uma cultura de paz sistemática na educação vai além de criar leis ou de estudar as que já existem, buscando garantir os direitos constitucionais de cada cidadão. Essa importante missão requer ainda o engajamento e a colaboração de cada agente das comunidades escolares, para que, com sua humanidade, acolha as individualidades, promovendo um ambiente de real valorização da diversidade naquele contexto específico, e prepare os estudantes para viver outros contextos, mais amplos.

O fator convivência pode ter um impacto engajador na comunidade escolar, na mesma medida em que pode dificultar a aprendizagem e conduzir ao desinteresse e à alienação. E, quando falamos de convivência e engajamento, estamos incluindo as relações entre os diferentes membros da equipe escolar, em todas as instâncias, assim como entre estudantes, ou entre professores e estudantes, e entre escola e família. Sabemos que é pelo exemplo que as crianças e os jovens aprendem; assim, ao observar empatia, cooperação e respeito e experienciar um ambiente pacífico, eles poderão efetivamente desenvolver a competência geral 9:

> **9.** Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
>
> (Brasil, 2018a, p. 10)

Nesse sentido, a escola, ao exercer seu compromisso de formar cidadãos atentos aos direitos humanos e aos princípios democráticos, deve envolver as famílias de maneira direta e intencional. Ou seja, é necessária a presença das famílias em encontros formativos nos quais sejam discutidos temas para que toda a comunidade escolar pactue valores e práticas que visem à cooperação e à resolução de conflitos de forma não violenta. Dessa maneira, a cultura de paz pode ser construída, potencializando a capacidade de aprendizagem das crianças e dos jovens, para citar apenas um dos inúmeros benefícios sociais que esse diálogo pode gerar.

Um cuidado importante ao falarmos de cultura de paz é trazer a atenção das crianças e dos jovens para o modo como se expressam tanto em situações presenciais quanto nas interações virtuais, proporcionando situações de aprendizagem que mobilizem algumas competências, como empatia, respeito, responsabilidade, comunicação, colaboração, entre outras. Nesse sentido, temos de desnaturalizar qualquer forma de violência.

É importante frisar aqui a obrigatoriedade de combatermos o *bullying* no ambiente escolar. Sobre esse tema, citamos um artigo que vale a pena ser lido na íntegra, pois colabora com a prática docente, trazendo sugestões valiosas.

> *Bullying* é uma situação que se caracteriza por agressões intencionais, verbais ou físicas, feitas de maneira repetitiva, por um ou mais alunos contra um ou mais colegas. O termo *bullying* tem origem na palavra inglesa *bully*, que significa valentão, brigão. Mesmo sem uma denominação em português, é entendido como ameaça, tirania, opressão, intimidação, humilhação e maltrato. [...]
>
> **10.** O que fazer em sala de aula quando se identifica um caso de *bullying*?
>
> Ao surgir uma situação em sala, a intervenção deve ser imediata. “Se algo ocorre e o professor se omite ou até mesmo dá uma risadinha por causa de uma piada ou de um comentário, vai pelo caminho errado. Ele deve ser o primeiro a mostrar respeito e dar o exemplo”, diz Aramis Lopes Neto, presidente do Departamento Científico de Segurança da Criança e do Adolescente da

> Sociedade Brasileira de Pediatria. O professor pode identificar os atores do *bullying*: autores, espectadores e alvos. Claro que existem as brincadeiras entre colegas no ambiente escolar. Mas é necessário distinguir o limiar entre uma piada aceitável e uma agressão. “Isso não é tão difícil como parece. Basta que o professor se coloque no lugar da vítima. O apelido é engraçado? Mas como eu me sentiria se fosse chamado assim?”, orienta o pediatra Lauro Monteiro Filho.

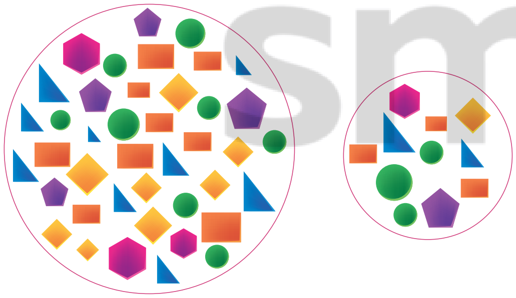
21 PERGUNTAS e respostas sobre *bullying*. *Nova Escola*, 1º ago. 2009.
Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/336/bullying-escola. Acesso em: 16 maio 2022.

Além dessas sugestões, nesta coleção contribuímos com o combate a qualquer tipo de violência, principalmente o *bullying*, ressaltando momentos em que esse tema pode ser abordado e sugerindo uma maneira de conduzir conversas e trocas de experiência que objetivam uma educação equitativa e a cultura de paz.

Por fim, não poderíamos deixar de mencionar uma estratégia que pode colaborar muito na promoção da paz, que é a Comunicação Não Violenta (CNV), sistematizada por Marshall Rosenberg. A CNV propõe caminhos para se estabelecer uma conexão consciente por meio da empatia e da compaixão entre interlocutores e é usada até mesmo pela Organização das Nações Unidas (ONU) na mediação de situações de conflito em todo o mundo. Para saber mais sobre a CNV, sugerimos assistir ao vídeo disponível em: https://ecoativos.org.br/biblioteca/comunicacao-nao-violenta-parte-1-marshall-rosenberg/ (acesso em: 7 jul. 2022).

TRABALHO COM GRUPOS GRANDES E DIVERSOS DE ESTUDANTES

Embora uma turma numerosa implique desafios ao professor no que se refere ao cotidiano de sala de aula e ao acompanhamento das aprendizagens individuais, há pontos positivos nessa realidade: em um grupo grande, amplifica-se a heterogeneidade de histórias de vida, pensamentos, potencialidades e valores. Tal diversidade, se recebida e tratada com atenção e respeito por todos os envolvidos, pode enriquecer as propostas e as dinâmicas – sobretudo se forem sugeridas atividades colaborativas entre os estudantes.



João Picoli/ID/BR

Há diversos prós e contras em trabalhar com grupos grandes e com grupos pequenos em sala de aula. Elencar os itens que compõem essas listas é fundamental para uma boa condução das aulas.

Trabalhar, portanto, com grupos grandes e diversos exige estratégias didáticas específicas. No início do ano letivo, recomenda-se investir tempo no estabelecimento de vínculos saudáveis com os estudantes. Isso permitirá, posteriormente, reconhecer e mapear as necessidades, dificuldades e potencialidades de cada um. Com esse levantamento, será possível privilegiar trabalhos em grupo, propondo atividades mais significativas com base nas especificidades de cada estudante e beneficiando-se da troca entre os pares.

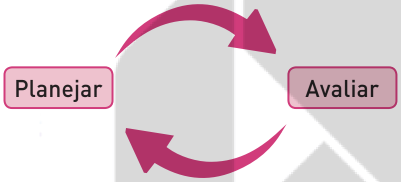
Nesta coleção há diversos momentos em que se ressalta o trabalho colaborativo. Pode-se, por exemplo, organizar duplas ou trios com estudantes de diferentes níveis de aprendizagem para a resolução de problemas, considerando que a dificuldade de um pode ser superada com o auxílio de outro. Em outro viés, pode-se sugerir que se formem parcerias para compartilhar as estratégias utilizadas e a correção de resoluções, de modo que os estudantes proponham ajustes e melhorias nas soluções propostas pelos colegas. Essas dinâmicas promovem a troca de conhecimentos e contribuem para o amadurecimento e o fortalecimento da turma como grupo.

Outra questão relevante diz respeito à condução de atividades mais elaboradas, que envolvem pesquisa, desenvolvimento de projetos ou produção de sínteses e conclusões. Pensando no trabalho com grupos grandes, para solucionar o problema da má distribuição de tarefas nos grupos – quando há sobrecarga de um ou dois estudantes e os demais ficam sem espaço e oportunidade para participar ou colaborar com alguma etapa do trabalho –, convém ajudá-los a estabelecer um papel para cada integrante com base no perfil, nas habilidades e nos interesses de cada um. Essa divisão auxilia os estudantes a reconhecer sua importância e suas contribuições para o grupo, permitindo que atuem com mais responsabilidade e iniciativa.

Vale lembrar que lidar com diferentes perfis vai impeli-los a buscar novas perspectivas, o que eventualmente pode resultar em conflitos. Nesse sentido, as atividades poderão, também, servir de espaço para o exercício da escuta atenta, da empatia, de habilidades deliberativas e da comunicação não violenta voltada à resolução de conflitos, favorecendo o diálogo e as práticas da cultura de paz na escola.

AVALIAÇÃO

Planejar e avaliar são processos indissociáveis. A avaliação é, sem dúvida, um dos aspectos mais sensíveis e complexos de qualquer planejamento.



João Picoli/ID/BR

Na perspectiva da formação integral, a avaliação passa a ser um instrumento de comunicação com o estudante, com os demais professores, com as equipes da escola responsáveis pela formação do estudante e até mesmo com as famílias.

Quando a avaliação é entendida como parte da formação integral dos estudantes, ela não pode mais estar relacionada apenas à nota atribuída ao final de um período de ensino, como um bimestre ou um trimestre, quando os estudantes recebem um número ou um conceito que certifica ou não sua aprendizagem. A nota em si exclui muitos dos fatores determinantes do processo de aprender. A história do estudante, o momento das avaliações, os recursos e o tempo para o estudo individual e até mesmo o instrumento de avaliação utilizado podem ser elementos decisivos para uma nota, que não corresponde necessariamente ao que o estudante aprendeu de fato.

Além disso, um currículo alinhado com a BNCC, pautado pelo desenvolvimento de competências e habilidades, visando ao aprofundamento e à consolidação das aprendizagens, não pode se sustentar em processos de avaliação pontuais e meramente numéricos. A avaliação, ainda que venha a gerar uma nota, deve corresponder ao projeto da escola no sentido da formação do estudante. Quando há um projeto de educação e a escola assume seu papel de formadora, a avaliação deve sinalizar se o estudante está ou não na direção do projeto traçado para ele. Nesse sentido, é preciso que a avaliação corresponda ao papel da escola na formação do estudante.

A avaliação em uma perspectiva formativa é composta de três grandes etapas: o diagnóstico, a análise e a intervenção. Um efetivo processo avaliativo da aprendizagem se inicia com a coleta de dados, ou seja, com um diagnóstico, proveniente da observação e do registro do professor com base nas mais diversas produções dos estudantes. De posse desses dados, antes da nota ou de qualquer parecer sobre o que o estudante aprendeu ou não, a avaliação formativa pressupõe a análise das informações coletadas, pautada pela reflexão sobre as aprendizagens esperadas, a atividade proposta e seu desenvolvimento. Essa análise precede a terceira etapa da avaliação, que corresponde à tomada de decisão sobre o que retomar e como agir em face das aprendizagens dos estudantes. É a fase da intervenção. Completa-se, assim, o ciclo avaliativo.

Nos casos em que se identifica algo que os estudantes deveriam saber e cuja deficiência pode impedir a continuidade de seu percurso de aprendizagem, a intervenção pode ser imediata. Outras vezes, a análise e o planejamento idealizado permitem antever que o conhecimento ausente nesse momento pode ser retomado mais adiante em outro tema, outro momento ou outra situação. Desse modo, a intervenção é pensada e planejada, sem ser imediata.

Como forma de organizar esse processo contínuo, há três etapas importantes de avaliação.

ETAPAS DA AVALIAÇÃO

Avaliação inicial ou diagnóstica	Permite ao professor realizar uma investigação no sentido de levantar os conhecimentos prévios dos estudantes. Ela servirá de subsídio para que o professor organize sua proposta hipotética de intervenção.
Avaliação formativa ou processual	Pode ser vista com o objetivo de replanejamento por parte do professor, ocorrendo em momentos variados ao longo do processo de ensino e aprendizagem, tornando possível aos estudantes tomar consciência de suas dúvidas e dificuldades e de seus avanços.
Avaliação final ou somativa	Espera-se, sobretudo, identificar se os objetivos propostos inicialmente foram atingidos, se houve de fato aprendizagem, se é possível dar prosseguimento ao processo ou se há necessidade de revisão e complementação do que foi trabalhado.

Outro aspecto importante para a formação dos estudantes é o incentivo à autoavaliação, que colabora para que eles se tornem responsáveis pelo próprio processo de aprendizagem, já que subsidia estratégias de autoconhecimento.

Portanto, a autoavaliação pode levar a ótimos resultados no trabalho em sala de aula, na medida em que os estudantes se tornam conscientes do próprio processo de aprendizagem, além de desenvolverem a capacidade de monitorar a realização das tarefas propostas, obtendo assim maior controle sobre suas ações. Ao requerer a participação ativa dos estudantes, essa estratégia geralmente permite a evolução deles no desempenho das tarefas realizadas.

Os estudantes devem estar cientes de que a autoavaliação não recebe nota, mas revela a qualidade da autocrítica. Por essa razão, não se deve superestimar a autoavaliação se ela não estiver de acordo com os resultados observados no dia a dia.

INSTRUMENTOS AVALIATIVOS

Não existe processo de avaliação sem a reunião de dados a serem analisados; daí a importância dos instrumentos de avaliação, sua escolha e seus critérios de uso.

A seleção e a elaboração de um instrumento de avaliação têm início ainda durante o planejamento, quando o professor questiona: “O que ensino?”; “Por que ensino?”; “Os estudantes podem aprender isso?”. Tais questionamentos já apontam para a necessidade de refletir sobre as ações didáticas a fim de garantir o aprendizado dos estudantes.

O foco da avaliação deve ser fornecer dados que possibilitem ao professor compreender o que foi aprendido ou não e fazer intervenções que levem o estudante a avançar no aprendizado. Os instrumentos de avaliação podem guiar o olhar do professor nesse sentido.

A variedade de instrumentos avaliativos favorece a individualização do processo de ensino e aprendizagem, tornando-o uma experiência que, embora se realize no coletivo, seja única para cada estudante.

Há instrumentos que estão mais diretamente relacionados à obtenção de dados pelo professor. Neles, embora o estudante seja chamado a colaborar, é o professor que centraliza as ações de reunião e análise de dados. É o caso da observação e do registro, da análise da produção dos estudantes e das avaliações e da análise de erros, que podem ser usados em vários momentos.

Na correção de uma tarefa ou de um trabalho em grupo, por exemplo, é possível observar e registrar o que os estudantes aprenderam e permitir que eles apresentem à turma suas resoluções, dúvidas ou imprecisões de linguagem. Essa dinâmica pode ser um bom contexto para fazer uma intervenção ou acompanhar esses estudantes nas próximas atividades.

Há situações propostas nesta coleção que podem ser utilizadas com finalidade de avaliação formativa ou processual, não necessariamente para dar uma nota, mas para obter dados e planejar intervenções. Por exemplo: quando é solicitado ao estudante que organize o que aprendeu, que elabore problemas, que produza textos após as atividades e analise problemas com erros na resolução e também nas atividades propostas na seção *Atividades integradas*. Nessa análise, a oralidade, os desenhos, os gráficos, os esquemas e as escritas pessoais são importantes para acompanhar as percepções e os avanços de cada um. Relembramos que o letramento matemático é uma meta na Educação Básica: avaliar a leitura, a escrita e a utilização da linguagem em diferentes contextos é tão importante quanto assegurar os objetos de conhecimento específicos.

Por fim, vale ressaltar que a avaliação não é mera “tarefa burocrática” ou instrumento de julgamento dos estudantes. Na realidade, o que está em jogo, quando se planeja e executa a avaliação, é a possibilidade de aferir, por meio de uma coleta sistemática de dados, os ganhos e as perdas do processo educativo. Com base nessa aferição, a prática de ensino e aprendizagem é pensada para contemplar diferentes dimensões ou tipos de conteúdo.

PREPARAÇÃO PARA EXAMES DE LARGA ESCALA

Apresentamos a seguir algumas atividades com o formato das que compõem avaliações externas, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa). As matrizes de referência para cada uma dessas avaliações podem ser encontradas nos *links* indicados (acessos em: 7 jul. 2022).

- Enem: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf
- Saeb: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/matrizes-e-escalas
- Pisa: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa/matrizes-de-referencia

As atividades propostas foram elaboradas com o intuito de preparar os estudantes para exames de larga escala. Além delas, você pode utilizar as próprias atividades de exames dessa natureza realizados em anos anteriores, pois há muitos que se encontram disponíveis na internet, ou ainda criar novas atividades com base nas matrizes de referência desses exames.

Ao trabalhar esse material com os estudantes, os registros deles podem ser utilizados como instrumento de avaliação de caráter preparatório para as avaliações externas. A abordagem pode ser complementada com avaliações organizadas por você, para que os estudantes estejam preparados não apenas em termos de conceito, mas possam vivenciar o ambiente em que essas avaliações acontecem.

Atividades de preparação para exames de larga escala

Questão 1

Em um jogo de *videogame*, a personagem precisa coletar elementos da natureza para se fortalecer e, com isso, ganhar o tesouro final. A quantidade de elementos necessária por fase é descrita a seguir.

Fase (f)	Quantidade de elementos (Q)
1	2
2	5
3	8
4	11
5	14

A expressão que relaciona Q e f é:

a) $Q = 2f + 3$

b) $Q = 3f - 1$

c) $Q = 1 - f$

d) $Q = 3f + 1$

e) $Q = 3 + 2f$

Questão 2

Oymyakon, na Sibéria, Rússia, é conhecida como a cidade habitável mais gelada do mundo, onde as medidas de temperatura costumam chegar a −45 °C. Até julho de 2022, a medida de temperatura mais baixa registrada nesse local foi em fevereiro de 1993, quando os termômetros marcaram, aproximadamente, −68 °C.

Supondo que hoje os termômetros marquem −36 °C na cidade de Oymyakon, a diferença entre essa medida de temperatura e a mais baixa já registrada é:

a) −104 °C.

b) −32 °C.

c) −9 °C.

d) 32 °C.

e) 104 °C.

Questão 3

Júlio cortou três pedaços de barbante para construir um triângulo. Ao juntar os pedaços, ele percebeu que não era possível fazer a construção.

João Picoli/ID/BR

Dos itens a seguir, qual apresenta medidas de pedaços de barbante que possibilitam a construção de um triângulo?

a) 3 cm, 5 cm e 8 cm.

b) 2 cm, 8 cm e 10 cm.

c) 3 cm, 4 cm e 5 cm.

d) 6 cm, 6 cm e 13 cm.

e) 3 cm, 6 cm e 9 cm.

Questão 4

Em uma empresa há 24 funcionários no setor financeiro, 30 no setor operacional e 36 no setor administrativo. Para otimizar o trabalho, o gerente decidiu organizá-los em equipes com o mesmo número de pessoas e com o maior número possível de funcionários em cada equipe.

Com base nessas informações, quantas equipes podem ser formadas e quantos funcionários deve ter cada equipe?

a) 6 equipes e 18 funcionários.

b) 9 equipes e 10 funcionários.

c) 12 equipes e 6 funcionários.

d) 15 equipes e 6 funcionários.

e) 18 equipes e 5 funcionários.

Questão 5

Atrelar a mobilidade à praticidade vem se tornando uma preocupação não somente do poder público como também do setor privado, que tem investido em alternativas para melhorar o deslocamento das pessoas nos grandes centros urbanos. Nesse sentido, é cada vez mais comum o uso de bicicletas e de patinetes elétricos compartilhados como alternativa ao uso do automóvel. Para utilizar esses meios de transporte, é preciso ter um *smartphone*, baixar o aplicativo, localizar o patinete ou a bicicleta mais próximos e pagar no próprio celular.

Em um desses aplicativos, o usuário paga R$ 3,20 para desbloquear o patinete e R$ 0,50 por minuto, após o 3º minuto. Quanto um usuário desse aplicativo pagará se utilizar o patinete por 14 minutos?

a) R$ 3,20
b) R$ 3,70
c) R$ 5,50
d) R$ 8,70
e) R$ 10,70

Questão 6

Segundo um noticiário televisivo, a probabilidade de chover nos próximos cinco dias é 23%. Isso significa que:

a) a probabilidade de chover no dia seguinte à reportagem é 20%.
b) é certeza que vai chover em um dos dias.
c) a probabilidade de não chover nos próximos cinco dias é 77%.
d) haverá apenas garoa.
e) a probabilidade de chover em pelo menos um dos cinco dias é, aproximadamente, 5%.

Questão 7

Leia o texto a seguir.

> Mais de 10% da população idosa do país sofre com a insuficiência cardíaca, doença crônica que prejudica o bombeamento do sangue pelo coração. Entre a população geral, estima-se que entre 1% e 2% das pessoas já tenham desenvolvido a deficiência.
>
> Everton Lopes Batista. Insuficiência cardíaca é epidemia silenciosa e ignorada, dizem especialistas. *Folha de S.Paulo*, 25 mar. 2019. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/seminariosfolha/2019/03/insuficiencia-cardiaca-e-epidemia-silenciosa-e-ignorada-dizem-especialistas.shtml. Acesso em: 13 jul. 2022.

Considere um país fictício com apenas 990 habitantes, dos quais 60% são idosos. Se, para um estudo, for escolhida uma pessoa ao acaso, qual é a probabilidade de ela ser idosa e ter a doença cardíaca citada no texto, tendo em vista que, nesse país, 10% da população idosa sofre com a doença?

a) 2%
b) 6%
c) 10%
d) 38%
e) 60%

Questão 8

Em novembro de 2021, o ministro do Meio Ambiente anunciou o compromisso do Brasil para reduzir a emissão de carbono em 50% até 2030.

Supondo que em 2021, no Brasil, a emissão de carbono tenha sido de, aproximadamente, 2,16 bilhões de toneladas brutas, a estimativa para a emissão de carbono em 2030 é:

a) 740 milhões de toneladas.
b) 260 milhões de toneladas.
c) 1 bilhão de toneladas.
d) 1,08 bilhão de toneladas.
e) 1,26 bilhão de toneladas.

Questão 9

Uma empresa de tecnologia desenvolveu um sensor de vaga de estacionamento. Quando a vaga estiver disponível, o sensor a identifica com luz verde ou amarela (usada para sinalizar vagas para pessoas com deficiência, idosos e gestantes). Se a vaga estiver ocupada, o sensor a identifica com luz vermelha.

Em determinada tarde, o primeiro andar do estacionamento de um *shopping* estava com lotação quase esgotada, conforme representação a seguir.

João Picoli/ID/BR

A razão que representa a quantidade de vagas disponíveis em relação ao total de vagas é:

a) $\frac{1}{36}$

b) $\frac{1}{12}$

c) $\frac{1}{9}$

d) $\frac{8}{9}$

e) $\frac{11}{12}$

Questão 10

Por que carros de bombeiro e ambulâncias têm texto ao contrário?

Para que os motoristas à frente possam ler o escrito corretamente quando olharem pelo retrovisor. Embora não esteja previsto no Código de Trânsito Brasileiro, o uso do nome ao contrário facilita a identificação de ambulâncias e carros de bombeiro, que têm prioridade no trânsito e desfrutam de livre circulação, estacionamento e parada. [...]

Geiza Martins. Por que carros de bombeiro e ambulâncias têm texto ao contrário? *Superinteressante*, 4 jul. 2018. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/por-que-carros-de-bombeiro-e-ambulancias-tem-texto-ao-contrario/. Acesso em: 13 jul. 2022.

FotograFFF, Etsir/Shutterstock.com/ID/BR. Fotomontagem: ID/BR

↑ **Na imagem é possível ver como um motorista enxerga a palavra "ambulância" de dentro do veículo.**

Qual é a transformação geométrica que possibilita que o motorista enxergue a escrita da palavra "ambulância" de maneira correta ao observar o retrovisor do veículo?

a) Reflexão.

b) Rotação.

c) Translação.

d) Espelho.

e) Vetorização.

Respostas e comentários das atividades de preparação para exames de larga escala

A seguir, para cada uma das questões, apresentamos o conteúdo trabalhado, a habilidade da BNCC que pode ser associada à questão proposta, os indicadores das matrizes de referência de alguns exames de larga escala que podem ser trabalhados e, por fim, a resolução. As matrizes de referência indicadas são do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa).

Questão 1

- **Conteúdo**

  Introdução à Álgebra

- **Habilidade da BNCC**

  EF07MA17

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 5: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

  Habilidade 19: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Álgebra.

  Eixo cognitivo: Compreender e aplicar conceitos e procedimentos.

  Habilidade 9A1.3: Identificar uma representação algébrica para o padrão ou a regularidade de uma sequência de números racionais ou representar algebricamente o padrão ou a regularidade de uma sequência de números racionais.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Uso de linguagem simbólica, formal e técnica, e operações.

  Processo matemático: Formular situações matematicamente.

  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

  Alternativa **b**.

  Uma possibilidade de resolver essa atividade é testar as alternativas para verificar qual delas é a verdadeira.

  a) $Q = 2f + 3$

  - Para $f = 1$, temos:

$$Q = 2f + 3$$
$$Q = 2 \cdot 1 + 3$$
$$Q = 2 + 3$$
$$Q = 5$$

Então, para $f = 1$, $Q = 5$. Essa relação entre a fase e a quantidade de elementos não está de acordo com o quadro.

Portanto, a alternativa **a** está incorreta.

b) $Q = 3f - 1$

- Para $f = 1$, temos:

$$Q = 3f - 1$$
$$Q = 3 \cdot 1 - 1$$
$$Q = 3 - 1$$
$$Q = 2$$

Então, para $f = 1$, $Q = 2$. Essa relação entre a fase e a quantidade de elementos está de acordo com o quadro.

- Para $f = 2$, temos:

$$Q = 3f - 1$$
$$Q = 3 \cdot 2 - 1$$
$$Q = 6 - 1$$
$$Q = 5$$

Então, para $f = 2$, $Q = 5$. Essa relação entre a fase e a quantidade de elementos está de acordo com o quadro.

- Para $f = 3$, temos:

$$Q = 3f - 1$$
$$Q = 3 \cdot 3 - 1$$
$$Q = 9 - 1$$
$$Q = 8$$

Então, para $f = 3$, $Q = 8$. Essa relação entre a fase e a quantidade de elementos está de acordo com o quadro.

- Para $f = 4$, temos:

$$Q = 3f - 1$$
$$Q = 3 \cdot 4 - 1$$
$$Q = 12 - 1$$
$$Q = 11$$

Então, para $f = 4$, $Q = 11$. Essa relação entre a fase e a quantidade de elementos está de acordo com o quadro.

- Para $f = 5$, temos:

$$\begin{aligned} Q &= 3f - 1 \\ Q &= 3 \cdot 5 - 1 \\ Q &= 15 - 1 \\ Q &= 14 \end{aligned}$$

  Então, para $f = 5$, $Q = 14$. Essa relação entre a fase e a quantidade de elementos está de acordo com o quadro.

Portanto, a alternativa **b** está correta.

c) $Q = 1 - f$

- Para $f = 1$, temos:

$$\begin{aligned} Q &= 1 - f \\ Q &= 1 - 1 \\ Q &= 0 \end{aligned}$$

  Então, para $f = 1$, $Q = 0$. Essa relação entre a fase e a quantidade de elementos não está de acordo com o quadro.

Portanto, a alternativa **c** está incorreta.

d) $Q = 3f + 1$

- Para $f = 1$, temos:

$$\begin{aligned} Q &= 3f + 1 \\ Q &= 3 \cdot 1 + 1 \\ Q &= 3 + 1 \\ Q &= 4 \end{aligned}$$

  Então, para $f = 1$, $Q = 4$. Essa relação entre a fase e a quantidade de elementos não está de acordo com o quadro.

Portanto, a alternativa **d** está incorreta.

e) $Q = 3 + 2f$

- Para $f = 1$, temos:

$$\begin{aligned} Q &= 3 + 2f \\ Q &= 3 + 2 \cdot 1 \\ Q &= 3 + 2 \\ Q &= 5 \end{aligned}$$

  Então, para $f = 1$, $Q = 5$. Essa relação entre a fase e a quantidade de elementos não está de acordo com o quadro.

Portanto, a alternativa **e** está incorreta.

Questão 2

- **Conteúdo**

  Operações com números inteiros

- **Habilidade da BNCC**

  EF07MA04

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

  Habilidade 1: Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações — naturais, inteiros, racionais ou reais.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Números.

  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

  Habilidade 9N2.1: Resolver problemas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou radiciação envolvendo números reais, inclusive notação científica.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Uso de linguagem simbólica, formal e técnica, e operações.

  Processo matemático: Formular situações matematicamente.

  Contexto e situações: Científico.

- **Resolução**

  Alternativa **d**.

  A diferença entre −36 °C e a medida de temperatura mais baixa (−68 °C) é 32 °C, pois:

$$-36 - (-68) = -36 + 68 = 32$$

Questão 3

- **Conteúdo**

  Triângulos

- **Habilidade da BNCC**

  EF07MA24

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

  Habilidade 7: Identificar características de figuras planas ou espaciais.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Geometria.

  Eixo cognitivo: Compreender e aplicar conceitos e procedimentos.

Habilidade 9G1.5: Identificar propriedades e relações existentes entre os elementos de um triângulo (condição de existência, relações de ordem entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos internos, soma dos ângulos internos, determinar medida de um ângulo interno ou externo).

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Delinear estratégia para resolução de problemas.

  Processos matemáticos: Espaço e forma.

  Contexto e situações: Científico.

- **Resolução**

  Alternativa **c**.

  Usando as medidas indicadas em cada uma das alternativas, vamos verificar a condição de existência de um triângulo: a medida de cada lado do triângulo deve ser menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

a) Para cada uma das medidas, temos:

- $3 < 5 + 8$
  $3 < 13 \rightarrow$ Verdadeiro
- $5 < 3 + 8$
  $5 < 11 \rightarrow$ Verdadeiro
- $8 < 3 + 5$
  $8 < 8 \rightarrow$ Falso

Portanto, não é possível construir um triângulo usando pedaços de barbante com 3 cm, 5 cm e 8 cm, e a alternativa **a** está incorreta.

b) Para cada uma das medidas, temos:

- $2 < 8 + 10$
  $2 < 18 \rightarrow$ Verdadeiro
- $8 < 2 + 10$
  $8 < 12 \rightarrow$ Verdadeiro
- $10 < 2 + 8$
  $10 < 10 \rightarrow$ Falso

Portanto, não é possível construir um triângulo usando pedaços de barbante com 2 cm, 8 cm e 10 cm, e a alternativa **b** está incorreta.

c) Para cada uma das medidas, temos:

- $3 < 4 + 5$
  $3 < 9 \rightarrow$ Verdadeiro
- $4 < 3 + 5$
  $4 < 8 \rightarrow$ Verdadeiro
- $5 < 3 + 4$
  $5 < 7 \rightarrow$ Verdadeiro

Portanto, é possível construir um triângulo usando pedaços de barbante com 3 cm, 4 cm e 5 cm. Assim, a alternativa **c** está correta.

d) Para cada uma das medidas, temos:

- $6 < 6 + 13$
  $6 < 19 \rightarrow$ Verdadeiro
- $6 < 6 + 13$
  $6 < 19 \rightarrow$ Verdadeiro
- $13 < 6 + 6$
  $13 < 12 \rightarrow$ Falso

Portanto, não é possível construir um triângulo usando pedaços de barbante com 6 cm, 6 cm e 13 cm, e a alternativa **d** está incorreta.

e) Para cada uma das medidas, temos:

- $3 < 6 + 9$
  $3 < 15 \rightarrow$ Verdadeiro
- $6 < 3 + 9$
  $6 < 12 \rightarrow$ Verdadeiro
- $9 < 3 + 6$
  $9 < 9 \rightarrow$ Falso

Portanto, não é possível construir um triângulo usando pedaços de barbante com 3 cm, 6 cm e 9 cm, e a alternativa **e** está incorreta.

Questão 4

- **Conteúdo**

  Múltiplos e divisores

- **Habilidade da BNCC**

  EF07MA01

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

  Habilidade 3: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Números.

  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

  Habilidade 9N2.4: Resolver problemas que envolvam as ideias de múltiplo, divisor, máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Delinear estratégia para resolução de problemas.

Processo matemático: Formular situações matematicamente.

Contexto e situações: Ocupacional.

- **Resolução**

  Alternativa **d**.

  D(24): 1, 2, 3, 4, **6**, 8, 12, 24

  D(30): 1, 2, 3, 5, **6**, 10, 15, 30

  D(36): 1, 2, 3, 4, **6**, 9, 12, 18, 36

  Logo, mdc(24, 30, 36) = 6.

  Portanto, cada equipe deve ter 6 funcionários.

  Nessa empresa há, ao todo, 90 funcionários, pois:

  $$24 + 30 + 36 = 90$$

  Assim, podem ser formadas 15 equipes, pois:

  $$90 : 6 = 15$$

Questão 5

- **Conteúdo**

  Introdução à Álgebra

- **Habilidade da BNCC**

  EF07MA18

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 5: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

  Habilidade 21: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Álgebra.

  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

  Habilidade 9A2.1: Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta ou inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisões proporcionais e taxa de variação.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: “Matematizar”.

  Processo matemático: Formular situações matematicamente.

  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

  Alternativa **d**.

  A expressão que relaciona o preço P, pago pelo usuário, para x minutos de uso do patinete é:

  $$P = 3{,}20 + (x - 3) \cdot 0{,}50$$

  Para 14 minutos de uso do patinete, temos:

  $$P = 3{,}20 + (14 - 3) \cdot 0{,}50$$

  $$P = 3{,}20 + 11 \cdot 0{,}50$$

  $$P = 3{,}20 + 5{,}50$$

  $$P = 8{,}70$$

  Portanto, o usuário pagará R$ 8,70.

Questão 6

- **Conteúdo**

  Probabilidade

- **Habilidade da BNCC**

  EF07MA34

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 7: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

  Habilidade 29: Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Probabilidade e Estatística.

  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

  Habilidade 9E2.4: Resolver problemas que envolvam a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios equiprováveis independentes ou dependentes.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Raciocínio e argumentação.

  Processo matemático: Incertezas e dados.

  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

  Alternativa **c**.

  Vamos analisar cada uma das alternativas.

  a) Falsa, pois não foi dito se choveria no dia seguinte ao da reportagem.

b) Falsa, pois não existe certeza de que vai chover nos próximos cinco dias; existe apenas uma probabilidade de isso acontecer.

c) Verdadeira, pois 23% é a probabilidade de chuva nos próximos cinco dias; portanto, a probabilidade de não chover nos próximos cinco dias é 77% (100% − 23% = 77%).

d) Falsa, pois no noticiário não foi dito nada sobre garoar nos próximos cinco dias.

e) Falsa, pois a notícia apenas informa que a probabilidade de chover nos próximos cinco dias é 23% e não afirma que, em pelo menos um desses dias, a probabilidade de chuva é, aproximadamente, 5%.

Questão 7

- **Conteúdo**

  Probabilidade

- **Habilidade da BNCC**

  EF07MA34

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 7: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

  Habilidade 28: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Probabilidade e Estatística.

  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

  Habilidade 9E2.4: Resolver problemas que envolvam a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios equiprováveis independentes ou dependentes.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Raciocínio e argumentação.

  Processo matemático: Incertezas e dados.

  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

  Alternativa **b**.

  População idosa:

$$60\% \text{ de } 990 \rightarrow \frac{60}{100} \cdot 990 = 0{,}6 \cdot 990 = 594$$

População idosa que sofre com a doença:

$$10\% \text{ de } 594 \rightarrow \frac{10}{100} \cdot 594 = 0{,}1 \cdot 594 = 59{,}4$$

Probabilidade de a pessoa ser idosa e ter insuficiência cardíaca:

$$\frac{59{,}4}{990} = 0{,}06 = \frac{6}{100} = 6\%$$

Questão 8

- **Conteúdo**

  Porcentagem

- **Habilidade da BNCC**

  EF07MA02

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

  Habilidade 3: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Números.

  Eixo cognitivo: Resolver problemas e argumentar.

  Habilidade 9N2.3: Resolver problemas que envolvam porcentagens, incluindo os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Comunicação.

  Processo matemático: Formular situações matematicamente.

  Contexto e situações: Social.

- **Resolução**

  Alternativa **d**.

  De acordo com o texto, o Brasil deve reduzir em 50% as emissões de carbono. Então, a emissão de gás carbono emitida será de 50% da emissão atual (100% − 50% = 50%).

$$\begin{aligned} &50\% \text{ de } 2{,}16 \text{ bilhões de toneladas} = \\ &= \frac{50}{100} \cdot 2{,}16 \text{ bilhões de toneladas} = \\ &= 0{,}5 \cdot 2{,}16 \text{ bilhões de toneladas} = \\ &= 1{,}08 \text{ bilhão de toneladas} \end{aligned}$$

Questão 9

- **Conteúdo**

  Razão

- **Habilidade da BNCC**

  EF07MA09

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

  Habilidade 3: Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Números.

  Eixo cognitivo: Compreender e aplicar conceitos e procedimentos.

  Habilidade 9N1.1: Escrever números racionais (representação fracionária ou decimal finita) em sua representação por algarismos ou em língua materna ou associar o registro numérico ao registro em língua materna.

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Uso de linguagem simbólica, formal e técnica, e operações.

  Processo matemático: Formular situações matematicamente.

  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

  Alternativa **c**.

  - Total de vagas no primeiro andar do estacionamento: $9 \cdot 8 = 72$
  - Total de vagas disponíveis: 8

  Razão entre a quantidade de vagas disponíveis e o total de vagas:

$$\frac{8}{72} = \frac{1}{9}$$

Questão 10

- **Conteúdo**

  Transformações geométricas

- **Habilidade da BNCC**

  EF07MA20

- **Matriz do Enem**

  Competência de área 2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

  Habilidade 8: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

- **Matriz do Saeb**

  Eixo do conhecimento: Geometria.

  Eixo cognitivo: Compreender e aplicar conceitos e procedimentos.

  Habilidade 9G1.1: Identificar, no plano cartesiano, figuras obtidas por uma ou mais transformações geométricas (reflexão, translação, rotação).

- **Matriz do Pisa**

  Capacidade fundamental da Matemática: Comunicação.

  Processos matemáticos: Mudanças e relações.

  Contexto e situações: Pessoal.

- **Resolução**

  Alternativa **a**.

  A transformação geométrica que ocorre é a reflexão.

ORGANIZAÇÃO DA COLEÇÃO

ESTRUTURA DO LIVRO DO ESTUDANTE

A coleção é composta de quatro volumes, divididos em unidades e capítulos. Cada unidade tem como foco uma unidade temática (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e Estatística) e apresenta textos, atividades, seções e boxes. No conjunto, pretende-se que a coleção seja um material de apoio para o trabalho de professores e estudantes, a fim de alcançar o desenvolvimento das competências gerais e específicas de Matemática.

ABERTURA DE UNIDADE

No início das unidades há uma imagem que ocupa uma dupla de páginas. Essa imagem tem como objetivo despertar o interesse e a curiosidade dos estudantes sobre o tema que será tratado na unidade. O texto e as questões propostas em *Primeiras ideias* procuram incentivá-los a explorar a imagem, estabelecendo relações possíveis acerca dos assuntos que serão estudados. Além disso, as questões propostas podem ser utilizadas para diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o tema, realizando uma avaliação inicial da turma.

CAPÍTULOS

Cada unidade tem seu conteúdo disposto em dois ou três capítulos. O texto é apresentado de forma organizada e clara por meio de situações contextualizadas. De modo geral, estão associados a ilustrações, fotografias, gráficos, mapas, tabelas, entre outros recursos, a fim de facilitar o entendimento do conteúdo e propiciar o contato com diversos modos de organização das informações. Termos essenciais e ideias-chave são destacados.

O trabalho voltado à formação de valores ocorre ao longo das unidades e pode ser evidenciado no boxe *Valor*. Além dele, há boxes complementares que ampliam o conhecimento e revelam alguns desdobramentos e relações que o conteúdo apresentado estabelece com outros assuntos. Palavras que eventualmente poderiam dificultar a compreensão do texto são explicadas nos glossários, inseridos na mesma página em que o termo aparece, facilitando a consulta.

Além disso, os boxes *Matemática tem história* e *+Interessante* contêm temas que se referem, respectivamente, à história da Matemática e a curiosidades relacionadas à Matemática no dia a dia. Em alguns boxes *Matemática tem história*, também é possível encontrar atividades de pesquisa sobre a história da Matemática.

O boxe *Descubra mais* propõe atividades de caráter investigativo de forma organizada e orientada. Esse boxe está estruturado da seguinte maneira: texto introdutório (contextualização do tema), "Materiais" (opcional com a apresentação de itens – em geral – de fácil acesso), "Como fazer" (descrição das etapas) e "Para concluir" (questões para o auxílio dos estudantes a respeito da avaliação e da reflexão sobre o desenvolvimento e o resultado).

ATIVIDADES E DIVERSIFICANDO

A seção *Atividades*, proposta após a apresentação de alguns conteúdos, e a seção *Diversificando*, no final de cada capítulo, buscam desenvolver diferentes habilidades, abrangendo conceitos trabalhados ao longo do capítulo. Essas seções também podem ser utilizadas como avaliação reguladora.

AO FINAL DA UNIDADE

AMPLIANDO HORIZONTES

A seção tem como principal objetivo fornecer informações, dados e conhecimentos específicos que possibilitem aos estudantes fazer boas escolhas financeiras e compreender suas consequências. A intenção é permitir o desenvolvimento da Educação Financeira. Esse aprendizado ocorre por meio da compreensão e da discussão de situações elucidadas em textos e imagens.

Os principais objetivos dessa seção são:

- Formar para a cidadania.
- Desenvolver a cultura de prevenção.
- Formar multiplicadores de conhecimento.
- Ensinar a planejar em curto, médio e longo prazos.
- Ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável.
- Oferecer conceitos e ferramentas para tomadas de decisão autônomas com base em mudanças de atitude.

RESOLVENDO PROBLEMAS

Um dos principais objetivos dessa seção é expor os estudantes a situações-problema diversificadas, buscando desenvolver o interesse por estratégias de resolução. Compreender e resolver problemas, criar estratégias de resolução, identificar informações pertinentes, tomar decisões individuais e em grupo e saber comunicá-las são capacidades importantes na vida em sociedade.

A seção é proposta em dois momentos em cada volume e está estruturada da seguinte maneira: “O problema” (apresentação do problema a ser resolvido), “Compreensão do problema” (questões que ajudam os estudantes a compreender o problema proposto), “Resolução do problema” (perguntas que orientam os estudantes a traçar uma estratégia para a resolução do problema), “Reflexão sobre o problema” (atividades que incentivam a reflexão a respeito do problema) e “Mais problemas” (outras situações-problema que podem ser resolvidas com a estratégia desenvolvida).

A seguir, são apresentadas as estratégias predominantes na abordagem sugerida para a resolução dos problemas dessa seção ao longo da coleção.

	Unidade	ESTRATÉGIA PREDOMINANTE NA ABORDAGEM SUGERIDA
6º ANO	3	Resolução de trás para a frente
	5	Resolução por tentativa e erro
7º ANO	3	Representação esquemática ou mental
	6	Tradução para a linguagem algébrica
8º ANO	3	Observação de padrões
	6	Tradução para a linguagem algébrica
9º ANO	3	Consulta de um problema mais simples
	6	Organização de informações

INVESTIGAR

A seção *Investigar* propõe atividades de caráter investigativo, voltadas à aplicação de métodos de pesquisa de modo organizado e orientado, incluindo estudos bibliográficos, entrevistas, etc.

Essa seção é proposta em dois momentos em cada volume, sempre no final das unidades 4 e 8.

Ela está estruturada do seguinte modo: "Para começar" (contextualização e apresentação da proposta, exposição da questão a ser investigada e apresentação da prática de pesquisa e do instrumento de coleta), "Procedimentos" (texto instrucional sobre como realizar a atividade), "Questões para discussão" (perguntas para debate sobre a realização do trabalho e os resultados obtidos) e "Comunicação dos resultados" (orientação a respeito do compartilhamento do conhecimento produzido).

A seguir, são apresentados os temas, as práticas de pesquisa, os instrumentos de coleta e os produtos, propostos nessa seção ao longo da coleção.

	Unidade	TEMA	PRÁTICA DE PESQUISA	INSTRUMENTO DE COLETA	PRODUTO
6º ANO	4	Medir o tempo: origens e instrumentos	Bibliográfica	Levantamento de referências teóricas	Seminário
	8	Descobrindo a pesquisa estatística	Bibliográfica	Levantamento de referências teóricas	Resumo
7º ANO	4	Arquitetura e Matemática	Bibliográfica	Levantamento de referências teóricas	Exposição de fotografias
	8	De casa para a escola: quanto tempo leva?	De campo	Questionário	Cartaz
8º ANO	4	Escolhendo a melhor amostra	De campo	Questionário e entrevista	Relatório
	8	Vida saudável	De campo	Questionário e entrevista	Vídeo
9º ANO	4	Personalidades da Matemática	Bibliográfica	Levantamento de referências teóricas	Blogue
	8	Mais pessoas ou menos pessoas?	Documental	Levantamento de registros institucionais	Exposição de cartazes e fotos

ATIVIDADES INTEGRADAS

No final de cada unidade há a seção *Atividades integradas*, que retoma e integra os conteúdos estudados nos capítulos. É uma oportunidade de fazer uma avaliação final, observando quais dificuldades os estudantes ainda têm e retomando conceitos conforme julgar necessário.

FINAL DE VOLUME

INTERAÇÃO

INTERAÇÃO

VAMOS RECICLAR?

A seção oferece aos estudantes a oportunidade de planejar e de realizar um projeto. Com o objetivo de desenvolver as habilidades necessárias à participação em atividades em grupo (por exemplo: cooperação, capacidade de resolver problemas e comunicação), apresenta uma proposta de trabalho colaborativo como forma de relacionar os conteúdos estudados a situações práticas. Além disso, possibilita um trabalho interdisciplinar.

Essa seção está localizada ao final do volume, para que você tenha mais controle sobre o desenvolvimento da atividade. Entretanto, a proposta é de longa duração; portanto, sugerimos que seja desenvolvida ao longo do ano ou de um semestre.

O esquema a seguir evidencia a organização dessa seção na coleção.

	TEMA	INTERDISCIPLINARIDADE PROPOSTA	PRODUTO
6º ANO	Representatividade em números	Língua Portuguesa	Vídeo
7º ANO	Vamos reciclar?	Arte	Exposição de arte
8º ANO	Escola sustentável	Ciências	Maquete
9º ANO	Imigrantes e refugiados	Geografia e História	Exposição

SUGESTÃO DE CRONOGRAMA

Apresentamos a seguir uma proposta de distribuição dos conteúdos presentes neste volume em bimestres, trimestres e semestres. Entretanto, sabemos que o dinamismo do contexto escolar exige uma prática docente que seja flexível diante dos desafios presentes ao longo do ano letivo. Esta proposta, portanto, tem o objetivo de nortear a prática pedagógica de maneira que você possa adaptá-la à realidade escolar e ao projeto pedagógico desenvolvido na escola. Você também pode complementar a proposta em questão, explorando mais detalhadamente os temas, os boxes e as seções que compõem os capítulos e as unidades e, ainda, os momentos previstos para avaliações.

CONTEÚDO	PERÍODO	1º bimestre						2º bimestre						3º bimestre						4º bimestre					
		1º trimestre								2º trimestre								3º trimestre							
		1º semestre												2º semestre											
Unidade 1 Números	**Capítulo 1** Múltiplos e divisores	▨																							
	Capítulo 2 Números inteiros		▨	▨																					
	Capítulo 3 Operações com números inteiros				▨	▨																			
Unidade 2 Números racionais	**Capítulo 1** Números racionais						▨																		
	Capítulo 2 Operações com números racionais							▨	▨																
Unidade 3 Figuras geométricas	**Capítulo 1** Ângulos									▨															
	Capítulo 2 Polígonos										▨														
Unidade 4 Introdução à álgebra	**Capítulo 1** Expressões algébricas											▨													
	Capítulo 2 Equações												▨												
Unidade 5 Proporcionalidade e porcentagem	**Capítulo 1** Razão e proporção													▨											
	Capítulo 2 Porcentagem														▨										
Unidade 6 Circunferência, círculo e transformações geométricas	**Capítulo 1** Circunferência e círculo															▨	▨								
	Capítulo 2 Transformações geométricas																	▨	▨						
Unidade 7 Probabilidade e Estatística	**Capítulo 1** Probabilidade																			▨					
	Capítulo 2 Estatística																				▨	▨			
Unidade 8 Grandezas e medidas	**Capítulo 1** Medições																						▨		
	Capítulo 2 Áreas e volumes																							▨	▨
Interação Vamos reciclar?														▨	▨	▨	▨	▨	▨	▨	▨	▨	▨	▨	▨

QUADROS DE CONTEÚDOS DA COLEÇÃO

Os quadros a seguir sintetizam os conteúdos, as habilidades, as competências gerais e específicas de Matemática da BNCC e os Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta coleção. Eles estão organizados por volume e por unidade.

6º ANO

UNIDADE 1 – SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E NÚMEROS NATURAIS	
Conteúdos	• Sistema de numeração egípcio • Sistema de numeração romano • Sistema de numeração indo-arábico • Ordens e classes dos números naturais no sistema de numeração decimal • Números naturais (representação na reta numérica, comparação e ordenação) • Operações com números naturais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada) • Propriedades das operações com números naturais • Arredondamentos e estimativas • Expressões numéricas envolvendo números naturais
Habilidades	EF06MA01, EF06MA02, EF06MA03, EF06MA12 e EF06MA14.
Competências gerais	1, 2, 7 e 9.
Competências específicas	1, 2, 3 e 7.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente e Economia.

UNIDADE 2 – GEOMETRIA	
Conteúdos	• Ponto, reta e plano – conceito, representação e nomenclatura • Semirretas • Segmentos de reta • Ponto médio • Ângulos – conceito, representação e classificação • Posições relativas entre retas no plano • Classificação de figuras geométricas planas • Classificação de figuras geométricas não planas • Polígonos e seus elementos • Classificação de triângulos • Classificação de quadriláteros • Poliedros, classificações e seus elementos • Relação de Euler • Não poliedros
Habilidades	EF06MA17, EF06MA18, EF06MA19, EF06MA20, EF06MA25, EF06MA26 e EF06MA27.
Competências gerais	2, 4 e 9.
Competências específicas	1, 2, 7 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Economia, Cidadania e Civismo e Multiculturalismo.

UNIDADE 3 – DIVISIBILIDADE

Conteúdos	• Sequências numéricas • Múltiplos de um número natural • Divisores de um número natural • Relações entre múltiplo e divisor • Critérios de divisibilidade • Números primos e números compostos • Decomposição em fatores primos
Habilidades	EF06MA04, EF06MA05, EF06MA06 e EF06MA34.
Competências gerais	7, 8 e 9.
Competências específicas	3 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Cidadania e Civismo e Multiculturalismo.

UNIDADE 4 – LOCALIZAÇÃO, SEMELHANÇA E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Conteúdos	• Localização • Localização de pontos • Plano cartesiano • Pares ordenados no plano cartesiano • Localização de vértices de polígonos no plano cartesiano • Deslocamento no plano cartesiano • Figuras semelhantes • Ampliação, redução e reprodução de figuras na malha quadriculada • Ampliação e redução de figuras no plano cartesiano • Ampliação, redução e deformação de figuras em *software* • Construção de retas paralelas e perpendiculares com régua e esquadro ou par de esquadros • Construção de quadriláteros com régua e esquadro e com *software* de geometria dinâmica
Habilidades	EF06MA16, EF06MA21, EF06MA22 e EF06MA23.
Competências gerais	8, 9 e 10.
Competência específica	8
Tema Contemporâneo Transversal	Cidadania e Civismo

UNIDADE 5 – NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA FRACIONÁRIA

Conteúdos	• Números racionais positivos na forma fracionária (leitura e escrita) • Situações que envolvem frações • Tipos de fração • Números mistos • Fração de um número • Frações equivalentes • Simplificação e comparação de frações • Operações com frações: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada • Porcentagem
Habilidades	EF06MA07, EF06MA08, EF06MA09, EF06MA10, EF06MA13, EF06MA14 e EF06MA15.
Competências gerais	2, 7 e 9.
Competências específicas	1, 3, 4 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente e Saúde.

UNIDADE 6 – NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA DECIMAL

Conteúdos	• Números racionais positivos na forma decimal: leitura e representação • Frações decimais • Transformações que envolvem números na forma decimal e frações • Números na forma decimal equivalentes • Comparação de números na forma decimal • Operações com números na forma decimal: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada • Porcentagem
Habilidades	EF06MA01, EF06MA02, EF06MA08, EF06MA11, EF06MA13 e EF06MA14.
Competências gerais	2, 9 e 10.
Competência específica	3
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia e Ciência e Tecnologia.

UNIDADE 7 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Conteúdos	• Conceitos iniciais de probabilidade – experimento aleatório, espaço amostral e evento • Cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento • Etapas e elementos de uma pesquisa estatística • Tabelas e gráficos • Fluxogramas, organogramas e infográficos
Habilidades	EF06MA30, EF06MA31, EF06MA32, EF06MA33 e EF06MA34.
Competências gerais	1, 5 e 9.
Competências específicas	5 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Cidadania e Civismo e Multiculturalismo.

UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS

Conteúdos	• Grandezas e medidas • Sistema Internacional de Unidades • Medidas de comprimento, de área, de volume, de capacidade, de massa, de temperatura e de tempo • Transformações entre unidades de medida de uma mesma grandeza • Perímetro de uma figura plana • Área de um retângulo • Área de um triângulo • Volume do bloco retangular • Relação entre volume e capacidade • Vistas e plantas baixas • Escalas
Habilidades	EF06MA24, EF06MA28 e EF06MA29.
Competências gerais	6, 7, 8, 9 e 10.
Competências específicas	1, 2, 3, 6, 7 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia, Multiculturalismo e Ciência e Tecnologia.

7º ANO

UNIDADE 1 – NÚMEROS	
Conteúdos	• Múltiplos • Divisores • Divisibilidade • Mínimo múltiplo comum • Máximo divisor comum • Conjunto dos números inteiros • Representação dos números inteiros na reta numérica • Comparação e ordenação de números inteiros • Módulo (ou valor absoluto) de um número inteiro • Oposto (ou simétrico) de um número inteiro • Operações com números inteiros: adição, subtração, multiplicação e divisão • Propriedades da adição e da multiplicação de números inteiros • Operações inversas • Expressões numéricas envolvendo números inteiros
Habilidades	EF07MA01, EF07MA03 e EF07MA04.
Competência geral	9
Competências específicas	1 e 4.
Tema Contemporâneo Transversal	Meio Ambiente

UNIDADE 2 – NÚMEROS RACIONAIS	
Conteúdos	• Números racionais nas representações fracionária e decimal • Conjunto dos números racionais • Representação dos números racionais na reta numérica • Representação decimal de números racionais: finita ou infinita e periódica • Módulo e simétrico de um número racional • Comparação de números racionais • Operações com números racionais • Relação fundamental da subtração • Números inversos • Relação fundamental da divisão • Expressões numéricas envolvendo números racionais
Habilidades	EF07MA05, EF07MA07, EF07MA08, EF07MA09, EF07MA10, EF07MA11 e EF07MA12.
Competências gerais	7, 8, 9 e 10.
Competências específicas	3, 5 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente e Ciência e Tecnologia.

UNIDADE 3 – FIGURAS GEOMÉTRICAS

Conteúdos	• Ângulos • Grau e submúltiplos do grau • Construção de ângulos com régua e transferidor • Adição, subtração, multiplicação e divisão com medidas de ângulos • Ângulos congruentes, adjacentes, consecutivos, complementares e suplementares • Ângulos opostos pelo vértice • Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal • Elementos dos polígonos • Diagonais dos polígonos • Ângulos externos e internos dos polígonos • Condição de existência de um triângulo • Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo • Soma das medidas dos ângulos internos e externos de polígonos • Classificação dos triângulos quanto aos lados e aos ângulos • Construção de triângulos com régua e compasso • Construção de polígonos regulares com régua e transferidor
Habilidades	EF07MA23, EF07MA24, EF07MA25, EF07MA26, EF07MA27 e EF07MA28.
Competência geral	2
Competências específicas	3, 4 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Multiculturalismo e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 4 – INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA

Conteúdos	• Introdução às expressões algébricas • Termos de uma expressão algébrica • Simplificação de uma expressão algébrica • Sequências e expressões algébricas • Solução ou raiz de uma equação • Conjunto universo e conjunto solução de uma equação • Equações do 1º grau com uma incógnita • Equações com duas incógnitas
Habilidades	EF07MA13, EF07MA14, EF07MA15, EF07MA16 e EF07MA18.
Competências gerais	4, 6, 8, 9 e 10.
Competência específica	3
Temas Contemporâneos Transversais	Economia e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 5 – PROPORCIONALIDADE E PORCENTAGEM

Conteúdos	• Razão • Proporção • Sequências diretamente e inversamente proporcionais • Grandezas diretamente e inversamente proporcionais • Regra de três • Porcentagem envolvendo números na forma fracionária, na forma decimal e cálculo mental • Porcentagem e proporcionalidade • Acréscimos e decréscimos
Habilidades	EF07MA02, EF07MA13 e EF07MA17.
Competências gerais	2, 7, 9 e 10.
Competências específicas	3, 5 e 6.
Tema Contemporâneo Transversal	Meio Ambiente

UNIDADE 6 – CIRCUNFERÊNCIA, CÍRCULO E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Conteúdos	• Circunferência • Elementos de uma circunferência: raio, corda, diâmetro, arcos e ângulo central • Medida de comprimento e medida angular de um arco • Cálculo aproximado do número π • Posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências • Círculo e setor circular • Eixo de simetria • Figuras assimétricas • Construções de figuras simétricas • Transformações geométricas: reflexão, rotação e translação • Outras transformações geométricas no plano cartesiano
Habilidades	EF07MA06, EF07MA19, EF07MA20, EF07MA21, EF07MA22 e EF07MA33.
Competência geral	7
Competências específicas	1, 2, 5 e 6.
Tema Contemporâneo Transversal	Meio Ambiente

UNIDADE 7 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Conteúdos	• Experimento aleatório, espaço amostral e evento • Cálculo de probabilidade de ocorrência de um evento • Simulações que envolvem cálculo de probabilidade • Pesquisa amostral e pesquisa censitária • Planejamento de pesquisa, coleta e organização dos dados, construção de tabelas e gráficos e interpretação das informações • Tabelas simples e de dupla entrada • Gráficos de barras simples, de barras duplas, de linhas, pictórico e de setores • Cálculo da média aritmética com e sem o uso de planilhas eletrônicas
Habilidades	EF07MA34, EF07MA35, EF07MA36 e EF07MA37.
Competências gerais	4, 8, 9 e 10.
Competências específicas	2, 4, 6 e 7.
Temas Contemporâneos Transversais	Saúde, Cidadania e Civismo e Ciência e Tecnologia.

UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS

Conteúdos	• Grandezas e medidas • Unidades de medida padronizadas e não padronizadas • Equivalência entre figuras planas • Área e suas unidades de medida padronizadas • Área de quadriláteros e triângulos • Volume de um bloco retangular
Habilidades	EF07MA29, EF07MA30, EF07MA31 e EF07MA32.
Competências gerais	1, 4, 7 e 9.
Competências específicas	1, 3, 4 e 5.

8º ANO

UNIDADE 1 – POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

Conteúdos	• Potenciação de números racionais • Propriedades da potenciação • Notação científica • Radiciação de números racionais • Potenciação com expoente fracionário • Propriedades da radiciação
Habilidades	EF08MA01 e EF08MA02.
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	2 e 3.
Temas Contemporâneos Transversais	Saúde, Ciência e Tecnologia, Meio Ambiente e Economia.

UNIDADE 2 – CÁLCULO ALGÉBRICO

Conteúdos	• Situações que envolvem expressões algébricas • Valor numérico de uma expressão algébrica • Monômios • Operações com monômios: adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação • Polinômios • Operações com polinômios: adição, subtração, multiplicação e divisão
Habilidade	EF08MA06
Competências gerais	7, 9 e 10.
Competência específica	3
Tema Contemporâneo Transversal	Economia

UNIDADE 3 – EQUAÇÕES E SISTEMAS

Conteúdos	• Equações do 1º grau com uma incógnita • Fração geratriz de uma dízima periódica • Equações do 1º grau com duas incógnitas • Resolução gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas • Equações do 2º grau na forma $ax^2 = b$ • Resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$ • Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas • Resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas • Análise da solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas por meio de representação gráfica • Classificação de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas em: SPD, SI ou SPI
Habilidades	EF08MA05, EF08MA07, EF08MA08 e EF08MA09.
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	1, 3, 5 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Cidadania e Civismo, Ciência e Tecnologia e Saúde.

UNIDADE 4 – TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

Conteúdos	• Elementos e classificação dos triângulos • Condição de existência ou desigualdade triangular • Relação entre um ângulo externo e dois ângulos não adjacentes • Cevianas de um triângulo • Mediatriz do lado de um triângulo • Pontos notáveis do triângulo: ortocentro, baricentro, incentro e circuncentro • Casos de congruência de triângulos • Elementos de um quadrilátero • Classificação dos quadriláteros • Soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo • Paralelogramos: classificação e propriedades • Trapézios: classificação e propriedades
Habilidade	EF08MA14
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	3 e 7.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 5 – SEQUÊNCIAS E PROPORCIONALIDADE

Conteúdos	• Sequências recursivas e não recursivas • Termos de uma sequência • Grandezas direta e inversamente proporcionais • Constante de proporcionalidade • Grandezas não proporcionais
Habilidades	EF08MA10, EF08MA11, EF08MA12 e EF08MA13.
Competências gerais	3, 7, 8 e 9.
Competências específicas	2 e 7.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Cidadania e Civismo e Multiculturalismo.

UNIDADE 6 – CONSTRUÇÕES E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Conteúdos	• Conceito e construção de bissetriz de um ângulo e de mediatriz de um segmento com régua e compasso • Construção de ângulos de 30º, 45º, 60º e 90º com régua e compasso • Polígonos regulares inscritos em uma circunferência • Elementos de um polígono regular inscrito em uma circunferência • Construção de polígonos regulares (triângulo equilátero, quadrado e octógono regular) inscritos em uma circunferência, com o auxílio de régua e compasso • Construção de polígonos regulares (pentágono regular, dodecágono regular e hexágono regular) inscritos em uma circunferência pelo ângulo central • Isometrias • Transformações geométricas por reflexão, translação e rotação
Habilidades	EF08MA15, EF08MA16, EF08MA17 e EF08MA18.
Competência geral	7
Competência específica	6
Temas Contemporâneos Transversais	Ciência e Tecnologia e Multiculturalismo.

UNIDADE 7 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Conteúdos	• Árvore de possibilidades • Princípio fundamental da contagem • Conceitos iniciais de probabilidade: experimento aleatório, espaço amostral e evento • Cálculo da probabilidade de um evento • Eventos complementares • Medidas de tendência central: média aritmética, média aritmética ponderada, mediana e moda • Medidas de dispersão: amplitude, desvio, variância e desvio-padrão • Frequência absoluta e frequência relativa • Histograma • Pesquisa amostral e pesquisa censitária • Representação de dados e análise dos diferentes tipos de gráfico • Planejamento e execução de pesquisa amostral
Habilidades	EF08MA03, EF08MA04, EF08MA22, EF08MA23, EF08MA24, EF08MA25, EF08MA26 e EF08MA27.
Competências gerais	6 e 9.
Competências específicas	3, 4 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Ciência e Tecnologia e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS

Conteúdos	• Área de figuras planas • Ideias associadas a volume e capacidade • Volume de um bloco retangular • Volume de um cilindro
Habilidades	EF08MA19, EF08MA20 e EF08MA21.
Competências gerais	5, 7, 8 e 9.
Competência específica	7
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia, Saúde e Ciência e Tecnologia.

9º ANO

UNIDADE 1 – CONJUNTOS NUMÉRICOS, POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

Conteúdos	• Conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais) • Representação, ordenação e comparação dos números reais na reta numérica • Potenciação com expoentes inteiros e suas propriedades • Notação científica • Radiciação e suas propriedades • Comparação entre radicais • Operação com radicais • Racionalização de denominadores • Potência de radicais • Potência de expoente racional e suas propriedades
Habilidades	EF09MA02, EF09MA03 e EF09MA04.
Competências gerais	7 e 9.
Competência específica	3
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Cidadania e Civismo, Ciência e Tecnologia e Economia.

UNIDADE 2 – RAZÃO, PROPORÇÃO E MATEMÁTICA FINANCEIRA

Conteúdos	• Razão • Proporção • Divisão em partes proporcionais • Regra de três simples e regra de três composta • Porcentagem • Descontos e acréscimos sucessivos • Juros
Habilidades	EF09MA05, EF09MA07 e EF09MA08.
Competências gerais	1, 5, 8 e 9.
Competência específica	3
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 3 – RETAS E ÂNGULOS, SEMELHANÇA E TRIÂNGULO RETÂNGULO

Conteúdos	• Retas cortadas por uma transversal • Relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal • Razão e proporção entre segmentos • Feixe de retas paralelas cortadas por transversais • Teorema de Tales • Aplicações do teorema de Tales • Figuras semelhantes • Ampliação e redução de figuras • Semelhança de polígonos • Casos de semelhança de triângulos • Elementos do triângulo retângulo • Medidas no triângulo retângulo • Relações métricas no triângulo retângulo • Teorema de Pitágoras e suas aplicações
Habilidades	EF09MA01, EF09MA10, EF09MA12, EF09MA13 e EF09MA14.
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	1, 3 e 6.
Temas Contemporâneos Transversais	Multiculturalismo e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 4 – PRODUTOS NOTÁVEIS, FATORAÇÃO E EQUAÇÕES

Conteúdos	• Quadrado da soma e da diferença de dois termos • Produto da soma pela diferença de dois termos • Cubo da soma e da diferença de dois termos • Fator comum em evidência • Agrupamento • Diferença de dois quadrados • Trinômio quadrado perfeito • Soma e diferença de dois cubos • Fração algébrica: valor numérico e simplificação • Operações com frações algébricas
Habilidade	EF09MA09
Competências gerais	1, 7 e 9.
Competências específicas	1, 3 e 8.
Temas Contemporâneos Transversais	Meio Ambiente, Economia e Saúde.

UNIDADE 5 – GEOMETRIA

Conteúdos	• Plano cartesiano • Medida da distância entre dois pontos no plano • Ponto médio de um segmento no plano cartesiano • Perímetro e área de figuras planas representadas no plano cartesiano • Circunferência e arcos de circunferência • Ângulo central e ângulo inscrito em uma circunferência • Relação entre o ângulo inscrito e o arco da circunferência determinado por ele • Relação entre o ângulo central e o ângulo inscrito • Polígonos regulares • Construção de polígonos regulares com régua e compasso e com *software* de geometria dinâmica • Representação de vistas • Noções de perspectiva
Habilidades	EF09MA11, EF09MA15, EF09MA16 e EF09MA17.
Competências gerais	9 e 10.
Temas Contemporâneos Transversais	Multiculturalismo e Cidadania e Civismo.

UNIDADE 6 – FUNÇÕES

Conteúdos	• Noção de função • Lei de formação de uma função • Valor de uma função • Representação gráfica de uma função • Função afim • Casos de função afim • Gráfico de uma função afim • Zero de uma função afim • Variação de uma função afim • Estudo do sinal da função afim • Função linear e proporcionalidade
Habilidades	EF09MA06 e EF09MA08.
Competência geral	8
Competências específicas	3, 6 e 8.

UNIDADE 7 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Conteúdos	• Experimento aleatório, espaço amostral e eventos • Probabilidade condicional • Eventos dependentes e independentes • Medidas de tendência central: média, moda e mediana • Medidas de dispersão: amplitude, desvio, variância e desvio-padrão • Análise de tabelas e gráficos estatísticos • Etapas e elementos de uma pesquisa estatística
Habilidades	EF09MA20, EF09MA21, EF09MA22 e EF09MA23.
Competências gerais	1 e 9.
Competências específicas	2, 5 e 6.

UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS

Conteúdos	• Medidas muito grandes ou muito pequenas • Prefixos do Sistema Internacional (SI) de unidades • Unidades de medida de comprimento • Unidades de medida de massa • Unidades de medida de informática • Volume de prisma, pirâmide, cilindro e cone
Habilidades	EF09MA18 e EF09MA19.
Competências gerais	7 e 9.
Competências específicas	3, 4, 7 e 8.

O MANUAL DO PROFESSOR

O Manual do Professor dispõe seu conteúdo ao redor da imagem reduzida do Livro do Estudante. Esse formato facilita a análise e a integração das orientações, situadas e contextualizadas próximas aos textos, às imagens, às atividades e aos demais recursos presentes no livro didático.

Nesta unidade...

Listas com as competências gerais e específicas de Matemática, os Temas Contemporâneos Transversais e as habilidades da BNCC desenvolvidos na unidade.

Primeiras ideias

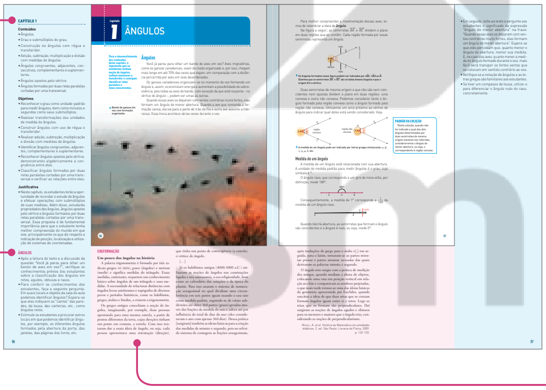
Comentários sobre a abertura da unidade e as respostas das questões propostas.

Sobre a unidade

Texto que apresenta e descreve o tema a ser desenvolvido na unidade, mostrando o que se espera que os estudantes aprendam e como os objetivos e a justificativa da unidade estão articulados.

Capítulo

Apresenta uma lista com os principais conteúdos do capítulo, os objetivos do capítulo e a justificativa da pertinência desses objetivos.

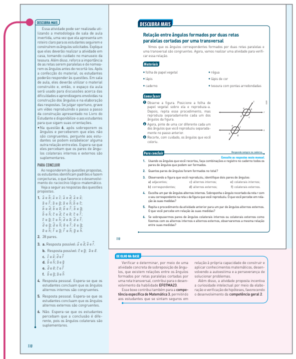


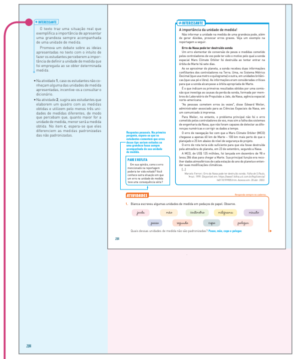
Temas

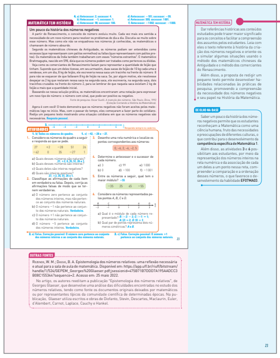
Orientações para a abordagem e o encaminhamento dos conteúdos propostos. Em alguns momentos, constam respostas das atividades propostas.

(In)formação

Textos para a formação do professor que podem subsidiar o trabalho com temas específicos.

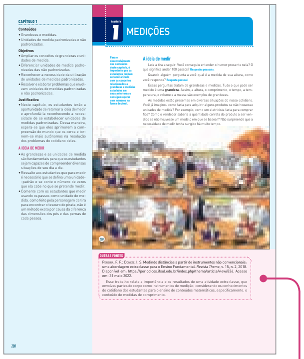


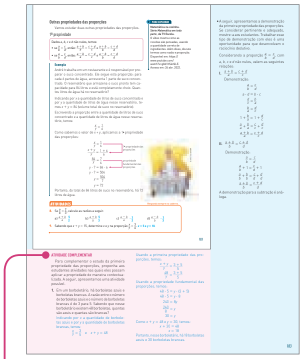


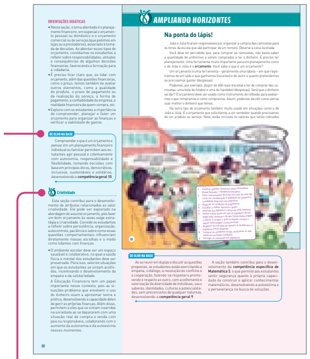


Descubra mais, +Interessante e Matemática tem história

Comentários que subsidiam o trabalho com os boxes presentes no Livro do Estudante.







De olho na Base

Indica e comenta a habilidade e/ou a competência da BNCC que está relacionada ao conteúdo trabalhado.

Outras fontes

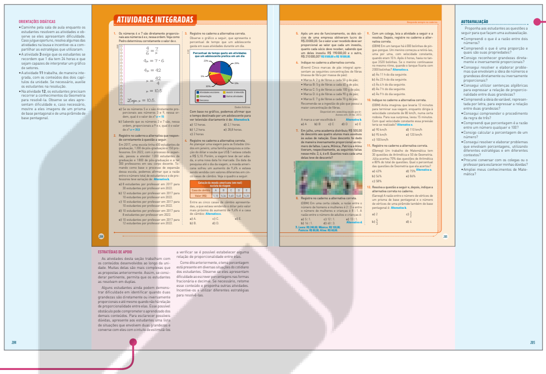
Sugestões para o professor de textos, livros, *sites* e vídeos que podem subsidiar o trabalho com temas específicos.

Atividade complementar

Proposta de atividades extras para serem realizadas com os estudantes.

Valor

O ícone sinaliza o valor trabalhado naquele momento, sobre o qual os estudantes vão refletir.

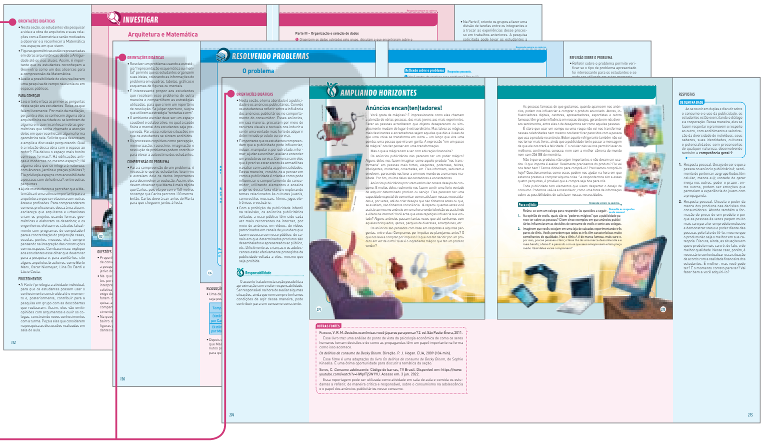


Autoavaliação

Questões para que os estudantes façam uma autoavaliação do aprendizado.

Estratégias de apoio

Nas seções *Diversificando* e *Atividades integradas*, são apresentadas sugestões de outras abordagens para apoiar estudantes com eventuais dificuldades.



Seções

Traz algumas orientações didáticas para o trabalho com essas seções, com comentários e eventuais respostas.

Interação

Apresenta orientações didáticas para a condução da seção. Além disso, traz uma proposta de cronograma, com a indicação do número de aulas a serem trabalhadas na seção, e aponta a abordagem interdisciplinar, demonstrando as habilidades trabalhadas de outro(s) componente(s) curricular(es).

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

Essa obra analisa por que e para que usar metodologias ativas, cujo foco é a participação efetiva dos estudantes na construção do conhecimento e no desenvolvimento de competências. Segundo os autores, a aplicação inovadora de tais metodologias na educação favorece a aprendizagem, levando em consideração o ritmo, o tempo e o estilo de cada estudante, por meio de diferentes atividades e de compartilhamento de informações, dentro e fora da sala de aula, com mediação docente e incorporação de recursos digitais.

BOALER, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Tradução: Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2018. (Série Desafios da Educação).

A autora apresenta razões pelas quais a Matemática se tornou uma fonte de experiências negativas para estudantes na Educação Básica. Com base em sua extensa pesquisa e nas descobertas recentes da neurociência, ela analisa como professores, gestores e pais podem auxiliar os estudantes a transformar sua experiência com a Matemática ao desenvolver neles uma mentalidade de crescimento. Com exemplos práticos, o livro propõe técnicas e atividades que podem ser implementadas na escola para tornar a aprendizagem da Matemática mais significativa e acessível a todos os estudantes.

BRACKMANN, C. P. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica*. 2017. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias da Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208. Acesso em: 17 jun. 2022.

O autor trata do pensamento computacional como uma abordagem de ensino que utiliza técnicas oriundas da Ciência da Computação.

BRASIL. *Constituição* (1988). Constituição da República Federativa do Brasil: texto constitucional promulgado em 5 de outubro de 1988, com as alterações adotadas pelas Emendas Constitucionais n. 1/1992 a 99/2017, pelo Decreto Legislativo n. 186/2008 e pelas Emendas Constitucionais de Revisão n. 1 a 6/1994. 53. ed. Brasília: Edições Câmara, 2018.

Nesse documento encontram-se os itens da Constituição brasileira que deram origem à Lei de Diretrizes e Bases de 1996, que, por sua vez, estabelece os fundamentos da atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC), cuja última versão, até a publicação deste material, foi apresentada em 2018.

BRASIL. Lei n. 9 394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: Diário Oficial da União, 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm. Acesso em: 17 jun. 2022.

O documento, que contribuiu para a posterior elaboração da BNCC, estabelece as competências e as habilidades para a formação dos estudantes diante dos desafios do mundo contemporâneo.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de avaliação de Matemática – Pisa 2012*. Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) traz informações sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária de 15 anos. Nesse documento, é possível conhecer a matriz de avaliação de Matemática do programa.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de referência Enem*. Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) é uma prova do governo federal que avalia o desempenho individual dos participantes. A matriz de referência do Enem apresenta as competências e as habilidades que são exigidas no exame.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matrizes de referência de Matemática do Saeb*. Brasília: Inep, 2022.

Esse documento apresenta as competências e as habilidades que se espera que os participantes das avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) tenham desenvolvido na etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.

De caráter normativo, esse documento define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e das modalidades da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Competências socioemocionais como fator de proteção à saúde mental e ao* bullying. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/195-competencias-socioemocionais-como-fator-de-protecao-a-saude-mental-e-ao-bullying. Acesso em: 17 jun. 2022.

As competências socioemocionais, presentes no contexto escolar, estão de acordo com as novas diretrizes propostas pela BNCC. No contexto da educação para o século XXI, os estudantes devem se preparar para além das competências cognitivas, mantendo a inter-relação dos conteúdos, por meio do gerenciamento das emoções, para que possam resolver problemas em todas as áreas que a vida prática venha a exigir deles.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica*. Brasília: MEC/SEB/Dicei, 2013.

Esse documento traz as diretrizes que estabelecem a base nacional comum, responsável por orientar a organização, a articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas das redes de ensino brasileiras.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Ensino Fundamental de nove anos*: orientações para a inclusão da criança de seis anos de idade. Brasília: MEC/SEB, 2007.

O documento foi elaborado com base no diálogo com gestores dos sistemas de ensino e tem como propósito desenvolver uma metodologia de trabalho voltada à ampliação do programa de Ensino Fundamental para alunos de 6 anos de idade.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.

Esse documento explicita a relação entre os diferentes componentes curriculares e as situações vivenciadas pelos estudantes. O texto considera ainda os contextos escolar e social na formação para o trabalho, a cidadania e a democracia, respeitando as características regionais e locais da cultura e da economia e seu impacto na vida dos estudantes.

Bruner, J. S. *O processo da educação*. 3. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1973.
Tendo em vista a reforma curricular na área da educação, o autor mostra nesse livro que os conceitos básicos da ciência e das humanidades podem ser ensinados a crianças desde muito pequenas.

Bussab, W. O.; Morettin, P. A. *Estatística básica*. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.
O livro é dividido em três partes: a análise de dados unidimensionais e bidimensionais, os conceitos básicos de probabilidades e de variáveis aleatórias e os tópicos principais da inferência estatística, além de temas especiais, como regressão linear simples. Em todos os capítulos, traz uma seção que ensina a aplicar a teoria por meio de *softwares*.

Coll, C. *Psicologia e currículo*: uma aproximação psicopedagógica à elaboração do currículo escolar. São Paulo: Ática, 2000.
Esse livro apresenta um modelo de projeto curricular que orienta a elaboração de propostas curriculares na educação escolar, abordando desde as relações entre aprendizagem, desenvolvimento e educação até as funções do currículo no planejamento de ensino.

Cruz, C. *Competências e habilidades*: da proposta à prática. São Paulo: Loyola, 2001.
Nesse livro, o autor explica a diferença do que se entende por competência e habilidade e a relação entre essas ideias. O texto fornece subsídios de como colocar em prática o ensino por meio de competências e habilidades.

Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA). 1990. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/lei8069_02.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.
Esse é o principal documento brasileiro que descreve os direitos e os deveres de crianças e jovens, em seu art. 2º, e considera criança “a pessoa até doze anos de idade incompletos, e adolescente aquela entre doze e dezoito anos de idade” (ECA, p. 1).

Eves, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2011.
Nesse livro, uma das obras mais completas da área da história da Matemática, o autor descreve a história da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos, além de apresentar recursos pedagógicos e o panorama cultural de cada época abordada.

Fiorin, J. L. *As astúcias da enunciação*: as categorias de pessoa, espaço e tempo. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.
No livro, por meio de exemplos diversos, o autor descreve e analisa como as categorias de pessoa, espaço e tempo se manifestam no discurso e quais são os efeitos de sentido que nele engendram.

Freire, P. *Pedagogia da autonomia*. São Paulo: Paz e Terra, 2005.
Trata-se de uma obra de referência na área da educação, em que o autor, com base no olhar revolucionário e no rigor crítico, reflete sobre o que o ato de ensinar exige de educadores e de educandos.

Gardner, H. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Porto Alegre: Artmed, 1995.
Precursor dos estudos de neurociência, o autor apresenta as ideias fundamentais que desencadeiam uma revolução na forma de compreender a inteligência humana e as possibilidades de sua aplicação na educação, em especial nas escolas ou nas salas de aula nas quais a aprendizagem é pensada com profundidade, para além do estudo superficial de conteúdos, visando a um ensino voltado para a compreensão.

Grover, S.; Pea, R. Computational thinking in K-12: a review of the state of the field. *Educational Researcher*, v. 42, n. 1, p. 38-43, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/258134754_Computational_Thinking_in_K-12_A_Review_of_the_State_of_the_Field. Acesso em: 17 jun. 2022.
Esse artigo reúne relatos da experiência de um curso de formação continuada em pensamento computacional, do Programa Norte-rio-grandense de Pensamento Computacional (PENSA RN), com professores dos anos finais do Ensino Fundamental. Tal experiência permitiu que professores adotassem novas estratégias em seu ambiente de trabalho, elaborando e aplicando práticas educativas integradas ao pensamento computacional na rede de ensino em escolas públicas.

Hattie, J. *Aprendizagem visível para professores*: como maximizar o impacto da aprendizagem. Porto Alegre: Penso, 2017.
Fundamentado em amplas pesquisas com milhões de estudantes ao redor do mundo, o autor explica como é possível maximizar a aprendizagem na escola por meio do que ele define como aprendizagem visível. Nessa obra, ele apresenta conceitos bastante inovadores relacionados à avaliação e ao acompanhamento contínuo da aprendizagem pelo educador e pelo estudante, ensinando como aplicar os princípios da aprendizagem visível em qualquer sala de aula.

Iezzi, G. *et al. Fundamentos de Matemática elementar, v. 1*: Conjuntos e funções. São Paulo: Atual, 2013.
Com um total de 11 volumes, essa coleção é consagrada por oferecer aos leitores o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Neste volume são desenvolvidos os conteúdos referentes a conjuntos e funções.

Lima, E. C. de S. *Algumas questões sobre o desenvolvimento do ser humano e a aquisição de conhecimentos na escola*: currículo básico para a escola pública do estado do Paraná. 3. ed. Curitiba: Secretaria de Estado da Educação, 2003.
Esse trabalho foi desenvolvido com base na análise da prática em sala de aula e na reflexão sobre ela, com vistas a uma sociedade mais justa, em que todos tenham acesso ao conhecimento e dele possam se apropriar.

Lopes, A. C. *Políticas de integração curricular*. Rio de Janeiro: EdUERJ, 2008. Disponível em: https://www.eduerj.uerj.br/engine/wp-content/uploads/woocommerce_uploads/2016/01/Pol%C3%ADticas-de-Integra%C3%A7%C3%A3o-Curricular.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.
Nesse livro, a autora analisa a atual política de organização do currículo a partir do entendimento da história do pensamento curricular nas principais organizações curriculares clássicas, que permitem entender os atuais discursos pedagógicos.

Luckesi, C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2018.
O objetivo dessa obra é apresentar estudos sobre avaliação da aprendizagem escolar, bem como proposições para torná-la mais viável e construtiva para estudantes e professores.

Machado, N. J. *Conhecimento e valor*. São Paulo: Moderna, 2004.
Nesse livro, o autor reuniu alguns ensaios referentes ao conhecimento como valor, apresentando textos cuja finalidade maior é a compreensão do valor do conhecimento e da função da educação. Ele afirma que o único caminho para a “distribuição” de conhecimento é, sem dúvida, a educação, e a omissão dos educadores pode provocar o predomínio das perspectivas de outros profissionais, como os economistas, no terreno educacional.

Marques, M. *Teoria da medida*. Campinas: Ed. da Unicamp, 2009.
Nessa obra, o autor apresenta uma série de notas de aulas sobre estudos avançados em teoria de probabilidade e teoria estatística matemática, entre outros, para estudantes de Pós-graduação em Matemática e Estatística. Além disso, traz demonstrações desenvolvidas detalhadamente, visando permitir o aprendizado autossuficiente do leitor.

Mlodinow, L. *A janela de Euclides*: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. Belo Horizonte: Geração, 2010.
Nessa obra, o autor apresenta uma jornada pela Geometria, desde o conceito grego de linhas paralelas até as mais recentes noções de hiperespaço.

Nova Escola. Criança e Adolescente. *21 perguntas e respostas sobre* bullying. 1º ago. 2009. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/336/bullying-escola. Acesso em: 17 jun. 2022.
Nesse artigo, especialistas respondem a 21 perguntas sobre *bullying*, um problema que preocupa pais, professores e gestores.

Oliveira, V. C.; Oliveira, C. P.; Vaz, F. A. *A história da Matemática e o processo de ensino-aprendizagem*. *In*: XX EREMAT – Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. Fundação Universidade Federal do Pampa (Unipampa), Bagé (RS), Brasil, 13-16 nov. 2014. p. 429. Disponível em: https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/PO_oliveira_00971876070.pdf. Acesso em: 17 jun. 2022.
Nesse trabalho, os autores apresentam a utilização da história da Matemática como instrumento de investigação científica no ensino de Matemática. Eles demonstram que tais investigações propiciam aos estudantes momentos de reflexão para o estabelecimento de conexões entre as descobertas, os conhecimentos matemáticos e sua realidade.

Organização Pan-Americana de Saúde (Opas). *Folha informativa sobre covid-19*. Disponível em: https://www.paho.org/pt/covid19. Acesso em: 17 jun. 2022.
Esse documento apresenta diversas informações e atualizações sobre a covid-19 e a pandemia causada pelo novo coronavírus SARS-CoV-2.

Perrenoud, P. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1999.
As competências são enfatizadas pelo sociólogo suíço Philippe Perrenoud ao tratar dos desafios da educação contemporânea. A organização, a administração e o desenvolvimento da aprendizagem, a utilização de novas tecnologias, o trabalho em equipe, o envolvimento dos estudantes em suas aprendizagens e a participação na administração da escola são alguns dos temas abordados.

Piaget, J. *Psicologia e pedagogia*. 9. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2008.
Essa obra é resultado de 40 anos de pesquisas sobre novos métodos psicológicos aplicados à pedagogia. Nela, o autor apresenta as falhas da pedagogia tradicional, excessivamente empírica, e retraça a história das tentativas mais importantes que vêm sendo feitas nesse campo há mais de meio século.

Polya, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
Essa obra aborda a prática de resolver problemas, que implica uma série de procedimentos cognitivos para despertar a curiosidade, a atenção e o interesse pelo trabalho mental, contribuindo para outras atividades da vida.

Rezende, E. Q. F.; Queiroz, M. L. B. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. 2. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2008.
Os autores da obra apresentam as construções geométricas com argumentações lógicas, auxiliando professores e estudantes na resolução de problemas.

Rosenberg, M. *Comunicação não violenta*. Nova edição: Técnicas para aprimorar relacionamentos pessoais e profissionais. São Paulo: Ágora, 2021.
O autor da obra cresceu em um bairro turbulento de Detroit (EUA) e se interessou por novas formas de comunicação para criar alternativas pacíficas de diálogo que amenizassem o clima de violência com o qual convivera. Militante pelos direitos civis, voluntário em abrigos e terapeuta familiar, o autor criou uma organização internacional sem fins lucrativos com pessoas habilitadas a dar treinamentos em comunicação não violenta. O trabalho foi realizado em mais de sessenta países com educadores, profissionais da área de saúde, mediadores, empresários, prisioneiros, guardas, policiais, militares, membros do clero e funcionários públicos.

Ruiz, J. A. L. A internet na cultura juvenil: condicionamentos, significados e usos sociais. Observatório da Juventude na Ibero-América, 1º jun. 2017. Disponível em: https://oji.fundacion-sm.org/a-internet-na-cultura-juvenil-condicionamentos-significados-e-usos-sociais/. Acesso em: 17 jun. 2022.
Nesse artigo, o autor esclarece dois conceitos fundamentais: cultura juvenil e cultura digital. Ele ressalta que a interação dos jovens com todos os meios digitais pode estar impulsionando neles habilidades e potenciais.

Sperandio, D.; Mendes, J. T.; Silva, L. H. M. *Cálculo numérico*: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Pearson, 2006.
Esse livro apresenta os procedimentos mais importantes para a análise de complexos modelos matemáticos, provenientes das mais variadas áreas de conhecimento. Além disso, exercícios ao final de cada capítulo permitem ao leitor testar seus conhecimentos e explorar o conteúdo teórico desenvolvido.

Stein, J. D. A. *A Matemática pode mudar sua vida*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.
Essa obra é um guia prático repleto de orientações sobre como a Matemática pode mudar a vida das pessoas. Utilizando situações suscetíveis à análise da Matemática, o autor traz aplicações matemáticas simples que podem se mostrar muito eficientes na vida financeira, profissional e pessoal de uma pessoa.

Tahan, M. *Matemática divertida e curiosa*. 27. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.
Para mostrar a importância da Matemática, esse livro traz enigmas aritméticos, problemas matemáticos, jogos de engenhosidade, ilusões de ótica, lendas, histórias, piadas, paradoxos geométricos e curiosidades que desafiam a inteligência do leitor.

Van de Walle, J. A. *Matemática no Ensino Fundamental*: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.
Nessa obra, são apresentadas ideias e discussões para orientar os professores de Ensino Fundamental que lecionam esse componente curricular.

Waal, F. de. *A era da empatia*: lições da natureza para uma sociedade mais gentil. São Paulo: Companhia das Letras, 2009.
Tomando como base estudos realizados com macacos-prego e chimpanzés, o autor mostra nessa obra como diversos animais (incluindo os seres humanos), ao longo da evolução, apresentaram uma tendência à empatia, ou seja, à capacidade de se colocar no lugar do próximo.

World Health Organization (WHO). Disponível em: https://www.who.int/pt/. Acesso em: 17 jun. 2022.
Esse *site* apresenta diversas informações e atualizações sobre a pandemia de covid-19, causada pelo novo coronavírus, o SARS-CoV-2.

Zegarelli, M. *Matemática básica e pré-álgebra para leigos*. Rio de Janeiro: Alta Books, 2009.
A obra é um convite ao estudo de muitos temas e conceitos matemáticos, com lições fáceis de acompanhar e uma série de exercícios práticos.

UNIDADE 1 – NÚMEROS

CAPÍTULO 1 – MÚLTIPLOS E DIVISORES

PÁGINA 16 – ATIVIDADES

1. Se o valor desejado é múltiplo de 11 e divisível por 2, isso significa que também se trata de um múltiplo de 2. Como se deseja o menor valor possível, basta calcular o valor do mmc(2, 11).

M(11): {0, 11, 22, 33, 44, 55, ...}

Como os múltiplos de 2 são números pares, o menor número natural não nulo múltiplo de 11 e divisível por 2 é 22.

Portanto, o irmão de Felipe tem 22 anos.

2. **a)** M(5) = {0, 5, 10, 15, 20, ...}

b) M(40) = {0, 40, 80, 120, ...}

c) M(11) = {0, 11, 22, 33, 44, ...}

3. Zero. Isso acontece porque qualquer número natural multiplicado por zero resulta em zero.

4. **a)** M(2): {0, 2, 4, **6**, 8, 10, **12**, ...}

M(3): {0, 3, **6**, 9, **12**, 15, 18, ...}

Os dois primeiros múltiplos comuns não nulos de 2 e 3 são 6 e 12.

b) M(3): {0, 3, 6, 9, 12, **15**, 18, 21, 24, 27, **30**, ...}

M(5): {0, 5, 10, **15**, 20, 25, **30**, ...}

Os dois primeiros múltiplos comuns não nulos de 3 e 5 são 15 e 30.

c) M(2): {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, **24**, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, **48**, ...}

M(3): {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, **24**, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, **48**, ...}

M(8): {0, 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, ...}

Os dois primeiros múltiplos comuns não nulos de 2, 3 e 8 são 24 e 48.

5. Para resolver essa situação, vamos analisar os múltiplos de 8 e de 12 e verificar qual é o menor múltiplo comum não nulo entre eles.

Linha A:

M(8): {0, 8, 16, **24**, 32, ...}

Linha B:

M(12): {0, 12, **24**, 36, ...}

mmc(8, 12) = 24

Portanto, os trens vão passar novamente ao mesmo tempo pela estação após 24 minutos.

6. Para resolver essa situação, vamos analisar os múltiplos de 8 e de 12 e verificar qual é o menor múltiplo comum não nulo entre eles.

M(8): {0, 8, 16, **24**, 32, ...}

M(12): {0, 12, **24**, 36, ...}

Logo, mmc(8, 12) = 24, ou seja, Mariana vai tomar os remédios juntos novamente após 24 horas. Como ela tomou os remédios juntos ao meio-dia, ela tomará os dois juntos novamente ao meio-dia do dia seguinte.

7. **a)**
42 = 1 · 42   42 = 7 · 6
42 = 2 · 21   42 = 14 · 3
42 = 3 · 14   42 = 21 · 2
42 = 6 · 7   42 = 42 · 1

Então, os divisores de 42 são 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 e 42.

b) 13 = 1 · 13   13 = 13 · 1

Então, os divisores de 13 são 1 e 13.

c)
80 = 1 · 80   80 = 10 · 8
80 = 2 · 40   80 = 16 · 5
80 = 4 · 20   80 = 20 · 4
80 = 5 · 16   80 = 40 · 2
80 = 8 · 10   80 = 80 · 1

Então, os divisores de 80 são 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 e 80.

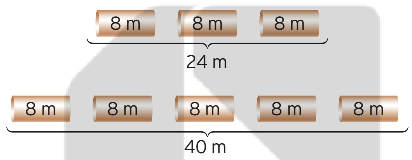
8. Para determinar a maior medida de comprimento que cada pedaço de tubo de PVC deve ter sem sobras, precisamos verificar qual é o maior divisor comum entre 24 e 40.

D(24): {1, 2, 3, 4, 6, **8**, 12, 24}

D(40): {1, 2, 4, 5, **8**, 10, 20, 40}

mdc(24, 40) = 8

Portanto, a maior medida de comprimento que cada tubo deve ter é 8 metros.



9. **a)** D(12): {1, 2, 3, 4, 6, **12**}

D(36): {1, 2, 3, 4, 6, 9, **12**, 18, 36}

Outra estratégia é reconhecer que o 12 é divisível por ele mesmo e divide o 36.

Logo, mdc(12, 36) = 12.

b) M(6): {0, 6, 12, 18, 24, **30**, 36, ...}

M(30): {0, **30**, 60, 90, ...}

Outra estratégia é reconhecer que o 30 é múltiplo de 6. Com isso, o número 30 é o menor múltiplo comum não nulo entre 6 e 30.

Logo, mmc(6, 30) = 30.

c) D(12): {1, 2, 3, 4, **6**, 12}

D(18): {1, 2, 3, **6**, 9, 18}

Logo, mdc(12, 18) = 6.

d) D(1): {**1**}

D(98): {**1**, 2, 7, 14, 49, 98}

Todo número natural tem como divisor o número 1.

Logo, mdc(1, 98) = 1.

e) M(5): {0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, **35**, 40, ...}

M(7): {0, 7, 14, 21, 28, **35**, 42, 49, ...}

O número 35 é o menor número não nulo que aparece nos dois conjuntos. Logo, mmc(5, 7) = 35.

f) M(1): {0, 1, 2, 3, 4, ..., **56**, 57, 58, ...}

M(56): {0, **56**, 112, 168, 224, ...}

O número 56 é o menor múltiplo comum não nulo de 1 e 56.

Logo, mmc(1, 56) = 56.

10. Para determinar a menor quantidade de fotografias que cada álbum pode ter, é necessário obter o mmc(4, 5) e adicionar 1 (correspondente a uma fotografia no final do álbum).

M(4): {0, 4, 8, 12, 16, **20**, ...}

M(5): {0, 5, 10, 15, **20**, ...}

mmc(4, 5) = 20

Portanto, a menor quantidade de fotografias que cada álbum pode ter é 21, pois:

20 + 1 = 21

PÁGINA 17 – DIVERSIFICANDO

1. **a)** Para determinar as quantidades possíveis de barras de chocolate em cada pacote, precisamos encontrar o maior divisor comum dos números 102 e 162.

D(102) = {1, 2, 3, **6**, 17, 34, 51, 102}

D(162) = {1, 2, 3, **6**, 9, 18, 27, 54, 81, 162}

mdc(102, 162) = 6

Portanto, Raquel deve colocar 6 barras de chocolate em cada pacote.

b) Como cada pacote vai ter 6 chocolates, Raquel formará a seguinte quantidade de pacotes de cada tipo de chocolate:

- 17 pacotes de chocolate branco, pois: 102 : 6 = 17
- 27 pacotes de chocolate ao leite, pois: 162 : 6 = 27

2. Para resolver essa situação, vamos analisar os múltiplos de 25 e de 30 e verificar qual é o menor múltiplo comum não nulo entre eles.

M(25): {0, 25, 50, 75, 100, 125, **150**, 175, ...}

M(30): {0, 30, 60, 90, 120, **150**, 180, ...}

mmc(25, 30) = 150

Portanto, a capacidade mínima que o tanque pode ter é 150 litros.

3. Para resolver essa situação, vamos analisar os múltiplos de 50 e de 45 e verificar qual é o menor múltiplo comum não nulo entre eles.

M(50): {0, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, **450**, 500, ...}

M(45): {0, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315, 360, 405, **450**, 495, ...}

mmc(50, 45) = 450

Portanto, 450 pessoas fizeram essa viagem.

4. **a)** Vamos determinar o maior número que divide 260 e 300, ou seja, vamos calcular o mdc(260, 300).

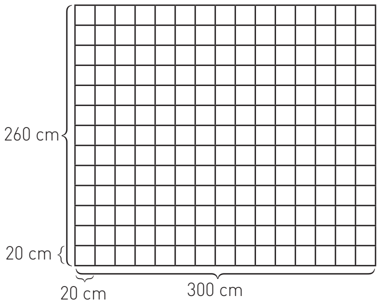
D(260): {1, 2, 4, 5, 10, 13, **20**, 26, 52, 65, 130, 260}

D(300): {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, **20**, 25, 30, 50, 60, 75, 100, 150, 300}

mdc(260, 300) = 20

Assim, a maior medida de comprimento do lado das placas é 20 cm.

b) Desenho possível:



Ilustrações: ID/BR

No lado que mede 260 cm, há 13 placas ($260 : 20 = 13$), e no lado que mede 300 cm, há 15 placas ($300 : 20 = 15$). Então, temos uma parede com 195 placas ao todo ($13 \cdot 15 = 195$).

5. Para determinar a maior medida possível, precisamos verificar qual é o maior divisor comum entre 90 e 120.

D(90): {1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, **30**, 45, 90}

D(120): {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, **30**, 40, 60, 120}

mdc(90, 120) = 30

Portanto, cada parte da fita deve medir 30 metros de comprimento.

6. a) Para determinar a maior medida possível, precisamos verificar qual é o maior divisor comum entre 48 e 60.

D(48): {1, 2, 3, 4, 6, 8, **12**, 16, 24, 48}

D(60): {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, **12**, 15, 20, 30, 60}

mdc(48, 60) = 12

Portanto, cada pedaço vai ter 12 metros de comprimento.

b) No cabo de 60 metros de comprimento serão obtidos 5 pedaços, pois $60 : 12 = 5$.

No cabo de 48 metros de comprimento serão obtidos 4 pedaços, pois $48 : 12 = 4$.

Portanto, no total serão obtidos 9 pedaços, pois $5 + 4 = 9$.

7. Para resolver essa situação, vamos analisar os múltiplos de 15 e de 20 e verificar qual é o menor múltiplo comum não nulo entre eles.

M(15): {0, 15, 30, 45, **60**, 75, 90, ...}

M(20): {0, 20, 40, **60**, 80, ...}

mmc(15, 20) = 60

Portanto, os faróis piscam juntos outra vez 60 segundos depois.

8. a) Para ter a menor quantidade de embalagens, deve-se colocar a maior quantidade de salgadinhos possível em cada uma delas. Como todas as embalagens devem ter a mesma quantidade de salgadinhos, devemos calcular o máximo divisor comum dos números 130 e 540.

D(130): {1, 2, 5, **10**, 13, 26, 65, 130}

D(540): {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, **10**, 12, 15, 18, 20, 27, 30, 36, 45, 54, 60, 90, 108, 135, 180, 270, 540}

mdc(130, 540) = 10

Portanto, em cada embalagem havia 10 salgadinhos.

b) Como havia 10 salgadinhos em cada embalagem, Vera chegou à festa com a seguinte quantidade de embalagens de cada tipo de salgadinho:

- 13 embalagens de bolinhas de queijo, pois $130 : 10 = 13$.
- 54 embalagens de coxinhas, pois $540 : 10 = 54$.

Portanto, Vera chegou à festa com 67 embalagens, pois $13 + 54 = 67$.

9. Resposta pessoal.

10. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2 – NÚMEROS INTEIROS

PÁGINA 23 – ATIVIDADES

1. a) 27, +2, 0, 35, 51, 26 e 1.

b) Todos os números do quadro.

c) −42, −28 e −27.

d) 27, +2, 35, 51, 26 e 1.

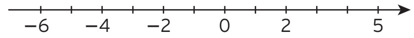
2. a) Falsa. Correção possível: O número zero pertence tanto ao conjunto dos números inteiros como ao conjunto dos números naturais.

b) Verdadeira.

c) Falsa. Correção possível: O número +1 pertence ao conjunto dos números naturais.

d) Verdadeira.

3. Desenhando a reta numérica, temos:



4. a) Antecessor: 2; sucessor: 4.

b) Antecessor: −1; sucessor: 1.

c) Antecessor: 98; sucessor: 100.

d) Antecessor: −101; sucessor: −99.

e) Antecessor: 999; sucessor: 1 001.

f) Antecessor: −1 002; sucessor: −1 000.

5. Temos:

$$|-35| = 35$$
$$|25| = 25$$
$$|35| = 35$$
$$|-55| = 55$$

Ordenando os valores desses módulos, temos $25 < 35 = 35 < 55$, ou seja, o número que tem o maior módulo é −55.

6. a) A: $|2| = 2$ C: $|-1| = 1$

B: $|-2| = 2$ D: $|3| = 3$

b) Os pontos A e B são simétricos, pois:

$$|-2| = |2| = 2$$

PÁGINA 26 – ATIVIDADES

7. a) Números inteiros positivos (estão à direita do zero): A e D; números inteiros negativos (estão à esquerda do zero): B e E.

b) Não existe, pois o número zero não é positivo nem negativo.

c) Resposta possível: Pares escolhidos: A e B, C e D, A e E. Comparando esses pares, temos $A > B$, $C < D$ e $A > E$.

8. a) $12 < 16$

b) $+23 = +23$

c) $0 < +34$

d) $-49 < 0$

e) $+78 > 0$

f) $-103 < +115$

g) $-57 = -57$

h) $-84 < -26$

i) $+416 < +417$

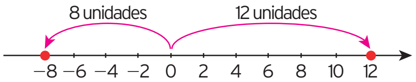
j) $-890 > -891$

9. −37, −16, −7, −6, −3, −1, 0, +1, +4, +13, +39, +51

PÁGINA 27 – DIVERSIFICANDO

1. Respostas possíveis: Saldo de gols contra ou a favor de um time em um campeonato esportivo; andares acima e abaixo do piso térreo de um prédio.

2. Fazendo uma analogia com a reta numérica, a medida de temperatura −8 °C está mais próxima de zero, pois está a 8 unidades de distância do zero, enquanto 12 °C está a 12 unidades do zero.



Ilustrações: ID/BR

3. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

4.

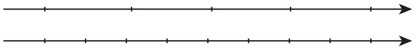
Número	Antecessor	Sucessor	Oposto	Módulo
13	12	14	−13	13
−7	−8	−6	7	7
127	126	128	−127	127
0	−1	1	0	0
−25	−26	−24	25	25

5. a) ★ = 15 ou ★ = −15.

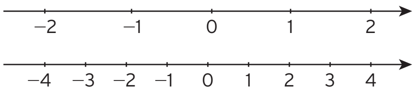
b) Não existe número que satisfaça essa igualdade, pois o módulo é sempre não negativo.

6. Respostas possíveis.

a)



b)



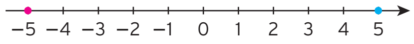
c) Características comuns: os números negativos estão à esquerda do zero, enquanto os números positivos estão à direita, e, por exemplo, a distância do 1 ao zero e do −1 ao zero é a mesma.

Diferenças: posicionamento dos números em cada uma das retas. Por exemplo, o uso de unidades de medida de comprimento diferentes em cada reta pode fazer o estudante acreditar que o módulo de −2 é maior na primeira reta do que na segunda reta, o que não é verdade.

7. a) Como o ponto azul está distante 6 unidades à direita do zero, João representou o número 6.

b) Como João adicionou 1 unidade ao número pensado e obteve 6, o número pensado foi 5, pois $6 - 1 = 5$.

c) Como João pensou no número 5, o simétrico desse número é $-(+5) = -5$. Representando esse número na reta numérica, temos:



8. a) Com base na figura, podemos perceber que a pedra de Amanda está mais distante do ponto em que as duas meninas se encontram.

b) Representando a resposta do item **a** por uma sentença matemática, temos:

|−5| = 5

|3| = 3

Como 5 > 3, então |−5| > |3|.

c) Nas situações em que os módulos dos números fossem iguais. Por exemplo, |−3| e |3|, |−5| e |5|, etc.

9. **a)** +100 > +19 > +12 > −19 > −39 > −100

b) +291 > +8 > 0 > −20 > −34 > −400

10. Dois números opostos têm a mesma distância até a origem. Logo, a distância entre eles será o dobro da distância de cada um deles até o zero. Como eles distam 34 unidades um do outro, ao dividir essa distância por 2, obtemos 17, que é o módulo dos dois números opostos procurados. Então, esses números são aqueles cujos módulos são iguais a 17, ou seja, eles são −17 e 17.

CAPÍTULO 3 – OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

PÁGINA 33 – ATIVIDADES

1. **a)** (+7) + (+5) = 7 + 5 = 12

b) (+13) + (+4) = 13 + 4 = 17

c) (−8) + (−12) = −8 − 12 = −20

d) (+3) + (−5) = 3 − 5 = −2

e) (+5) + (−2) = 5 − 2 = 3

f) 0 + (−20) = 0 − 20 = −20

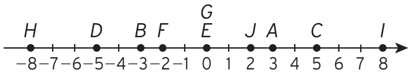
g) (+30) + 0 = 30 + 0 = 30

h) (−52) + (+41) = −52 + 41 = −11

2.

+	+2	+1	0	−1	−2
+2	+4	+3	+2	+1	0
+1	+3	+2	+1	0	−1
0	+2	+1	0	−1	−2
−1	+1	0	−1	−2	−3
−2	0	−1	−2	−3	−4

3.



ID/BR

a) *A*: +3

b) *B*: −(+3) = −3

c) *C*: +5

d) *D*: −(+5) = −5

e) *E*: *A* + *B* = (+3) + (−3) = 3 − 3 = 0

f) *F*: *A* + *D* = (+3) + (−5) = 3 − 5 = −2

g) *G*: *C* + *D* = (+5) + (−5) = 5 − 5 = 0

h) *H*: *B* + *D* = (−3) + (−5) = −3 − 5 = −8

i) *I*: *A* + *C* = (+3) + (+5) = 3 + 5 = 8

j) *J*: *B* + *C* = (−3) + (+5) = −3 + 5 = 2

4. **a)** +4 − 16 = −12

Portanto, ■ = −12.

b) −1 + 9 = +8

Portanto, ■ = +8.

c) −2 + 26 = +24

Portanto, ■ = +24.

d) Como 0 é o elemento neutro da adição, ■ = +34.

e) Pela propriedade do elemento oposto, temos:

+57 + (−57) = +57 − 57 = 0

Portanto, ■ = −57.

5. **a)** ★ + ● = (−7) + (+6) = −7 + 6 = −1

b) ★ + ● = (+6) + (+2) = +6 + 2 = +8

c) ★ + ● = (−8) + (−4) = −8 − 4 = −12

d) ★ + ● = 0 + (−9) = 0 − 9 = −9

e) ★ + ● = (+8) + (+7) = +8 + 7 = +15

f) ★ + ● = 0 + 0 = 0

6.

a	−4	+6	0	−2
b	+3	−7	+1	−5
a* + *b	−1	−1	+1	−7
b* + *a	−1	−1	+1	−7
Oposto de *a* + oposto de *b*	+1	+1	−1	+7
Oposto de (*a* + *b*)	+1	+1	−1	+7
Oposto de (*b* + *a*)	+1	+1	−1	+7

a) Sim. A propriedade comutativa.

b) Resposta possível: Dados dois números inteiros *a* e *b*, por meio da propriedade comutativa, temos:

$a + b = b + a$

Podemos escrever:

$-(a + b) = -(b + a)$

7. Sabemos que |13| = 13 e |− 13| = 13. Assim, ao adicionar o número ao seu sucessor, podemos obter 13 ou −13.

Os números inteiros consecutivos cuja soma é 13 são 6 e 7; 6 + 7 = 13. Logo, o número considerado é 6 e seu sucessor é 7.

Os números inteiros consecutivos cuja soma é −13 são −7 e −6.

(−7) + (−6) = −13

Logo, o número considerado é −7 e seu sucessor é −6.

Portanto, o número considerado pode ser 6 ou −7.

8. **a)** −167 + 570 = 403

O novo saldo bancário de Paula é positivo em R$ 403,00.

b) 10 + 1 + 7 = 11 + 7 = 18

A temperatura em Urupema às 13 h desse dia era 18 °C.

PÁGINA 37 – ATIVIDADES

9. **a)** (+4) − (+2) = +4 − 2 = +2

b) (−1) − (−4) = −1 + 4 = +3

c) (−9) − (+5) = −9 − 5 = −14

d) (+4) − (−2) = +4 + 2 = +6

10. A partir da leitura do enunciado, podemos escrever a expressão a seguir:

(−3) − (+5) = −3 − 5= −8

Assim, a nova temperatura encontrada por Laura deve ser −8 °C.

11. O desconto e o saque da conta corrente estão associados a uma subtração, e o depósito está associado a uma adição. Logo, o saldo final está associado à expressão:

450 − 230 − 185 + 420 − 500 =
= 450 − 415 − 80 =
= 35 − 80 =
= −45

Logo, o saldo final da conta em 30 de maio é −R$ 45,00.

12. **a)** 37 − 22 + 13 − 22 − 0 + 13 =
= 15 + 13 − 22 − 0 + 13 =
= 28 − 22 − 0 + 13 =
= 6 + 13 =
= 19

b) (−2) + (−6) + (−11) + (+8) + 10 =
= −2 − 6 − 11 + 8 + 10 =
= −19 + 18 =
= −1

c) −13 + 27 + (−12) − 5 + 76 −
− (+7) − (+14) =
= −13 + 27 − 12 − 5 + 76 − 7 − 14 =
= −13 − 12 − 5 − 7 − 14 + 27 + 76 =
= −51 + 103 = +52

13. **a)** Felipe:

−5 − 5 − 2 + 3 + 3 =
= −10 − 2 + 6 =
= −12 + 6 =
= −6

Roger:

−5 − 2 + 3 + 3 + 6 =
= −7 + 12 =
= 5

Thiago:

−5 − 2 + 6 + 6 + 6 =
= −7 + 18 =
= 11

Portanto, Felipe fez −6 pontos; Roger, 5 pontos; e Thiago, 11 pontos.

b) Como 11 > 5 > − 6, Thiago obteve a maior pontuação.

c) As combinações possíveis são:

6 + 6 = 12
6 + 3 = 9
6 − 2 = 4
6 − 5 = 1
3 + 3 = 6
3 − 2 = 1
3 − 5 = −2
−2 − 2 = −4
−2 − 5 = −7
−5 − 5 = −10

Logo, os totais parciais possíveis são: 12, 9, 6, 4, 1, −2, −4, −7 e −10.

PÁGINA 41 – ATIVIDADES

14.

Primeiro fator	Segundo fator	Produto
6	−4	−24
−9	12	−108
3	13	39
−8	−24	192
−7	2	−14
−7	−5	35

15. Resposta possível.

Sinal do primeiro fator	Sinal do segundo fator	Sinal do produto
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

16. O resultado da multiplicação de qualquer número inteiro por zero é sempre zero, seja o número positivo ou negativo.

17. a) 0 e +1.

b) −6 e −5.

Item **a**: 0 · 1 = 0

Item **b**: (−6) · (−5) = 30

18. a) 1 · (−6) · (−66) · (+1 009) · 0 · (−999) = 0

Qualquer número multiplicado por 0 resulta em 0.

b) (−9) · (−7) · (+1) · (−2) =

= (+63) · (+1) · (−2) =

= (+63) · (−2) =

= −126

c) (−4) · (−1) · (−2) =

= (+4) · (−2) =

= −8

d) (−2) · (+2) · (−2) =

= (−4) · (−2) =

= +8

e) (−6) · (−4) · (−1) =

= (+24) · (−1) =

= −24

f) $\underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(-1)}_{15\text{ vezes}} = -1$

Em uma multiplicação, o número 1 é o elemento neutro e qualquer número multiplicado por 1 resulta sempre no próprio número. Neste caso, no número 1. Como a quantidade de vezes (15) que temos o fator (−1) é ímpar, o sinal desse produto será negativo.

19. a) Primeiro, vamos estudar o sinal do número que queremos descobrir. Como o resultado tem sinal positivo, os dois fatores devem ter sinais iguais, ou seja, o sinal do número que queremos descobrir é negativo.

Depois, vamos descobrir que número é esse. Como o resultado tem o mesmo módulo que um dos fatores, o outro fator deve ser o oposto do elemento neutro da multiplicação, ou seja, o número procurado é −1.

b) Como o produto é igual a zero, um dos fatores deve ser zero. Como já sabemos que um dos fatores é −3 e, portanto, diferente de zero, o outro fator, obrigatoriamente, deve ser 0. Logo, o número procurado é 0.

20. a) (−4) · (−5 + 91) =

= (−4) · (−5) + (−4) · 91 =

= 20 + (−364) =

= 20 − 364 =

= −344

b) (+5) · (3 + 12) =

= (+5) · 3 + (+5) · 12 =

= 15 + 60 =

= 75

c) (6 − 3) · (−7) =

= 6 · (−7) − 3 · (−7) =

= −42 − (−21) =

= −42 + 21 =

= −21

d) [10 − (−5)] · 2 =

= 10 · 2 − (−5) · 2 =

= 20 − (−10) =

= 20 + 10 =

= 30

21. a) 3 · 135 = 405

O valor total das prestações em atraso é R$ 405,00.

b) 8 · 25 = 200

A irmã de Pedro depositou R$ 200,00 na conta dele.

c) 405 − 200 = 205

Pedro ainda precisará juntar R$ 205,00 para pagar as prestações.

PÁGINA 45 – ATIVIDADES

22. a) (+64) : (+2) =

= +(64 : 2) =

= 32

b) (−225) : (−25) =

= +(225 : 25) =

= 9

c) (+96) : (−12) =

= −(96 : 12) =

= −8

d) (−80) : (+4) =

= −(80 : 4) =

= −20

e) 0 : (−71) = 0

f) (−578) : (+578) =

= −(578 : 578) =

= −1

g) (−1 183) : (+13) =

= −(1 183 : 13) =

= −91

h) (−5 248) : (−64) =

= +(5 248 : 64) =

= 82

i) (+7 220) : (−95) =

= −(7 220 : 95) =

= −76

j) (−1 372) : (−14) =

= +(1 372 : 14) =

= 98

23. Resposta possível.

Sinal do dividendo	Sinal do divisor	Sinal do quociente
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

As relações mostradas nesse quadro são as mesmas do quadro da multiplicação da atividade **15**. Isso acontece porque a divisão e a multiplicação são operações inversas e a relação entre os sinais é a mesma na multiplicação e na divisão.

24. Sabendo que, no total, Armando desceu 20 metros e esse percurso foi feito em 4 etapas, em cada etapa ele desceu:

20 : 4 = 5

Portanto, Armando desceu 5 metros em cada etapa.

25. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

25 : (−5) = −5

(−60) : 12 = −5

50 : (−10) = −5

26.

x	y	$x : y$	$x \cdot y$
−6	+3	(−6) : (+3) = −2	(−6) · (+3) = −18
+16	−4	(+16) : (−4) = −4	(+16) · (−4) = −64
−24	−6	(−24) : (−6) = 4	(−24) · (−6) = 144
−18	+2	(−18) : (+2) = −9	(−18) · (+2) = −36
0	−5	0 : (−5) = 0	0 · (−5) = 0

27. a) 🟪 = −4, pois 12 : (−3) = −4.

b) 🟧 = −12, pois (−36) : 3 = −12.

c) 🟦 = 20, pois (−100) : (−5) = +20 = 20.

d) 🟥 = −84, pois 12 · (−7) = −84.

e) 🟫 = −1, pois 9 : (−9) = − 1.

f) 🟩 = 13, pois (−65) : (−5) = 13.

28.

Dividendo	Divisor	Quociente
250	−50	−5
21	−7	−3
−9	3	−3
−32	−4	8
56	−8	−7

- Linha 1: (−50) · (−5) = 250
- Linha 2: 21 : (−3) = −7
- Linha 3: 3 · (−3) = −9
- Linha 4: (−32) : (−4) = 8
- Linha 5: 56 : (−8) = −7

PÁGINA 46 – ATIVIDADES

29. a) $(8 - 14) : [(7 - 12) + (15 - 12)] \cdot 7 =$
$= (-6) : [-5 + 3] \cdot 7 =$
$= (-6) : [-2] \cdot 7 =$
$= 3 \cdot 7 =$
$= 21$

b) $[-17 + (11 - 16)] - \{2 -[(-2 +$
$+ 7) \cdot (25 - 20)]\} =$
$= [-17 + (-5)] - \{2 - [5 \cdot 5]\} =$
$= [-17 - 5] - \{2 - 25\} =$
$= -22 - \{-23\} =$
$= -22 + 23 =$
$= 1$

c) $(5 - 2) \cdot (2 - 5) \cdot (-2) : (-3) =$
$= 3 \cdot (-3) \cdot (-2) : (-3) =$
$= -9 \cdot (-2) : (-3) =$
$= 18 : (-3) =$
$= -6$

d) $12 - \{2 \cdot 6 + 2 - [5 \cdot (-6) : (-3)] + 34\} =$
$= 12 - \{12 + 2 - [(-30) : (-3)] + 34\} =$
$= 12 - \{14 - 10 + 34\} =$
$= 12 - \{4 + 34\} =$
$= 12 - 38 =$
$= -26$

30. $[60 - (3 \cdot 10) - 15] : 3 =$
$= [60 - 30 - 15] : 3 =$
$= [30 - 15] : 3 =$
$= 15 : 3 =$
$= 5$

Portanto, cada irmão recebeu R$ 5,00 do dinheiro que sobrou.

PÁGINA 47 – DIVERSIFICANDO

1. O time Patos obteve 3 vitórias e 3 empates. Portanto, ficou com 6 pontos, pois:

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 6$$

O time Tigres obteve 2 vitórias, 2 empates e 2 derrotas. Portanto, ficou com 2 pontos, pois:

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 2$$

O time Gatos obteve 2 vitórias, 1 empate e 3 derrotas. Logo, ficou com 1 ponto, pois:

$$2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 1$$

O time Leões obteve 2 vitórias e 4 derrotas. Portanto, ficou com 0 ponto, pois:

$$2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 0$$

a) A equipe Patos venceu o campeonato.

b) Segunda colocação: Tigres; terceira colocação: Gatos; quarta colocação: Leões.

c) Patos: 6; Tigres: 2; Gatos: 1; Leões: 0.

2. A profundidade a que Maria desceu pode ser representada por -6 m. O triplo dessa profundidade é: $3 \cdot (-6) = -18$. Portanto, Natália deslocou-se até a profundidade representada por -18 m.

3. a) $(-44) : 2 = -22$

b) $2 \cdot [40 : (-4)] =$
$= 2 \cdot [-10] =$
$= -20$

c) $-\{-[(-13) \cdot 1]\} =$
$= -\{-[-13]\} =$
$= -\{+13\} =$
$= -13$

d) $-\{2 \cdot [(-15) \cdot (-2)]\} =$
$= -\{2 \cdot [+30]\} =$
$= -\{+60\} =$
$= -60$

4. a) $[(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) + (+5)] : 22 =$
$[(+9) \cdot (-3) + 5] : 22 =$
$= [-27 + 5] : 22 =$
$= -22 : 22 = -1$

b) $(-100) : (-25) + (-3) \cdot (-3) -$
$- 5 \cdot 5 - (2 \cdot 2 \cdot 2) + 3 \cdot 3 =$
$= 4 + 9 - 25 - 8 + 9 =$
$= 13 - 25 - 8 + 9 =$
$= -12 - 8 + 9 =$
$= -20 + 9 =$
$= -11$

c) $-(5 \cdot 5) + 1 - 1 + (-3) \cdot (-3) =$
$= -25 + 1 - 1 + 9 =$
$= -24 - 1 + 9 =$
$= -25 + 9 =$
$= -16$

d) $-[(-72) : (-6)] - [(+1) \cdot (+13)] +$
$+ 2 \cdot 7 + (+2) =$
$= -[+12] - [+13] + 14 + 2 =$
$= -12 - 13 + 14 + 2 =$
$= -25 + 14 + 2 =$
$= -11 + 2 =$
$= -9$

e) $0 - 15 + 2 \cdot 3 - [(+3) \cdot (+4)] + 20 +$
$+ 3 \cdot 5 - 300 : 10 + 25 =$
$= -15 + 6 - [+12] + 20 +$
$+ 15 - 30 + 25 =$
$= -9 - 12 + 20 + 15 - 30 + 25 =$
$= -21 + 20 + 15 - 30 + 25 =$
$= -1 + 15 - 30 + 25 =$
$= 14 - 30 + 25 =$
$= -16 + 25 =$
$= 9$

5. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes elaborem um problema que envolva uma operação com números inteiros utilizando o valor do ingresso (R$ 5,00), como dado na ilustração.

PÁGINA 48 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. a) Respostas pessoais.

b) Respostas pessoais.É possível observar que o preço do pacote com 6 unidades na promoção (R$ 7,50) é maior que o valor pago por 6 unidades avulsas fora da promoção (6 · R$ 1,20 = R$ 7,20).

c) Sim. É possível perceber que se trata de propagandas enganosas. A justificativa é pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal.

4. Resposta pessoal.

PÁGINA 50 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Alternativa **e**.

a) Incorreta. O produto entre dois números inteiros pode ser positivo, negativo ou nulo.

b) Incorreta. O produto entre dois números inteiros com sinais negativos tem resultado positivo.

c) Incorreta. O produto entre dois números inteiros com sinais positivos tem resultado positivo.

d) Incorreta. O produto entre dois números inteiros diferentes pode ter resultado positivo, negativo ou nulo.

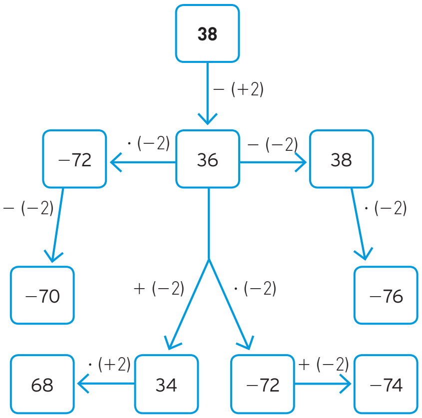
e) Correta.

2. Vamos calcular o saldo diário da conta bancária de Antônio.

- Saldo no dia 7/10:
  $610{,}00 + 5\,790{,}00 = 6\,400{,}00$
- Saldo no dia 8/10:
  $6\,400{,}00 - 335{,}00 = 6\,065{,}00$
- Saldo no dia 10/10:
  $6\,065{,}00 - 560{,}00 = 5\,505{,}00$
- Saldo no dia 14/10:
  $5\,505{,}00 - 2\,895{,}00 = 2\,610{,}00$
  $2\,610{,}00 - 100{,}00 = 2\,510{,}00$
  $2\,510{,}00 - 575{,}00 = 1\,935{,}00$
  $1\,935{,}00 - 1\,750{,}00 = 185{,}00$
- Saldo no dia 17/10:
  $185{,}00 - 540{,}00 = -355{,}00$
- Saldo no dia 18/10:
  $-355{,}00 + 1\,500{,}00 = 1\,145{,}00$
- Saldo no dia 22/10:
  $1\,145{,}00 - 1\,300{,}00 = -155{,}00$
- Saldo no dia 24/10:
  $-155{,}00 + 2\,235{,}00 = 2\,080{,}00$

Portanto, a conta bancária de Antônio ficou negativa nos dias 17, 22 e 23 de outubro, ou seja, serão descontados R$ 75,00 no final do mês, pois $3 \cdot 25 = 75$.

3.



4. Além do número 158, precisamos descobrir outros números que podem ser formados a partir dos algarismos 1, 5 e 8. Isso pode ser feito por tentativas, trocando os algarismos de lugar. Temos as seguintes possibilidades:

185 581 851

518 815

Agora, temos de contar o número de páginas marcadas por Felipe. Para obter esse número, devemos subtrair o número da primeira página (158) do número da última página marcada e adicionar 1 ao resultado.

- $185 - 158 + 1 = 28$
- $518 - 158 + 1 = 361$
- $581 - 158 + 1 = 424$
- $815 - 158 + 1 = 658$
- $851 - 158 + 1 = 694$

Logo, Felipe pode ter marcado 28, 361, 424, 658 ou 694 páginas.

5. Como o estudante acertou 9 testes e deixou 6 em branco dos 25 testes, então ele errou 10 testes ($25 - 9 - 6 = 10$). Assim, temos a seguinte pontuação:

- 6 testes em branco: $6 \cdot 0 = 0$
- 9 testes certos: $9 \cdot 4 = 36$
- 10 testes errados: $10 \cdot (-1) = -10$

Total de pontos:

$$0 + 36 + (-10) = 36 - 10 = 26$$

Logo, o estudante ficará com 26 pontos.

6. a) Inicialmente, calculamos a soma de uma das diagonais:

$$4 + (-2) + (-8) = 4 - 2 - 8 = -6$$

Em seguida determinamos os demais números:

- $-6 - (-8) - 0 = -6 + 8 = 2$
- $-6 - 4 - 0 = -10$
- $-6 - (-10) - (-2) = -6 + 10 + 2 = 6$
- $-6 - 2 - (-2) = -6 - 2 + 2 = -6$
- $-6 - (-8) - 6 = -6 + 8 - 6 = -4$

Por fim, completamos o quadrado mágico:

0	2	−8
−10	−2	6
4	−6	−4

b) Inicialmente, calculamos a soma de uma das colunas:

$$-3 + 2 + 1 = 0$$

Em seguida, determinamos os demais números:

- $0 - 2 - 0 = -2$
- $0 - (-3) - 0 = 3$
- $0 - 1 - 0 = -1$
- $0 - (-3) - (-1) = 3 + 1 = 4$
- $0 - 4 - 0 = -4$

Por fim, completamos o quadrado mágico:

−3	4	−1
2	0	−2
1	−4	3

7. Alternativa **a**.

$$-1 - (-5) \cdot (-3) + (-4) \cdot 3 : (-4) =$$
$$= -1 - (+15) + (-12) : (-4) =$$
$$= -1 - 15 + (+3) =$$
$$= -16 + 3 =$$
$$= -13$$

8. a) Algumas respostas possíveis:

- 1, −1 e 0, pois: $1 \cdot (-1 + 0) = -1$
- 2, −7 e 6, pois: $2 \cdot (-7 + 6) = -2$
- 5, −10 e 9, pois: $5 \cdot (-10 + 9) = -5$

b) Resposta pessoal.

9. a) Para resolver essa situação, vamos analisar os múltiplos de 2, 4 e 6 e verificar qual é o menor múltiplo comum não nulo entre eles.

M(2): {0, 2, 4, 6, 8, 10, **12**, 14, ...}

M(4): {0, 4, 8, **12**, 16, 20, 24, ...}

M(6): {0, 6, **12**, 18, 24, 30, ...}

mmc(2, 4, 6) = 12

Os barcos vão sair juntos novamente após 12 dias. Como eles saíram juntos no dia 1º de maio, então vão sair juntos novamente no dia 13 de maio.

b) Para resolver essa situação, vamos analisar os múltiplos de 2, 4 e 8 e verificar qual é o menor múltiplo comum não nulo entre eles.

M(2): {0, 2, 4, 6, **8**, 10, 12, 14, ...}

M(4): {0, 4, **8**, 12, 16, 20, 24, ...}

M(8): {0, **8**, 16, 24, 32, 40, ...}

mmc(2, 4, 8) = 8

Os barcos vão sair juntos a cada 8 dias. Considerando que eles saíram juntos no dia 10 de junho, eles vão sair juntos novamente no dia 18 de junho.

10. Para resolver essa situação, podemos usar o máximo divisor comum para determinar a medida de comprimento de cada tira de tecido e a quantidade total de tiras.

a) D(3): {1, **3**}

D(9): {1, **3**, 9}

mdc(3, 9) = 3

Portanto, a medida de cada tira de tecido é 3 m.

b) D(3): {**1**, 3}

D(7): {**1**, 7}

D(9): {**1**, 3, 9}

mdc(3, 7, 9) = 1

Como cada pedaço vai medir 1 m, então haverá 19 pedaços, pois:

$$3 + 7 + 9 = 19$$

11. A maior quantidade de selos que Rafael pode ter é 50. Então, escrevemos os múltiplos de 5 e os múltiplos de 6 maiores que zero e menores que 50 e verificamos qual é o menor múltiplo comum entre 5 e 6.

M(5): {5, 10, 15, 20, 25, **30**, 35, 40, 45}

M(6): {6, 12, 18, 24, **30**, 36, 42, 48}

mmc(5, 6) = 30

Como sempre sobram 3 selos, devemos adicionar 3 selos ao menor múltiplo comum. Então, Rafael tem 33 selos e faltam 17 para completar 50.

12. a) Como Beto foi o primeiro a jogar e ficou com saldo de 6 pontos, ele tirou 3 no dado. Assim, os outros dois ficaram com saldo de −3 pontos cada.

Saldo de *A*	Saldo de *B*	Saldo de *C*
−3	6	−3

Na segunda jogada, Carlos ficou com saldo de 5 pontos. Para ele ter ficado com essa pontuação, adicionou 8 pontos ao saldo de −3, pois $-3 + 8 = 5$. Sendo assim, ele tirou 4 no dado. Adicionando −4 pontos ao saldo de cada adversário, Ana ficou com saldo −7 e Beto ficou com saldo 2.

Saldo de *A*	Saldo de *B*	Saldo de *C*
−3	6	−3
−7	2	5

Por último, Ana lançou o dado e, para passar de −7 para 5 pontos, ela obteve 6 no dado, pois $-7 + 12 = 5$, fazendo cada um dos outros descontar 6 de seus pontos. Logo, a tabela completa fica da seguinte maneira:

Saldo de *A*	Saldo de *B*	Saldo de *C*
−3	6	−3
−7	2	5
5	−4	−1

b) Completando uma tabela como a do item **a** e com base na tabela de pontuações dos dados do item **b**, temos:

Saldo de *A*	Saldo de *B*	Saldo de *C*
-2	-2	$2 \cdot (+2) = 4$
$-2 + 2 \cdot (+3) =$ $= 4$	$-2 - 3 = -5$	$4 - 3 = 1$
$4 - 1 = 3$	$-5 + 2 \cdot (+1) =$ $= -3$	$1 - 1 = 0$
$3 - 4 = -1$	$-3 - 4 = -7$	$0 + 2 \cdot (+4) =$ $= 8$
$-1 + 2 \cdot (+5) =$ $= 9$	$-7 - 5 = -12$	$8 - 5 = 3$
$9 - 6 = 3$	$-12 + 2 \cdot (+6) =$ $= 0$	$3 - 6 = -3$

Desse modo, a tabela completa com o saldo final de cada jogador é a seguinte:

Saldo de *A*	3
Saldo de *B*	0
Saldo de *C*	−3

UNIDADE 2 – NÚMEROS RACIONAIS

CAPÍTULO 1 – NÚMEROS RACIONAIS

PÁGINA 59 – ATIVIDADES

1. **a)** 2

b) 2 e −3.

c) 2; −3; 4,5; $\frac{7}{2}$; $\frac{1}{3}$; −3,78; $3\frac{2}{7}$ e 2,6.

2. **a)** O número 20,6 pertence ao conjunto dos números racionais.

b) O número 210 pertence ao conjunto dos números naturais.

c) O número −20,333... pertence ao conjunto dos números racionais.

d) O número $\frac{15}{6}$ não pertence ao conjunto dos números inteiros.

e) O número $\frac{5}{3}$ não pertence ao conjunto dos números naturais.

3. **a)** Falso, pois, por exemplo, $\frac{1}{2}$ é racional e não é inteiro.

b) Verdadeiro, pois o conjunto dos números inteiros é formado pela união do conjunto dos números naturais com o conjunto dos números inteiros negativos.

c) Verdadeiro, pois todo número natural pode ser escrito na forma de fração, em que o numerador e o denominador são números inteiros.

d) Falso, pois, por exemplo, $\frac{3}{4}$ é um número racional, mas não é um número natural.

e) Verdadeiro, pois todo número inteiro pode ser escrito na forma de fração, em que o numerador e o denominador são números inteiros.

f) Falso, pois, por exemplo, −2 é um número inteiro, mas não é um número natural.

PÁGINA 61 – ATIVIDADES

4. Após o número 4, nota-se que ainda há a metade de uma unidade relacionada à medida do comprimento do lápis. Então, o lápis mede 4,5 cm (4 + 0,5 = 4,5).

5. Como o ponto *A* está localizado no ponto médio entre 0 e 1, então a fração associada a ele é $\frac{1}{2}$ (ou 0,5). Como o ponto *B* está localizado no ponto médio entre 4 e 5, então a fração associada a ele é $\frac{9}{2}$ (ou 4,5).

Como o ponto *C* está localizado no ponto médio entre 1 e 2, então a fração associada a ele é $\frac{3}{2}$ (ou 1,5).

6. **a)** $A\colon 2 + \frac{1}{5} = \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$

b) $B\colon 1 + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

c) $C\colon -2 - \frac{3}{8} = -\frac{16}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{19}{8}$

d) $D\colon 6 + \frac{1}{5} = \frac{30}{5} + \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$

e) $E\colon -2 - \frac{3}{5} = -\frac{10}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{13}{5}$

7. **a)** $-3\frac{2}{7} = -\left(\frac{7}{7}+\frac{7}{7}+\frac{7}{7}+\frac{2}{7}\right) = -\frac{23}{7} \simeq -3{,}3$

Logo, $-3\frac{2}{7}$ está entre −4 e −3.

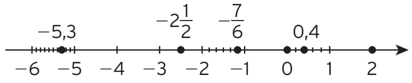
b) −31,6 está entre −32 e −31.

c) $\frac{14}{3} = 4{,}\overline{6}$

Logo, $\frac{14}{3}$ está entre 4 e 5.

d) 9,777... está entre 9 e 10.

8.



- Como o número 0,4 está localizado entre 0 e 1, divide-se em 5 partes iguais o segmento que vai de 0 até 1, pois $0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Como cada parte corresponde a 0,2, então 0,4 está localizado na segunda das cinco partes, a partir do zero.
- −5,3 = −5 − 0,3 e está localizado entre −6 e −5. Para determinar sua posição na reta, divide-se em 10 partes iguais o segmento que vai de −6 a −5. Como cada parte corresponde a 0,1, então −5,3 está localizado na terceira das dez partes, partindo de −5 em direção a −6.
- $-\frac{7}{6} = -1\frac{1}{6} = -1 - \frac{1}{6}$ e está localizado entre −1 e −2. Para determinar sua posição na reta, divide-se em 6 partes iguais o segmento que vai de −2 a −1. Como cada parte corresponde a $\frac{1}{6}$, então $-\frac{7}{6}$ está localizado na primeira das seis partes, partindo de −1 em direção a −2.
- $-2\frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2}$ e está localizado entre −2 e −3. Para determinar sua posição na reta, divide-se em 2 partes iguais o segmento que vai de −3 a −2. Como cada parte corresponde a $\frac{1}{2}$, então $-2\frac{1}{2}$ está localizado exatamente no ponto que divide esse segmento em duas partes iguais.

9. O raciocínio de Joaquim está correto, porém incompleto. É preciso considerar que, ao dividir o segmento em sete partes iguais, ele deve pegar a primeira parte à esquerda do −5.

PÁGINA 64 – ATIVIDADES

10. **a)** |29| = 29

b) 0

c) |0,8888...| = 0,8888...

d) |9,7| = 9,7

e) Simétrico é o número oposto ao valor dado. Logo, o número simétrico de $3\frac{4}{9}$ é $-3\frac{4}{9}$.

11. Sim. Dois números que têm o mesmo módulo podem ser números simétricos ou opostos. Eles têm o mesmo valor absoluto e sinais opostos. Resposta possível: −2 e 2.

12. **a)** −(−5) = 5

b) −(−2) = 2

c) −(9) = −9

d) −(11) = −11

e) −(−84) = 84

f) −(108) = −108

13. O número representado pelo ponto *A* é −0,8, pois o segmento que vai de −1 a 0 foi dividido em 5 partes iguais e cada uma das cinco divisões corresponde a 0,2. Como *A* está localizado à direita de −1 e a uma distância de uma dessas divisões, ou seja, 0,2, tem-se:

$$A\colon -1 + 0{,}2 = -0{,}8$$

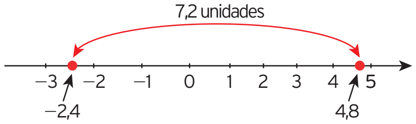
Portanto, |−0,8| = 0,8 e o simétrico de −0,8 é 0,8.

14. O oposto de 3 é −3 e ambos estão à mesma distância da origem, pois 3 − 0 = 3 e 0 − (−3) = 3.

15. O simétrico de −2,4 é 2,4.

O dobro de 2,4 é igual a 4,8, pois: 2 · 2,4 = = 4,8

Localizando os números −2,4 e 4,8 na reta numérica, tem-se:



Ilustrações: ID/BR

Logo, a distância entre esses números é 7,2.

16. Dois números opostos estão a mesma distância até a origem. Logo, a medida da distância entre eles será o dobro da medida da distância de cada um deles até a origem, ou seja, até o zero. Como eles distam $\frac{6}{7}$ unidades um do outro, dividimos essa medida por 2 e obtemos $\frac{3}{7}$, que é o módulo dos dois números opostos procurados. Então, esses números são $-\frac{3}{7}$ e $\frac{3}{7}$.

17. Não, pois o oposto de um número racional negativo é um número racional positivo.

18. **a)** $\left|\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}$

$\left|-\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}$

Então os possíveis valores para o símbolo ★ são $-\frac{7}{2}$ ou $\frac{7}{2}$.

b) |26,2| = 26,2

|−26,2| = 26,2

Então os possíveis valores para o símbolo ★ são −26,2 ou 26,2.

c) |−15,2| = 15,2

Portanto, o símbolo ★ corresponde a 15,2.

d) Não existe um número cujo módulo seja negativo, pois o módulo de um número é a medida da distância desse número até a origem, e a medida de uma distância é sempre um valor positivo ou nulo. Assim, não existe um número tal que seu módulo seja $-\frac{4}{5}$.

PÁGINA 70 – ATIVIDADES

19. a) Respostas possíveis: Dados dois números racionais positivos, o maior é aquele que tem maior módulo; Dados dois números racionais positivos, o menor é aquele que tem menor módulo.

b) Qualquer número racional positivo é maior que o zero.

c) Qualquer número racional positivo é maior que qualquer número racional negativo.

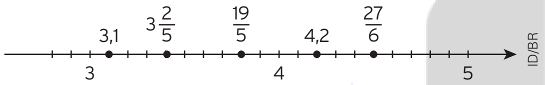
d) Qualquer número racional negativo é menor que o zero.

e) Respostas possíveis: Dados dois números racionais negativos, o maior é aquele que tem menor módulo; Dados dois números racionais negativos, o menor é aquele que tem maior módulo.

20. Para localizar os números do quadro na reta numérica e facilitar a comparação, primeiro escrevemos todos eles na forma decimal:

- $3\frac{2}{5} = 3 + 0,4 = 3,4$
- 4,2
- $\frac{27}{6} = 4,5$
- 3,1
- $\frac{19}{5} = 3,8$

Agora, localizamos os números na reta.



Organizando os números em ordem crescente, temos:

$$3,1 < 3\frac{2}{5} < \frac{19}{5} < 4,2 < \frac{27}{6}$$

21. a) Verdadeira. Como os denominadores são iguais, então comparam-se os numeradores. Como 11 > 7, tem-se $\frac{11}{2} > \frac{7}{2}$.

b) Falsa. Como os denominadores são diferentes, para fazer a comparação entre esses números deve-se encontrar o mmc entre 3 e 4, que é igual a 12. Então:

$$-\frac{5}{3} = -\frac{20}{12} \text{ e } -\frac{9}{4} = -\frac{27}{12}$$

Logo, $-\frac{20}{12} > -\frac{27}{12}$.

Correção possível: $-\frac{5}{3} > -\frac{9}{4}$

c) Falsa. Como $-\frac{13}{4}$ é negativo e $\frac{15}{2}$ é positivo, e qualquer número negativo é menor que um número positivo, tem-se: $-\frac{13}{4} < \frac{15}{2}$

Correção possível: $-\frac{13}{4} < \frac{15}{2}$

d) Falsa. Como $-1\frac{1}{2}$ é negativo e $\frac{3}{2}$ é positivo, esses números não podem ser iguais. Além disso, um número negativo sempre será menor que um número positivo.

Correção possível: $-1\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$

e) Verdadeira. Como $\left|-1\frac{3}{4}\right| = |-(1 + 0,75)| = |-1,75| = 1,75$, tem-se 1,75 > 1,5. Portanto, $\left|-1\frac{3}{4}\right| > 1,5$.

f) Falsa. Como $-\frac{9}{3} = -\frac{18}{6}$ e $-3\frac{1}{6} = -\left(\frac{18}{6} + \frac{1}{6}\right) = -\frac{19}{6}$, então $-\frac{18}{6} > -\frac{19}{6}$.

Correção possível: $-\frac{9}{3} > -3\frac{1}{6}$

22. a) Como a parte inteira dos números é a mesma, então comparamos a parte decimal: 1 décimo é menor que 8 décimos; logo, $0,1 < 0,8$.

b) Como 1 inteiro é menor que 2 inteiros, então $1,7 < 2,3$.

c) Como a parte inteira dos números é a mesma, então comparamos a parte decimal: −41 centésimos é maior que −55 centésimos; logo, $-8,41 > -8,55$.

d) Como a parte inteira dos números é a mesma, então comparamos a parte decimal: 39 centésimos é maior que 35 centésimos; logo, $49,39 > 49,35$.

e) Como a parte inteira dos números é a mesma, então comparamos a parte decimal: 281 milésimos é menor que 287 milésimos; logo, $73,281 < 73,287$.

f) Como a parte inteira dos números é a mesma, então comparamos a parte decimal: 94 centésimos é maior que 90 centésimos; logo $501,94 > 501,9$.

23. a) Como 0 é maior que qualquer número negativo, então o maior número entre 0 e $-\frac{4}{3}$ é 0.

b) $-\frac{12}{2} = -6$ e $-\frac{12}{3} = -4$

Como −4 é maior que −6, então o maior número entre $-\frac{12}{2}$ e $-\frac{12}{3}$ é $-\frac{12}{3}$.

c) Como qualquer número positivo é maior que um número negativo, então o maior número entre 3,14 e −4,1 é 3,14.

d) Ao comparar dois números negativos na forma decimal, o maior deles é o que tiver a menor parte inteira, então entre −7,8 e −0,25, o maior número é −0,25.

e) Como a parte inteira dos números −6,2 e −6,75 é a mesma, então comparamos a parte decimal: −20 centésimos é maior que −75 centésimos; logo, o maior número é −6,20.

f) $-1\frac{3}{4} = -\left(1 + \frac{3}{4}\right) = -(1 + 0,75) = -1,75$

Como a parte inteira dos números −1,75 e −1,80 é a mesma, então comparamos a parte decimal: −75 centésimos é maior que −80 centésimos; logo, o maior número é −1,75, ou seja, $-1\frac{3}{4}$.

24. a) 17; −2; 0

b) $-3,2; -2; -\frac{1}{8}; -\frac{17}{12}$

c) $17; \frac{2}{5}; 4,1; 0,16$

d) Para comparar os números, escrevem-se todos na forma decimal, por exemplo.

- 17
- −3,2
- −2
- 0
- $-\frac{1}{8} = -0,125$
- 0,16
- $\frac{2}{5} = 0,4$
- 4,1
- $-\frac{17}{12} = -1,4666...$

Comparando os números 17; −3,2; −2; 0; −0,125; 0,16; 0,4; 4,1; −1,4666... e colocando-os em ordem crescente, tem-se:

$$-3,2 < -2 < -\frac{17}{12} < -\frac{1}{8} < 0 < 0,16 < \frac{2}{5} < 4,1 < 17$$

PÁGINA 71 – DIVERSIFICANDO

1. Os números representados no quadro são racionais porque podem ser escritos na forma de uma fração, com numerador inteiro e denominador inteiro e diferente de zero.

2. a) 1; 3; 20; 26; 70; 30; 22; 2014; 11; 2022

b) $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

$26\% = \frac{26}{100} = \frac{13}{50}$

c) Ao conjunto dos números racionais.

3. Um possibilidade de fazer essa comparação é transformar o número 5,5 em uma fração.

$$5{,}5 = \frac{55}{10} = \frac{11}{2}$$

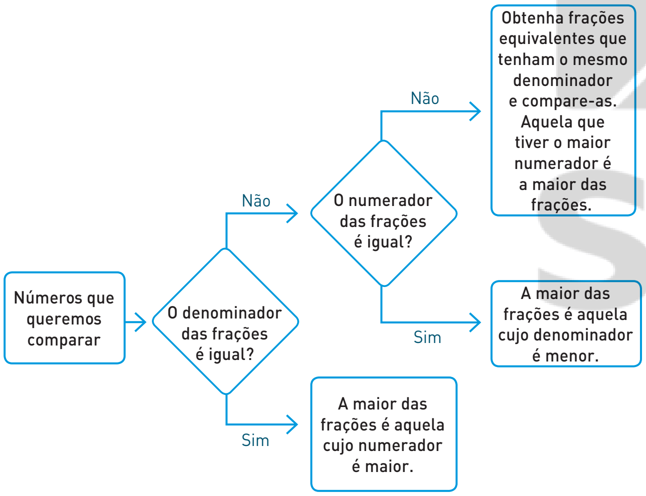
Logo, os dois números são iguais. Outra possibilidadfe seria escrever a fração $\frac{11}{2}$ na forma decimal.

4. a) Medindo com a régua, obtém-se 2,5 cm ou $\frac{5}{2}$ cm.
   b) Resposta pessoal.
   c) Resposta pessoal.

5. Se a garrafa estivesse com água até a quinta marca, de baixo para cima, ela teria 1 L de água, então cada marca representa $\frac{1}{5}$ L ou 0,2 L. Como o nível da água está na terceira marca, de baixo para cima, a quantidade de água que está na garrafa pode ser representada por $\frac{3}{5}$ L ou 0,6 L.

6. a) 8,2; 27; 2021; 22; 15; 35; 7,2; 29; 8; 2022
   b) Todos os números mencionados no texto são racionais.
   c) Resposta pessoal. Os terremotos, ou sismos, são vibrações rápidas e inesperadas, de intensidade variável, na crosta terrestre. A pressão exercida pelo atrito entre as placas tectônicas pode causar uma ruptura na crosta e, com isso, ocorre um movimento brusco nas camadas rochosas que compõem a crosta. Esse movimento libera energia na forma de ondas sísmicas, que podem chegar à superfície e fazer a terra vibrar.
   d) Respostas pessoais.

7. Resposta possível:



CAPÍTULO 2 – OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS

PÁGINA 77 – ATIVIDADES

1. a) $\frac{81}{36} + \frac{12}{36} = \frac{81 + 12}{36} = \frac{93}{36}$

   b) $\frac{178}{532} - \frac{69}{532} = \frac{178 - 69}{532} = \frac{109}{532}$

   c) $\frac{74}{126} + \left(-\frac{27}{126}\right) = \frac{74}{126} - \frac{27}{126} = \frac{74 - 27}{126} = \frac{47}{126}$

   d) 257,91 + 731,12 = 989,03

$$\begin{array}{r} 2\;5\;\overset{1}{7},\;9\;\;1 \\ +\;7\;3\;1,\;1\;\;2 \\ \hline 9\;8\;9,\;0\;\;3 \end{array}$$

   e) −3,21 + 6,5 = 3,29

$$\begin{array}{r} 6,\;\overset{4}{\cancel{5}}\;{}^{1}0 \\ -\;3,\;2\;\;1 \\ \hline 3,\;2\;\;9 \end{array}$$

   f) 17,2 − 6,17 = 11,03

$$\begin{array}{r} 1\;7,\;\overset{1}{\cancel{2}}\;{}^{1}0 \\ -\;\;\;6,\;1\;\;7 \\ \hline 1\;1,\;0\;\;3 \end{array}$$

   g) −62,1 − 8,17 = −(62,1 + 8,17) = −70,27

$$\begin{array}{r} \overset{1}{6}\;2,\;1\;\;0 \\ +\;\;\;8,\;1\;\;7 \\ \hline 7\;0,\;2\;\;7 \end{array}$$

   h) $-\frac{6}{5} + \frac{4}{3} = -\frac{18}{15} + \frac{20}{15} = \frac{2}{15}$

   i) $\frac{7}{3} - \frac{9}{2} = \frac{14}{6} - \frac{27}{6} = -\frac{13}{6}$

   j) $-\frac{3}{7} - \frac{6}{5} = -\frac{15}{35} - \frac{42}{35} = -\frac{57}{35}$

2. a) $\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = 0{,}625 + 0{,}25 = 0{,}875$

   b) $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = 0{,}75 + 0{,}5 = 1{,}25$

3. a) O ponto *A* representa o número 5,8, e o ponto *B*, o número 6,2. Assim:

$$|6{,}2| - |5{,}8| = 6{,}2 - 5{,}8 = 0{,}4$$

   b) O ponto *C* representa o número 6,6, e o ponto *B*, o número 6,2. Assim:

$$|6{,}6| - |6{,}2| = 6{,}6 - 6{,}2 = 0{,}4$$

   c) O ponto *C* representa o número 6,6, e o ponto *A*, o número 5,8. Assim:

$$|6{,}6| - |5{,}8| = 6{,}6 - 5{,}8 = 0{,}8$$

   Outra maneira de resolver esse item seria:

   O ponto *B* está localizado à mesma distância de *A* e de *C*. Portanto, pode-se dizer que |*C*| − |*A*| será igual ao dobro da medida da distância entre *A* e *B* ou *B* e *C*. Logo, |*C*| − |*A*| = 0,8.

4. Respostas possíveis:

   a) 3 2 . 4 − 1 2 . 3 5 =

   b) 3 ÷ 8 = M+ 1 ÷ 1 0 = + MR =

5. Nas primeiras duas horas, foi pintada a seguinte fração do cômodo:

$$\frac{5}{9} + \frac{3}{7} = \frac{35}{63} + \frac{27}{63} = \frac{62}{63}$$

Logo, falta pintar $\frac{1}{63}$ do cômodo, pois:

$$1 - \frac{62}{63} = \frac{63}{63} - \frac{62}{63} = \frac{1}{63}$$

6. $\frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{2}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$

Portanto, os dois amigos juntaram $\frac{11}{12}$ das figurinhas do álbum.

7. $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Agora, a medida do comprimento do cabelo de Anita é $\frac{1}{2}$ metro.

8. $\frac{1}{3} + \frac{5}{9} = \frac{3}{9} + \frac{5}{9} = \frac{8}{9}$

Juntos, eles pegaram $\frac{8}{9}$ do tesouro.

PÁGINA 87 – ATIVIDADES

9. **a)** $\frac{7}{15} \cdot \left(-\frac{9}{21}\right) = \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} \cdot -\left(\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{3}{\cancel{21}}}\right) = -\frac{3}{15} = -\frac{1}{5}$

b) $\left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = +\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8}\right) = +\left(\frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 8}\right) = \frac{15}{56}$

c) $(-3{,}21) \cdot 6{,}5 = -20{,}865$

Em uma multiplicação de dois números racionais de sinais diferentes, multiplicam-se os módulos dos números, e o sinal do produto é negativo.

$$\begin{array}{r} 3{,}\,2\,1 \\ \times \qquad 6{,}\,5 \\ \hline 1\,6\,0\,5 \\ +\ 1\,9\,2\,6\,0 \\ \hline 2\,0{,}\,8\,6\,5 \end{array}$$

d) $\frac{27}{10} \cdot (-3{,}1) = \frac{27}{10} \cdot \left(-\frac{31}{10}\right) = -\frac{837}{100} =$

$= -8{,}37$

Em uma multiplicação de dois números racionais de sinais diferentes, multiplicam-se os módulos dos números, e o sinal do produto é negativo.

$$\begin{array}{r} 2\,7 \\ \times\ 3\,1 \\ \hline 2\,7 \\ +\ 8\,1\,0 \\ \hline 8\,3\,7 \end{array}$$

e) $0{,}75 \cdot 3{,}24 = 2{,}43$

$$\begin{array}{r} 0{,}\,7\,5 \\ \times \quad 3{,}\,2\,4 \\ \hline 3\,0\,0 \\ 1\,5\,0\,0 \\ +\ 2\,2\,5\,0\,0 \\ \hline 2{,}\,4\,3\,0\,0 \end{array}$$

f) $(-6{,}1) \cdot 6{,}5 = -39{,}65$

Em uma multiplicação de dois números racionais de sinais diferentes, multiplicam-se os módulos dos números, e o sinal do produto é negativo.

$$\begin{array}{r} 6{,}\,1 \\ \times \quad 6{,}\,5 \\ \hline 3\,0\,5 \\ +\ 3\,6\,6\,0 \\ \hline 3\,9{,}\,6\,5 \end{array}$$

10. O custo será obtido pelo produto entre o preço da comida e a massa da comida no prato, ou seja:

$$49 \cdot 0{,}450 = 22{,}05$$

Logo, um prato com essa quantidade de comida custa R$ 22,05.

11. **a)** O numerador de uma fração é o denominador da outra.

b) $1{,}6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$

$0{,}625 = \frac{625}{1\,000} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

Então, a relação observada no item anterior também é válida para esses números.

c) Algumas respostas possíveis:

- 1,25 e 0,8

$$1{,}25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$$

$$0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = 1$$

- −6,4 e −0,15625

$$-6{,}4 = -\frac{64}{10} = -\frac{32}{5}$$

$$-0{,}15625 = -\frac{15\,625}{100\,000} = -\frac{125}{800} = -\frac{5}{32}$$

$$\left(-\frac{32}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{32}\right) = 1$$

12. O inverso de $\frac{4}{5}$ é $\frac{5}{4}$ e o inverso de $-\frac{7}{6}$ é $-\frac{6}{7}$.

Assim, para saber qual número está mais próximo de zero, basta verificar qual deles tem o menor módulo:

$$\left|\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4}$$

$$\left|-\frac{6}{7}\right| = \frac{6}{7}$$

Como $\frac{5}{4} = \frac{35}{28}$ e $\frac{6}{7} = \frac{24}{28}$, então $\frac{6}{7} < \frac{5}{4}$.

Portanto, $-\frac{6}{7}$ está mais próximo de 0, ou seja, o inverso de $-\frac{7}{6}$.

13. **a)** O inverso de $\frac{5}{9}$ é $\frac{9}{5}$. Como $\frac{5}{9} = \frac{25}{45}$ e $\frac{9}{5} = \frac{81}{45}$, então $\frac{5}{9} < \frac{9}{5}$. Portanto, $\frac{9}{5}$ é o maior desses números.

b) $-0{,}8 = -\frac{8}{10}$; logo, o inverso de $-0{,}8$ é $-\frac{10}{8}$. Como $-\frac{8}{10} = -\frac{32}{40}$ e $-\frac{10}{8} = -\frac{50}{40}$, então $-\frac{8}{10} > -\frac{10}{8}$. Portanto, $-0{,}8$ é o maior desses números.

c) O inverso de $-\frac{4}{3}$ é $-\frac{3}{4}$.

Como $-\frac{4}{3} = -\frac{16}{12}$ e $-\frac{3}{4} = -\frac{9}{12}$, então $-\frac{4}{3} < -\frac{3}{4}$. Portanto, $-\frac{3}{4}$ é o maior desses números.

d) $6{,}4 = \frac{64}{10}$; logo, o inverso de 6,4 é $\frac{10}{64}$.

Como qualquer fração própria é sempre menor que o inteiro, 6,4 é o maior desses números.

14. **a)** $\left(-\frac{6}{5}\right) : \frac{4}{3} = -\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4}\right) = -\frac{18}{20} = -\frac{9}{10}$

b) $\left(-5\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{1}{8}\right) = \left(-\frac{21}{4}\right) : \left(-\frac{1}{8}\right) =$

$= \left(-\frac{21}{\underset{1}{\cancel{4}}}\right) \cdot \left(-\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{1}\right) = 42$

c) $(-0{,}25) : (-0{,}75) = \left(-\frac{25}{100}\right) : \left(-\frac{75}{100}\right) =$

$= \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{25}}}{\underset{1}{\cancel{100}}}\right) \cdot \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{100}}}{\underset{3}{75}}\right) = \frac{1}{3}$

d) $\left(3\frac{3}{4}\right) : (-0{,}25) = \left(3 + \frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{1}{4}\right) =$

$= \left(\frac{12}{4} + \frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{15}{\underset{1}{\cancel{4}}}\right) \cdot \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{1}\right) = -15$

e) $3 : (-1{,}25) = 3 : \left(-\frac{125}{100}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{100}{125}\right) =$

$= 3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{12}{5} = -2{,}4$

f) $\frac{27}{10} : (-3{,}1) = \frac{27}{10} : \left(-\frac{31}{10}\right) =$

$= \frac{27}{\underset{1}{\cancel{10}}} \cdot -\frac{\overset{1}{\cancel{10}}}{31} = -\frac{27}{31}$

15.
- $-2{,}63 \times 1{,}25 = -3{,}2875$

$$\begin{array}{r} 2{,}\,6\,3 \\ \times \quad 1{,}\,2\,5 \\ \hline 1\,3\,1\,5 \\ 5\,2\,6\,0 \\ +\ 2\,6\,3\,0\,0 \\ \hline 3{,}\,2\,8\,7\,5 \end{array}$$

- $-2{,}63 \times 3{,}7 = -9{,}731$

$$\begin{array}{r} 2{,}\,6\,3 \\ \times \quad 3{,}\,5 \\ \hline 1\,8\,3\,1 \\ +\ 7\,8\,9\,0 \\ \hline 9{,}\,7\,3\,1 \end{array}$$

- $-2{,}63 \times (-6{,}2) = 16{,}306$

$$\begin{array}{r} 2{,}\,6\,3 \\ \times \quad 6{,}\,2 \\ \hline 5\,2\,6 \\ +\ 1\,5\,7\,8\,0 \\ \hline 1\,6{,}\,3\,0\,6 \end{array}$$

- $-2{,}63 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{263}{100}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) =$

$= \frac{263 \times 3}{100 \times 4} = \frac{789}{400} = 1\frac{389}{400}$

- $-11 \times 1{,}25 = -13{,}75$

$$\begin{array}{r} 1\,1 \\ \times \quad 1{,}\,2\,5 \\ \hline 5\,5 \\ 2\,2\,0 \\ +\ 1\,1\,0\,0 \\ \hline 1\,3{,}\,7\,5 \end{array}$$

- $-11 \times 3{,}7 = -40{,}7$

$$\begin{array}{r} 1\,1 \\ \times\ 3{,}\,7 \\ \hline 7\,7 \\ +\ 3\,3\,0 \\ \hline 4\,0{,}\,7 \end{array}$$

- $-11 \times (-6{,}2) = 68{,}2$

$$\begin{array}{r} 1\,1 \\ \times\ 6{,}\,2 \\ \hline 2\,2 \\ +\ 6\,6\,0 \\ \hline 6\,8{,}\,2 \end{array}$$

- $(-11) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{11 \times 3}{1 \times 4} = \frac{33}{4} = 8\frac{1}{4}$

- $6{,}893 \times 1{,}25 = 8{,}61625$

$$\begin{array}{r} 6,893 \\ \times \quad 1,25 \\ \hline 34465 \\ 137860 \\ +\ 689300 \\ \hline 8,61625 \end{array}$$

- $6{,}893 \times 3{,}7 = 25{,}5041$

$$\begin{array}{r} 6,893 \\ \times \quad 3,7 \\ \hline 48251 \\ +\ 206790 \\ \hline 25,5041 \end{array}$$

- $6{,}893 \times (-6{,}2) = -42{,}7366$

$$\begin{array}{r} 6,893 \\ \times \quad 6,2 \\ \hline 13786 \\ +\ 413580 \\ \hline 42,7366 \end{array}$$

- $6{,}893 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{6\,893}{1\,000} \times \left(-\frac{3}{4}\right) =$

$$= -\frac{6\,893 \times 3}{1\,000 \times 4} = -\frac{20\,679}{4\,000} = -5\frac{679}{4\,000}$$

- $\frac{17}{10} \times 1{,}25 = 1{,}7 \times 1{,}25 = 2{,}125$

$$\begin{array}{r} 1,7 \\ \times \ 1,25 \\ \hline 85 \\ 340 \\ +\ 1700 \\ \hline 2,125 \end{array}$$

- $\frac{17}{10} \times 3{,}7 = 1{,}7 \times 3{,}7 = 6{,}29$

$$\begin{array}{r} 1,7 \\ \times \ 3,7 \\ \hline 119 \\ +\ 510 \\ \hline 6,29 \end{array}$$

- $\frac{17}{10} \times (-6{,}2) = 1{,}7 \times (-6{,}2) = -10{,}54$

$$\begin{array}{r} 1,7 \\ \times \ 6,2 \\ \hline 34 \\ +\ 1020 \\ \hline 10,54 \end{array}$$

- $\frac{17}{10} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{17 \times 3}{10 \times 4} = -\frac{51}{40} = -1\frac{11}{40}$

- $\left(-1\frac{1}{5}\right) \times 1{,}25 = \left(-\frac{6}{5}\right) \times 1{,}25 =$

$= (-1{,}2) \times 1{,}25 = -1{,}5$

$$\begin{array}{r} 1,2 \\ \times \ 1,25 \\ \hline 60 \\ 240 \\ +\ 1200 \\ \hline 1,500 \end{array}$$

- $\left(-1\frac{1}{5}\right) \times 3{,}7 = \left(-\frac{6}{5}\right) \times 3{,}7 =$

$= (-1{,}2) \times 3{,}7 = -4{,}44$

$$\begin{array}{r} 1,2 \\ \times \ 3,7 \\ \hline 84 \\ +\ 360 \\ \hline 4,44 \end{array}$$

- $\left(-1\frac{1}{5}\right) \times (-6{,}2) = \left(-\frac{6}{5}\right) \times (-6{,}2) =$

$= 1{,}2 \times 6{,}2 = 7{,}44$

$$\begin{array}{r} 1,2 \\ +\ 6,2 \\ \hline 24 \\ +\ 720 \\ \hline 7,44 \end{array}$$

- $\left(-1\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{\underset{2}{\cancel{4}}}\right) =$

$$= \frac{3 \times 3}{5 \times 2} = \frac{9}{10}$$

Preenchendo o quadro, tem-se:

×	1,25	3,7	−6,2	$-\frac{3}{4}$
−2,63	−3,2875	−9,731	16,306	$1\frac{389}{400}$
−11	−13,75	−40,7	68,2	$8\frac{1}{4}$
6,893	8,61625	25,5041	−42,7366	$-5\frac{679}{4\,000}$
$\frac{17}{10}$	2,125	6,29	−10,54	$-1\frac{11}{40}$
$-1\frac{1}{5}$	−1,5	−4,44	7,44	$\frac{9}{10}$

16. Calculando a quantia que um dos filhos receberá, temos:

$$\frac{2}{3} \cdot 72{,}90 = 48{,}60$$

A quantia que o outro receberá será obtida pela diferença entre o total e o valor recebido pelo primeiro filho:

$$72{,}90 - 48{,}60 = 24{,}30$$

Assim, um filho deve receber R$ 48,60, e o outro filho, R$ 24,30.

17. Primeiro quadro

a	−2,6	0,84	−1,85
b	3,8	0,5	7,6
a* · *b	−9,88	0,42	−14,06

- Coluna 1

$$a \cdot b = -2{,}6 \cdot 3{,}8 = -9{,}88$$

$$\begin{array}{r} 2,6 \\ \times \quad 3,8 \\ \hline 208 \\ +\ 780 \\ \hline 9,88 \end{array}$$

- Coluna 2

$$a \cdot b = 0{,}42$$
$$a \cdot 0{,}5 = 0{,}42$$

Como a operação inversa da multiplicação é a divisão, então:

$$a = 0{,}42 : 0{,}5 = \frac{42}{100} : \frac{5}{10} = \frac{42}{100} \cdot \frac{10}{5} =$$

$$= \frac{42}{100} \cdot 2 = \frac{42 \cdot 2}{100} = \frac{84}{100} = 0{,}84$$

- Coluna 3

$$a \cdot b = -14{,}06$$
$$a \cdot 7{,}6 = -14{,}06$$

Como a operação inversa da multiplicação é a divisão, então:

$$a = -14{,}06 : 7{,}6 = -\frac{1\,406}{100} : \frac{76}{10} =$$

$$= -\frac{1\,406}{100} \cdot \frac{10}{76} = -\frac{1\,406 \cdot 10}{100 \cdot 76} =$$

$$= -\frac{14\,060}{7\,600} = -\frac{185}{100} = -1{,}85$$

Segundo quadro

m	−2,6	0,21	−7,535
n	2,5	0,5	0,55
m* : *n	−1,04	0,42	−13,7

- Coluna 1

$$m : n = (-2{,}6) : 2{,}5 = \left(-\frac{26}{10}\right) : \frac{25}{10} =$$

$$= \left(-\frac{26}{10}\right) \cdot \frac{10}{25} = -\frac{260}{250} = -\frac{26}{25} =$$

$$= -1\frac{1}{25} = -1\frac{4}{100} = -1{,}04$$

- Coluna 2

$$m : n = 0{,}42$$
$$m : 0{,}5 = 0{,}42$$

Como a operação inversa da divisão é a multiplicação, então:

$$m = \frac{42}{100} \cdot \frac{5}{10} = \frac{210}{1\,000} = \frac{21}{100} = 0{,}21$$

- Coluna 3

$$m : n = -13{,}7$$
$$-7{,}525 : n = -13{,}7$$
$$\left(-\frac{7\,535}{1\,000}\right) : n = \left(-\frac{137}{10}\right)$$

Para encontrar o número procurado, devemos fazer:

$$n = \left(-\frac{7\,535}{1\,000}\right) : \left(-\frac{137}{10}\right) =$$

$$= \frac{\overset{55}{\cancel{7\,535}}}{\underset{100}{\cancel{1000}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{137}}} = \frac{55}{100} = 0,55$$

18. **a)** $-4,45$ **b)** 8

19. Resposta pessoal.

PÁGINA 88 – ATIVIDADES

20. **a)** $2 - 8 \cdot \left(-\frac{3}{8} - \frac{5}{16} + \frac{6}{4}\right) =$

$$= 2 - 8 \cdot \left(-\frac{6}{16} - \frac{5}{16} + \frac{24}{16}\right) =$$

$$= 2 - 8 \cdot \frac{13}{16} = 2 - \frac{13}{2} =$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{13}{2} = -\frac{9}{2}$$

b) $\left[\left(3\frac{1}{2} + \frac{5}{4}\right) : \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{2} + 5,8 \cdot 1,4 =$

$$= \left[\left(\frac{7}{2} + \frac{5}{4}\right) : \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{2} + \frac{\overset{29}{\cancel{58}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} \cdot \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} =$$

$$= \left[\left(\frac{14}{4} + \frac{5}{4}\right) : \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{2} + \frac{203}{25} =$$

$$= \left[\frac{19}{4} \cdot 4\right] + \frac{1}{2} + \frac{203}{25} =$$

$$= 19 + \frac{1}{2} + \frac{203}{25} =$$

$$= \frac{950}{50} + \frac{25}{50} + \frac{406}{50} =$$

$$= \frac{1381}{50} = 27,62$$

c) $\left\{\left[2 + \left(\frac{1}{4} : 8\right)\right] : 2\right\} \cdot 3 - 5,3 =$

$$= \left\{\left[2 + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}\right)\right] : 2\right\} \cdot 3 - 5,3 =$$

$$= \left\{\left[2 + \frac{1}{32}\right] : 2\right\} \cdot 3 - 5,3 =$$

$$= \left\{\left[\frac{64}{32} + \frac{1}{32}\right] : 2\right\} \cdot 3 - 5,3 =$$

$$= \left\{\left[\frac{65}{32}\right] : 2\right\} \cdot 3 - 5,3 =$$

$$= \left\{\frac{65}{32} \cdot \frac{1}{2}\right\} \cdot 3 - 5,3 =$$

$$= \left\{\frac{65}{64}\right\} \cdot 3 - 5,3 = \frac{195}{64} - \frac{53}{10} =$$

$$= \frac{975}{320} - \frac{1696}{320} = -\frac{721}{320} = -2,253125$$

d) $\dfrac{3}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = \dfrac{3}{1 + \dfrac{1}{\frac{4}{3}}} = \dfrac{3}{1 + \frac{3}{4}} =$

$$= \frac{3}{\frac{7}{4}} = 3 \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{7}$$

21. **a)** $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

b) $4 \cdot \left[\frac{1}{6} + \left(-\frac{5}{12}\right)\right] = 4 \cdot \left[\frac{1}{6} - \frac{5}{12}\right] =$

$$= 4 \cdot \left[\frac{2}{12} - \frac{5}{12}\right] = 4 \cdot \left[-\frac{3}{12}\right] =$$

$$= 4 \cdot \left[-\frac{1}{4}\right] = -1$$

c) $\frac{5}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{10}{4} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

d) $2 \cdot \frac{4}{3} + \frac{6}{10} = \frac{8}{3} + \frac{6}{10} =$

$$= \frac{80}{30} + \frac{18}{30} = \frac{98}{30} = \frac{49}{15}$$

PÁGINA 89 – DIVERSIFICANDO

1. **a)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes comentem que essa representação não é prática.

b) Quarta-feira:

$$\frac{81}{2}\ °C = 40,5\ °C$$

Essa temperatura é maior que as outras; portanto, quarta-feira foi o dia em que foi registrada a maior temperatura.

c) Na terça-feira, com 35,9 °C.

2. Exemplos de resposta:

a) Propriedade comutativa:

A. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

B. $\frac{18}{45} + \frac{4}{9} = \frac{18}{45} + \frac{20}{45} = \frac{38}{45}$

$\frac{4}{9} + \frac{18}{45} = \frac{20}{45} + \frac{18}{45} = \frac{38}{45}$

Elemento neutro:

A. $\frac{7}{9} + 0 = \frac{7}{9}$

B. $-\frac{18}{37} + 0 = -\frac{18}{37}$

b) Propriedade associativa:

A. $(0,7 \cdot 1,9) \cdot 2,5 = 1,33 \cdot 2,5 = 3,325$

$0,7 \cdot (1,9 \cdot 2,5) = 0,7 \cdot 4,75 = 3,325$

B. $(5,8 \cdot 26,4) \cdot (-4,8) =$

$= 153,12 \cdot (-4,8) = -734,976$

$5,8 \cdot [26,4 \cdot (-4,8)] =$

$= 5,8 \cdot (-126,72) = -734,976$

Propriedade distributiva:

A. $(15,8 + 23,6) \cdot 12,4 =$

$= 15,8 \cdot 12,4 + 23,6 \cdot 12,4 =$

$= 195,92 + 292,64 = 488,56$

B. $(94,1 + 5,42) \cdot 4,64 =$

$= 94,1 \cdot 4,64 + 5,42 \cdot 4,64 =$

$= 436,624 + 25,1488 =$

$= 461,7728$

3. **a)** Para pagar sua dívida mais a conta de energia elétrica, Romeu precisaria dispor de R$ 196,85 (83,87 + 112,98). Contudo, de acordo com as informações do problema, quando ele pagou tudo, ficou com saldo negativo de R$ 9,10. Assim, para saber quantos reais Romeu tinha antes de fazer esses pagamentos, é preciso subtrair 9,10 de 196,85.

$$(83,87 + 112,98) - 9,10 =$$

$$= 196,85 - 9,10 = 187,75$$

Portanto, Romeu tinha R$ 187,75 antes de fazer os pagamentos.

b) Respostas pessoais.

4. Resposta pessoal.

5. De acordo com o enunciado, podemos escrever a expressão:

$$54 - \left(\frac{54}{2} + 12\right) =$$

$$= 54 - (27 + 12) =$$

$$= 54 - 39 = 15$$

Portanto, Renata comprou 15 enfeites.

6. **a)** Deve-se multiplicar 8 por $\frac{5}{8}$ para obter 5, pois $\frac{5}{8} \cdot 8 = 5$.

b) Deve-se multiplicar 3 por $\frac{7}{3}$ para obter 7, pois $\frac{7}{3} \cdot 3 = 7$.

c) Deve-se multiplicar 6 por $\frac{9}{6}$ para obter 9, pois $\frac{9}{6} \cdot 6 = 9$.

d) Deve-se multiplicar 4 por $\frac{13}{4}$ para obter 13, pois $\frac{13}{4} \cdot 4 = 13$.

7. Para comparar as frações, podemos primeiro encontrar frações equivalentes a $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{9}{6}$ e $\frac{13}{4}$, de modo que elas tenham o mesmo denominador.

Nesse caso, vamos utilizar o denominador 24, pois o mmc(8, 3, 6, 4) = 24. Assim:

$\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$ $\frac{9}{6} = \frac{36}{24}$

$\frac{7}{3} = \frac{56}{24}$ $\frac{13}{4} = \frac{78}{24}$

Como $\frac{15}{24} < \frac{36}{24} < \frac{56}{24} < \frac{78}{24}$, então:

$$\frac{5}{8} < \frac{9}{6} < \frac{7}{3} < \frac{13}{4}$$

8. **a)** $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$

Portanto, nas duas primeiras semanas, Ricardo leu $\frac{5}{12}$ do livro.

b) Na terceira semana, Ricardo leu o restante do livro, ou seja, o que faltava para o valor obtido no item anterior completar um inteiro.

Assim, a fração correspondente ao que ele leu na terceira semana é:

$$1 - \frac{5}{12} = \frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

Portanto, na terceira semana, Ricardo leu $\frac{7}{12}$ do livro.

9. Adicionando-se a temperatura mínima à variação de temperatura registrada no dia, obtemos a temperatura máxima desse dia.

$$-1,8 + 39,5 = 37,7$$

Portanto, a temperatura máxima registrada nesse dia foi 37,7 °C.

PÁGINA 90 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Orçamento pessoal ou doméstico é um organizador das receitas e despesas pessoais; orçamento comercial ou de serviços (pedido a uma loja, por exemplo) é a descrição dos produtos ou serviços oferecidos, preços, formas e prazos de pagamento e de entrega do produto ou de realização do serviço. Em ambos, é necessária a organização financeira para a tomada de decisões.

2. Resposta pessoal.

3. **a)** Na loja Sportmais, eles gastariam R\$ 600,00 $(24 \cdot 25 = 600)$ e, na loja Sportshow, R\$ 504,00 $(24 \cdot 21 = 504)$.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes apontem que a loja Sportshow seria a mais adequada para fazer a compra, levando em conta o fator preço.

c) Resposta pessoal. É importante que os estudantes percebam que as condições de pagamento, assim como a qualidade do produto e a condição financeira dos jogadores, são fatores importantes a serem considerados.

d) Respostas pessoais. Respostas possíveis: pedir desconto por pagamento à vista; explicar o uso que será feito das camisetas; pedir desconto por ser para escola; consultar outras lojas; etc.

4. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes apontem, entre outros aspectos, que a história apresenta um bom exemplo de organização financeira, o qual pode ser aplicado, com as devidas adaptações, a situações reais na vida pessoal deles e na de suas famílias.

PÁGINA 92 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Alternativa **e**.

Se $\frac{1}{4}$ da medida da distância que falta para completar o percurso corresponde a 105 km, a medida da distância que falta equivale a 420 km $(4 \cdot 105 = 420)$. Esse valor corresponde a $\frac{3}{5}\left(\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}\right)$ da medida do percurso total; logo, a medida da distância entre as duas cidades é 700 km:

$$[(5 \cdot 420) : 3 = 700]$$

2. Alternativa **c**.

Sabe-se que o percurso tem forma de quadrado, portanto cada lado tem a mesma medida. Como Sueli percorreu $\frac{3}{5}$ do total, significa que ela percorreu um pouco mais que a metade do percurso. A metade do percurso corresponde a pedalar de *P* até *B* passando por *A*; então, um pouco mais que a metade só pode ser no ponto *C*.

3. Alternativa **b**.

Giovana pagou R\$ 299,00 à vista, e Mariana pagou R\$ 385,80 $(12 \cdot 32{,}15 = 385{,}80)$ a prazo. Portanto, o valor que Mariana pagou a mais que Giovana pela compra a prazo foi R\$ 86,80:

$$385{,}80 - 299{,}00 = 86{,}80$$

4. **a)** A medida da massa igual a 1,600 kg está no intervalo de 1,501 kg até 1,800 kg, que pertence à classe 3.

b) A medida da massa de um abacaxi da classe 5 varia de 2,101 kg a 2,400 kg; então a medida da massa de dois abacaxis dessa classe varia de no mínimo 4,202 kg até o máximo de 4,800 kg

$$2{,}101 + 2{,}101 = 4{,}202$$

$$2{,}400 + 2{,}400 = 4{,}800$$

c) Resposta pessoal.

5. De acordo com Aline, no bairro onde ela mora, $\frac{3}{4}$ das pessoas moram em casas e $\frac{1}{4}\left(0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}\right)$ das pessoas mora em apartamentos.

Se $\frac{1}{5}$ das pessoas que moram em casas tem imóvel próprio, então $\frac{1}{5}$ de $\frac{3}{4}$ das pessoas do bairro, que são aquelas que moram em casas, tem imóvel próprio. Calculando esse valor, temos:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$$

Se $\frac{4}{10}$ das pessoas que moram em apartamentos têm imóvel próprio, então $\frac{4}{10}$ de $\frac{1}{4}$ das pessoas do bairro, correspondentes àquelas que moram em apartamentos, têm imóvel próprio. Calculando esse valor, temos:

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Para calcular o total de pessoas que têm imóvel próprio no bairro, basta adicionar a quantidade de pessoas que moram em casas e têm imóvel próprio com a quantidade de pessoas que moram em apartamentos e têm imóvel próprio, ou seja:

$$\frac{3}{20} + \frac{1}{10} = \frac{3}{20} + \frac{2}{20} = \frac{5}{20}$$

Como $\frac{5}{20} = \frac{25}{100} = 25\%$, então Ana está correta.

6. Alternativa **c**.

O inverso de $\frac{7}{2}$ é $\frac{2}{7}$. Para obter o inverso do outro número, devemos fazer:

$$1 - \frac{2}{7} = \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Então, o outro número é $\frac{7}{5}$.

7. Alternativa **a**.

Primeiro, vamos resolver a expressão e, depois, indicar o intervalo em que está localizado o inverso do valor final da expressão apresentada.

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) : \left(\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) : \left(2 - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \left(\frac{9}{15} + \frac{5}{15}\right) : \left(\frac{8}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{14}{15} : \frac{7}{4} =$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{15} \cdot \frac{4}{\underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{8}{15}$$

Logo, o inverso de $\frac{8}{15}$ é $\frac{15}{8}$, e $\frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$. Então, $\frac{15}{8}$ é um número que está entre 1 e 2.

8. Utilizando a ideia de divisão como operação inversa da multiplicação, temos:

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Logo, o número procurado é $\frac{6}{5}$.

9. Para cada 2 rosas, deve haver 3 margaridas. No pedido há 120 rosas, logo teremos 60 grupos de 2 rosas $(120 : 2 = 60)$. Portanto, serão colocadas 180 margaridas $(60 \cdot 3 = 180)$.

Para cada 4 margaridas, deve haver 5 tulipas. Como o pedido terá 180 margaridas, então teremos 45 grupos de 4 margaridas $(180 : 4 = 45)$. Portanto, serão necessárias 225 tulipas $(45 \cdot 5 = 225)$.

10. Exemplo de explicação:

De acordo com o enunciado, deve-se dividir 35 camelos para 3 herdeiros da seguinte forma:

- O mais velho deve receber a metade da herança, isto é, 17 camelos e meio.
- O segundo deve receber um terço da herança, isto é, 11 camelos e dois terços.
- O terceiro, mais moço, deve receber um nono da herança, isto é, 3 camelos e oito nonos.

Feita a partilha dessa forma, há uma sobra:

$$17 + \frac{1}{2} + 11 + \frac{2}{3} + 3 + \frac{8}{9} =$$

$$= 31 + \frac{9}{18} + \frac{12}{18} + \frac{16}{18} =$$

$$= 31 + \frac{37}{18} = 31 + 2\frac{1}{18} = 33 + \frac{1}{18}$$

A sobra é de $1 + \frac{17}{18}$, pois:

$$35 - \left(33 + \frac{1}{18}\right) = 2 - \frac{1}{18} = \frac{36}{18} - \frac{1}{18} =$$

$$= \frac{35}{18} = 1 + \frac{17}{18}$$

Beremiz resolve o problema da seguinte forma:

I. Acrescenta $\frac{1}{2}$ camelo para o primeiro herdeiro, que recebe 18 camelos.

II. Acrescenta $\frac{1}{3}$ de camelo para o segundo herdeiro, que recebe 12 camelos.

III. Acrescenta $\frac{1}{9}$ de camelo para o terceiro herdeiro, que recebe 4 camelos.

Então, eles receberam, ao todo, 34 camelos $(18 + 12 + 4 = 34)$, sobrando 1 camelo, que fica para Beremiz.

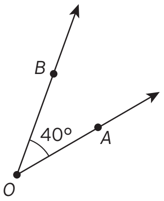
UNIDADE 3 – FIGURAS GEOMÉTRICAS

CAPÍTULO 1 – ÂNGULOS

PÁGINA 100 – ATIVIDADES

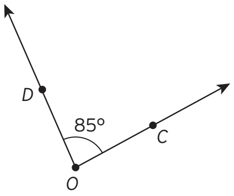
1. Respostas possíveis:

a) Primeiro, marcar um ponto O, que será o vértice do ângulo, e traçar uma semirreta $\overrightarrow{OA}$. Em seguida, com o centro do transferidor em O, posicionar a linha que indica 0° sobre a semirreta $\overrightarrow{OA}$. Depois, marcar um ponto B sobre a indicação de 40° do transferidor e, por fim, traçar a semirreta $\overrightarrow{OB}$, obtendo o ângulo $A\hat{O}B$ que mede 40°.

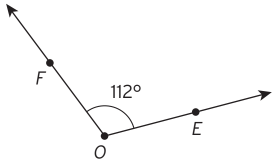


Ilustrações: ID/BR

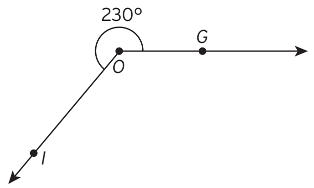
b) Primeiro, marcar um ponto O, que será o vértice do ângulo, e traçar uma semirreta $\overrightarrow{OC}$. Em seguida, com o centro do transferidor em O, posicionar a linha que indica 0° sobre a semirreta $\overrightarrow{OC}$. Depois, marcar um ponto D sobre a indicação de 85° do transferidor e, por fim, traçar a semirreta $\overrightarrow{OD}$, obtendo o ângulo $C\hat{O}D$ que mede 85°.



c) Primeiro, marcar um ponto O, que será o vértice do ângulo, e traçar uma semirreta $\overrightarrow{OE}$. Em seguida, com o centro do transferidor em O, posicionar a linha que indica 0° sobre a semirreta $\overrightarrow{OE}$. Depois, marcar um ponto F sobre a indicação de 112° do transferidor e, por fim, traçar a semirreta $\overrightarrow{OF}$, obtendo o ângulo $E\hat{O}F$ que mede 112°.



d) Primeiro, marcar um ponto O, que será o vértice do ângulo, e traçar uma semirreta $\overrightarrow{OG}$. Em seguida, com o centro do transferidor em O, posicionar a linha que indica 0° sobre a semirreta $\overrightarrow{OG}$. Depois, marcar um ponto I sobre a indicação de 230° do transferidor e, por fim, traçar a semirreta $\overrightarrow{OI}$, obtendo o ângulo $G\hat{O}I$ que mede 230°.



2. **a)** $\beta > \gamma$ **b)** $\gamma < \theta$ **c)** $\theta > \alpha$

3. **a)** Como 1° = 60′, então:

$$180^\circ = 180 \cdot 1^\circ = 180 \cdot 60' = 10\,800'$$

Logo, um ângulo de 180° tem 10 800 minutos.

b) Como 1° = 60′, então:

$$45^\circ = 45 \cdot 1^\circ = 45 \cdot 60' = 2\,700'$$

Como 1′ = 60″, então:

$$2\,700' = 2\,700 \cdot 1' = 2\,700 \cdot 60'' =$$
$$= 162\,000''$$

Logo, um ângulo de 45° tem 162 000 segundos.

c) Como 1′ = 60″, então:

$$3\,600'' = 60 \cdot 60'' = 60 \cdot 1' = 60'$$

Como 1° = 60′, então:

$$60' = 1^\circ$$

Portanto, um ângulo de 3 600 segundos tem 1 grau.

4. **a)** Como 1′ = 60″, então:

$$20' = 20 \cdot 1' = 20 \cdot 60'' = 1\,200''$$

Logo, 20′ correspondem a 1 200″.

b) Como 1′ = 60″, então:

$$8' = 8 \cdot 1' = 8 \cdot 60'' = 480''$$

Logo, 8′ correspondem a 480″.

c) Como 1° = 60′ e 1′ = 60″, então:

$$1^\circ = 60' = 60 \cdot 1' = 60 \cdot 60'' = 3\,600''$$

Logo, 1° corresponde a 3 600″.

d) Como 1° = 60′ e 1′ = 60″, então:

I. Convertendo 9° em minutos:

$$9^\circ = 9 \cdot 1^\circ = 9 \cdot 60' = 540'$$

II. Convertendo 540′ em segundos:

$$540' = 540 \cdot 1' = 540 \cdot 60'' =$$
$$= 32\,400''$$

III. Convertendo 12′ em segundos:

$$12' = 12 \cdot 1' = 12 \cdot 60'' = 720''$$

Adicionando 5″ a II e a III, tem-se:

$$32\,400'' + 720'' + 5'' = 33\,125''$$

Logo, 9° 12′ 5″ correspondem a 33 125″.

5. **a)** Como 1° = 60′, então:

$$90^\circ = 90 \cdot 1^\circ = 90 \cdot 60' = 5\,400'$$

Logo, 90° correspondem a 5 400′.

b) Como 1° = 60′ e 1′ = 60″, então:

$$180^\circ = 180 \cdot 1^\circ = 180 \cdot 60' =$$
$$= 10\,800' = 10\,800 \cdot 1' =$$
$$= 10\,800 \cdot 60'' = 648\,000''$$

Logo, 180° correspondem a 648 000″.

c) Como 1° = 60′, então:

$$120^\circ = 120 \cdot 1^\circ = 120 \cdot 60' = 7\,200'$$

Logo, 120° correspondem a 7 200′.

PÁGINA 101 – ATIVIDADE

6. **a)** 26° 45′ 9″ + 40° 11′ 27″ = 66° 56′ 36″

$$\begin{array}{rrrr} & 26^\circ & 45' & 9'' \\ + & 40^\circ & 11' & 27'' \\ \hline & 66^\circ & 56' & 36'' \end{array}$$

b) 40° 12′ 13″ + 58° 20′ 40″ = 98° 32′ 53″

$$\begin{array}{rrrr} & 40^\circ & 12' & 13'' \\ + & 58^\circ & 20' & 40'' \\ \hline & 98^\circ & 32' & 53'' \end{array}$$

c) 72° 13′ 40″ + 36° 12′ 20″ = 108° 26′

$$\begin{array}{rrrr} & 72^\circ & \overset{1'}{13'} & 40'' \\ + & 36^\circ & 12' & 20'' \\ \hline & & & \cancel{60''} \\ & 108^\circ & 26' & 0'' \end{array}$$

d) 75° 23′ 10″ + 16° 30′ = 91° 53′ 10″

$$\begin{array}{rrrr} & 75^\circ & 23' & 10'' \\ + & 16^\circ & 30' & 0'' \\ \hline & 91^\circ & 53' & 10'' \end{array}$$

PÁGINA 102 – ATIVIDADE

7. **a)** 60° 30′ 15″ − 40° 20′ 10″ = 20° 10′ 5″

$$\begin{array}{rrrr} & 60^\circ & 30' & 15'' \\ - & 40^\circ & 20' & 10'' \\ \hline & 20^\circ & 10' & 5'' \end{array}$$

b) 50° 12″ − 36° 10′ 20″ = 14° 1′ 40″

$$\begin{array}{rrrr} & 50^\circ & \overset{11'}{\cancel{12'}} & \overset{60''}{0''} \\ - & 36^\circ & 10' & 20'' \\ \hline & 14^\circ & 1' & 40'' \end{array}$$

c) 22° 32′ 28″ − 7° 36′ 23″ = 14° 56′ 5″

$$\begin{array}{rrrr} & \overset{21^\circ}{\cancel{22^\circ}} & \overset{60'}{32'} & 28'' \\ - & 7^\circ & 36' & 23'' \\ \hline & 14^\circ & 56' & 5'' \end{array}$$

d) 43° 39′ 18″ − 27° 41′ 53″ = 15° 57′ 25″

$$\begin{array}{rrrr} & \overset{42^\circ}{\cancel{43^\circ}} & \overset{\overset{60'}{38'}}{\cancel{39'}} & \overset{60''}{18''} \\ - & 27^\circ & 41' & 53'' \\ \hline & 15^\circ & 57' & 25'' \end{array}$$

e) 23° 45′ 50″ − 10° 36′ 30″ = 13° 9′ 20″

$$\begin{array}{rrrr} & 23^\circ & 45' & 50'' \\ - & 10^\circ & 36' & 30'' \\ \hline & 13^\circ & 9' & 20'' \end{array}$$

f) 80° − 35° 49′ 46″ = 44° 10′ 14″

$$\begin{array}{rrrr} & \overset{79^\circ}{\cancel{80^\circ}} & \overset{\overset{59'}{\cancel{60'}}}{0'} & \overset{60''}{0''} \\ - & 35^\circ & 49' & 46'' \\ \hline & 44^\circ & 10' & 14'' \end{array}$$

g) 172° 15″ − 40° 20′ 7″ = 131° 40′ 8″

$$\begin{array}{rrrr} & \overset{171^\circ}{\cancel{172^\circ}} & \overset{60'}{0'} & 15'' \\ - & 40^\circ & 20' & 7'' \\ \hline & 131^\circ & 40' & 8'' \end{array}$$

h) 66° 33′ 17″ − 52° 45′ 36″ = 13° 47′ 41″

$$\begin{array}{rrr} & 60' & \\ 65^\circ & 32' & 60'' \\ \cancel{66^\circ} & \cancel{33'} & 17'' \\ -\,52^\circ & 45' & 36'' \\ \hline 13^\circ & 47' & 41'' \end{array}$$

PÁGINA 103 – ATIVIDADES

8. a) 4 · (7° 16′ 31″) = 29° 6′ 4″

$$\begin{array}{rrr} 7^\circ & 16' & 31'' \\ \times & & 4 \\ \hline 28^\circ & 64' & 124'' \end{array}$$

Como 124″ ⩾ 60″ e 64′ ⩾ 60′, então:

I. 124″ = 2 · 60″ + 4″ =
= 2 · 1′ + 4″ = 2′ 4″

II. 64′ = 60′ + 4′ = 1° + 4′ = 1° 4′

Logo, 28° 64′ 124″ =
= 28° + (1° 4′) + (2′ 4″) = 29° 6′ 4″

b) 5 · (25° 14′ 20″) = 126° 11′ 40″

$$\begin{array}{rrr} 25^\circ & 14' & 20'' \\ \times & & 5 \\ \hline 125^\circ & 70' & 100'' \end{array}$$

Como 100″ ⩾ 60″ e 70′ ⩾ 60′, então:

I. 100″ = 60″ + 40″ = 1′ + 40″ = 1′ 40″

II. 70′ = 60′ + 10′ = 1° + 10′ = 1° 10′

Logo, 125° 70′ 100″ =
= 125° + (1° 10′) + (1′ 40″) =
= 126° 11′ 40″

c) 3 · (15° 20′ 24″) = 46° 1′ 12″

$$\begin{array}{rrr} 15^\circ & 20' & 24'' \\ \times & & 3 \\ \hline 45^\circ & 60' & 72'' \end{array}$$

Como 72″ ⩾ 60″ e 60′ ⩾ 60′, então:

I. 72″ = 60″ + 12″ =
= 1′ + 12″ = 1′ 12″

II. 60′ = 1°

Logo, 45° 60′ 72″ =
= 45° + (1°) + (1′ 12″) = 46° 1′ 12″

d) 8 · (7° 43′ 58″) = 61° 51′ 44″

$$\begin{array}{rrr} 7^\circ & 43' & 58'' \\ \times & & 8 \\ \hline 56^\circ & 344' & 464'' \end{array}$$

Como 464″ ⩾ 60″ e 344′ ⩾ 60′, então:

I. 464″ = 7 · 60″ + 44″ =
= 7 · 1′ + 44″ = 7′ + 44″ = 7′ 44″

II. 344′ = 5 · 60′ + 44′ =
= 5 · 1° + 44′ = 5° + 44′ = 5° 44′

Logo, 56° 344′ 464″ =
= 56° + (5° 44′) + (7′ 44″) = 61° 51′ 44″

9. a) O dobro de 23° 12′ 15″ é dado por 2 · (23° 12′ 15″).

$$\begin{array}{rrr} 23^\circ & 12' & 15'' \\ \times & & 2 \\ \hline 46^\circ & 24' & 30'' \end{array}$$

Portanto, o dobro de 23° 12′ 15″ é igual a 46° 24′ 30″.

b) O triplo de 13° 32″ é dado por 3 · (13° 32″).

$$\begin{array}{rrr} 13^\circ & 0' & 32'' \\ \times & & 3 \\ \hline 39^\circ & 0' & 96'' \end{array}$$

Como 96″ ⩾ 60″, então:
96″ = 60″ + 36″ = 1′ + 36″ = 1′ 36″

Logo, 39° 96″ = 39° + (1′ 36″) =
= 39° 1′ 36″

Portanto, o triplo de 13° 32″ é igual a 39° 1′ 36″.

c) O triplo de 2° 24′ é dado por 3 · (2° 24′).

$$\begin{array}{rrr} 2^\circ & 24' & 0'' \\ \times & & 3 \\ \hline 6^\circ & 72' & 0'' \end{array}$$

Como 1° = 60′ e 1′ = 60″, então:
6° + 72′ = 6 · 1° + 72 · 1′ =
= 6 · 60′ + 72 · 60″ =
= 360′ + 4320″ = 360 · 1′ + 4320″ =
= 360 · 60″ + 4320″ =
= 21 600″ + 4320″ = 25 920″

Logo, o triplo de 2° 24′ tem 25 920 segundos.

10. Primeiro, deve-se efetuar a multiplicação 6 · (17° 52′ 44″).

$$\begin{array}{rrr} 17^\circ & 52' & 44'' \\ \times & & 6 \\ \hline 102^\circ & 312' & 264'' \end{array}$$

Esse foi o resultado obtido por Samanta. Mas, como 264″ ⩾ 60″ e 312′ ⩾ 60′, então:

I. 264″ = 4 · 60″ + 24″ =
= 4 · 1′ + 24″ = 4′ 24″

II. 312′ = 5 · 60′ + 12′ =
= 5 · 1° + 12′ = 5° 12′

Logo, 102° 312′ 264″ =
= 102° + (5° 12′) + (4′ 24″) = 107° 16′ 24″

Esse foi o resultado obtido por Pedro.

Portanto, eles obtiveram o mesmo resultado. Porém, Samanta não realizou a conversão dos segundos para minutos e dos minutos para graus, e Pedro realizou todas as transformações possíveis.

PÁGINA 104 – ATIVIDADE

11. a) 15° : 3 = 5°

$$\begin{array}{r|l} 15^\circ & 3 \\ \cline{2-2} 0^\circ & 5^\circ \end{array}$$

b) 15° : 8 = 1° 52′ 30″

$$\begin{array}{rrr|l} 15^\circ & 0' & 0'' & 8 \\ \cline{4-4} -\,8^\circ & & & 1^\circ\,52'\,30'' \\ \cline{1-1} \cancel{7^\circ} & 420' & & \\ - & 416' & & \\ \cline{1-2} & \cancel{4'} & 240'' & \\ & - & 240'' & \\ \cline{2-3} & & 0'' & \end{array}$$

Cálculos auxiliares:

- Convertendo 7° em minutos:
  7° = 7 · 1° = 7 · 60′ = 420′
- Convertendo 4′ em segundos:
  4′ = 4 · 1′ = 4 · 60″ = 240″

c) (45° 20′) : 4 = 11° 20′

$$\begin{array}{rr|l} 45^\circ & 20' & 4 \\ \cline{3-3} -\,44^\circ & & 11^\circ\,20' \\ \cline{1-1} \cancel{1^\circ} & 80' & \\ - & 80' & \\ \cline{1-2} & 0' & \end{array}$$

Cálculos auxiliares:

- Convertendo 1° em minutos:
  1° = 60′
- Adicionando os minutos:
  20′ + 60′ = 80′

d) (63° 3′ 20″) : 5 = 12° 36′ 40″

$$\begin{array}{rrr|l} 63^\circ & 3' & 20'' & 5 \\ \cline{4-4} -\,60^\circ & & & 12^\circ\,36'\,40'' \\ \cline{1-1} \cancel{3^\circ} & 183' & & \\ - & 180' & & \\ \cline{1-2} & \cancel{3'} & 200'' & \\ & - & 200'' & \\ \cline{2-3} & & 0'' & \end{array}$$

Cálculos auxiliares:

- Convertendo 3° em minutos:
  3° = 3 · 1° = 3 · 60′ = 180′
- Adicionando os minutos:
  3′ + 180′ = 183′
- Convertendo 3′ em segundos:
  3′ = 3 · 1′ = 3 · 60″ = 180″
- Adicionando os segundos:
  20″ + 180″ = 200″

e) (120° 36′ 42″) : 6 = 20° 6′ 7″

$$\begin{array}{rrr|l} 120^\circ & 36' & 42'' & 6 \\ \cline{4-4} -\,120^\circ & & & 20^\circ\,6'\,7'' \\ \cline{1-1} 0^\circ & 36' & & \\ - & 36' & & \\ \cline{1-2} & 0' & 42'' & \\ & - & 42'' & \\ \cline{2-3} & & 0'' & \end{array}$$

f) (74° 15′ 2″) : 7 = 10° 36′ 26″

$$\begin{array}{rrr|l} 74^\circ & 15' & 2'' & 7 \\ \cline{4-4} -\,70^\circ & & & 10^\circ\,36'\,26'' \\ \cline{1-1} \cancel{4^\circ} & 255' & & \\ - & 252' & & \\ \cline{1-2} & \cancel{3'} & 182'' & \\ & - & 182'' & \\ \cline{2-3} & & 0'' & \end{array}$$

Cálculos auxiliares:

- Convertendo 4° em minutos:
  4° = 4 · 1° = 4 · 60′ = 240′

- Adicionando os minutos:
  $15' + 240' = 255'$
- Convertendo 3′ em segundos:
  $3' = 3 \cdot 1' = 3 \cdot 60'' = 180''$
- Adicionando os segundos:
  $2'' + 180'' = 182''$

g) $(84^\circ\ 16') : 8 = 10^\circ\ 32'$

$$\begin{array}{rr|l}
84^\circ & 16' & 8 \\ \cline{3-3}
-\ 80^\circ & & 10^\circ\ 32' \\ \hline
\cancel{4^\circ} & 256' & \\
- & 256' & \\ \hline
 & 0' &
\end{array}$$

Cálculos auxiliares:

- Convertendo 4° em minutos:
  $4^\circ = 4 \cdot 1^\circ = 4 \cdot 60' = 240'$
- Adicionando os minutos:
  $16' + 240' = 256'$

h) $(55^\circ\ 12'\ 9'') : 9 = 6^\circ\ 8'\ 1''$

$$\begin{array}{rrr|l}
55^\circ & 12' & 9'' & 9 \\ \cline{4-4}
-\ 54^\circ & & & 6^\circ\ 8'\ 1'' \\ \hline
\cancel{1^\circ} & 72' & & \\
- & 72' & & \\ \hline
 & 0' & 9'' & \\
 & - & 9'' & \\ \hline
 & & 0'' &
\end{array}$$

Cálculos auxiliares:

- Convertendo 1° em minutos:
  $1^\circ = 60'$
- Adicionando os minutos:
  $12' + 60' = 72'$

i) $(82^\circ\ 42'\ 30'') : 10 = 8^\circ\ 16'\ 15''$

$$\begin{array}{rrr|l}
82^\circ & 42' & 30'' & 10 \\ \cline{4-4}
-\ 80^\circ & & & 8^\circ\ 16'\ 15'' \\ \hline
\cancel{2^\circ} & 162' & & \\
- & 160' & & \\ \hline
 & \cancel{2'} & 150'' & \\
 & - & 150'' & \\ \hline
 & & 0'' &
\end{array}$$

Cálculos auxiliares:

- Convertendo 2° em minutos:
  $2^\circ = 2 \cdot 1^\circ = 2 \cdot 60' = 120'$
- Adicionando os minutos:
  $42' + 120' = 162'$
- Convertendo 2′ em segundos:
  $2' = 2 \cdot 1' = 2 \cdot 60'' = 120''$
- Adicionando os segundos:
  $30'' + 120'' = 150''$

PÁGINA 108 – ATIVIDADES

12. Os pares de ângulos congruentes são os das figuras: A e F; B e E; C e D.

13. Os ângulos $A\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}F$ e $B\hat{O}F$ medem 36° cada um, pois eles são congruentes entre si e $180^\circ : 5 = 36^\circ$.

a) Verdadeira, pois ambos medem 36°.

b) Verdadeira, pois ambos medem 36°.

c) Falsa, pois o ângulo $A\hat{O}D$ mede 72° (36° + 36°) e o ângulo $D\hat{O}B$ mede 108° (36° + 36° + 36°).

d) Verdadeira, pois ambos medem 108° (36° + 36° + 36°).

e) Falsa, pois o ângulo $C\hat{O}E$ mede 72° (36° + 36°) e o ângulo $C\hat{O}A$ mede 36°.

f) Verdadeira, pois ambos medem 36°.

14. Com base nas informações dadas no quadro, tem-se:

- medida do complemento de 70°:
  $90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$
- medida do suplemento de 70°:
  $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$
- ângulo cujo suplemento mede 114°:
  $180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$
- medida do complemento de 66°:
  $90^\circ - 66^\circ = 24^\circ$
- ângulo cujo complemento mede 0°:
  $90^\circ - 0^\circ = 90^\circ$
- medida do suplemento de 90°:
  $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
- ângulo cujo complemento mede 45°:
  $90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$
- medida do suplemento de 45°:
  $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Medida do ângulo	Medida do complemento	Medida do suplemento
70°	20°	110°
66°	24°	114°
90°	0°	90°
45°	45°	135°

15. a) Verdadeira, pois $\overrightarrow{OA}$ é lado comum aos dois ângulos.

b) Falsa, pois os ângulos têm o lado $\overrightarrow{OA}$ em comum, mas as regiões convexas determinadas por esses ângulos têm pontos internos em comum.

c) Verdadeira, pois os ângulos têm o lado $\overrightarrow{OB}$ em comum e as regiões convexas determinadas por esses ângulos não têm pontos internos em comum.

d) Verdadeira, pois $\overrightarrow{OB}$ é lado comum aos dois ângulos.

e) Falsa, pois os ângulos não têm lado comum.

f) Verdadeira, pois os ângulos têm o lado $\overrightarrow{OD}$ em comum e as regiões convexas determinadas por esses ângulos não têm pontos internos em comum.

16. a) Verdadeira, pois 47° + 43° = 90°.

b) Falsa, pois o complemento de 23° mede 67° (90° − 23° = 67°) e o suplemento de 67° mede 113° (180° − 67° = 113°). Correção possível: O suplemento do complemento do ângulo de medida 23° mede 113°.

c) Verdadeira, pois o complemento de 53° mede 37° (90° − 53° = 37°) e o complemento de 37° mede 53° (90° − 37° = = 53°).

d) Falsa, pois o suplemento de 75° mede 105° (180° − 75° = 105°) e o suplemento de 105° mede 75° (180° − 105° = 75°). Correção possível: O suplementar do suplementar de um ângulo de medida 75° mede 75°.

17. a) $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$; $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$.

b) $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são suplementares. Como $A\hat{O}B$ mede 135°, então $B\hat{O}C$ mede 45°, pois 180° − 135° = 45°.

Como $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ são opostos pelo vértice, então são congruentes. Logo, $A\hat{O}D$ mede 45°.

Como $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice, então são congruentes.

Portanto, $C\hat{O}D$ mede 135°.

18. a) $90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$

Logo, o complemento de 32° mede 58°.

b) $180^\circ - 32^\circ = 148^\circ$

Logo, o suplemento de 32° mede 148°.

c) $2 \cdot 148^\circ = 296^\circ$

Logo, o dobro do suplemento de 32° mede 296°.

d) $\frac{1}{4} \cdot 32^\circ = 8^\circ$

$90^\circ - 8^\circ = 82^\circ$

Logo, o complemento da quarta parte de 32° mede 82°.

PÁGINA 110 – DESCUBRA MAIS

PARA CONCLUIR

1. $\hat{a}$ e $\hat{b}$; $\hat{a}$ e $\hat{c}$; $\hat{a}$ e $\hat{d}$; $\hat{a}$ e $\hat{e}$; $\hat{a}$ e $\hat{f}$; $\hat{a}$ e $\hat{g}$; $\hat{a}$ e $\hat{h}$; $\hat{b}$ e $\hat{c}$; $\hat{b}$ e $\hat{d}$; $\hat{b}$ e $\hat{e}$; $\hat{b}$ e $\hat{f}$; $\hat{b}$ e $\hat{g}$; $\hat{b}$ e $\hat{h}$; $\hat{c}$ e $\hat{d}$; $\hat{c}$ e $\hat{e}$; $\hat{c}$ e $\hat{f}$; $\hat{c}$ e $\hat{g}$; $\hat{c}$ e $\hat{h}$; $\hat{d}$ e $\hat{e}$; $\hat{d}$ e $\hat{f}$; $\hat{d}$ e $\hat{g}$; $\hat{d}$ e $\hat{h}$; $\hat{e}$ e $\hat{f}$; $\hat{e}$ e $\hat{g}$; $\hat{e}$ e $\hat{h}$; $\hat{f}$ e $\hat{g}$; $\hat{f}$ e $\hat{h}$; $\hat{g}$ e $\hat{h}$.

2. 28 pares.

3. a) Resposta possível: $\hat{a}$ e $\hat{d}$; $\hat{e}$ e $\hat{f}$.

b) Resposta possível: $\hat{c}$ e $\hat{g}$; $\hat{a}$ e $\hat{e}$.

c) $\hat{c}$ e $\hat{e}$; $\hat{d}$ e $\hat{f}$

d) $\hat{a}$ e $\hat{g}$; $\hat{b}$ e $\hat{h}$

e) $\hat{c}$ e $\hat{f}$; $\hat{d}$ e $\hat{e}$

f) $\hat{a}$ e $\hat{h}$; $\hat{b}$ e $\hat{g}$

4. Resposta pessoal. Os ângulos alternos internos são congruentes.

5. Resposta pessoal. Os ângulos alternos externos são congruentes.

6. Não, pois os ângulos colaterais internos são suplementares e os ângulos colaterais externos também são suplementares.

PÁGINA 113 – ATIVIDADES

19. a) $\hat{a}$ e $\hat{p}$; $\hat{d}$ e $\hat{s}$; $\hat{b}$ e $\hat{q}$; $\hat{c}$ e $\hat{r}$.

b) $\hat{d}$ e $\hat{q}$; $\hat{c}$ e $\hat{p}$.

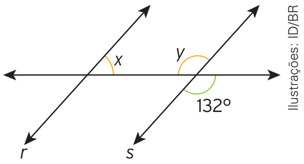
c) $\hat{a}$ e $\hat{r}$; $\hat{b}$ e $\hat{s}$.

d) $\hat{c}$ e $\hat{q}$; $\hat{d}$ e $\hat{p}$.

e) $\hat{a}$ e $\hat{s}$; $\hat{b}$ e $\hat{r}$.

20. **a)** Os ângulos são correspondentes e, por isso, são congruentes. Então, $x = 112°$.

b) Seja $\hat{y}$ o ângulo indicado na figura abaixo.



Os ângulos de medida y e 132° são opostos pelo vértice e, por isso, são congruentes. Então, $y = 132°$.

Os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são colaterais internos e, por isso, são suplementares. Então, $x = 180° - 132° = 48°$.

c) Os ângulos são alternos internos e, por isso, são congruentes. Então, $x = 40°$.

d) Os ângulos são alternos externos e, por isso, são congruentes. Então, $x = 35°$.

e) Os ângulos são alternos externos e, por isso, são congruentes. Então, $x = 35°$.

21. Os ângulos de medida c e 120° são opostos pelo vértice e, por isso, são congruentes. Então, $c = 120°$.

Os ângulos $\hat{c}$ e $\hat{d}$ são suplementares. Então, $d = 180° - 120° = 60°$.

Os ângulos $\hat{d}$ e $\hat{e}$ são alternos internos e, por isso, são congruentes. Então, $e = 60°$.

Os ângulos $\hat{d}$ e $\hat{f}$ são correspondentes e, por isso, são congruentes. Então, $f = 60°$.

22. Respostas possíveis.

a) O erro está em afirmar que os ângulos destacados são correspondentes, pois, como estão em lados opostos em relação à reta transversal, eles não são correspondentes.

Correção da frase: Os ângulos destacados são congruentes, pois são alternos externos.

b) O erro está em afirmar que os ângulos destacados são alternos internos, pois um deles não está entre as retas paralelas.

Correção da frase: Os ângulos destacados não são alternos internos, mas são suplementares.

c) O erro está em afirmar que os dois ângulos destacados são correspondentes, pois para que eles sejam correspondentes não basta que estejam do mesmo lado da reta transversal. Um deles deve ser interno em relação às retas paralelas, e o outro, externo.

Correção da frase: Os ângulos destacados são colaterais externos, pois estão do mesmo lado da reta transversal e não estão entre as retas paralelas.

d) O erro está em afirmar que os ângulos destacados são colaterais externos, pois apenas estarem do mesmo lado em relação à reta transversal não garante essa condição. Ângulos colaterais externos não devem estar entre as retas paralelas. Correção da frase: Os ângulos destacados são correspondentes, pois estão do mesmo lado em relação à reta transversal e um é interno e o outro é externo em relação às retas paralelas.

PÁGINA 114 – DIVERSIFICANDO

1. $3 \cdot (36°\ 16'\ 56'') = 108°\ 50'\ 48''$

$$\begin{array}{rrr} 36^\circ & \overset{2'}{16'} & 56'' \\ \times & & 3 \\ \hline & & \cancel{168''} \\ 108^\circ & 50' & 48'' \end{array}$$

Gustavo vai ter de realizar um giro no sentido anti-horário de 108° 50′ 48″.

2. A metade de 104° 35′ 14″ é o quociente da divisão desse ângulo por 2.

$$\begin{array}{rrr|l} 104^\circ & 35' & 14'' & 2 \\ \cline{4-4} 0^\circ & \cancel{1'} & 74'' & 52^\circ\,17'\,37'' \\ & 0' & 0'' & \end{array}$$

Um terço de 33° 33′ 33″ é o quociente da divisão desse ângulo por 3.

$$\begin{array}{rrr|l} 33^\circ & 33' & 33'' & 3 \\ \cline{4-4} 0^\circ & 0' & 0'' & 11^\circ\,11'\,11'' \end{array}$$

Fazendo a adição dos quocientes, tem-se:

$$\begin{array}{rrr} 52^\circ & 17' & 37'' \\ +\,11^\circ & 11' & 11'' \\ \hline 63^\circ & 28' & 48'' \end{array}$$

Portanto, o resultado é 63° 28′ 48″.

3. Sendo $1° = 3\,600''$ e $1' = 60''$, tem-se:

a) $2°\ 30'\ 20'' =$

$= 2 \cdot 3\,600'' + 30 \cdot 60'' + 20'' =$

$= 7\,200'' + 1800'' + 20'' = 9\,020''$

b) $3°\ 20'\ 16'' =$

$= 3 \cdot 3\,600'' + 20 \cdot 60'' + 16'' =$

$= 10\,800'' + 1200'' + 16'' = 12\,016''$

c) $4°\ 38'\ 25'' =$

$= 4 \cdot 3\,600'' + 38 \cdot 60'' + 25'' =$

$= 14\,400'' + 2\,280'' + 25'' = 16\,705''$

d) $5°\ 20'\ 44'' =$

$= 5 \cdot 3\,600'' + 20 \cdot 60'' + 44'' =$

$= 18\,000'' + 1\,200'' + 44'' = 19\,244''$

e) $6°\ 30'\ 50'' =$

$= 6 \cdot 3\,600'' + 30 \cdot 60'' + 50'' =$

$= 21\,600'' + 1\,800'' + 50'' = 23\,450''$

Logo: a-III, b-I, c-IV, d-V, e-II.

4. Escrevendo 1° como 60′, tem-se:

$$1° : 3 = 60' : 3 = 20'$$

Escrevendo 1° como 3 600″, tem-se:

$$1° : 3 = 3\,600'' : 3 = 1200'' = 20'$$

Logo, $1° : 3 = 20'$ e o resultado é o mesmo se for calculado em minuto ou em segundo.

5. **a)** Bandeira do Mato Grosso: 66° cada ângulo; soma: $66° + 66° = 132°$.

b) Bandeira do Rio de Janeiro: 90° cada ângulo; soma: $90° + 90° = 180°$.

c) Bandeira da Bahia: 60° (ângulo indicado no triângulo) e 90° (ângulo indicado no retângulo); soma: $60° + 90° = 150°$.

d) Bandeira de Santa Catarina: 34° (ângulo indicado na região branca) e 68° (ângulo do losango); soma: $34° + 68° = 102°$.

6. **a)** $90° - 36° = 54°$

Se dois ângulos são complementares e um deles mede 36°, então o outro mede 54°.

b) $57° + 123° = 180°$

Dois ângulos com medidas 57° e 123° podem ser chamados de ângulos suplementares.

c) $180° - 86° = 94°$

O suplemento de um ângulo de 86° mede 94°.

d) $90° - 33° = 57°$

33° é a medida do complemento de um ângulo de 57°.

e) $90° - 56° = 34°$ e $90° - 34° = 56°$

O complemento do complemento de um ângulo de 56° é 56°.

7. Resoluções possíveis:

a) Como $\hat{d}$ é oposto pelo vértice ao ângulo que mede 40°, então $d = 40°$.

Como $\hat{c}$ é suplementar ao ângulo de 40°, então $c = 180° - 40° = 140°$.

Como $\hat{e}$ é oposto pelo vértice ao ângulo $\hat{c}$, então $e = 140°$.

b) Como $\hat{x}$ é oposto pelo vértice ao ângulo que mede 130°, então $x = 130°$.

Como $\hat{y}$ e $\hat{z}$ são suplementares ao ângulo de 140°, então $y = z = 40°$.

c) Como $\hat{d} + 85° + 13° = 180°$, então $d = 180° - 98° = 82°$.

Como $\hat{a}$ é oposto pelo vértice ao ângulo que mede 85°, então $a = 85°$.

Como $\hat{c}$ é oposto pelo vértice ao ângulo que mede 13°, então $c = 13°$.

Como $\hat{b}$ é oposto pelo vértice ao ângulo $\hat{d}$, então $b = 82°$.

8. Como $\hat{y}$ é oposto pelo vértice ao ângulo que mede 60°, então $y = 60°$.

Como $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são ângulos colaterais internos, então eles são suplementares:

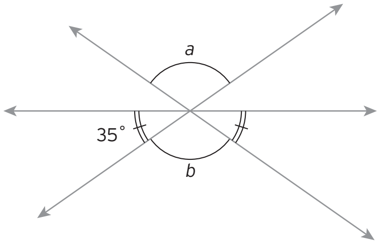
$$\begin{aligned} x + y &= 180° \\ x + 60° &= 180° \\ x &= 120° \end{aligned}$$

9. O ângulo $\hat{A}$ é suplementar a 127°. Assim:

$$\begin{aligned} A &= 180° - 127° \\ A &= 53° \end{aligned}$$

Como o trapézio é um quadrilátero com um par de lados paralelos, então $\hat{B}$ e o ângulo que mede 127° são alternos internos e, por isso, são congruentes. Logo, $B = 127°$.

10. Resposta possível: Seja $\hat{b}$ o ângulo indicado na figura a seguir.



Como a soma da medida do ângulo $\hat{b}$ com as medidas dos dois ângulos adjacentes equivale a 180°, tem-se:

$$35° + b + 35° = 180°$$
$$b + 70° = 180°$$
$$b = 110°$$

Como os ângulos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são opostos pelo vértice, então $a = b = 110°$.

11. a) **I.** Falsa, pois os ângulos $X\hat{A}Y$ e $W\hat{A}K$ não têm lado em comum.

II. Verdadeira, pois os ângulos têm o lado $\overrightarrow{AZ}$ em comum e as regiões convexas determinadas por esses ângulos não têm pontos internos em comum.

III. Verdadeira, pois os ângulos têm o lado $\overrightarrow{AZ}$ em comum e as regiões convexas determinadas por esses ângulos não têm pontos internos em comum.

b) Sim. Os ângulos $Y\hat{A}Z$ e $Z\hat{A}W$ são congruentes, pois ambos medem 20°.

12. a) $\hat{a}$ e $\hat{d}$; $\hat{b}$ e $\hat{e}$; $\hat{c}$ e $\hat{f}$.

b) $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$; $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$; $\hat{c}$, $\hat{d}$ e $\hat{e}$; $\hat{d}$, $\hat{e}$ e $\hat{f}$; $\hat{e}$, $\hat{f}$ e $\hat{a}$; $\hat{f}$, $\hat{a}$ e $\hat{b}$.

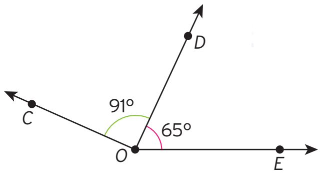
c) Não.

d) $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$ e $\hat{f}$.

e) Não.

13. Como a medida de $C\hat{O}D$ excede a medida de $D\hat{O}E$ em 26°, tem-se:

$$\text{med}(C\hat{O}D) = \text{med}(D\hat{O}E) + 26°$$
$$\text{med}(C\hat{O}D) = 65° + 26°$$
$$\text{med}(C\hat{O}D) = 91°$$



ID/BR

Portanto, $\text{med}(C\hat{O}E) = 91° + 65° = 156°$.

CAPÍTULO 2 – POLÍGONOS

PÁGINA 124 – DESCUBRA MAIS

PARA CONCLUIR

1. Observando que os três ângulos que estão ao redor desse ponto formam uma volta inteira, pode-se afirmar que a soma das medidas desses ângulos é 360°.

2. a) É possível fazer o ladrilhamento com os modelos de triângulo equilátero, de quadrado e de hexágono regular.

b) Nesse caso, o ponto pode ser marcado no encontro de 6 triângulos equiláteros, 4 quadrados ou 3 hexágonos regulares.

Como cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°, então a soma das medidas dos ângulos ao redor do ponto marcado equivale a $6 \cdot 60° = 360°$.

Como cada ângulo interno do quadrado mede 90°, então a soma das medidas dos ângulos ao redor do ponto marcado equivale a $4 \cdot 90° = 360°$.

Como cada ângulo interno do hexágono regular mede 120°, então a soma das medidas dos ângulos ao redor do ponto marcado equivale a $3 \cdot 120° = 360°$.

3. a) É possível fazer o ladrilhamento com os modelos de triângulo equilátero e de quadrado, ou de triângulo equilátero e de hexágono regular, ou de quadrado e de octógono regular.

b) Nesse caso, o ponto pode ser marcado no encontro de 3 triângulos equiláteros e 2 quadrados, ou de 4 triângulos equiláteros e 1 hexágono regular, ou de 2 triângulos equiláteros e 2 hexágonos regulares, ou de 1 quadrado e 2 octógonos regulares.

Como cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60° e cada ângulo interno do quadrado mede 90°, então a soma das medidas dos ângulos ao redor do ponto marcado equivale a $3 \cdot 60° + 2 \cdot 90° = 360°$.

Como cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60° e cada ângulo interno do hexágono regular mede 120°, então a soma das medidas dos ângulos ao redor do ponto marcado equivale a $4 \cdot 60° + 120° = 360°$ ou, ainda, usando os modelos de 2 triângulos equiláteros e 2 hexágonos regulares, essa soma equivale a $2 \cdot 60° + 2 \cdot 120° = 360°$.

Como cada ângulo interno do quadrado mede 90° e cada ângulo interno do octógono regular mede 135°, então a soma das medidas dos ângulos ao redor do ponto marcado equivale a $90° + 2 \cdot 135° = 360°$.

4. a) É possível fazer o ladrilhamento com os modelos de triângulo equilátero, de quadrado e de hexágono regular.

b) Nesse caso, o ponto pode ser marcado no encontro de 1 triângulo equilátero, 2 quadrados e 1 hexágono regular.

Como cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°, cada ângulo interno do quadrado mede 90° e cada ângulo interno do hexágono regular mede 120°, então a soma das medidas dos ângulos ao redor do ponto marcado equivale a:

$$60° + 2 \cdot 90° + 120° = 360$$

5. Resposta pessoal. Com triângulo equilátero, com quadrado, com hexágono regular e com octógono regular.

6. a) Resposta possível:

Polígono regular	Número de lados	Medida do ângulo interno	Medida do ângulo externo
Triângulo	3	60°	120°
Quadrado	4	90°	90°
Hexágono	6	120°	60°
Octógono	8	135°	45°

b) Resposta pessoal. Em todos os casos a soma das medidas dos ângulos em volta de um ponto marcado em algum vértice do encontro dos modelos de polígonos é igual a 360°.

c) Para fazer um ladrilhamento com polígonos regulares, é necessário que a soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos que se tocam em volta de um ponto seja 360° e que os lados de todos os polígonos sejam congruentes.

7. Resposta pessoal.

PÁGINA 126 – ATIVIDADES

1. a) Hexágono.

b) 6 vértices; *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*.

c) 6 lados; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$.

d) 6 ângulos internos; 6 ângulos externos.

2. Para determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um octógono convexo, pode-se calcular a quantidade de triângulos em que esse polígono pode ser decomposto $(8 - 2 = 6)$ e multiplicar o resultado por 180° $(6 \cdot 180° = 1\,080°)$. Assim, a soma das medidas dos ângulos internos de um octógono convexo é 1 080°.

3. a) Resposta pessoal.

b) Para determinar a quantidade de diagonais que há em um polígono de 12 lados, primeiro, deve-se determinar o número de diagonais traçadas a partir de um vértice subtraindo 3 do total de lados do polígono $(12 - 3 = 9)$. Depois, deve-se multiplicar o resultado pelo número de lados do polígono $(9 \cdot 12 = 108)$. Por fim, deve-se dividir o resultado por 2 $(108 : 2 = 54)$.

Portanto, um polígono de 12 lados tem 54 diagonais.

c) Resposta pessoal.

4. Como a soma da medida do ângulo interno com a medida do ângulo externo é igual a 180°, então $a_e = 180° - 108° = 72°$.

5. a) Como o eneágono pode ser dividido em 7 triângulos, então a soma das medidas dos ângulos internos é $7 \cdot 180° = 1\,260°$. Logo, a medida de cada ângulo interno desse polígono é $1\,260° : 9 = 140°$.

   b) Como a soma da medida do ângulo interno com a medida do ângulo externo é igual a 180°, então:

$$a_e = 180° - 140° = 40°$$

6. Como a soma das medidas de todos os ângulos externos de um polígono é igual a 360°, então, ao dividir essa soma pela medida de cada ângulo externo, obtém-se a quantidade de ângulos externos desse polígono, que é equivalente à quantidade de lados dele:

$$360° : 36° = 10$$

Portanto, o polígono regular cujo ângulo externo mede 36° é o decágono.

PÁGINA 129 – ATIVIDADES

7. A. Isósceles, pois dois de seus lados são congruentes.

   B. Isósceles, pois dois de seus lados são congruentes.

   C. Escaleno, pois os três lados têm medidas diferentes.

8. A. Acutângulo, pois os três ângulos são agudos.

   B. Obtusângulo, pois um de seus ângulos é obtuso.

   C. Retângulo, pois um dos ângulos é reto.

9. a) Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo equivale a 180° e um dos ângulos mede 46°, então a soma das medidas dos dois ângulos desconhecidos é $180° - 46° = 134°$.

   Logo, cada ângulo congruente mede $134° : 2 = 67°$.

   b) Quanto aos ângulos: acutângulo, pois os três ângulos internos são agudos; quanto aos lados: isósceles, pois, como dois de seus ângulos são congruentes, então os lados opostos a esses ângulos também são congruentes.

10. Pela condição de existência de um triângulo, a medida do terceiro lado deve ser maior que 2 cm (6 cm − 4 cm) e menor que 10 cm (6 cm + 4 cm). Então, o terceiro lado pode medir 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm ou 9 cm.

    Logo, a maior medida inteira que o outro lado pode ter é 9 cm.

11. Pela condição de existência de um triângulo, a medida do terceiro lado deve ser maior que 2 cm (8 cm − 6 cm) e menor que 14 cm (8 cm + 6 cm). Então, o terceiro lado pode medir 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm, 10 cm, 11 cm, 12 cm ou 13 cm.

12. a) Como o triângulo é isósceles, as medidas possíveis que se deve verificar se satisfazem a condição de existência são 3 cm e 5 cm.

$$3 > 5 - 3 \text{ (verdadeiro)}$$
$$5 > 5 - 3 \text{ (verdadeiro)}$$
$$3 < 3 + 5 \text{ (verdadeiro)}$$
$$5 < 3 + 5 \text{ (verdadeiro)}$$

   Portanto, a medida de comprimento do terceiro lado do triângulo pode ser 3 cm ou 5 cm.

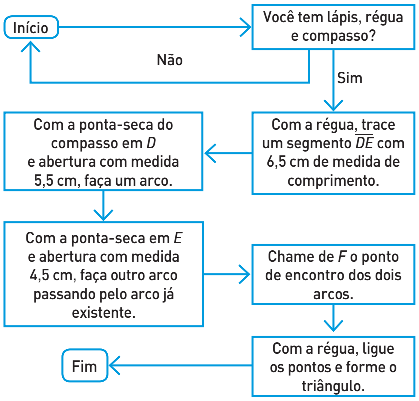
   b) Como o triângulo é isósceles, as medidas possíveis que se deve verificar se satisfazem a condição de existência são 2 cm e 5 cm.

$$2 > 5 - 2 \text{ (falso)}$$
$$5 > 5 - 2 \text{ (verdadeiro)}$$
$$2 < 2 + 5 \text{ (verdadeiro)}$$
$$5 < 2 + 5 \text{ (verdadeiro)}$$

   Portanto, a medida de comprimento do terceiro lado do triângulo é 5 cm.

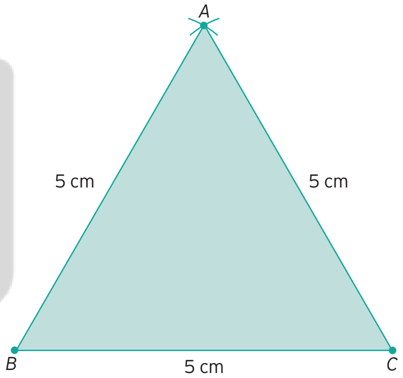
PÁGINA 134 – ATIVIDADES

13. Resposta possível: Com a régua, trace um segmento $\overline{DE}$ com 6,5 cm de medida de comprimento. Com a ponta-seca do compasso em *D* e abertura com medida de 5,5 cm, faça um arco. Com a ponta-seca do compasso em *E* e abertura com medida de 4,5 cm, faça outro arco passando pelo arco já existente. O ponto de encontro dos dois arcos é o ponto *F*. Com a régua, ligue os pontos e forme o triângulo *DEF*.



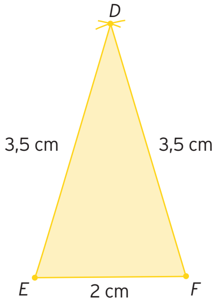
14. Respostas possíveis:

    a) Com a régua, trace um segmento $\overline{BC}$ medindo 5 cm. Com a ponta-seca do compasso em *B* e abertura com medida de 5 cm, faça um arco. Com a ponta-seca do compasso em *C* e com a mesma abertura, faça outro arco passando pelo arco já existente. O ponto de encontro dos dois arcos é o ponto *A*. Com a régua, ligue os pontos e forme o triângulo *ABC*.

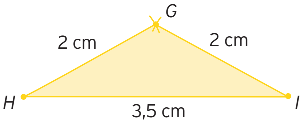


Ilustrações: ID/BR

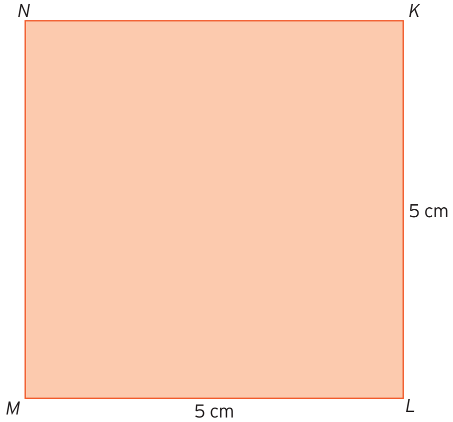
    b) Primeiro triângulo: com a régua, trace um segmento $\overline{EF}$ com medida de comprimento de 2 cm. Com a ponta-seca do compasso em *E* e abertura medindo 3,5 cm, faça um arco. Com a ponta-seca do compasso em *F* e com a mesma abertura, faça outro arco passando pelo arco já existente. O ponto de encontro dos dois arcos é o ponto *D*. Com a régua, ligue os pontos e forme o triângulo *DEF*.



    Segundo triângulo: com a régua, trace um segmento $\overline{HI}$ com medida de comprimento de 3,5 cm. Com a ponta-seca do compasso em *H* e abertura medindo 2 cm, faça um arco. Com a ponta-seca do compasso em *I* e com a mesma abertura, faça outro arco passando pelo arco já existente. O ponto de encontro dos dois arcos é o ponto *G*. Com a régua, ligue os pontos e forme o triângulo *GHI*.

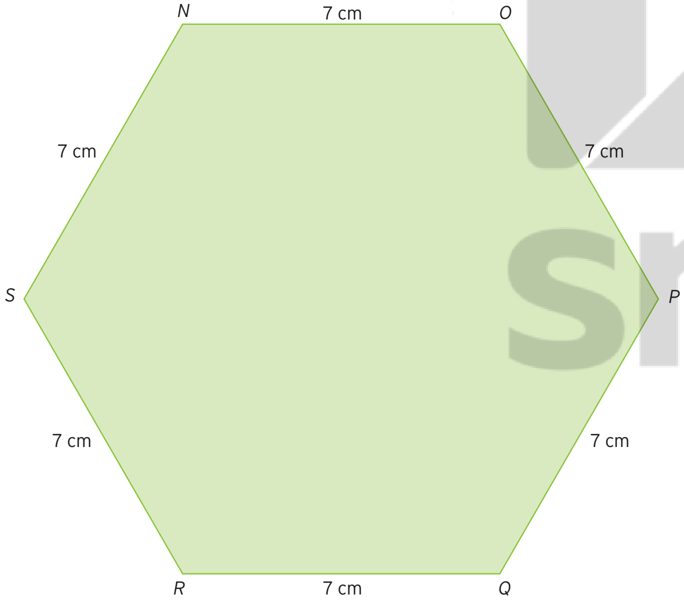


c) Com a régua, trace um segmento $\overline{ML}$ com 5 cm. Com o transferidor, marque 90° em M. A partir de M, trace com a régua o segmento $\overline{MN}$ com 5 cm. Com o transferidor, marque 90° em N. A partir de N, trace com a régua o segmento $\overline{NK}$ com 5 cm. Com a régua, ligue os pontos K e L e forme o quadrado $LMNK$.

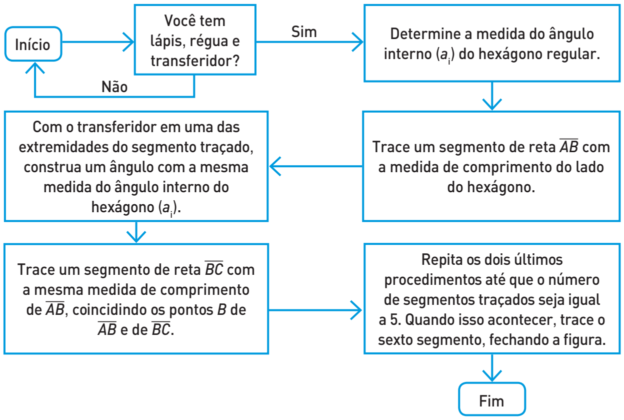


Ilustrações: ID/BR

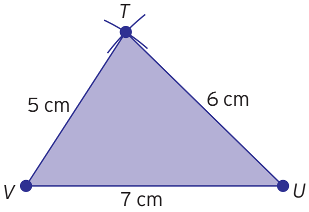
d) Com a régua, trace um segmento $\overline{RQ}$ com 7 cm. Com o transferidor, marque 120° em Q. A partir de Q, trace com a régua o segmento $\overline{QP}$ com 7 cm. Com o transferidor, marque 120° em P. A partir de P, trace com a régua o segmento $\overline{PO}$ com 7 cm. Com o transferidor, marque 120° em O. A partir de O, trace com a régua o segmento $\overline{ON}$ com 7 cm. Com o transferidor, marque 120° em N. A partir de N, trace com a régua o segmento $\overline{NS}$ com 7 cm. Com a régua, ligue os pontos S e R e forme o hexágono $NOPQRS$.



15. Resposta possível:

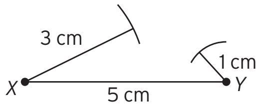


16. a) Resposta possível: Com a régua, trace um segmento $\overline{VU}$ com medida de comprimento de 7 cm. Com a ponta-seca do compasso em V e a abertura de 5 cm, trace um arco. Com a ponta-seca do compasso em U e a abertura de 6 cm, trace outro arco. A intersecção dos dois arcos vai ser o vértice T do triângulo. Ligue-o aos pontos U e V.



Portanto, é possível construir esse triângulo.

b) Resposta possível: Com a régua, trace um segmento $\overline{XY}$ com medida de comprimento de 5 cm. Com a ponta-seca do compasso em X e a abertura de 3 cm, trace um arco. Com a ponta-seca do compasso em Y e a abertura de 1 cm, trace outro arco. Como não há intersecção entre os arcos, não é possível construir o triângulo.



17. Resposta possível: Usando o transferidor, construa um ângulo de 135° no vértice D e trace com a régua um segmento $\overline{DE}$ com 5,5 cm de medida de comprimento. Construa um ângulo de 135° no vértice E e trace com a régua um segmento $\overline{EF}$ com 5,5 cm de medida de comprimento. Construa um ângulo de 135° no vértice F e trace um segmento $\overline{FG}$ com 5,5 cm de medida de comprimento. Construa um ângulo de 135° no vértice G e trace um segmento $\overline{GH}$ com 5,5 cm de medida de comprimento. Com a régua, ligue os pontos H e A e forme o octógono $ABCDEFGH$.

PÁGINA 135 – DIVERSIFICANDO

1. a) Falsa. Correção possível: Essa figura tem 5 lados, 5 vértices e 5 ângulos internos.

b) Verdadeira.

c) Falsa. Correção possível: Como para quaisquer dois pontos pertencentes ao interior desse polígono, o segmento com extremidades nesses pontos está totalmente contido nesse polígono, dizemos que o polígono é convexo.

d) Falsa. Correção possível: Considerando o número de lados dessa figura, podemos nomeá-la como pentágono.

2. a) Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diagonais desse polígono.

b) Primeiro, deve-se determinar o número de diagonais traçadas a partir de um vértice, subtraindo 3 do total de lados do polígono $(6 - 3 = 3)$. Depois, multiplica-se 3 pelo número de lados do polígono, que corresponde ao número de vértices desse polígono $(6 \cdot 3 = 18)$. Por fim, divide-se o resultado por 2 $(18 : 2 = 9)$.

Logo, esse polígono tem 9 diagonais.

3. Como a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo é 360°, então o terceiro ângulo externo desse triângulo mede 125°, pois $360° - 100° - 135° = 125°$.

Como os ângulos internos e os ângulos externos com vértice comum são suplementares, então:

$$180° - 125° = 55°$$
$$180° - 100° = 80°$$
$$180° - 135° = 45°$$

Portanto, os ângulos internos desse triângulo medem 55°, 45° e 80°.

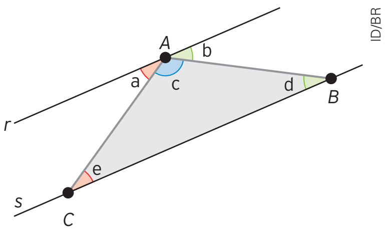
4. Como $\hat{y}$ é oposto pelo vértice ao ângulo que mede 35°, então $y = 35°$.

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, pode-se calcular o terceiro ângulo interno:

$$180° - 45° - 35° = 100°$$

Como os ângulos internos e os ângulos externos com vértice comum são suplementares e $\hat{x}$ é um ângulo externo com vértice comum ao ângulo de medida 100°, então $x = 180° - 100° = 80°$.

5. Resposta possível:



- Os ângulos de medidas *a* e *e* são congruentes, porque são alternos internos.
- Os ângulos de medidas *b* e *d* são congruentes, porque são alternos internos.
- $a + b + c = 180°$ (I), pois formam um ângulo raso.
- A soma dos ângulos internos (S_i) do triângulo *ABC* é dada por:

$$S_i = c + d + e$$

Como $a = e$ e $b = d$, então:

$$S_i = c + b + a \text{ (II)}$$

Comparando (I) e (II), tem-se:

$$S_i = c + b + a = a + b + c = 180°$$

6. Não, pois, ao adicionar as medidas desses ângulos, obtém-se 370°, e a soma das medidas de todos os ângulos internos de um quadrilátero é sempre igual a 360°.

7. Para saber o ângulo interno de um polígono regular, pode-se calcular a medida do ângulo externo (dividindo 360° pelo número de lados do polígono) e subtrair o resultado de 180°, uma vez que os ângulos internos e os ângulos externos com vértice comum são suplementares.

Os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são os ângulos internos de um dodecágono regular e de um octógono regular, respectivamente.

Assim, para calcular *x*, pode-se fazer:

$$x = 180° - (360° : 12)$$
$$x = 180° - 30°$$
$$x = 150°$$

Para calcular *y*, pode-se fazer:

$$y = 180 - (360° : 8)$$
$$y = 180° - 45°$$
$$y = 135°$$

O ângulo $\hat{z}$ é complemento da medida do ângulo interno do triângulo equilátero. Então:

$$z = 90° - 60°$$
$$z = 30°$$

Como o ângulo interno do hexágono mede 120°, então:

$$w + 90° = 120°$$
$$w = 30°$$

Como o ângulo interno do octógono mede 135°, então:

$$t + 120° = 135°$$
$$t = 15°$$

Como o ângulo interno do dodecágono mede 150°, então:

$$u + 135° = 150°$$
$$u = 15°$$

8. **a)** A figura formada pela linha verde lembra um polígono de 9 lados, o eneágono.

b) As linhas vermelhas correspondem às diagonais do polígono. Para determinar quantas diagonais tem um polígono de 9 lados, primeiro deve-se determinar o número de diagonais traçadas a partir de um vértice, subtraindo 3 do total de lados do polígono $(9 - 3 = 6)$.

Depois, multiplicar 6 pelo número de lados do polígono, que corresponde ao número de vértices desse polígono $(6 \cdot 9 = 54)$. Por fim, deve-se dividir o resultado por 2 $(54 : 2 = 27)$.

Portanto, Cleiton ligou um prego a outro, usando a linha vermelha, 27 vezes.

9. Sendo *x* a medida do terceiro lado, é necessário que *x* satisfaça a condição de existência de um triângulo:

$$x < 10 + 28 \quad \text{e} \quad x > 28 - 10$$
$$x < 38 \qquad\qquad x > 18$$

Como *x* é múltiplo de 7 e deve estar entre 18 cm e 38 cm, então as possíveis medidas de comprimento do terceiro lado são 21 cm, 28 cm ou 35 cm.

PÁGINA 136 – RESOLVENDO PROBLEMAS

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

1. Marta percorre 150 metros em um minuto; Carlos percorre 100 metros em um minuto.
2. Ambos moram a 1 200 metros do local da festa.
3. Marta é mais rápida que Carlos, pois a cada 150 metros percorridos por ela, ele percorre 100 m. Portanto, Carlos deve sair primeiro para que os dois cheguem juntos à festa.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

1.

Tempo (em minuto)	Distância percorrida por Carlos (em metro)	Distância percorrida por Marta (em metro)
0	0	0
1	100	150
2	200	300
3	300	450
4	400	600
5	500	750
6	600	900
7	700	1 050
8	800	1 200
9	900	1 350
10	1 000	1 500
11	1 100	1 650
12	1 200	1 800

a) Sequência dos múltiplos de 100.

b) Sequência dos múltiplos de 150.

c) Carlos percorreu 1 200 metros em 12 minutos; Marta percorreu 1 200 metros em 8 minutos.

d) Um número em comum nas duas sequências representa um múltiplo comum de 100 e 150.

e) Sabe-se que Carlos leva 12 minutos para percorrer 1 200 metros e chegar à festa. Como ele saiu 6 minutos depois de Marta, Carlos chegou à festa 18 minutos (12 minutos + 6 minutos) depois que Marta saiu de casa. Como ela levou 8 minutos até chegar à festa, vai esperar por 10 minutos (18 minutos − 8 minutos) até Carlos chegar.

- **f)** Considerando que Carlos leva 12 minutos e Marta leva 8 minutos para percorrer 1 200 m e chegar à festa, ele deve sair 4 minutos (12 minutos − 8 minutos) antes de Marta para que consigam chegar juntos à festa.

REFLEXÃO SOBRE O PROBLEMA

1. Respostas pessoais.
2. Respostas pessoais.
3. Resposta pessoal.
4. Resposta pessoal.
5. Respostas pessoais.
6. Respostas pessoais.

MAIS PROBLEMAS

1. Os seis primeiros múltiplos positivos de 4 são: 4, 8, 12, 16, 20 e 24. Logo, o total de selos é: 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 = 84.

   Portanto, na coleção de selos de Karina há 84 selos.

2. Pode-se organizar os dados em um quadro, com os primeiros múltiplos positivos de 12 e de 15.

Múltiplos de 12 (carro azul)	Múltiplos de 15 (carro vermelho)
12	15
24	30
36	45
48	60
60	75
72	90

   - **a)** Como 60 é o primeiro múltiplo de 12 que também é múltiplo de 15, então os pisca-alertas dos dois carros vão piscar juntos a cada 60 segundos.
   - **b)** Observando o quadro, pode-se concluir que o carro vermelho pisca três vezes (aos 15, 30 e 45 segundos) e o carro azul pisca quatro vezes (aos 12, 24, 36 e 48 segundos) antes de piscarem juntos novamente (aos 60 segundos).

3. Sendo 1 hora igual a 60 minutos e considerando o tempo em minuto, pode-se montar um quadro com as distâncias percorridas por Matheus e Lúcia ao longo do tempo.

Tempo (min)	Ponto em que Matheus está (km)	Ponto em que Lúcia está (km)
60	60	80
66	66	76
72	72	72

   Matheus leva 60 minutos para percorrer 60 km, enquanto Lúcia percorre 40 km nesse mesmo tempo. Assim, quando Matheus estiver no ponto 60 (0 + 60), Lúcia vai estar no ponto 80 (120 − 40).

   Observando o quadro, nota-se que a cada 6 minutos, Matheus percorre 6 km e Lúcia percorre 4 km. Assim, passados mais 6 minutos, Matheus vai andar mais 6 km e estará no ponto 66 (60 + 6), enquanto Lúcia vai andar mais 4 km e estará no ponto 76 (80 − 4). Desse modo, 6 minutos depois, Matheus e Lúcia vão se encontrar no ponto 72 (66 + 6 = 76 − 4).

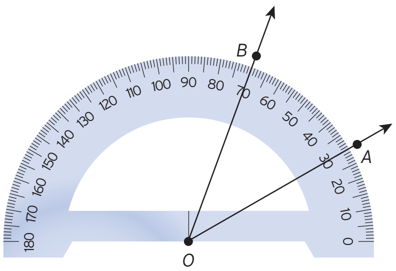
   Portanto, eles se encontrarão no ponto 72, ou seja, a 72 quilômetros de Astromélias.

PÁGINA 138 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Resolução possível: Primeiro, pode-se identificar qual dos ângulos é raso e associá-lo a 180° (A). Em seguida, identificar o de menor abertura e associá-lo a 15° (D). Assim, restam dois ângulos a serem comparados: o de maior abertura entre eles corresponde a 135° (C), e o de menor abertura, a 60° (B).

   Logo, A-III; B-IV; C-II; D-I.

2. Sim, pois é possível fazer uma subtração entre os dois valores do transferidor que coincidem com lados do ângulo. Por exemplo, pode-se posicionar um dos lados do ângulo na indicação de 30°.



ID/BR

   Depois, deve-se verificar a medida indicada no outro lado do ângulo. A medida do ângulo $A\hat{O}B$ é igual à diferença entre as medidas indicadas, neste caso:

$$\text{med}(A\hat{O}B) = 70° - 30° = 40°$$

3.
   - **a)** 54 : 3 = 18

     Portanto, a terça parte de 54° é 18°.
   - **b)** 48 : 2 = 24

     50 : 2 = 25

     26 : 2 = 13

     Portanto, a metade de 48° 50′ 26″ é 24° 25′ 13″.
   - **c)** 70 : 5 = 14

     55 : 5 = 11

     35 : 5 = 7

     Portanto, a quinta parte de 70° 55′ 35″ é 14° 11′ 7″.
   - **d)** 90 : 10 = 9

     20 : 10 = 2

     40 : 10 = 4

     Portanto, um décimo de 90° 20′ 40″ é 9° 2′ 4″.

4. Serão necessários 6 giros de 15° para completar um giro de 90°, pois 90° : 15° = 6. Como esse objeto leva 30 minutos para se deslocar 15°, então em 6 giros ele vai levar 6 · 30 minutos = 180 minutos, ou seja, 3 horas (180 : 60 = 3).

   Portanto, esse objeto vai levar 3 horas para se deslocar 90°.

5. A maneira pela qual Carolina efetuou a subtração não está correta, pois as transformações não foram feitas corretamente. A maneira correta é:

$$\begin{array}{rrr} \overset{42^\circ}{\cancel{43^\circ}} & \overset{60'}{\overset{32'}{\cancel{33'}}} & \overset{60''}{12''} \\ -29^\circ & 57' & 13'' \\ \hline 13^\circ & 35' & 59'' \end{array}$$

   Explicação possível: Como não é possível subtrair 12″ de 13″, é necessário trocar 1′ por 60″. Ao adicionar 60″ a 12″, obtém-se 72″. Assim, deve-se subtrair 13″ de 72″, obtendo 59″. Como 1′ foi trocado por 60″, então restou 32′. Como não é possível subtrair 57′ de 32′, é necessário trocar 1° por 60′. Ao adicionar 60′ a 32′, obtém-se 92′. Assim, deve-se subtrair 57′ de 92′, obtendo 35′. Como 1° foi trocado por 60′, então restou 42°. Assim, deve-se subtrair 29° de 42°, obtendo 13°.

6. A soma das medidas dos dois ângulos deve ser igual a 180°, e a diferença deve ser 40°. Pode-se registrar possíveis valores em um quadro:

Ângulo	Suplemento	Diferença
140°	40°	100°
130°	50°	80°
120°	60°	60°
110°	70°	40°

Portanto, os ângulos medem 70° e 110°.

7. **a)** $60^\circ\ 50'\ 15'' + 71^\circ\ 10'' = 131^\circ\ 50'\ 25''$

$$\begin{array}{rrrr} & 60^\circ & 50' & 15'' \\ + & 71^\circ & 0' & 10'' \\ \hline & 131^\circ & 50' & 25'' \end{array}$$

Portanto, $\text{med}(A\widehat{O}C) = 131^\circ\ 50'\ 25''$.

b) $40^\circ\ 30'\ 20'' + 49^\circ\ 50'\ 5'' = 90^\circ\ 20'\ 25''$

$$\begin{array}{rrr} \overset{1^\circ}{40^\circ} & 30' & 20'' \\ +49^\circ & 50' & 5'' \\ \hline & \cancel{80'} & \\ 90^\circ & 20' & 25'' \end{array}$$

Portanto, $\text{med}(A\widehat{O}E) = 90^\circ\ 20'\ 25''$.

c) $74^\circ\ 30'\ 5'' + 71^\circ\ 10'' = 145^\circ\ 30'\ 15''$

$$\begin{array}{rrrr} & 74^\circ & 30' & 5'' \\ + & 71^\circ & 0' & 10'' \\ \hline & 145^\circ & 30' & 15'' \end{array}$$

Portanto, $\text{med}(B\widehat{O}D) = 145^\circ\ 30'\ 15''$.

d) $74^\circ\ 30'\ 5'' + 63^\circ\ 19'\ 5'' = 137^\circ\ 49'\ 10''$

$$\begin{array}{rrrr} & 74^\circ & 30' & 5'' \\ + & 63^\circ & 19' & 5'' \\ \hline & 137^\circ & 49' & 10'' \end{array}$$

Portanto, $\text{med}(C\widehat{O}E) = 137^\circ\ 49'\ 10''$.

8. **a)** A: hexágono;

B: quadrilátero;

C: pentágono;

D: octógono.

b) A, C e D. É preciso usar régua e transferidor para verificar em quais polígonos as medidas dos lados e dos ângulos são iguais.

c) Como $540^\circ : 180^\circ = 3$, então o polígono cuja soma dos ângulos internos é 540° pode ser decomposto em três triângulos. Esse polígono é o pentágono, representado pela figura C.

9. Alternativa **b**.

A soma das medidas dos ângulos do triângulo que compõem o losango de Gustavo é:

$$(30^\circ + 60^\circ) \cdot 4 = 360^\circ$$

10. Alternativa **a**.

Como a soma das medidas dos ângulos internos do trapézio é igual a 360°, então subtraindo de 360° as medidas dos ângulos conhecidos, obtém-se o valor de x.

$$x = 360^\circ - (50^\circ + 15^\circ + 90^\circ + 90^\circ)$$
$$x = 360^\circ - 245^\circ$$
$$x = 115^\circ$$

11. Alternativa **a**.

Seguindo a dica de Gabriela e prolongando os quatro lados do quadrilátero, conclui-se que esse quadrilátero é um paralelogramo. Assim, pode-se afirmar que os ângulos α e 60° são suplementares, pois são colaterais internos. Então, $\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

12. Alternativa **e**.

Analisando cada item, tem-se:

a) Como o polígono não é regular, seus ângulos internos não são congruentes e, por isso, essa alternativa é incorreta.

b) O decágono tem 10 lados e, por isso, essa alternativa é incorreta.

c) Para saber a quantidade de diagonais de um decágono, deve-se determinar o número de diagonais que podem ser traçadas a partir de um vértice, subtraindo 3 do total de lados do polígono $(10 - 3 = 7)$. Depois, multiplica-se por 7 o número de lados do polígono, que corresponde ao número de vértices desse polígono $(7 \cdot 10 = 70)$. Por fim, divide-se o resultado por 2 $(70 : 2 = 35)$.

Logo, um polígono de 10 lados tem 35 diagonais e, por isso, essa alternativa é incorreta.

d) Pode-se decompor o decágono convexo em 8 triângulos. Logo, a soma de seus ângulos internos é igual a $180^\circ \cdot 8 = 1\,440^\circ$ e, por isso, essa alternativa é incorreta.

e) A soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 360° e, por isso, essa alternativa é correta.

13. Alternativa **e**.

Como o heptágono tem 7 ângulos externos, ao dividir 360° por 7, conclui-se que cada ângulo externo de um heptágono regular tem, aproximadamente, 51,43°. O valor que mais se aproxima de 51,43° entre as alternativas apresentadas é 51°.

14. Alternativa **d**.

Cada ângulo externo de um pentágono mede 72°, pois $360^\circ : 5 = 72^\circ$. Como cada ângulo interno de um polígono convexo é suplementar ao ângulo externo de mesmo vértice, o ângulo interno de um pentágono regular mede 108°, pois $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Como as medidas dos ângulos em torno do vértice de θ devem somar 360°, então:

$$\theta = 360^\circ - 3 \cdot 108^\circ$$
$$\theta = 360^\circ - 324^\circ$$
$$\theta = 36^\circ$$

UNIDADE 4 – INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA

CAPÍTULO 1 – EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

PÁGINA 144 – ATIVIDADES

1. Respostas possíveis:

a) x

b) $x - y$

c) $\frac{x - y}{2}$

d) $2x + 7$

e) $x + \frac{x}{3}$

f) $x + (x + 1)^2$

g) $(x \cdot y)^2$

2. **a)** Termos: x e y
   - x: coeficiente 1 e parte literal x.
   - y: coeficiente 1 e parte literal y.

b) Termos: $2k$, 3 e $\frac{1}{3}k$
   - $2k$: coeficiente 2 e parte literal k.
   - $\frac{1}{3}k$: coeficiente $\frac{1}{3}$ e parte literal k.

c) Termos: mn^2 e $7n$
   - mn^2: coeficiente 1 e parte literal mn^2.
   - $7n$: coeficiente 7 e parte literal n.

d) Termos: 10 e $-20t$
   - $-20t$: coeficiente -20 e parte literal t.

e) Termos: b^2 e $2ax$
   - b^2: coeficiente 1 e parte literal b^2.
   - $2ax$: coeficiente 2 e parte literal ax.

f) Termos: x, y e $\frac{1}{2}z^2$
   - x: coeficiente 1 e parte literal x.
   - y: coeficiente 1 e parte literal y.
   - $\frac{1}{2}z^2$: coeficiente $\frac{1}{2}$ e parte literal z^2.

g) Termos: $-4x$ e 7
   - $-4x$: coeficiente -4 e parte literal x.

h) Termos: a^2, $-2ab$ e b^2
   - a^2: coeficiente 1 e parte literal a^2.
   - $-2ab$: coeficiente -2 e parte literal ab.
   - b^2: coeficiente 1 e parte literal b^2.

3. Respostas possíveis:

a) Sendo a e b os números, a metade da soma desses dois números é $\frac{a + b}{2}$.

b) Considerando a o número, o antecessor de a é dado por $(a - 1)$. Então, a soma de a com o cubo de seu antecessor é dada por $a + (a - 1)^3$.

c) Considerando a o número, o dobro desse número é $2a$; considerando b o outro número, sua metade é $\frac{b}{2}$. Então, a diferença entre o dobro de um número e a metade de outro é dada por $2a - \frac{b}{2}$.

PÁGINA 146 – ATIVIDADES

4. a-IV; b-III; c-II; d-I.

5. a-III; b-V; c-IV; d-II; e-I.

6. **a)** $3ab + 2ab = (3 + 2)ab = 5ab$

   b) $4{,}2x + 5{,}3x = (4{,}2 + 5{,}3)x = 9{,}5x$

   c) $\frac{r}{3} - 2r = \left(\frac{1}{3} - 2\right)r = \left(\frac{1}{3} - \frac{6}{3}\right)r =$

   $= \left(\frac{1 - 6}{3}\right)r = -\frac{5}{3}r$

   d) $\frac{5y}{2} + \frac{3y}{5} - \frac{y}{3} = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)y =$

   $= \left(\frac{75}{30} + \frac{18}{30} - \frac{10}{30}\right)y =$

   $= \left(\frac{75 + 18 - 10}{30}\right)y = \frac{83}{30}y$

   e) $6{,}1a - 0{,}8b + 1{,}7b - 4a =$

   $= 6{,}1a - 4a - 0{,}8b + 1{,}7b =$

   $= (6{,}1 - 4)a + (-0{,}8 + 1{,}7)b =$

   $= 2{,}1a + 0{,}9b$

   f) $\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^2 + 2 =$

   $= \frac{3t^2}{6} - \frac{2t^2}{6} + 2 =$

   $= \frac{3t^2 - 2t^2}{6} + 2 = \frac{t^2}{6} + 2$

   g) $\frac{1}{4}w + z - w + 1 + \frac{z}{2} =$

   $= \frac{1}{4}w - w + z + \frac{z}{2} + 1 =$

   $= \left(\frac{1}{4} - 1\right)w + \left(1 + \frac{1}{2}\right)z + 1 =$

   $= \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{4}\right)w + \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right)z + 1 =$

   $= \left(\frac{1 - 4}{4}\right)w + \left(\frac{2 + 1}{2}\right)z + 1 =$

   $= \left(-\frac{3}{4}\right)w + \left(\frac{3}{2}\right)z + 1$

   h) $\frac{5u + 15}{5} + 3u =$

   $= \frac{5u + 15}{5} + \frac{15u}{5} =$

   $= \frac{5u + 15 + 15u}{5} = \frac{20u + 15}{5} =$

   $= \frac{20u}{5} + \frac{15}{5} = 4u + 3$

7. Simplificando as expressões, tem-se:

   a) $12a^2 - x + 7 + 5x - 4a + 1 - a^2 =$

   $= 12a^2 - a^2 - x + 5x - 4a + 7 + 1 =$

   $= (12 - 1)a^2 + (-1 + 5)x - 4a +$

   $+ (7 + 1) = 11a^2 + 4x - 4a + 8$

   b) $a - 3 + 4a^2 + 1 + 5x + 3a + 11 - 6a^2 =$

   $= 4a^2 - 6a^2 + a + 3a + 5x - 3 +$

   $+ 1 + 11 = (4 - 6)a^2 + (1 + 3)a +$

   $+ 5x + (-3 + 1 + 11) =$

   $= -2a^2 + 4a + 5x + 9$

   c) $7a^2 - a + 5x + 9 - 9a^2 + 5a =$

   $= 7a^2 - 9a^2 - a + 5a + 5x + 9 =$

   $= (7 - 9)a^2 + (-1 + 5)a + 5x + 9 =$

   $= -2a^2 + 4a + 5x + 9$

   d) $6a^2 + x + 10 - 4a + 5a^2 + 3x - 2 =$

   $= 6a^2 + 5a^2 + x + 3x - 4a + 10 - 2 =$

   $= (6 + 5)a^2 + (1 + 3)x - 4a + 8 =$

   $= 11a^2 + 4x - 4a + 8$

   Então, são iguais as expressões **a** e **d**; **b** e **c**.

   - Resposta pessoal.

PÁGINA 150 – ATIVIDADES

8. **a)** Respostas possíveis:

   I. Recursiva: multiplicar o termo anterior por 10; não recursiva: sendo p a posição, 10^{p-1}.

   II. Recursiva: multiplicar o termo anterior por 2; não recursiva: sendo p a posição, 2^p.

   III. Recursiva: adicionar 3 ao termo anterior; não recursiva: sendo p a posição, $3p + 1$.

   IV. Recursiva: adicionar 3 ao termo anterior; não recursiva: sendo p a posição, $3p - 10$.

   b) Respostas pessoais.

   c) Resposta pessoal.

9. **a)** $2n + 10 = 2 \cdot (n + 5)$

   b) $(8 - 4n) : 4 = \frac{8}{4} - \frac{4n}{4} = 2 - n$

   c) $2(2n - 4) = 2 \cdot 2 \cdot (n - 2) = 4 \cdot (n - 2)$

   d) $15n + 3 = 3 \cdot (5n + 1)$

   Portanto, a-II; b-IV; c-I; d-III.

PÁGINA 151 – DIVERSIFICANDO

1. **a)** Sim.

   b) 5,9: valor da bandeirada; 2,9: valor adicionado por quilômetro rodado.

   c) É a variável dessa expressão algébrica e representa a quantidade de quilômetros percorridos.

2. **a)**
   - Preço da calça: $3x$
   - Preço da luva: $\frac{x}{2}$
   - Preço do casaco: $x + 20$

   b) Se $x = 36$, então:
   - a calça vai custar R$ 108,00, pois $3 \cdot 36 = 108$.
   - a luva vai custar R$ 18,00, pois $36 : 2 = 18$.
   - o casaco vai custar R$ 56,00, pois $36 + 20 = 56$.

3. Respostas possíveis:

   a) Como $10\% = \frac{10}{100} = 0{,}1$, pode-se escrever $0{,}1x$.

   b) Como $25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$, pode-se escrever $0{,}25x$ para representar 25% de um número, e para representar metade de 25% de um número, pode-se escrever $\frac{0{,}25x}{2}$.

4. **a)** Como o hexágono regular tem 6 lados de mesma medida, a medida de seu perímetro é dada por:

   $$h + h + h + h + h + h = 6h$$

   b) Como o pentágono regular tem 5 lados de mesma medida, a medida de seu perímetro é dada por:

   $$d + d + d + d + d = 5d$$

   Portanto, um terço da medida desse perímetro é $\frac{5}{3}d$.

5. **a)** Verdadeira.

   b) Verdadeira.

   c) Falsa, pois o coeficiente de x^2 é 7.

6. **a)** Para comprar 2 maçãs, são necessários R$ 5,80, pois $2 \cdot 2{,}90 = 5{,}80$.

   Para comprar 3 maçãs, são necessários R$ 8,70, pois $3 \cdot 2{,}90 = 8{,}70$.

   Para comprar 4 maçãs, são necessários R$ 11,60, pois $4 \cdot 2{,}90 = 11{,}60$.

   Para comprar 5 maçãs, são necessários R$ 14,50, pois $5 \cdot 2{,}90 = 14{,}50$.

   b) $2{,}90x$

7. **a)** $8a^2m - 3a^2m = (8 - 3)a^2m = 5a^2m$

   b) $2am^2 - 1 + 3am^2 = (2 + 3)am^2 - 1 =$

   $= 5am^2 - 1$

   c) $3x - 2a + 4x + a =$

   $= (3 + 4)x + (-2 + 1)a =$

   $= 7x + (-1)a = 7x - a$

   d) $15x + 4 - 8x - 3 =$

   $= (15 - 8)x + (4 - 3) = 7x + 1$

   e) $3(x + m) + 2x - m =$

   $= 3x + 3m + 2x - m =$

   $= (3 + 2)x + (3 - 1)m = 5x + 2m$

   Portanto, a-IV; b-V; c-I; d-II; e-III.

8. Pode-se calcular os termos da sequência determinando uma regra não recursiva para a sequência dada. Uma possível regra é $a_n = 3n + 1$. Assim, os termos que Joana e Marcos devem digitar são:

   - 23º termo: $a_{23} = 3 \cdot 23 + 1 =$
     $= 69 + 1 = 70$
   - 35º termo: $a_{35} = 3 \cdot 35 + 1 =$
     $= 105 + 1 = 106$
   - 50º termo: $a_{50} = 3 \cdot 50 + 1 =$
     $= 150 + 1 = 151$

   Logo, os números que Joana e Marcos devem digitar são 70, 106 e 151.

9. **a)** Regra recursiva: $a_n = a_{n-1} + 4$, com $a_1 = 9$; regra não recursiva: $a_n = 4n + 5$.

   b) Para obter o próximo número dessa sequência, soma-se 4 ao último termo da sequência: $29 + 4 = 33$

   Portanto, o próximo número dessa sequência é 33.

   c) Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2 – EQUAÇÕES

PÁGINA 155 – ATIVIDADES

1. Sendo x a medida da massa do cubo, a medida da massa da esfera será $2x$ e a da pirâmide será $\frac{2x}{5}$. Assim, a equação que representa a situação é $x + 2x + \frac{2x}{5} = 87$.

2. Primeiro membro: $8y + (x - 2)$; segundo membro: $9 + y$.

3. **a)** A sentença $2 - 7 = 5 - 10$ não é uma equação, pois a igualdade não contém letra (incógnita).

b) A sentença $2x^2 + 1\frac{12}{7} \geqslant 10$ não é uma equação, pois não expressa uma igualdade.

c) A sentença $\sqrt{2} - 4 = \frac{x}{2}$ é uma equação, pois expressa uma igualdade que contém uma incógnita.

d) A sentença $10 + x^3 = -1$ é uma equação, pois expressa uma igualdade que contém uma incógnita.

e) A sentença $3a - 2b = 5$ é uma equação, pois expressa uma igualdade que contém pelo duas incógnitas.

f) $5m - \frac{m}{3} < 1$ não é uma equação, pois não expressa uma igualdade.

Portanto, são equações as sentenças dos itens **c**, **d** e **e**.

4. Dada a equação $x^2 - x = 2$.

- Para $x = -2$, tem-se:

$$\begin{aligned}(-2)^2 - (-2) &= 2\\ 4 + 2 &= 2\\ 6 &= 2 \text{ (falso)}\end{aligned}$$

- Para $x = -1$, tem-se:

$$\begin{aligned}(-1)^2 - (-1) &= 2\\ 1 + 1 &= 2\\ 2 &= 2 \text{ (verdadeiro)}\end{aligned}$$

- Para $x = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned}0^2 - 0 &= 2\\ 0 - 0 &= 2\\ 0 &= 2 \text{ (falso)}\end{aligned}$$

- Para $x = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned}1^2 - 1 &= 2\\ 1 - 1 &= 2\\ 0 &= 2 \text{ (falso)}\end{aligned}$$

- Para $x = 2$, tem-se:

$$\begin{aligned}2^2 - 2 &= 2\\ 4 - 2 &= 2\\ 2 &= 2 \text{ (verdadeiro)}\end{aligned}$$

Portanto, as raízes da equação são -1 e 2.

5. Dada a equação $\frac{a}{2} + 1 = 2a$.

- Para $a = -2$, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{-2}{2} + 1 &= 2 \cdot (-2)\\ -1 + 1 &= -4\\ 0 &= -4 \text{ (falso)}\end{aligned}$$

- Para $a = -\frac{2}{3}$, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{-\frac{2}{3}}{2} + 1 &= 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)\\ -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 1 &= -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} + 1 &= -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} + \frac{3}{3} &= -\frac{4}{3}\\ \frac{2}{3} &= -\frac{4}{3} \text{ (falso)}\end{aligned}$$

- Para $a = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{0}{2} + 1 &= 2 \cdot 0\\ 0 + 1 &= 0\\ 1 &= 0 \text{ (falso)}\end{aligned}$$

- Para $a = \frac{2}{3}$, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{2}{3}}{2} + 1 &= 2 \cdot \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 1 &= \frac{4}{3}\\ \frac{1}{3} + \frac{3}{3} &= \frac{4}{3}\\ \frac{4}{3} &= \frac{4}{3} \text{ (verdadeiro)}\end{aligned}$$

- Para $a = 2$, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{2}{2} + 1 &= 2 \cdot 2\\ 1 + 1 &= 4\\ 2 &= 4 \text{ (falso)}\end{aligned}$$

Portanto, apenas $\frac{2}{3}$ é raiz dessa equação.

6. O número 4 é solução das equações **a** e **c**.

a)

$$\begin{aligned}5y + 7 &= 27\\ 5 \cdot 4 + 7 &= 27\\ 20 + 7 &= 27\\ 27 &= 27 \text{ (verdadeiro)}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 15 &= 0\\ 4^2 - 2 \cdot 4 - 15 &= 0\\ 16 - 8 - 15 &= 0\\ 8 - 15 &= 0\\ -7 &= 0 \text{ (falso)}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + 2t} &= 3\\ \sqrt{1 + 2 \cdot 4} &= 3\\ \sqrt{1 + 8} &= 3\\ \sqrt{9} &= 3\\ 3 &= 3 \text{ (verdadeiro)}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{a}{10} - 2 \cdot (a + 7) &= \frac{3}{2}\\ \frac{4}{10} - 2 \cdot (4 + 7) &= \frac{3}{2}\\ \frac{4}{10} - 2 \cdot (11) &= \frac{3}{2}\\ \frac{4}{10} - 22 &= \frac{3}{2}\\ \frac{4}{10} - \frac{220}{10} &= \frac{3}{2}\\ -\frac{216}{10} &= \frac{3}{2} \text{ (falso)}\end{aligned}$$

7. **a)** Considerando x o número inteiro desconhecido, tem-se:

- a soma de um número com 2: $x + 2$
- a quarta parte da soma de um número com 2: $\frac{x + 2}{4}$
- a terça parte desse número: $\frac{x}{3}$

Logo, a equação correta é $\frac{x + 2}{4} = \frac{x}{3}$, ou seja, a do item **II**.

b) Para $x = 8$, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{8 + 2}{4} &= \frac{8}{3}\\ \frac{10}{4} &= \frac{8}{3} \text{ (falso)}\end{aligned}$$

Portanto, o número 8 não é raiz dessa equação.

8. Chamando o número de x, tem-se:

$$\begin{aligned}x + 7 - 2 &= 13\\ x + 5 &= 13\end{aligned}$$

O número que adicionado a 5 resulta em 13 é 8. Logo, a raiz dessa equação é 8.

9. **a)** $5 \cdot (x + 4) - (x - 1) = 40$

Substituindo x por 6, tem-se:

$$\begin{aligned}5 \cdot (6 + 4) - (6 - 1) &= 40\\ 5 \cdot 10 - 5 &= 40\\ 50 - 5 &= 40\\ 45 &= 40 \text{ (falso)}\end{aligned}$$

Logo, 6 não é raiz da equação.

b) $-3 \cdot (-t^2) + 4 = 16$

Substituindo t por -2, tem-se:

$$\begin{aligned}-3 \cdot (-(-2)^2) + 4 &= 16\\ -3 \cdot (-4) + 4 &= 16\\ 12 + 4 &= 16\\ 16 &= 16 \text{ (verdadeiro)}\end{aligned}$$

Logo, -2 é raiz da equação.

c) $\frac{x^2}{2} + 3x - 4 = 0$

Substituindo x por $-\frac{1}{2}$, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 &= 0\\ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 4 &= 0\\ \frac{1}{8} - \frac{3}{2} - 4 &= 0\\ \frac{1}{8} - \frac{12}{8} - \frac{32}{8} &= 0\\ -\frac{43}{8} &= 0 \text{ (falso)}\end{aligned}$$

Logo, $-\frac{1}{2}$ não é raiz da equação.

d) $3x^3 - 12 = 0$

Substituindo x por 3, tem-se:

$$\begin{aligned}3 \cdot 3^3 - 12 &= 0\\ 3 \cdot 27 - 12 &= 0\\ 81 - 12 &= 0\\ 69 &= 0 \text{ (falso)}\end{aligned}$$

Logo, 3 não é raiz da equação.

e) $\frac{w^3}{3} + 6 = 0$

Substituindo w por -3, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{(-3)^3}{3} + 6 &= 0\\ -9 + 6 &= 0\\ -3 &= 0 \text{ (falso)}\end{aligned}$$

Logo, -3 não é raiz da equação.

f) $3y^2 - 3(y + 12) = 0$

Substituindo *y* por −3, tem-se:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-3)^2 - 3(-3 + 12) &= 0 \\ 3 \cdot 9 - 3 \cdot 9 &= 0 \\ 27 - 27 &= 0 \\ 0 &= 0 \ \text{(verdadeiro)} \end{aligned}$$

Logo, −3 é raiz da equação.

g) $x^3 + 3x^2 + 3x + 7 = 0$

Substituindo *x* por 1, tem-se:

$$\begin{aligned} 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 7 &= 0 \\ 1 + 3 + 3 + 7 &= 0 \\ 14 &= 0 \ \text{(falso)} \end{aligned}$$

Logo, 1 não é raiz da equação.

h) $a^3 + a^2 = 1$

Substituindo *a* por −1, tem-se:

$$\begin{aligned} (-1)^3 + (-1)^2 &= 1 \\ -1 + 1 &= 1 \\ 0 &= 1 \ \text{(falso)} \end{aligned}$$

Logo, −1 não é raiz da equação.

10. a) Se há *x* bombons em cada caixa, então uma possível equação é $9x = 63$.

b) O número que multiplicado por 9 resulta em 63 é 7. Logo, $x = 7$.

PÁGINA 156 – ATIVIDADE

11. a-II; b-III; c-IV; d-I.

a) O conjunto solução é $S = \{3\}$, pois:

$$\begin{aligned} 3x - 3 &= 6 \\ 3x &= 6 + 3 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \ \text{(3 pertence a } U\text{)} \end{aligned}$$

b) O conjunto solução é $S = \{-3\}$, pois:

$$\begin{aligned} 8 - m &= 11 \\ 8 - 11 &= m \\ m &= -3 \ \text{(}-3\text{ pertence a } U\text{)} \end{aligned}$$

c) O conjunto solução é $S = \{2\}$, pois:

$$\begin{aligned} -4a + 8 &= 0 \\ 8 &= 4a \\ a &= 2 \ \text{(2 pertence a } U\text{)} \end{aligned}$$

d) O conjunto solução é $S = \left\{-\frac{1}{6}\right\}$, pois:

$$\begin{aligned} b + \frac{1}{6} &= 0 \\ b &= -\frac{1}{6} \ \left(-\frac{1}{6} \text{ pertence a } U\right) \end{aligned}$$

PÁGINA 161 – ATIVIDADES

12. Resposta pessoal.

13. Resposta possíveis:

a)
$$\begin{aligned} x + y + 7 &= 3x - 2y + 9 \\ x + y + 7 - 3x &= 3x - 2y + 9 - 3x \\ -2x + y + 7 &= -2y + 9 \\ -2x + y + 7 + 2y &= -2y + 9 + 2y \\ -2x + 3y + 7 &= 9 \\ -2x + 3y + 7 - 7 &= 9 - 7 \\ -2x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2y - x &= 36x + 38 - y \\ 2y - x + y &= 36x + 38 - y + y \\ 3y - x &= 36x + 38 \\ 3y - x - 36x &= 36x + 38 - 36x \\ 3y - 37x &= 38 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 5a + 2ab - 7 &= 8 - ab \\ 5a + 2ab - 7 + ab &= 8 - ab + ab \\ 5a + 3ab - 7 &= 8 \\ 5a + 3ab - 7 + 7 &= 8 + 7 \\ 5a + 3ab &= 15 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x - \frac{y}{3} &= 2 + \frac{x}{2} + 19 \\ 3x - \frac{y}{3} - \frac{x}{2} &= 21 + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \\ \frac{6x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{3} &= 21 \\ \frac{5x}{2} - \frac{y}{3} &= 21 \end{aligned}$$

14. a) $x + 7 = 21$, para $U = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} x &= 21 - 7 \\ x &= 14 \ \text{(pertence a } \mathbb{Q}\text{)} \end{aligned}$$

Portanto, $S = \{14\}$.

b) $3x - 12 = -87$, para $U = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} 3x &= -87 + 12 \\ 3x &= -75 \\ x &= -\frac{75}{3} \\ x &= -25 \ \text{(pertence a } \mathbb{Q}\text{)} \end{aligned}$$

Portanto, $S = \{-25\}$.

c) $17 + 2x = 25$, para $U = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} 2x &= 25 - 17 \\ 2x &= 8 \\ x &= \frac{8}{2} \\ x &= 4 \ \text{(pertence a } \mathbb{Q}\text{)} \end{aligned}$$

Portanto, $S = \{4\}$.

d) $2 \cdot (6x - 4) = 3 \cdot (3x - 1)$, para $U = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} 12x - 8 &= 9x - 3 \\ 12x - 9x &= -3 + 8 \\ 3x &= 5 \\ x &= \frac{5}{3} \ \text{(pertence a } \mathbb{Q}\text{)} \end{aligned}$$

Portanto, $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

e) $\frac{x}{5} - \frac{4}{3} = \frac{5}{2} - \left(\frac{-x + 8}{3}\right)$, para $U = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \frac{6x}{30} - \frac{40}{30} &= \frac{75}{30} - \left(\frac{-10x + 80}{30}\right) \\ 6x - 40 &= 75 + 10x - 80 \\ 6x - 10x &= 75 - 80 + 40 \\ -4x &= 35 \\ x &= -\frac{35}{4} \ \text{(pertence a } \mathbb{Q}\text{)} \end{aligned}$$

Portanto, $S = \left\{-\frac{35}{4}\right\}$.

f) $\frac{2x - 3}{4} - 1 = -2 + \frac{x + 3}{6}$, para $U = \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \frac{6x - 9}{12} - \frac{12}{12} &= -\frac{24}{12} + \frac{2x + 6}{12} \\ 6x - 9 - 12 &= -24 + 2x + 6 \\ 6x - 21 &= -18 + 2x \\ 6x - 2x &= -18 + 21 \\ 4x &= 3 \\ x &= \frac{3}{4} \ \text{(pertence a } \mathbb{Q}\text{)} \end{aligned}$$

Portanto, $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

15. Respostas possíveis:

a)
$$\begin{aligned} 3x + 7 &= 13 \\ 3x &= 13 - 7 \\ 3x &= 6 \\ x &= \frac{6}{3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 3x &= 32 \\ 4x &= 32 \\ x &= \frac{32}{4} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + 5 &= 14 \\ \frac{x}{2} + \frac{10}{2} &= \frac{28}{2} \\ x + 10 &= 28 \\ x &= 28 - 10 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

16. a)
$$\begin{aligned} x + x + 1 &= 3 + 5 \\ 2x + 1 &= 8 \end{aligned}$$

b) Sim, pois ela é do tipo $ax + b = 0$, em que *x* é a incógnita e *a* e *b* são números racionais, com *a* diferente de zero.

c) Resolvendo a equação obtida no item **a**, tem-se:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 8 \\ 2x &= 8 - 1 \\ 2x &= 7 \\ x &= \frac{7}{2} \\ x &= 3{,}5 \end{aligned}$$

Portanto, a medida da massa de cada lata é 3,5 kg.

PÁGINA 165 – ATIVIDADES

17. Respostas possíveis:

a) I. *x* é a idade de Aline e $(x - 2)$ é a idade de Renata.

II. $U = \mathbb{N}$

III. $(x - 10) + (x - 2 - 10) = 46$

IV.
$$\begin{aligned} 2x - 22 &= 46 \\ 2x &= 46 + 22 \\ 2x &= 68 \\ x &= \frac{68}{2} \\ x &= 34 \end{aligned}$$

V.
$$\begin{aligned} (34 - 10) + (34 - 2 - 10) &= 46 \\ 24 + 22 &= 46 \\ 46 &= 46 \ \text{(verdadeiro)} \end{aligned}$$

- Aline: $x = 34$
- Renata: $x - 2 = 34 - 2 = 32$

Logo, Aline tem 34 anos e Renata, 32.

b) I. *x* é a quantia que Adão tinha.

II. $U = \mathbb{Q}^*_+$

III. $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{5} + 15$

IV. $$\begin{aligned}\frac{10x}{10} &= \frac{5x}{10} + \frac{2x}{10} + \frac{150}{10}\\ 10x &= 5x + 2x + 150\\ 10x - 7x &= 150\\ 3x &= 150\\ x &= \frac{150}{3}\\ x &= 50\end{aligned}$$

V. $$\begin{aligned}50 &= \frac{50}{2} + \frac{50}{5} + 15\\ 50 &= 25 + 10 + 15\\ 50 &= 50 \text{ (verdadeiro)}\end{aligned}$$

- quantia: $x = 50$
- frutas: $\frac{x}{2} = \frac{50}{2} = 25$
- leite: $\frac{x}{5} = \frac{50}{5} = 10$

Logo, Adão tinha reservado R$ 50,00 para fazer as compras.

c) **I.** x é o número de meninos e $(x + 5)$ é o número de meninas.

II. $U = \mathbb{N}$

III. $x + x + 5 = 49$

IV. $$\begin{aligned}2x &= 49 - 5\\ 2x &= 44\\ x &= \frac{44}{2}\\ x &= 22\end{aligned}$$

V. $$\begin{aligned}22 + 22 + 5 &= 49\\ 49 &= 49 \text{ (verdadeiro)}\end{aligned}$$

- meninos: $x = 22$
- meninas: $x + 5 = 22 + 5 = 27$

Portanto, estavam na festa 27 meninas.

d) **I.** x é o preço do caderno; $(x - 10)$ é o preço da caixa de lápis de cor; e R$ 5,00 é o preço da cola.

II. $U = \mathbb{Q}_{+}^{*}$

III. $x + x - 10 + 5 = 52$

IV. $$\begin{aligned}2x - 5 &= 52\\ 2x &= 52 + 5\\ 2x &= 57\\ x &= \frac{57}{2}\\ x &= 28{,}5\end{aligned}$$

V. $$\begin{aligned}28{,}5 + 28{,}5 - 10 + 5 &= 52\\ 57 - 10 + 5 &= 52\\ 52 &= 52 \text{ (verdadeiro)}\end{aligned}$$

- caderno: $x = 28{,}5$
- caixa de lápis de cor: $x - 10 = 28{,}5 - 10 = 18{,}5$
- cola bastão: 5

Portanto, a caixa de lápis de cor custou R$ 18,50.

e) **I.** x é a quantidade de ovos produzidos no primeiro dia; $(x + 12)$ é a quantidade de ovos produzidos no segundo dia; e $(x + 12 + 24)$ é a quantidade de ovos produzidos no terceiro dia.

II. $U = \mathbb{N}$

III. $x + (x + 12) + (x + 12 + 24) = 5 \cdot 12$

IV. $$\begin{aligned}3x + 48 &= 60\\ 3x &= 60 - 48\\ 3x &= 12\\ x &= \frac{12}{3}\\ x &= 4\end{aligned}$$

V. $$\begin{aligned}4 + (4 + 12) + (4 + 12 + 24) &= \\ = 5 \cdot 12&\\ 4 + 16 + 40 &= 60\\ 60 &= 60 \text{ (verdadeiro)}\end{aligned}$$

- primeiro dia: $x = 4$
- segundo dia: $x + 12 = 4 + 12 = 16$
- terceiro dia: $x + 12 + 24 = 4 + 12 + 24 = 40$

Logo, foram produzidos 40 ovos no terceiro dia.

18. a) Resposta possível:

Considerando x o número desconhecido, tem-se:

$$\left(2x + \frac{x}{3}\right) - \frac{x}{2} = 22$$

b) $$\begin{aligned}\left(2 \cdot 5 + \frac{5}{3}\right) - \frac{5}{2} &= 22\\ \left(10 + \frac{5}{3}\right) - \frac{5}{2} &= 22\\ \frac{60}{6} + \frac{10}{6} - \frac{15}{6} &= \frac{132}{6}\\ 55 &= 132 \text{ (falso)}\end{aligned}$$

Logo, 5 não é raiz dessa equação.

c) Resolvendo a equação, tem-se:

$$\begin{aligned}\left(2x + \frac{x}{3}\right) - \frac{x}{2} &= 22\\ \left(\frac{12x}{6} + \frac{2x}{6}\right) - \frac{3x}{6} &= \frac{132}{6}\\ 12x + 2x - 3x &= 132\\ 11x &= 132\\ x &= \frac{132}{11}\\ x &= 12\end{aligned}$$

19. a) Os valores desconhecidos são as quantidades de dúzias de ovos de cada tipo que o pai de Lúcia comprou.

$$\begin{aligned}9 \cdot 2n + 7n &= 50\\ 18n + 7n &= 50\\ 25n &= 50\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}n &= \frac{50}{25}\\ n &= 2\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}9 \cdot 2n + 7n &= 50\\ 9 \cdot 2 \cdot 2 + 7 \cdot 2 &= 50\\ 36 + 14 &= 50\\ 50 &= 50 \text{ (verdadeiro)}\end{aligned}$$

Portanto, o valor de n confere.

d) Quantidade de ovos vermelhos:

$2n$ dúzias: $2 \cdot 2 \cdot 12 = 48$

Quantidade de ovos brancos:

n dúzias: $2 \cdot 12 = 24$

Portanto, o pai de Lúcia comprou 48 ovos vermelhos e 24 ovos brancos.

20. Separando o problema em duas etapas: antes e depois de os 4 estudantes desistirem de participar do rateio, tem-se:

- Antes: x estudantes pagando 5 reais; então, pela equação $5x = 120$, descobre-se quantos eram os estudantes:

  $$\begin{aligned}x &= \frac{120}{5}\\ x &= 24\end{aligned}$$

  Portanto, 24 estudantes participariam do rateio.
- Depois: 4 estudantes desistiram e sobraram 20 estudantes para dividir o valor do presente. Então, pode-se escrever a igualdade $20y = 120$, em que y representa o valor que cada estudante deverá pagar depois das desistências. Resolvendo essa equação, tem-se:

  $$\begin{aligned}y &= \frac{120}{20}\\ y &= 6\end{aligned}$$

Portanto, cada um dos estudantes restantes deverá contribuir com R$ 6,00.

21. Sendo c o valor da camiseta, o valor da bermuda é $2c$.

$$\begin{aligned}c + 2c &= 180\\ 3c &= 180\\ c &= \frac{180}{3}\\ c &= 60\end{aligned}$$

Logo, a camiseta custou R$ 60,00 e a bermuda, R$ 120,00.

22. Sendo x o preço de uma camisa ou de uma calça antes do desconto, depois do desconto, a camisa passou a custar $(x - 10)$ reais, e a calça, $(x - 20)$ reais.

$$\begin{aligned}3 \cdot (x - 20) + 4 \cdot (x - 10) &= 250\\ 3x - 60 + 4x - 40 &= 250\\ 7x - 100 &= 250\\ 7x &= 250 + 100\\ 7x &= 350\\ x &= \frac{350}{7}\\ x &= 50\end{aligned}$$

Logo, uma calça custava R$ 50,00 antes do desconto. Depois do desconto, ela passou a custar R$ 30,00 (50 − 20 = 30).

PÁGINA 167 – ATIVIDADES

23. **c** e **f**.

a) A equação $x^2 + y^2 + z = 8$ possui três incógnitas: x, y e z.

b) A equação $2x - 3x^3 = 9$ possui uma incógnita: x.

c) A equação $\frac{x}{y} = 1$ possui duas incógnitas: x e y.

d) A equação $\frac{2x + 3}{3} = \frac{5}{3}$ possui uma incógnita: x.

e) A equação $x = 3 - 4 \cdot 2$ possui uma incógnita: x.

f) A equação $x + y = 55$ possui duas incógnitas: x e y.

24. **a** e **c**.

a)
$$\begin{aligned} x - y &= -3 \\ 3 - 6 &= -3 \\ -3 &= -3 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x - \frac{y}{3} &= 2 \\ 2 \cdot 3 - \frac{6}{3} &= 2 \\ 6 - 2 &= 2 \\ 4 &= 2 \text{ (falso)} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4y \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 &= 4 \cdot 6 \\ 6 + 18 &= 24 \\ 24 &= 24 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} y^2 + x^3 &= 21 \cdot 7 \\ 6^2 + 3^3 &= 147 \\ 36 + 27 &= 147 \\ 63 &= 147 \text{ (falso)} \end{aligned}$$

25. a-II; b-I; c-III.

Equação I: $\frac{z}{2} + 5u + 3{,}6 = 4{,}4$

- Par ordenado (0, −1)

$$\begin{aligned} \frac{0}{2} + 5 \cdot (-1) + 3{,}6 &= 4{,}4 \\ 0 - 5 + 3{,}6 &= 4{,}4 \\ -1{,}4 &= 4{,}4 \text{ (falso)} \end{aligned}$$

- Par ordenado (1,6; 0)

$$\begin{aligned} \frac{1{,}6}{2} + 5 \cdot 0 + 3{,}6 &= 4{,}4 \\ 0{,}8 + 0 + 3{,}6 &= 4{,}4 \\ 4{,}4 &= 4{,}4 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

Equação II: $\frac{z^3}{5} + u^3 = -1$

- Par ordenado (0, −1)

$$\begin{aligned} \frac{0^3}{5} + (-1)^3 &= -1 \\ 0 - 1 &= -1 \\ -1 &= -1 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

Equação III: $2z + u^2 = 12$

- Par ordenado (1,5; 3)

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1{,}5 + 3^2 &= 12 \\ 3 + 9 &= 12 \\ 12 &= 12 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

26. Respostas possíveis:

a) (1, 0); $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$; (4, 5)

Verificando as soluções para a equação $5x - 3y = 5$:

- (1, 0)

$$\begin{aligned} 5 \cdot 1 - 3 \cdot 0 &= 5 \\ 5 - 0 &= 5 \\ 5 &= 5 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

- $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$

$$\begin{aligned} 5 \cdot 0 - 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) &= 5 \\ 0 + 5 &= 5 \\ 5 &= 5 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

- (4, 5)

$$\begin{aligned} 5 \cdot 4 - 3 \cdot 5 &= 5 \\ 20 - 15 &= 5 \\ 5 &= 5 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

b) (0; 3,5); $\left(\frac{7}{4}, 0\right)$; $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

Verificando as soluções para a equação $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = \frac{7}{8}$:

- (0; 3,5)

$$\begin{aligned} \frac{0}{2} + \frac{3{,}5}{4} &= \frac{7}{8} \\ 0 + \frac{\frac{35}{10}}{4} &= \frac{7}{8} \\ \frac{35}{10} \cdot \frac{1}{4} &= \frac{7}{8} \\ \frac{35}{40} &= \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} &= \frac{7}{8} \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

- $\left(\frac{7}{4}, 0\right)$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{7}{4}}{2} + \frac{0}{4} &= \frac{7}{8} \\ \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2} + 0 &= \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} &= \frac{7}{8} \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

- $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{4} &= \frac{7}{8} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} &= \frac{7}{8} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{8} &= \frac{7}{8} \\ \frac{4}{8} + \frac{3}{8} &= \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} &= \frac{7}{8} \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

c) (10, 0); (5, 10); (0, 20)

Verificando as soluções para a equação $2x + y = 20$:

- (10, 0)

$$\begin{aligned} 2 \cdot 10 + 0 &= 20 \\ 20 + 0 &= 20 \\ 20 &= 20 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

- (5, 10)

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5 + 10 &= 20 \\ 10 + 10 &= 20 \\ 20 &= 20 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

- (0, 20)

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 + 20 &= 20 \\ 0 + 20 &= 20 \\ 20 &= 20 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

d) (0, −3); (6, 0); (2, −2)

Verificando as soluções para a equação $2x - 4y = 12$:

- (0, −3)

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 - 4 \cdot (-3) &= 12 \\ 0 + 12 &= 12 \\ 12 &= 12 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

- (6, 0)

$$\begin{aligned} 2 \cdot 6 - 4 \cdot 0 &= 12 \\ 12 + 0 &= 12 \\ 12 &= 12 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

- (2, −2)

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) &= 12 \\ 4 + 8 &= 12 \\ 12 &= 12 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

PÁGINA 168 – DIVERSIFICANDO

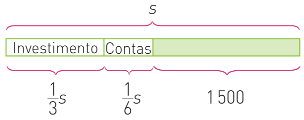
1. O erro cometido por Camila está na quarta linha da resolução, na aplicação da propriedade distributiva em $-1 \cdot (x + 3)$. O correto é $(-x - 3)$, em vez de $(x - 3)$.

Assim, a resolução correta é:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - \frac{3 \cdot (x + 1)}{2} &= 5 - \frac{x + 3}{6} \\ \frac{4}{6} - \frac{9 \cdot (x + 1)}{6} &= \frac{30}{6} - \frac{x + 3}{6} \\ 4 - 9 \cdot (x + 1) &= 30 - (x + 3) \\ 4 - 9x - 9 &= 30 - x - 3 \\ -9x + x &= 30 - 3 - 4 + 9 \\ -8x &= 32 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

2. **a)** Resposta possível:

Chamando de s o salário de Marcela, tem-se:



b) Resposta possível:

$$\frac{1}{3}s + \frac{1}{6}s + 1\,500 = s$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{1}{3}s + \frac{1}{6}s + 1\,500 &= s \\ 2s + s + 9\,000 &= 6s \\ 3s + 9\,000 &= 6s \\ 3s &= 9\,000 \\ s &= 3\,000 \end{aligned}$$

Investimento: $\frac{1}{3}s = \frac{1}{3} \cdot 3\,000 = 1\,000$

Contas: $\frac{1}{6}s = \frac{1}{6} \cdot 3\,000 = 500$

Marcela investe R$ 1 000,00 e gasta R$ 500,00 para pagar as contas.

3. Chamando de x a quantidade de pontos feitos na 2ª fase, tem-se:

- pontos feitos na 1ª fase: $x + 40$
- pontos feitos na 3ª fase: $\frac{x + 40}{2}$

Equação possível:

$$x + 40 + x + \frac{x + 40}{2} = 110$$

Resolvendo a equação:

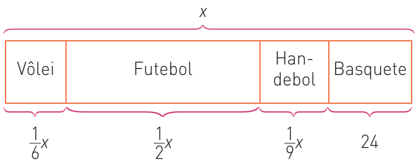
$$\begin{aligned} \frac{2x}{2} + \frac{80}{2} + \frac{2x}{2} + \frac{x + 40}{2} &= \frac{220}{2} \\ 2x + 80 + 2x + x + 40 &= 220 \\ 5x + 120 &= 220 \\ 5x &= 220 - 120 \\ 5x &= 100 \\ x &= \frac{100}{5} \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Então:

- 2ª fase: 20 pontos.
- 1ª fase: 60 pontos (20 + 40 = 60).
- 3ª fase: 30 pontos (60 : 2 = 30).

Portanto, Carla marcou 60 pontos na 1ª fase, 20 pontos na 2ª fase e 30 pontos na 3ª fase.

4. **a)** Sendo x a quantidade de estudantes, tem-se:



b) Pelo esquema do item **a** pode-se escrever a equação:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{2}+\frac{x}{9}+24=x$$

c) O conjunto dos números naturais, pois x representa a quantidade de estudantes.

d) Resolvendo a equação obtida no item **b**, tem-se:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{2}+\frac{x}{9}+24=x$$
$$\frac{3x+9x+2x+432}{18}=\frac{18x}{18}$$
$$14x+432=18x$$
$$4x=432$$
$$x=108$$

Há um total de 108 estudantes, então:

Vôlei: $\frac{x}{6}=\frac{108}{6}=18$

Futebol: $\frac{x}{2}=\frac{108}{2}=54$

Handebol: $\frac{x}{9}=\frac{108}{9}=12$

Basquete: 24

Logo, 18 estudantes vão jogar vôlei, 54 estudantes vão jogar futebol, 12 estudantes vão jogar handebol e 24 estudantes vão jogar basquete.

5. A medida do perímetro da piscina é obtido pela soma das medidas de comprimento de todos os lados. Como o hexágono é regular, o comprimento de seus lados tem a mesma medida ℓ. Então, a medida do perímetro será:

$$\ell+\ell+\ell+\ell+\ell+\ell=6\ell$$

Assim, a equação que representa a medida do perímetro dessa piscina é $6\ell = 14{,}4$. Resolvendo-a, tem-se:

$$6\ell=14{,}4$$
$$\ell=\frac{14{,}4}{6}$$
$$\ell=2{,}4$$

Logo, a medida do comprimento de cada um dos lados da piscina é 2,4 m.

6. Montando um quadro com as medidas dos comprimentos das 18 arestas do poliedro, tem-se:

Quantidade de arestas	Medida da aresta (cm)	Medida total (cm)
6	x	$6x$
2	2,5	5
2	1,1	2,2
2	2	4
2	4,5	9
2	4,2	8,4
2	5,3	10,6

Somando os valores da terceira coluna e igualando essa soma a 62, tem-se:

$$39{,}2+6x=62$$
$$6x=22{,}8$$
$$x=3{,}8$$

Então, a aresta x mede 3,8 cm.

7. **a)** Na equação, deve-se ter d multiplicado por 2 e t multiplicado por 3. Então, a equação deve ser a III: $2d + 3t = 72$.

b) Para $d = 9$ e $t = 18$, tem-se:

$$2d+3t=72$$
$$2\cdot 9+3\cdot 18=72$$
$$18+54=72$$
$$72=72\ \text{(verdadeiro)}$$

Portanto, (9, 18) é solução da equação $2d + 3t = 72$.

8. Respostas possíveis:

a) $2x - 8 = -2$ e $x + 1 = 4$

b) $x - 5 = 0$ e $x + 5 = 10$

c) $3x = 0$ e $2x + 2 = 2$

d) $x + 3 = 1$ e $5 + 3x = -1$

9. Alternativa **c**.

De acordo com o quadro, os valores de q são obtidos dobrando-se os valores de p e adicionando uma unidade, ou seja:

$$q=2p+1$$

10. **a)** Resposta possível: $\left(-1, \frac{13}{2}\right)$; (0, 6); (2, 5).

b) Para $x = -7$ e $y = \frac{19}{2}$, tem-se:

$$x+2y=12$$
$$-7+2\cdot\frac{19}{2}=12$$
$$-7+19=12$$
$$12=12\ \text{(verdadeiro)}$$

Portanto, $\left(-7, \frac{19}{2}\right)$ é uma solução.

11. Substituindo S por 37:

$$37=\frac{5P+28}{4}$$
$$37\cdot 4=5P+28$$
$$5P=148-28$$
$$5P=120$$
$$P=24$$

Portanto, a medida do comprimento do pé dessa pessoa é 24 cm.

12. Sendo x a quantia em dinheiro, tem-se:

Valor gasto: $\frac{3x}{7}+70$

Sobrou: $\frac{x}{3}-10$

Assim:

$$\frac{3x}{7}+70+\frac{x}{3}-10=x$$
$$\frac{9x}{21}+\frac{1\,470}{21}+\frac{7x}{21}-\frac{210}{21}=\frac{21x}{21}$$
$$9x+1\,470+7x-210=21x$$
$$16x+1\,260=21x$$
$$5x=1\,260$$
$$x=252$$

Logo, eu tinha R$ 252,00.

13. Alternativa **d**.

Considerando c a massa de cada círculo, t a de cada triângulo e q a de cada quadrado, tem-se:

- balança (1): $3t + c = 6q$
- balança (2): $2t + 4c = 8q$, o que é equivalente a $1t + 2c = 4q$.
- balança (3): sendo x a massa que deve ser colocada no prato da direita, tem-se:

  $$4t+3c=x$$

  Essa equação é equivalente a:

  $$(3t+1t)+(2c+1c)=x$$
  $$(3t+1c)+(1t+2c)=x$$

  Da balança (1) tem-se $3t + c = 6q$ e da balança (2) tem-se $1t + 2c = 4q$. Assim:

  $$6q+4q=x$$
  $$10q=x$$

Portanto, devem ser colocados 10 quadrados no prato direito da balança (3) para que ela também fique equilibrada.

14. Sendo x a quantia que a primeira pessoa recebeu, tem-se:

- a segunda pessoa recebeu: $\frac{x}{2}$
- a terceira recebeu: $\frac{x+\frac{x}{2}}{2}=$

  $=\left(x+\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3x}{4}$
- a quarta recebeu: $\frac{\frac{3x}{4}}{2}=\frac{3x}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3x}{8}$

A soma dessas quantias deve ser igual a 2 100. Assim:

$$x+\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}+\frac{3x}{8}=2\,100$$
$$\frac{8x}{8}+\frac{4x}{8}+\frac{6x}{8}+\frac{3x}{8}=2\,100$$
$$\frac{8x+4x+6x+3x}{8}=2\,100$$
$$8x+4x+6x+3x=2\,100\cdot 8$$
$$21x=16\,800$$
$$x=\frac{16\,800}{21}$$
$$x=800$$

Logo, a segunda pessoa recebeu metade de R$ 800,00, ou seja, R$ 400,00.

15. Resposta pessoal.

PÁGINA 170 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Resposta pessoal.
2. **a)** Resposta pessoal.

   b) Observando o quadro, tem-se que 12 milhões de famílias endividadas equivalem a 70,9%. Dividindo 12 milhões por 70,9% e multiplicando o resultado por 10,5% encontra-se a quantidade de famílias sem condições de pagar as dívidas em atraso em 2021:

$$\frac{12}{70,9} \cdot 10,5 \simeq 1,8$$

   Portanto, havia em 2021, aproximadamente, 1,8 milhão de famílias sem condição de pagar as dívidas em atraso.

3. Antes do aumento, a família poupava:

$$\frac{200}{2\,000} = 0,1 = 10\%.$$

   Com o aumento, a renda da família passou a ser de R$ 2 100,00 ($2\,000 \cdot 1,05 = 2\,100$), e os gastos passaram a ser de R$ 1 980,00 ($1\,800 \cdot 1,1 = 1\,980$).

   Assim, a família passou a poupar R$ 120,00 por mês ($2\,100 - 1\,980 = 120$). Calculando a razão entre o valor poupado e o novo salário, tem-se:

$$\frac{120}{2\,100} \simeq 5,7\%$$

   Portanto, antes dos aumentos, a família conseguia poupar 10% do salário e, depois dos aumentos, conseguia poupar 5,7%.

PÁGINA 172 – INVESTIGAR

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO

1. Respostas pessoais.
2. Resposta pessoal.
3. Resposta pessoal.
4. Resposta pessoal.

PÁGINA 174 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. A cada estrofe da música aparece um novo elemento, construindo uma sequência recursiva de animais a partir dos elementos da estrofe anterior.
2. **a)** Chamando de x a quantidade de quilômetros da prova completa, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + 3 + 4 = x$$

   b) Resolvendo a equação obtida no item **a**, tem-se:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + 3 + 4 = x$$
$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 7 = x$$
$$\frac{5x}{15} + \frac{3x}{15} + \frac{105}{15} = \frac{15}{15}x$$
$$5x + 3x + 105 = 15x$$
$$15x = 8x + 105$$
$$15x - 8x = 105$$
$$7x = 105$$
$$x = 15$$

   Logo, a medida do comprimento total do percurso é 15 quilômetros.

   c) Substituindo x por 15, tem-se:

   - João: $\frac{x}{3} = \frac{15}{3} = 5$
   - Pedro: $\frac{x}{5} = \frac{15}{5} = 3$

   Logo, João terá de percorrer 5 quilômetros e Pedro, 3 quilômetros.

3. **a)** Resposta possível:

   - Procedimento parecido: as operações são as mesmas e na mesma ordem: primeiro, subtrai-se o número 21 de 56; em seguida, divide-se o resultado por 7, obtendo 5.
   - Procedimento diferente: a apresentação da resolução: uma por meio da aritmética, outra por meio da álgebra.

   b) Resposta pessoal.

4. Alternativa **c**.

   Considerando x a distância que José percorreu antes do café, tem-se que após o café ele percorreu o triplo dessa distância, ou seja, $3x$. Logo:

$$x + 3x = 350$$
$$4x = 350$$
$$x = \frac{350}{4}$$
$$x = 87,5$$

   Substituindo x por 87,5 em $3x$, tem-se:

$$3 \cdot 87,5 = 262,5$$

   Portanto, a distância que João percorreu após o café foi 262,5 quilômetros.

5. Se o dono do restaurante devolveu R$ 5,00 às clientes como desconto, o valor final da conta foi R$ 25,00 e não R$ 30,00. Então, as amigas pagaram R$ 27,00 ($9 \cdot 3 = 27$), sendo R$ 25,00 para pagar a conta e R$ 2,00 para o garçom.

   Há indução ao erro na última conta: deveriam ser subtraídos R$ 2,00 de R$ 27,00 para chegar a R$ 25,00, em vez de adicionados R$ 2,00 a R$ 27,00, resultando em R$ 29,00.

6. Alternativa **d**.

   Considerando x o valor inicial pago pelas 50 pessoas e y o custo total da festa, pode-se montar as seguintes equações:

$$\begin{cases} 50x + 50 \cdot 7 + 5(x + 7) = y \quad \text{(I)} \\ 50x = y - 510 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

   Isolando y em (II), tem-se:

$$y = 50x + 510$$

   Substituindo y em (I):

$$50x + 350 + 5x + 35 = 50x + 510$$
$$5x = 125$$
$$x = 25$$

   Logo, cada um contribuiu com:

$$\text{R\$ } 25,00 + \text{R\$ } 7,00 = \text{R\$ } 32,00$$

   Acompanhe outra maneira de resolver essa atividade.

   Chamando a cota inicial de x, 50 pessoas pagariam $50x$, mas ainda faltaram R$ 510,00. Então, o valor total das despesas equivale, em reais, a $50x + 510$. Com as 5 novas pessoas, a cota passou a ser R$ 7,00 a mais que a cota inicial, ou seja, a cota final é equivalente a $(x + 7)$. Com 55 pessoas pagando $(x + 7)$, o total das despesas é equivalente a $55(x + 7)$. Com isso, igualam-se as duas expressões que representam o valor total das despesas.

$$50x + 510 = 55(x + 7)$$
$$50x + 510 = 55x + 385$$
$$5x = 125$$
$$x = 25$$

   O valor da nova cota, representado por $(x + 7)$, equivale, então, a R$ 32,00.

7. A medida do perímetro do retângulo é dada por $2 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (2x + 4)$, e a medida do perímetro do quadrado é dada por $4 \cdot 10,5$. Como os dois polígonos têm a mesma medida de perímetro, tem-se:

$$2 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (2x + 4) = 4 \cdot 10,5$$
$$2x + 4 + 4x + 8 = 42$$
$$6x + 12 = 42$$
$$6x = 42 - 12$$
$$6x = 30$$
$$x = 5$$

   Substituindo x por 5, tem-se:

   - Medida da largura do retângulo:

$$x + 2 = 5 + 2 = 7$$

   - Medida do comprimento do retângulo:

$$2x + 4 = 2 \cdot 5 + 4 = 10 + 4 = 14$$

   Portanto, a largura do retângulo mede 7 cm, e o comprimento mede 14 cm.

8. Marcos não considerou que os numeradores podem ser iguais a zero, o que implicaria que os denominadores poderiam admitir valores diferentes entre si. Nesse caso, tem-se:

$$5x - 4 = 0$$
$$5x = 4$$
$$x = \frac{4}{5}$$

UNIDADE 5 – PROPORCIONALIDADE E PORCENTAGEM

CAPÍTULO 1 – RAZÃO E PROPORÇÃO

PÁGINA 179 – ATIVIDADES

1. **a)** $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5$

   Portanto, a razão é $\frac{1}{2}$ ou 0,5.

   b) $\frac{5}{4} = 5 : 4 = 1,25$

   Portanto, a razão é $\frac{5}{4}$ ou 1,25.

   c) $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 1 : 3 \simeq 0,33$

   Portanto, a razão é $\frac{3}{9}$ ou $\frac{1}{3}$ ou, ainda, aproximadamente 0,33.

   d) $\frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 1 : 4 = 0,25$

   Portanto, a razão é $\frac{10}{40}$ ou $\frac{1}{4}$ ou 0,25.

2. **a)** Razão de 2 para 3, ou 2 para 3.

   b) Razão de 3 para 5, ou 3 para 5.

c) Razão de 1 para 10, ou 1 para 10.

d) Razão de 8 para 85, ou 8 para 85.

3. **a)** Antecedente: 6; consequente: 8; forma decimal: 0,75.

b) Antecedente: 21; consequente: 14; forma decimal: 1,5.

c) Antecedente: 16; consequente: 40; forma decimal: 0,4.

d) Antecedente: 36; consequente: 72; forma decimal: 0,5.

e) Antecedente: 17; consequente: 68; forma decimal: 0,25.

f) Antecedente: 21; consequente: 105; forma decimal: 0,2.

g) Antecedente: 55; consequente: 110; forma decimal: 0,5.

h) Antecedente: 81; consequente: 216; forma decimal: 0,375.

PÁGINA 182 – ATIVIDADES

4. **a)** 2 está para 5, assim como 4 está para 10; extremos: 2 e 10; meios: 4 e 5.

b) 1 está para 7, assim como 3 está para 21; extremos: 1 e 21; meios: 3 e 7.

c) 4 está para 3, assim como 20 está para 15; extremos: 4 e 15; meios: 20 e 3.

d) 10 está para 25, assim como 6 está para 15; extremos: 10 e 15; meios: 6 e 25.

5. **a)**
$$\begin{gathered} 9 \cdot 4 = 36 \\ 3 \cdot 12 = 36 \\ 36 = 36 \end{gathered}$$

Logo, as razões formam uma proporção.

b)
$$\begin{gathered} 15 \cdot 6 = 90 \\ 8 \cdot 18 = 144 \\ 90 \neq 144 \end{gathered}$$

Portanto, as razões não formam uma proporção.

c)
$$\begin{gathered} 0{,}5 \cdot 4 = 2 \\ 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8 \\ 2 \neq 0{,}8 \end{gathered}$$

Portanto, as razões não formam uma proporção.

d)
$$\begin{gathered} 50 \cdot 9 = 450 \\ 30 \cdot 15 = 450 \\ 450 = 450 \end{gathered}$$

Logo, as razões formam uma proporção.

6. **a)**
$$\begin{aligned} 3{,}4 \cdot n &= 80 \cdot 1{,}7 \\ 3{,}4n &= 136 \\ n &= \frac{136}{3{,}4} \\ n &= 40 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 5 \cdot m &= 70 \cdot 35 \\ 5m &= 2\,450 \\ m &= \frac{2\,450}{5} \\ m &= 490 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x \cdot 5 &= 16 \cdot 5 \\ 10x &= 80 \\ x &= \frac{80}{10} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} (2a - 6) \cdot 6 &= (2{,}3 - a) \cdot 4 \\ 12a - 36 &= 9{,}2 - 4a \\ 12a + 4a &= 9{,}2 + 36 \\ 16a &= 45{,}2 \\ a &= \frac{45{,}2}{16} \\ a &= 2{,}825 \end{aligned}$$

7. **a**, **c** e **d**.

a)
$$\begin{aligned} 1 \cdot 21 &= 3 \cdot x \\ 21 &= 3x \\ \frac{21}{3} &= x \\ 7 &= x \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2 \cdot 20 &= 5 \cdot x \\ 40 &= 5x \\ \frac{40}{5} &= x \\ 8 &= x \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x \cdot 100 &= 10 \cdot 70 \\ 100x &= 700 \\ x &= \frac{700}{100} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x \cdot 56 &= 8 \cdot 49 \\ 56x &= 392 \\ x &= \frac{392}{56} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

PÁGINA 183 – ATIVIDADES

8. **a)** $\frac{a+b}{a} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$

b) $\frac{a+b}{b} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$

c) $\frac{a-b}{a} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$

d) $\frac{a-b}{b} = \frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3}$

9.
$$\begin{aligned} \frac{x+y}{x} &= \frac{3+6}{3} \\ \frac{15}{x} &= \frac{9}{3} \\ 15 \cdot 3 &= x \cdot 9 \\ 45 &= 9x \\ \frac{45}{9} &= x \\ 5 &= x \end{aligned}$$

Como $x + y = 15$, então:
$$\begin{aligned} y &= 15 - x \\ y &= 15 - 5 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

Portanto, $x = 5$ e $y = 10$.

PÁGINA 184 – ATIVIDADES

10. **a)**
$$\begin{aligned} \frac{a}{5} &= \frac{b}{3} \\ \frac{a}{b} &= \frac{5}{3} \\ \frac{a+b}{a} &= \frac{5+3}{5} \\ \frac{28}{a} &= \frac{8}{5} \\ 8 \cdot a &= 28 \cdot 5 \\ 8a &= 140 \\ a &= \frac{140}{8} \\ a &= 17{,}5 \end{aligned}$$

Como $a + b = 28$, então:
$$\begin{aligned} b &= 28 - a \\ b &= 28 - 17{,}5 \\ b &= 10{,}5 \end{aligned}$$

Portanto, $a = 17{,}5$ e $b = 10{,}5$.

b)
$$\begin{aligned} \frac{a}{10} &= \frac{b}{3} \\ \frac{a}{b} &= \frac{10}{3} \\ \frac{a-b}{a} &= \frac{10-3}{10} \\ \frac{182}{a} &= \frac{7}{10} \\ 7 \cdot a &= 182 \cdot 10 \\ 7a &= 1\,820 \\ a &= \frac{1\,820}{7} \\ a &= 260 \end{aligned}$$

Como $a - b = 182$, então:
$$\begin{aligned} 260 - b &= 182 \\ 260 - 182 &= b \\ 78 &= b \end{aligned}$$

Portanto, $a = 260$ e $b = 78$.

11. Sejam x, y e z os prejuízos que devem ser atribuídos a Ana, a Lucas e a Liz, respectivamente; o prejuízo total foi R\$ 4 000,00. Assim: $x + y + z = 4\,000$.

Pela 2^{a} propriedade das proporções:
$$\frac{x}{6\,000} = \frac{y}{10\,000} = \frac{z}{4\,000} = \\ = \frac{x+y+z}{20\,000} = \frac{4\,000}{20\,000} = \frac{1}{5}$$

Para determinar o prejuízo de Ana, pode-se usar a proporção:
$$\begin{aligned} \frac{x}{6\,000} &= \frac{1}{5} \\ 5 \cdot x &= 6\,000 \\ x &= \frac{6\,000}{5} = 1\,200 \end{aligned}$$

Para determinar o prejuízo de Lucas, pode-se usar a proporção:
$$\begin{aligned} \frac{y}{10\,000} &= \frac{1}{5} \\ 5 \cdot y &= 10\,000 \\ y &= \frac{10\,000}{5} = 2\,000 \end{aligned}$$

E para determinar o prejuízo de Liz, pode-se usar a proporção:
$$\begin{aligned} \frac{z}{4\,000} &= \frac{1}{5} \\ 5 \cdot z &= 4\,000 \\ z &= \frac{4\,000}{5} = 800 \end{aligned}$$

Portanto, o prejuízo de Ana, Lucas e Liz após o encerramento da sociedade foi, respectivamente, R\$ 1 200,00, R\$ 2 000,00 e R\$ 800,00.

Calculando com quanto dinheiro cada um ficou depois que a sociedade foi desfeita, tem-se:

Ana: $6\,000 - 1\,200 = 4\,800$

Lucas: $10\,000 - 2\,000 = 8\,000$

Liz: $4\,000 - 800 = 3\,200$

Logo, Ana ficou com R\$ 4 800,00; Lucas ficou com R\$ 8 000,00; e Liz, com R\$ 3 200,00.

PÁGINA 188 – ATIVIDADES

12. a) Verificando se os números da primeira sequência são diretamente proporcionais aos números da segunda sequência, tem-se:

$$\frac{1}{20}; \frac{3}{60} = \frac{1}{20}; \frac{5}{100} = \frac{1}{20}; \frac{7}{140} = \frac{1}{20}$$

Assim: $\frac{1}{20} = \frac{3}{60} = \frac{5}{100} = \frac{7}{140}$.

Logo, as duas sequências são diretamente proporcionais, com $k = \frac{1}{20}$.

b) Verificando se os números da primeira sequência são diretamente proporcionais aos números da segunda sequência, tem-se:

$$\frac{2}{63}; \frac{3}{42} = \frac{1}{14}$$

Como $\frac{2}{63} \neq \frac{1}{14}$, então os números dessas sequências não são diretamente proporcionais.

Verificando se os números da primeira sequência são inversamente proporcionais aos números da segunda sequência, tem-se:

$$\frac{2}{\frac{1}{63}} = 2 \cdot 63 = 126; \ \frac{3}{\frac{1}{42}} = 3 \cdot 42 = 126;$$

$$\frac{7}{\frac{1}{18}} = 7 \cdot 18 = 126; \ \frac{9}{\frac{1}{14}} = 9 \cdot 14 = 126$$

Assim: $\frac{2}{\frac{1}{63}} = \frac{3}{\frac{1}{42}} = \frac{7}{\frac{1}{18}} = \frac{9}{\frac{1}{14}} = 126$

Logo, as duas sequências são inversamente proporcionais, com $k = 126$.

c) Verificando se os números da primeira sequência são diretamente proporcionais aos números da segunda sequência, tem-se:

$$\frac{5}{88}; \frac{8}{55}$$

Como $\frac{5}{88} \neq \frac{8}{55}$, então os números dessas sequências não são diretamente proporcionais.

Verificando se os números da primeira sequência são inversamente proporcionais aos números da segunda sequência, tem-se:

$5 \cdot 88 = 440; 8 \cdot 55 = 440;$

$10 \cdot 44 = 440; 11 \cdot 40 = 440$

Assim:

$5 \cdot 88 = 8 \cdot 55 = 10 \cdot 44 = 11 \cdot 40 = 440$

Portanto, as duas sequências são inversamente proporcionais, com $k = 440$.

d) Verificando se os números da primeira sequência são diretamente proporcionais aos números da segunda sequência, tem-se:

$$\frac{1{,}5}{3} = 0{,}5; \ \frac{3{,}0}{6} = 0{,}5; \ \frac{4{,}5}{9} = 0{,}5$$

Assim: $\frac{1{,}5}{3} = \frac{3}{6} = \frac{4{,}5}{9} = 0{,}5$.

Logo, as duas sequências são diretamente proporcionais, com $k = 0{,}5$.

13. Alternativa **a**.

a) O tempo para colher frutas em um pomar e o número de pessoas que farão a colheita, todas com a mesma produtividade, são inversamente proporcionais, pois, aumentando a quantidade de pessoas que farão a colheita, o tempo para realizá-la diminui proporcionalmente.

b) As grandezas envolvidas não são diretamente proporcionais nem inversamente proporcionais. Ao aumentar apenas a quantidade de farinha para fazer um bolo, a receita pode não dar certo.

c) As grandezas envolvidas não são diretamente proporcionais nem inversamente proporcionais. Independentemente da quantidade de músicos, o tempo gasto para tocar essa música é o mesmo.

14. a) Se em 5 horas se produzem 400 barras de chocolate, na metade desse tempo (ou seja, em 2,5 horas) serão produzidas 200 barras de chocolate. Como $400 + 200 = 600$, então o tempo necessário para produzir 600 barras de chocolate será 7,5 horas, pois $5 + 2{,}5 = 7{,}5$.

b) Para descobrir quantas barras de chocolate serão produzidas em duas horas, primeiro deve-se calcular quantas barras são produzidas em uma hora:

$$400 : 5 = 80$$

Portanto, em uma hora são produzidas 80 barras de chocolate. Logo, em duas horas, serão produzidas 160 barras de chocolate.

c) São diretamente proporcionais. A justificativa é pessoal.

15. Sendo x a parte do prêmio dada ao candidato que demorou 8 minutos para concluir o desafio. Como as partes do prêmio são inversamente proporcionais aos tempos, então o candidato que demorou 16 minutos recebeu a metade do prêmio $\left(\frac{x}{2}\right)$ do candidato que demorou 8 minutos, uma vez que 16 é o dobro de 8. Por sua vez, 12 minutos correspondem a $\frac{3}{2}$ de 8 minutos, então o candidato que demorou 12 minutos recebeu $\frac{2}{3}$ do prêmio dado ao primeiro colocado:

$$\frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{2x}{3}$$

Sabendo que a soma dos prêmios é R$ 2 600,00, tem-se:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 2\,600$$

$$\frac{6x}{6} + \frac{3x}{6} + \frac{4x}{6} = \frac{6 \cdot 2\,600}{6}$$

$$6x + 3x + 4x = 15\,600$$

$$13x = 15\,600$$

$$x = \frac{15\,600}{13}$$

$$x = 1\,200$$

- O primeiro colocado recebeu R$ 1 200,00.
- O segundo colocado recebeu $\frac{2}{3}$ do valor do prêmio do primeiro colocado. Como $1\,200 \cdot \frac{2}{3} = 800$, ele recebeu R$ 800,00.
- O terceiro colocado recebeu metade do valor dado ao primeiro colocado. Como $1\,200 : 2 = 600$, ele recebeu R$ 600,00.

Portanto, os prêmios para os candidatos com 8, 12 e 16 minutos foram: R$ 1 200,00, R$ 800,00 e R$ 600,00, respectivamente.

PÁGINA 191 – ATIVIDADES

16. Considerando x o valor que Joaquim pagou, tem-se:

$$\frac{14}{6} = \frac{x}{21}$$

$$14 \cdot 21 = 6 \cdot x$$

$$294 = 6x$$

$$\frac{294}{6} = x$$

$$49 = x$$

Portanto, Joaquim pagou R$ 49,00 por 14 pacotes de figurinha.

17. a)

Quantidade de semanas trabalhadas	Quantidade de peças produzidas
1	15
2	$2 \cdot 15 = 30$
3	$3 \cdot 15 = 45$
4	$4 \cdot 15 = 60$
5	$5 \cdot 15 = 75$
7	$7 \cdot 15 = 105$

b) As grandezas são diretamente proporcionais, pois, aumentando a quantidade de semanas trabalhadas, a quantidade de peças produzidas aumenta proporcionalmente, ou seja, duplicando o número de semanas, a quantidade de peças também será duplicada; triplicando o número de semanas, a quantidade de peças também será triplicada; e assim por diante.

c) Considerando x a quantidade de semanas para produzir 300 peças, pode-se escrever a seguinte proporção:

$$\frac{1}{15} = \frac{x}{300}$$

$$15 \cdot x = 1 \cdot 300$$

$$15x = 300$$

$$x = \frac{300}{15}$$

$$x = 20$$

Logo, serão necessárias 20 semanas para Carol produzir 300 peças.

d) Considerando y a quantidade de peças que serão produzidas em 12 semanas, pode-se escrever a seguinte proporção:

$$\frac{1}{15} = \frac{12}{y}$$

$$1 \cdot y = 15 \cdot 12$$

$$y = 180$$

Portanto, em 12 semanas Carol consegue produzir 180 peças.

18. Considerando h a quantidade de horas de festa que a comida durará para 8 pessoas a mais, ou seja, para 48 pessoas, tem-se:

$$\begin{gathered}\frac{40}{48} = \frac{h}{6}\\ 40 \cdot 6 = 48 \cdot h\\ 240 = 48h\\ \frac{240}{48} = h\\ 5 = h\end{gathered}$$

Portanto, a comida durará 5 horas.

19. Considerando x a quantidade de dias que durará o estoque de alimentos com 100 marinheiros a mais, ou seja, para uma tripulação com 900 marinheiros, tem-se:

$$\begin{gathered}\frac{800}{900} = \frac{x}{45}\\ 800 \cdot 45 = 900 \cdot x\\ 36\,000 = 900x\\ \frac{36\,000}{900} = x\\ 40 = x\end{gathered}$$

Portanto, o estoque de alimentos vai durar 40 dias com 100 marinheiros a mais.

20. **a)** As grandezas são inversamente proporcionais, pois aumentando a quantidade de vencedores, o prêmio para cada vencedor diminui proporcionalmente.

b) Para x, pode-se montar a seguinte proporção:

$$\begin{gathered}\frac{4}{x} = \frac{4\,000}{15\,000}\\ 4\,000 \cdot x = 4 \cdot 15\,000\\ 4\,000x = 60\,000\\ x = \frac{60\,000}{4\,000}\\ x = 15\end{gathered}$$

E para y, tem-se:

$$\begin{gathered}\frac{4}{12} = \frac{y}{15\,000}\\ 12 \cdot y = 4 \cdot 15\,000\\ 12y = 60\,000\\ y = \frac{60\,000}{12}\\ y = 5\,000\end{gathered}$$

c) O valor total do prêmio é pago quando há apenas um vencedor. Como 1 é metade de 2, então o prêmio será multiplicado por 2:

$$30\,000 \cdot 2 = 60\,000$$

Portanto, o valor total do prêmio é 60 mil reais.

d) Considerando o valor total do prêmio e sabendo que a quantidade total de vencedores foi multiplicada por 120, o valor total será dividido por 120:

$$\frac{60\,000}{120} = 500$$

Portanto, cada um dos 120 vencedores receberia 500 reais.

PÁGINA 192 – DIVERSIFICANDO

1. **a)** $\frac{4}{5}$ ou $4 : 5$

b) Considerando x a quantidade de arremessos certos, tem-se:

$$\begin{gathered}\frac{4}{5} = \frac{x}{20}\\ 4 \cdot 20 = 5 \cdot x\\ 80 = 5x\\ \frac{80}{5} = x\\ 16 = x\end{gathered}$$

Portanto, Carlos acertou 16 arremessos no total.

2. Considerando x a idade de Marcela, tem-se:

$$\begin{gathered}\frac{4}{5} = \frac{x}{35}\\ 4 \cdot 35 = 5 \cdot x\\ 140 = 5x\\ \frac{140}{5} = x\\ 28 = x\end{gathered}$$

Portanto, Marcela tem 28 anos.

3. A razão entre as medidas do lados vermelhos nos triângulos I e II é $\frac{1}{3}$.

A razão entre as medidas dos lados pretos nos triângulos I e II é $\frac{1{,}5}{4{,}5}$, que pode ser simplificada para $\frac{1}{3}$.

Logo, as razões são iguais.

4. **a)** Razão de 10 para 5, ou seja: $\frac{10}{5}$

b) Considerando x a quantidade de trigo, tem-se:

$$\begin{gathered}\frac{10}{5} = \frac{x}{20}\\ 5 \cdot x = 10 \cdot 20\\ 5x = 200\\ x = \frac{200}{5}\\ x = 40\end{gathered}$$

Logo, serão necessários 40 kg de trigo para fazer 20 kg de farinha.

5. Considerando x o total de pessoas, tem-se:

$$\begin{gathered}\frac{3}{7} = \frac{24}{x}\\ 3 \cdot x = 7 \cdot 24\\ 3x = 168\\ x = \frac{168}{3}\\ x = 56\end{gathered}$$

Logo, 56 pessoas participaram da eleição.

6. Sendo a o número de acertos, tem-se:

$$\begin{gathered}\frac{7}{10} = \frac{a}{50}\\ 10 \cdot a = 7 \cdot 50\\ 10a = 350\\ a = \frac{350}{10}\\ a = 35\end{gathered}$$

Como são 50 questões, Caio errou 15 questões, pois $50 - 35 = 15$.

Portanto, Caio acertou 35 questões e errou 15 questões.

7. Considerando x a quantia recebida por 12 dias de trabalho, tem-se:

$$\begin{gathered}\frac{10}{1\,800} = \frac{12}{x}\\ 10 \cdot x = 1\,800 \cdot 12\\ 10x = 21\,600\\ x = \frac{21\,600}{10}\\ x = 2\,160\end{gathered}$$

Logo, Rita receberia R$ 2 160,00 por 12 dias de trabalho.

8. Considerando a o valor que Marília paga pelo aluguel, tem-se:

$$\begin{gathered}\frac{a}{3\,600} = \frac{7}{25}\\ a \cdot 25 = 7 \cdot 3\,600\\ 25a = 25\,200\\ a = \frac{25\,200}{25}\\ a = 1\,008\end{gathered}$$

Logo, Marília paga R$ 1 008,00 de aluguel.

Como o salário dela é R$ 3 600,00, sobram R$ 2 592,00, pois $3\,600 - 1\,008 = 2\,592$.

Com lazer, Marília gasta $\frac{3}{25}$ de R$ 2 592,00:

$$\frac{3}{25} \cdot 2\,592 = \frac{3 \cdot 2\,592}{25} = 311{,}04$$

Portanto, Marília gasta R$ 311,04 por mês com lazer.

9. **a)** Relações Internacionais (São Paulo):

$\frac{1\,982}{42} \simeq 47$

Medicina (São Paulo): $\frac{15\,224}{122} \simeq 125$

Ciências Biológicas (São Paulo):

$\frac{1\,263}{84} \simeq 15$

Computação: $\frac{3\,931}{247} \simeq 16$

Música (Ribeirão Preto): $\frac{62}{30} \simeq 2$

Psicologia (São Paulo): $\frac{3\,048}{49} \simeq 62$

Engenharia Elétrica e de Computação (São Carlos): $\frac{1187}{114} \simeq 10$

Química Bacharelado e Licenciatura (São Paulo): $\frac{502}{84} \simeq 6$

Filosofia (São Paulo): $\frac{553}{119} \simeq 5$

b) A carreira mais concorrida é a de Medicina, pois há 125 candidatos por vaga, e a menos concorrida é a de Música, pois há 2 candidatos por vaga.

10. Considerando x o número de pessoas que compraram pão integral, tem-se:

$$\begin{gathered}\frac{2}{3} = \frac{x}{360}\\ 2 \cdot 360 = 3 \cdot x\\ 720 = 3x\\ x = \frac{720}{3}\\ x = 240\end{gathered}$$

Portanto, 240 pessoas compraram pão integral.

11. a) Sim. Aumentando a metragem de muro a ser construído por um pedreiro, o tempo para a construção também aumenta proporcionalmente. Logo, as grandezas são diretamente proporcionais.

b) Não, pois aumentar a massa não necessariamente significa aumentar ou diminuir a altura de uma pessoa.

c) Sim. Ao aumentar a quantidade de funcionários, o tempo de produção das meias será diminuído proporcionalmente. Logo, as grandezas são inversamente proporcionais.

12. a) As grandezas são inversamente proporcionais, pois quanto maior a quantidade de lojas para distribuir as bermudas, menos bermudas serão distribuídas em cada uma delas.

b) $\frac{240}{4} = 60$

Logo, cada loja receberá 60 bermudas.

c) Considerando x a quantidade de lojas que receberão 40 bermudas cada uma, tem-se:

$$\frac{4}{x} = \frac{40}{60}$$
$$40 \cdot x = 4 \cdot 60$$
$$40x = 240$$
$$x = \frac{240}{40}$$
$$x = 6$$

Logo, as bermudas precisam ser distribuídas entre 6 lojas.

13. A quantidade de pacotes de pão de forma e a quantidade de sanduíches são diretamente proporcionais. Então, sendo x o número de pacotes de pão de forma para fazer 210 sanduíches, tem-se:

$$\frac{6}{x} = \frac{126}{210}$$
$$126 \cdot x = 6 \cdot 210$$
$$126x = 1\,260$$
$$x = \frac{1\,260}{126}$$
$$x = 10$$

Logo, Kelly vai usar 10 pacotes do mesmo pão de forma.

14. Maria tem disponíveis R$ 168,00 para comprar escovas de dente, pois $24 \cdot 7 = 168$.

Preço de uma escova de dente (R$)	Quantidade de escovas de dente
7,00	24
6,00	168 : 6 = 28
8,00	168 : 8 = 21
168 : 84 = 2	84
12,00	168 : 12 = 14
168 : 336 = 0,5	336
21,00	168 : 21 = 8

Portanto, o menor preço encontrado por Maria foi R$ 0,50.

15. A quantidade de porcos e a quantidade de dias que a ração dura são inversamente proporcionais. Considerando x a quantidade de porcos que serão alimentados por 6 dias, tem-se:

$$\frac{24}{x} = \frac{6}{5}$$
$$6 \cdot x = 24 \cdot 5$$
$$6x = 120$$
$$x = \frac{120}{6}$$
$$x = 20$$

Assim, a quantidade de ração alimenta 20 porcos em 6 dias e, portanto, devem ser vendidos 4 porcos, pois $24 - 20 = 4$.

16. Resposta pessoal.

CAPÍTULO 2 – PORCENTAGEM

PÁGINA 200 – ATIVIDADES

1. a) $\frac{20}{100}$; 0,20

b) $\frac{5}{100}$; 0,05

c) $\frac{130}{100}$; 1,30

d) $\frac{18{,}6}{100}$; 0,186

e) $\frac{2{,}25}{100}$; 0,0225

f) $\frac{0{,}54}{100}$; 0,0054

2. a) $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 10\%$

b) $\frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 12\%$

c) $\frac{33}{75} = \frac{11}{25} = \frac{44}{100} = 44\%$

d) $\frac{14}{56} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25 = 25\%$

e) $\frac{3}{2} = 1{,}5 = \frac{15}{10} = \frac{150}{100} = 150\%$

f) $\frac{17}{40} = 17 : 40 = 0{,}425 = 42{,}5\%$

3. a) Calcular 10% de um número é o mesmo que dividir esse número por 10:

$$\frac{20\,000}{10} = 2\,000$$

Logo, 10% de 20 000 é 2 000.

b) Calcular 25% de um número é o mesmo que dividir esse número por 4:

$$\frac{20\,000}{4} = 5\,000$$

Logo, 25% de 20 000 é 5 000.

c) Calcular 40% de um número é o mesmo que fazer 4 · 10% desse número:

$$4 \cdot \frac{20\,000}{10} = 4 \cdot 2\,000 = 8\,000$$

Logo, 40% de 20 000 é 8 000.

d) Calcular 75% de um número é o mesmo que multiplicar esse número por $\frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4} \cdot 20\,000 = 3 \cdot 5\,000 = 15\,000$$

Logo, 75% de 20 000 é 15 000.

4. a) Pode-se apertar as seguintes teclas:

3 2 0 × 3 0 % =

No visor aparecerá:

96

Logo, 30% de 320 é 96.

b) Pode-se apertar as seguintes teclas:

5 0 × 1 8 % =

No visor aparecerá:

9

Logo, 18% de 50 é 9.

c) 0 . 1 3 × 2 4 0 0 =

No visor aparecerá:

312

Logo, 13% de 2 400 é 312.

d) 1 1 0 0 × 0 . 0 8 =

No visor aparecerá:

8.8

Logo, 0,8% de 1 100 é 8,8.

5. a) Considerando x a porcentagem a ser determinada, tem-se:

Número	Porcentagem
31 200	100
1 872	x

$$31\,200 \cdot x = 1\,872 \cdot 100$$
$$31\,200x = 187\,200$$
$$x = \frac{187\,200}{31\,200}$$
$$x = 6$$

Logo, 1 872 corresponde a 6% de 31 200.

b) Considerando x a porcentagem a ser determinada, tem-se:

Número	Porcentagem
73 000	100
912,5	x

$$73\,000 \cdot x = 912{,}5 \cdot 100$$
$$73\,000x = 91\,250$$
$$x = \frac{91\,250}{73\,000}$$
$$x = 1{,}25\%$$

Portanto, 912,5 corresponde a 1,25% de 73 000.

6. Como o desconto é de 10%, então Rosana pagou 90% de 120:

$$0{,}90 \cdot 120 = 108$$

Logo, Rosana pagou R$ 108,00 pela saia.

7. Como o aumento é de 20%, o novo valor do aparelho de som será 120% de 240:

$$1{,}20 \cdot 240 = 288$$

Logo, Armando está cobrando R$ 288,00 pelo aparelho de som em sua loja.

8. **a)** Não, o produto estava mais caro no dia 1º de junho.

b) Mais barato, pois houve redução de 50% no preço do dia 1º de junho.

c) 50% de R$ 800,00 correspondem à metade do valor, ou seja, R$ 400,00.

d) O novo preço do celular no dia 10 de junho é R$ 400,00, pois $800 - 400 = 400$.

9. **a)** Um aumento de 38% é o mesmo que multiplicar o valor dado por 1,38. Assim, pode-se apertar as seguintes teclas:

1 5 × 1 . 3 8 =

No visor aparecerá:

20.7

Portanto, depois do aumento, o produto passou a custar R$ 20,70.

b) Um desconto de 69% é o mesmo que multiplicar o valor dado por 0,31, pois $100\% - 69\% = 31\% = 0{,}31$. Assim, pode-se apertar as seguintes teclas:

0 . 3 1 × 3 4 2 8 =

No visor aparecerá:

1062.68

Portanto, depois do desconto, o produto passou a custar R$ 1 062,68.

c) Um desconto de 23,4% é o mesmo que multiplicar o valor dado por 0,766, pois $100\% - 23{,}4\% = 76{,}6\% = 0{,}766$. Assim, pode-se apertar as seguintes teclas:

0 . 7 6 6 × 1 0 0 =

No visor aparecerá:

76.6

Portanto, depois do desconto, o produto passou a custar R$ 76,60.

10. **a)** O valor da multa corresponde a 12,5% de R$ 60,00:

$$\frac{12{,}5}{100} \cdot 60 = 0{,}125 \cdot 60 = 7{,}5$$

A conta de agosto é composta do valor da multa (R$ 7,50) mais o consumo de agosto (R$ 63,00), logo:

$$63{,}00 + 7{,}50 = 70{,}50$$

Portanto, Eliana pagará R$ 70,50 na conta de agosto.

b) Considerando x como a porcentagem a ser determinada, tem-se:

Valor (R$)	Porcentagem
60,00	100
63,00	x

$$60{,}00 \cdot x = 63{,}00 \cdot 100$$
$$60x = 6\,300$$
$$x = \frac{6\,300}{60}$$
$$x = 105$$

Portanto, o consumo do mês de agosto representa 105% do consumo do mês de julho.

11. **a)** Pode-se primeiro calcular 15% de R$ 6 400,00 e depois subtrair o valor do desconto do valor inicial do produto:

$$0{,}15 \cdot 6\,400 = 960$$
$$6\,400 - 960 = 5\,440$$

Com o desconto, o preço do produto passou a ser R$ 5 440,00.

b) Um desconto de 10% sobre o valor da liquidação corresponde a 90% desse valor, assim:

$$0{,}90 \cdot 5\,440 = 4\,896$$

Essa pessoa queria pagar R$ 4 896,00.

c) Um desconto de 25% sobre o valor inicial do produto corresponde a 75% desse valor, assim:

$$0{,}75 \cdot 6\,400 = 4\,800$$

Logo, o preço do produto com 25% de desconto é R$ 4 800,00, mais barato que o encontrado no item anterior.

d) Porque os descontos foram aplicados sobre valores diferentes de uma mesma mercadoria.

Ou seja, os descontos sucessivos de 15% e 10% correspondem a um único desconto de 23,5%, pois:

$$0{,}85 \cdot 0{,}90 = 0{,}765 = 76{,}5\%$$
$$100\% - 76{,}5\% = 23{,}5\%$$

12. Resposta pessoal.

PÁGINA 201 – DIVERSIFICANDO

1. O valor do carro, R$ 50 000,00, corresponde a 100%. Como o prejuízo foi de 20% no valor do carro, então Tomás vendeu o carro por 80% do valor, pois:

$$100\% - 20\% = 80\%$$

Assim, deve-se calcular 80% de 50 000.

$$80\% \text{ de } 50\,000 = \frac{80}{100} \text{ de } 50\,000 =$$
$$= 0{,}8 \cdot 50\,000 = 40\,000$$

Portanto, Tomás vendeu o carro por R$ 40 000,00.

2. O valor da conta, R$ 160,00, corresponde a 100%. Como o acréscimo foi de 10% no valor da conta, o valor da conta mais a comissão representa 110% do valor da conta, pois:

$$100\% + 10\% = 110\%$$

Assim, deve-se calcular 110% de 160.

$$110\% \text{ de } 160 = \frac{110}{100} \text{ de } 160 =$$
$$= 1{,}1 \cdot 160 = 176$$

Logo, o valor total da conta foi R$ 176,00.

3. A palavra reajuste pode indicar tanto um aumento quanto um desconto. Assim, é necessário calcular um aumento de 30% sobre o preço original e um desconto de 30% sobre o preço original.

- Aumento de 30%: $1{,}30 \cdot 175 = 227{,}5$
- Desconto de 30%: $0{,}70 \cdot 175 = 122{,}5$

Portanto, o novo preço da calça pode ser R$ 227,50 ou R$ 122,50.

4. **a)** Como o aumento foi de 2% sobre o salário de R$ 2 000,00, tem-se:

$$\frac{2}{100} \cdot 2\,000 = 40$$

Portanto, Solange recebeu um aumento de R$ 40,00.

b) $2\,000 + 40 = 2\,040$

Portanto, o valor do salário depois do aumento é R$ 2 040,00.

5. Um desconto de 25% corresponde a 75% do valor original, então:

$$\frac{75}{100} \cdot 900 = \frac{3}{4} \cdot 900 = \frac{2\,700}{4} = 675$$

Portanto, esse fogão está sendo vendido por R$ 675,00.

6. Um aumento de 22% corresponde a 122% do valor original, então:

$$\frac{122}{100} \cdot 2\,700 = 1{,}22 \cdot 2\,700 = 3\,294$$

Logo, depois do reajuste em janeiro, o computador custará R$ 3 294,00.

7. Considerando x como a porcentagem a ser determinada, tem-se:

Valor (R$)	Porcentagem
800,00	100
57,60	x

$$800{,}00 \cdot x = 57{,}60 \cdot 100$$
$$800x = 5\,760$$
$$x = \frac{5\,760}{800}$$
$$x = 7{,}2$$

Portanto, a taxa de desconto que a compradora recebeu foi 7,2%.

8. Um acréscimo de 8% sobre R$ 2 300,00 corresponde a 108% de 2 300:

$$\frac{108}{100} \cdot 2\,300 = 1{,}08 \cdot 2\,300 = 2\,484$$

Logo, o preço da geladeira com o acréscimo será R$ 2 484,00. Para determinar o valor de cada uma das três prestações, tem-se:

$$\frac{2\,484}{3} = 828$$

Portanto, o valor de cada prestação na compra a prazo é R$ 828,00.

9. Sendo x o valor do tênis com 15% de desconto, então x corresponde a 85% do valor do tênis. Assim:

Valor (R$)	Porcentagem
x	85
48,00	15

$$15 \cdot x = 48{,}00 \cdot 85$$
$$15x = 4\,080$$
$$x = \frac{4\,080}{15}$$
$$x = 272$$

Logo, Pedro pagou R$ 272,00 pelo tênis.

10. Na calculadora pode-se digitar o valor do salário mínimo e multiplicar pela porcentagem do reajuste:

1 2 1 2 × 4 9 6 % =

No visor aparecerá:

6 011.52

Logo, o valor do salário mínimo deveria ser R$ 6 011,52.

11. a) O valor da casa, R$ 240 000,00, corresponde a 100%. Como ela valoriza 6% ao ano, o valor da casa depois de 1 ano representa 106% do valor de seu valor inicial, pois 100% + 6% = 106%.

Assim, deve-se calcular 106% de 240 000:

106% de 240 000 = $\frac{106}{100}$ de 240 000 =

= 1,06 · 240 000 = 254 400

Logo, o valor total da casa após 1 ano será R$ 254 400,00.

b) Como a casa valoriza 6% ao ano, tem-se:

1º ano: R$ 254 400,00

2º ano: 1,06 · 254 400 = 269 664

3º ano: 1,06 · 269 664 = 285 843,84

Portanto, após 3 anos, o valor da casa será R$ 285 843,84.

PÁGINA 202 - AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. a) João: 10 000 + 0,50 · 10 000 =

= 10 000 + 5 000 = 15 000

Portanto, ao final de um ano, João pagou R$ 15 000,00 ao banco.

Maria: 10 000 + 0,08 · 10 000 =

= 10 000 + 800 = 10 800

Portanto, ao final de um ano, Maria recebeu R$ 10 800,00 do banco.

b) A diferença entre o juro pago por João e o juro recebido por Maria foi R$ 4 200,00, pois 15 000 − 10 800 = 4 200.

c) Respostas pessoais.

PÁGINA 204 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. a) $\frac{5}{3} = \frac{x}{9}$

$3 \cdot x = 5 \cdot 9$

$3x = 45$

$x = \frac{45}{3}$

$x = 15$

Logo, $x = 15$.

b) $\frac{2}{9} = \frac{7}{x}$

$2 \cdot x = 9 \cdot 7$

$2x = 63$

$x = \frac{63}{2}$

$x = 31{,}5$

Logo, $x = 31{,}5$.

2. Alternativa **b**.

Em 2017 havia, ao todo, 1 800 estudantes (600 + 1 200 = 1 800) e 150 professores, o que corresponde a 12 estudantes por professor $\left(\frac{1\,800}{150} = 12\right)$.

Em 2022 havia, ao todo, 3 000 estudantes (1 200 + 1 800 = 3 000) e 300 professores, o que corresponde a 10 estudantes por professor $\left(\frac{3\,000}{300} = 10\right)$.

Portanto, após o processo de expansão houve variação de 12 estudantes por professor em 2017 para 10 estudantes por professor em 2022.

3. Alternativa **b**.

O setor “assistir à televisão” é o amarelo, cuja porcentagem correspondente é 5%.

Assim, sendo x o tempo, em hora, destinado a ver televisão diariamente, pode-se estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{24}{100} = \frac{x}{5}$$

$$24 \cdot 5 = 100 \cdot x$$

$$120 = 100x$$

$$\frac{120}{100} = x$$

$$1{,}2 = x$$

Portanto, o tempo destinado por um adolescente para ver televisão diariamente é de 1,2 hora.

4. Alternativa **c**.

O aumento de 9,4% corresponde a 1,094 do valor inicial do dólar. Assim:

$$1{,}094 \cdot 5{,}10 = 5{,}5794$$

Portanto, a casa de câmbio C estava vendendo o dólar pelo valor mais próximo do aumento de 9,4%, que corresponde a R$ 5,60.

5. O valor total investido é R$ 400 000,00 (190 000 + 210 000 = 400 000).

Porcentagem correspondente ao investimento de cada sócio:

- Sócio 1: $\frac{190\,000}{400\,000} = 0{,}475 = 47{,}5\%$
- Sócio 2: $\frac{210\,000}{400\,000} = 0{,}525 = 52{,}5\%$

Valor que cada sócio deve receber:

- Sócio 1: 47,5% de R$ 20 000,00

  $\frac{47{,}5}{100} \cdot 20\,000 = 0{,}475 \cdot 20\,000 = 9\,500$

  Logo, o sócio 1 deve receber R$ 9 500,00.

- Sócio 2: 52,5% de R$ 20 000,00

  $\frac{52{,}5}{100} \cdot 20\,000 = 0{,}525 \cdot 20\,000 = 10\,500$

  Logo, o sócio 2 deve receber R$ 10 500,00.

6. Alternativa **b**.

Calculando a razão entre a massa de fibra e a massa de pão, tem-se:

- Marca A: $\frac{2}{50} = 0{,}04 = 4\%$
- Marca B: $\frac{5}{40} = 0{,}125 = 12{,}5\%$
- Marca C: $\frac{5}{100} = 0{,}05 = 5\%$
- Marca D: $\frac{6}{90} \simeq 0{,}067 = 6{,}7\%$
- Marca E: $\frac{7}{70} = 0{,}1 = 10\%$

Logo, o pão integral que apresenta a maior concentração de fibras é o da marca B.

7. Considerando as faltas de Laura como referência, tem-se:

- Mônica tem o dobro do número de faltas de Laura, então deve receber metade do desconto de Laura;
- Patrícia tem o triplo do número de faltas de Laura, então deve receber a terça parte do desconto de Laura;
- Aline tem o quádruplo do número de faltas de Laura, então deve receber a quarta parte do desconto de Laura.

  Sendo x o valor do desconto que Laura recebeu, tem-se:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 500$$

$$\frac{12x + 6x + 4x + 3x}{12} = \frac{6\,000}{12}$$

$$25x = 6\,000$$

$$x = \frac{6\,000}{25}$$

$$x = 240$$

Portanto:

- como Mônica recebeu metade do desconto de Laura, ela recebeu R$ 120,00 de desconto $\left(\frac{240}{2} = 120\right)$;
- como Patrícia recebeu a terça parte do desconto de Laura, ela recebeu R$ 80,00 de desconto $\left(\frac{240}{3} = 80\right)$;
- como Aline recebeu a quarta parte do desconto de Laura, ela recebeu R$ 60,00 de desconto $\left(\frac{240}{4} = 60\right)$.

8. Alternativa **d**.

A razão entre o número de homens e o número de mulheres é 2:3, ou seja:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{16}{24} = \ldots$$

A razão entre o número de mulheres e o número de crianças é 8:1, ou seja:

$$\frac{8}{1} = \frac{16}{2} = \frac{24}{3} = \ldots$$

Como para cada 16 homens tem-se 24 mulheres e para cada 24 mulheres tem-se 3 crianças, portanto serão 40 adultos (16 + 24 = 40) para cada 3 crianças.

9. Alternativa **a**.

Havia 4 000 bolinhas de pingue-pongue e, depois de 6 horas, restavam 3 520 bolinhas no tanque, ou seja, o menino retirou 480 bolinhas em 6 horas.

Para que o tanque fique com 2 000 bolinhas, o menino deve retirar 2 000 bolinhas ao todo.

As grandezas bolinhas retiradas e tempo para retirá-las são diretamente proporcionais. Assim:

$$\frac{480}{6} = \frac{2\,000}{x}$$
$$480 \cdot x = 6 \cdot 2\,000$$
$$480x = 12\,000$$
$$x = \frac{12\,000}{480}$$
$$x = 25$$

Portanto, se o menino começou a retirar as bolinhas às 10 horas, para retirar 2000 bolinhas ele terminaria 25 horas depois, ou seja, o tanque ficaria com 2000 bolinhas às 11 horas do dia seguinte.

10. Alternativa **c**.

Considerando x a velocidade prevista para 12 minutos, tem-se:

Velocidade (km/h)	Tempo (minutos)
80	15
x	12

As grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais, pois quanto maior a velocidade, menor o tempo para realizar o percurso. Assim:

$$\frac{80}{x} = \frac{12}{15}$$
$$12 \cdot x = 80 \cdot 15$$
$$12x = 1\,200$$
$$x = \frac{1\,200}{12}$$
$$x = 100$$

Portanto, para que a previsão de Anita se realizasse, a velocidade constante deveria ser 100 km/h.

11. Alternativa **e**.

Como Júlia acertou 70% das 30 questões de Aritmética, tem-se:

$$\frac{70}{100} \cdot 30 = 21$$

Como ela acertou 80% do total de questões e há, ao todo, 80 questões, então:

$$\frac{80}{100} \cdot 80 = 64$$

Logo, Júlia acertou 64 questões ao todo, 21 questões de Aritmética e 43 questões de Geometria, pois 64 − 21 = 43.

Como eram 50 questões de Geometria e Júlia acertou 43, tem-se:

$$\frac{43}{50} = \frac{86}{100} = 0{,}86 = 86\%$$

Portanto, Júlia acertou 86% das questões de Geometria.

12. Alternativa **b**.

Um prisma de base pentagonal tem 10 vértices, e uma pirâmide de base pentagonal tem 6 vértices.

Logo, a razão entre o número de vértices do prisma de base pentagonal e o número de vértices da pirâmide de base pentagonal é de 10 para 6, ou seja, de 5 para 3.

UNIDADE 6 – CIRCUNFERÊNCIA, CÍRCULO E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

CAPÍTULO 1 – CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

PÁGINA 213 – ATIVIDADES

1. **a)** Os raios são segmentos que unem o centro a qualquer outro ponto da circunferência. São eles: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OF}$.

b) As cordas são segmentos cujas extremidades pertencem à circunferência. São elas: $\overline{GE}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{BF}$.

c) Os diâmetros são as cordas que passam pelo centro da circunferência. São eles: $\overline{AD}$ e $\overline{BF}$.

2. Em uma circunferência, a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio.

$$d = 2r$$
$$d = 2 \cdot 6{,}5$$
$$d = 13$$

Logo, o diâmetro mede 13 cm.

3. Em uma circunferência, a medida do raio é a metade da medida do diâmetro.

$$r = \frac{d}{2}$$
$$r = \frac{21}{2}$$
$$r = 10{,}5$$

Logo, o raio mede 10,5 cm.

4. Uma circunferência tem infinitos raios e infinitos diâmetros.

5. A maior corda mede o equivalente à medida de um diâmetro, que é o dobro da medida de seu raio.

$$d = 2r$$
$$d = 2 \cdot 30{,}3$$
$$d = 60{,}6$$

Logo, a maior corda mede 60,6 cm.

6. Como o raio de B mede 7 cm, então:

$$d_B = 2 \cdot r_B$$
$$d_B = 2 \cdot 7$$
$$d_B = 14$$

Portanto, o diâmetro de B mede 14 cm.
Como o raio de A é o triplo do diâmetro de B, então:

$$r_A = 3 \cdot d_B$$
$$r_A = 3 \cdot 14$$
$$r_A = 42$$

Portanto, o raio de A mede 42 cm.
Logo:

$$d_A = 2 \cdot r_A$$
$$d_A = 2 \cdot 42$$
$$d_A = 84$$

Assim, o diâmetro de A mede 84 cm.

7. A medida do diâmetro é o dobro da medida de seu raio.

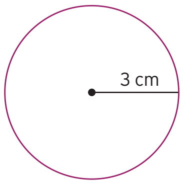
$$x + 10 = 2 \cdot (4x - 2)$$
$$x + 10 = 8x - 4$$
$$-7x = -14$$
$$7x = 14$$
$$x = 2$$

Substituindo $x = 2$ na expressão que determina o raio da circunferência, obtém-se:

$$r = 4x - 2$$
$$r = 4 \cdot 2 - 2$$
$$r = 6$$

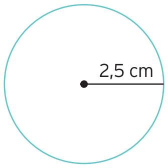
Assim, o raio dessa circunferência mede 6 cm.

8. **a)**

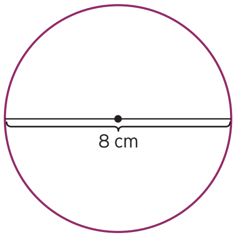


Ilustrações: ID/BR

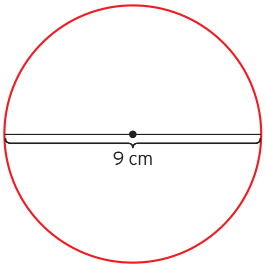
b)



c)



d)



9. **a)** Como a medida angular de um arco é igual à medida do ângulo central associado a ele, o arco $\widehat{AB}$ mede 93°.

b) Como a medida angular de um arco é igual à medida do ângulo central associado a ele, pode-se afirmar que med($B\hat{O}A$) = med($\widehat{AB}$). Assim:

$$2x + 30° = 5x - 90°$$
$$3x = 120°$$
$$x = 40°$$

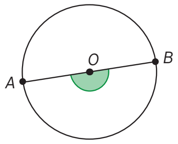
Substituindo $x = 40°$ em uma das duas expressões que determinam a medida do arco $\widehat{AB}$ ou do ângulo central $B\hat{O}A$, obtém-se:

$$\text{med}(B\hat{O}A) = 2x + 30°$$
$$\text{med}(B\hat{O}A) = 2 \cdot 40° + 30°$$
$$\text{med}(B\hat{O}A) = 80° + 30°$$
$$\text{med}(B\hat{O}A) = 110°$$

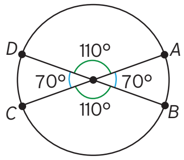
10. 360° − 82° = 278°

Logo, a medida do arco $\widehat{AMB}$ é 278°.

11. A medida do ângulo central de uma circunferência é igual a 360°. Logo, a medida do ângulo central de uma semicircunferência é igual a 180°, isto é, à metade de 360°, como pode ser visto na figura a seguir.



12.



Os arcos $\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{DB}$ e $\overset{\frown}{CA}$ correspondem a semicircunferências, logo $med(\overset{\frown}{BD}) = med(\overset{\frown}{AC}) = med(\overset{\frown}{DB}) = med(\overset{\frown}{CA}) = 180°$.

Então:

- $med(\overset{\frown}{AD}) = med(\overset{\frown}{BD}) - med(\overset{\frown}{BA}) = 180° - 70° = 110°$
- $med(\overset{\frown}{DC}) = med(\overset{\frown}{AC}) - med(\overset{\frown}{AD}) = 180° - 110° = 70°$
- $med(\overset{\frown}{CB}) = med(\overset{\frown}{DB}) - med(\overset{\frown}{DC}) = 180° - 70° = 110°$

13. a) Verdadeira, pois a medida angular de um arco é igual à medida do ângulo central associado a ele.

b) Falsa. Dois ângulos centrais podem ter medidas diferentes, pois cada ângulo central está associado a um arco de circunferência. Portanto, arcos de medida angular diferente serão associados a diferentes medidas do ângulo central.

c) Falsa. Um ângulo central de medida x determina dois arcos na circunferência, sendo um arco de medida x e outro de medida $(360° - x)$, pois o arco que corresponde à circunferência mede 360°.

PÁGINA 214 – DESCUBRA MAIS

PARA CONCLUIR

1. Sim. Se os objetos escolhidos para a atividade têm raios de medidas diferentes, as medidas do comprimento e do diâmetro da circunferência serão diferentes.

2. Espera-se que os estudantes tenham percebido que, embora haja diferenças, o valor da razão está próximo de 3.

3. Resposta pessoal.

4. Para saber a medida do diâmetro, pode-se dividir o valor da medida do comprimento da circunferência por 3,14.

5. $3{,}14 \cdot 5 = 15{,}7$

A medida aproximada do comprimento da circunferência é 15,7 cm.

6. $31{,}4 : 3{,}14 = 10$

A medida do diâmetro da circunferência é 10 cm.

PÁGINA 221 – ATIVIDADES

14. a) Como $d > r$, então o ponto P é externo à circunferência.

b) Como $d < r$, então o ponto P é interno à circunferência.

c) Como $d = r$, então o ponto P pertence à circunferência.

15. r: tangente; a reta e a circunferência têm um único ponto comum;

s: externa; a reta e a circunferência não têm nenhum ponto comum;

t: tangente; a reta e a circunferência têm um único ponto comum;

u: secante; a reta intersecta a circunferência em dois pontos distintos;

v: externa; a reta e a circunferência não têm nenhum ponto comum.

16. a) $d_1 < 15$ cm

b) $d_2 = 15$ cm

c) $d_3 > 15$ cm

17. a) Secante.

Como a medida da distância d é menor que a medida do raio, a reta intersecta a circunferência em dois pontos distintos.

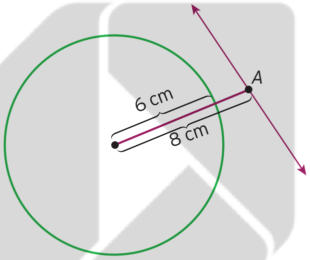
b) Externa.

Como a medida da distância d é maior que a medida do raio, a reta e a circunferência não têm nenhum ponto comum.

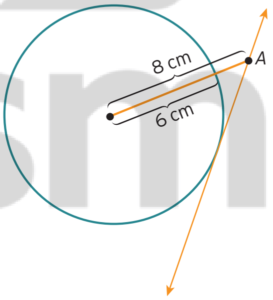
c) Tangente.

Como a medida da distância d é igual à medida do raio, a reta e a circunferência têm um único ponto comum.

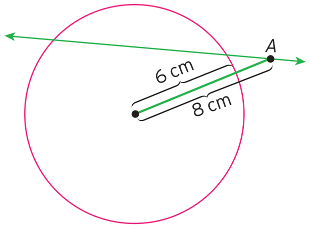
18. a) Resposta possível:



b) Resposta possível:



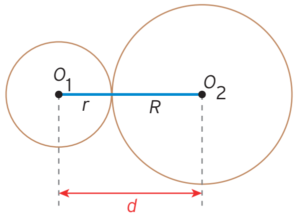
c) Resposta possível:



19. Traçando o segmento $\overline{O_1O_2}$.

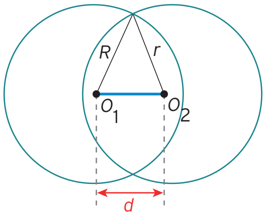
a) Tangentes externas.

$d = R + r$



b) Secantes.

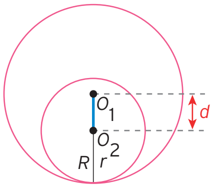
$R - r < d < R + r$



Ilustrações: ID/BR

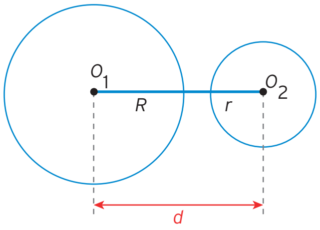
c) Tangentes internas.

$d = R - r$



d) Externas.

$d > R + r$

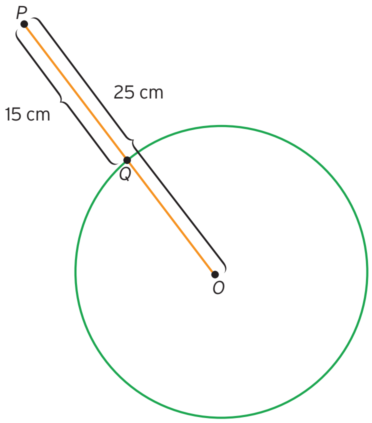


20. a) Como $d = 2$ cm $(2 = 4 - 2)$, então as circunferências são tangentes internas.

b) Como $d = 4$ cm $(4 < 10 - 3)$, então as circunferências são internas.

c) Como $d = 9$ cm $(6 - 4 < 9 < 6 + 4)$, então as circunferências são secantes.

21.



Como a medida de $\overline{PQ}$ é igual a 15 cm e sabendo que P está a 25 cm do centro $(OP = 25)$, tem-se:

$r = OQ$
$r = OP - PQ$
$r = 25 - 15$
$r = 10$

Logo, a medida do raio da circunferência é 10 cm.

PÁGINA 224 – ATIVIDADES

22. a) Circunferência.
b) Círculo.
c) Circunferência.
d) Círculo.

23. 3 setores.

$360° : 120° = 3$

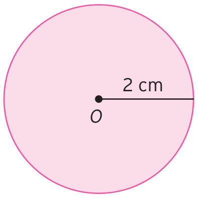
24. a) $360° : 2 = 180°$

O setor circular mede 180°.

b) $360° : 5 = 72°$

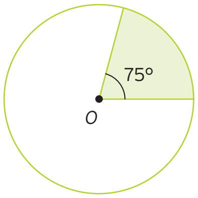
O setor circular mede 72°.

25. a)



Ilustrações: ID/BR

b)



26. a) $60° + 136° + 46° + x = 360°$

$x = 118°$

A medida de x é 118°.

b) $95° + 132° + x = 360°$

$x = 133°$

A medida de x é 133°.

PÁGINA 225 - DIVERSIFICANDO

1. a) A medida do diâmetro da circunferência equivale à medida da maior corda. Então, o diâmetro mede 2,60 m.

b) A medida do raio equivale à metade da medida do diâmetro.

$$r = \frac{d}{2}$$

$$r = \frac{2{,}60}{2}$$

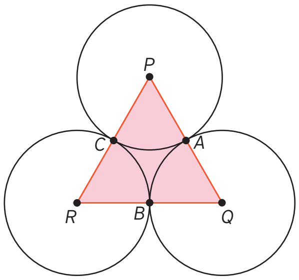
$$r = 1{,}30$$

Logo, o raio dessa circunferência mede 1,30 m.

2. A distância entre o centro de uma circunferência e uma reta tangente a essa circunferência é a distância entre o centro da circunferência e o ponto de tangência e, portanto, igual à medida do raio. Logo, a distância é 13,3 cm.

3. Considerando a antena o centro de uma circunferência de raio medindo 100 m, é possível concluir que a posição dessa pessoa é um ponto interior a essa circunferência, pois 80 m é menor que 100 m. Supondo que os celulares das pessoas que estão posicionadas na circunferência ou no interior dela são afetados, conclui-se que a pessoa não vai conseguir utilizar seu telefone celular.

4. Marcando os pontos onde cada lado do triângulo intersecta as circunferências, tem-se:



Como os raios das três circunferências medem 5 cm, é possível afirmar que:

$$PA = AQ = QB = BR = RC = CP = 5$$

Os segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ e $\overline{RP}$ são os lados do triângulo PQR. Além disso, $PQ = PA + AQ$, $QR = QB + BR$ e $RP = RC + CP$.

Então:

- $PQ = PA + AQ = 10$
- $QR = QB + BR = 10$
- $RP = RC + CP = 10$

Como a medida do perímetro do triângulo PQR é a soma das medidas de seus lados, então:

$$PQ + QR + RP = 10 + 10 + 10 = 30$$

Portanto, a medida do perímetro do triângulo PQR é 30 cm.

5. Como as circunferências são tangentes internas, a distância entre seus centros é igual à diferença entre seus raios.

$$d = r_1 - r_2 = 9$$

$$r_1 + r_2 = 23$$

É possível montar um quadro com as medidas dos raios cuja diferença seja sempre 9 ($r_1 - r_2 = 9$) e analisar a soma das medidas dos raios até encontrar r_1 e r_2 cuja soma seja 23.

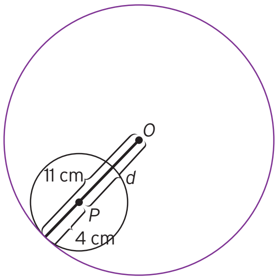
r_1	r_2	$r_1 + r_2$
10	1	11
11	2	13
12	3	15
13	4	17
14	5	19
15	6	21
16	7	23

Outra maneira de resolver é montar um quadro fixando a soma ($r_1 + r_2 = 23$) e analisar as diferenças até encontrar r_1 e r_2 cuja diferença seja 9.

r_1	r_2	$r_1 - r_2$
22	1	21
21	2	19
20	3	17
19	4	15
18	5	13
17	6	11
16	7	9

Portanto, as medidas dos raios das circunferências são $r_1 = 16$ cm e $r_2 = 7$ cm.

6. Fazendo um esboço da situação, tem-se:



Se a medida do diâmetro da circunferência maior mede 22 cm, seu raio mede 11 cm. Se a medida do diâmetro da circunferência menor mede 8 cm, seu raio mede 4 cm. Como as circunferências são tangentes internamente, a distância (d) entre seus centros é a diferença entre as medidas de seus raios (11 − 4 = 7).

Logo, a distância entre os centros das rodas é 7 cm.

7. $(160° - x) + (5x + 20°) + (10x + 40°) = 360°$

$$160° - x + 5x + 20° + 10x + 40° = 360°$$

$$220° + 14x = 360°$$

$$14x = 360° - 220°$$

$$14x = 140°$$

$$x = \frac{140°}{14}$$

$$x = 10°$$

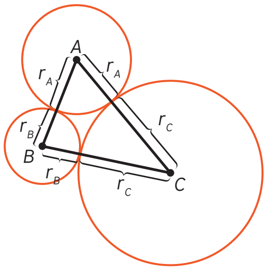
Então:

$$m(\widehat{ABC}) = 10x + 40° + 5x + 20° =$$

$$= 100° + 40° + 50° + 20° = 210°$$

Portanto, o arco $\widehat{ABC}$ mede 210°.

8. Indicando a medida do raio de cada circunferência, tem-se:



Sendo r_A e r_C as medidas dos raios das circunferências de centro A e C, pela figura e pelo enunciado, tem-se:

- $AB = r_A + r_B$
  $22 = r_A + 9$
  $r_A = 13$
- $AC = r_A + r_C$
  $35 = 13 + r_C$
  $r_C = 22$

Logo, as medidas dos raios das circunferências de centro A e C são 13 cm e 22 cm, respectivamente.

9. Resposta pessoal.

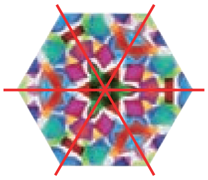
10. O local mais adequado é posicionar o hospital no centro de uma circunferência, de modo que a escola, o estádio e o *shopping* fiquem localizados na circunferência.

CAPÍTULO 2 – TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

PÁGINA 228 – ATIVIDADES

1. a) Sim. **b)** Sim. **c)** Sim. **d)** Não.

2. Observando a figura, deve-se perceber que é possível traçar três eixos de simetria.



Alfred Pasieka/SPL/Fotoarena

PÁGINA 229 – DESCUBRA MAIS

PARA CONCLUIR

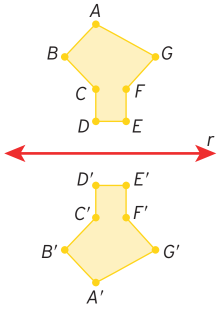
1. Sim, pois ao dobrar a folha para traçar cada eixo, obtêm-se duas figuras exatamente iguais.

2. Não há outros eixos de simetria, pois não há outras maneiras de dobrar a folha de modo que se obtenham duas figuras simétricas em relação à dobra.

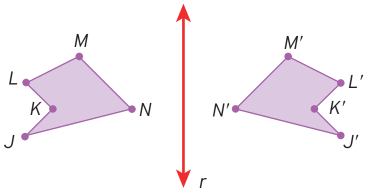
3. Resposta pessoal. São 6 eixos de simetria em um hexágono regular.

PÁGINA 233 – ATIVIDADES

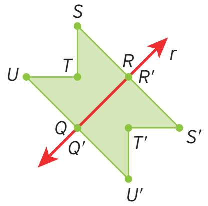
3. a)



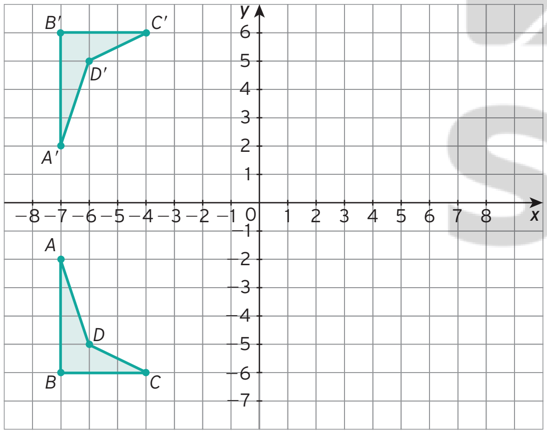
b)



c)

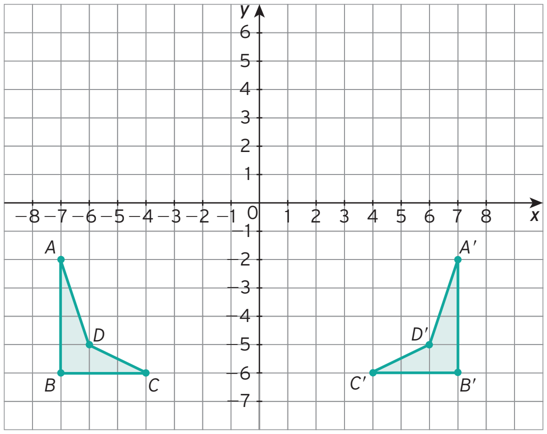


4. a)



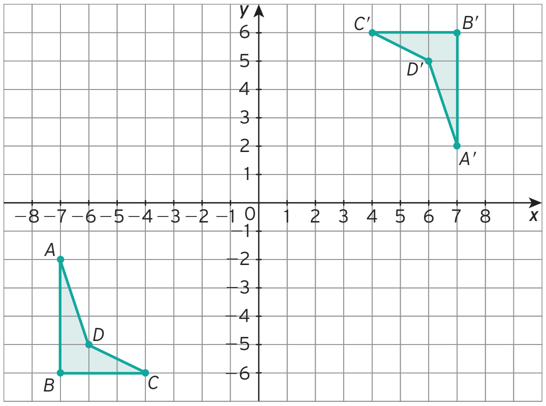
A′(−7, 2), B′(−7, 6), C′(−4, 6) e D′(−6, 5).

b)



A′(7, −2), B′(7, −6), C′(4, −6) e D′(6, −5).

c)



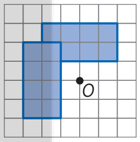
Ilustrações: ID/BR

A′(7, 2), B′(7, 6), C′(4, 6) e D′(6, 5).

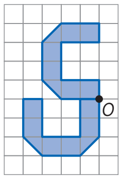
PÁGINA 236 – ATIVIDADES

5. a) Não pode ser obtida com uma rotação, mas com uma reflexão em relação a uma reta vertical.
   b) Sim. Pode ser obtida com uma rotação de 90° no sentido horário, ou com uma rotação de 270° no sentido anti-horário.
   c) Sim. Pode ser obtida com uma rotação de 180° no sentido horário ou no sentido anti-horário.
   d) Não pode ser obtida com uma rotação, mas com uma reflexão em relação a uma reta horizontal.

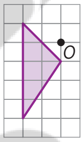
6. a)



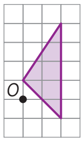
b)



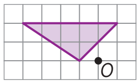
7. a)



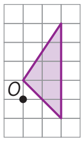
b)



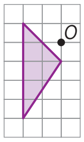
c)



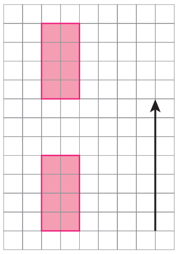
d)



e)



8. Resposta possível:

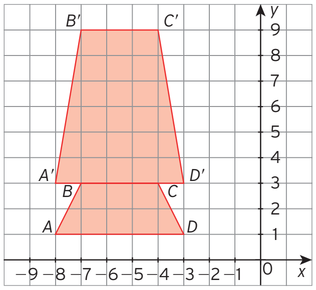


9. Resposta pessoal.

PÁGINA 238 – ATIVIDADES

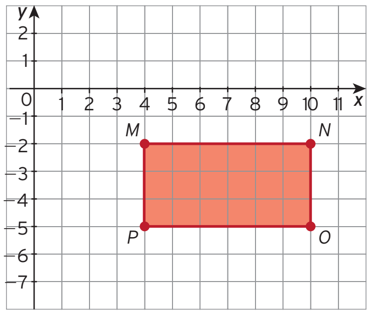
10. a) As coordenadas dos vértices do trapézio *ABCD* são:
    A(−8, 1), *B*(−7, 3), *C*(−4, 3) e *D*(−3, 1).
    Multiplicando as ordenadas por 3, obtêm-se:
    A′(−8, 3), *B*′(−7, 9), *C*′(−4, 9) e *D*′(−3, 3).

b)



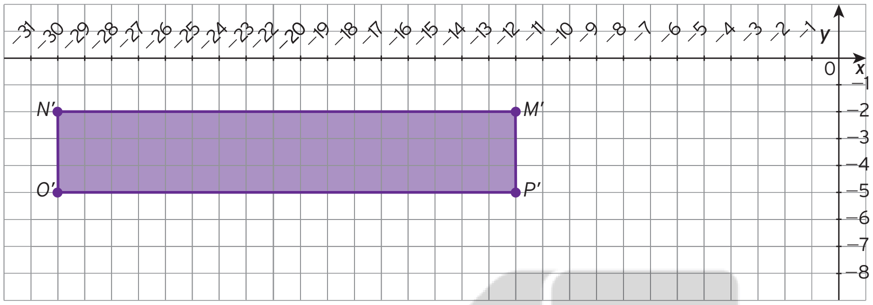
c) Houve uma deformação no trapézio original e sua altura triplicou, porém a figura permaneceu no 2º quadrante.

11.



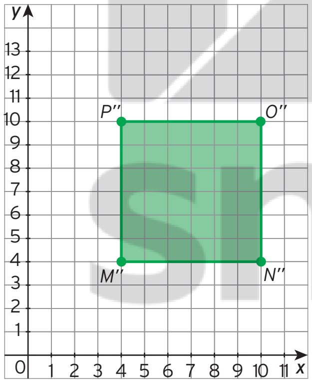
Ilustrações: ID/BR

a) Multiplicando as abscissas por −3, obtêm-se:
M′(−12, −2), *N*′(−30, −2), *O*′(−30, −5), *P*′(−12, −5)



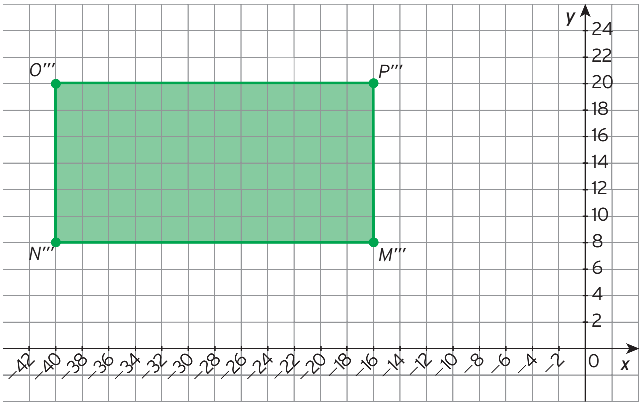
O retângulo será levado para o 3º quadrante, a medida da base será triplicada e a medida da altura, mantida. A figura original sofrerá deformação, porém continuará sendo um retângulo.

b) Multiplicando as ordenadas por −2, obtêm-se:
M′′(4, 4), *N*′′(10, 4), *O*′′(10, 10), *P*′′(4, 10)



O retângulo será levado para o 1º quadrante, a medida da base será mantida e a medida da altura, duplicada. A figura original sofrerá deformação e passará a ser um quadrado.

c) Multiplicando as abscissas e as ordenadas por −4, obtêm-se:
M′′′(−16, 8), *N*′′′(−40, 8), *O*′′′(−40, 20), *P*′′′(−16, 20)

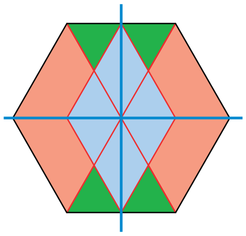


O retângulo será levado para o 2º quadrante e ampliado duas vezes.

12. As coordenadas da figura original são:
$A(-9, 5)$, $B(-7, 2)$, $C(-6, 3)$, $D(-5, 2)$ e $E(-3, 5)$.
As coordenadas da figura obtida após a transformação são:
$A'(-9, -10)$, $B'(-7, -4)$, $C'(-6, -6)$, $D'(-5, -4)$ e $E'(-3, -10)$.
Comparando os pares de vértices correspondentes, podemos afirmar que é possível obter a figura $A'B'C'D'E'$ a partir de $ABCDE$ multiplicando-se a ordenada de cada vértice da figura original por -2.

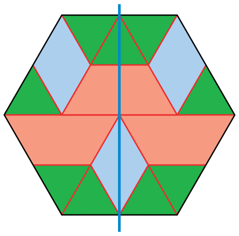
PÁGINA 239 – DIVERSIFICANDO

1. **a)**



2 eixos.

b)



1 eixo.

Ilustrações: ID/BR

2. **a)** B, A, D e C, respectivamente.

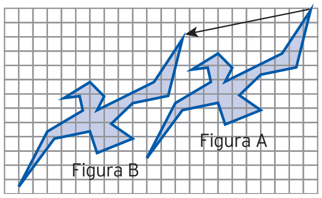
b) $\overline{MP}$, $\overline{PR}$, $\overline{RT}$ e $\overline{TM}$, respectivamente.

c) 5 cm, pois o segmento $\overline{DA}$ é simétrico ao segmento $\overline{TM}$. Resposta pessoal.

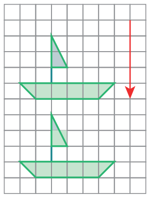
d) 90°

3. Resposta pessoal.

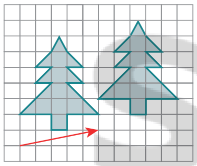
4. Resposta possível:



5. **a)**



b)



6. Para garantir que o polígono está completamente no 4º quadrante, todos os vértices da figura devem estar localizados no 4º quadrante, as abscissas devem ser positivas e as ordenadas, negativas.

a) Resposta pessoal. **b)** Resposta pessoal. **c)** Resposta pessoal.

7. Resposta pessoal. Maurits Cornelis Escher nasceu no dia 17 de junho de 1898, em uma cidade chamada Leewarden, na Holanda; faleceu em 27 de março de 1972. Frequentou a Escola de Artes Arquitetônicas e Decorativas de Haarlem, na Holanda, e se especializou em artes gráficas. Inspirado pelos mosaicos dos palácios árabes e por desenhos complexos das estruturas das mesquitas, Escher desenvolveu uma técnica de inserir polígonos, figura e formas sem alterar o desenho original, além de representar o espaço tridimensional em um plano, o que resultou em obras de ilusão de ótica.

Fonte de pesquisa: *Guia das Artes*. Disponível em: https://www.guiadasartes.com.br/maurits-cornelis-escher/obras-e-biografia. Acesso em: 1º jul. 2022.

PÁGINA 240 – RESOLVENDO PROBLEMAS

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

1. Não.

2. Júlia leu 9 vezes a quantidade de páginas que leu no primeiro dia mais 15 páginas, e Lucas leu 8 vezes a quantidade de páginas que leu no primeiro dia mais 27 páginas.

3. Sim, pois os dois terminaram de ler o livro depois de uma semana.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

1. Resposta pessoal.

2. Considerando que a incógnita escolhida na atividade anterior tenha sido a letra a, pode-se representar algebricamente a relação encontrada por Júlia e Lucas da seguinte maneira:
$9a + 15 = 8a + 27$.

3. Sim. Resposta possível: Resolvendo a equação obtida no item anterior.

4. Considerando a a quantidade de páginas lidas, tem-se:

$$9a + 15 = 8a + 27$$
$$9a - 8a + 15 = 8a - 8a + 27$$
$$a + 15 = 27$$
$$a + 15 - 15 = 27 - 15$$
$$a = 12$$

Portanto, cada um deles leu 12 páginas no primeiro dia.

REFLEXÃO SOBRE O PROBLEMA

1. Respostas pessoais.
2. Respostas pessoais.
3. Resposta pessoal.
4. Resposta pessoal.
5. Respostas pessoais.
6. Respostas pessoais.

MAIS PROBLEMAS

1. Uma das maneiras de resolver esse problema é identificar o valor fixo a ser pago e a quantia paga por quilômetro rodado das duas empresas e, além disso, perceber que o valor final das duas empresas é o mesmo. Após as identificações, deve ser realizada a montagem das sentenças. Para isso, representa-se a quantidade de quilômetros por x.

$$240 + 12x \text{ (empresa 1)}$$
$$250 + 10x \text{ (empresa 2)}$$

Agora, escreve-se uma igualdade, já que o valor final das duas empresas é o mesmo.

$$240 + 12x = 250 + 10x$$
$$240 + 12x - 10x = 250 + 10x - 10x$$
$$240 + 2x = 250$$
$$240 + 2x - 240 = 250 - 240$$
$$2x = 10$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$
$$x = 5$$

Então, a medida da distância entre os dois endereços é igual a 5 quilômetros.

2. É importante perceber que as duas irmãs tinham a mesma quantia em dinheiro para gastar com os jogos de *videogame*. Ou seja: quantia de Bruna = quantia de Camila.
Agora, é preciso analisar a situação de cada irmã. Para isso, representa-se o valor de cada jogo de *videogame* pela letra x.

- Bruna queria comprar 5 jogos, mas percebeu que faltariam 4 reais. Pode-se representar a quantia que ela tinha por:
  $5x - 4$ (I)
- Camila comprou 3 jogos e ainda ficou com 10 reais. Pode-se representar a quantia que ela tinha por:
  $3x + 10$ (II)
- Agora, pode-se voltar à igualdade indicada anteriormente:
  (quantia de Bruna = quantia de Camila) e substituir pelas relações encontradas em (I) e (II). Assim:

$$5x - 4 = 3x + 10$$
$$5x - 4 - 3x = 3x + 10 - 3x$$
$$2x - 4 = 10$$
$$2x - 4 + 4 = 10 + 4$$
$$2x = 14$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}$$
$$x = 7$$

Portanto, cada jogo de *videogame* custa R$ 7,00.

3. Representando o valor dos panfletos pela incógnita P, tem-se:

- Fernanda pagou: $\frac{1}{3}P + 160$
- Priscila pagou: $\frac{3}{4}P + 60$

Como Fernanda e Priscila pagaram o mesmo valor, tem-se:

$$\frac{1}{3}P + 160 = \frac{3}{4}P + 60$$

Resolvendo a equação, tem-se:

$$\frac{1}{3}P + 160 = \frac{3}{4}P + 60$$
$$\frac{4P + 1920}{12} = \frac{9P + 720}{12}$$
$$4P + 1920 = 9P + 720$$
$$4P + 1920 - 4P = 9P + 720 - 4P$$
$$1920 - 720 = 5P + 720 - 720$$
$$1200 = 5P$$
$$\frac{1200}{5} = \frac{5P}{5}$$
$$P = 240$$

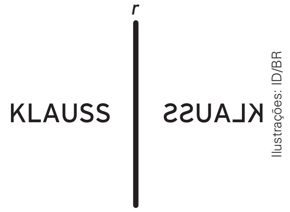
Então, tanto Fernanda quanto Priscila pagaram R$ 240,00 pelos panfletos.

PÁGINA 242 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Alternativa **e**.
   - **a)** Falsa. $\overline{AE}$ representa um segmento.
   - **b)** Falsa. $\overline{BD}$ representa o diâmetro.
   - **c)** Falsa. $\overline{DA}$ representa uma corda.
   - **d)** Falsa. A reta s intersecta a circunferência em dois pontos distintos, logo é secante à circunferência.
   - **e)** Verdadeira.

2. Alternativa **d**.

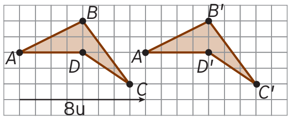
   A imagem observada no espelho é equivalente ao resultado da reflexão da imagem original em relação a uma reta horizontal.



Ilustrações: ID/BR

3. **a)** Falsa. Uma figura obtida por rotação mantém a mesma forma e as mesmas medidas que a figura original.
   - **b)** Verdadeira.
   - **c)** Verdadeira.
   - **d)** Verdadeira.
   - **e)** Falsa. Uma figura obtida por reflexão mantém a mesma forma e o mesmo tamanho que a figura original, porém em posição invertida.

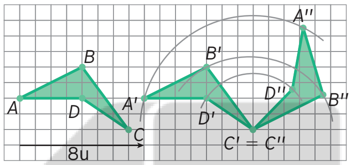
4. **a)** Considerando o lado do quadradinho da malha quadriculada como uma unidade, adicionam-se 8 unidades às abscissas dos vértices da figura original. Assim, obtém-se a figura transladada 8 unidades para a direita na direção horizontal.



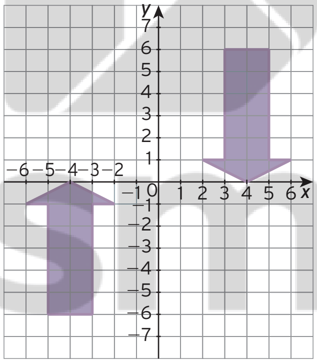
b) Para realizar a rotação em torno de C', com a ponta-seca do compasso em C' e raio $\overline{C'D'}$, traça-se um arco de circunferência em sentido horário. Repete-se o procedimento com a ponta-seca do compasso em C' e raio $\overline{C'B'}$ e, em seguida, em C' e raio $\overline{C'A'}$.

Coloca-se o centro do transferidor no centro de rotação, que, nesse caso, é o ponto C'. Alinha-se a marcação 0° do transferidor com o segmento $\overline{C'A'}$ e assinala-se, no arco que passa por A', o ponto A'' correspondente a 100°.

Repete-se o procedimento anterior para os pontos B' e D', e obtêm-se os pontos B'' e D''. Marca-se um ponto C'' coincidente a C'. Unindo A'', B'', C'' e D'', obtém-se um quadrilátero que é imagem do quadrilátero $A'B'C'D'$, por uma rotação de 100° em torno do ponto C', no sentido horário.



5. **a)** Multiplicando as coordenadas dos vértices da figura original por −1, obtêm-se os vértices da figura simétrica em relação à origem.

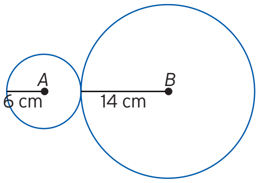


b) $(-2, -1)$; $(-3, -1)$; $(-3, -6)$; $(-5, -6)$; $(-5, -1)$; $(-6, -1)$; $(-4, 0)$.

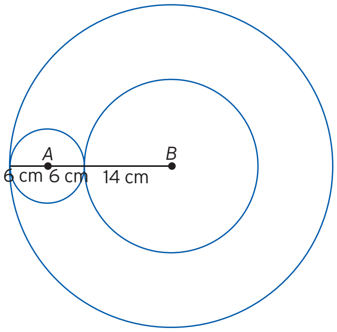
6. Dadas duas circunferências tangentes, uma de centro A e 6 cm de medida de raio e outra de centro B e 14 cm de medida de raio, elas podem ser tangentes externamente ou internamente.

   Considerando que as circunferências de centro A e de centro B sejam tangentes externamente, há duas possibilidades para a posição de uma outra circunferência com centro B, que tangencie a circunferência de centro A.

   - **I.** A outra circunferência é coincidente com a circunferência de centro B e raio medindo 14 cm.



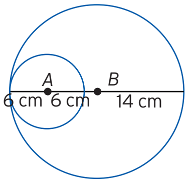
   - **II.** A outra circunferência tangencia a circunferência de centro A internamente.



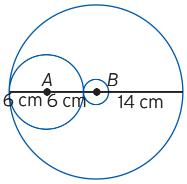
Nesse caso, a medida do raio dessa outra circunferência de centro B é 26 cm.

Considerando que as circunferências de centro A e de centro B sejam tangentes internamente, há duas possibilidades para a posição de uma outra circunferência com centro B que tangencie a circunferência de centro A.

   - **I.** A outra circunferência é coincidente com a circunferência de centro B e raio medindo 14 cm.



   - **II.** A outra circunferência tangencia a circunferência de centro A externamente.



Nesse caso, a medida do raio dessa outra circunferência é 2 cm.

Portanto, Lia deu as seguintes respostas: 14 cm, 26 cm e 2 cm.

7. Alternativa **e**.

   Para que uma figura seja simétrica a outra em relação a um ponto O, as distâncias de todos os pontos da figura original ao ponto O devem ser respectivamente iguais às distâncias de todos os pontos simétricos da outra imagem em relação ao ponto O.

8. **a)** $d_A = 2$ cm, $d_B = 4$ cm e $d_C = 6$ cm.
   - **b)** Pode-se utilizar um pedaço de barbante e uma régua, por exemplo, para medir o comprimento das circunferências.

     $c_A = 6{,}28$ cm, $c_B = 12{,}56$ cm e $c_C = 18{,}84$ cm.
   - **c)** Duplica. Triplica.

CAPÍTULO 1 – PROBABILIDADE

PÁGINA 249 – DESCUBRA MAIS

PARA CONCLUIR

1. Como o vencedor é aquele que obtiver o maior número no lançamento do dado, o segundo jogador, para ganhar, terá apenas uma possibilidade: o número 6.
2. Nesse caso, o segundo jogador terá mais chance, pois ele vencerá se obtiver, no dado, os números 3, 4, 5 ou 6.
3. Resposta pessoal.

PÁGINA 250 – ATIVIDADES

1. **a)** Há 6 possibilidades de resultados quando se lança um dado honesto, e apenas uma delas é o número 6. Então:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{1}{6}$$

b) No lançamento de um dado honesto, os resultados pares possíveis são: 2, 4 e 6. Assim, a probabilidade de ocorrer um deles é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c) No lançamento de um dado honesto, os resultados divisíveis por 3 possíveis são: 3 e 6. Assim, a probabilidade de ocorrer um deles é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

d) No lançamento de um dado honesto, os resultados primos possíveis são: 2, 3 e 5. Assim, a probabilidade de ocorrer um deles é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. **a)** O quadro com os resultados possíveis de cara e coroa pode ser representado da seguinte forma:

Moeda 1	Moeda 2
Cara	Cara
Cara	Coroa
Coroa	Cara
Coroa	Coroa

b) Sim, é um experimento aleatório, pois não é possível saber com certeza os resultados que vão ocorrer.

c) $S = \{(\text{cara, cara}), (\text{cara, coroa}), (\text{coroa, cara}), (\text{coroa, coroa})\}$

d) Resposta pessoal.

3. **a)** Na escolha aleatória de uma carta de um baralho com 52 cartas, metade delas são vermelhas e metade são pretas, ou seja, 26 cartas são vermelhas. A probabilidade de ser retirada uma carta vermelha é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} \text{ ou } 50\%$$

b) Em um baralho comum, existem 4 naipes (ouro, copas, paus e espadas). Como o baralho tem 52 cartas e tem-se apenas 4 naipes, então existem 13 cartas ($52 : 4 = 13$) de cada naipe. Portanto, a probabilidade de ser retirada uma carta de espadas é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \text{ ou } 25\%$$

c) Em um baralho comum, temos apenas um tipo de carta de cada naipe. Logo, a probabilidade de ser retirado um 2 de copas é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{1}{52} \text{ ou aproximadamente } 1{,}92\%$$

d) Em um baralho comum, temos duas cartas número 9 vermelhas: 9 de copas e 9 de ouros. Portanto, a probabilidade de ser retirada uma dessas cartas é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} \text{ ou aproximadamente } 3{,}85\%$$

e) Em um baralho comum, existem 4 naipes diferentes e 13 cartas de cada naipe. Como queremos apenas as cartas que não são de espadas, tem-se 39 cartas ($13 \cdot 3 = 39$) possíveis para serem escolhidas, ou seja, a probabilidade de isso acontecer é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4} \text{ ou } 75\%$$

f) Em um baralho comum, tem-se apenas duas cartas número 5 vermelhas: 5 de copas e 5 de ouros. Portanto, a probabilidade de não ser retirada uma dessas cartas é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{50}{52} = \frac{25}{26} \text{ ou aproximadamente } 96{,}15\%$$

g) Em um baralho comum, tem-se o número 2 dos quatro naipes (copas, ouros, espadas e paus) e o número 4 também de quatro naipes (copas, ouros, espadas e paus). Portanto, tem-se 8 cartas ($2 \cdot 4 = 8$) possíveis de 52. Logo, a probabilidade de ser retirada uma dessas cartas é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13} \text{ ou aproximadamente } 15{,}38\%$$

h) Em um baralho comum, tem-se apenas 4 reis: um de paus, um de ouros, um de espadas e um de copas. Portanto, tem-se 48 cartas ($52 - 4 = 48$) possíveis para serem retiradas. Logo, a probabilidade de isso acontecer é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13} \text{ ou aproximadamente } 92{,}31\%$$

4. Números de dois algarismos que podem ser formados com os algarismos 2, 3, 5 e 6: 22, 23, 25, 26, 32, 33, 35, 36, 52, 53, 55, 56, 62, 63, 65 e 66.

a) Tem-se 16 números e apenas 8 deles são pares, então a probabilidade de ser sorteado um número par é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

b) Tem-se 16 números e apenas 8 deles são ímpares, então a probabilidade de ser sorteado um número ímpar é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

c) Dos 16 números formados, apenas os números 23, 25, 26, 32, 35 e 36 são menores que 40 e não têm algarismos iguais. Portanto, a probabilidade de isso acontecer é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

5. **a)** Há dois números 2 na roleta: um que está escrito em uma casa amarela e outro que está escrito em uma casa verde. Então, a probabilidade de a roleta parar no número 2 é:

$$\frac{2}{12} = \frac{1}{6} \text{ ou aproximadamente } 16{,}67\%$$

b) Há cinco números negativos na roleta: -3, -2, -1, -2 e -1. Então, a probabilidade de a roleta parar em um desses números é:

$$\frac{5}{12} \text{ ou aproximadamente } 41{,}67\%$$

c) Há quatro casas verdes. Então, a probabilidade de a roleta parar em uma delas é:

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ ou aproximadamente } 33{,}33\%$$

6. A cada nascimento de um filho, a probabilidade de ele ser menino ou menina será sempre a mesma, ou seja:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{1}{2} \text{ ou } 50\%$$

O fato de já ter nascido uma menina não interfere em nada na probabilidade de o segundo filho ser menino.

7. Há no total 10 peixes coloridos, dos quais 2 são vermelhos. Assim, a probabilidade de Roberto ganhar um peixe vermelho é:

$$\frac{2}{10} = 0{,}2 = 20\%$$

8. **a)** A probabilidade de retirar da urna uma bola verde é:

$$\frac{2}{20} = 0{,}1 = 10\%$$

Correção possível:

Retirando uma bola da urna ao acaso, a probabilidade de a bola ser verde é menor que 50%.

b) A probabilidade de retirar da urna uma bola amarela é:

$$\frac{8}{20} = 0{,}4 = 40\%$$

A probabilidade de retirar da urna uma bola azul é:

$$\frac{10}{20} = 0{,}5 = 50\%$$

Correção possível:

A probabilidade de retirar da urna uma bola amarela é menor que a probabilidade de retirar uma bola azul.

c) A probabilidade de retirar da urna uma bola azul é:

$$\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Correção possível:

A probabilidade de retirar da urna uma bola azul é $\frac{1}{2}$.

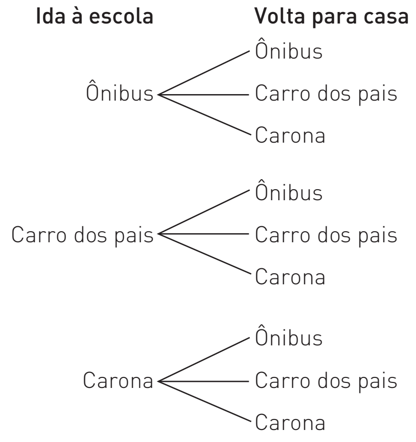
9. **a)** Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Como em todas as turmas há meninos e meninas, então a probabilidade de, sorteado um estudante ao acaso, ele ser uma menina ou um menino é de 100%.

PÁGINA 251 – DIVERSIFICANDO

1. **a)** Cristina tem as seguintes possibilidades para ir à escola e voltar para casa:



Portanto, Cristina tem 9 possibilidades para ir à escola e voltar para casa.

b) A probabilidade de Cristina sortear um papel com a opção "ida de ônibus e volta de carona com os pais de uma amiga" é :

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{1}{9} \text{ ou aproximadamente}$$

11,11%

2. **a)**

Urna laranja	Urna azul	Soma dos números das bolas sorteadas
1	4	5
1	5	6
2	4	6
2	5	7
3	4	7
3	5	8

b) Observando o quadro do item anterior, nota-se que as somas dos números das bolas sorteadas são: 5, 6, 7 e 8. Portanto, todas as somas são maiores que 4. Logo, a probabilidade de a soma dos pontos ser maior que 4 é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{6}{6} = 1 \text{ ou } 100\%$$

Como a probabilidade é 1 ou 100%, esse evento é certo de acontecer.

c) Como as possíveis somas são 5, 6, 7 ou 8, não existe nenhuma soma igual a 0. Logo, a probabilidade de a soma dos pontos ser 0 é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{0}{6} = 0 \text{ ou } 0\%$$

Como a probabilidade é 0 ou 0%, esse evento é impossível de acontecer.

d) As possíveis somas dos pontos são 5, 6, 7 ou 8, e temos apenas uma possibilidade de a soma ser menor que 6, então a probabilidade de isso acontecer é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{1}{6} \text{ ou aproximadamente}$$

16,67%

3. **a)** Há 35 pessoas nessa festa. Portanto, a probabilidade de ser sorteado um menino é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7} \text{ ou aproxima-}$$

damente 28,57%

b) A probabilidade de ser sorteada uma menina é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7} \text{ ou aproxima-}$$

damente 71,43%

c) Somando a probabilidade de ser sorteado um menino com a probabilidade de ser sorteada uma menina, o resultado é igual a 1 ou 100%:

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{7} = \frac{7}{7} = 1 \text{ ou } 100\%$$

4. Os divisores de 30 são: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30. Entre eles, os números primos são: 2, 3 e 5. Portanto, a probabilidade de o número escolhido ser um número primo é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{3}{8} \text{ ou } 37{,}5\%$$

5. **a)** Vermelha, pois há mais fichas dessa cor na caixa.

b) Se na primeira retirada saiu uma ficha vermelha e não houve reposição dessa ficha na caixa, então a caixa ficará com 4 fichas vermelhas e 4 fichas azuis. Portanto, as duas cores têm a mesma chance de sair.

6. **a)** Temos 5 números ímpares nas faces deste dado (1, 3, 3, 5, 5). Portanto, a probabilidade de se obter um número ímpar é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{5}{6} \text{ ou aproximadamente}$$

83,33%

b) Sim. Os números 1 e 2; e 3 e 5, porque no dado existem apenas um número 1 e um número 2; e dois números 3 e dois números 5. Portanto, a probabilidade de sair:

- o número 1 é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{1}{6}$$

- o número 2 é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{1}{6}$$

- o número 3 é:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- o número 5:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c) Resposta pessoal.

7. Alternativa **c**.

Como em 20 lançamentos Virgínia obteve 8 caras e 12 coroas, espera-se que nos próximos lançamentos a quantidade de caras seja maior que a de coroas, já que a probabilidade de obter cara é igual à probabilidade de obter coroa, ou seja, 50%. Portanto, espera-se que o resultado obtido nos primeiros 20 lançamentos não se repita.

CAPÍTULO 2 – ESTATÍSTICA

PÁGINA 261 – ATIVIDADES

1. **a)** Do perfil dos leitores brasileiros.

b) Amostral, pois foram escolhidos 8 076 respondentes (brasileiros e brasileiras com 5 anos ou mais, alfabetizados ou não).

c) Motivações para ler; idade.

2. **a)** De acordo com o gráfico, 45% dos estudantes trazem lanche de casa. Então:

$$\frac{45}{100} \cdot 400 = 180$$

Portanto, 180 estudantes trazem lanche de casa.

b) Cálculo do setor circular correspondente a cada uma das procedências do lanche consumido no recreio:

- Estudantes que trazem lanche de casa:

$$\begin{tikzcd} 100\% \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, ":100"'] & 360^{\circ} \\ 1\% \arrow[r, dash] & ? \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 100\% \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, ":100"'] & 360^{\circ} \arrow[d, bend left, ":100"] \\ 1\% \arrow[r, dash] & 3{,}6^{\circ} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 100\% \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, ":100"'] & 360^{\circ} \arrow[d, bend left, ":100"] \\ 1\% \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, "\cdot 45"'] & 3{,}6^{\circ} \\ 45\% \arrow[r, dash] & ? \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 100\% \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, ":100"'] & 360^{\circ} \arrow[d, bend left, ":100"] \\ 1\% \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, "\cdot 45"'] & 3{,}6^{\circ} \arrow[d, bend left, "\cdot 45"] \\ 45\% \arrow[r, dash] & 162^{\circ} \end{tikzcd}$$

Portanto, o setor circular correspondente aos estudantes que trazem lanche de casa tem 162°.

- Estudantes que consomem a merenda escolar:

$$\begin{tikzcd} 100\% \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, ":100"'] & 360^{\circ} \\ 1\% \arrow[r, dash] & ? \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 100\% \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, ":100"'] & 360^{\circ} \arrow[d, bend left, ":100"] \\ 1\% \arrow[r, dash] & 3{,}6^{\circ} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 100\% \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, ":100"'] & 360^{\circ} \arrow[d, bend left, ":100"] \\ 1\% \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, "\cdot 35"'] & 3{,}6^{\circ} \\ 35\% \arrow[r, dash] & ? \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 100\% \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, ":100"'] & 360^{\circ} \arrow[d, bend left, ":100"] \\ 1\% \arrow[r, dash] \arrow[d, bend right, "\cdot 35"'] & 3{,}6^{\circ} \arrow[d, bend left, "\cdot 35"] \\ 35\% \arrow[r, dash] & 126^{\circ} \end{tikzcd}$$

Portanto, o setor circular correspondente aos estudantes que consomem a merenda escolar tem 126°.

- Estudantes que compram lanche na cantina:

$$360^{\circ} - (162^{\circ} + 126^{\circ}) = 360^{\circ} - 288^{\circ} = 72^{\circ}$$

Portanto, o setor circular correspondente aos estudantes que compram lanche na cantina tem 72°.

c)

Procedência do lanche consumido

Procedência	Quantidade de estudantes	Porcentagem (%)
Casa	180	45
Merenda escolar	140	35
Cantina	80	20
Total	**400**	**100**

Dados obtidos pela diretora da escola.

3. **a)** De acordo com o gráfico, a quantidade de pares de sapatos femininos vendidos em cada um dos meses são:

- junho: 60
- julho: 40
- agosto: 130
- setembro: 200

Portanto, ao todo, foram vendidos 430 pares de sapatos femininos (60 + 40 + 130 + 200 = 430) nesses 4 meses.

b) De acordo com o gráfico, a quantidade de pares de sapatos masculinos vendidos em cada mês são:

- junho: 40
- julho: 80
- agosto: 120
- setembro: 100

No total, foram vendidos 340 pares de sapatos masculinos (40 + 80 + 120 + 100 = 340) nesses 4 meses.

Como foram vendidos 430 pares de sapatos femininos, a diferença entre a venda dos calçados femininos e masculinos é 90 (430 − 340 = 90).

Logo, foram vendidos 90 pares de calçados femininos a mais que os masculinos durante esse período.

c)

Quantidade de pares de sapatos vendidos nos últimos quatro meses

Mês	Quantidade de pares de sapatos vendidos	
	Feminino	Masculino
Junho	60	40
Julho	40	80
Agosto	130	120
Setembro	200	100
Total	**430**	**340**

Dados fornecidos pela loja.

4. **a)** De acordo com o gráfico, o ano com menor quantidade de estudantes matriculados foi 2019.

b) De acordo com o gráfico, tem-se:

$$267 + 360 + 300 + 420 + 450 + 460 = 2\,257$$

Logo, de 2019 a 2024 foram matriculados 2 257 estudantes.

c)
- De 2019 a 2020 houve um aumento de 93 estudantes (360 − 267 = 93).
- De 2020 a 2021 houve uma diminuição de 60 estudantes (360 − 300 = 60).
- De 2021 a 2022 houve um aumento de 120 estudantes (420 − 300 = 120).
- De 2022 a 2023 houve um aumento de 30 estudantes (450 − 420 = 30).
- De 2023 a 2024 houve um aumento de 10 estudantes (460 − 450 = 10).

Portanto, o maior aumento de estudantes matriculados ocorreu entre 2021 e 2022.

5. **a)** Não, pois analisando o gráfico pode-se perceber que 45% das pessoas pesquisadas tinham sobrepeso; menos, portanto, de 50%, que representaria a metade das pessoas.

b)
- Abaixo do peso: 10% de 240 pessoas

$$\frac{10}{100} \cdot 240 = 24$$

Portanto, 24 pessoas estavam abaixo do peso.

- Peso normal: 30% de 240 pessoas

$$\frac{30}{100} \cdot 240 = 72$$

Portanto, 72 pessoas estavam com peso normal.

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

6. **a)** Sim, nos meses de outubro e dezembro.

b) De acordo com o gráfico, o mês de menor venda foi novembro. Como cada ícone representa 2 500 veículos e em novembro há 3 ícones, então a quantidade de veículos vendidos nesse mês foi 7 500 veículos (3 · 2 500 = 7 500).

c) O total das vendas de setembro a dezembro é representado por 16 ícones (5 + 4 + 3 + 4 = 16). Logo, o total de veículos que essa empresa vendeu nesse período foi 40 000 (16 · 2 500 = 40 000).

PÁGINA 265 – ATIVIDADES

7. **a)** $MA = \frac{6 + 4 + 4 + 7 + 7 + 9 + 5}{7} = \frac{42}{7} = 6$

b) $MA = \frac{15 + 20 + 23 + 28 + 19 + 21}{6} = \frac{126}{6} = 21$

c) $MA = \frac{44 + 40 + 30 + 43 + 48}{5} = \frac{205}{5} = 41$

d) $MA = \frac{101 + 119 + 110 + 140 + 105}{5} = \frac{575}{5} = 115$

8. $MA = \frac{140 + 130 + 115 + 100 + 80 + 120 + 65}{7} = \frac{750}{7} \simeq 107,14$

Em média, foram vendidas 107,14 camisetas por dia nessa semana.

9. **a)** Lucas fez mais pontos no sexto jogo (24 pontos).

b) Lucas fez menos pontos no quarto jogo (13 pontos).

c) Lucas fez 8 pontos (22 − 14 = 8) a mais no 2º jogo em relação ao 1º jogo.

d) Ele marcou 108 pontos (14 + 22 + 18 + 13 + 17 + 24 = 108) nos seis jogos do campeonato.

e) $MA = \frac{14 + 22 + 18 + 13 + 17 + 24}{6} = \frac{108}{6} = 18$

Lucas marcou, em média, 18 pontos nos seis jogos.

f) Resposta pessoal.

10. $MA = \frac{8,9 + 9,2 + 9,6 + 8,8 + 9,4 + 9,8 + 7,3}{7} = \frac{63}{7} = 9,0$

A média das notas obtidas por Selma no campeonato foi 9,0.

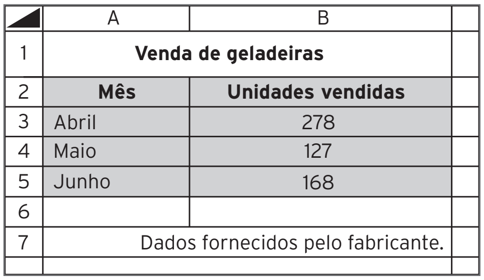
11.

$$4 = \frac{2 + 6 + 3 + x}{4}$$
$$4 \cdot 4 = 11 + x$$
$$16 - 11 = x$$
$$x = 5$$

Portanto, o quarto número é 5.

12. Respostas possíveis:

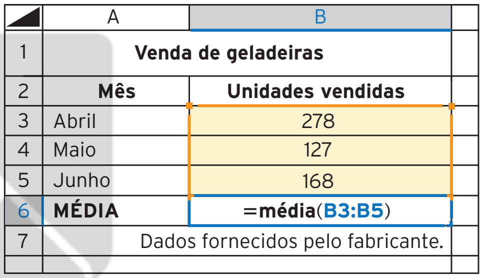
a)



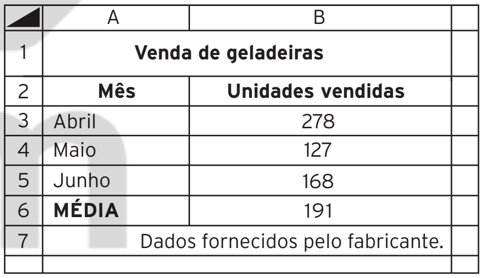
	A	B
1	**Venda de geladeiras**	
2	**Mês**	**Unidades vendidas**
3	Abril	278
4	Maio	127
5	Junho	168
6		
7	Dados fornecidos pelo fabricante.	

Ilustrações: ID/BR

b)



	A	B
1	**Venda de geladeiras**	
2	**Mês**	**Unidades vendidas**
3	Abril	278
4	Maio	127
5	Junho	168
6	**MÉDIA**	**=média(B3:B5)**
7	Dados fornecidos pelo fabricante.	



	A	B
1	**Venda de geladeiras**	
2	**Mês**	**Unidades vendidas**
3	Abril	278
4	Maio	127
5	Junho	168
6	**MÉDIA**	191
7	Dados fornecidos pelo fabricante.	

Após inserir os dados na planilha, digita-se a fórmula para calcular a média e clica-se *Enter*. O número que vai aparecer (191) é a média da quantidade de geladeiras vendidas no período.

13. Levantamento do número de passageiros por dia durante uma semana:

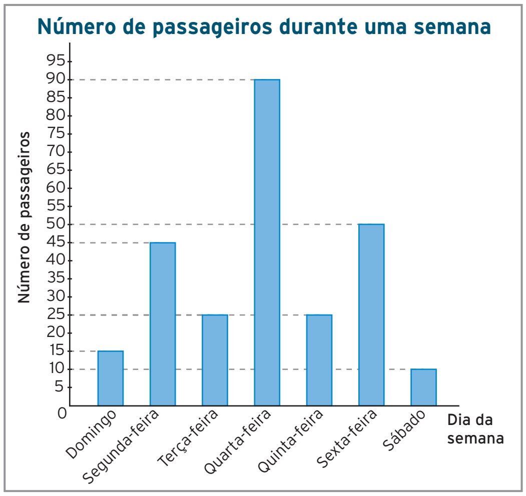
- Domingo: 15
- Segunda-feira: 3 · 15 = 45
- Terça-feira: 15 + 10 = 25
- Quarta-feira: 45 · 2 = 90
- Quinta-feira: 25
- Sexta-feira: 45 + 5 = 50
- Sábado: 10

a) Média aritmética do número de passageiros por dia durante a semana pesquisada:

$$MA = \frac{15 + 45 + 25 + 90 + 25 + 50 + 10}{7} = \frac{260}{7} \simeq 37,14$$

Logo, aproximadamente 37,14 passageiros utilizaram o ônibus naquela semana.

b) Resposta pessoal. Nesta atividade, o ideal é representar os dados em um gráfico de colunas, de maneira que relacione, em seu eixo horizontal, os dias da semana e, em seu eixo vertical, o número de passageiros.



ID/BR

Dados obtidos pela empresa de ônibus Fortaleza S.A.

PÁGINA 269 – ATIVIDADES

14. VII; V; II; IV, VI, I, III.

15. a) Resposta pessoal.

b) Resposta possível: Em uma escala de 0 a 10, sendo 0 nenhuma dedicação e 10 o maior nível de dedicação, que nota você daria para o seu nível de dedicação à atividade física?; Você pratica atividade física?; Em caso afirmativo, que atividade física pratica?; Qual é sua idade?

16. a) Resposta pessoal. Exemplo de respostas: Gráfico de setores; Estudantes ofendidos nas redes sociais.

b) De acordo com o texto, 13,2% dos entrevistados já se sentiram ofendidos. Como foram entrevistados quase 188 mil estudantes, tem-se:

$$\frac{13{,}2}{100} \cdot 188\,000 = \frac{132}{1\,000} \cdot 188\,000 \;=\; 24\,816$$

Então, aproximadamente 24 816 entrevistados já se sentiram ofendidos.

c) A resposta depende da quantidade de estudantes da turma.

d) A resposta depende da quantidade de estudantes da escola.

PÁGINA 271 – DESCUBRA MAIS

PARA CONCLUIR

Respostas pessoais. As respostas dessas atividades dependem da pesquisa feita pelas duplas.

PÁGINA 272 – DIVERSIFICANDO

1. a) Não.

b) Foram pesquisadas as crianças de 6 a 10 anos sem estudos, área urbana e rural.

c) Sim.

d) Variável pesquisada: "em que área moram". Essa variável é qualitativa nominal.

2. a) O tipo de ocupação mais frequente entre os brasileiros é empregado com carteira assinada.

b) Cálculo do ângulo do setor circular que corresponde à porcentagem de brasileiros empregado com carteira assinada:

$$\begin{array}{rrcll} :100 & 100\% & \text{———} & 360^{\circ} & \\ & 1\% & \text{———} & ? & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll} :100 & 100\% & \text{———} & 360^{\circ} & :100 \\ & 1\% & \text{———} & 3{,}6^{\circ} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll} :100 & 100\% & \text{———} & 360^{\circ} & :100 \\ & 1\% & \text{———} & 3{,}6^{\circ} & \\ \cdot\, 34{,}39 & 34{,}39\% & \text{———} & ? & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll} :100 & 100\% & \text{———} & 360^{\circ} & :100 \\ & 1\% & \text{———} & 3{,}6^{\circ} & \\ \cdot\, 34{,}39 & 34{,}39\% & \text{———} & \simeq 124^{\circ} & \cdot\, 34{,}39 \end{array}$$

O ângulo do setor que corresponde à porcentagem de brasileiros empregados com carteira assinada é aproximadamente 124°.

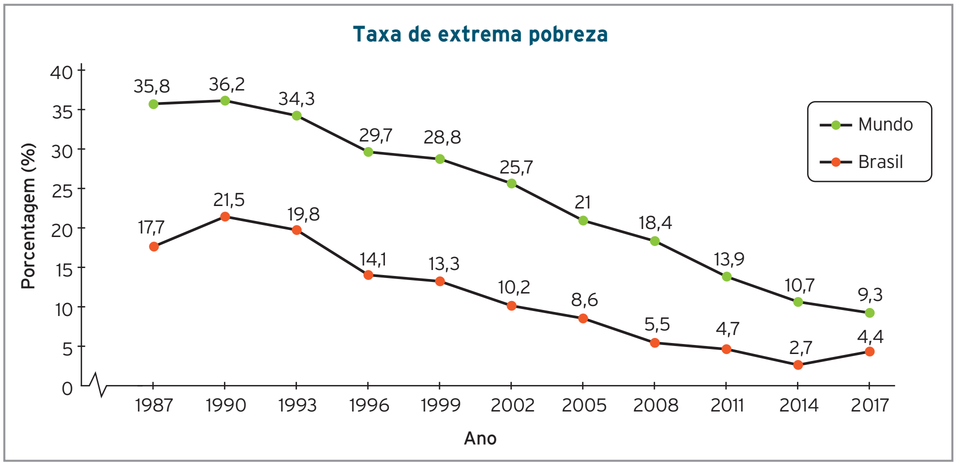
3. **a)** $MA = \frac{165 + 168 + 171 + 157 + 152 + 152 + 157 + 165 + 168 + 171}{10} = \frac{1\,626}{10} = 162,6$

Portanto, a média das medidas das alturas das meninas do 7º ano do Colégio Amanhecer é 162,6 cm.

b) $MA = \frac{165 + 168 + 171 + 157 + 152 + 152 + 157 + 165 + 168 + 171 + 163}{11} = \frac{1\,789}{11} \simeq 162,64$

A média teve pouca alteração. A nova média é aproximadamente 162,64 cm.

4. **a)**



ID/BR

Fonte de pesquisa: The World Bank. Poverty headcount ratio at $1.90 a day (2011 PPP) (% of population). Disponível em: https://data.worldbank.org/indicator/SI.POV.DDAY?end=2019&locations=1W-BR&name_desc=false&start=1981&view=chart. Acesso em: 7 abr. 2022.

b) O Brasil obteve o maior índice de pessoas em extrema pobreza em 1990 e o mundo, em 1990.

c) A diferença percentual entre os anos de 2002 e 2005 no Brasil é 1,6% (10,2 − 8,6 = 1,6) e no mundo é 4,7% (25,7 − 21 = 4,7).

5. **a)** Observando o gráfico, 28,7% dos brasileiros têm o Ensino Médio completo.

b) Observa-se que aproximadamente 16% da população possui nível superior completo.

c) Sim, pois 27,9% tinham Ensino Fundamental incompleto e 5,1% não tinham instrução, o que totaliza 33,0%.

6. **a)** De acordo com a tabela, temos o seguinte valor arrecadado na venda de peixes no primeiro dia da cooperativa:

$$30 \cdot 4 + 12 \cdot 6 + 8 \cdot 10 + 10 \cdot 12 + 20 \cdot 7 = 120 + 72 + 80 + 120 + 140 = 532$$

Portanto, a cooperativa arrecadou R$ 532,00.

b) Quantidade de quilograma vendido: 30 + 12 + 8 + 10 + 20 = 80

Média da arrecadação por quilograma de peixe vendido:

$$\frac{532}{80} = 6,65$$

Portanto, R$ 6,65 foi a arrecadação, em média, por quilograma de peixe vendido.

PÁGINA 274 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Resposta pessoal. Desejo de ser o que a pessoa no anúncio publicitário é; sentimento de pertencer ao grupo (todos têm celular, menos eu); vontade de gerar inveja nos outros; poder e prazer; entre outros, podem ser emoções que permeiam a experiência do jovem com a propaganda.

2. Resposta pessoal.

PÁGINA 276 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Alternativa **c**.

Analisando as alternativas, tem-se:

a) Não se pode afirmar que haverá um terremoto no período, pois a probabilidade exprime a medida de uma chance. Portanto, não há certeza de acontecimento de terremoto em Zedópolis.

b) Certeza de acontecimento é apenas quando a probabilidade é igual a 1. Assim, mesmo que $\frac{2}{3}$ seja maior que $\frac{1}{2}$, isso não garante o acontecimento de terremoto em Zedópolis.

c) Como o geólogo disse que $\frac{2}{3}$ é a probabilidade de ocorrer um terremoto em Zedópolis, a probabilidade de esse evento não ocorrer é $\frac{1}{3}$, ou seja, $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$.

Essa alternativa exprime melhor o significado da declaração do geólogo.

d) A probabilidade exprime a medida da chance de algo acontecer. Apesar de isso ser uma incerteza, essa previsão pode ser afirmada.

2. Alternativa **d**.

A probabilidade de o estudante sorteado ser do sexo feminino é de 15 em 25, ou seja:

$$\frac{15}{25} = 0{,}6 = 60\%$$

3. Alternativa **d**.

Calculando a média, obtemos:

$$\frac{237 + 262 + 158 + 159 + 160 + 278 + 300 + 278}{8} = 229$$

Então, há cinco regiões com casos acima da média, ou seja, cada uma delas receberá 10 funcionários; três regiões estão com casos abaixo da baixa, ou seja, cada uma delas receberá 7 funcionários.

A quantidade de funcionários que devem ser contratados é dada por:

$$5 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 71$$

4. Alternativa **b**.

Nos últimos 5 meses foram aplicadas 120 vacinas (21 + 22 + 25 + + 31 + 21 = 120); portanto, ao final do 5º mês havia 108 vacinas (228 − 120 = 108).

A média mensal, nesses 5 meses, foi de 24 vacinas $\left(\frac{120}{5} = 24\right)$.

Então, o estoque inicial do 6º mês deve ser de 288 vacinas (12 · 24 = 288), sendo necessário o posto adquirir 180 vacinas (288 − 108 = 180) novas.

5. a) Observando a taxa de fertilidade no ano de 2019 no gráfico, tem-se que:

- no Brasil, ela foi entre 1,5 e 2 filhos por mulher, portanto, menor que 2;
- nos Estados Unidos, ela também foi entre 1,5 e 2 filhos por mulher, portanto, menor que 2;
- no Haiti, ela foi entre 2,5 e 3 filhos por mulher, portanto, maior que 2.

b) Observando a linha que indica a taxa de substituição, que é de 2,11 filhos por mulher, nota-se que os países que estão abaixo dessa linha são Estados Unidos e Brasil; acima dessa linha está o Haiti.

6. Alternativa **e**.

a) Alternativa incorreta, pois o maior pico de desmatamento ocorreu no ano de 2004, e não em 2008.

b) Alternativa incorreta, pois nesse intervalo de tempo o desmatamento aumentou.

c) Alternativa incorreta, pois no ano de 2012 o desmatamento foi de 4 571 km^2; em 2013, o desmatamento foi de 5 891 km^2; e, em 2014, foi de 5 012 km^2. Observa-se, então, que o desmatamento variou.

d) Alternativa incorreta, pois no ano de 2015 o desmatamento foi de 6 207 km^2 e, em 2016, foi de 7 893 km^2; portanto, nesse intervalo o desmatamento cresceu. No ano de 2017 o desmatamento foi de 6 947 km^2; portanto, de 2016 a 2017 o desmatamento decresceu.

e) Alternativa correta, pois em 2017 o desmatamento foi de 6 947 km^2; em 2018, de 7 536 km^2; em 2019, de 10 129 km^2; em 2020, de 10 851 km^2; e, finalmente em 2021, de 13 235 km^2.

7. Resposta pessoal.

UNIDADE 8 – GRANDEZAS E MEDIDAS

CAPÍTULO 1 – MEDIÇÕES

PÁGINA 284 – ATIVIDADES

1. Passo, mão, copo e polegar.

2. a) Resposta pessoal.

b) Respostas pessoais.

c) Unidade de medida não padronizada. Resposta pessoal.

PÁGINA 285 – DESCUBRA MAIS

PARA CONCLUIR

1. Respostas pessoais.

2. As medidas obtidas são aproximadas. Resposta pessoal.

3. Respostas pessoais.

PÁGINA 286 – DIVERSIFICANDO

1. a) Sim, pois a trena é um instrumento de medição que utiliza unidades de medida padronizadas.

b) Provavelmente não, pois as medidas dos palmos de Ana e de Vicente são diferentes.

c) Provavelmente seria diferente, mas não é possível saber se seria maior ou menor.

d) Não é possível saber. Depende da capacidade de cada copo e da medida dada na receita.

e) Padronizada (litro).

f) A duração da cena não seria diferente, pois com o uso do cronômetro a duração será sempre a mesma, independentemente de quem esteja com o cronômetro em mãos.

g) Provavelmente eles vão obter medidas diferentes. Nessa situação, é provável que a medida obtida por Paulo seja maior, pois seus pés são menores que os de Ester.

h) As cenas B, C, D e G. Resposta pessoal.

2. Resposta possível: Fahrenheit. Essa unidade de medida de temperatura é utilizada por apenas três países no mundo: Estados Unidos, Birmânia e Libéria.

3. Respostas pessoais.

4. Respostas pessoais.

5. Padronizada.

6. a) Punhado, copo e colher.

b) Provavelmente não, pois não se sabe quanto representa um punhado nem os tamanhos do copo e da colher em unidades de medida padronizadas.

7. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que a unidade de medida escolhida por João é maior que a unidade de medida escolhida por Douglas. Logo, a unidade de medida de João cabe menos vezes no comprimento que eles estão medindo, resultando em uma medida menor que a encontrada por Douglas.

CAPÍTULO 2 – ÁREAS E VOLUMES

PÁGINA 292 – ATIVIDADES

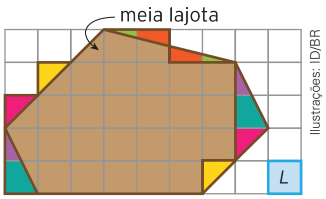
1. a) **A**: 8 □; **B**: 8 □; **C**: 10 □; **D**: $5\frac{1}{2}$ □; **E**: 7 □.

b) **A**: 4 ▭; **B**: 4 ▭; **C**: 5 ▭; **D**: $2\frac{3}{4}$ ▭;

E: $3\frac{1}{2}$ ▭.

c) **A**: 16 ◺; **B**: 16 ◺; **C**: 20 ◺; **D**: 11 ◺; **E**: 14 ◺.

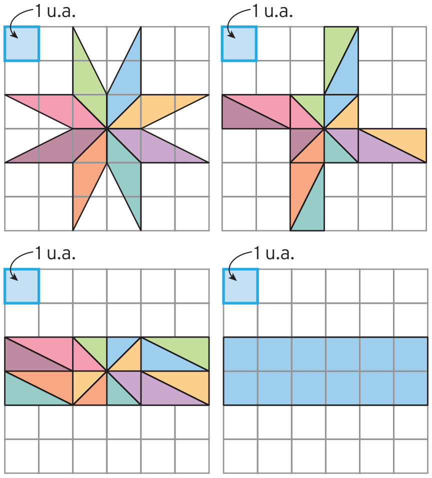
2. Para contar as lajotas pode-se fazer o seguinte esquema:



Ilustrações: ID/BR

Ao contar as lajotas, verifica-se que são necessárias 28 lajotas e meia. No enunciado é pedida a quantidade mínima, pois não são consideradas partes de uma lajota. Assim, o homem deverá usar 29 lajotas para revestir completamente o piso do quintal.

3. Inicialmente, "recorta-se" essa figura, decompondo-a. Depois, "unem-se as partes", formando outra composição, de modo que ela preencha uma quantidade inteira de quadradinhos cuja medida da área é 1 u.a.



Ilustrações: ID/BR

Portanto, a área da figura dada é equivalente à área do retângulo. Como a medida da área do retângulo é igual a 12 u.a., a medida da área da figura também é igual a 12 u.a.

4. Inicialmente, calcula-se a medida da área de cada uma das figuras:

- retângulo A: 8 cm^2;
- losango B: 6 cm^2;
- paralelogramo C: 4 cm^2;
- quadrado D: 4 cm^2;
- triângulo E: 6 cm^2;
- trapézio F: 8 cm^2.

Os pares de figuras que têm a mesma medida da área são: A e F; B e E; C e D.

5. Cada estudante deve escolher uma unidade de medida de área. Considerando o quadradinho da malha como unidade de medida, temos as seguintes medidas:

- figura A: 5 quadradinhos;
- figura B: 5 quadradinhos;
- figura C: 5 quadradinhos;
- figura D: 8 quadradinhos;
- figura E: 4 quadradinhos;
- figura F: 5 quadradinhos.

Portanto, as figuras A, B, C e F são equivalentes, pois têm a mesma medida de área.

6. $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$

$A_{\text{retângtulo}} = 7 \cdot 4 = 28$

Portanto, a medida da área do retângulo é igual a 28 cm^2.

7. $A_{\text{quadrado}} = \ell^2$

$A_{\text{quadrado}} = 12^2 = 144$

Portanto, a medida da área do quadrado é igual a 144 cm^2.

8. $A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$

$A_{\text{paralelogramo}} = 9 \cdot 4{,}5 = 40{,}5$

Portanto, a medida da área do paralelogramo é igual a 40,5 cm^2.

9. a) $A_{\text{quadrado}} = \ell^2$

$A_{\text{quadrado}} = (6{,}1)^2 = 37{,}21$

Portanto, a medida da área do quadrado é igual a 37,21 cm^2.

b) $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$

$A_{\text{retângulo}} = 5{,}7 \cdot 4{,}0 = 22{,}8$

Portanto, a medida da área do retângulo é igual a 22,8 m^2.

c) $A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$

$A_{\text{paralelogramo}} = 8{,}0 \cdot 7{,}5 = 60$

Portanto, a medida da área do paralelogramo é igual a 60 km^2.

d) $A_{\text{quadrado}} = \ell^2$

$A_{\text{quadrado}} = 9^2 = 81$

Portanto, a medida da área do quadrado é igual a 81 dm^2.

e) $A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$

$A_{\text{retângulo}} = 5{,}0 \cdot 3{,}2 = 16$

Portanto, a medida da área do retângulo é igual a 16 cm^2.

f) $A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$

$A_{\text{paralelogramo}} = 6 \cdot 4 = 24$

Portanto, a medida da área do paralelogramo é igual a $24a^2$.

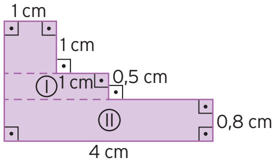
10. Resoluções possíveis:

a) A medida da área da região roxa é dada pela medida da área do quadrado maior menos a medida da área do quadrado menor.

- $A_{\text{quadrado maior}} = (2{,}5)^2 = 6{,}25$
- $A_{\text{quadrado menor}} = 1^2 = 1$

Logo, a medida da área da região roxa é 5,25 cm^2, pois 6,25 − 1 = 5,25.

b) Para calcular a medida da área total da região roxa, é possível calcular a medida da área dos quadriláteros que a compõem. Uma alternativa é dividi-la em um quadrado e dois retângulos, conforme figura a seguir.



- $A_{\text{quadrado}} = 1^2 = 1$
- $A_{\text{retângulo I}} = 2 \cdot 0{,}5 = 1$
- $A_{\text{retângulo II}} = 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}2$

A medida da área da região roxa é dada pela soma das medidas das áreas do quadrado, do retângulo I e do retângulo II.

Logo, a medida da área da região roxa é igual a 5,2 cm^2, pois 1 + 1 + 3,2 = 5,2.

PÁGINA 294 – ATIVIDADES

11. a) $A_{\text{triângulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2}$

$A_{\text{triângulo}} = \dfrac{2 \cdot 8}{2} = 8$

Portanto, a medida da área do triângulo é igual a 8 cm^2.

b) $A_{\text{triângulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{3{,}5 \cdot 5}{2} =$

$= \dfrac{17{,}5}{2} = 8{,}75$

Portanto, a medida da área do triângulo é igual a 8,75 cm^2.

c) $A_{\text{triângulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{7{,}5 \cdot 3}{2} =$

$= \dfrac{22{,}5}{2} = 11{,}25$

Portanto, a medida da área do triângulo é igual a 11,25 cm^2.

12. Como a medida da altura é igual ao dobro da medida da base e a base mede 4 m, a altura mede 8 m, pois 2 · 4 = 8. Portanto, a medida da área do triângulo é igual a:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$$

Logo, a medida da área do triângulo é igual a 16 m^2.

PÁGINA 295 – ATIVIDADES

13. $A_{\text{trapézio}} = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$

$A_{\text{trapézio}} = \dfrac{(9 + 5) \cdot 4{,}5}{2} =$

$= \dfrac{14 \cdot 4{,}5}{2} = \dfrac{63}{2} = 31{,}5$

Portanto, a medida da área do trapézio é igual a 31,5 cm^2.

14. a) $A_{\text{trapézio}} = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$

$A_{\text{trapézio}} = \dfrac{(5 + 2) \cdot 2}{2} = \dfrac{7 \cdot 2}{2} =$

$= \dfrac{14}{2} = 7$

Portanto, a medida da área do trapézio é igual a 7 m^2.

b) $A_{\text{trapézio}} = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$

$A_{\text{trapézio}} = \dfrac{(10 + 6) \cdot 3}{2} = \dfrac{16 \cdot 3}{2} =$

$= \dfrac{48}{2} = 24$

Portanto, a medida da área do trapézio é igual a 24 m^2.

c) $A_{\text{trapézio}} = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$

$A_{\text{trapézio}} = \dfrac{(8 + 5) \cdot 2{,}6}{2} =$

$= \dfrac{13 \cdot 2{,}6}{2} = \dfrac{33{,}8}{2} = 16{,}9$

Portanto, a medida da área do trapézio é igual a 16,9 m^2.

15. No trapézio retângulo, o lado perpendicular aos lados paralelos é a altura do trapézio, de medida h. Então:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$
$$120 = \frac{(7,5 + 4,5) \cdot h}{2}$$
$$240 = 12 \cdot h$$
$$\frac{240}{12} = h$$
$$h = 20$$

Logo, o lado perpendicular aos lados paralelos mede 20 m.

16.
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$
$$45 = \frac{(11 + x) \cdot 5}{2}$$
$$90 = 55 + 5x$$
$$5x = 90 - 55$$
$$5x = 35$$
$$x = \frac{35}{5}$$
$$x = 7$$

Portanto, o valor de x é 7.

PÁGINA 296 – ATIVIDADE

17. a) $A_{\text{losango}} = \dfrac{D \cdot d}{2}$

$$A_{\text{losango}} = \frac{12 \cdot 9}{2} = \frac{108}{2} = 54$$

Portanto, a medida da área do losango é igual a 54 cm^2.

b) A diagonal maior do losango mede 8 cm, pois $2 \cdot 4 = 8$.

A diagonal menor do losango mede 6 cm, pois $2 \cdot 3 = 6$.

A medida da área do losango é dada por:

$$A_{\text{losango}} = \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

Logo, a medida da área do losango é igual a 24 cm^2.

c) A diagonal maior do losango mede 4 cm, pois $2 \cdot 2 = 4$.

A diagonal menor do losango mede 3 cm, pois $2 \cdot 1,5 = 3$.

A medida da área do losango é dada por:

$$A_{\text{losango}} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Logo, a medida da área do losango é igual a 6 cm^2.

PÁGINA 299 – ATIVIDADES

18. Como os dois andares inferiores da pilha são iguais, a medida do volume desses dois andares é igual a 40 u.v. $(5 \cdot 4 \cdot 2 = 40)$.

O andar superior da pilha tem medida de volume igual a 6 u.v. $(4 + 4 \cdot 0,5 = 4 + 2 = 6)$.

Portanto, a medida do volume total da pilha de blocos é igual a 46 u.v. $(40 + 6 = 46)$.

19. a) $V_{\text{bloco retangular}} = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Portanto, a medida do volume do bloco retangular é igual a 16 cm^3.

b) $V_{\text{bloco retangular}} = 7 \cdot 3 \cdot 1,8 = 37,8$

Portanto, a medida do volume do bloco retangular é igual a 37,8 dm^3.

c) $V_{\text{cubo}} = 7^3 = 343$

Portanto, a medida do volume do cubo é igual a 343 m^3.

d) $V_{\text{bloco retangular}} = 8,2 \cdot 2 \cdot 4,2 = 68,88$

Portanto, a medida do volume do bloco retangular é igual a 68,88 dm^3.

e) $V_{\text{cubo}} = (3,1)^3 = 29,791$

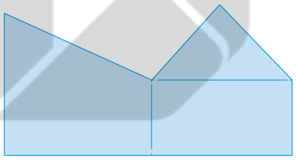
Portanto, a medida do volume do cubo é igual a 29,791 cm^3.

PÁGINA 300 – DIVERSIFICANDO

1. Alternativa **e**.

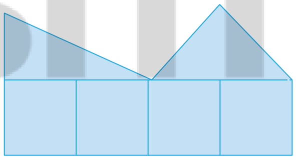
O primeiro passo é verificar se é possível decompor a figura dada de acordo com as indicações feitas em cada uma das alternativas.

a) Um trapézio, um triângulo e um retângulo.

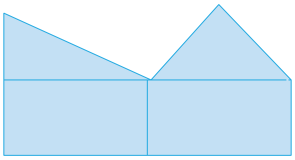


Ilustrações: ID/BR

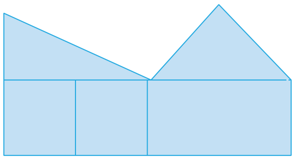
b) Quatro quadrados e dois triângulos.



c) Dois retângulos e dois triângulos.



d) Dois quadrados, dois triângulos e um retângulo.



Portanto, é possível decompor a figura dada de todas as maneiras apresentadas nas alternativas.

2. Considerando b a medida do comprimento e h a medida da largura do terreno em formato retangular, temos:

$$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$$
$$57\,456 = 342 \cdot h$$
$$\frac{57\,456}{342} = h$$
$$h = 168$$

Portanto, a largura do terreno da chácara mede 168 m.

3. a) Para calcular quantos metros quadrados de lajota serão necessários, é preciso encontrar a medida da área do quarto. Como o quarto é quadrado, então a medida de sua área é:

$$A_{\text{quadrado}} = 4^2 = 16$$

Logo, serão necessários 16 m^2 de lajota.

b) Para calcular a quantidade de rodapé que deve ser comprado, é preciso encontrar a medida do perímetro desse quarto e descontar a medida da largura da porta.

$$4 + 4 + 4 + (4 - 1) = 4 + 4 + 4 + 3 = 15$$

Logo, devem ser comprados 15 m de rodapé.

c) Como foi dado o preço de 1 m^2 de lajota e de 1 m de rodapé e serão necessários 16 m^2 de lajota e 15 m de rodapé, é possível resolver esse problema por meio de uma expressão numérica.

$$16 \cdot 38 + 15 \cdot 17 = 608 + 255 = 863$$

Logo, o valor mínimo que será gasto é R$ 863,00.

4. Inicialmente calculam-se a medida da área total do terreno, a medida da área destinada ao plantio de cenoura e a destinada ao plantio de tomate.

$$A_{\text{terreno}} = 13 \cdot 7 = 91$$
$$A_{\text{cenoura}} = 6 \cdot 7 = 42$$
$$A_{\text{tomate}} = 4 \cdot 7 = 28$$

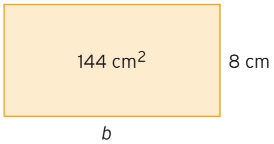
Em seguida, as medidas das áreas destinadas ao plantio da cenoura e do tomate são subtraídas da medida da área total, obtendo a medida da área destinada ao repolho.

$$A_{\text{repolho}} = A_{\text{terreno}} - A_{\text{cenoura}} - A_{\text{tomate}}$$
$$A_{\text{repolho}} = 91 - 42 - 28 = 21$$

Portanto, Mário utilizou 21 m^2 para o plantio de repolho.

5. A medida da área de um quadrado cujo lado mede 12 cm é 144 cm^2, pois $12 \cdot 12 = 144$.

Representando o retângulo cuja área mede 144 cm^2 e cuja altura mede 8 cm, tem-se:



- Cálculo da medida da base do retângulo:

$$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$$
$$144 = b \cdot 8$$
$$b = \frac{144}{8}$$
$$b = 18$$

Portanto, a base desse retângulo mede 18 cm.

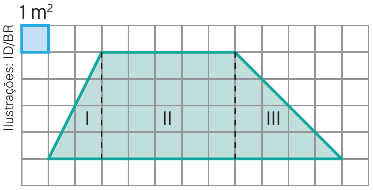
- Cálculo da medida do perímetro desse retângulo:

$$8 + 18 + 8 + 18 = 52$$

Logo, a medida do perímetro desse retângulo é igual a 52 cm.

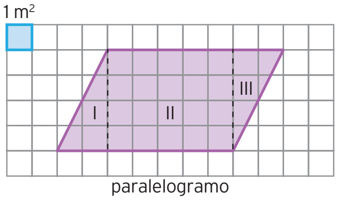
6. a) Respostas pessoais.

b) • Trapézio:



Portanto, o trapézio pode ser decomposto em um retângulo e dois triângulos.

- Paralelogramo:



Portanto, o paralelogramo pode ser decomposto em um retângulo e dois triângulos.

c) Calculando a medida da área do trapézio e do paralelogramo por meio da soma das medidas de área das figuras obtidas na decomposição, temos:

- Trapézio

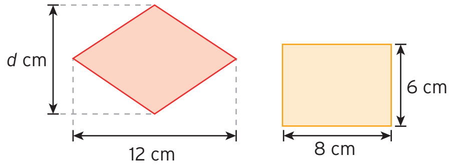
$$A_{\text{I}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
$$A_{\text{II}} = b \cdot h = 5 \cdot 4 = 20$$
$$A_{\text{III}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{16}{2} = 8$$
$$A_{\text{trapézio}} = A_{\text{I}} + A_{\text{II}} + A_{\text{III}}$$
$$A_{\text{trapézio}} = 4 + 20 + 8 = 32$$

- Paralelogramo

$$A_{\text{I}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
$$A_{\text{II}} = b \cdot h = 5 \cdot 4 = 20$$
$$A_{\text{III}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
$$A_{\text{paralelogramo}} = A_{\text{I}} + A_{\text{II}} + A_{\text{III}}$$
$$A_{\text{paralelogramo}} = 4 + 20 + 4$$
$$A_{\text{paralelogramo}} = 28$$

Logo, a medida da área do trapézio é igual a 32 m^2 e a medida da área do paralelogramo é igual a 28 m^2.

7. Representando essa situação por meio de figuras, tem-se:



De acordo com o enunciado, a medida da área das duas figuras é a mesma. Então:

$$A_{\text{retângulo}} = 8 \cdot 6 = 48$$
$$A_{\text{losango}} = A_{\text{retângulo}}$$
$$\frac{D \cdot d}{2} = 48$$
$$\frac{12 \cdot d}{2} = 48$$
$$6d = 48$$
$$d = \frac{48}{6}$$
$$d = 8$$

Portanto, a outra diagonal do losango mede 8 cm.

8. a) A região indicada é um trapézio. Então:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(7 + 4) \cdot 3}{2} = \frac{11 \cdot 3}{2} =$$
$$= \frac{33}{2} = 16{,}5$$

Portanto, a medida da área do trapézio é igual a 16,5 cm^2.

b) Para determinar a medida da área da região indicada, vamos decompô-la em um retângulo, um triângulo cuja base mede 0,8 cm e cuja altura mede 4 cm (triângulo I) e um triângulo cuja base mede 1,5 cm e cuja altura mede 1,5 cm (triângulo II).

- $A_{\text{retângulo}} = 8 \cdot 1 = 8$
- $A_{\text{triângulo I}} = \frac{0{,}8 \cdot 4}{2} = \frac{3{,}2}{2} = 1{,}6$
- $A_{\text{triângulo II}} = \frac{1{,}5 \cdot 1{,}5}{2} = \frac{2{,}25}{2} = 1{,}125$

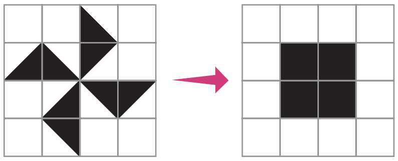
Portanto, a medida da área da região indicada é dada por:

$$A_{\text{região}} = A_{\text{retângulo}} + A_{\text{triângulo I}} + A_{\text{triângulo II}} = 8 + 1{,}6 + 1{,}125 = 10{,}725$$

Logo, a medida da área da região é igual a 10,725 cm^2.

9. Alternativa **c**.

O quadrado está dividido em 16 quadradinhos. A medida da área sombreada é a soma das medidas das áreas de 8 triângulos congruentes, cada um com medida da área igual à metade da medida da área de um quadradinho. Portanto, a medida da área sombreada é igual à medida da área de 4 quadradinhos $\left(8 \cdot \frac{1}{2}\right)$.



Logo, a fração correspondente à medida da área em preto em relação à medida da área do quadrado é $\frac{4}{16}$ ou $\frac{1}{4}$.

10. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

11. Chamando de D a diagonal maior do losango e d a diagonal menor, temos: $D = 2d$

De acordo com o enunciado, a soma das medidas das diagonais é 45 m, então:

$$D + d = 45$$
$$2d + d = 45$$
$$3d = 45$$
$$d = \frac{45}{3}$$
$$d = 15$$

Como $D = 2d$, então $D = 30$.

Logo, a medida da área desse losango é dada por:

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$
$$A_{\text{losango}} = \frac{30 \cdot 15}{2} = \frac{450}{2} = 225$$

Então, a medida da área do losango é igual a 225 m^2.

12. a) $V_{\text{embalagem 1}} = 6 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

$V_{\text{embalagem 2}} = 6 \cdot 2{,}5 \cdot 14 = 210$

Portanto, a medida do volume da embalagem 1 é igual a 210 cm^3 e a medida do volume da embalagem 2 é igual a 210 cm^3.

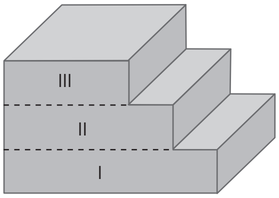
b) Para descobrir qual embalagem necessita de maior quantidade de papelão, é necessário calcular as medidas das áreas totais das duas embalagens.

- $A_{\text{total embalagem 1}} =$
  $= 2 \cdot (6 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 7) =$
  $= 2 \cdot (30 + 35 + 42) = 2 \cdot 107 = 214$
- $A_{\text{total embalagem 2}} =$
  $= 2 \cdot (6 \cdot 2{,}5 + 2{,}5 \cdot 14 + 6 \cdot 14) =$
  $= 2 \cdot (15 + 35 + 84) = 2 \cdot 134 = 268$

Portanto, a medida da área da superfície da embalagem 1 é igual a 214 cm^2 e a medida da área da superfície da embalagem 2 é igual a 268 cm^2.

Logo, a embalagem 2 necessita de maior quantidade de papelão para ser produzida.

13. Uma das estratégias para determinar a medida do volume de concreto dessa escada é decompô-la em três blocos retangulares da seguinte maneira:



- $V_I = 8{,}7 \cdot 6 \cdot 1{,}8 = 93{,}96$
- $V_{II} = (8{,}7 - 2{,}9) \cdot 6 \cdot 1{,}8$
  $V_{II} = 5{,}8 \cdot 6 \cdot 1{,}8 = 62{,}64$
- $V_{III} = (5{,}8 - 2{,}9) \cdot 6 \cdot 1{,}8$
  $V_{III} = 2{,}9 \cdot 6 \cdot 1{,}8 = 31{,}32$

A medida do volume da escada é igual a:

$V = V_I + V_{II} + V_{III} =$

$= 93{,}96 + 62{,}64 + 31{,}32 = 187{,}92$

Logo, a medida do volume de concreto necessário para construir essa escada é $187{,}92\ dm^3$.

14. Como o aquário tem o formato de bloco retangular e a medida do volume de um bloco retangular é igual ao produto das medidas do comprimento (*a*), da largura (*b*) e da altura (*c*), tem-se:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Sabendo que $V = 36\ dm^3$ e $c = 4$ dm, então:

$$V = a \cdot b \cdot c$$
$$36 = a \cdot b \cdot 4$$
$$a \cdot b = \frac{36}{4}$$
$$a \cdot b = 9$$

Como as medidas precisam ser expressas em números inteiros, é necessário descobrir quais números que, multiplicados, resultam em 9, ou seja, quais são os divisores de 9.

$$D(9): 1, 3, 9$$

Portanto, as possíveis medidas do comprimento e da largura desse aquário são: 1 dm e 9 dm, 3 dm e 3 dm ou 9 dm e 1 dm.

15. Resposta pessoal.

PÁGINA 302 – AMPLIANDO HORIZONTES

PARA REFLETIR

1. Resposta pessoal.

2. Algumas respostas possíveis: Imposto de Renda de Pessoa Física (IRPF), Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA), Imposto Predial e Territorial Urbano (IPTU), Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS), Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI), taxa de iluminação pública, taxa de bombeiro, taxa de cartório, Contribuição Social sobre o Lucro Líquido (CSLL), etc.

3. A resposta depende da data em que a atividade for realizada com os estudantes. Por exemplo, de 1/1/2022 a 1/6/2022, foram pagos aproximadamente 1,2 trilhão de reais em impostos.

4.
- Cálculo do imposto pago por Celeste:

  46% de R\$ 2 000,00 =

  $= \frac{46}{100} \cdot 2000 = \frac{92\,000}{100} = 920$

  Portanto, Celeste pagou R\$ 920,00 em impostos.
- Cálculo dos impostos pagos por Cláudio:

  Frango: $2 \cdot 14 = 28$

  27% de R\$ 28,00 $= \frac{27}{100} \cdot 28 =$

  $= \frac{756}{100} = 7{,}56$

  Maracujá: $1 \cdot 9 = 9$

  12% de R\$ 9,00 $= \frac{12}{100} \cdot 9 =$

  $= \frac{108}{100} = 1{,}08$

  Gasolina: 62% de R\$ 420,00:

  $\frac{62}{100} \cdot 420 = \frac{26\,040}{100} = 260{,}40$

  Total pago em impostos:

  $7{,}56 + 1{,}08 + 260{,}40 = 269{,}04$

  Portanto, Cláudio pagou R\$ 269,04 em impostos.

PÁGINA 304 – INVESTIGAR

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO

1. Resposta pessoal.

2. Respostas pessoais.

3. Resposta pessoal.

4. Resposta pessoal.

5. Respostas pessoais.

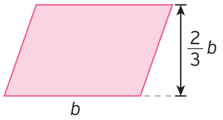
PÁGINA 306 – ATIVIDADES INTEGRADAS

1. **a)** Litro.
b) Quilograma.
c) Quilômetro.

2. Espera-se que os estudantes respondam que não é confiável, pois se trata de uma unidade de medida não padronizada e não exata. Em uma obra de construção civil, todas as medições precisam ser exatas e com unidades de medida padronizadas para que imprecisões não causem problemas de segurança, ergonomia ou uso e ocupação do solo.

3. **a)** Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.

4. Considerando *b* a medida da base do paralelogramo, temos:



a) De acordo com o enunciado, temos:

$$b + \frac{2}{3}b = 30$$
$$3b + 2b = 90$$
$$5b = 90$$
$$b = \frac{90}{5}$$
$$b = 18$$

Portanto, a medida da base do paralelogramo é 18 m.

A medida da altura do paralelogramo é dada por $\frac{2}{3}b$, então:

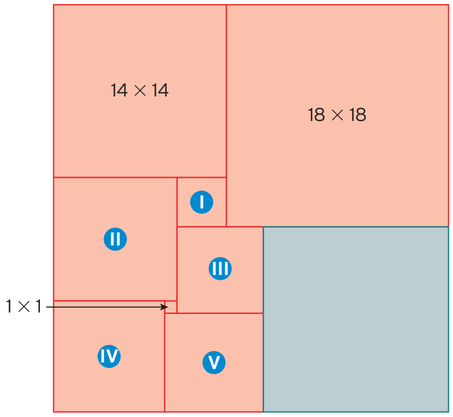
$$\frac{2}{3}b = \frac{2}{3} \cdot 18 = \frac{36}{3} = 12$$

Logo, a medida da altura do paralelogramo é 12 m.

b) $A_{paralelogramo} = 18 \cdot 12 = 216$

Portanto, a medida da área desse paralelogramo é igual a $216\ m^2$.

5. Numerando cada um dos quadrados, temos:



Ilustrações: ID/BR

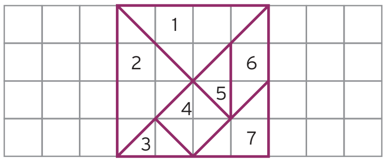
Portanto, o quadrado:

- I tem lados que medem 4 (18 − 14 = 4);
- II tem lados que medem 10 (14 − 4 = 10);
- III tem lados que medem 7 (10 − 4 + 1 = 7);
- IV tem lados que medem 9 (10 − 1 = 9);
- V tem lados que medem 8 (9 − 1 = 8).

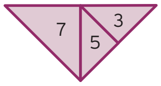
Logo, o quadrado azul tem lados que medem 15 (7 + 8 = 15).

6. Resposta pessoal. Sugestão de resposta: Considerando que os vértices do quadrado estão localizados no centro dos círculos, obtém-se a medida da área destacada subtraindo da medida da área do quadrado a soma da medida da área dos quatro quartos de círculo inscritos no quadrado (equivalente à medida da área de um círculo inteiro).

7. Numerando as sete peças do *tangram* a seguir, tem-se:



a) Resposta possível: Para cobrir uma das regiões triangulares maiores (peças 1 ou 2), usamos o triângulo médio (7) e os dois triângulos pequenos (3 e 5).

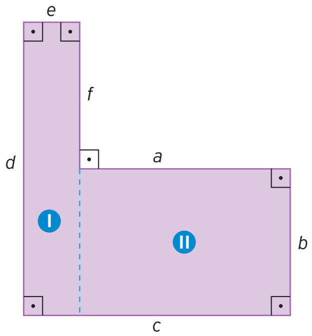


b) Como cada quadradinho tem medida da área igual a 1 cm^2, a medida da área da figura:

- 1 é igual a 4 cm^2;
- 2 é igual a 4 cm^2;
- 3 é igual a 1 cm^2;
- 4 é igual a 2 cm^2;
- 5 é igual a 1 cm^2;
- 6 é igual a 2 cm^2;
- 7 é igual a 2 cm^2.

8. **a)** Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes concordem com a fórmula, pois com ela é possível obter a medida da área da figura.

b) Uma resposta possível para esse exercício é decompor a figura em dois retângulos, conforme figura a seguir.



Ilustrações: ID/BR

Portanto, a medida da área do retângulo I é $e \cdot d$, a medida da área do retângulo II é $a \cdot b$ e a medida da área total da figura é dada pela soma das medidas de área dos retângulos I e II:

$$A = d \cdot e + a \cdot b \text{ ou } A = a \cdot b + d \cdot e$$

9. **a)** Para calcular a medida da área do gramado, é necessário encontrar a medida de cada uma de suas diagonais:

- $D = 2 \cdot 2{,}8 = 5{,}6$
- $d = 2 \cdot 2{,}2 = 4{,}4$

Portanto:

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

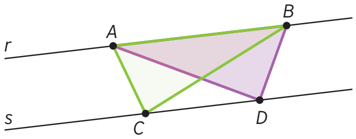
$$A_{\text{losango}} = \frac{5{,}6 \cdot 4{,}4}{2} = \frac{24{,}64}{2} = 12{,}32$$

Logo, a medida da área do gramado é igual a 12,32 m^2.

b) Como o preço por metro quadrado de grama é R$ 16,50, para cobrir essa parte do jardim, o custo, em reais, será de:

$$12{,}32 \cdot 16{,}50 = 203{,}28$$

10. Resposta pessoal. Resposta possível:



Considerando $\overline{AB}$ a base dos dois triângulos, temos que a altura também será a mesma, pois a altura de cada triângulo será a medida da distância entre as duas retas paralelas. Portanto, os triângulos têm áreas com a mesma medida.

11. A medida do volume da caixa maior é igual a 67 500 cm^3 ($50 \cdot 45 \cdot 30 = 67\,500$) e a medida do volume da caixa menor é igual a 1875 cm^3 ($25 \cdot 15 \cdot 5 = 1875$).

Portanto, cabem 36 caixas menores na caixa maior $\left(\frac{67\,500}{1875} = 36\right)$.

12. Alternativa **d**.

A medida do volume do cubo de aresta medindo 10 cm é 1000 cm^3 ($10^3 = 1000$), e a medida do volume do cubo de aresta medindo 6 cm é 216 cm^3 ($6^3 = 216$).

Sabemos que o paralelepípedo é a fusão dos dois cubos, então a medida do seu volume será igual a 1216 cm^3 ($1000 + 216 = 1216$).

Como esse paralelepípedo tem arestas medindo 8 cm, 8 cm e x cm, a medida de seu volume é igual a $64x$ ($8 \cdot 8 = 64$).

Portanto:

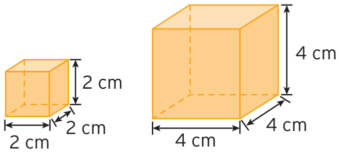
$$64x = 1216$$

$$x = \frac{1216}{64}$$

$$x = 19$$

Logo, o valor de x é 19.

13. Observe as peças maciças cúbicas que o artesão pretende derreter.



a) Medida do volume da peça cúbica cuja aresta mede 2 cm: $V_1 = 2^3 = 8$

Medida do volume da peça cúbica cuja aresta mede 4 cm: $V_2 = 4^3 = 64$

Portanto, a medida dos volumes das peças maciças cúbicas são 8 cm^3 e 64 cm^3.

b) Medida do volume da peça com a forma de bloco retangular:

$$V = V_1 + V_2 = 8 + 64 = 72$$

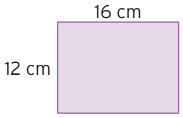
Portanto, a medida do volume da nova peça com a forma de bloco retangular é igual a 72 cm^3.

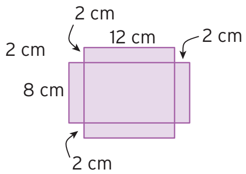
14. A medida do volume aproximado do pião é calculado com base na medida do volume deslocado no aquário.

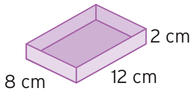
Como o nível da água subiu 0,4 cm, temos que o volume deslocado é de um paralelepípedo de medidas de comprimento 5 cm, de largura 10 cm e de altura 0,4 cm.

Portanto, a medida do volume do pião é igual a 20 cm^3 ($5 \cdot 10 \cdot 0{,}4 = 20$).

15. Observe a representação geométrica desta questão.







Portanto, as medidas das dimensões da caixa são 12 cm, 8 cm e 2 cm. Logo, a medida de seu volume é igual a 192 cm^3 ($2 \cdot 8 \cdot 12 = 192$).

Como no enunciado da questão foi pedido para encontrar a terça parte da medida do volume da caixa, então:

$$\frac{192}{3} = 64$$

Assim, a terça parte do volume da caixa mede 64 cm^3.

GERAÇÃO
ALPHA

Matemática 7

Ensino Fundamental | Anos finais | 7º ano
Componente curricular: Matemática

Carlos N. C. de Oliveira
Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática
e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP).
Especialista em Educação Matemática pelo
Centro Universitário Fundação Santo André (FSA).
Mestre em Educação Matemática pela
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).
Professor e coordenador de ensino de Matemática.

Felipe Fugita
Licenciado em Matemática pelo IME-USP.
Professor de Matemática.

Editora responsável: Isabella Semaan
Bacharela em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal do ABC (UFABC).
Editora e elaboradora de conteúdo para materiais didáticos.

Organizadora: SM Educação
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação.

São Paulo, 4ª edição, 2022

***Geração Alpha* Matemática 7**
© SM Educação
Todos os direitos reservados
Direção editorial Cláudia Carvalho Neves
Gerência editorial Lia Monguilhott Bezerra
Gerência de *design* e produção André Monteiro
Edição executiva Isabella Semaan
Edição: Cármen Matricardi, Carolina Maria Toledo, Cristiano Oliveira da Conceição, Diana Maia, Eduardo Chavante, Luana Fernandes de Souza
Suporte editorial: Fernanda de Araújo Fortunato
Coordenação de preparação e revisão Cláudia Rodrigues do Espírito Santo
Preparação: Ana Paula Perestrelo, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares
Revisão: Ana Paula Perestrelo, Helena Alves Costa, Maria Angélica Lau P. Soares, Renata Tavares
Apoio de equipe: Maria Clara Loureiro
Coordenação de *design* Gilciane Munhoz
***Design*:** Carla Almeida Freire, Tiago Stéfano, Victor Malta (Interação)
Coordenação de arte Andressa Fiorio
Edição de arte: Vitor Trevelin
Assistência de arte: Viviane Ayumi Yonamine
Assistência de produção: Júlia Stacciarini Teixeira
Coordenação de iconografia Josiane Laurentino
Pesquisa iconográfica: Camila D'Angelo, Fabio Matsuura
Tratamento de imagem: Marcelo Casaro
Capa João Brito/Gilciane Munhoz
Ilustração da capa: Denis Freitas
Projeto gráfico Rafael Vianna Leal
Pré-impressão Américo Jesus
Fabricação Alexander Maeda
Impressão

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Oliveira, Carlos N. C. de
Geração alpha matemática : 7º ano : ensino fundamental : anos finais / Carlos N. C. de Oliveira, Felipe Fugita ; editora responsável Isabella Semaan ; organizadora SM Educação ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação. — 4. ed. — São Paulo : Edições SM, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-65-5744-755-0 (aluno)
ISBN 978-65-5744-756-7 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Fugita, Felipe. II. Semaan, Isabella. III. Título.

22-111781 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

4ª edição, 2022

SM Educação
Avenida Paulista, 1842 – 18º andar, cj. 185, 186 e 187 – Condomínio Cetenco Plaza
Bela Vista 01310-945 São Paulo SP Brasil
Tel. 11 2111-7400
atendimento@grupo-sm.com
www.grupo-sm.com/br

Apresentação

Caro estudante,

Ser jovem no século XXI significa estar em contato constante com múltiplas linguagens, uma imensa quantidade de informações e inúmeras ferramentas tecnológicas. Isso ocorre em um cenário mundial que apresenta grandes desafios sociais, econômicos e ambientais.

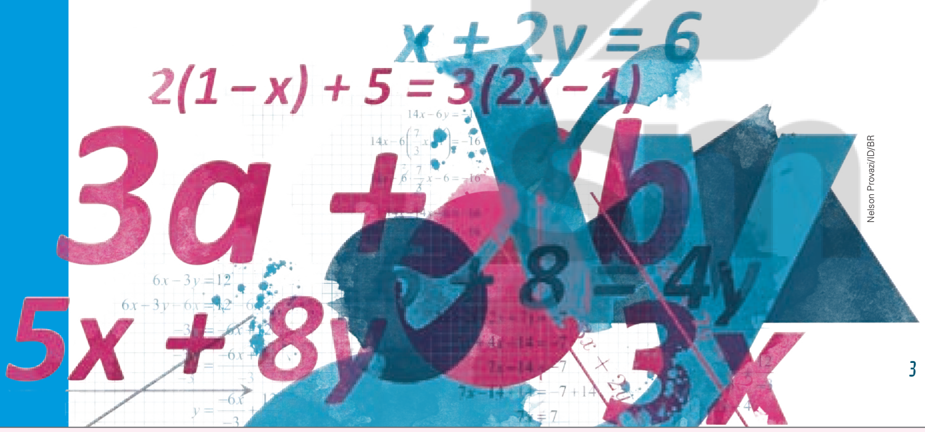
Diante dessa realidade, esta coleção foi cuidadosamente pensada para ajudar você a enfrentar esses desafios com autonomia e espírito crítico.

Atendendo a esse propósito, os textos, as imagens e as atividades nela propostos se configuram como oportunidades para que você reflita sobre o que aprende, expresse suas ideias e desenvolva habilidades de comunicação para as mais diversas situações de interação em sociedade.

Vinculados aos conhecimentos próprios de cada disciplina, são apresentados, em situações e atividades reflexivas, aspectos sobre valores universais, como justiça, respeito, solidariedade, responsabilidade, honestidade e criatividade. Esperamos, assim, contribuir para que você compartilhe dos conhecimentos construídos pela **Matemática** e os utilize para fazer escolhas responsáveis e transformadoras em sua vida.

Desejamos também que esta coleção contribua para que você se torne um jovem atuante na sociedade do século XXI, capaz de questionar a realidade em que vive e de buscar respostas e soluções para os desafios presentes e para os que estão por vir.

Equipe editorial



Nelson Provazi/ID/BR

Conheça seu livro

ABERTURA DE UNIDADE

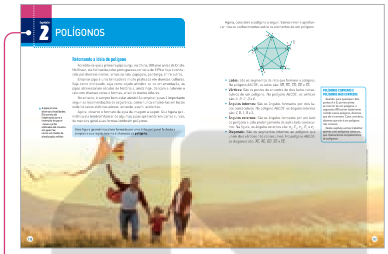
No início de cada unidade, você é apresentado ao tema que vai estudar.

Uma imagem vai instigar sua curiosidade.

Primeiras ideias

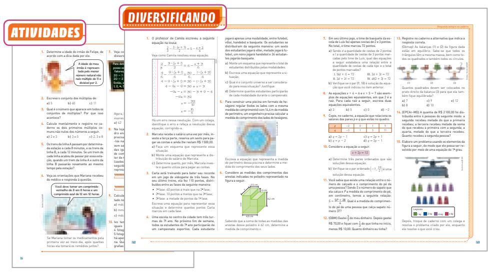
Texto que explica a imagem e permite estabelecer relações com o que será estudado na unidade. Algumas questões vão incentivar você a contar o que sabe do assunto e a levantar algumas hipóteses sobre ele.

CAPÍTULOS



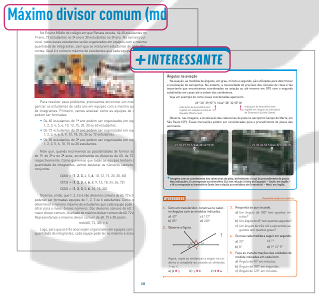
Abertura de capítulo

Textos, imagens e esquemas apresentam o conteúdo a ser estudado.

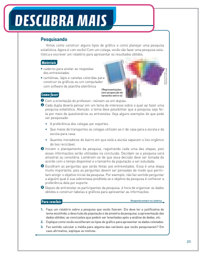


Atividades

As atividades vão ajudá-lo a desenvolver diferentes habilidades e competências. Após a apresentação dos conteúdos, vem a seção **Atividades**. E, no final de cada capítulo, há a seção **Diversificando**.

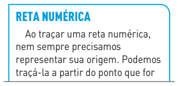


Os boxes **Matemática tem história** e **+Interessante** apresentam textos relacionados à história da Matemática e curiosidades.

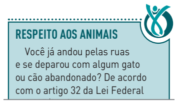


No boxe **Descubra mais**, você vai realizar atividades práticas e investigativas para aprender mais sobre o assunto estudado. Com os colegas, vai levantar hipóteses, desenvolver um trabalho investigativo ou de experimentação e elaborar conclusões.

Boxes


RETA NUMÉRICA
Ao traçar uma reta numérica, nem sempre precisamos representar sua origem. Podemos traçá-la a partir do ponto que for

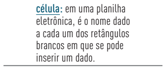
Esses boxes retomam, complementam e ampliam o assunto em estudo.


RESPEITO AOS ANIMAIS
Você já andou pelas ruas e se deparou com algum gato ou cão abandonado? De acordo com o artigo 32 da Lei Federal

Valor
Apresentam temas e questões relacionados a valores humanos para você refletir e se posicionar.


PARA EXPLORAR
Josh Bryan
Leia a reportagem e conheça as obras de arte de Josh Bryan. Utilizando apenas triângulos, esse artista cria retratos de

Para explorar
Oferecem indicações de livros, *sites* e passeios relacionados ao assunto.

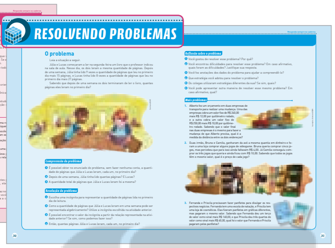

célula: em uma planilha eletrônica, é o nome dado a cada um dos retângulos brancos em que se pode inserir um dado.

Glossário
Expressões e palavras que talvez você não conheça são explicadas nesses boxes.

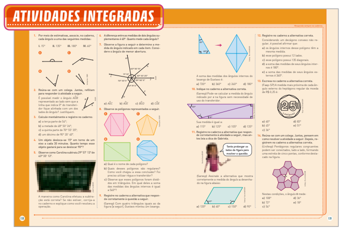
FECHAMENTO DE UNIDADE

Ampliando horizontes
Essa seção consta no final de algumas unidades e, com base em temas relacionados à Educação Financeira, convida você a refletir sobre como nossos valores influenciam nossa vida.

Investigar
Em dois momentos do livro, você vai entrar em contato com diferentes metodologias de pesquisa, como entrevistas, observação de campo, etc. Também vai desenvolver sua habilidade de comunicação ao compartilhar os resultados da investigação.



Resolvendo problemas
Com os problemas propostos, você vai desenvolver a compreensão e as estratégias de resolução, aliadas às habilidades de ler, representar informações diante de situações--problema e tomar decisões.



Atividades integradas
Essas atividades integram os assuntos da unidade. São uma oportunidade para você analisar o quanto aprendeu e refletir sobre os assuntos estudados.

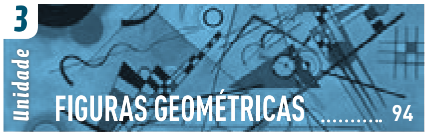
FINAL DO LIVRO

Interação
Essa seção propõe um projeto coletivo cujo produto poderá ser destinado à comunidade escolar.

Sumário

Michael Kappeler/DPA/Getty Images

Adriano Kirihara/Pulsar Imagens



Solomon R. Guggenheim Founding Collection, Schenkung, Fotografia: Album/akg-images/Easypix

Joacy Souza/Alamy/Fotoarena

Blair_witch/iStock/Getty Images

Cover Images/Zuma Press/Fotoarena

Carmen Mandato/Equipe/AsiaPac/Getty Images

Dean Mouhtaropoulos/Equipe/Getty Images

NESTA UNIDADE...

Competência geral
9

Competências específicas de Matemática
1 e 4.

Tema Contemporâneo Transversal
Meio Ambiente.

Habilidades

(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.

(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.

(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

UNIDADE 1

NÚMEROS

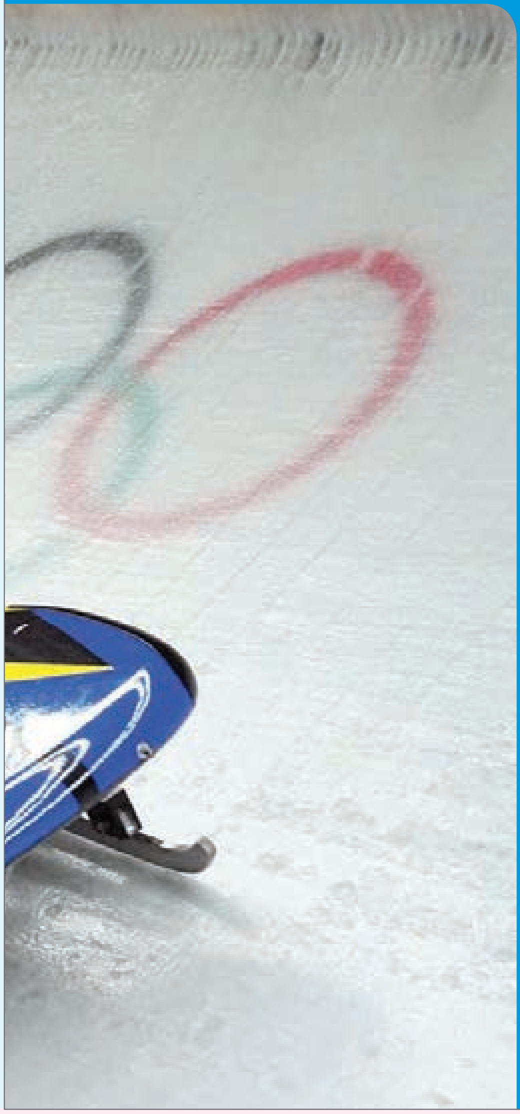
SOBRE A UNIDADE

O primeiro capítulo desta unidade trata de múltiplos e divisores de um número natural. De início, relaciona a ideia de divisibilidade ao conceito de múltiplo para, em seguida, abordar os múltiplos de um número natural, assim como o conceito de divisor desses números. Ambos são tratados por meio de situações-problema que estimulam os estudantes a perceber a necessidade da utilização desses conceitos para resolvê-las. Nesse sentido, as atividades propostas incentivam os estudantes a lançar mão de diferentes estratégias para a resolução dos diversos problemas apresentados.

Ao longo dos anos de escolaridade, os estudantes constroem conhecimentos relativos às diversas áreas do saber e, a cada ano, esses conhecimentos são ampliados e aprofundados. É a partir dessa perspectiva que os números inteiros serão abordados nesta unidade. Assim, os primeiros textos e atividades têm como objetivo conduzir os estudantes à percepção de que esses números, desde sua origem, foram criados para atender às demandas oriundas de diversas sociedades em diferentes momentos históricos.

A comparação entre números inteiros apresentada em muitas dessas situações é formalizada com o uso da reta numérica, possibilitando desenvolver, na perspectiva do pensamento numérico, a ideia de ordem.

Ainda em relação aos números inteiros, as situações utilizadas na apresentação das operações possibilitam aos estudantes resolver e



Michael Kappeler/DPA/Getty Images

PRIMEIRAS IDEIAS

Em 2022, aconteceu a 24ª edição dos Jogos Olímpicos de Inverno, em Pequim, na China.

Esses jogos reúnem modalidades esportivas que podem ser disputadas no gelo ou na neve, e a medida da temperatura ideal é entre −12 °C e 2 °C. Se a medida da temperatura for muito alta, a neve se tornará macia e a fricção aumentará; se for muito baixa, a neve se tornará sólida. Em ambos os casos, ela afetará o desempenho de atletas ou poderá causar ferimentos neles.

1. Se, em uma cidade, a medida da temperatura média durante os Jogos Olímpicos de Inverno é −15 °C, essa cidade apresenta a medida de temperatura ideal para sediar os jogos? Explique.
2. Você conhece alguma cidade do Brasil que pode ter medidas de temperatura abaixo de zero? Se sim, qual?

← Os brasileiros Edson Bindilatti e Edson Martins em prova de *bobsled two-man* nos Jogos Olímpicos de Inverno, em Pequim, China. Foto de 2022.

PRIMEIRAS IDEIAS

- Deixe que os estudantes explorem a foto e pergunte se eles conhecem o esporte apresentado. Depois, oriente-os a ler a legenda da foto e o texto. Pergunte: Por que no texto há uma temperatura indicada com um sinal de subtração (−) antes do número e a outra não possui sinal?
- Incentive os estudantes a refletir sobre situações do dia a dia em que utilizamos os números negativos. Verifique se compreendem o significado da expressão “números negativos”. Caso eles não a reconheçam, peça que observem novamente a imagem e analisem os números que indicam as medidas de temperatura. É possível relacionar medidas negativas de temperatura e números negativos.
- Diga aos estudantes que o Brasil esteve presente nas últimas oito edições dos Jogos Olímpicos de Inverno, a partir de 1992, mas nunca obteve um pódio. A maior delegação que o país já levou à competição foi em Sochi, na Rússia, em 2014, quando contou com 13 atletas.
- Proponha aos estudantes uma pesquisa sobre a quantidade de atletas brasileiros na delegação dos Jogos Olímpicos de Inverno de 2022 e em quantas modalidades eles participaram. Espera-se que, por meio dessa pesquisa, eles concluam que 11 atletas participaram dos Jogos Olímpicos de Inverno de 2022, em cinco modalidades: esqui *cross country*, esqui estilo livre, esqui alpino, *skeleton* e *bobsled*.

RESPOSTAS

1. Não, pois −15 °C não pertence ao intervalo ideal, que é de −12 °C a 2 °C.
2. Resposta pessoal. Os estudantes podem indicar, por exemplo, algumas cidades da Região Sul do país.

elaborar problemas envolvendo tais operações. Além disso, incentivam os estudantes a utilizar conhecimentos relativos a comparação e ordenação de números inteiros em sua associação com pontos da reta numérica para a resolução de problemas envolvendo adição e subtração.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Múltiplos.
- Divisores.
- Divisibilidade.
- Mínimo múltiplo comum.
- Máximo divisor comum.

Objetivos

- Relacionar o conceito de múltiplo à divisibilidade.
- Reconhecer os múltiplos de um número natural.
- Reconhecer os divisores de um número natural.
- Determinar o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum entre dois ou mais números naturais.
- Resolver problemas envolvendo os conceitos de múltiplo e divisor.
- Resolver problemas envolvendo os conceitos de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo que envolve múltiplos e divisores para compreender os conceitos de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum, além de ampliá-lo para que possam utilizar como suporte na aplicação em outros objetos de conhecimento nos capítulos seguintes e na resolução de problemas das diversas áreas de conhecimento.

DIVISIBILIDADE

- No início do capítulo, o conceito de divisibilidade é contextualizado a partir da produção de livros nas editoras. Explore outras situações nas quais esse conceito está presente, como os intervalos de administração de medicamentos prescritos por médicos que, geralmente, são de 6 em 6 horas, de 8 em 8 horas ou de 12 em 12 horas. Pergunte aos estudantes se eles entendem por que os médicos têm esse procedimento. Espera-se que eles percebam que todos esses números são divisores de 24, que é o número de horas de um dia.

Capítulo

1

MÚLTIPLOS E DIVISORES

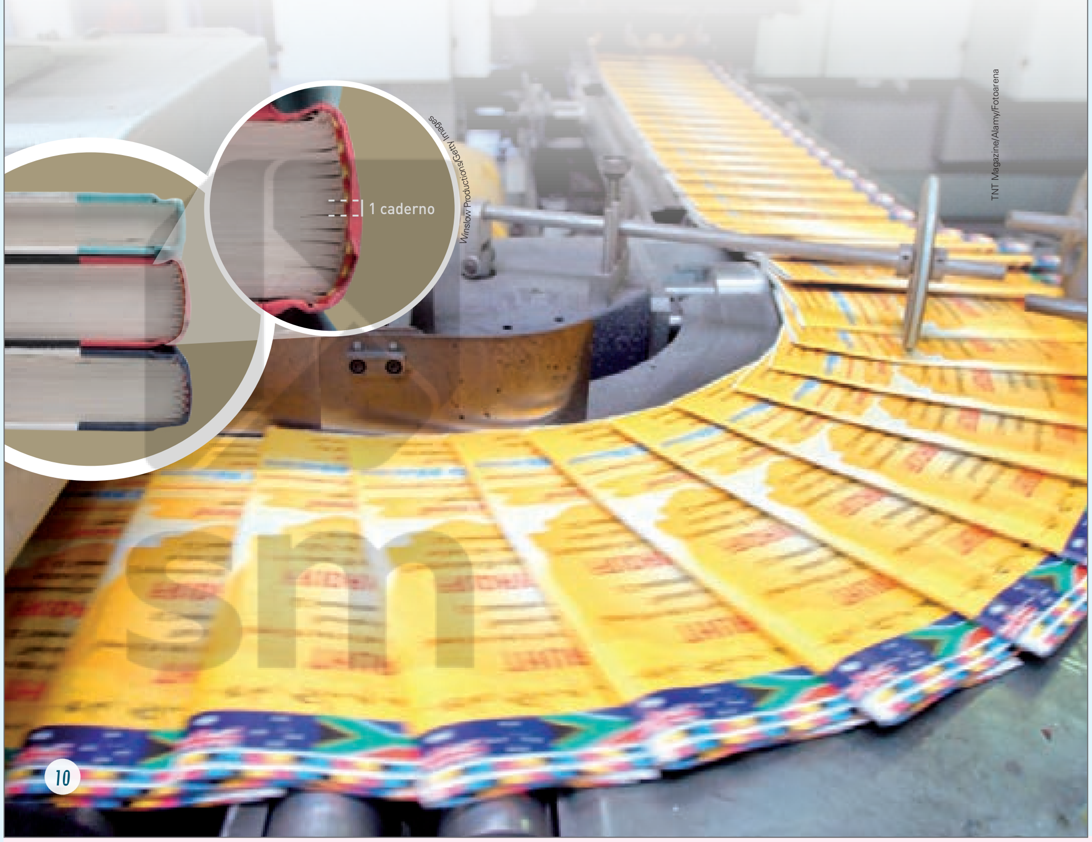
Para melhor compreensão deste conteúdo, os estudantes devem ter domínio dos conceitos de multiplicação e de divisão.

Divisibilidade

Na impressão de uma publicação, geralmente feita em uma gráfica, as páginas são organizadas para que se tenha o melhor aproveitamento possível do papel. Nesse processo, as páginas são dobradas e são formados conjuntos de páginas, chamados de cadernos. Depois de impressos, os cadernos são dobrados, cortados e, posteriormente, costurados, grampeados ou colados, dependendo do acabamento de cada publicação.

Você sabia que, em geral, sempre que dividimos o número de páginas de um livro por 8 obtemos uma divisão com resto zero? Faça o teste! Veja quantas páginas tem este livro e, usando uma calculadora, faça a divisão do total de páginas por 8. Que número você obteve como resto? **Zero.**

↓ O livro passa por diversas etapas dentro de uma gráfica antes de chegar às bancas e livrarias.



Winslow Productions/Getty Images

TNT Magazine/Alamy/Fotoarena

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Proponha a atividade a seguir para verificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre divisibilidade e múltiplos.

Um jogo tem 48 cartas que devem ser distribuídas igualmente entre os jogadores. Participam do jogo, no mínimo, 2 pessoas e cada uma delas deve ficar com pelo menos uma carta. Responda:

- Qual é o menor número de jogadores que podem participar do jogo? E qual é o maior? 2 jogadores; 48 jogadores.

  No caso da primeira pergunta, a resposta pode ser obtida no enunciado. Em relação à segunda, os estudantes devem interpretar o enunciado, compreendendo que, sendo 48 cartas no jogo e considerando a regra segundo a qual cada jogador deve ficar com pelo menos uma carta, então o maior número de jogadores é 48.

- Esse jogo pode ter 3 participantes? Pode ter 5 participantes? Sim; não.

  Espera-se que os estudantes percebam que, nesse jogo, é possível ter 3 participantes, mas não 5, pois 48 é divisível por 3, mas não é divisível por 5.

- De acordo com as regras do jogo, quais são as possibilidades de quantidade de jogadores que podem participar dele? 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 ou 48 jogadores.

  Espera-se que, por meio de tentativas, os estudantes descubram as possibilidades de quantidade de jogadores. Das duas primeiras questões, eles já sabem que é possível ter 2, 3 ou 48 jogadores. Incentive-os a testar as quantidades 4, 6, 7, etc.

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Guilherme está lendo o livro *Matemática divertida e curiosa*, de Malba Tahan. Esse livro tem 192 páginas. Vamos efetuar a divisão de 192 por 8 e verificar se ela tem resto zero.

$$\begin{array}{r|l} 192 & 8 \\ \cline{2-2} -16 & 24 \\ \cline{1-1} 32 & \\ -32 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Quando efetuamos uma divisão e obtemos resto igual a zero, dizemos que essa **divisão é exata**.

Ilustrações: João Picoli/ID/BR

Situação 2

Carolina gosta muito de ler revistas. Ela comprou uma que tinha 68 páginas. Vamos efetuar a divisão de 68 por 8 e verificar se essa divisão tem resto zero.

$$\begin{array}{r|l} 68 & 8 \\ \cline{2-2} -64 & 8 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

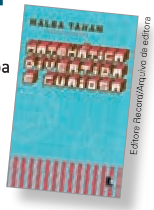
Quando efetuamos uma divisão e obtemos resto diferente de zero, dizemos que essa **divisão é não exata**.

Um número natural é **divisível** por outro número natural diferente de zero quando o resto da divisão é igual a zero, ou seja, quando a divisão é exata.

PARA EXPLORAR

***Matemática divertida e curiosa*, de Malba Tahan. São Paulo: Record, 1991.**

Recreações e curiosidades da Matemática que transformam a aridez dos números e a exigência de raciocínio em brincadeira, ao mesmo tempo útil e prazerosa.



Editora Record/Arquivo da editora

- Os conceitos de divisão exata e de divisão não exata já foram trabalhados em anos anteriores. Aproveite para discuti-los e retomar o algoritmo usual da divisão na forma longa e na forma breve.
- Estabeleça a relação da divisão exata com a expressão “ser divisível por”. Se julgar necessário, apresente alguns pares de números para que os estudantes verifiquem se um número é divisível por outro. Por exemplo, 128 e 3; 145 e 5; 1 792 e 7.
- Proponha aos estudantes dividir por 8 o número de páginas de outros livros didáticos que eles tenham na mochila para que verifiquem se a divisão será exata.

Situações como essa permitem aos estudantes compreender que um número só é divisível por outro quando o resto da divisão for igual a zero. Nesse caso, dizemos que esse número é múltiplo do outro.

MÚLTIPLOS DE UM NÚMERO NATURAL

- Explore a regularidade da sequência apresentada no texto, que diz respeito ao valor de venda das canetas.
- Retome os conceitos de operação inversa, divisão exata e divisão não exata. Relacione a divisão exata com as expressões “ser múltiplo de” e “ser divisível por”. Verifique se os estudantes compreendem que, por exemplo, dizer que 672 é múltiplo de 56 é o mesmo que dizer que 672 é divisível por 56.
- Se julgar necessário, faça outras perguntas como as dos exemplos desta página.
- O estudo dos múltiplos de um número natural proporciona aos estudantes situações de aprendizagem que desenvolvem noções de pensamento computacional (identificação de padrões), mobilizando diferentes processos cognitivos, na medida em que reconhecem sequências numéricas, identificam seus termos e estabelecem regras para obter os próximos números.

DE OLHO NA BASE

A situação apresentada nesta página, que envolve a noção de múltiplo de um número natural, auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF07MA01**.

Múltiplos de um número natural

Em uma papelaria, uma caneta é vendida a 2 reais. O dono da papelaria montou um quadro para verificar quantos reais ele ganha de acordo com a venda das canetas. Observe.

Quantidade de canetas vendidas	Cálculo do valor da venda	Valor (em reais)
0	$0 \cdot 2 = 0$	0
1	$1 \cdot 2 = 2$	2
2	$2 \cdot 2 = 4$	4
3	$3 \cdot 2 = 6$	6
4	$4 \cdot 2 = 8$	8
5	$5 \cdot 2 = 10$	10
6	$6 \cdot 2 = 12$	12
7	$7 \cdot 2 = 14$	14
⋮	⋮	⋮

Os números da última coluna – 0, 2, 4, 6, 8, 10, ... – formam a sequência dos **múltiplos de 2**. O conjunto dos múltiplos de 2 é indicado por:

$$M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$$

Os múltiplos de 2 podem ser obtidos quando multiplicamos os números naturais por 2.

Múltiplo de um número natural é o produto desse número por um número natural qualquer.

Exemplos

A. 300 é múltiplo de 10?

Sim, pois $30 \cdot 10 = 300$.

B. 69 é múltiplo de 13?

Não, pois não há número natural que multiplicado por 13 resulte em 69.

Para descobrir se um número é múltiplo de outro, podemos usar a operação inversa da multiplicação, ou seja, a divisão.

Exemplos

A. 672 é múltiplo de 56?

```
 672 |56
−56   12
 112
−112
   0
```

Como a divisão de 672 por 56 é exata, então 672 é múltiplo de 56.

B. 148 é múltiplo de 13?

```
 148 |13
−13   11
 018
 −13
  05
```

Como a divisão de 148 por 13 não é exata, então 148 não é múltiplo de 13.

C. 2018 é múltiplo de 21?

Vamos verificar utilizando uma calculadora.

2 0 1 8 ÷ 2 1 = 96,095238

Como o quociente obtido não é um número inteiro, ou seja, a divisão não é exata, então 2018 não é múltiplo de 21.

Observações

- Todo número natural é múltiplo de si mesmo.
- O zero é múltiplo de qualquer número natural.
- Um número natural diferente de zero tem infinitos múltiplos.

Mínimo múltiplo comum (mmc)

Um enfeite luminoso tem luzes azuis e vermelhas. As luzes azuis piscam a cada 30 segundos, e as luzes vermelhas piscam a cada 20 segundos. Sabendo que, quando o enfeite é ligado, as luzes azuis e vermelhas piscam juntas, depois de quanto tempo essas luzes piscam juntas novamente?

Para responder à pergunta, precisamos determinar os instantes em que as luzes piscam juntas e descobrir qual é o primeiro instante em que isso acontece, depois que o enfeite é ligado.

Primeiro, vamos escrever os instantes em que cada cor de luz pisca:

- As luzes **azuis** piscam nos seguintes instantes, em segundos:
  0, 30, 60, 90, 120, 150, ...
- As luzes **vermelhas** piscam nos seguintes instantes, em segundos:
  0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, ...

Observe que, ao escrever os instantes em que as luzes azuis e vermelhas piscam, encontramos os múltiplos de 30 e de 20, respectivamente. Como queremos saber os intervalos de tempo em que as duas cores piscam juntas, vamos destacar os números comuns aos dois conjuntos:

M(30) = {**0**, 30, **60**, 90, **120**, 150, ...}

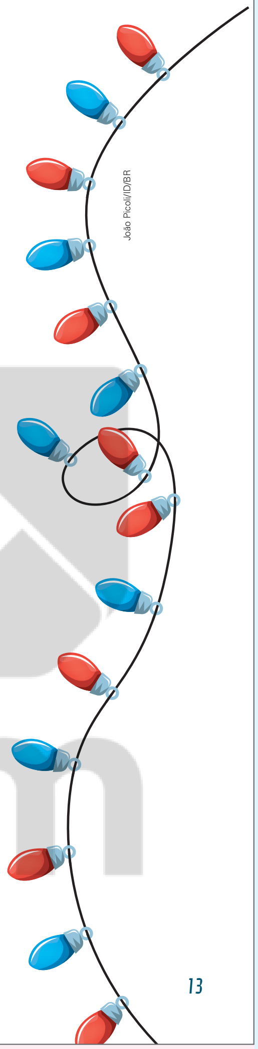
M(20) = {**0**, 20, 40, **60**, 80, 100, **120**, 140, 160, ...}

Dizemos, então, que 0, 60 e 120 são alguns dos múltiplos comuns de 30 e de 20. Assim, as luzes azuis e vermelhas piscam juntas no instante 0 (quando o enfeite é ligado), depois de 60 segundos, depois de 120 segundos, e assim por diante.

Como queremos determinar o primeiro instante em que as luzes azuis e vermelhas piscam juntas depois que o enfeite é ligado, basta olhar para o menor múltiplo comum desses números diferente de zero, que é o instante em que o enfeite é ligado. O menor múltiplo comum, também chamado de mínimo múltiplo comum, de 30 e de 20, tirando o zero, é o 60. Representamos o mínimo múltiplo comum de 30 e 20 assim:

mmc(30, 20) = 60

Logo, as luzes azuis e vermelhas piscam juntas depois de 60 segundos.


João Picoli/ID/BR

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (mmc)

- É importante que os estudantes entendam que existem diversos múltiplos comuns a dois ou mais números naturais e que o menor entre eles, diferente de zero, é o mínimo múltiplo comum (mmc) desses números.
- Reproduza o conjunto dos múltiplos de 30 e o dos múltiplos de 20 na lousa e destaque os números comuns aos dois conjuntos. Verifique se os estudantes compreenderam que os números destacados correspondem aos instantes em que as luzes azuis e vermelhas piscam ao mesmo tempo.
- Se julgar oportuno, pergunte aos estudantes: Se o enfeite tivesse também luzes verdes piscando de 15 em 15 segundos, quando as três cores piscariam juntas?
  Peça aos estudantes que escrevam os múltiplos de 15 e verifiquem qual é o menor número diferente de zero que aparece nos conjuntos dos múltiplos de 30, de 20 e de 15. Espera-se que eles apontem o número 60.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Após a leitura do trecho sobre o enfeite luminoso, apresente aos estudantes o seguinte problema e proponha a eles que se organizem em duplas para que respondam às questões.

Pedro e João moram no 3º andar de um edifício e optaram por usar as escadas em vez de usar o elevador, pois gostam de se exercitar. Do térreo ao 3º andar são 60 degraus. Pedro, que é alto, sobe a escada de três em três degraus. Já João sobe de dois em dois degraus. Considerem degraus numerados de 1 a 60 e respondam:

a) Quais são os números dos degraus em que Pedro pisa? 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60.

b) Quais são os números dos degraus em que João pisa? 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60.

c) João e Pedro pisam em degraus com o mesmo número. Quais são esses números? Qual é o menor desses números? 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60. O menor deles é 6.

Pergunte aos estudantes se com a resolução desse problema é possível dizer qual é o mmc de 2 e 3. Espera-se que eles concluam que o mmc(2, 3) é 6.

DIVISORES DE UM NÚMERO NATURAL

- Explique aos estudantes que, na situação apresentada nesta página, a professora vai organizar os estudantes em grupos que devem ter a mesma quantidade de componentes.
- Se julgar produtivo, simule essa situação com a sua turma. Peça a 12 estudantes que se posicionem de frente para os colegas e pergunte aos demais estudantes como os grupos podem ser organizados. Verifique se os estudantes percebem que há diferentes maneiras de fazer essa organização.
- Discuta com os estudantes sobre o esquema e o quadro mostrados na página e confronte sua explicação com as hipóteses levantadas por eles na simulação.
- Proponha, então, que organizem a turma em grupos com a mesma quantidade de componentes (essa tarefa pode ser feita apenas no papel). Por exemplo, se a turma tiver 35 estudantes, é possível fazer 1 grupo com 35 estudantes, 5 grupos com 7 estudantes cada um, 7 grupos com 5 estudantes cada um ou 35 grupos com 1 estudante cada um.
- Ao apresentar os exemplos, pergunte aos estudantes qual é a relação entre múltiplos e divisores. Incentive-os a perceber que, se 3 é divisor de 159, então 159 é múltiplo de 3. Assim, se 8 não é divisor de 751, então 751 não é múltiplo de 8.

DE OLHO NA BASE

A situação inicial desta página, que envolve a noção de divisor de um número natural, auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF07MA01**.

Divisores de um número natural

Para realizar uma gincana, a professora vai organizar 12 estudantes em grupos. Sabendo que em cada grupo deve haver a mesma quantidade de estudantes e que não podem sobrar estudantes, como os grupos poderão ser formados?

Para responder a essa pergunta, vamos pensar em quantidades de grupos e quantos estudantes ficariam em cada grupo.

- 1 grupo → 12 estudantes.
- 2 grupos → 6 estudantes em cada um.
- 3 grupos → 4 estudantes em cada um.
- 4 grupos → 3 estudantes em cada um.
- 5 grupos → Não é possível colocar o mesmo número de estudantes em cada grupo sem sobrar estudantes.

Seguindo esse raciocínio, temos:

Quantidade de grupos	Quantidade de estudantes em cada grupo
1	12
2	6
3	4
4	3
6	2
12	1

Assim, dependendo da quantidade de estudantes em cada grupo, poderão ser formados 1, 2, 3, 4, 6 ou 12 grupos. Dizemos que os números 1, 2, 3, 4, 6 e 12 são **divisores** de 12, pois, ao dividir 12 por qualquer um desses números, obtemos uma divisão exata. Podemos indicar o conjunto dos divisores de 12 da seguinte maneira:

$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Exemplos

A. 3 é divisor de 159?

$$\begin{array}{r|l} 159 & 3 \\ \hline 09 & 53 \\ 0 & \end{array}$$

Como a divisão de 159 por 3 é exata, então 3 é divisor de 159.

B. 8 é divisor de 757?

$$\begin{array}{r|l} 757 & 8 \\ \hline 37 & 94 \\ 5 & \end{array}$$

Como a divisão de 757 por 8 não é exata, então 8 não é divisor de 757.

Observações

- O zero não é divisor de nenhum número natural.
- Todo número natural tem como divisor o número 1.
- Todo número natural diferente de zero é divisor dele mesmo.

(IN)FORMAÇÃO

Informações históricas despertam o interesse dos estudantes pela Matemática e podem ser trazidas para a aula para estimular e ampliar o aprendizado. Caso opte por apresentar aos estudantes o texto a seguir, sugira a eles que, ao final da leitura, verifiquem se 1 184 e 1 210 são números amigáveis. Cumprida a tarefa, conte-lhes que esse par foi descoberto em 1866 por um adolescente italiano, Nicolo Paganini, que na época tinha apenas 16 anos.

Aritmética pitagórica

[...] Dois números se dizem amigáveis se cada um deles é igual à soma dos divisores próprios[3] do outro. Por exemplo, 284 e 220, que constituem o par atribuído a Pitágoras, são amigáveis porque os divisores próprios de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110, cuja soma é 284, ao passo que os divisores próprios de 284 são 1, 2, 4, 71 e 142, cuja soma é 220. [...] Parece que nenhum novo par de números amigáveis foi descoberto até que o grande especialista francês em teoria dos números Pierre de Fermat anunciou em 1636 um novo par formado por 17 296 e 18 416. Estabeleceu-se recentemente, porém, que se tratava de uma redescoberta e que esse par fora encontrado antes pelo árabe al-Banna (1256-1321) no fim do século XIII ou começo do século XIV [...]. Dois anos após a participação de Fermat, o ma-

Máximo divisor comum (mdc)

No Ensino Médio do colégio em que Renata estuda, há 60 estudantes no 1º ano, 72 estudantes no 2º ano e 30 estudantes no 3º ano. Na semana cultural, todos esses estudantes serão organizados em equipes com a mesma quantidade de integrantes, sem que se misturem estudantes de anos diferentes. Qual é o número máximo de estudantes que cada equipe pode ter?

Danilo Souza/ID/BR

Para resolver esse problema, precisamos encontrar um modo de organizar os estudantes de cada ano em equipes com a mesma quantidade de integrantes. Primeiro, vamos analisar como as equipes de cada ano podem ser formadas:

- Os 60 estudantes do 1º ano podem ser organizados em equipes de: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 ou 60 estudantes.
- Os 72 estudantes do 2º ano podem ser organizados em equipes de: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 ou 72 estudantes.
- Os 30 estudantes do 3º ano podem ser organizados em equipes de: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 ou 30 estudantes.

Note que, quando escrevemos as possibilidades de formar as equipes do 1º, do 2º e do 3º anos, encontramos os divisores de 60, de 72 e de 30, respectivamente. Como queremos que todas as equipes tenham a mesma quantidade de integrantes, vamos destacar os números comuns aos três conjuntos:

$$D(60) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 4, 5, \mathbf{6}, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

$$D(72) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 4, \mathbf{6}, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

$$D(30) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 5, \mathbf{6}, 10, 15, 30\}$$

Dizemos, então, que 1, 2, 3 e 6 são divisores comuns de 60, 72 e 30. Assim, poderão ser formadas equipes de 1, 2, 3 ou 6 estudantes. Como queremos determinar o número máximo de estudantes que cada equipe pode ter, basta olhar para o maior desses números. Dos divisores comuns de 60, 72 e 30, o maior divisor comum, chamado de máximo divisor comum de 60, 72 e 30, é o 6. Representamos o máximo divisor comum de 60, 72 e 30 assim:

$$\text{mdc}(60, 72, 30) = 6$$

Logo, para que os três anos sejam organizados em equipes com a mesma quantidade de integrantes, cada equipe pode ter no máximo 6 estudantes.

MÁXIMO DIVISOR COMUM (mdc)

- É importante que os estudantes entendam que existem vários divisores comuns a dois ou mais números naturais e que o maior entre eles é o máximo divisor comum (mdc) desses números.
- Se julgar conveniente, proponha um problema parecido com o apresentado, mas com apenas dois números. Por exemplo: As turmas 7º A e 7º B da escola em que Júlia estuda participarão de uma competição de conhecimentos gerais. Nessa competição, é necessário formar equipes com o mesmo número de estudantes. Além disso, estudantes de turmas diferentes não podem compor a mesma equipe. No 7º A há 36 estudantes e no 7º B, 30 estudantes. Antes de os estudantes responderem qual é o número máximo de componentes em cada equipe, pergunte-lhes se, nessas condições, é possível formar equipes com 2 componentes, com 3 componentes, com 5 componentes e assim sucessivamente. Dessa maneira, os estudantes poderão perceber que a quantidade de componentes de cada equipe deve ser um número divisor comum aos números correspondentes às quantidades de estudantes em cada turma. Portanto, é possível ter equipes formadas por 2 componentes, pois 2 é divisor comum a 36 e 30. Também é possível ter equipes com 3 componentes, uma vez que 3 também é divisor comum a 36 e 30. Entretanto, o mesmo não acontece se quisermos formar equipes com 5 componentes, pois, embora 5 seja divisor de 30, ele não é divisor de 36; portanto, não é um divisor comum a 36 e 30.
- Depois de os estudantes encontrarem todas as possibilidades de formação das equipes, pergunte a eles qual é o número máximo de componentes por equipe. Espera-se que eles respondam que o número máximo de componentes por equipe é 6.

temático e filósofo francês René Descartes deu um terceiro par. Um estudo sistemático dos números amigáveis foi empreendido pelo matemático suíço Leonardo Euler, que, em 1747, deu uma lista de trinta pares, ampliada por ele mais tarde para mais de sessenta. [...] Todos os números amigáveis inferiores a um bilhão já foram encontrados. [...]

---

[3] Os *divisores próprios* de um número positivo *N* são todos os divisores inteiros positivos de *N* exceto o próprio *N*. [...]

Eves, H. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2011. p. 98-99.

- Na atividade **7**, solicite aos estudantes que registrem os procedimentos utilizados para determinar os divisores em cada item.
- Na atividade **9**, verifique se os estudantes percebem os seguintes fatos:
  - Quando um número for múltiplo do outro, como nos itens **a** e **b**, o mdc será o menor deles e o mmc será o maior entre eles.
  - O mdc entre 1 e qualquer outro número inteiro sempre será 1, como no item **d**. Já o mmc, nessas condições, será o outro número, como no item **f**.
  - Quando ambos os números forem primos, como no item **e**, o mdc será 1 e o mmc será o produto entre ambos.

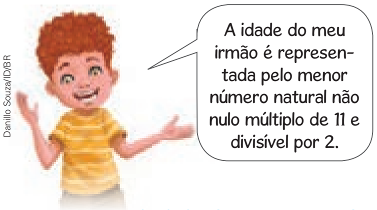
  Caso necessário, apresente aos estudantes outras situações. O importante é que primeiro eles percebam sozinhos tais regularidades e, então, apresente a eles as afirmações sistematizadas. Em seguida, solicite que deem diferentes exemplos para cada uma das afirmações.
- Em relação à atividade **10**, os estudantes devem observar que o menor número de fotografias em cada álbum é o resultado do mmc entre 4 e 5, lembrando que na última página de cada álbum tem uma fotografia.

2. a) M(5) = {0, 5, 10, 15, 20, ...}
b) M(40) = {0, 40, 80, 120, ...}

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Determine a idade do irmão de Felipe, de acordo com a dica dada por ele. **22 anos.**



Danillo Souza/ID/BR

2. c) M(11) = {0, 11, 22, 33, 44, ...}

2. Escreva o conjunto dos múltiplos de:

a) 5 b) 40 c) 11

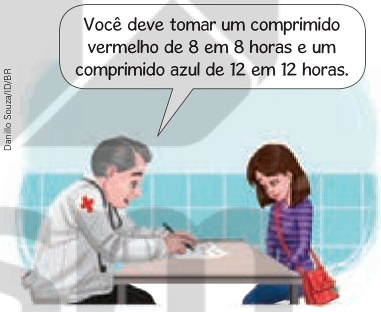
3. Qual é o número que aparece em todos os conjuntos de múltiplos? Por que isso acontece? **Zero. Porque qualquer número natural multiplicado por zero resulta em zero.**

4. Calcule mentalmente e registre no caderno os dois primeiros múltiplos comuns não nulos dos números a seguir.

a) 2 e 3 **6 e 12** b) 3 e 5 **15 e 30** c) 2, 3 e 8 **24 e 48**

5. Os trens da linha A passam por determinada estação a cada 8 minutos, e os trens da linha B, a cada 12 minutos. Se um trem de cada linha acabou de passar por essa estação, quando um trem da linha A e outro da linha B passarão novamente ao mesmo tempo pela estação? **Em 24 minutos.**

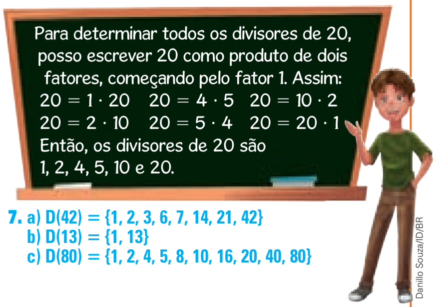
6. Veja as orientações que Mariana recebeu do médico e responda à questão.



Danillo Souza/ID/BR

Se Mariana tomar os medicamentos pela primeira vez ao meio-dia, após quantas horas ela tomará os remédios juntos? **Ao meio-dia do dia seguinte.**

7. Veja como Daniel fez para determinar os divisores de 20.



Para determinar todos os divisores de 20, posso escrever 20 como produto de dois fatores, começando pelo fator 1. Assim:

$20 = 1 \cdot 20$ $20 = 4 \cdot 5$ $20 = 10 \cdot 2$

$20 = 2 \cdot 10$ $20 = 5 \cdot 4$ $20 = 20 \cdot 1$

Então, os divisores de 20 são 1, 2, 4, 5, 10 e 20.

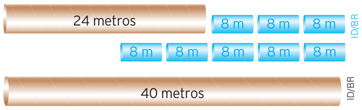
Danillo Souza/ID/BR

7. a) D(42) = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}
b) D(13) = {1, 13}
c) D(80) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80}

Agora, faça como Daniel e encontre os divisores de:

a) 42 b) 13 c) 80

8. Na loja de material de construção, Pedro encontrou os tubos de PVC de que precisava. No entanto, para poder usá-los na obra que está fazendo, eles devem ser cortados em pedaços de medidas iguais. Determine a maior medida de comprimento que cada pedaço deve ter de modo que os dois tubos sejam utilizados inteiramente, sem sobras. Em seguida, desenhe os tubos no caderno e represente as divisões. **8 metros**



ID/BR

ID/BR

9. Calcule mentalmente e registre o resultado no caderno.

a) mdc(12, 36) **12**
b) mmc(6, 30) **30**
c) mdc(12, 18) **6**
d) mdc(1, 98) **1**
e) mmc(5, 7) **35**
f) mmc(1, 56) **56**

10. Ivo tem dois álbuns com quantidades iguais de fotografias: no primeiro há 4 fotografias por página e, no segundo, 5 fotografias por página. Nos dois álbuns há apenas uma fotografia na última página. Qual é a menor quantidade de fotografias que cada álbum pode ter? **21 fotografias.**

ESTRATÉGIAS DE APOIO – SEÇÃO DIVERSIFICANDO

No estudo do mmc e do mdc, a maior dificuldade dos estudantes não é em relação ao cálculo em si, mas em descobrir se a situação apresentada é resolvida através do cálculo do mmc ou do mdc.

Por isso, é fundamental que eles entendam a diferença entre múltiplos e divisores de um ou mais números. A ideia de múltiplo remete a repetição de eventos – isso vem da própria definição de múltiplos. Já a ideia de divisores está associada a partição, o que também acontece devido ao significado de divisor e de divisão exata.

Para auxiliar os estudantes, enfatize a interpretação dos problemas e, sempre que possível, contextualize os problemas que podem ser resolvidos usando mmc ou mdc.

Antes de resolver os problemas destas páginas, peça aos estudantes que leiam os enunciados das atividades **5**, **6**, **8** e **10** da página 16 e as atividades **1** a **8** da página 17 e dividam-nas em dois grupos: problemas que serão resolvidos por mmc e problemas que serão resolvidos por mdc. Sugira a eles que façam esquemas e anotem como pensaram para descobrir em qual dos dois casos cada problema se enquadra, enquanto leem os enunciados.

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. Raquel faz barras de chocolate e vende-as em pacotes. Ela produziu 102 barras de chocolate branco e 162 barras de chocolate ao leite.

a) Se Raquel colocar quantidades iguais de barras de chocolate em cada pacote, sem misturar os tipos de chocolate, quantas barras, no máximo, ela poderá colocar em cada pacote? **6 barras.**

b) Quantos pacotes de chocolate branco serão formados? E quantos de chocolate ao leite? **17 pacotes; 27 pacotes.**

2. O conteúdo de um tanque pode ser distribuído tanto em recipientes com capacidade para 25 litros como em recipientes com capacidade para 30 litros, e, em ambos os casos, os recipientes ficam cheios até sua capacidade máxima. Qual é a capacidade mínima que o tanque pode ter? **150 litros.**

3. Um grupo de turistas fez uma viagem em vários ônibus que comportavam 50 pessoas cada um sem que sobrasse lugar. No caminho de volta, todos os ônibus usados tinham capacidade para 45 lugares e todos estavam com a capacidade máxima de passageiros. Quantas pessoas, no mínimo, fizeram essa viagem? **450 pessoas.**

4. Usando placas iguais, todas quadradas, um decorador vai revestir uma parede com formato retangular que mede 300 cm de largura e 260 cm de altura.

a) Qual é a maior medida possível do comprimento do lado das placas, em centímetro, sabendo que a parede deve ser revestida sem que nenhuma placa seja cortada? **20 cm**

b) Considerando a medida do comprimento da placa obtida no item anterior, faça um desenho da parede revestida e calcule quantas placas serão necessárias para revesti-la. **Consulte a resposta neste manual.**

5. Maria é costureira e quer dividir uma fita vermelha que mede 90 metros de comprimento e uma fita azul que mede 120 metros de comprimento em partes iguais de maior medida possível, de modo que não sobre nenhum pedaço. Qual deve ser a medida do comprimento de cada parte? **30 metros.**

6. Dois cabos de aço devem ser cortados em pedaços de medidas iguais, de modo que os pedaços fiquem com a maior medida de comprimento possível.

a) Se um cabo mede 60 metros de comprimento e o outro mede 48 metros, que medida de comprimento terá cada pedaço? **12 metros.**

b) Quantos pedaços serão obtidos? **9 pedaços.**

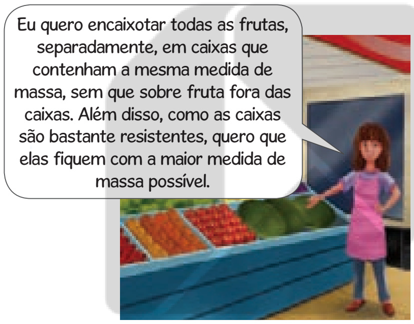
7. Um farol de sinalização marítima pisca a cada 15 segundos, e outro farol pisca a cada 20 segundos. Sabendo que eles foram ligados simultaneamente, quantos segundos se passam até que os faróis pisquem juntos outra vez? **60 segundos.**

8. Vera comprou 130 bolinhas de queijo e 540 coxinhas para levar a uma festa. Na lanchonete, um dos funcionários decidiu embalar os salgadinhos sem misturá-los. Cada embalagem tinha a mesma quantidade de salgadinhos e, por economia, o funcionário usou a menor quantidade de embalagens.

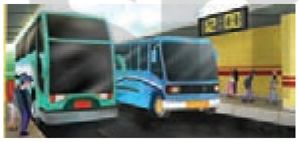
a) Quantos salgadinhos havia em cada embalagem? **10 salgadinhos.**

b) Com quantas embalagens Vera chegou à festa? **Com 67 embalagens.**

9. Observe a cena a seguir e elabore um problema que envolva, em sua resolução, o cálculo do máximo divisor comum. Depois, troque de problema com um colega, para que ele resolva o problema que você criou e você resolva o problema que ele criou. **Resposta pessoal.**



10. Elabore um problema com base na ilustração a seguir que envolva, em sua resolução, o cálculo do mínimo múltiplo comum. **Resposta pessoal.**



Ilustrações: Danillo Souza/ID/BR

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

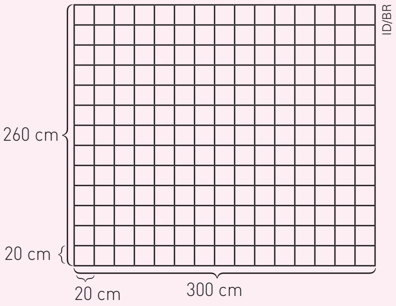
- Nesta seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- A atividade **2** apresenta uma falsa ideia de partição, e os estudantes podem pensar que se trata de um problema envolvendo divisores. Para perceber que se trata de múltiplos, é necessário constatar que o tanque foi completado pelos recipientes até ficar totalmente cheio, o que é uma ideia de repetição.
- A atividade **4** pode ser resolvida de diferentes maneiras. Uma delas é por meio do cálculo do mdc de 300 e 260. Para calcular a quantidade de placas, pode-se dividir a medida de cada dimensão por 20.
- Na atividade **8**, se a quantidade de embalagens é a menor possível, então a quantidade de salgadinhos por embalagem será a maior possível. A ideia associada ao mdc é de dividir em partes iguais e se obter a maior quantidade de salgadinhos possível. Uma das dificuldades que os estudantes poderão encontrar nesta atividade é determinar o mdc entre 130 e 540, pois são muitos os divisores desses números, sobretudo do 540. Uma sugestão é dividir ambos por 10 e, assim, encontrar o mdc entre 13 e 54 que é 1, já que 13 é primo e 54 não é múltiplo de 13. Considerando que foram divididos por 10 e para que o resultado não seja alterado, ele deve ser multiplicado por 10.
- Na atividade **9**, proponha aos estudantes que resolvam o problema elaborado antes de trocá-lo com o colega. Dessa forma, podem verificar se o problema tem solução e facilitar a correção da resposta do colega.

DE OLHO NA BASE

As atividades destas páginas trabalham com resolução e elaboração de problemas que envolvem as noções de múltiplos e divisores de um número natural, permitindo desenvolver a habilidade **EF07MA01**.

RESPOSTA

4. b)



Serão necessárias 195 placas.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Conjunto dos números inteiros.
- Representação dos números inteiros na reta numérica.
- Comparação e ordenação de números inteiros.
- Módulo (ou valor absoluto) de um número inteiro.
- Oposto (ou simétrico) de um número inteiro.

Objetivos

- Reconhecer o uso dos números negativos por meio de diferentes situações.
- Compreender o conjunto dos números inteiros como ampliação do conjunto dos números naturais.
- Localizar números inteiros na reta numérica.
- Compreender os conceitos de sucessor e de antecessor de um número inteiro.
- Compreender que o conceito de módulo (ou valor absoluto) de um número inteiro está relacionado com a distância desses números em relação ao zero.
- Compreender o conceito de números opostos (ou simétricos).
- Comparar e ordenar números inteiros.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de reconhecer números positivos e números negativos em situações como medidas de temperatura e operações bancárias, utilizando também a reta numérica como apoio à aprendizagem deles sobre o conjunto dos números inteiros. Esses estudos são importantes para que os estudantes tenham maior compreensão da relação de números inteiros com situações do dia a dia.

NÚMEROS POSITIVOS E NÚMEROS NEGATIVOS

- Aproveite a imagem de abertura deste capítulo e converse com os estudantes a respeito do degelo dos *icebergs* em virtude da poluição e do efeito estufa, fenômenos causados pelo ser humano e que têm aumentado a temperatura da Terra, alterado o meio ambiente e comprometido a sobrevivência de alguns seres vivos desde plânctons até a existência da fauna, da flora e do próprio ser humano. Apresente um texto sobre o derretimento do maior *iceberg* do mundo e suas consequências para o planeta (disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-60067125; acesso em: 24 maio 2022). Se julgar necessário, mostre a eles uma galeria de imagens de um *iceberg* que se desprendeu (disponível em: https://www.nationalgeographicbrasil.com/revista/o-iceberg-gigante-que-se-desprendeu-e-apenas-o-comeco-a-antartida-derrete; acesso em: 24 maio 2022). Pergunte a eles que providências podem ser tomadas para reduzir o derretimento das calotas polares, que também regulam a temperatura do planeta. Essa proposta com a turma contribui para o desenvolvimento de tema Educação Ambiental, que pertence à macroárea **Meio Ambiente** dos **Temas Contemporâneos Transversais**.
- Muitas são as situações nas quais os números negativos estão presentes. O texto traz ideias acerca de medidas dos *icebergs* considerando que parte deles se encontra acima do nível do mar e outra parte abaixo do nível do mar. Em seguida, há exemplos da presença dos números negativos em temperaturas e transações bancárias. Outras situações podem ser exploradas com os estudantes: os andares de um edifício, acima e abaixo do térreo; resultados finais de jogos, que dependem dos pontos que os jogadores ganharam ou perderam; saldo de gols nas tabelas dos campeonatos de futebol, etc.

Capítulo

2 NÚMEROS INTEIROS

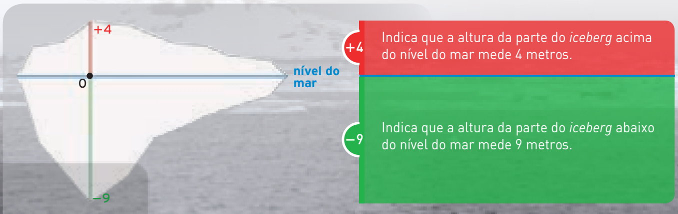
Para melhor compreensão deste conteúdo, os estudantes devem ter domínio dos conceitos relacionados a números naturais.

Números positivos e números negativos

Icebergs são blocos de gelo que se desprenderam de geleiras e flutuam nos mares. Apenas uma parte do *icebergs* pode ser vista acima da água.

O esquema a seguir representa um *iceberg*. A linha vertical indica a altura desse *iceberg*. Para fazer essa representação, considerou-se o seguinte:

- O nível da superfície do mar está representado pelo zero;
- A medida da altura referente à porção que está acima da superfície do mar está indicada por um número positivo;
- A medida da altura referente à porção que está abaixo da superfície do mar está indicada por um número negativo.

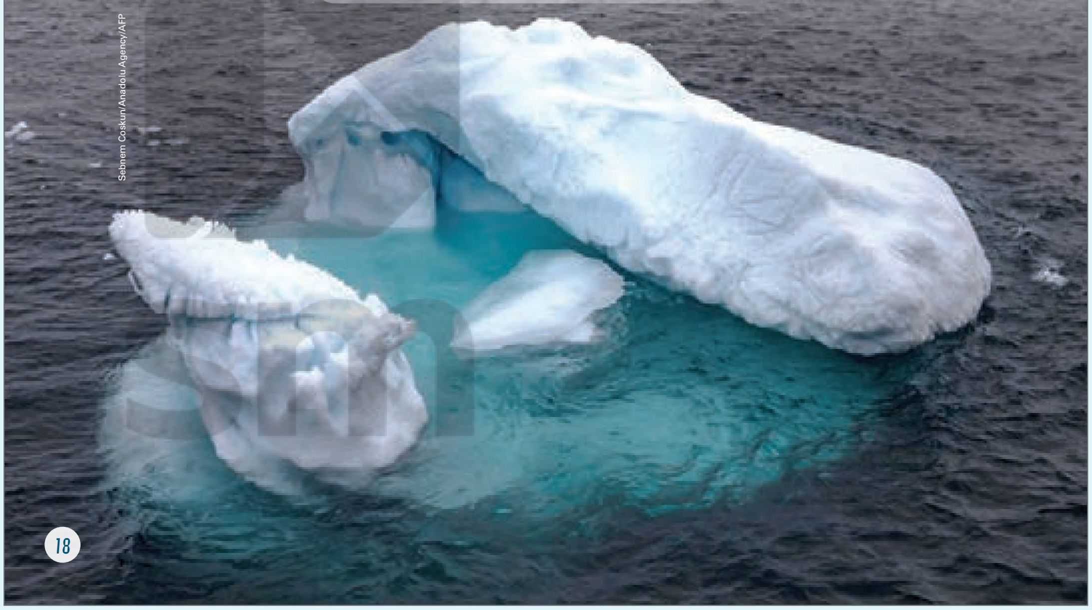


Indica que a altura da parte do *iceberg* acima do nível do mar mede 4 metros.

Indica que a altura da parte do *iceberg* abaixo do nível do mar mede 9 metros.

Esquema representativo de um *iceberg*.

João Picoli/ID/BR



Iceberg no canal Lemaire, na península Antártica. Foto de 2022.

Sebnem Coskun/Anadolu Agency/AFP

Dizemos que o número +4 é positivo e que o número −9 é negativo. Já o número 0, que corresponde ao referencial, não é positivo nem negativo.

Os números positivos podem ser representados sem o sinal +. Assim, o número +10 pode ser escrito apenas como 10. Por convenção, qualquer número escrito sem sinal é positivo, com exceção do zero, que é nulo.

Veja, a seguir, outras situações em que usamos números positivos e números negativos.

Exemplos

A. Temperatura

Na maioria dos municípios brasileiros as medidas de temperatura são positivas, mas no inverno alguns municípios da Região Sul registram medidas de temperatura negativas. Até 2021, a medida de temperatura mais baixa e a mais alta registradas no Brasil foram aproximadamente:

- 45 °C, na cidade de Nova Maringá, no Mato Grosso, em 2020;
- −15 °C, no Parque Nacional do Itatiaia, no Rio de Janeiro, em 2021.

B. Transações bancárias

Um extrato bancário é um resumo de todas as movimentações financeiras feitas em uma conta bancária durante um período. Os valores indicados com números positivos representam as entradas de dinheiro na conta. Já os valores indicados com números negativos representam as retiradas de dinheiro da conta.

PARA EXPLORAR

***História de sinais*, de Luzia Faraco Ramos. São Paulo: Ática, 2019 (Coleção A Descoberta da Matemática).**

Milena recebe um hóspede e, com a ajuda dele, aprende a resolver problemas com números inteiros.

Conjunto dos números inteiros

O conjunto dos números naturais pode ser representado por $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Dizemos que o conjunto dos números naturais é formado pelos números inteiros positivos e pelo zero.

Agora, veja a representação dos números inteiros negativos.

$$\{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$$

Reunindo o conjunto dos números naturais ao conjunto dos números inteiros negativos, obtemos o **conjunto dos números inteiros**, representado por $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Observe que todo número natural é um número inteiro, mas nem todo número inteiro é um número natural.

SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{Z}$

Números inteiros não nulos:
$\mathbb{Z}^* = \{..., -2, -1, +1, +2, ...\}$
O asterisco (*) que acompanha o símbolo do conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$) indica que o zero não pertence ao conjunto.

Números inteiros não negativos:
$\mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3, ...\}$

Números inteiros não positivos:
$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$

Números inteiros positivos:
$\mathbb{Z}^*_+ = \{+1, +2, +3, ...\}$

Números inteiros negativos:
$\mathbb{Z}^*_- = \{..., -3, -2, -1\}$

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

- O conhecimento dos números naturais e sua representação na reta numérica, a comparação desses números e os conceitos de sucessor e antecessor são conhecimentos prévios necessários para a construção do conhecimento dos números inteiros.
- É importante levar em consideração que os estudantes desenvolveram, nos anos iniciais, uma ideia intuitiva dos números negativos, uma vez que já trabalharam com situações que envolvem perdas em jogo ou variações de temperaturas, por exemplo.
- Se julgar oportuno, converse com os estudantes sobre a história dos números negativos. Conte-lhes que só no século XIX os números negativos foram interpretados como uma ampliação do conjunto dos números naturais e incorporaram as regras da Aritmética.
- Reforce a ideia de que o conjunto dos números inteiros é uma ampliação do conjunto dos números naturais.
- Aproveite, também, esse momento de formalização do conjunto dos números inteiros para verificar a compreensão dos estudantes acerca da relação de ordem desse conjunto, propondo questões como:
  - Qual é o menor número inteiro positivo? E qual é o maior número inteiro positivo?
    Espera-se que os estudantes percebam que os números inteiros positivos são infinitos.
  - Qual é o menor número inteiro negativo? E qual é o maior número inteiro negativo?
    Da mesma forma que na questão anterior, os estudantes devem perceber que os números inteiros negativos são infinitos.
  - Qual é o maior número par positivo? E qual é o menor número par positivo? Espera-se que os estudantes percebam que não é possível saber qual é o maior número par positivo; entretanto, saber o menor número par positivo é possível (nesse caso, é o número +2).
  - Qual é o maior número par negativo? E qual é o menor número par negativo? Nessa questão, os estudantes devem perceber que é possível determinar o maior número par negativo (−2), mas não é possível determinar o menor número par negativo.

OUTRAS FONTES

Almouloud, S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: Ed. da UFPR, 2007.

Livro destinado a docentes que buscam uma teoria para fundamentar a prática do ensino de Matemática.

Caraça, B. J. *Conceitos fundamentais da matemática*. 5. ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

O autor aborda o conhecimento matemático não como algo criado, mas como algo elaborado. Nesse sentido, discute, sobretudo no primeiro capítulo, o processo pelo qual o conhecimento dos números foi sendo construído pela humanidade. Esse processo é descrito pelo autor como algo “vivo e impregnado de condição humana”.

REPRESENTAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS NA RETA NUMÉRICA

- Compreender a representação dos números inteiros na reta numérica constitui conhecimento necessário aos estudantes para os próximos estudos sobre conceitos relativos a comparação, ordenação, módulo (ou valor absoluto) e oposto (ou simétrico) de um número.

SUCESSOR E ANTECESSOR DE UM NÚMERO INTEIRO

- Retome os conceitos de antecessor e de sucessor de um número natural e amplie-os para o conjunto dos números inteiros utilizando a reta numérica. É interessante que os estudantes percebam que, para obter o sucessor de um número inteiro, é preciso adicionar 1 a esse número. Assim, o sucessor de:
  - −2 é −2 + 1 = −1;
  - −1 é −1 + 1 = 0;
  - 0 é 0 + 1 = 1;
  - 1 é 1 + 1 = 2;
  - 2 é 2 + 1 = 3;

  e assim sucessivamente.

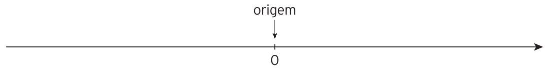
  Para se obter o antecessor de um número inteiro, é necessário subtrair 1. Assim, o antecessor de:
  - 2 é 2 − 1 = 1;
  - 1 é 1 − 1 = 0;
  - 0 é 0 − 1 = −1;
  - −1 é −1 − 1 = −2;
  - −2 é −2 − 1 = −3;

  e assim por diante.

Representação de números inteiros na reta numérica

Acompanhe, a seguir, como podemos representar os números inteiros em uma reta numérica.

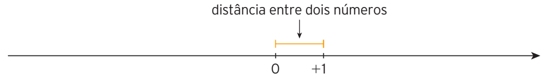
1º passo: Traçamos uma reta e nela representamos a origem. Vamos associar a esse ponto o número 0 (zero).



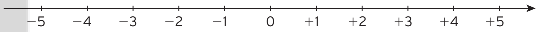
Ilustrações: ID/BR

2º passo: Escolhemos qual será a medida da distância entre um ponto da reta e o ponto seguinte representados na reta numérica.

Veja, a seguir, a representação dos números 0 e 1: o número 1 está à direita do número 0.



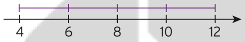
3º passo: Considerando a mesma medida da distância entre dois números, da esquerda para a direita, começando pela origem, determinamos a posição dos pontos associados aos números 1, 2, 3, 4, etc.; considerando a mesma medida da distância entre dois números, da direita para a esquerda, começando pela origem, determinamos a posição dos pontos associados aos números −1, −2, −3, −4, etc.



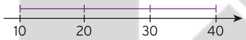
Observe que todo número inteiro está associado a um ponto da reta numérica, mas nem todo ponto da reta numérica corresponde a um número inteiro.

RETA NUMÉRICA

Ao traçar uma reta numérica, nem sempre precisamos representar sua origem. Podemos traçá-la a partir do ponto que for mais conveniente. Além disso, a medida da distância entre dois números da reta numérica não precisa necessariamente indicar uma unidade. Veja.



Observe que a distância entre 4 e 6, entre 6 e 8, entre 8 e 10 e entre 10 e 12 é a mesma.



Observe que a distância entre 10 e 20, entre 20 e 30 e entre 30 e 40 é a mesma.

Sucessor e antecessor de um número inteiro

O número inteiro que está imediatamente depois de outro número inteiro é chamado de **sucessor**, e o número inteiro que está imediatamente antes é chamado de **antecessor**.

Exemplos

A. O sucessor de 3 é 4.

B. O sucessor de 28 é 29.

C. O antecessor de 42 é 41.

D. O antecessor de 15 é 14.

E. O sucessor de −3 é −2.

F. O antecessor de 0 é −1.

G. O antecessor de −8 é −9.

H. O sucessor de −60 é −59.

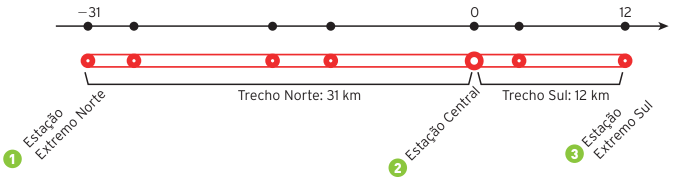
ATIVIDADE COMPLEMENTAR

A fim de sistematizar os conhecimentos adquiridos, peça aos estudantes que se reúnam em duplas e redijam um texto abordando os seguintes tópicos acerca dos números inteiros:

- Situações em que se identificam números positivos e números negativos.
- A necessidade de criação do conjunto dos números inteiros.
- A localização dos números inteiros na reta numérica.
- Os significados de sucessor e de antecessor de um número inteiro.

Valor absoluto ou módulo de um número inteiro

O esquema a seguir representa a linha norte-sul do metrô de uma cidade. Observe que podemos associar cada estação a um ponto de uma reta numérica.



Ilustrações: ID/BR

① A Estação Extremo Norte é representada pelo ponto associado ao número −31 da reta numérica. Quando um trem para nessa estação, ele está a 31 km de distância da Estação Central.

② A Estação Central é o referencial da linha; portanto, representa a origem e é representada pelo número 0 da reta numérica. Quando um trem está nessa estação, tem distância nula em relação a ela.

③ A Estação Extremo Sul é representada pelo ponto associado ao número 12 da reta numérica. Quando um trem para nessa estação, está a 12 km de distância da Estação Central.

Em uma reta numérica, a distância entre a origem e o ponto dado é um número positivo ou nulo, que corresponde à quantidade de unidades entre as duas posições. Por exemplo, a distância entre o ponto que representa −10 e o ponto que representa a origem é 10 unidades.

Valor absoluto ou **módulo** de um número inteiro é a distância entre o ponto que representa esse número e a origem (zero).

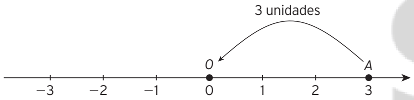
O módulo de um número inteiro é representado por este símbolo: | |.

Assim, o módulo de −31 é 31, e indicamos:

$$|-31| = 31$$

Exemplo A

A medida da distância do ponto *A* ao ponto *O* é de 3 unidades de comprimento.



Dizemos que o valor absoluto ou o módulo do número +3 é 3 (medida da distância do ponto *A* à origem) e indicamos por:

$$|+3| = 3 \quad \text{ou} \quad |3| = 3$$

VALOR ABSOLUTO OU MÓDULO DE UM NÚMERO INTEIRO

- Para que os estudantes se apropriem do conceito de módulo ou valor absoluto de um número inteiro, entre outras questões, é preciso que compreendam que esse conceito está relacionado à medida da distância que um número inteiro se encontra em relação ao zero.
- Se julgar oportuno, esclareça aos estudantes que, de acordo com o historiador francês Florian Cajori (1859-1930), o símbolo | |, utilizado para representar o valor absoluto ou módulo de um número, apareceu pela primeira vez em 1841, em um trabalho publicado pelo matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897). Mas foi apenas no início do século XX que esse símbolo passou a ser adotado em língua inglesa; desde então, consolidou-se nas representações matemáticas de valor absoluto.

DE OLHO NA BASE

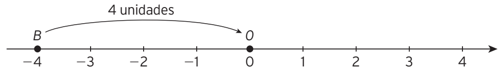
A abordagem dos números inteiros por meio da comparação e ordenação desses números em diferentes situações, assim como com base na compreensão de que cada um deles está associado a um ponto da reta numérica, favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA03**.

NÚMEROS OPOSTOS OU SIMÉTRICOS

- Defina módulo de um número como a medida da distância do número até o zero. Leve os estudantes a perceber que, por exemplo, como a medida da distância do 4 e do −4 em relação ao zero é a mesma, eles têm o mesmo módulo: 4 unidades.
- A ideia de números opostos também pode ser explorada com base na simetria existente na reta numérica. Para isso, sugerimos realizar a atividade complementar indicada na parte inferior desta página.

Exemplo B

A medida da distância do ponto *B* ao ponto *O* é de 4 unidades de comprimento.



Dizemos que o valor absoluto ou o módulo do número −4 é 4 (medida da distância do ponto *B* à origem) e indicamos por:

$$|-4| = 4$$

Números opostos ou simétricos

Veja a posição da Estação Central-Norte e da Estação Extremo Sul da mesma linha de metrô representada na página 21.

Ilustrações: ID/BR

Observe que as distâncias das estações Central-Norte e Extremo Sul à estação Central, que corresponde à origem da reta numérica, são iguais a 12 km.

$$|12| = 12 \text{ e } |-12| = 12$$

PARE E REFLITA

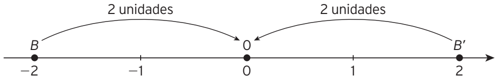
Qual é o simétrico do número zero? Zero.

> Os números com valores absolutos (ou módulos) iguais e sinais diferentes são chamados de números **opostos** ou **simétricos**.

Então, podemos dizer que −12 é oposto de 12 e que 12 é oposto de −12, ou que 12 e −12 são simétricos.

Exemplos

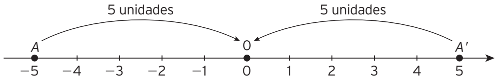
A. Observe os pontos *B* e *B'* na reta numérica.



Dizemos que os números −2 e 2 são opostos ou simétricos, pois possuem valores absolutos iguais e sinais diferentes:

$$|-2| = 2 \text{ e } |2| = 2$$

B. Observe os pontos *A* e *A'* na reta numérica.



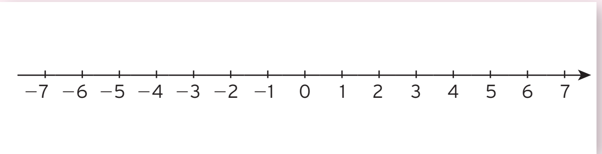
Dizemos que os números −5 e 5 são opostos ou simétricos, pois possuem módulos iguais e sinais diferentes:

$$|-5| = 5 \text{ e } |5| = 5$$

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Proponha a atividade a seguir para auxiliar os estudantes na apropriação do conceito de módulo de um número inteiro como a medida da distância desse número até o zero.

Solicite aos estudantes que construam uma reta numérica como a ilustrada a seguir em uma folha de papel avulsa.



ID/BR

Oriente-os a dobrar a folha no ponto zero da reta e, depois, relatar o que observaram.

Espera-se que os estudantes percebam que os pontos relativos aos números −1 e 1, −2 e 2, −3 e 3 e assim por diante coincidem quando a folha é “dobrada” no ponto zero da reta.

4. a) Antecessor: 2; sucessor: 4.
b) Antecessor: −1; sucessor: 1.
c) Antecessor: 98; sucessor: 100.
d) Antecessor: −101; sucessor: −99.
e) Antecessor: 999; sucessor: 1 001.
f) Antecessor: −1 002; sucessor: −1 000.

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

Um pouco da história dos números negativos

A partir do Renascimento, o conceito de número evoluiu muito. Cada vez mais era sentida a necessidade de um novo número para resolver os problemas do dia a dia. Discutia-se muito sobre esse número. Mas como ele não se enquadrava nos números já conhecidos, os matemáticos o chamavam de número absurdo.

Segundo os matemáticos chineses da Antiguidade, os números podiam ser entendidos como excessos (que representavam com palitos vermelhos) ou faltas (que representavam com palitos pretos). Os matemáticos da Índia também trabalharam com esses "números estranhos". O matemático Brahmagupta, nascido em 598, dizia que os números podem ser tratados como pertences ou dívidas.

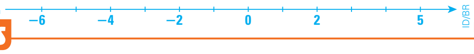
Veja como os comerciantes do Renascimento faziam para representar a quantidade de feijão que tinham. Supondo que um deles tivesse, em seu armazém, duas sacas de feijão de 10 kg cada uma e vendesse, em um dia, 8 kg de feijão, ele escreveria nessa saca um tracinho na frente do número 8 para não se esquecer de que faltavam 8 kg de feijão na saca. Se, por algum motivo, ele resolvesse despejar os 2 kg que restaram nessa saca na segunda saca, ele escreveria, na segunda saca, dois tracinhos cruzados na frente do número 2, para se lembrar de que naquela saca existiam 2 kg de feijão a mais que a quantidade inicial.

Baseando-se nessa solução prática, os matemáticos encontraram uma notação para expressar um novo tipo de número: o número com sinal, que pode ser positivo ou negativo.

Fonte de pesquisa: Oscar Guelli. *A invenção dos números*. São Paulo: Ática, 1992 (Coleção Contando a História da Matemática).

Agora é com você! O texto demonstra que os números negativos não foram aceitos pelos matemáticos logo no início. Mas, com o passar do tempo, eles começaram a fazer parte do cotidiano. Redija um pequeno texto mostrando uma situação cotidiana em que os números negativos são necessários. **Resposta pessoal.**

3.



ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. b) Todos os números do quadro. **1.** c) −42, −28 e −27.

1. Considere os números do quadro a seguir e responda ao que se pede.

27	+2	−28	51	26
−42	0	35	−27	1

a) Quais desses números são naturais? **27, +2, 0, 35, 51, 26 e 1.**

b) Quais desses números são inteiros?

c) Quais deles são inteiros negativos?

d) Quais são inteiros positivos? **27, +2, 35, 51, 26 e 1.**

2. Classifique as afirmações de cada item em verdadeira ou falsa. Depois, corrija as afirmações falsas de modo que se tornem verdadeiras.

a) O número zero pertence ao conjunto dos números inteiros, mas não pertence ao conjunto dos números naturais.

b) O número −1 não pertence ao conjunto dos números naturais. **Verdadeira.**

c) O número +1 não pertence ao conjunto dos números naturais.

d) O número −5 pertence ao conjunto dos números inteiros. **Verdadeira.**

3. Desenhe uma reta numérica e localize os pontos correspondentes aos números:

0, −6, 2, −4, −2, 5

4. Determine o antecessor e o sucessor de cada número.

a) 3
b) 0
c) 99
d) −100
e) 1 000
f) −1 001

5. Entre os números a seguir, qual tem o maior módulo? **−55**

−35 25 45 −55

6. Considere os números representados pelos pontos *A*, *B*, *C* e *D*.

a) Qual é o módulo de cada número representado? ***B***: |−2| = 2; ***C***: |−1| = 1; ***A***: |2| = 2; ***D***: |3| = 3

b) Qual par de pontos representa dois números simétricos? ***A* e *B*.**

2. a) Falsa. Correção possível: O número zero pertence ao conjunto dos números inteiros e ao conjunto dos números naturais.

2. c) Falsa. Correção possível: O número +1 pertence ao conjunto dos números naturais.

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

Dar referências históricas aos conteúdos estudados pode trazer maior significado para os conceitos e facilitar a compreensão dos assuntos pelos estudantes. Leia com eles o texto referente à história da criação dos números negativos e oriente-os a simular algumas situações usando o método dos matemáticos chineses da Antiguidade e o método dos comerciantes do Renascimento.

Além disso, a proposta de redigir um pequeno texto permite desenvolver habilidades relacionadas às práticas de pesquisa, promovendo a compreensão da necessidade dos números negativos e seu papel na História da Matemática.

DE OLHO NA BASE

Saber um pouco da história dos números negativos permite que os estudantes reconheçam a Matemática como uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, o que contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 1**.

Além disso, as atividades **3** e **6** possibilitam aos estudantes, por meio da representação dos números inteiros na reta numérica e da associação de cada um deles a um ponto nessa reta, compreender a comparação e a ordenação desses números, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA03**.

OUTRAS FONTES

Rezende, W. M.; Dassie, B. A. Epistemologia dos números relativos: uma reflexão necessária e atual para a sala de aula de matemática. Disponível em: https://app.uff.br/riuff/bitstream/handle/1/524/GEPEM_Georges%20Glaeser.pdf;jsessionid=475B71B7DDD7A195AADCC3B08C155344?sequence=2. Acesso em: 25 maio 2022.

No artigo, os autores reeditam a publicação "Epistemologia dos números relativos", de Georges Glaeser, que desenvolve uma análise das dificuldades encontradas no estudo dos números relativos, tendo como fonte os documentos originais deixados por matemáticos ou por representantes típicos da comunidade científica de determinadas épocas. Na publicação, Glaeser utiliza escritos e obras de Diofanto, Stevin, Descartes, Maclaurin, Euler, d'Alembert, Carnot, Laplace, Cauchy e Hankel.

COMPARAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

- Antes de iniciar a leitura dos exemplos, verifique se os estudantes compreenderam que comparar dois números inteiros é saber identificar qual é o maior, qual é o menor ou se eles são iguais. Exemplos como medidas de temperatura ajudam os estudantes a compreender a comparação entre números negativos, pois, comparando-se duas ou mais medidas de temperatura abaixo de zero grau, quanto mais distante uma delas encontra-se do zero, menor ela é. Por exemplo, a medida de temperatura de −12 graus é menor que a de −5 graus. O mesmo vale para a reta numérica: quanto mais distante do zero um número negativo se encontra, menor é seu valor.

DE OLHO NA BASE

Deve-se estimular os estudantes a utilizar a reta numérica para comparar e ordenar números inteiros, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA03**.

Comparação de números inteiros

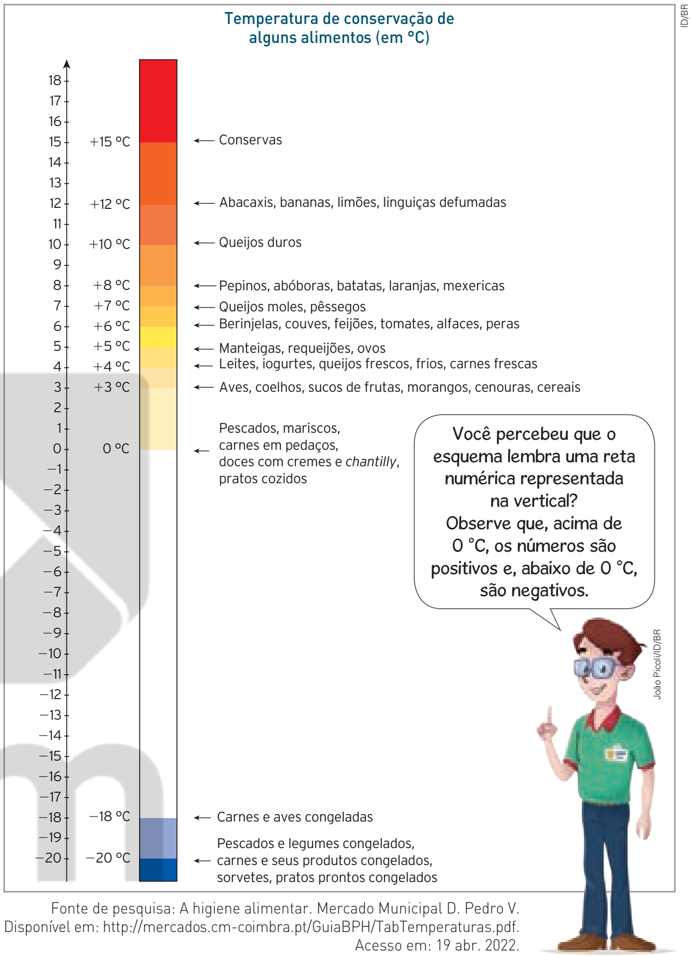
Comparar dois números inteiros é o mesmo que verificar qual deles é o maior, o menor ou se eles são iguais. Para fazer a comparação, podemos usar os símbolos **maior que** (>), **menor que** (<) ou **igual a** (=).

Comparação em uma reta numérica

Vamos acompanhar algumas situações.

Situação 1

Observe o esquema a seguir, que indica a temperatura de conservação adequada de alguns alimentos.



Fonte de pesquisa: A higiene alimentar. Mercado Municipal D. Pedro V. Disponível em: http://mercados.cm-coimbra.pt/GuiaBPH/TabTemperaturas.pdf. Acesso em: 19 abr. 2022.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Com o intuito de consolidar a comparação e a ordenação de números inteiros, sugira aos estudantes que escolham uma cidade da América, uma da África, uma da Ásia e uma da Europa. Em seguida, solicite a eles que façam uma pesquisa sobre as medidas de temperatura máximas e mínimas de cada uma delas em determinado dia. No dia marcado para a entrega da pesquisa, peça que escrevam na lousa os nomes das cidades pesquisadas e as respectivas medidas de temperatura máximas e mínimas.

- Solicite aos estudantes que respondam: Em qual cidade a medida de temperatura mínima registrada foi menor?; Em qual cidade a medida de temperatura mínima registrada foi maior?
- Peça aos estudantes que escrevam, no caderno, as medidas de temperatura mínimas de cada uma das cidades em ordem crescente, ou seja, começando pela menor delas e terminando com a maior medida de temperatura encontrada.

Na reta numérica vertical desse exemplo, podemos observar que, dados dois números inteiros, o maior deles é o que está acima do outro na reta numérica. Comparando as temperaturas de conservação dos alimentos, notamos que:

- a temperatura de conservação das berinjelas é maior que a temperatura de conservação dos sucos de frutas, pois +6 está acima do +3 na reta numérica. Portanto, podemos dizer que +6 é maior que +3, ou seja, $+6 > +3$.
- a temperatura de conservação das carnes congeladas é maior que a temperatura de conservação dos pescados congelados, pois −18 está acima de −20 na reta numérica. Portanto, podemos dizer que −18 é maior que −20, ou seja, $-18 > -20$.
- a temperatura de conservação dos leites é a mesma que a temperatura de conservação dos queijos frescos, pois ambos devem ser conservados a +4 °C, ou seja, $+4 = +4$.

+ INTERESSANTE

Prontos para receber vacina Pfizer/BioNTech

Ultracongelador vai armazenar doses na Rede de Frio Central. Servidores foram treinados para lidar com novo imunizante

Geovana Albuquerque/Agência Saúde/CC BY 2.0

Frascos com vacina para prevenir a covid-19. Foto de 2021.

A Rede de Frio Central do Distrito Federal está preparada para receber as vacinas da farmacêutica norte-americana Pfizer, produzida em parceria com o laboratório alemão BioNTech. [...] As vacinas precisam ser armazenadas a temperaturas entre −65 °C e −80 °C, conforme orientação do fabricante.

[...]

A Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa) analisou as exigências de armazenamento da vacina e flexibilizou as temperaturas utilizadas para conservação em baixas temperaturas. O órgão garante que [em um] armazenamento a uma temperatura entre −15 °C e −30 °C, por um período de até duas semanas, e de 2 °C e 8 °C, por até 5 dias, a vacina não perde a eficácia dos componentes.

Após o prazo de duas semanas, as vacinas devem voltar à temperatura recomendada pelo fabricante, entre −65 °C e −80 °C. O ultracongelador da Rede de Frio Central tem capacidade de 570 litros e consegue armazenar até 40 mil doses de imunizantes. O aparelho consegue atingir a temperatura de −80 °C.

[...]

Prontos para receber vacina Pfizer/BioNTech. *Agência Brasília*, 30 abr. 2021. Disponível em: https://www.agenciabrasilia.df.gov.br/2021/04/28/df-esta-pronto-para-receber-vacina-pfizer-biontech/. Acesso em: 3 maio 2022.

+ INTERESSANTE

Apresente aos estudantes o texto do boxe e pergunte se conheciam o ultracongelador. Explique a eles que, segundo as normas da Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa), os insumos devem ser armazenados de maneira separada, de acordo com seu grupo e com sua temperatura ideal de armazenamento.

Enquanto nos refrigeradores a temperatura varia de 1 °C a 5 °C, os *freezers* horizontais atingem temperaturas mais baixas, na faixa de −22 °C, e os verticais operam em até −18 °C.

O ultracongelador é um tipo de câmara frigorífica especial cuja função é reduzir rapidamente a temperatura interna de alimentos recém-preparados. A agilidade dos ultracongeladores é o que impede a proliferação de bactérias e a formação de cristais de gelo nos alimentos. Enquanto no congelamento natural, feito em *freezer* comum, a temperatura interna dos alimentos demora até 24 horas para diminuir, no ultracongelamento a diminuição ocorre em 1 hora.

OUTRAS FONTES

Armazenamento dos alimentos na geladeira. Centro de Pesquisa em Alimentos. Universidade de São Paulo. Disponível em: http://forc.webhostusp.sti.usp.br/forc/arquivos/paginas/Cartilha%20armazenamento%20dos%20alimentos%2007.04.21.pdf. Acesso em: 26 maio 2022.

Essa cartilha foi elaborada para orientar os participantes de uma pesquisa sobre a maneira correta de armazenar os alimentos na geladeira.

(IN)FORMAÇÃO

De acordo com a Organização Pan-Americana da Saúde (OPAS), em 31 de dezembro de 2019 a Organização Mundial da Saúde (OMS) recebeu uma notificação sobre diversos casos de pneumonia na cidade de Wuhan, na China. Logo em seguida, na primeira semana de janeiro de 2020, as autoridades chinesas confirmaram que haviam identificado um novo tipo de coronavírus, o SARS-CoV-2, até então não identificado em seres humanos.

No fim de janeiro de 2020, a OMS declarou que o surto do novo coronavírus se enquadrava como uma Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional (ESPII), que configura o mais alto nível de alerta da organização. Até então, esse alerta havia sido emitido em apenas cinco ocasiões:

- 25 de abril de 2009: pandemia de H1N1.
- 5 de maio de 2014: disseminação internacional de poliovírus.
- 8 de agosto de 2014: surto de ebola na África Ocidental.
- 1º de fevereiro de 2016: vírus zika e aumento de casos de microcefalia e outras malformações congênitas.
- 18 de maio de 2018: surto de ebola na República Democrática do Congo.

Em 11 de março de 2020, a covid-19, doença causada pelo SARS-CoV-2, foi caracterizada como pandemia. Vale ressaltar que o termo “pandemia” não está relacionado com a gravidade da doença, mas sim com uma questão geográfica.

No Brasil, assim como na maior parte do mundo, para conter o avanço da doença e amenizar o impacto no sistema de saúde, foram adotadas, em um primeiro momento, medidas de isolamento social. Estabelecimentos que prestavam serviços caracterizados como não essenciais (estádios de futebol, cinemas, escolas, teatros, igrejas, lojas, entre outros) foram fechados e os hábitos tiveram de ser rapidamente modificados para que as pessoas trabalhassem (no caso de serviços considerados não essenciais) e estudassem de maneira remota. Depois, também foi adotado o uso obrigatório de máscaras individuais para reduzir o contágio. Muitos eventos importantes, como as Olimpíadas de Tóquio, foram adiados, cancelados ou transformados em eventos virtuais.

Em 2021, após o desenvolvimento de algumas vacinas, teve início o processo de vacinação. No Brasil, até 24 de maio de 2022, mais de 667 mil pessoas haviam morrido de covid-19, e o número de casos confirmados passava dos 31 milhões.

Fontes de pesquisa: WHO. Disponível em: https://www.who.int/pt; Opas. Disponível em: https://www.paho.org/pt/brasil. Acessos em: 31 maio 2022.

- Caso os estudantes apresentem dificuldades em fazer a comparação com módulos, peça a eles que pensem na posição dos números na reta numérica, relembrando que o conceito de módulo está relacionado à medida da distância que um número inteiro se encontra do zero.
- Aproveite a realização da atividade **7** para verificar se os estudantes compreendem que o zero não é um número positivo nem negativo. Se for necessário, retome a reta construída por eles, lembrando-os de que o zero corresponde ao ponto que a divide entre números inteiros positivos e números inteiros negativos. No item **c**, os estudantes podem escolher três pares entre os relacionados a seguir:

A e *B*; *B* e *A*; *C* e *A*; *D* e *A*; *E* e *A*;
A e *C*; *B* e *C*; *C* e *B*; *D* e *B*; *E* e *B*;
A e *D*; *B* e *D*; *C* e *D*; *D* e *C*; *E* e *C*;
A e *E*; *B* e *E*; *C* e *E*; *D* e *E*; *E* e *D*.

Verifique se eles percebem que, por exemplo, comparar *A* e *B* é diferente de comparar *B* e *A*.

Amplie a atividade **7** propondo questões que revelem que o zero não possui oposto ou simétrico e, ainda, que o módulo de zero é zero, pois ele é a origem da reta numérica. Se considerar pertinente, acrescente outras questões a essa atividade. Por exemplo:

- Qual é o maior número inteiro negativo? −1
- Qual é o maior número inteiro positivo? Não se pode determinar.
- Qual é o menor número inteiro negativo? Não se pode determinar.
- Qual é o menor número inteiro positivo? 1

Comparação usando módulos

Dados dois números inteiros positivos, o maior deles é o que tem o maior módulo.

Exemplos

A. Vamos comparar os números 8 215 e 423.
Temos que |8 215| = 8 215 e |423| = 423.
Portanto, como os números são positivos, 8 215 > 423.

B. Vamos comparar os números 157 e 161.
Temos que |157| = 157 e |161| = 161.
Portanto, como os números são positivos, 157 < 161.

Dados dois números inteiros negativos, o maior deles é o que tem o menor módulo.

Exemplos

A. Vamos comparar os números −671 e −1 054.
Temos que |−671| = 671 e |−1 054| = 1 054.
Portanto, como os números são negativos, −671 > −1 054.

B. Vamos comparar os números −97 e −38.
Temos que |−97 |= 97 e |−38| = 38.
Portanto, como os números são negativos, −97 < −38.

Observações

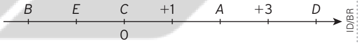
- Todo número inteiro negativo é menor que zero e menor que qualquer número inteiro positivo.
- Todo número inteiro positivo é maior que zero e maior que qualquer número inteiro negativo.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

7. a) Positivos: *A* e *D*. Negativos: *B* e *E*.

7. Considere a reta numérica a seguir. Cada letra está associada a um número inteiro.



a) Indique as letras que representam números inteiros positivos e as letras que indicam números inteiros negativos.

b) Qual é o sinal do número representado pela letra *C*? **Não existe, pois o número zero não é positivo nem negativo.**

c) Escreva três pares de números representados por letras nessa reta. Depois, utilize os sinais < ou > para comparar os números de cada par. **Resposta pessoal.**

8. Copie as sentenças a seguir no caderno e substitua cada ■ pelo sinal <, > ou =.

a) 12 ■ 16 <
b) +23 ■ +23 =
c) 0 ■ +34 <
d) −49 ■ 0 <
e) +78 ■ 0 >
f) −103 ■ +115 <
g) −57 ■ −57 =
h) −84 ■ −26 <
i) +416 ■ +417 <
j) −890 ■ −891 >

9. Ordene os números a seguir do menor para o maior. **−37, −16, −7, −6, −3, −1, 0, +1, +4, +13, +39, +51**

−16	+13	−3	+39
+4	−6	−7	−37
0	+1	+51	−1

ESTRATÉGIAS DE APOIO – SEÇÃO DIVERSIFICANDO

Mesmo após a realização das atividades, podem surgir algumas dificuldades na comparação entre dois números inteiros. É importante lembrar que, antes de os estudantes terem contato com esse conhecimento, comparavam dois números naturais de acordo com um critério válido para resolver os problemas que se apresentavam; por exemplo: quanto maior a medida da distância até o zero um número se encontra, maior ele é. Observe que esse critério não vale para os números negativos, uma vez que, nesse caso, quanto maior a medida da distância até o zero, menor é esse número.

Explore essa contradição, sobretudo com os estudantes que ainda apresentam dúvidas, pois é com base nela que os novos critérios para a comparação entre dois números inteiros negativos serão consolidados. Então, proponha a seguinte atividade:

Indique um número inteiro negativo:

a) maior que −3;
b) menor que 0;
c) menor que 8;
d) maior que −10;
e) maior que −15;
f) menor que −4;
g) menor que −100;
h) maior que 1.

Respostas pessoais. No item **a**, as duas respostas possíveis são −2 e −1. Nos itens **b**, **c**, **f** e **g**, os estudantes podem apresentar diferentes respostas, uma vez que existem infinitos números negativos menores que 0, 8, −4 e −100. Ocorre o mesmo em relação aos itens **d** e **e**: existem diferentes números inteiros negativos maiores que −10 e −15. Espera-se que, no item **h**, os estudantes respondam que não existe número inteiro negativo maior que 1.

DIVERSIFICANDO

7. c)

Responda sempre no caderno.

1. Respostas possíveis: Saldo de gols contra ou a favor de um time em um campeonato de esporte coletivo; andares acima e abaixo do piso térreo de um prédio.

1. Indique outras situações, além da temperatura e das transações bancárias, em que utilizamos números positivos, números negativos e número nulo.

2. Na escala de um termômetro, qual das temperaturas está mais próxima de 0 °C: −8 °C ou +12 °C? **−8 °C**

3. Reúna-se com um colega para fazer uma pesquisa sobre as temperaturas máxima e mínima registradas nos últimos cinco dias em seu município. Em seguida, registrem em uma reta numérica as temperaturas obtidas. Marquem o dia em que cada temperatura foi registrada e utilizem cores diferentes para a máxima e para a mínima dentro desse período. **Respostas pessoais.**

a) Qual foi a maior temperatura obtida?

b) Qual foi a menor temperatura obtida?

c) Houve algum registro de temperatura negativa?

d) Qualquer temperatura negativa seria menor que as temperaturas que vocês encontraram? Expliquem.

4. Copie e complete o quadro a seguir no caderno. **Consulte a resposta neste manual.**

Número	Antecessor	Sucessor	Oposto	Módulo
13	12	▥	▥	13
−7	▥	−6	7	▥
127	▥	128	▥	▥
0	▥	1	▥	▥
−25	▥	▥	▥	▥

5. b) Não existe número que satisfaça essa igualdade.

5. Quais são os possíveis valores inteiros para ★ em cada caso a seguir?

a) $|★| = 15$ **★ = 15 ou ★ = −15**

b) $|★| = -15$

6. No caderno, faça o que se pede. **Respostas pessoais.**

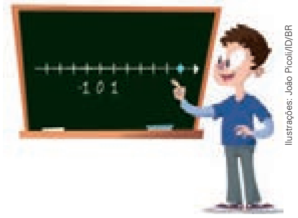
a) Represente duas retas numéricas: cada uma deve ter uma unidade de medida de comprimento diferente.

b) Indique números inteiros positivos e números inteiros negativos nessas retas.

c) Observe as características comuns e as diferenças na posição dos números positivos, dos negativos e do zero em cada uma das retas numéricas. Depois, compare suas representações com as de um colega.

9. a) +100 > +19 > +12 > −19 > −39 > −100
b) +291 > +8 > 0 > −20 > −34 > −400

7. João pensou em um número, adicionou uma unidade e representou o resultado em uma reta numérica com um ponto azul. Veja.



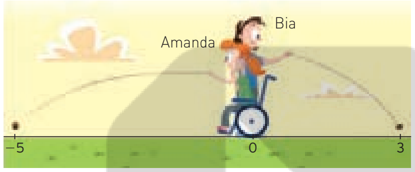
Ilustrações: João Picoli/ID/BR

a) Qual número João representou com um ponto azul na reta numérica? **6**

b) Em qual número João pensou? **5**

c) Indique em uma reta numérica o número simétrico do número pensado por João.

8. Amanda e Bia estavam paradas no mesmo lugar brincando de lançar simultaneamente pedrinhas em sentidos opostos. Após cada lançamento, elas verificavam quem tinha jogado a pedrinha mais longe.



a) De acordo com o lançamento apresentado na imagem, qual menina jogou a pedrinha mais longe? **Amanda.**

b) Represente a resposta do item anterior usando uma sentença matemática. **$|-5| > |3|$**

c) Em quais situações os números que representam as posições alcançadas pelas pedrinhas de Amanda e de Bia seriam representados por números opostos?

9. Coloque os números a seguir em ordem decrescente, usando o sinal > entre eles.

a) +19, +100, −19, −100, −39, +12

b) −20, +8, 0, −400, +291, −34

10. Dois números inteiros opostos estão à distância de 34 unidades um do outro. Quais são esses números? **17 e −17.**

8. c) Se os módulos dos números fossem iguais. Por exemplo, −3 e 3, −5 e 5, etc.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta página, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Aproveite a atividade **5** para retomar o conceito de módulo ou valor absoluto de um número inteiro, lembrando aos estudantes que esse conceito se refere à medida da distância que um número se encontra em relação ao zero e, por isso, o módulo de um número nunca será negativo. É possível que eles encontrem alguma dificuldade para resolver o item **a**. Caso isso aconteça, comente que há dois números inteiros que se encontram a 15 unidades de distância do zero. Pergunte quais são esses números. Os estudantes devem notar que tanto o −15 quanto o 15 se encontram a 15 unidades de distância do zero.
- Caso julgue necessário, retome o conceito de número simétrico durante a realização da atividade **7**. Pergunte aos estudantes o que dois números simétricos têm em comum. Espera-se que eles respondam que os números têm o mesmo módulo.
- Sugira aos estudantes que utilizem a reta numérica como apoio para resolver a atividade **9**.
- Na atividade **10**, caso os estudantes sintam dificuldade em perceber que a medida da distância entre dois números inteiros opostos é o dobro do módulo deles, dê alguns exemplos na reta numérica com números menores: comece por 1 e −1 e vá marcando outros pares de números na reta e calculando as medidas das distâncias entre os simétricos.

RESPOSTA

4.

Número	Antecessor	Sucessor	Oposto	Módulo
13	12	14	−13	13
−7	−8	−6	7	7
127	126	128	−127	127
0	−1	1	0	0
−25	−26	−24	25	25

CAPÍTULO 3

Conteúdos

- Operações com números inteiros: adição, subtração, multiplicação e divisão.
- Propriedades da adição e da multiplicação de números inteiros.
- Operações inversas.
- Expressões numéricas envolvendo números inteiros.

Objetivos

- Realizar adição, subtração, multiplicação e divisão com números inteiros, utilizando esses conhecimentos na resolução de problemas.
- Reconhecer as propriedades comutativa, associativa, do elemento oposto e do elemento neutro da adição de números inteiros.
- Resolver problemas envolvendo as propriedades da adição de números inteiros.
- Reconhecer a adição e a subtração como operações inversas.
- Reconhecer as propriedades da multiplicação de números inteiros: comutativa, associativa, do elemento neutro e distributiva da multiplicação em relação à adição.
- Reconhecer a multiplicação e a divisão como operações inversas.
- Resolver problemas envolvendo as propriedades da multiplicação.
- Resolver expressões numéricas com números inteiros.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de explorar as operações envolvendo números inteiros, compreendendo novas propriedades operatórias e servindo de base para a construção de outros conjuntos numéricos. A abordagem desse conteúdo favorece a criação de novas estratégias de cálculo, contribuindo para que os estudantes tenham maior autonomia em resoluções de problemas com contextos do dia a dia.

ADIÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

- Há uma variedade de exemplos para a abordagem da adição de números inteiros: o saldo de gols em campeonatos de futebol, deslocamentos na reta numérica, créditos e débitos em transações financeiras e pontuação em jogos, entre outros.

Capítulo

3 OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Para melhor compreensão deste conteúdo, os estudantes devem saber realizar operações com os números naturais e conhecer as propriedades da adição e da multiplicação com números naturais.

Adição de números inteiros

Observe a tabela a seguir e reflita: Como você faria para desempatar dois times de futebol com a mesma quantidade de pontos?

1ª fase do Campeonato Brasileiro de Futebol Feminino A1 de 2021

Posição	Nome do clube	P	J	V	E	D	GP	GC	SG
1	Corinthians-SP	38	15	12	2	1	44	13	31
2	Palmeiras-SP	37	15	11	4	0	45	13	32
3	São Paulo-SP	29	15	8	5	2	31	14	17
4	Santos-SP	27	15	8	3	4	27	17	10
5	Ferroviária-SP	27	15	8	3	4	21	15	6
6	Internacional-RS	27	15	8	3	4	19	16	3
7	Grêmio-RS	25	15	7	4	4	27	21	6
8	Kindermann-SC	21	15	6	3	6	19	19	0
9	Flamengo-RJ	18	15	4	6	5	14	19	–5
10	Real Brasília-DF	18	15	4	6	5	12	22	–10

Fonte de pesquisa: Confederação Brasileira de Futebol. Disponível em: https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-feminino-a1/2021?phase=1439. Acesso em: 19 abr. 2022.

↓ Jogadoras em partida de futebol entre Corinthians e Palmeiras no Campeonato Brasileiro Feminino A-1, em São Paulo (SP). Foto de 2021.

Bruno Ruas/Shoot/Alamy/Fotoarena

Thomas Bethge/Shutterstock.com/ID/BR

O saldo de gols é um dos critérios de desempate definido pelo regulamento da competição. Para calcular esse saldo, consideramos números positivos os gols a favor (gols pró) e números negativos os gols contra. Em seguida, efetuamos a adição desses números.

Ao observar a tabela com os resultados da 1ª fase do Campeonato Brasileiro de Futebol Feminino A1 de 2021, podemos verificar que o saldo de gols (SG) do time Grêmio-RS é 6 – 27 gols a favor (GP) e 21 gols contra (GC). Podemos observar também que os saldos de gols dos times Flamengo-RJ e Real Brasília-DF são valores negativos. Isso acontece quando o número de gols sofridos é maior que o número de gols a favor. Por exemplo, o time Flamengo-RJ fez 14 gols a favor (GP) e levou 19 gols (GC), portanto o saldo de gols é -5.

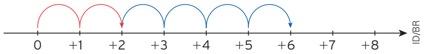
Acompanhe as situações a seguir, que tratam de adições com números inteiros.

Situação 1

Antônio tem 2 livros e comprou mais 4 livros. Com quantos livros ele ficou depois dessa compra?

Para responder a essa questão, podemos efetuar a adição $(+2) + (+4)$.

Partindo do zero, percorremos na reta numérica **2** unidades para a direita (pois $+2$ é um número positivo) e, depois, seguimos mais **4** unidades para a direita (pois $+4$ é um número positivo).



Assim: $(+2) + (+4) = 6$.

Portanto, Antônio ficou com 6 livros.

Em uma adição de dois números inteiros positivos, a soma é positiva. Para encontrar essa soma, adicionamos o módulo desses números.

Exemplos

A. $(+15) + (+12) =$

$= +(|15| + |12|) =$

$= +(15 + 12) =$

$= +27$

B. $(+150) + (+85) =$

$= +(|150| + |85|) =$

$= +(150 + 85) =$

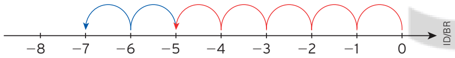
$= +235$

Situação 2

Bianca estava devendo 5 reais para sua irmã e pegou mais 2 reais emprestados com ela. Quantos reais Bianca está devendo para a irmã?

Para responder a essa questão, podemos efetuar a adição $(-5) + (-2)$.

Partindo do zero, percorremos na reta numérica **5** unidades para a esquerda (pois -5 é um número negativo) e, depois, seguimos mais **2** unidades para a esquerda (pois -2 também é um número negativo).



Assim: $(-5) + (-2) = -7$.

Portanto, Bianca está devendo 7 reais para sua irmã.

- Os estudantes provavelmente não apresentarão dificuldades na compreensão do significado de “saldo de gols”. Ainda assim, é importante formalizar tal significado. Espera-se que eles compreendam a expressão: SG = GP − GC. Peça que representem o saldo de gols de cada um dos times por meio de uma expressão numérica. Assim:
  - Corinthians-SP: $44 - 13 = 31$
  - Palmeiras-SP: $45 - 13 = 32$
  - São Paulo-SP: $31 - 14 = 17$
  - Santos-SP: $27 - 17 = 10$
  - Ferroviária-SP: $21 - 15 = 6$
  - Internacional-RS: $19 - 16 = 3$
  - Grêmio-RS: $27 - 21 = 6$
  - Kindermann-SC: $19 - 19 = 0$
  - Flamengo-RJ: $14 - 19 = -5$
  - Real Brasília-DF: $12 - 22 = -10$
- Ao depararem com a situação **2**, que envolve adição de números inteiros negativos, é possível que os estudantes tenham dificuldade na compreensão da adição algébrica, sobretudo no que se refere aos módulos entre parênteses. Caso isso aconteça, retome o conceito de módulo lembrando aos estudantes sua relação com a medida da distância de um número até o zero e que os sinais de positivo (**+**) e de negativo (**−**) indicam em qual sentido essa distância foi percorrida.

DE OLHO NA BASE

Compreender que há uma associação dos números inteiros com pontos da reta numérica e utilizá-los em situações envolvendo adição e subtração auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF07MA03**.

OUTRAS FONTES

Nascimento, R. A. do. Explorando a reta numérica para identificar obstáculos em adição e subtração de números inteiros relativos. *In*: VII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 2004, Recife. *Anais* [...], Recife: UFPE, 2004. p. 1-6. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/01/CC15311333472.pdf. Acesso em: 25 maio 2022.

O trabalho caracteriza as dificuldades que os estudantes do Ensino Médio e do Ensino Fundamental apresentam diante de adição e subtração de números inteiros relativos.

- As situações **3** e **4** também trabalham com o deslocamento na reta. Diferentemente das situações anteriores, em que os deslocamentos ocorriam para um mesmo lado, agora os estudantes deparam com idas e vindas na reta numérica.
- É importante deixar claro aos estudantes que, independentemente do tipo de deslocamento, o resultado será sempre a posição final menos a posição inicial. Outro ponto a se destacar é que o valor numérico do resultado encontrado (sem o sinal) se refere à medida da distância entre os pontos; já o sinal indica se o deslocamento foi para a direita ou para a esquerda.

Em uma adição de dois números inteiros negativos, a soma é negativa. Para encontrar essa soma, adicionamos o módulo desses números e mantemos o sinal deles.

Exemplos

A. $(-17) + (-4) =$

$= -(|-17| + |-4|) =$

$= -(17 + 4) =$

$= -21$

B. $(-134) + (-322) =$

$= -(|-134| + |-322|) =$

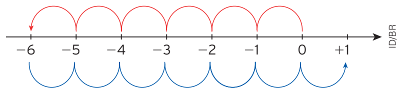
$= -(134 + 322) =$

$= -456$

Situação 3

Veja como podemos efetuar a adição $(-6) + (+7)$ na reta numérica.

Partindo do zero, percorremos na reta numérica **6** unidades para a esquerda (pois -6 é um número negativo) e, depois, seguimos **7** unidades para a direita (pois $+7$ é um número positivo).



Assim: $(-6) + (+7) = 1$.

Em uma adição de dois números inteiros com sinais diferentes, a soma terá o sinal do número de maior módulo. Para encontrar essa soma, devemos calcular o módulo da diferença dos módulos desses números.

Exemplos

A. $(-24) + (+47)$

Primeiro, determinamos os módulos desses números:

$|-24| = 24$

$|+47| = 47$

Como os módulos são diferentes, a soma terá o sinal do número do maior módulo, ou seja, positivo, pois $47 > 24$. Assim:

$(-24) + (+47) =$

$= +||-24| - |+47|| =$

$= +|24 - 47| =$

$= +23$

B. $(+116) + (-77)$

Primeiro, determinamos os módulos desses números:

$|+116| = 116$

$|-77| = 77$

Como os módulos são diferentes, a soma terá o sinal do número do maior módulo, ou seja, positivo, pois $116 > 77$. Assim:

$(+116) + (-77) =$

$= +||+116| - |-77|| =$

$= +|116 - 77| =$

$= +39$

Situação 4

Um termômetro estava marcando a temperatura de 8 °C às 2 horas da manhã. Quatro horas depois, a temperatura havia diminuído 8 °C. Que temperatura o termômetro estava marcando às 6 horas da manhã?

Para responder à pergunta, podemos efetuar a adição $(+8) + (-8)$.

(IN)FORMAÇÃO

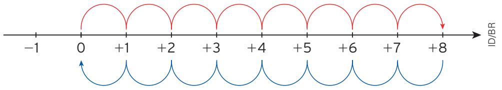
Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades

[...]

Dadas as propriedades desse sistema, as operações realizadas com seus elementos ganham um novo significado e se ampliam. Assim, nos naturais, os sinais usados nas operações são exclusivamente de natureza operatória e, portanto, indicam "acrescentar algo a" ou "tirar de". Em se tratando do conjunto dos inteiros, a adição representa casos em que há acréscimo, outros em que há decréscimo, bem como somas que dão zero. Na realidade, o conceito de adição precisa ser ampliado, não se limitando à ideia de acrescentar. Na medida em que se abstrai das diferentes associações de números positivos e negativos, um invariante, expresso na ideia de operador aditivo que produz transformações de acordo com os elementos em jogo, é possível chegar às generalizações expressas nas regras da adição: sinais iguais somam-se e conservam-se os sinais; sinais diferentes ou opostos subtraem-se e conserva-se o sinal do de módulo maior. A adição deixa de ser apenas acrescentar (um dos casos) para ter um novo significado, mais genérico, de associação ou composição.

Da mesma forma que a adição, a subtração ganha novo significado. No geral, nos naturais, está associada à ideia de tirar (do maior tirar o menor) ou à de achar o complemento entre dois números positivos dados. A construção operatória da subtração supõe assimilá-la como inversa à adição, de tal forma que em uma dada reunião ou associação de elemento ($a + b = c$), é possível chegar ao ponto de partida, (a), por exemplo, pela diferença ($c - b$), ou seja, pela operação

Partindo do zero, percorremos na reta numérica **8** unidades para a direita (pois +8 é um número positivo) e, depois, seguimos **8** unidades para a esquerda (pois −8 é um número negativo).



Assim: (+8) + (−8) = 0.

Portanto, o termômetro estava marcando 0 °C às 6 horas da manhã.

Na adição de dois números simétricos, a soma é igual a zero.

Exemplos

A. (−95) + (+95) =
= −95 + 95 =
= 0

B. (+321) + (−321) =
= 321 − 321 =
= 0

Situação 5

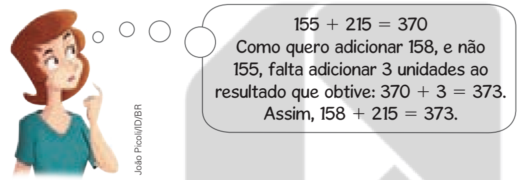
Iolanda tem uma loja de roupas. Ela tem 158 camisetas no estoque de sua loja e recebeu um lote com mais 215 camisetas para guardar no estoque. Quantas camisetas ficaram no estoque depois do recebimento desse lote?

Podemos efetuar a adição 158 + 215 para responder à pergunta. Vamos fazer essa adição de duas maneiras diferentes.

1ª maneira: Usando o algoritmo usual.

$$\begin{array}{r} 1\,5\,8 \\ +\,2\,1\,5 \\ \hline 3\,7\,3 \end{array}$$

2ª maneira: Usando o cálculo mental.



Portanto, ficaram 373 camisetas no estoque depois do recebimento do lote.

Situação 6

Observe como podemos realizar a adição 347 + (−123) de duas maneiras diferentes.

1ª maneira: Usando o algoritmo usual.

$$\begin{array}{r} 3\,4\,7 \\ -\,1\,2\,3 \\ \hline 2\,2\,4 \end{array}$$

2ª maneira: Usando o algoritmo da decomposição.

3 4 7 → 3 centenas, 4 dezenas e 7 unidades
1 2 3 → − 1 centena, 2 dezenas e 3 unidades
2 centenas, 2 dezenas e 4 unidades

Logo, 347 + (−123) = 224.

- A situação **5** apresenta um problema resolvido de duas maneiras: usando o algoritmo usual e usando o cálculo mental. Aproveite para perguntar aos estudantes como eles resolveriam mentalmente a adição apresentada. Dessa forma, é possível ampliar o repertório de cálculo deles. Outra maneira de adicionar mentalmente 158 a 215 é arredondar 158 para 160 e fazer 160 + 215 = 375. Como no arredondamento foram acrescentadas duas unidades, retiramos duas unidades do resultado, ou seja, 158 + 215 = 373.
- A situação **6** retoma o algoritmo por decomposição. Se julgar necessário, faça na lousa outras adições e as resolva da mesma maneira.

DE OLHO NA BASE

Compreender que a adição de números inteiros pode ser resolvida de maneiras diferentes, valendo-se da reta numérica, do algoritmo usual, do cálculo mental e da decomposição, possibilita aos estudantes desenvolver a habilidade **EF07MA03**.

inversa. Para operar com inteiros é fundamental que o esquema de assimilação para subtração esteja estruturado com base na abstração do invariante da inversão e não simplesmente no conceito de tirar. Subtrair inteiros significa trabalhar com operadores negativos, ou seja, números que operam transformações de oposição. Assim −7 − (−2) = −7 + 2 ou −7 − (+2) = −7 − − 2. A generalização do caráter de inversão presente na subtração para os inteiros é muito mais complexa, porque é preciso identificar a operação que está em jogo, tarefa não muito simples quando se trata de operar com números positivos e negativos. Assim, por exemplo, para operar o inverso de +7 + 2 = +9 ou −7 − 2 = −9, é preciso ter clareza de que em ambos os casos temos uma adição (os operadores têm o mesmo sinal, portanto, produzem transformações em um mesmo sentido) e que a subtração se daria mudando o sinal de um dos operadores (operadores com sinais diferentes indicam transformações em sentidos opostos).

[...]

Teixeira, L. R. M. Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades. *Pro-Posições*, v. 4, n. 1, p. 60-72, mar. 1993. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644382/11806. Acesso em: 25 maio 2022.

- Antes de apresentar as propriedades da adição em $\mathbb{Z}$, peça aos estudantes que citem as propriedades da adição de números naturais, estudadas no ano anterior:
  - Comutativa: a ordem das parcelas não altera a soma.
  - Associativa: a ordem de associação das parcelas não altera a soma.
  - Elemento neutro: o zero é o elemento neutro da adição.
- Após o estudo das propriedades da adição de números inteiros, verifique se os estudantes identificam a nova propriedade, que não faz parte dos números naturais: a propriedade do elemento oposto.

Propriedades da adição em $\mathbb{Z}$

Vamos estudar as propriedades da adição de números inteiros.

Propriedade comutativa da adição

Em uma adição de números inteiros, a ordem das parcelas não altera a soma.

Exemplos

A. $(+5) + (-2) =$
$= +(5 - 2) =$
$= +3$

$(-2) + (+5) =$
$= +(-2 + 5) =$
$= +3$

Então, $(+5) + (-2) = (-2) + (+5) = +3$.

B. $(-18) + (+7) =$
$= +(-18 + 7) =$
$= -11$

$(+7) + (-18) =$
$= +(7 - 18) =$
$= -11$

Então, $(-18) + (+7) = (+7) + (-18) = -11$.

Propriedade associativa da adição

Em uma adição de três ou mais números inteiros, podemos associar as parcelas de diferentes maneiras sem alterar a soma.

Exemplos

A. $[(+5) + (+2)] + (-1) =$
$= (+7) + (-1) =$
$= +(7 - 1) =$
$= +6$

$(+5) + [(+2) + (-1)] =$
$= +(+5) + (+1) =$
$= +(5 + 1) =$
$= +6$

Então, $[(+5) + (+2)] + (-1) = (+5) + [(+2) + (-1)] = +6$.

B. $[(-5) + (-1)] + (-8) =$
$= (-6) + (-8) =$
$= -(6 + 8) =$
$= -14$

$(-5) + [(-1) + (-8)] =$
$= (-5) + (-9) =$
$= -(5 + 9) =$
$= -14$

Então, $[(-5) + (-1)] + (-8) = (-5) + [(-1) + (-8)] = -14$.

Propriedade do elemento oposto

Para cada número inteiro, existe um oposto. Em uma adição de um número inteiro e seu oposto, a soma é igual a zero.

Exemplos

A. $5 + (-5) = 0$

B. $(-9) + 9 = 0$

Propriedade do elemento neutro

Em uma adição em que uma das parcelas é igual a 0 (zero), a soma é igual à outra parcela. O zero é o **elemento neutro da adição**.

Exemplos

A. (−7) + 0 = −7

B. 0 + 6 = 6

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Determine o resultado de cada adição.

a) (+7) + (+5) **12**

b) (+13) + (+4) **17**

c) (−8) + (−12) **−20**

d) (+3) + (−5) **−2**

e) (+5) + (−2) **3**

f) 0 + (−20) **−20**

g) (+30) + 0 **30**

h) (−52) + (+41) **−11**

2. Copie e complete o quadro a seguir no caderno. **Consulte a resposta neste manual.**

+	+2	+1	0	−1	−2
+2	▨	▨	▨	▨	▨
+1	▨	▨	▨	▨	▨
0	▨	▨	▨	▨	▨
−1	▨	▨	▨	▨	▨
−2	▨	▨	▨	▨	▨

3. No caderno, construa uma reta numérica de −8 a +8 e marque os pontos a seguir.

a) *A*: +3

b) *B*: simétrico de *A*

c) *C*: +5

d) *D*: simétrico de *C*

e) *E*: *A* + *B*

f) *F*: *A* + *D*

g) *G*: *C* + *D*

h) *H*: *B* + *D*

i) *I*: *A* + *C*

j) *J*: *B* + *C*

4. Determine o valor de ■ em cada item.

a) (+4) + (−16) = ■ **−12**

b) (−1) + (+9) = ■ **+8**

c) (−2) + (+26) = ■ **+24**

d) 0 + ■ = 34 **+34**

e) +57 + ■ = 0 **−57**

5. Calcule ★ + ●, sabendo que:

a) ★ = −7 e ● = +6. **−1**

b) ★ = +6 e ● = +2. **+8**

c) ★ = −8 e ● = −4. **−12**

d) ★ = 0 e ● = −9. **−9**

e) ★ = +8 e ● = +7. **+15**

f) ★ = 0 e ● = 0. **0**

6. Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o. **Consulte a resposta neste manual.**

a	−4	+6	0	−2
b	+3	−7	+1	−5
a + *b*	▨	▨	▨	▨
b + *a*	▨	▨	▨	▨
Oposto de *a* + oposto de *b*	▨	▨	▨	▨
Oposto de (*a* + *b*)	▨	▨	▨	▨
Oposto de (*b* + *a*)	▨	▨	▨	▨

a) Os resultados obtidos em *a* + *b* e em *b* + *a* são iguais? Que propriedade justifica sua resposta? **Sim. A propriedade comutativa.**

b) Explique por que os resultados obtidos nas duas últimas linhas do quadro são iguais. Justifique algebricamente. **Consulte a resposta neste manual.**

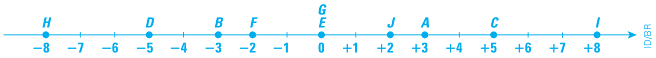
7. Considere um número inteiro. Adicionando-o ao seu sucessor, obtém-se um resultado cujo módulo é 13. Qual é esse número inteiro? **6 ou −7.**

8. Escreva uma sentença matemática e resolva cada situação a seguir.

a) Na segunda-feira, o saldo bancário de Paula era negativo em R$ 167,00. Na terça-feira, ela recebeu um depósito de R$ 570,00. Qual é o novo saldo bancário de Paula? **R$ 403,00**

b) Na cidade de Urupema, Santa Catarina, a temperatura às 0 h do dia 3 de maio de 2017 era de 10 °C. Às 8 h, a temperatura subiu 1 °C e, às 13 h, subiu mais 7 °C. Qual foi a temperatura às 13 h desse dia? **18 °C**

3.



- Na atividade **3**, nos itens **e**, **f**, **g**, **h**, **i** e **j**, estimule os estudantes a registrar a adição dos números correspondentes aos pontos indicados. Por exemplo:
  A + *B* = 3 + (−3) = 0
  B + *D* = −3 + (−5) = −8
- Na atividade **4**, aproveite os itens **d** e **e** para explorar as propriedades do elemento neutro e do elemento oposto, respectivamente. Em relação aos outros itens, sugira aos estudantes que estimem se a resposta será um número positivo ou negativo antes de calcular. Assim, no item **b**, por exemplo, pergunte a eles se o resultado será positivo ou negativo. Caso tenham dificuldades, apresente essa operação por meio de situações envolvendo saldo de gols, temperatura ou saldo bancário. Utilize também a reta numérica.
- Na atividade **6**, solicite aos estudantes que registrem os procedimentos utilizados.
- Na atividade **7**, lembre os estudantes de que o módulo de um número está relacionado à medida da distância dele ao zero.
- Na atividade **8**, peça aos estudantes que escrevam as expressões antes de calcular o resultado.

DE OLHO NA BASE

A atividade **3** permite aos estudantes associar números inteiros a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvem adição e subtração, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA03**.

Já as atividades **7** e **8** possibilitam aos estudantes resolver problemas que envolvem a adição e a subtração de números inteiros, promovendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA04**.

RESPOSTAS

2.

+	+2	+1	0	−1	−2
+2	+4	+3	+2	+1	0
+1	+3	+2	+1	0	−1
0	+2	+1	0	−1	−2
−1	+1	0	−1	−2	−3
−2	0	−1	−2	−3	−4

6.

a	−4	+6	0	−2
b	+3	−7	+1	−5
a + *b*	−1	−1	+1	−7
b + *a*	−1	−1	+1	−7
Oposto de *a* + oposto de *b*	1	1	−1	7
Oposto de (*a* + *b*)	1	1	−1	7
Oposto de (*b* + *a*)	1	1	−1	7

b) Como *a* + *b* = *b* + *a*, pela propriedade comutativa, então o oposto de (*a* + *b*) = = o oposto de (*b* + *a*), ou seja, −(*a* + *b*) = = −(*b* + *a*).

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Explore o quadro da atividade **2** estimulando os estudantes a encontrar operações que revelam propriedades da adição. Pergunte, por exemplo:

- Em quais adições o resultado é zero?
  2 + (−2); 1 + (−1); 0 + 0; −1 + (+1); −2 + (+2)
- Qual(is) propriedade(s) da adição de números inteiros você reconhece nas adições do quadro? Exemplifique. Espera-se que os estudantes reconheçam as propriedades elemento neutro, elemento oposto e comutativa da adição de números inteiros.

SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

- A abordagem da subtração de números inteiros desta página pressupõe que os estudantes tenham se apropriado do significado de oposto de um número inteiro e sua relação com a representação e os deslocamentos na reta numérica. As situações apresentadas constituem uma oportunidade para que esses conceitos sejam retomados.

Respeito

Converse com os estudantes sobre a necessidade de regras quando se convive em grupo. Com base no exemplo dado, amplie a discussão para outros espaços públicos – a escola, os parques, o clube, a cidade – a fim de que os estudantes percebam que essas regras são fundamentais para a vida em sociedade.

DE OLHO NA BASE

O boxe *O respeito na convivência em grupo* contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**, para que os estudantes exercitem a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitem e promovam o respeito ao outro e aos direitos humanos e acolham e valorizem a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

- Promover a cultura de paz possibilita aos estudantes exercitar a empatia e elaborar estratégias de resolução de conflitos não violenta na convivência escolar e na comunidade.

"A atitude não violenta tem como referência a filosofia indiana e está baseada em dois pilares: não causar sofrimento a si ou a outro de nenhuma forma e não se omitir frente a uma circunstância que cause sofrimento."

Fonte: *Convivência escolar e cultura de paz*. Brasília: SEEDF/Subeb, 2020. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 25 maio 2022.

O RESPEITO NA CONVIVÊNCIA EM GRUPO

A convivência em grupo requer que respeitemos várias normas.

Quando moramos em um prédio, devemos respeitar algumas regras. Por exemplo, jogar o lixo no local adequado. Se o lixo for abandonado em qualquer lugar, insetos e outros animais, como ratos, podem ser atraídos e transmitir doenças.

- **Com os colegas, discuta que outros tipos de regra devemos seguir para que a convivência em grupo seja saudável. Que regras vocês consideram mais importantes para o convívio social?**

Resposta pessoal.

Subtração de números inteiros

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Para se exercitar, Andressa prefere subir e descer pela escada do prédio onde mora em vez de utilizar o elevador. Ela mora no 7º andar e vai visitar a amiga que mora no 3º andar. Quantos andares ela terá de descer para ir de seu apartamento até o apartamento da amiga?

Para responder a essa pergunta, podemos realizar a subtração 7 − 3:

$$7 - 3 = 4$$

Assim, Andressa terá de descer 4 andares para visitar a amiga.

Observe que (−3) é o oposto de (+3). Então, podemos escrever a seguinte adição:

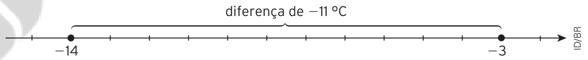
$$7 + (-3) = 7 - 3 = 4$$

A diferença de dois números inteiros é igual à soma do primeiro número com o oposto do segundo.

Situação 2

No primeiro dia do ano de 2018, Andrea viajou da cidade de Oslo, na Noruega, para a cidade de Nova York, nos Estados Unidos. Quando chegou a Nova York, percebeu a diferença na temperatura, pois em Oslo estava −3 °C e, em Nova York, −14 °C. Qual foi a diferença entre as temperaturas dessas duas cidades nesse dia?

Observe como podemos representar na reta numérica a temperatura registrada em Oslo (−3 °C) e a temperatura registrada em Nova York (−14 °C):



Ao olhar para a representação desses números na reta numérica, podemos concluir que a diferença entre as temperaturas das duas cidades é de −11 °C.

Podemos representar essa situação com a seguinte subtração:

$$(-14) - (-3)$$

Temos que o oposto de (−3) é (+3). Então, podemos escrever a seguinte adição:

$$(-14) + (+3) = -14 + 3 = -11$$

Portanto, a diferença entre as temperaturas de Nova York e de Oslo nesse dia foi de −11 °C.

Situação 3

Suzana ganhou R$ 578,00 e separou R$ 285,00 para pagar suas contas. Quantos reais sobraram?

Para responder à pergunta, podemos efetuar a subtração 578 − 285. Veja como podemos fazer essa subtração de três maneiras diferentes.

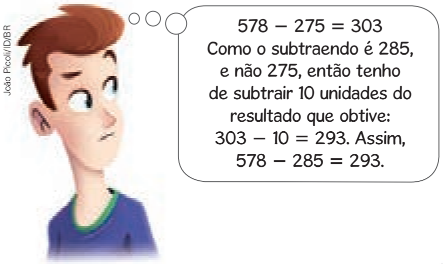
1ª maneira: Usando o algoritmo usual.

$$\begin{array}{r} \overset{4}{\cancel{5}}\,{}_{1}7\;8 \\ -\,2\;8\;5 \\ \hline 2\;9\;3 \end{array}$$

2ª maneira: Usando o algoritmo da decomposição.

$$\begin{array}{lclcr} 5\;7\;8 & \longrightarrow & \text{5 centenas, 7 dezenas e 8 unidades} & \longrightarrow & \text{4 centenas, 17 dezenas e 8 unidades} \\ 2\;8\;5 & \longrightarrow & \text{2 centenas, 8 dezenas e 5 unidades} & \longrightarrow & -\ \text{2 centenas, 8 dezenas e 5 unidades} \\ \cline{5-5} & & & & \text{2 centenas, 9 dezenas e 3 unidades} \end{array}$$

3ª maneira: Usando o cálculo mental.



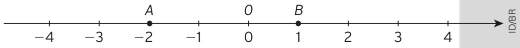
João Picoli/ID/BR

Logo, 578 − 285 = 293.

Então, sobraram R$ 293,00.

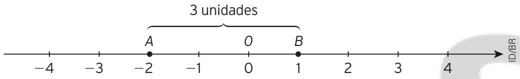
Situação 4

Tales precisa calcular qual é a medida da distância (em unidade de comprimento) entre os pontos *A* e *B* representados na reta numérica a seguir.



ID/BR

Uma das maneiras de calcular essa medida é observar a reta numérica e contar quantas unidades de comprimento há entre os dois pontos:



ID/BR

Outra maneira de obter a medida da distância é calcular o módulo da diferença dos números que cada ponto representa:

$$|1 - (-2)| = |1 + (+2)| = |1 + 2| = |3| = 3$$

Assim, a medida da distância entre esses pontos é 3 unidades de comprimento.

- Antes de analisar a situação **3**, solicite aos estudantes que façam uma estimativa do valor que sobrou e verifiquem se o valor estimado está próximo de R$ 300,00. Depois, comente que a operação será resolvida de três maneiras diferentes. Por fim, compare as estimativas feitas pelos estudantes e o resultado exato. Aproveite também para perguntar a eles se conhecem outra maneira de fazer essa mesma operação, o que permite ampliar o repertório de cálculo deles.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

A fim de que os estudantes desenvolvam estratégias de cálculo mental utilizando a propriedade associativa da adição, proponha a seguinte atividade:

Usando a propriedade associativa, calcule mentalmente os resultados das operações.

a) −70 + 214 − 30 = 114

b) 193 − 3 − 100 = 90

c) 40 − 96 − 4 = −60

d) −175 + 363 − 25 = 163

e) −3 − 57 − 397 = −457

f) 10 − 2 000 + 90 − 400 = −2 300

Comente com os estudantes que conhecer algumas estratégias de cálculo mental, como que número adicionar ou subtrair primeiro, auxilia também no cálculo escrito. Explique a eles que o uso da propriedade associativa facilita o cálculo mental, uma vez que é possível associar números cuja adição ou subtração é quase imediata. Por exemplo, no item **a**, deve-se adicionar −70 e −30 (soma igual a −100), depois calcular mentalmente −100 + 214 = 114.

Se julgar oportuno, proponha aos estudantes outras operações desse tipo, acrescentando números maiores.

- Inicie com o exemplo **A**, que traz uma subtração entre dois números positivos com diferença positiva. Amplie o conceito introduzindo números negativos até chegar ao exemplo **B**.

  Para isso, você pode apresentar alguns exemplos intermediários, como os sugeridos a seguir.

  - minuendo e subtraendo positivos e diferença negativa: se, por exemplo, 324 − 500 = −176, então −176 + 500 = = 324;
  - minuendo negativo, subtraendo positivo e diferença negativa: se, por exemplo, −248 − 130 = −378, então −378 + 130 = = −248.

ADIÇÃO ALGÉBRICA

- Comente com os estudantes que a adição algébrica é composta apenas de adições e subtrações cujos termos podem ser números positivos ou números negativos.
- Explique que o sinal negativo antes dos parênteses representa o oposto do que está entre parênteses. Por exemplo, −(−5) representa o oposto de −5, ou seja, +5.
- Na prática, o sinal negativo troca o sinal de tudo que estiver dentro dos parênteses. Isto é, os números positivos ficam negativos e os negativos ficam positivos.
- Certifique-se de que os estudantes entendem o significado da troca dos sinais, para que não a realizem apenas mecanicamente.

Relação fundamental da subtração

Uma loja de eletrodomésticos tinha 348 micro-ondas no estoque no início da manhã. Ao longo do dia, 124 desses aparelhos foram vendidos e sobraram 224 no estoque.

Para verificar se a quantidade de micro-ondas que restaram no estoque estava correta, podemos realizar uma subtração ou uma adição.

- Subtração: 348 − 124 = 224

$$\underbrace{348}_{\text{minuendo}} - \underbrace{124}_{\text{subtraendo}} = \underbrace{224}_{\text{resto ou diferença}}$$

- Adição: 224 + 124 = 348

> Para verificar se uma subtração está correta, podemos realizar uma adição, pois, ao adicionar o subtraendo com o resto (ou a diferença), devemos obter o minuendo. Essa é a **relação fundamental da subtração**.
>
> Portanto:
>
> minuendo − subtraendo = resto ou diferença
>
> Então:
>
> resto ou diferença + subtraendo = minuendo
>
> A adição e a subtração são operações inversas entre si.

Exemplos

A. Vamos conferir o resultado da subtração 389 − 187 = 202.

202 + 187 = 389

Portanto, a diferença da subtração 389 − 187 é, de fato, 202.

B. Vamos conferir o resultado da subtração −597 − (−274) = −323.

−323 + (−274) = −597

Portanto, o resto da subtração −597 − (−274) é, de fato, −323.

Adição algébrica

A adição e a subtração de números inteiros podem ser consideradas e calculadas como uma única operação, denominada **adição algébrica**.

Exemplo

$$
\begin{aligned}
& \underbrace{(-7) - (+15)} + (+4) + (-15) - (-37) = \\
= {} & \underbrace{(-7) + (-15)} + (+4) + (-15) - (-37) = \\
= {} & \underbrace{-22 + (+4)} + (-15) - (-37) = \\
= {} & \underbrace{-18 + (-15)} - (-37) = \\
= {} & \underbrace{-33 - (-37)} = \\
= {} & \underbrace{-33 + (+37)} = \\
= {} & 4
\end{aligned}
$$

- Se julgar necessário, dê mais um exemplo. Veja a seguir.

$$
\begin{aligned}
& \underbrace{(+62) - (+12)} + (-9) - (+18) + (-32) - (+14) = \\
= {} & \underbrace{62 - 12} + (-9) - (+18) + (-32) - (+14) = \\
= {} & \underbrace{50 + (-9)} - (+18) + (-32) - (+14) = \\
= {} & \underbrace{50 - 9} - (+18) + (-32) - (+14) = \\
= {} & \underbrace{41 - (+18)} + (-32) - (-14) = \\
= {} & \underbrace{41 - 18} + (-32) - (-14) = \\
= {} & \underbrace{23 + (-32)} - (-14) = \\
= {} & \underbrace{23 - 32} - (-14) = \\
= {} & \underbrace{-9 - (-14)} = \\
= {} & \underbrace{-9 + (+14)} = \\
= {} & \underbrace{-9 + 14} = \\
= {} & 5
\end{aligned}
$$

Adição e subtração de números inteiros com a calculadora

Podemos realizar operações com números inteiros com o auxílio da calculadora. Observe alguns exemplos.

Exemplos

A. Veja como efetuar a adição (+714) + (−137) na calculadora.

- Digitamos na calculadora: 7 1 4 + 1 3 7 +/− =
- Aparecerá no visor: 577

Essa tecla inverte o sinal do número que está no visor.

B. Veja como efetuar a subtração (−196) − (+348) na calculadora.

- Digitamos na calculadora: 1 9 6 +/− − 3 4 8 =
- Aparecerá no visor: − 544

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

9. Efetue as subtrações no caderno.

a) (+4) − (+2) **+2**
b) (−1) − (−4) **+3**
c) (−9) − (+5) **−14**
d) (+4) − (−2) **+6**

10. Laura adora as aulas no laboratório de Ciências da escola. Em uma dessas aulas, o professor solicitou aos estudantes que medissem a temperatura de determinado líquido. Laura encontrou o valor de −3 °C. Em seguida, o professor pediu aos estudantes que abaixassem essa temperatura em 5 °C. Qual deve ser a nova temperatura medida por Laura? **−8 °C**

11. Acompanhe a seguir a movimentação bancária de uma conta corrente. Os números em vermelho indicam saída de dinheiro da conta. Os números em verde indicam entrada.

EXTRATO BANCÁRIO

2 DE MAIO
SALDO R$ 450,00

4 DE MAIO
CARTÃO DE DÉBITO R$ 230,00
CARTÃO DE DÉBITO R$ 185,00

20 DE MAIO
DEPÓSITO R$ 420,00
SAQUE R$ 500,00

30 DE MAIO
SALDO

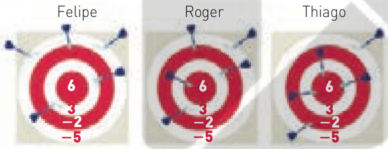
Ilustrações: João Picoli/ID/BR

Sabendo que não houve outra movimentação nessa conta, qual é o saldo em 30 de maio? **−R$ 45,00**

12. Calcule o resultado das adições algébricas a seguir.

a) 37 − 22 + 13 − 22 − 0 + 13 **19**
b) (−2) + (−6) + (−11) + (+8) + 10 **−1**
c) −13 + 27 + (−12) − 5 + 76 − (+7) − − (+14) **52**

13. Felipe, Roger e Thiago estavam jogando dardos. Cada um deles deve lançar 5 dardos por rodada.



Os pontos de cada um na rodada são determinados pela adição dos números indicados na região do alvo acertada pelo dardo.

a) Quantos pontos cada jogador fez na rodada representada?
b) Qual dos três jogadores obteve maior pontuação? **Thiago.**
c) Em uma rodada, quais são os possíveis totais parciais de pontos que um jogador pode obter depois de lançar dois dardos? **12, 9, 6, 4, 1, −2, −4, −7 e −10.**

13. a) Felipe: −6 pontos; Roger: 5 pontos; Thiago: 11 pontos.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS COM A CALCULADORA

- Para os estudos propostos nesta página, providencie ou peça aos estudantes que tragam, para a sala de aula, calculadoras simples que tenham a tecla +/−.
- Antes de propor aos estudantes que façam a atividade **9**, retome o conceito de número oposto e proponha a eles outras subtrações. Por exemplo:
  - (−2) − 0 = −2
  - 0 − (−6) = +6
- Caso os estudantes tenham dificuldade na atividade **10**, faça a diminuição da medida da temperatura 1 grau de cada vez. Se julgar necessário, represente a operação em uma reta numérica vertical, como se fosse um termômetro.
- Mostre aos estudantes as diferentes possibilidades de resolver a atividade **11**. Uma delas é adicionar separadamente os valores positivos e os negativos e, depois, juntar os dois resultados.
- No item **c** da atividade **13**, oriente os estudantes a procurar uma estratégia para organizar os dados, uma vez que são muitos. Uma das possibilidades é a organização desses dados em um quadro.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Para que os estudantes utilizem a calculadora como meio de construir outras estratégias de cálculo e, além disso, para verificar e controlar resultados, proponha as atividades a seguir.

1. A tecla − da calculadora de Marta está quebrada, então ela fez algumas tentativas para descobrir o resultado de 9 576 − 3 122, encontrando como resultado o número 6 454:

3 122 + 6 000 = 9 122
3 122 + 6 400 = 9 522
3 122 + 6 450 = 9 572
3 122 + 6 454 = 9 576

Observe as tentativas de Marta e explique como ela pensou.

Espera-se que os estudantes percebam que Marta usou estimativas e fez tentativas utilizando a operação inversa da subtração (a adição) para determinar o resultado.

2. Faça estimativas e escreva o sinal do resultado das operações a seguir.

a) 64 − 274 (−)
b) 3 275 − 978 (+)
c) −2 478 − 645 (−)
d) 32 547 − 32 425 (+)
e) 347 589 + 15 623 (+)
f) −578 − 525 (−)

Agora, com uma calculadora, efetue as operações e confira o sinal do resultado de sua estimativa. Resposta pessoal.

MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

- No estudo da multiplicação de números inteiros, é muito importante que os estudantes construam o significado dessa operação para que tenham condições de inferir as "regras de sinais" sem que seja necessário decorá-las. Vale observar que, quando essas regras são simplesmente decoradas, é comum presenciarmos o uso indevido delas. Muitos estudantes acabam por utilizá-las também na adição e na subtração de números inteiros. Ao afirmar, por exemplo, que "$-2 - 5 = +7$", eles justificam dizendo que "menos com menos dá mais"; ou, ainda, afirmam que "$-8 + 13 = -5$", porque "menos com mais dá menos". Esses equívocos demonstram a necessidade da articulação entre os conceitos que fundamentam essas regras.
- Em relação à multiplicação entre números positivos, os estudantes devem inferir que o resultado será, também, um número positivo, uma vez que entre os significados da multiplicação está a adição de parcelas iguais.
- O mesmo pode ser inferido em relação à multiplicação de um número positivo por um número negativo. Na base dessa operação está a adição de parcelas iguais. Portanto, ao adicionar parcelas negativas, o resultado será um número negativo.

Multiplicação de números inteiros

Na multiplicação de dois números inteiros não nulos, os números podem ser positivos, negativos ou terem sinais diferentes. A seguir, vamos analisar alguns casos.

Multiplicação de dois números inteiros positivos

Você sabe calcular $(+3) \cdot (+14)$? **Resposta pessoal.**

Sabemos que os números inteiros positivos mais o zero correspondem aos números naturais. Assim, a multiplicação de dois números inteiros positivos é igual à multiplicação de dois números naturais. Veja como podemos efetuar essa multiplicação de duas maneiras diferentes.

1ª maneira: Fazendo uma adição de parcelas iguais.

Podemos escrever a multiplicação $(+3) \cdot (+14)$ como uma adição de parcelas iguais, em que repetimos 3 vezes a parcela +14:

$$(+3) \cdot (+14) = 3 \cdot (+14) = (+14) + (+14) + (+14) = +42 = 42$$

Portanto: $(+3) \cdot (+14) = 42$

2ª maneira: Usando o algoritmo usual.

$$\begin{array}{r} 1\,4 \\ \times\ \ 3 \\ \hline 4\,2 \end{array}$$

Quando multiplicamos dois números inteiros positivos, o sinal do produto é positivo.

Exemplos

A. $(+7) \cdot (+5) =$
$= +(7 \cdot 5) =$
$= +35$

B. $(+4) \cdot (+20) =$
$= +(4 \cdot 20) =$
$= +80$

Multiplicação de dois números inteiros com sinais diferentes

Para resolver a multiplicação $(+3) \cdot (-4)$, em que o primeiro fator é positivo, podemos usar a mesma estratégia utilizada anteriormente. Veja.

$$(+3) \cdot (-4) = 3 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$$

Portanto: $(+3) \cdot (-4) = -12$

Mas e quando o primeiro fator é negativo, por exemplo $(-3) \cdot (+4)$, como fazemos para resolver essa multiplicação?

Nesse caso, podemos usar a ideia de oposto. Como $(-3) = -(+3)$, temos:

$$(-3) \cdot (+4) = -(+3) \cdot (+4) = -[(+3) \cdot (+4)] = -[3 \cdot (+4)] =$$
$$= -[(+4) + (+4) + (+4)] = -[+12] = -12$$

Portanto: $(-3) \cdot (+4) = -12$

Quando multiplicamos dois números inteiros com sinais diferentes, indicamos que o sinal do produto é negativo. Depois, multiplicamos os módulos dos números.

sm

(IN)FORMAÇÃO

Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades

[...]

No caso da multiplicação, o conceito de operador multiplicativo deve ser reconstruído. Nos naturais, ele se refere ao número de vezes que um conjunto se repete, ou seja, indica adição repetida. No conjunto dos números inteiros, no entanto, a extensão da concepção como adição repetida encontra obstáculo, pois como mostrar que $(-1) \times (-1) = 1$?

Um operador multiplicativo, no caso dos inteiros, indica número de vezes que um conjunto se repete, ao mesmo tempo [...] que produz transformações de aumento ou diminuição no resultado, dependendo dos sinais em jogo. Quando o operador multiplicativo é positivo, a assimilação é fácil, porque é possível até usando modelos mostrar que $2 \cdot (-5)$ ou $2 \cdot (+5)$ significa repetir duas vezes um número dentro de sua região: ao multiplicar negativo o resultado permanece na região negativa, valendo o mesmo para positivo. Entretanto, quando o operador é negativo não é possível simplesmente imaginar números que se multiplicam na mesma região, mas, além disso, que o operador transforma o resultado obtido, mudando-o de região, ou seja, $-2 \cdot (+5) = -10$ e $-2 \cdot (-5) = +10$. Na multiplicação, portanto, é preciso compreender que há uma duplicidade de operações: as que multiplicam os conjuntos equivalentes, ao mesmo tempo [...] que há operações de transformação que se aplicam aos números, fazendo-os manter ou inverter sua posição na região a que pertenciam. Posteriormente, com base na abstração de níveis mais complexos, é possível compreender que se $\mathbb{Z}$ é uma ampliação de $\mathbb{N}$, o produto de $\mathbb{Z}$ tem que ser uma extensão de $\mathbb{N}$,

Exemplos

A. $(+7) \cdot (-5) =$
$= -(|+7| \cdot |-5|) =$
$= -(7 \cdot 5) =$
$= -35$

B. $(-4) \cdot (+20) =$
$= -(|-4| \cdot |+20|) =$
$= -(4 \cdot 20) =$
$= -80$

Multiplicação de dois números inteiros negativos

Observe o quadro a seguir. As primeiras multiplicações já estão calculadas.

×	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3
−3	−9	−6	−3	0			

+ 3 + 3 + 3

Você percebeu que existe uma regularidade na sequência dos resultados −9, −6, −3, 0? Adicionando 3 ao resultado da multiplicação, obtemos o resultado da próxima multiplicação. Seguindo esse padrão, temos:

×	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3
−3	−9	−6	−3	0	+3	+6	+9

+ 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3

Para efetuar a multiplicação quando os dois fatores são negativos, por exemplo, $(-3) \cdot (-3)$, também podemos usar a ideia de oposto. Veja.

$(-3) \cdot (-3) = -(+3) \cdot (-3) = -[(+3) \cdot (-3)] = -[3 \cdot (-3)] =$
$= -[(-3) + (-3) + (-3)] = -[-9] = +9$

Portanto: $(-3) \cdot (-3) = +9$

> Quando multiplicamos dois números inteiros negativos, indicamos que o sinal do produto é positivo. Depois, multiplicamos os módulos dos números.

Exemplos

A. $(-8) \cdot (-9) =$
$= +(|-8| \cdot |-9|) =$
$= +(8 \cdot 9) = +72$

B. $(-7) \cdot (-6) =$
$= +(|-7| \cdot |-6|) =$
$= +(7 \cdot 6) = +42$

Multiplicação de três ou mais fatores

Podemos efetuar a multiplicação de três ou mais fatores por etapas. Primeiro, multiplicamos os dois primeiros fatores. Depois, multiplicamos esse resultado pelo terceiro fator, e assim por diante.

Exemplos

A. $\underbrace{(+3) \cdot (+11)} \cdot (-2) =$
$= 33 \cdot (-2) =$
$= -66$

B. $\underbrace{(-5) \cdot (+6)} \cdot (+9) =$
$= -30 \cdot 9 =$
$= -270$

- Sobre a multiplicação de um número negativo por um número positivo, além da ideia de oposto apresentada no texto, pode-se recorrer às regularidades em um quadro de multiplicação como este:

×	+4
+3	+12
+2	+8
+1	+4
0	0
−1	−4
−2	−8
−3	−12

− 4
− 4
− 4
− 4
− 4
− 4

- A multiplicação entre dois números negativos já é explicada, no texto, por meio das regularidades em um quadro de multiplicações. É possível utilizar, também, a ideia de oposto de um número inteiro. Por exemplo, em $(-8) \cdot (-2)$, considerando que −8 é o oposto de +8, temos que $(-8) = -(+8)$. Assim, podemos pensar que $-(+8) \cdot (-2)$ é o mesmo que o oposto de $[(+8) \cdot (-2)]$. Então, podemos fazer:

$(-8) \cdot (-2) =$
$= -[(+8) \cdot (-2)] =$
$= -[-16] =$
$= +16$

portanto distributivo com relação à soma, comutativo e associativo. O prolongamento dessas propriedades de ℕ a ℤ faculta definir operações impondo-se condições prévias, como no caso das justificativas algébricas, tal como demonstrou Hankel (Glaeser, 1985).

[...]

Teixeira, L. R. M. Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos de dificuldades. *Pro-Posições*, v. 4, n. 1, p. 60-72, 1993. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644382/11806. Acesso em: 25 maio 2022.

- Introduza as propriedades da multiplicação de números inteiros partindo do conhecimento prévio dos estudantes acerca das propriedades da multiplicação de números naturais e dê exemplos numéricos. Explique a eles que as propriedades comutativa, associativa, distributiva e do elemento neutro da multiplicação, válidas para números naturais, também são válidas para os números inteiros.

DE OLHO NA BASE

Os exemplos e as atividades destas páginas possibilitam aos estudantes resolver problemas que envolvem a multiplicação de números inteiros, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA04**.

Propriedades da multiplicação em $\mathbb{Z}$

Vamos estudar as propriedades da multiplicação de números inteiros.

Propriedade comutativa da multiplicação

Em uma multiplicação de números inteiros, a ordem dos fatores não altera o produto.

Exemplos

A. 3 · (−2) =
= −6

(−2) · 3 =
= −6

Então, 3 · (−2) = (−2) · 3 = −6

B. (−5) · (−2) =
= 10

(−2) · (−5) =
= 10

Então, (−5) · (−2) = (−2) · (−5) = 10.

Propriedade associativa da multiplicação

Em uma multiplicação de três ou mais números inteiros, podemos associar os fatores de diferentes maneiras sem alterar o produto.

Exemplos

A. (3 · 2) · (−4) =
= 6 · (−4) =
= −24

3 · [2 · (−4)] =
= 3 · [−8] =
= −24

Então, (3 · 2) · (−4) = 3 · [2 · (−4)] = −24.

B. [7 · (−3)] · 5 =
= [−21] · 5 =
= −105

7 · [(−3) · 5] =
= 7 · [−15] =
= −105

Então, [7 · (−3)] · 5 = 7 · [(−3) · 5]= −105.

Propriedade do elemento neutro da multiplicação

Em uma multiplicação de um número inteiro por 1, o produto é o próprio número inteiro. O 1 é o **elemento neutro da multiplicação**.

Exemplos

A. (−3) · 1 = −3

B. 1 · 6 = 6

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Para complementar o estudo da multiplicação de números inteiros e enfatizar as diferentes maneiras de multiplicar, proponha as atividades a seguir.

1. O produto de dois números inteiros é +48. Escreva quatro maneiras de expressar o número +48 como produto de dois números inteiros.
   Resposta possível: +1 · (+48); +2 · (+24); (−3) · (−16); (−4) · (−12).
   Escreva na lousa as diferentes maneiras que os estudantes apresentarem. Assim, é possível ampliar o repertório de cálculo deles.
2. Observe como duas pessoas pensaram para calcular o produto: (−30) · (+44) · (−60).
   - Primeira pessoa: Eu pensei primeiro no sinal do produto. Como são dois fatores negativos, o sinal do produto é positivo. Em seguida, fiz algumas associações e decomposições:
     44 · 6 = 264, então: 44 · 60 = 2 640

     792

     2 640 · 30 = 264 · 10 · 3 · 10 = 79 200

     100
   - Segunda pessoa: Eu pensei em aplicar a propriedade associativa, multiplicando −60 por −30 e o resultado por +44.

Propriedade distributiva da multiplicação

Em uma multiplicação de um número inteiro por uma adição algébrica de duas ou mais parcelas, multiplicamos cada parcela por esse número e adicionamos os produtos obtidos.

Exemplos

A. $(5 + 2) \cdot (-3) =$
$= 5 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) =$
$= (-15) + (-6) =$
$= -15 - 6 =$
$= -21$

B. $(4 - 7) \cdot 5 =$
$= 4 \cdot 5 + (-7) \cdot 5 =$
$= 20 + (-35) =$
$= 20 - 35 =$
$= -15$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

14. Copie e complete o quadro a seguir no caderno.

	Primeiro fator	Segundo fator	Produto
	6	−4	−24
−108	−9	12	▥
39	3	13	▥
192	−8	−24	▥
2	−7	▥	−14
−7	▥	−5	35

15. Construa no caderno um quadro como o do modelo a seguir e complete-o com os possíveis sinais dos fatores e o sinal de cada produto da multiplicação de dois números inteiros não nulos.
Consulte a resposta neste manual.

Sinal do primeiro fator	Sinal do segundo fator	Sinal do produto
▥	▥	▥

16. Qual é o resultado da multiplicação de um número inteiro positivo por zero? E de um número inteiro negativo por zero? **0; 0.**

17. Escreva no caderno os números inteiros que estão entre:

a) -1 e $+2$. **0, +1**

b) -7 e -4. **−6, −5**

Agora, calcule o produto dos números que você encontrou nos itens **a** e **b**.
a) 0; b) 30.

18. Calcule:

a) $1 \cdot (-6) \cdot (-66) \cdot (+1\,009) \cdot 0 \cdot (-999)$ **0**

b) $(-9) \cdot (-7) \cdot (+1) \cdot (-2)$ **−126**

c) $(-4) \cdot (-1) \cdot (-2)$ **−8**

d) $(-2) \cdot (+2) \cdot (-2)$ **+8**

e) $(-6) \cdot (-4) \cdot (-1)$ **−24**

f) $\underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot (-1)}_{\text{15 vezes}}$ **−1**

19. Calcule o número que multiplicado por:

a) -9 tem como resultado $+9$; **−1**

b) -3 tem resultado 0. **0**

20. Calcule o produto aplicando a propriedade distributiva.

a) $(-4) \cdot (-5 + 91)$ **−344**
c) $(6 - 3) \cdot (-7)$ **−21**
b) $(+5) \cdot (3 + 12)$ **75**
d) $[10 - (-5)] \cdot 2$ **30**

21. Pedro se esqueceu de pagar três prestações de R$ 135,00 e precisa pensar no que fazer para diminuir essa dívida.

a) Qual é o valor total das prestações em atraso? **R$ 405,00**

b) Ao consultar seu saldo bancário, Pedro verificou que a irmã dele havia feito oito depósitos de R$ 25,00. Quanto a irmã de Pedro depositou na conta dele? **R$ 200,00**

c) Se Pedro usar o dinheiro dos depósitos que a irmã fez para pagar as prestações em atraso, quanto ele ainda precisará juntar para pagar essas prestações?
R$ 205,00

- Na atividade **17**, sugira aos estudantes que utilizem a reta numérica caso tenham dificuldade em encontrar os números solicitados.
- Espera-se que, no item **a** da atividade **18**, os estudantes percebam que o zero como fator torna o produto nulo e, assim, não realizem os cálculos, que nesse caso são desnecessários. No item **f** da atividade, explique aos estudantes o significado das reticências e verifique se eles percebem que basta saber se há um número par ou ímpar de fatores para descobrir o sinal do produto.

RESPOSTA

15.

Sinal do primeiro fator	Sinal do segundo fator	Sinal do produto
+	−	−
+	+	+
−	−	+
−	+	−

Complete o pensamento da segunda pessoa e verifique se o resultado encontrado coincide com o da primeira pessoa.
$(-60) \cdot (-30) \cdot (+44) = +1\,800 \cdot (+44) = = +79\,200$
Sim, o resultado coincide.
Pergunte aos estudantes se eles fariam essa multiplicação de outra maneira e solicite que expliquem.

3. Com um colega, determine o resultado das multiplicações a seguir.

a) $(+20) \cdot (-5) = -100$

b) $(-6) \cdot (-11) \cdot (-35) = -2\,310$

c) $(+15) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (+2) = +600$

d) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$

e) $(-10) \cdot (-2) \cdot (-5) \cdot (-13) = +1\,300$

Agora, juntos, respondam:

I. Qual é o sinal de cada produto quando há:
- um, três ou cinco fatores negativos? Negativo.
- dois ou quatro fatores negativos? Positivo.

II. Escrevam um texto sobre o que observaram a respeito do sinal de um produto de acordo com a quantidade de fatores negativos.
Espera-se que os estudantes percebam que o produto de dois ou mais fatores é negativo quando o número de fatores negativos é ímpar.

DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS

- Antes de realizar a leitura do texto, pergunte aos estudantes se sabem qual é a operação inversa da multiplicação. Em seguida, escreva na lousa uma divisão na chave e retome o significado dos termos da divisão – dividendo, divisor, quociente e resto –, solicitando que indiquem os respectivos termos.
- Em relação aos exemplos de divisão de números inteiros com sinais diferentes, espera-se que os estudantes observem que os sinais dos quocientes são negativos, como na multiplicação, uma vez que essas operações são inversas.

Divisão de números inteiros

Vamos estudar dois casos de divisão de números inteiros: divisão de números inteiros com sinais diferentes e divisão de números inteiros com sinais iguais.

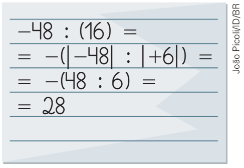
Divisão de números inteiros com sinais diferentes

Veja a divisão que Bruna propôs a Rafael.

João Picoli/ID/BR

Veja como Rafael calculou o resultado dessa divisão.

Cálculo de Rafael:



$-48 : (16) =$

$= -(|-48| : |+6|) =$

$= -(48 : 6) =$

$= 28$

João Picoli/ID/BR

> Para dividir dois números inteiros com sinais diferentes, em que o divisor é diferente de zero, podemos dividir os módulos desses números. O sinal do resultado é sempre negativo.

Exemplos

A. $(+30) : (-6) =$

$= -(|+30| : |-6|) =$

$= -(30 : 6) =$

$= -5$

B. $(+640) : (-80) =$

$= -(|+640| : |-80|) =$

$= -(640 : 80) =$

$= -8$

C. $(-12) : (+3) =$

$= -(|-12| : |+3|) =$

$= -(12 : 3) =$

$= -4$

D. $(-360) : (+4) =$

$= -(|-360| : |+4|) =$

$= -(360 : 4) =$

$= -90$

OUTRAS FONTES

BARBOSA, S. L. P.; CARVALHO, T. O. de. *Jogos matemáticos como metodologia de ensino-aprendizagem das operações com números inteiros*. Projeto de Intervenção Pedagógica na Escola apresentado ao Programa de Desenvolvimento Educacional da Universidade Estadual de Londrina (UEL), p. 1948-8, 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1948-8.pdf. Acesso em: 25 maio 2022.

Esse artigo apresenta um relato de uma experiência que utiliza os jogos matemáticos como estratégia desencadeadora do processo de ensino e aprendizagem das operações com números inteiros.

BORDIN, L. M. *Os materiais manipuláveis e os jogos pedagógicos como facilitadores do processo de ensino e aprendizagem das operações com números inteiros*. 2011. 102 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade Franciscana, Santa Maria. Disponível em: http://tede.universidadefranciscana.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/375. Acesso em: 25 maio 2022.

A obra traz uma análise de como jogos pedagógicos e materiais manipuláveis contribuem para a compreensão das operações com números inteiros.

Divisão de números inteiros com sinais iguais

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Letícia é professora de Educação Física e está organizando um campeonato de vôlei com os estudantes. Na turma há 84 estudantes e ela vai organizá-los em equipes de 6 jogadores cada uma. Quantos times será possível montar?

$$\begin{array}{r|l} 84 & 6 \\ \cline{2-2} 24 & 14 \\ 0 & \end{array}$$

Assim, será possível montar 14 times.

Situação 2

Daniela vai dividir R$ 496,00 igualmente entre as 4 sobrinhas. Quantos reais cada sobrinha vai receber?

Para responder a essa pergunta, podemos calcular o resultado de 496 : 4. Observe como podemos fazer esse cálculo usando o algoritmo usual.

$$\begin{array}{r|l} 496 & 4 \\ \cline{2-2} 016 & 124 \\ 0 & \end{array}$$

Logo, cada sobrinha de Daniela vai receber R$ 124,00.

Para dividir dois números inteiros com sinais iguais, em que o divisor é diferente de zero, podemos dividir os módulos desses números. O sinal do resultado é sempre positivo.

Exemplos

A. $(+40) : (+5) =$

$= +(|+40| : |+5|) =$

$= +(40 : 5) =$

$= +8$

B. $(-81) : (-9) =$

$= +(|-81| : |-9|) =$

$= +(81 : 9) =$

$= +9$

C. $(-349) : (-1) =$

$= +(|-349| : |-1|) =$

$= +(349 : 1) =$

$= 349$

João Picoli/ID/BR

- Quanto aos exemplos de divisão de números inteiros com sinais iguais, espera-se que os estudantes observem que os sinais dos quocientes são positivos, como na multiplicação, uma vez que essas operações são inversas.
- Caso julgue necessário, retome o conceito de módulo de um número.
- É importante que os estudantes saibam por que não existe divisão por zero. Para isso, é possível recorrer à operação inversa, fazendo com que percebam que essa divisão não existe porque o produto de um número multiplicado por zero é sempre zero. Por exemplo: A divisão de 6 por 0 não existe, pois nenhum número inteiro multiplicado por zero resulta em 6. Da mesma forma, a divisão de −6 por 0 não existe, pois também não existe número inteiro que, multiplicado por 0, tenha como produto −6.

- Certifique-se de que os estudantes entendem o significado da relação fundamental da divisão por meio do conceito de operação inversa; ou seja, em uma divisão, o produto do quociente pelo divisor adicionado ao resto é igual ao dividendo, ou o produto do divisor pelo quociente adicionado ao resto é igual ao dividendo.

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS INTEIROS COM A CALCULADORA

- Peça aos estudantes que tragam para a sala de aula uma calculadora simples que tenha o botão +/−.

Relação fundamental da divisão

Renato tem 291 livros na loja dele. Ele organizou esses livros em 7 estantes, de modo que cada estante ficou com 41 livros e sobraram 4 livros. Observe a divisão que representa essa situação.

$$\text{dividendo} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 291 & 7 \\ \cline{2-2} 11 & 41 \\ 4 & \end{array} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{divisor} \\ \longleftarrow \text{quociente} \\ \longleftarrow \text{resto} \end{array}$$

Agora, veja como Renato organizou os termos da divisão para verificar se o cálculo que ele fez estava correto.

$$\overset{\substack{\text{dividendo}\\ \downarrow}}{291} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{quociente}}}{41} \cdot \overset{\substack{\text{divisor}\\ \downarrow}}{7} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{resto}}}{4}$$

Para verificar se uma divisão está correta, podemos realizar uma multiplicação e uma adição, pois ao multiplicar o quociente pelo divisor e adicionar o resultado ao resto, devemos obter o dividendo. Essa é a **relação fundamental da divisão**.

dividendo = quociente · divisor + resto

A multiplicação e a divisão são operações inversas.

Exemplos

A. Podemos conferir o resultado da divisão 1 943 : 29 = 67 utilizando a relação fundamental da divisão:

$$67 \cdot 29 = 1\,943$$

B. Podemos conferir o resultado da divisão −1 752 : 24 = −73 utilizando a relação fundamental da divisão:

$$(-73) \cdot 24 = -1\,752$$

C. Ao dividir 510 por 14, obtemos quociente 36 e resto 6. Podemos conferir o resultado dessa divisão utilizando a relação fundamental da divisão:

$$510 = 36 \cdot 14 + 6$$

Multiplicação e divisão de números inteiros com a calculadora

Observe como podemos fazer algumas multiplicações e divisões com a calculadora.

Exemplos

A. Veja como efetuar a multiplicação (+19) · (−18) na calculadora.

- Digitamos na calculadora: 1 9 × 1 8 +/− =
- Aparecerá no visor: −342

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

A fim de que os estudantes ampliem seu repertório de cálculo em multiplicação e divisão com números inteiros, proponha a seguinte atividade:

Relacione cada multiplicação a seguir com duas divisões.

a) (+5) · (+9) = +45

(+45) : (+5) = +9; (+45) : (+9) = +5

b) (−72) · (+6) = −432

(−432) : (+6) = −72; (−432) : (−72) = +6

c) (+35) · (−4) = −140

(−140) : (+35) = −4; (−140) : (−4) = +35

d) (−70) · (−8) = +560

(+560) : (−70) = −8; (+560) : (−8) = −70

B. Veja como efetuar a multiplicação (−48) · (−94) na calculadora.

- Digitamos na calculadora: 4 8 ± × 9 4 ± =
- Aparecerá no visor: 4 512

C. Veja como efetuar a divisão (−765) : 15 na calculadora.

- Digitamos na calculadora: 7 6 5 ± ÷ 1 5 =
- Aparecerá no visor: − 51

D. Veja como efetuar a divisão (−1 701) : (−63) na calculadora.

- Digitamos na calculadora: 1 7 0 1 ± ÷ 6 3 ± =
- Aparecerá no visor: 27

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

22. Calcule o valor de cada quociente.

a) (+64) : (+2) **32**
b) (−225) : (−25) **9**
c) (+96) : (−12) **−8**
d) (−80) : (+4) **−20**
e) 0 : (−71) **0**
f) (−578) : (+578) **−1**
g) (−1 183) : (+13) **−91**
h) (−5 248) : (−64) **82**
i) (+7 220) : (−95) **−76**
j) (−1 372) : (−14) **+98**

23. Construa um quadro no caderno, conforme o modelo a seguir, com os possíveis sinais do dividendo e do divisor e o sinal de cada quociente na divisão exata de dois números inteiros não nulos.

Sinal do dividendo	Sinal do divisor	Sinal do quociente
▥	▥	▥

Que semelhanças você percebe entre esse quadro e o quadro de sinais da multiplicação da atividade **15**?
Consulte a resposta neste manual.

24. Em um dos mergulhos que fez, Armando desceu 20 metros em 4 etapas. Sabendo que em cada etapa ele desceu a mesma quantidade de metros, quantos metros Armando desceu em cada uma dessas etapas? **5 metros.**

25. Escreva três divisões exatas de números inteiros diferentes que tenham como quociente o número −5. **Resposta pessoal. Respostas possíveis: 25 : (−5); (−60) : 12; 50 : (−10).**

26. Copie e complete o quadro a seguir no caderno.

x	*y*	*x* : *y*	*x* · *y*	
−6	+3	(−6) : (+3) = −2	(−6) · (+3) = −18	
+16	−4	▥	▥	**−4; −64.**
−24	−6	▥	▥	**4; 144.**
−18	+2	▥	▥	**−9; −36.**
0	−5	▥	▥	**0; 0.**

27. Copie as expressões no caderno, completando as lacunas com um número inteiro, de modo que as igualdades sejam verdadeiras.

a) −3 · 🟪 = 12 **−4**
b) 🟧 · 3 = −36 **−12**
c) (−5) · 🟦 = −100 **20**
d) 🟥 : (−7) = 12 **−84**
e) −9 : 🟫 = 9 **−1**
f) (−65) : 🟩 = −5 **13**

28. Considerando uma divisão exata, copie e complete o quadro no caderno.

Dividendo	Divisor	Quociente	
▥	−50	−5	**250**
21	▥	−3	**−7**
▥	3	−3	**−9**
−32	−4	▥	**8**
56	−8	▥	**−7**

- Na atividade **22**, peça aos estudantes que determinem o sinal do quociente antes de realizar a divisão.
- Na atividade **25**, é importante que os estudantes identifiquem quais devem ser os sinais dos números antes mesmo de indicar quais são eles. Assim, espera-se que eles percebam que um sinal deve ser negativo e o outro deve ser positivo. Além disso, devem reconhecer que há infinitas possibilidades para essa divisão.

RESPOSTA

23.

Sinal do dividendo	Sinal do divisor	Sinal do quociente
+	−	−
+	+	+
−	−	+
−	+	−

Espera-se que os estudantes percebam que a relação entre os sinais é a mesma na multiplicação e na divisão, pois elas são operações inversas.

DE OLHO NA BASE

As situações e as atividades destas páginas possibilitam aos estudantes resolver problemas que envolvem a divisão de números inteiros, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA04**.

EXPRESSÕES NUMÉRICAS COM NÚMEROS INTEIROS

- A resolução de expressões numéricas é um contexto matemático rico para consolidar os conhecimentos acerca das operações com números inteiros. No entanto, é necessário que os estudantes já dominem os procedimentos dessas operações.
- Antes de iniciar a seção, peça a eles que determinem o valor da seguinte expressão numérica:

  $$-9 + 5 \cdot (10 + 2 : 2) \quad 46$$

  É possível que os estudantes determinem o resultado dessa expressão de diversas maneiras e encontrem assim resultados diferentes, uma vez que, não sendo apresentada a forma convencionada para calcular o resultado de expressões, cada um poderá proceder de uma maneira. Peça que escrevam na lousa as possíveis resoluções, inclusive as que não são corretas. Explique então que, para evitar situações como essas, convencionou-se um procedimento para a resolução de expressões numéricas. Peça aos estudantes que observem os dois exemplos apresentados e escrevam o procedimento utilizado em ambos os casos.
- Na atividade **30**, considere as expressões $[60 - (3 \cdot 10 + 15)] : 3$ e $(60 - 3 \cdot 10 - 15) : 3$ como respostas corretas para a representação do problema.

Expressões numéricas com números inteiros

Para resolver expressões que envolvem operações com números inteiros, devemos seguir a seguinte ordem:

- primeiro, multiplicação e divisão;
- em seguida, adição e subtração.

Além da ordem das operações, devemos levar em conta os parênteses, os colchetes e as chaves: primeiro, resolvemos as expressões que estão entre parênteses; depois, as que estão entre colchetes; e, em seguida, as que estão entre chaves.

Exemplos

A.

$$\begin{aligned}
& 8 \cdot [-5 \cdot \underbrace{(-2 + 4)}_{\downarrow} - \underbrace{(5 - 3)}_{\downarrow}] : (-4) = \\
&= 8 \cdot [\underbrace{-5 \cdot (+2)}_{\downarrow} - (+2)] : (-4) = \\
&= 8 \cdot [\underbrace{-10 - 2}_{\downarrow}] : (-4) = \\
&= \underbrace{8 \cdot [-12]}_{\downarrow} : (-4) = \\
&= \underbrace{-96 : (-4)}_{\downarrow} = \\
&= 24
\end{aligned}$$

B.

$$\begin{aligned}
& 1 - \{28 - [\underbrace{(7 - 2)}_{\downarrow} \cdot \underbrace{(15 - 21)}_{\downarrow}] + 6 \cdot (-4)\} = \\
&= 1 - \{28 - \underbrace{[5 \cdot (-6)]}_{\downarrow} + \underbrace{6 \cdot (-4)}_{\downarrow}\} = \\
&= 1 - \{28 - [-30] + (-24)\} = \\
&= 1 - \underbrace{\{28 + 30 - 24\}}_{\downarrow} = \\
&= \underbrace{1 - \{34\}}_{\downarrow} = \\
&= -33
\end{aligned}$$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

29. Calcule o valor de cada expressão numérica.

a) $(8 - 14) : [(7 - 12) + (15 - 12)] \cdot 7$ **21**

b) $[-17 + (11 - 16)] - \{2 - [(-2 + 7) \cdot (25 - 20)]\}$ **1**

c) $(5 - 2) \cdot (2 - 5) \cdot (-2) : (-3)$ **−6**

d) $12 - \{2 \cdot 6 + 2 - [5 \cdot (-6) : (-3)] + 34\}$ **−26**

30. Leia o problema a seguir, represente-o por meio de uma expressão numérica e resolva-o.

Ana ganhou 60 reais da mãe dela. Com o dinheiro, ela pagou 10 reais que estava devendo para cada um de seus 3 irmãos e comprou um livro que custava 15 reais. O dinheiro que sobrou ela repartiu igualmente entre seus 3 irmãos. Quantos reais cada irmão recebeu do dinheiro que sobrou? **[60 − (3 · 10) − 15] : 3; 5 reais.**

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. A fase final do campeonato da Liga de Futebol Infantil é disputada com os quatro primeiros classificados. Cada equipe deve disputar duas partidas com cada um dos times adversários: um jogo no próprio campo e outro no campo do time adversário. Para cada partida ganha, adicionam-se 2 pontos e, para cada partida perdida, subtrai-se 1 ponto; se houver empate, a pontuação não se altera.

Ilustrações: João Picoli/ID/BR

Veja os resultados das partidas disputadas durante as seis rodadas da fase final e responda às perguntas no caderno.

a) Quem venceu o campeonato? **A equipe Patos.**

b) Quais foram os times que ocuparam a segunda, a terceira e a quarta colocações?

1. b) Segunda colocação: Tigres; terceira colocação: Gatos; quarta colocação: Leões.

c) Quantos pontos cada time fez na fase final do campeonato? **Patos: +6; Tigres: +2; Gatos: +1; Leões: 0.**

2. Maria e Natália foram mergulhar na caverna do Abismo Anhumas em Bonito, Mato Grosso do Sul. Maria desceu até 6 m de profundidade, enquanto Natália foi até o triplo dessa profundidade. Considerando a superfície o referencial zero, até que ponto Natália se deslocou? **−18 m**

3. Calcule mentalmente:

a) a metade do oposto de 44; **−22**

b) o dobro de 40 : (−4); **−20**

c) o oposto do oposto de $(-13) \cdot 1$; **−13**

d) o oposto do dobro de $(-15) \cdot (-2)$. **−60**

4. Resolva as expressões numéricas a seguir.

a) $[(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) + (+5)] : 22$ **−1**

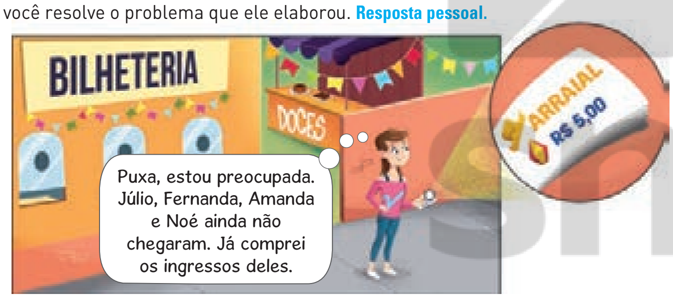
b) $(-100) : (-25) + (-3) \cdot (-3) - 5 \cdot 5 - (2 \cdot 2 \cdot 2) + 3 \cdot 3$ **−11**

c) $-(5 \cdot 5) + 1 - 1 + (-3) \cdot (-3)$ **−16**

d) $-[(-72) : (-6)] - [(+1) \cdot (+13)] + 2 \cdot 7 + (+2)$ **−9**

e) $0 - 15 + 2 \cdot 3 - [(+3) \cdot (+4)] + 20 + 3 \cdot 5 - 300 : 10 + 25$ **9**

5. Com base nos dados a seguir, elabore um problema que possa ser resolvido usando pelo menos uma operação com números inteiros. Depois, peça a um colega que resolva o problema que você criou, e você resolve o problema que ele elaborou. **Resposta pessoal.**



ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- A leitura e a interpretação do enunciado da atividade **1** devem ser feitas com atenção, de maneira que os estudantes compreendam a proposta. Solicite que leiam o enunciado e expliquem como é feita a contagem dos pontos nessa fase do campeonato.
- Na atividade **3**, é necessário que os estudantes decodifiquem o significado das palavras "metade", "oposto" e "dobro" na linguagem matemática, mesmo que apenas mentalmente.
- A correção da atividade **4** deve ser feita não só com base no resultado. É imprescindível verificar os procedimentos realizados pelos estudantes, principalmente onde aparecem trocas de sinal. Pode ser que alguns estudantes cheguem ao resultado correto mesmo procedendo de maneira equivocada. Enfatize o processo, explicando-lhes que o resultado correto será consequência do desenvolvimento certo dos cálculos e procedimentos.
- Na atividade **5**, é interessante que os estudantes resolvam o problema que elaboraram antes de resolver o do colega, para que se certifiquem de que o problema tem solução.

DE OLHO NA BASE

Ao realizar as atividades propostas nesta seção, os estudantes terão a oportunidade de utilizar os conhecimentos sobre operações com números inteiros adquiridos no capítulo, na elaboração e resolução de problemas, desenvolvendo a habilidade **EF07MA04**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

As maiores dificuldades que podem surgir ao iniciar o estudo dos números inteiros dizem respeito à própria construção do conceito de número negativo. Até o momento os números eram naturais, serviam para contar. Os estudantes costumavam fazer uma associação concreta do número com a quantidade, com objetos, fossem eles reais ou não, mas sempre havia a ideia de contagem.

Para sanar tais dificuldades, é fundamental que os estudantes tenham bem claros os significados dos novos conceitos e procedimentos, como:

- existência de antecessor para todos os números: existem números menores que zero;
- possibilidade de se tirar uma quantidade maior de outra menor e obter um resultado que é representado por um número negativo;
- diferenciação dos significados do sinal negativo (**−**), isto é, quando representa uma subtração e quando representa um número negativo, principalmente em expressões que trazem ao mesmo tempo ambos os significados, como em $-4 - (-9)$;
- ordenação de números inteiros, visto que o fato de o módulo aumentar mas o número diminuir (no caso dos números negativos) não é intuitivo;
- dualidade do significado do zero: como zero absoluto e como origem, criado por convenção, propiciando a criação dos números negativos.

Enfatize o significado dos conceitos e procedimentos, evitando a simples memorização de regras pelos estudantes e a mecanização dos cálculos. A sistematização é importante, mas, se for vazia de significado, os estudantes não conseguirão aplicá-la adequadamente em outros contextos e com o tempo a esquecerão.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, o tema abordado é propaganda enganosa, convidando os estudantes a refletir sobre uma situação comum de nosso dia a dia: informações importantes escritas nos anúncios de produtos com letras muito pequenas.
- Proponha aos estudantes a leitura do texto em voz alta. Incentive-os a discutir o tema abordado fazendo perguntas como: Vocês já viveram situações parecidas com as descritas no texto ou retratadas na imagem?; Já se sentiram enganados por causa de alguma propaganda em que as informações de pagamento ou detalhes específicos da compra estavam em letras miúdas, dificultando a leitura e praticamente induzindo o consumidor ao erro?.
- Incentive os estudantes a observar que podemos ter boas práticas para não nos sentirmos enganados com as imagens e os textos chamativos dos anúncios. Umas dessas práticas é dar atenção especial às letras miúdas, pois elas trazem informações detalhadas sobre as taxas e as condições de pagamento.
- Com antecedência, peça aos estudantes que pesquisem e tragam para a sala de aula alguns anúncios que apresentem letras miúdas, para explicar as condições da oferta. Organize-os em duplas e proponha que leiam os anúncios e observem quais são os recursos utilizados para chamar a atenção do consumidor e quais informações das letras miúdas explicam as condições de pagamento ou as taxas. Depois, peça que escolham um dos anúncios para mostrar à turma. Aproveite para questioná-los: O que vocês acham sobre a atitude de empresas que usam esse tipo de artifício em anúncios de produtos ou de serviços?; Você compraria esses produtos ou serviços?; E se o anúncio não tivesse as informações contidas nas letras miúdas?.

AMPLIANDO HORIZONTES

As letras miúdas dos anúncios

Você conhece alguém que deixou de ler o rodapé ou as letras miúdas de um anúncio e acabou se sentindo enganado? Acredite: essa situação é mais comum do que você imagina.

Leia o trecho da reportagem a seguir.

> RIO — Ao receber no endereço onde mora, na Barra da Tijuca, uma carta com um anúncio nominal [...] ofertando um novo *smartphone* com preço e condições especiais, Sergio Ferraz não pensou duas vezes. Ele tem quatro linhas móveis ativas. E correu no mesmo dia a uma loja da operadora — da qual é cliente há mais de 20 anos. No entanto, para sua surpresa, foi informado que não poderia usar a promoção oferecida por estar em período de fidelização em uma das linhas. O aparelho, prometido por R$ 350, só poderia ser comprado por R$ 1,5 mil. Ao sugerir que havia sido enganado pelo anúncio, a atendente mostrou que, no verso da propaganda, em letras miúdas, constava a tal restrição, que ele não havia visto. Indignado, escreveu [...] reclamando sobre a informação estar "escondida", dificultando a leitura e compreensão real da oferta. Somente depois disso a operadora entrou em contato com Ferraz, reconheceu o problema na oferta e resolveu cumprir com o anunciado.
>
> Daiane Costa. Letras miúdas de anúncios podem esconder restrições em ofertas. *O Globo*, 6 maio 2015. Disponível em: https://oglobo.globo.com/economia/defesa-do-consumidor/letras-miudas-de-anuncios-podem-esconder-restricoes-em-ofertas-16068226. Acesso em: 19 abr. 2022.

As propagandas que vemos constantemente no dia a dia usam imagens e textos impactantes para atrair nossa atenção. Porém, não é todo anúncio que expõe de modo visível todas as informações sobre o produto ou sobre as condições de pagamento, por exemplo. Você já reparou nisso? Será que só os detetives devem andar com lupas por aí ou nós também devemos nos preocupar com as letras miúdas dos anúncios de produtos e serviços?

RESPOSTAS

1. a) Respostas pessoais. É importante os estudantes perceberem que o cartaz induz o consumidor a pensar que o valor de venda é menor, uma vez que a informação "a partir de", referente ao valor, encontra-se em tamanho bem reduzido.
   b) Respostas pessoais. Verifique se os estudantes percebem que, como cada unidade custa R$ 1,20 (informação apresentada em letras miúdas), ao comprar 6 unidades fora da promoção o valor pago seria R$ 7,20. Com essa informação, eles devem analisar qual seria a melhor decisão na compra de 6 caixas de suco.
   c) Sim. Os estudantes deverão perceber que se trata de propagandas enganosas. A justificativa é pessoal.
2. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que os estabelecimentos não agiram de forma honesta e citem as letras miúdas para elaborar a explicação.
3. Organize os estudantes em grupos para a pesquisa. Ao elaborarem o cartaz, peça que apresentem situações em que há propagandas enganosas e outras que induzem o consumidor ao erro, como as ilustradas no texto. Se julgar oportuno, proponha-lhes um experimento: eles devem apresentar o anúncio com letras miúdas a um colega e perguntar a ele se compraria esse produto; em seguida, devem apresentar ao colega o cartaz com esses trechos em letra legível e perguntar a ele se manteria a compra.
4. Espera-se que, em suas pesquisas, os estudantes encontrem informações sobre órgãos de defesa do consumidor como o Procon,

Para refletir

Responda sempre no caderno.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir. **Consulte as respostas neste manual.**

1. Observem as situações representadas na ilustração e respondam:
   a) O que vocês fariam se estivessem no lugar da cliente interessada em comprar um dos celulares da promoção? Na opinião de vocês, a promoção dos celulares foi divulgada adequadamente?
   b) Se fossem comprar 6 caixas do suco de laranja no supermercado, vocês aproveitariam a promoção ou comprariam os sucos em embalagens unitárias? Por quê?
   c) Segundo o Instituto Brasileiro de Defesa do Consumidor (Idec), os anúncios devem ser claros e precisos e apresentar letras de fácil leitura e linguagem simples. Quando um anúncio "esconde" informações, ele pode ser considerado propaganda enganosa se o desconhecimento dessas informações induzir o consumidor ao erro. As promoções divulgadas pelo supermercado apresentam alguma informação falsa? Elas podem ser consideradas propagandas enganosas? Justifiquem.
2. Conversem sobre o modo como as ofertas apresentadas nestas páginas foram divulgadas. Na opinião de vocês, esses estabelecimentos agiram de maneira honesta? Expliquem.
3. Pesquisem, em revistas, jornais, lojas, supermercados ou na internet, anúncios que apresentem trechos com letras miúdas. Reúnam o material coletado e discutam qual é a intenção desses anúncios ao "esconder" tais trechos. Depois, montem um cartaz com os anúncios, destaquem os trechos que contenham letras miúdas e reescrevam esses trechos com letras em tamanho legível.
4. Pesquisem e respondam: O que pode ser feito pelo consumidor quando é vítima de uma situação de propaganda enganosa?

Leandro Lassmar/ID/BR

agências de segmentos específicos, como a Anatel, de telefonia, páginas na internet que se dedicam a registrar reclamações por parte dos consumidores e as providências tomadas pelas empresas, canais de atendimento ao consumidor das próprias empresas, entre outras. O importante é que eles adquiram a consciência de que têm direitos como consumidores e devem recorrer ao(s) órgão(s) responsável(is) sempre que necessário.

OUTRAS FONTES

BRINCANDO de esconde-esconde. *Revista do Idec*, p. 18-23, ago. 2013. Disponível em: https://www.idec.org.br/uploads/revistas_materias/pdfs/179-pesquisa-veiculos1.pdf. Acesso em: 25 maio 2022.

A matéria aborda propagandas de carro que reforçam as qualidades do produto, mas não revelam que o modelo que elas mostram custa muito mais que o valor informado no anúncio.

- As atividades propostas na seção têm o objetivo de preparar os estudantes para resolver questões do cotidiano. Além disso, permitem que eles desenvolvam a autonomia e o protagonismo, ao investigar o que são propagandas enganosas e como evitá-las. Propostas como essa seguem a metodologia de aprendizagem baseada em problemas.

DE OLHO NA BASE

Refletir sobre esse tema permite fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais, de modo a investigar informações relevantes, desenvolvendo a **competência específica de Matemática 4**.

Além disso, ao se reunirem em duplas e discutirem as questões propostas, os estudantes exercitam a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, desenvolvendo a **competência geral 9**.

Honestidade

Nesta seção, o valor trabalhado é honestidade. Ele pode ser explorado ao abordar o apreço pela verdade e sinceridade ao se divulgar um produto ou uma oferta. Converse com os estudantes e incentive-os a compartilhar situações parecidas com as mostradas no texto e na imagem que tenham vivenciado. Pergunte como se sentiram e qual foi a reação que tiveram. É importante que os estudantes compreendam que informações sobre produtos e serviços, valores e condições de pagamento devem estar claras nos anúncios, de modo que o consumidor tome sua decisão sobre a compra de determinado produto ou serviço estando ciente de todas as informações necessárias.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Na atividade **2**, é necessário que os estudantes façam os cálculos passo a passo para descobrir por quantos dias o saldo de Antônio permaneceu negativo no mês de outubro. De acordo com o extrato, são três dias: 17, 22 e 23.
- Amplie a atividade **3**, solicitando aos estudantes que escrevam as operações inversas ao lado de cada uma das operações. Por exemplo:
  - $38 - (+2) = 36$
    $36 + (+2) = 38$
  - $36 \cdot (-2) = -72$
    $-72 : (-2) = 36$
- O primeiro passo para realizar a atividade **4** é descobrir os outros números além do 158 que podem ser formados com os algarismos 1, 5 e 8, o que pode ser feito por tentativas, trocando os algarismos de lugar.

  O segundo passo é contar o número de páginas marcadas por Felipe. Para calcular esse número, os estudantes devem subtrair o número da primeira página (158) do número da última página marcada e adicionar 1 ao resultado. Caso eles tenham dificuldade em entender por que devem adicionar 1 unidade, utilize um exemplo com poucas páginas e inicie perguntando quais foram as páginas marcadas, para em seguida solicitar quais as contem. Assim: Felipe marcou primeiro a página 5 e terminou na página 8. Quais páginas ele marcou? Quantas páginas foram marcadas? Espera-se que os estudantes respondam que ele marcou as páginas 5, 6, 7 e 8. Logo, foram marcadas 4 páginas (algebricamente: $8 - 5 + 1 = 4$).
- Na atividade **6**, verifique se os estudantes entendem o que é diagonal. Peça a eles que registrem as contas e como pensaram para descobrir a soma e todos os números desconhecidos dos quadrados mágicos. A soma no item **a** é −6 e no item **b** é 0.
- Na atividade **7**, verifique se os estudantes realizaram a multiplicação e a divisão antes de efetuar a subtração e a adição.
- No item **a** da atividade **8**, a soma dos outros dois números deve ser igual a −1 para que, ao multiplicar pelo primeiro, se obtenha o oposto dele. Provavelmente os estudantes começarão a resolver por tentativas, mas é importante estimulá-los a pensar matematicamente, evitando que percam tempo adivinhando as possíveis respostas.
- No item **a** da atividade **9**, os estudantes podem resolver calculando o mmc(2, 4, 6) = 12; no item **b**, o mmc(2, 4, 8) = 8. É provável que eles não entendam por que o terceiro barco demora mais para sair na segunda situação e os três se encontram antes que na primeira situação. Pergunte aos estudantes se eles conseguem explicar o porquê. Valorize o pensamento deles e incentive a troca de ideias e a argumentação.
- Na atividade **11**, a primeira coisa que os estudantes devem perceber é que o máximo de selos que Rafael pode ter é 50, pois no enunciado pede-se para calcular quantos faltam para completar 50 selos.

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Registre no caderno a alternativa correta. **Alternativa e.**
   a) O produto entre dois números inteiros sempre tem resultado positivo.
   b) O produto entre dois números inteiros com sinais negativos tem resultado negativo.
   c) O produto entre dois números inteiros com sinais positivos tem resultado negativo.
   d) O produto entre dois números inteiros diferentes tem resultado negativo.
   e) O produto entre dois números inteiros com sinais diferentes tem resultado negativo.

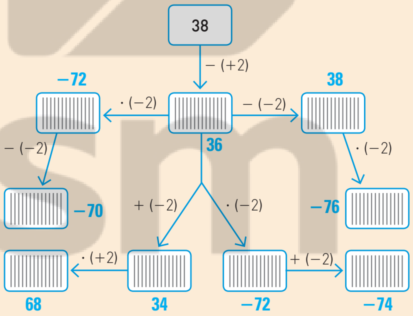
2. Serão descontados R$ 75,00 no fim do mês.

2. No banco onde Antônio tem conta, no fim do mês são cobrados R$ 25,00 por dia caso a conta esteja negativa. Observe o extrato bancário de Antônio e calcule quantos reais serão descontados no final do mês de outubro.

ID/BR

Data	Descrição	Depósito	Saque	Saldo
1/10/2022	Saldo Anterior			610,00
7/10/2022	Depósito - Salário	5 790,00		
8/10/2022	Boleto Pago - Telefone		335,00	
10/10/2022	Boleto Pago - Energia		560,00	
14/10/2022	Transferência - Aluguel		2 895,00	
14/10/2022	Boleto Pago - Gás		100,00	
14/10/2022	Boleto Pago - Condomínio		575,00	
14/10/2022	Saque		1 750,00	
17/10/2022	Pagamento - Cartão de crédito		540,00	
18/10/2022	Depósito *On-line*	1 500,00		
22/10/2022	Boleto Pago - Empréstimo		1 300,00	
24/10/2022	Depósito *On-line*	2 235,00		

3. Copie o esquema a seguir no caderno e complete-o.



4. Felipe marcou diversas páginas sucessivas de um livro com menos de 1 000 páginas. O número da primeira página que ele marcou era 158 e sabe-se que o número da última página que ele marcou também estava escrito com os algarismos 1, 5 e 8. Quantas páginas Felipe pode ter marcado? **28, 361, 424, 658 ou 694 páginas.**

5. Em uma prova composta de 25 testes, cada resposta certa vale 4 pontos, cada resposta errada vale −1 ponto e cada resposta em branco vale zero ponto. Um estudante que deixar 6 testes em branco e acertar 9 dos que responder ficará com quantos pontos? **26 pontos.**

6. O quadrado mágico é um tipo de quadro numérico, com o mesmo números de linhas e colunas, em que a soma de cada coluna, de cada linha e das duas diagonais deve ser sempre igual.

   Veja alguns exemplos de quadrados mágicos em que a soma de cada coluna, de cada linha e das duas diagonais é igual a 15:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

   Agora, copie os quadrados mágicos a seguir no caderno e complete-os com números inteiros.

a)

		2		
	0	▥	−8	
−10	▥	−2	▥	6
	4	▥	▥	
		−6	−4	

b)

	4	−1	
−3	▥	▥	
2	0	▥	−2
1	▥	▥	
	−4	3	

7. Registre no caderno a alternativa correta.

   (Prova Brasil) Ao resolver corretamente a expressão

$$-1 - (-5) \cdot (-3) + (-4) \cdot 3 : (-4)$$

   o resultado é: **Alternativa a.**

   a) −13.
   b) −2.
   c) 0.
   d) 30.

8. Faça o que se pede em cada item.

a) Escreva três números inteiros distintos, de modo que o produto do primeiro pela soma dos outros dois seja igual ao oposto do primeiro. **Resposta pessoal.**

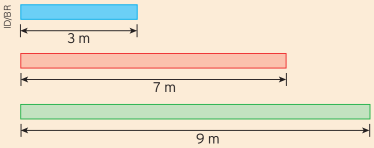
b) Compare sua resposta com a de um colega. Juntos, procurem regularidades entre os números escritos. **Resposta pessoal.**

9. Três barcos saem de um porto. O primeiro sai a cada 2 dias, o segundo, a cada 4 dias, e o terceiro, a cada 6 dias. **a) Em 13 de maio.**

a) Se os barcos saíram juntos no dia 1º de maio, em que dia sairão juntos novamente?

b) Se o terceiro barco saísse a cada 8 dias, em que dia os barcos sairiam juntos novamente, considerando que eles saíram juntos no dia 10 de junho? **Em 18 de junho.**

10. Márcia pretende fazer uma toalha. Para isso, vai dividir tiras de tecido em tamanhos iguais, com a maior medida de comprimento possível, sem desperdiçar nenhum pedaço. Veja as tiras disponíveis.



a) Se Márcia utilizar os tecidos azul e verde, qual será a medida de cada pedaço de tecido? **3 m**

b) Se ela usar as três cores, quantos pedaços de tecido terá? **19 pedaços.**

11. Observe o que Rafael verificou ao organizar a coleção de selos e responda à pergunta.

Quantos selos faltam para Rafael completar 50 selos? **17 selos.**

12. (OBM) Ana, Beto e Carlos inventaram um jogo em que cada um deles joga um dado e registra como ganho (pontos positivos) o dobro dos pontos obtidos no lançamento, ao mesmo tempo que os outros dois anotam, cada um, esses pontos como dívidas (pontos negativos). O saldo é revisto a cada jogada.

Na tabela a seguir, foram anotados os lançamentos e pontos de Ana, Beto e Carlos, nessa ordem, e os saldos de seus pontos após cada lançamento, em uma partida de três jogadas. Na última linha, vê-se o saldo final de cada um. Em cada nova partida, todos começam com zero ponto.

	Saldo de *A*	Saldo de *B*	Saldo de *C*
A tira 5	10	−5	−5
B tira 1	9	−3	−6
C tira 3	6	−6	0

a) Copie e complete a tabela a seguir com os resultados de uma outra partida em que Beto jogou primeiro, Carlos em seguida e Ana por último.

	Saldo de *A*	Saldo de *B*	Saldo de *C*
−3; −3	▥	6	▥
−7; 2	▥	▥	5
−4; −1	5	▥	▥

b) Na tabela a seguir, foram registradas apenas as pontuações dos dados em uma partida de seis jogadas.

A tira	*B* tira	*C* tira
▥	▥	2
3	▥	▥
▥	1	▥
▥	▥	4
5	▥	▥
▥	6	▥

Copie e complete a tabela abaixo com o saldo final de pontos de cada um.

3	Saldo de *A*	▥
0	Saldo de *B*	▥
−3	Saldo de *C*	▥

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Aprendi a reconhecer e a determinar múltiplos e divisores de um número natural?
- Sei determinar o mmc e o mdc de dois ou mais números naturais?
- Consigo resolver e elaborar problemas envolvendo os conceitos de múltiplo, divisor, mmc e mdc?
- Sei determinar em quais situações usar os números negativos?
- Aprendi a localizar números inteiros na reta numérica?
- Compreendi o que é sucessor e antecessor de um número inteiro?
- Entendi o que é módulo (ou valor absoluto) de um número inteiro?
- Aprendi o que são números opostos ou simétricos?
- Consigo comparar e ordenar números inteiros?
- Consigo efetuar operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com números inteiros?
- Aprendi a resolver problemas em que aparecem operações com os números inteiros?
- Reconheço as propriedades da adição e da multiplicação de números inteiros?
- Sei resolver problemas envolvendo as propriedades da adição e da multiplicação de números inteiros?
- Consigo resolver expressões numéricas com números inteiros?
- Procurei conversar com os colegas ou o professor para esclarecer minhas dúvidas?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

ESTRATÉGIAS DE APOIO

No estudo dos números inteiros, procure enfatizar os significados que os sinais positivo e negativo representam em cada situação, relacionando quantidades negativas e positivas a perda e ganho, débito e crédito, medidas de temperatura abaixo de zero e medidas de temperatura acima de zero.

Não tenha pressa em sistematizar as operações e os procedimentos. Deixe que os estudantes sintam a necessidade de trocar o concreto – esquemas e uso da reta numérica, por exemplo – pela praticidade da sistematização das operações. Cada estudante, dependendo do estágio cognitivo em que se encontra, fará essa substituição a seu tempo. Quanto mais segura for a passagem do concreto para o abstrato, mais significativo será o conceito construído por eles.

Ao trabalhar com problemas, dê importância ao *pensar* em vez de ao *calcular*; explicar como pensou para resolver um problema possibilita aos estudantes reorganizar os conceitos novos e os já adquiridos e formar novas construções cognitivas, que não podem ser obtidas por regras impostas e vazias de significado.

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
7, 8, 9 e 10.

Competências específicas de Matemática
3, 5 e 8.

Temas Contemporâneos Transversais
Meio Ambiente e Ciência e Tecnologia.

Habilidades

(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.

(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

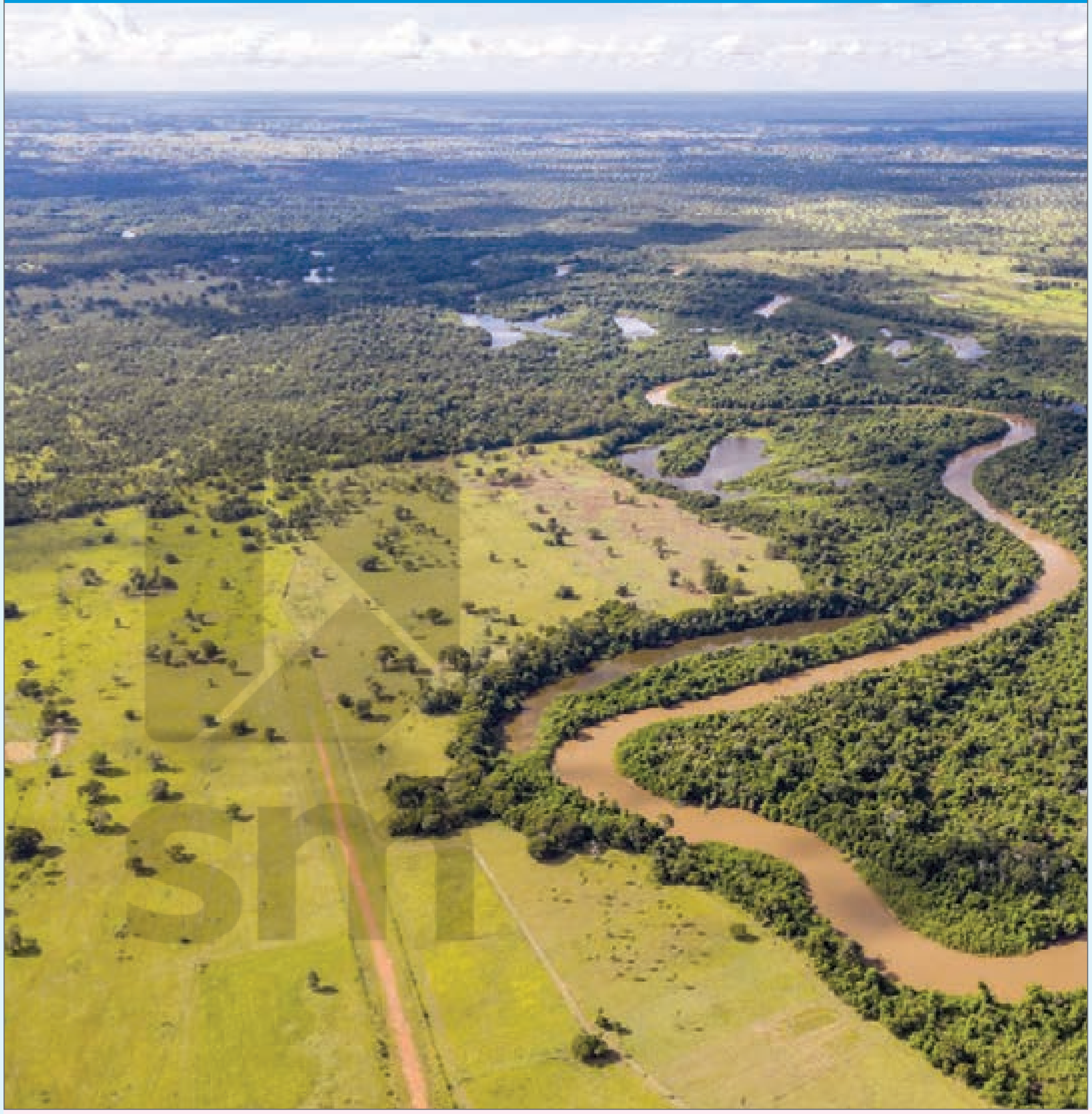
(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.

(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.

(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

UNIDADE 2

NÚMEROS RACIONAIS



SOBRE A UNIDADE

Nesta unidade, são estudados os números racionais, tanto na forma fracionária quanto na forma decimal. São trabalhados os significados de fração como parte de inteiros, resultado de divisão, razão e operador.

Os estudantes já têm conhecimentos sobre números racionais, seja na representação fracionária, seja na decimal. Assim, é importante retomar esses conhecimentos e aprofundar os estudos sobre o tema a partir deles. É importante fazer um diagnóstico do conhecimento prévio dos estudantes, partindo de problemas que envolvam números racionais na forma fracionária ou na forma decimal em seus diferentes significados.

É explorada a representação de números racionais na reta numérica, assim como as diferentes representações de um número racional. Esse trabalho auxilia no desenvolvimento da comparação de números racionais, uma vez que os estudantes terão mais recursos para fazê-la.

Ao final, são apresentadas as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números racionais nas formas fracionária e decimal, bem como suas propriedades, e as expressões numéricas que os envolvem.

Adriano Kirihara/Pulsar Imagens

PRIMEIRAS IDEIAS

O território do Brasil corresponde a quase metade da América do Sul. Devido à sua grande extensão territorial e diversidade paisagística, no país ocorrem seis biomas: Amazônia, Cerrado, Mata Atlântica, Caatinga, Pampas e Pantanal.

1. Pesquise o significado da palavra "bioma". Depois, compartilhe com os colegas e o professor o que você encontrou.
2. Veja a tabela a seguir.

Porcentagem da área dos biomas brasileiros em relação à área total do território brasileiro

Bioma	Porcentagem do território brasileiro
Amazônia	49,3%
Cerrado	23,9%
Mata Atlântica	13,0%
Caatinga	9,9%
Pampas	2,1%
Pantanal	1,8%

Fonte de pesquisa: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Território. Disponível em: https://brasilemsintese.ibge.gov.br/territorio.html. Acesso em: 25 fev. 2022.

Os biomas Cerrado e Caatinga ocupam qual porcentagem da área total do território brasileiro?

← Vista aérea dos meandros do rio Aquidauana, no Pantanal, em Aquidauana (MS). Foto de 2021.

PRIMEIRAS IDEIAS

- Discuta com os estudantes a grandiosidade do território brasileiro em relação aos outros países da América do Sul, a diversidade de plantas e de animais e as condições ambientais em cada região.
- Se julgar oportuno, traga para a sala de aula um mapa do Brasil e mostre aos estudantes os biomas existentes em cada região. Com base nas divisões do mapa, discuta os biomas que ocorrem com maior frequência e os que ocorrem com menor frequência.

RESPOSTAS

1. De acordo com o IBGE, bioma é um conceito que os biólogos e os geógrafos criaram na primeira metade do século passado para descrever grandes sistemas ecológicos definidos principalmente pelo clima. Trata-se de uma área com medida normalmente superior a 1 milhão de quilômetros quadrados em que o clima, a fisionomia da vegetação, o solo e a altitude são semelhantes ou aparentados. O critério florístico não é determinante.
2. O bioma Cerrado ocupa 23,9% do território brasileiro e o bioma Caatinga ocupa 9,9% do território brasileiro.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Números racionais nas representações fracionária e decimal.
- Conjunto dos números racionais.
- Representação dos números racionais na reta numérica.
- Representação decimal de números racionais: finita ou infinita e periódica.
- Módulo e simétrico de um número racional.
- Comparação de números racionais.

Objetivos

- Reconhecer os números racionais em suas diferentes representações.
- Compreender frações com base em seu significado como relação parte-todo, como quociente, como operador, como razão e como medida.
- Localizar números racionais na reta numérica.
- Comparar números racionais.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar as diversas representações de um número racional e ampliar esses conhecimentos, reconhecendo que, na forma decimal, ele pode ter representação decimal finita, infinita periódica e infinita não periódica. Nesse trabalho, será utilizada a reta numérica para a identificação de algumas características dos números racionais. O dia a dia dos estudantes está repleto de situações que envolvem números racionais de alguma maneira. Explorando as atividades propostas, eles têm a oportunidade de adquirir conhecimentos que lhes darão autonomia na resolução de problemas cotidianos.

OS NÚMEROS RACIONAIS NO DIA A DIA

- O ensino e a aprendizagem dos números racionais têm sido objeto de estudo de muitos pesquisadores na área da Educação Matemática. Muitos deles apontam para a necessidade de que esses números sejam estudados com base em seus diferentes significados. Isto é, deve-se retirar a ênfase atribuída aos números racionais, sobretudo em sua representação fracionária, unicamente como relação parte-todo, e oferecer aos estudantes a possibilidade de compreendê-los também por meio de seus outros significados (quociente, medida, razão), bem como de suas diferentes representações – fracionária, decimal e percentual.
- Explore a abertura do capítulo pedindo aos estudantes que observem as porcentagens apresentadas para cada alimento. Pergunte: Qual alimento apresenta maior porcentagem de amostras insatisfatórias?; Qual alimento apresenta menor porcentagem de amostras insatisfatórias? Espera-se que os estudantes respondam pimentão (81,9%) e uva (26,96%), respectivamente. Se julgar oportuno, solicite a eles que escrevam as porcentagens usando frações.

Capítulo

1 NÚMEROS RACIONAIS

Para desenvolver os conteúdos deste capítulo, os estudantes devem ter compreendido os conceitos de números naturais e de números inteiros (leitura, escrita, comparação e ordenação).

↓ Pulverização de agrotóxico em plantação de pimentão. Ribeirão Branco (SP). Foto de 2019.

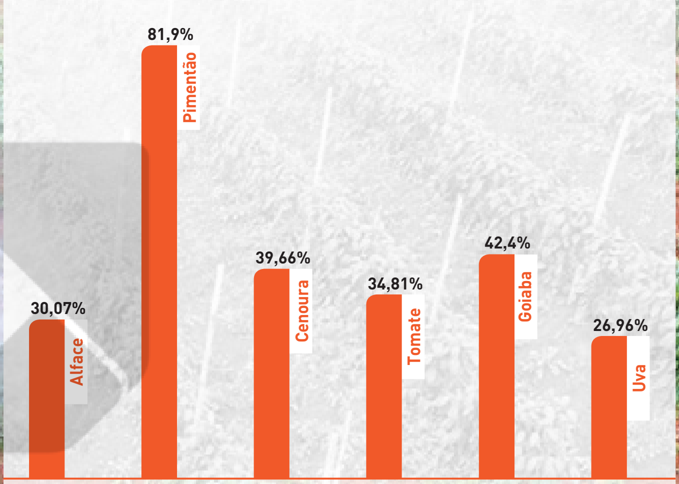
Foto: Adriano Kirihara/Pulsar

Os números racionais no dia a dia

No esquema a seguir, encontramos números que representam a porcentagem das amostras de alimentos com resíduos de agrotóxicos que foram consideradas insatisfatórias pelo Programa de Análise de Resíduos de Agrotóxicos em Alimentos (Para), em uma pesquisa realizada entre 2017 e 2018.

Observe que as porcentagens não estão representadas com números inteiros. Para registrar essas e outras informações, podemos utilizar os **números racionais**.

Porcentagem de amostras consideradas insatisfatórias pelo Para



ID/BR

Fonte de pesquisa: Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa). *Relatório das amostras analisadas no período de 2017 - 2018*. Disponível em: https://www.gov.br/anvisa/pt-br/assuntos/agrotoxicos/programa-de-analise-de-residuos-em-alimentos/arquivos/3770json-file-1. Acesso em: 3 mar. 2022.

Os números racionais são todos aqueles que podem ser escritos na forma de uma fração, que representa uma divisão de números inteiros em que o divisor (ou o denominador) é diferente de zero.

Agora, acompanhe alguns exemplos de situações do dia a dia em que usamos os números racionais e veja como eles podem ser escritos na forma de fração.

Exemplos

A. Certo dia de inverno, em uma cidade, a temperatura mínima foi −8,5 °C.

- $-8{,}5 = -\frac{85}{10} = -\frac{17}{2} = \ldots$

B. Para fazer 1 receita de musse de limão, Lívia usa pelo menos $\frac{1}{2}$ xícara de suco de limão.

- $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \ldots$
- $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$

C. A população de sapos de uma região diminuiu em 22%, o que provocou aumento de 45,8% na população de gafanhotos.

- $22\% = \frac{22}{100} = \frac{11}{50} = \ldots$
- $45{,}8\% = \frac{458}{10} = \frac{229}{5} = \ldots$

+INTERESSANTE

Agrotóxicos

De acordo com o Instituto Nacional de Câncer (Inca), os agrotóxicos são produtos químicos sintéticos usados para matar insetos, larvas, fungos, entre outros, de modo a controlar as doenças provocadas por eles e regular o crescimento da vegetação, tanto no ambiente rural quanto no urbano.

O Inca também informa que a exposição aos agrotóxicos pode causar uma série de doenças, dependendo do produto que foi utilizado, do tempo de exposição e da quantidade absorvida pelo organismo humano.

Agora, leia o texto a seguir, que trata dos agrotóxicos no Brasil.

Após novo recorde, Brasil encerra 2021 com 562 agrotóxicos liberados, sendo 33 inéditos

Registros de defensivos cresceram 14% em relação a 2020. Aprovações vêm aumentando desde 2016

O Brasil encerrou 2021 com 562 agrotóxicos liberados, maior número da série histórica iniciada em 2000 pelo Ministério da Agricultura. [...]

O volume foi 14% superior ao de 2020, quando 493 pesticidas foram autorizados. Os registros vêm crescendo ano a ano no país desde 2016.

Dos 562 agrotóxicos liberados em 2021, **33 são inéditos (5,9%)** – químicos ou biológicos – e **529 são genéricos (94,1%)**, ou seja, são "cópias" de matérias-primas inéditas – que podem ser feitas quando caem as patentes – ou produtos finais baseados em ingredientes já existentes no mercado.

De todos os defensivos liberados ao longo do ano, **92 são biológicos (16,4%)**. Pela legislação brasileira, tanto esses produtos, utilizados na agricultura orgânica, quanto os químicos, aplicados na produção convencional, são considerados agrotóxicos.

Paula Salati. Após novo recorde, Brasil encerra 2021 com 562 agrotóxicos liberados, sendo 33 inéditos. *G1 Agro*, 18 jan. 2022. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/agronegocios/noticia/2022/01/18/apos-novo-recorde-brasil-encerra-2021-com-562-agrotoxicos-liberados-sendo-33-ineditos.ghtml. Acesso em: 3 mar. 2022.

- Converse com os estudantes a respeito do uso indiscriminado de agrotóxicos na agricultura e os impactos socioambientais decorrentes disso. Incentive-os a refletir sobre a possibilidade de tornar as leis mais rígidas e de como as tecnologias voltadas ao agronegócio podem eliminar ou reduzir drasticamente o uso de produtos maléficos à saúde humana e ao meio ambiente. Se julgar necessário, mostre à turma um texto sobre os impactos dos agrotóxicos na saúde do trabalhador, na população e no meio ambiente. Esse material encontra-se na página 33 do documento Dossiê Abrasco – Parte 2 (disponível em: http://www.mpf.mp.br/atuacao-tematica/ccr4/dados-da-atuacao/grupos-de-trabalho/gt-transgenicos/documentos-diversos/palestras-e-apresentacoes/dossieabrasco_02.pdf; acesso em: 14 mar. 2022). Essa proposta contribui para o desenvolvimento de temas sobre Educação Ambiental e Ciência e Tecnologia, que pertencem a duas das macroáreas dos Temas Contemporâneos Transversais **Meio Ambiente** e **Ciência e Tecnologia**.
- Explore os exemplos com os estudantes. Peça a eles que citem outras situações em que se usam os números racionais.
- Se julgar oportuno, peça aos estudantes que representem algumas das frações dos exemplos com números na forma decimal.

+ INTERESSANTE

Leia com os estudantes o texto informativo sobre o uso dos agrotóxicos e pergunte a eles se já tinham ouvido falar em agrotóxicos e o que sabem sobre o assunto.

Discuta as consequências do excesso de ingestão de alimentos contaminados, muitas vezes acima do limite permitido pela Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa) para a saúde da população.

Incentive o debate e a troca de ideias entre os estudantes, pedindo que deem exemplos do cotidiano deles relacionados a alimentação e saúde.

Se julgar oportuno, proponha que façam uma pesquisa sobre agrotóxicos, procurando saber como surgiram, em quais países o uso deles é maior, quais são os riscos que podem causar à saúde, etc. Ao realizarem essa pesquisa, é necessário que consultem fontes confiáveis e utilizem os conhecimentos sobre porcentagens para que possam identificar possíveis *fake news* sobre o assunto.

DE OLHO NA BASE

A leitura e a discussão do texto proposto no boxe *+Interessante* favorece a aquisição das **competências gerais 7** e **8**, uma vez que os estudantes podem argumentar com base em fatos e defender pontos de vista que respeitem e promovam consciência socioambiental e cuidados com a saúde.

NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA FRACIONÁRIA

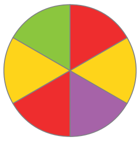
- As situações apresentadas nestas páginas trabalham as frações como parte de inteiros, como razão e como resultado de divisão. A fração como operador será abordada no capítulo **2**. Todos esses significados já foram trabalhados no 6º ano com os estudantes. Verifique se eles compreendem as situações sem cobrar que identifiquem qual ideia de fração está sendo trabalhada.
- As situações **1** e **2** permitem aos estudantes identificar a fração como parte de inteiro, uma vez que um todo (discreto ou contínuo) está sendo dividido em partes equivalentes. Nesses casos, a fração indica a relação que existe entre o número de partes consideradas e o total de partes. Nas situações **3** e **4**, a fração é utilizada como um índice comparativo entre duas quantidades, ou seja, nessas situações a fração tem significado de razão. A situação **5** traz outro significado de fração, aquele em que podemos interpretar o número racional como quociente de um inteiro por outro diferente de zero.
- Explore a situação **1** perguntando aos estudantes qual fração representaria cada cor do círculo se ele tivesse sido dividido em 12 partes iguais e Gabriel tivesse pintado o dobro da quantidade de partes de cada cor que ele pintou no círculo original – ou seja, se tivesse pintado 4 partes de vermelho, 4 partes de amarelo, 2 partes de lilás e 2 partes de verde. Verifique se eles percebem que podem escrever frações equivalentes às frações dadas nessa situação.

Números racionais na forma fracionária

Vamos analisar algumas situações em que usamos números racionais na forma fracionária.

Situação 1

Gabriel construiu uma roleta para usar em um jogo. Ele dividiu um círculo em 6 partes iguais e pintou 2 dessas partes de vermelho, 2 partes de amarelo, 1 parte de lilás e 1 parte de verde.



ID/BR

O círculo representa o todo, e cada parte colorida representa a sexta parte, ou $\frac{1}{6}$ do círculo. Dizemos que Gabriel pintou $\frac{2}{6}$ do círculo de vermelho, $\frac{2}{6}$ de amarelo, $\frac{1}{6}$ de lilás e $\frac{1}{6}$ de verde. Juntas, essas partes representam $\frac{6}{6}$ do círculo ou 1 inteiro.

Situação 2

Samanta tem 12 lápis de cor. Ela vai usar 3 desses lápis para pintar seu convite de aniversário. Então, ela vai usar $\frac{3}{12}$ dos lápis para pintar o convite.

Situação 3

A figura a seguir ilustra a estante de uma livraria. Os livros encapados com a cor rosa são de literatura, e os encapados com a cor verde são livros técnicos.

AM| Studio/ID/BR

Observe que, para cada 5 livros de literatura, é possível encontrar 9 livros técnicos. Isso significa que a quantidade de livros de literatura representa $\frac{5}{9}$ da quantidade de livros técnicos.

No total, há 15 livros de literatura e 27 livros técnicos na estante. Logo, a fração $\frac{15}{27}$ $\left(\text{que é equivalente a } \frac{5}{9}\right)$ também representa a quantidade de livros de literatura em relação à quantidade de livros técnicos.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Proponha aos estudantes que criem outras situações envolvendo frações e as compartilhem com os colegas. Primeiramente, você pode fornecer um contexto e algumas frações e pedir a eles que criem as situações, elaborando um texto para cada nova proposta. Depois, permita que os estudantes escolham os contextos e os números que desejarem.

Situação 4

André faz canecas para vender em sua loja. Observe as canecas que ele fez em uma semana.

Ilustrações: João Picoli/ID/BR

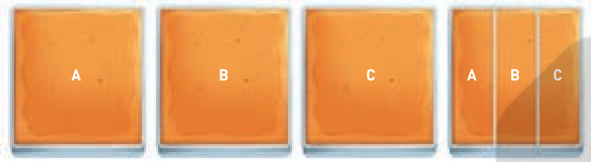
Nessa semana, para cada 5 canecas estampadas que produziu, André fez 2 canecas lisas. Assim, a quantidade de canecas lisas representa $\frac{2}{5}$ da quantidade de canecas estampadas.

Essa quantidade também pode ser representada pela fração $\frac{6}{15}$, em que o numerador representa a quantidade total de canecas lisas que André fez e o denominador representa a quantidade total de canecas estampadas.

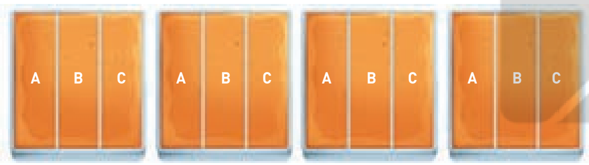
Situação 5

Fábio fez 4 tortas de legumes e quer dividi-las igualmente entre seus 3 filhos: André (A), Bruna (B) e Camilo (C). Veja a seguir duas possíveis maneiras de fazer essa divisão.

1ª maneira: Cada filho receberá 1 torta inteira mais $\frac{1}{3}$ de uma torta.



2ª maneira: Cada filho receberá $\frac{1}{3}$ de cada torta.



Podemos indicar a parte que cada filho recebeu da seguinte maneira:

número de filhos

número de tortas → $4 : 3 = \frac{4}{3}$

→ parte da torta que cada filho recebeu

Assim, cada filho vai receber $\frac{4}{3}$ de torta.

sm

- Explore a situação **4** perguntando aos estudantes: Sabendo que André sempre produz 5 canecas estampadas para cada 2 canecas lisas, se ele produzir 25 canecas estampadas, quantas canecas lisas ele produzirá? Espera-se que eles respondam 10 canecas.
- Na situação **5**, observe se os estudantes percebem que, na 2ª maneira, cada filho receberá $\frac{1}{3}$ de cada torta e, como são 4 tortas, cada um receberá $\frac{4}{3}$ do total.
- Observe que, nas situações **1** e **5**, o todo é contínuo, ou seja, é uma figura dividida em partes iguais, enquanto nas situações **2**, **3** e **4** o todo é discreto, ou seja, é representado pela quantidade de elementos de uma coleção dividida em agrupamentos iguais. Os estudantes não precisam saber essas nomenclaturas; apenas pergunte a eles se percebem alguma diferença entre o "tipo" de todo das situações apresentadas.

DE OLHO NA BASE

Compreender a fração como parte de inteiros, razão e resultado de divisão favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA08**.

Além disso, associar razão e fração contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA09**.

NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA DECIMAL

- Os números racionais na forma decimal estão muito mais presentes no nosso cotidiano do que os números racionais na forma fracionária. Se necessário, relembre com os estudantes as ordens da parte decimal mais utilizadas: os décimos, os centésimos e os milésimos.

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

- Enfatize que o conjunto dos números racionais é composto dos números naturais e dos números inteiros, além dos números que podem ser escritos em forma fracionária, cujos numeradores e denominadores são números inteiros e os denominadores são diferentes de zero.
- Algumas abordagens podem ajudar os estudantes na compreensão de que o conjunto dos números racionais é uma ampliação do conjunto dos números inteiros. Explore os conhecimentos deles sobre o conjunto dos números naturais. Escreva o símbolo desse conjunto na lousa e solicite aos estudantes que completem o conjunto:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...\}$$

Em seguida, peça a eles exemplos de operações cujos resultados podem ser encontrados no conjunto dos números naturais. Algumas possibilidades são:

Adição: $3 + 5 = 8$.

Subtração: $15 - 4 = 11$.

Multiplicação: $11 \cdot 4 = 44$.

Divisão: $20 : 5 = 4$.

Diga aos estudantes que o resultado de $15 - 4$ pode ser encontrado no conjunto dos números naturais, pois 11 é elemento desse conjunto. Pergunte: Se a operação fosse $4 - 11$, o resultado também seria encontrado no conjunto dos números naturais? Espera-se que os estudantes respondam que o resultado dessa operação é um número negativo e, portanto, não pode ser encontrado no conjunto $\mathbb{N}$.

Lembre-os, então, de que o conjunto dos números inteiros é uma ampliação do conjunto dos números naturais e, dessa forma, é possível encontrar o resultado de $4 - 11$ nesse conjunto, pois -7 é um número inteiro ($\mathbb{Z} = \{..., -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$).

Repita os questionamentos sobre as operações no conjunto dos números inteiros e pergunte se a divisão de 1 por 2 tem resultado nesse conjunto. Espera-se que os estudantes percebam que o resultado dessa operação não é um número inteiro, mas sim um número racional.

Números racionais na forma decimal

Os números racionais também podem ser representados na forma decimal. Agora, acompanhe algumas situações em que usamos os números racionais na forma decimal.

Situação 1

Caio foi ao supermercado e comprou 0,485 kg de carne e 1,5 L de suco natural de laranja. Essa compra custou R$ 25,15, e Caio pagou com uma cédula de R$ 50,00, recebendo R$ 24,85 de troco.

Situação 2

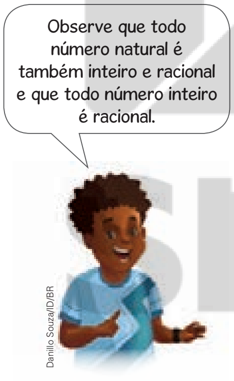
A classe T11 de salto em distância – para atletas totalmente cegos – é classificada como a modalidade mais difícil de salto em distância das paraolimpíadas, pois os saltadores correm sem contato físico com o treinador, usando como orientação o som feito por uma pessoa posicionada do outro lado da pista, indicando ao atleta o momento certo de saltar.

Observe na tabela como são indicadas as medidas da distância do salto.

TOP 10: *Ranking* mundial de atletismo paraolímpico de 2021 – Salto em distância feminino T11

Classificação	Nome	País	Medida da distância do salto (em metro)
1º	Silvania Costa de Oliveira	Brasil	5,00
2º	Yuliia Pavlenko	Ucrânia	4,91
2º	Asila Mirzayorova	Uzbequistão	4,91
4º	Lorena Salvatini Spoladore	Brasil	4,77
5º	Chiaki Takada	Japão	4,74
6º	Lahja Ishitile	Namíbia	4,70
7º	Viktoria Karlsson	Suécia	4,60
8º	Meritxell Playa Faus	Espanha	4,54
9º	Arjola Dedaj	Itália	4,49
10º	Rosario Trinidad Coppola Molina	Argentina	4,46

Fonte de pesquisa: International Paralympic Committee. Official world rankings 2021. Disponível em: https://db.ipc-services.org/sdms/web/ranking/at/pdf/type/WR/list/857/category/out/gender/W/evt/LJP/class/T11. Acesso em: 3 mar. 2022.



Danillo Souza/ID/BR

Conjunto dos números racionais

Estamos rodeados de situações em que precisamos usar números. Por exemplo: para contar a quantidade de pessoas em uma fila, observar o código da linha de determinado ônibus, medir nossa altura e classificar as posições dos competidores de uma corrida. Em muitos desses exemplos, usamos números racionais.

Pertencem ao conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) todos os números que podem ser representados da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Podemos notar que todos os números naturais e todos os números inteiros também pertencem ao conjunto dos números racionais.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Retome com os estudantes os conjuntos numéricos que eles conhecem. Discuta as características dos números naturais, inteiros e racionais. Proponha a eles que, em grupo, identifiquem situações em que é necessário utilizar cada um desses números e o porquê. Conduza um debate em sala de aula de modo que os estudantes justifiquem o uso de cada número nas situações levantadas por eles em grupo, considerando as características de cada conjunto.

Exemplos

A. Considere o número 10.

- É número natural ($10 \in \mathbb{N}$).
- É número inteiro ($10 \in \mathbb{Z}$).
- É número racional ($10 \in \mathbb{Q}$).

B. Considere o número -15.

- Não é número natural ($-15 \notin \mathbb{N}$).
- É número inteiro ($-15 \in \mathbb{Z}$).
- É número racional ($-15 \in \mathbb{Q}$).

C. Considere o número $\frac{3}{4}$.

- Não é número natural $\left(\frac{3}{4} \notin \mathbb{N}\right)$.
- Não é número inteiro $\left(\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}\right)$.
- É número racional $\left(\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}\right)$.

D. Considere o número $\sqrt{2}$.

- Não é número natural ($\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$).
- Não é número inteiro ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$).
- Não é número racional ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Agora, veja alguns subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

- $\mathbb{Q}^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$
- $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 0\}$
- $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 0\}$
- $\mathbb{Q}_+^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$
- $\mathbb{Q}_-^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$

Nessas notações, o símbolo * (asterisco) indica que o zero não pertence ao conjunto. O símbolo + indica que os números negativos não são considerados. Do mesmo modo, o símbolo − indica que os números positivos não são considerados.

Símbolos |, ∈ e ∉

Veja o que os símbolos |, ∈ e ∉ representam:

- |: tal que
- ∈: pertence
- ∉: não pertence

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Observe os números a seguir.

2	-3	4,5	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-3{,}78$	$3\frac{2}{7}$	2,6

Escreva qual(is) desses números pertence(m) ao conjunto dos números:

a) naturais; **2**

b) inteiros; **2 e −3.**

c) racionais. **2; −3; 4,5; $\frac{7}{2}$; $\frac{1}{3}$; −3,78; $3\frac{2}{7}$ e 2,6.**

2. Copie as sentenças a seguir no caderno e complete-as.

a) O número 20,6 pertence ao conjunto dos números ■. **racionais**

b) O número 210 ■ ao conjunto dos números naturais. **pertence**

c) O número −20,333... ■ ao conjunto dos números racionais. **pertence**

d) O número $\frac{15}{6}$ ■ ao conjunto dos números inteiros. **não pertence**

e) O número $\frac{5}{3}$ ■ ao conjunto dos números naturais. **não pertence**

3. Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) Todo número racional é inteiro. **F**

b) Todo número natural é inteiro. **V**

c) Todo número natural é racional. **V**

d) Todo número racional é natural. **F**

e) Todo número inteiro é racional. **V**

f) Todo número inteiro é natural. **F**

- Estimule os estudantes propondo diferentes situações. Peça que pensem, por exemplo, em dois números naturais. Questione quantos números naturais existem entre eles. Na sequência, faça o mesmo para dois números inteiros. Espera-se que os estudantes percebam que, entre dois números naturais e entre dois números inteiros, é possível dizer quantos números da mesma natureza existem, por maior que seja a contagem. Por exemplo, entre os números naturais 5 e 9, há os números naturais 6, 7 e 8; entre os números inteiros −3 e 4, há os números inteiros −2, −1, 0, 1, 2 e 3.
- Peça aos estudantes que pensem em quantos números racionais existem entre dois números racionais distintos. Leve-os a perceber que, entre dois números racionais quaisquer, há uma infinidade de números racionais.
- A média aritmética, utilizada repetidas vezes, pode apresentar essa noção do conjunto dos números racionais.

  Considere, por exemplo, os números racionais $\frac{1}{2}$ e 1.

  - A média aritmética de $\frac{1}{2}$ e 1 é $\frac{3}{4}$, pois $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2} : 2 = \frac{3}{4}$. Esse número também é racional.
  - A média aritmética de $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ é $\frac{5}{8}$, pois $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ e $\frac{5}{4} : 2 = \frac{5}{8}$. Esse número também é racional.

  Prossiga com esse raciocínio enquanto julgar conveniente. Os resultados são sempre números racionais. Isso ajuda os estudantes a perceber a existência de infinitos números racionais.
- Peça aos estudantes que deem um exemplo que justifique por que as afirmações dos itens **a**, **d** e **f** da atividade **3** são falsas.

REPRESENTAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS NA RETA NUMÉRICA

- Relembre os estudantes de que o intervalo entre uma posição e outra na reta numérica não precisa ser sempre 1. Comente que podemos ter retas com intervalo de 0,1 unidade, de 4 unidades, etc.
- Antes de explorar os exemplos da página, retome com os estudantes a representação de números inteiros na reta numérica e aproveite para recapitular os sentidos positivo e negativo de uma reta. Pergunte a eles como poderíamos representar números racionais em uma reta numérica. Escreva alguns números racionais na lousa e analise com os estudantes entre quais números inteiros cada número poderia estar. Justifique as divisões do intervalo escolhido.
- Se achar oportuno, mostre aos estudantes que as retas podem ser apresentadas também na posição vertical.

DE OLHO NA BASE

Compreender como representar números racionais na reta numérica favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA10**.

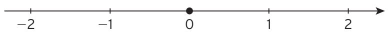
Representação de números racionais na reta numérica

Vamos ver como representar alguns números racionais na reta numérica.

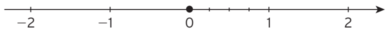
Exemplos

A. Vamos representar o número $\frac{1}{4}$ na reta numérica.

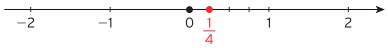
- Desenhamos uma reta e marcamos um ponto que representa o número 0. Depois, escolhemos uma distância fixa para representar a unidade de comprimento da reta. Nesse caso, será de 1 unidade.



- O número $\frac{1}{4}$ (ou 0,25) está localizado entre 0 e 1. Assim, dividimos o intervalo entre 0 e 1 em quatro partes iguais.

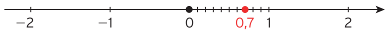


- Localizamos o primeiro ponto à direita do zero. Associamos esse ponto ao número $\frac{1}{4}$.



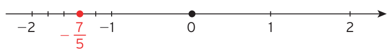
B. Vamos representar o número 0,7 na reta numérica.

- Desenhamos uma reta e escolhemos a unidade de comprimento. Nesse caso, a unidade de comprimento da reta será de 1 unidade.
- O número 0,7 está entre 0 e 1. Assim, dividimos o intervalo entre 0 e 1 em dez partes iguais.
- Localizamos o sétimo ponto à direita do zero e o associamos ao número 0,7.



C. Vamos representar o número $-\frac{7}{5}$ na reta numérica.

- Desenhamos uma reta e escolhemos a unidade de comprimento, que será 1 unidade.
- O número $-\frac{7}{5}$ está entre -2 e -1. Assim, dividimos o intervalo entre -2 e -1 em cinco partes iguais.
- Localizamos o segundo ponto à esquerda do -1 e o associamos ao número $-\frac{7}{5}$.



Ilustrações: ID/BR

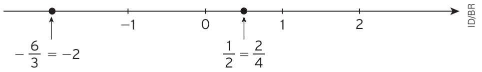
ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Represente algumas retas com diferentes intervalos e origens na lousa e peça aos estudantes que as completem. Por exemplo: desenhe uma reta com intervalo entre posições de 5 unidades com origem em 10; represente nela os pontos 10, 15 e 20 e peça aos estudantes que completem a reta numérica até a posição 40.

Diferentes representações de um número racional na reta numérica

Um número racional pode ser representado de diferentes maneiras. Você percebeu, pelos exemplos da página anterior, que, independentemente da representação utilizada, a localização desse número na reta numérica será a mesma? **Resposta pessoal.**

Veja, por exemplo, a localização dos números $-\frac{6}{3}, -2, \frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ em uma reta numérica.



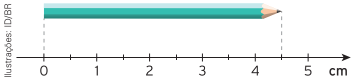
Perceba que $-\frac{6}{3}$ e -2 representam o mesmo número racional e, por isso, associamos o mesmo ponto a eles. Do mesmo modo, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representam o mesmo número racional e, por isso, associamos o mesmo ponto a eles.

João Picoli/ID/BR

ATIVIDADES

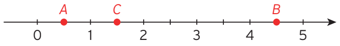
Responda sempre no caderno.

4. Qual é a medida do lápis representado a seguir? **4,5 cm**



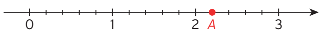
Ilustrações: ID/BR

5. Associe as frações $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}$ e $\frac{1}{2}$ às letras A, B e C de acordo com sua posição na reta numérica. $A = \frac{1}{2}$; $B = \frac{9}{2}$; $C = \frac{3}{2}$

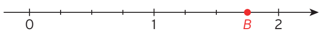


6. Escreva os números correspondentes aos pontos A, B, C, D e E.

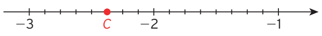
$\frac{11}{5}$ a)



$\frac{7}{4}$ b)

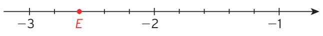


$-\frac{19}{8}$ c)



$\frac{31}{5}$ d)

$-\frac{13}{5}$ e)



7. Entre quais números inteiros consecutivos estão os números a seguir?

a) $-3\frac{2}{7}$ **Entre −4 e −3.**

b) $-31{,}6$ **Entre −32 e −31.**

c) $\frac{14}{3}$ **Entre 4 e 5.**

d) 9,777... **Entre 9 e 10.**

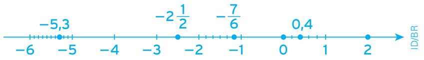
8. Desenhe uma reta numérica no caderno. Em seguida, localize os seguintes números nela:

0,4 $-5{,}3$ $-\frac{7}{6}$ 2 0 $-2\frac{1}{2}$

9. Analise a afirmação de Joaquim e descubra se o raciocínio dele está correto. **Consulte a resposta neste manual.**

Para localizar a fração $-\frac{36}{7}$ na reta numérica, transformo essa fração em um número misto: $-5\frac{1}{7}$. Agora, sei que $-\frac{36}{7}$ está entre -5 e -6. Então, divido esse intervalo em sete partes iguais e marco a primeira delas. Posso associar esse ponto à fração $-\frac{36}{7}$.

8.



- Escolha um número e escreva diversas representações dele na lousa para que os estudantes percebam que um ponto da reta numérica pode ser representado de diversas maneiras. Por exemplo:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \ldots$$

- Na atividade **4**, verifique se os estudantes percebem a marcação entre os números inteiros. Peça que meçam o intervalo com uma régua para que verifiquem que essas marcações estão na metade dele, ou seja, na metade da distância entre um número inteiro e outro, representando 0,5 unidade.
- Peça aos estudantes que expliquem o raciocínio usado para localizar os números na reta numérica da atividade **5**. Veja se eles realizaram a divisão do numerador pelo denominador para descobrir entre quais números inteiros as frações se localizam ou se usaram outra estratégia.
- Para fazer a atividade **6**, inicialmente os estudantes devem observar em quantas partes o intervalo entre dois números inteiros está dividido. Nos itens **a** e **b**, uma boa estratégia é localizar as frações de $\frac{1}{5}$ em $\frac{1}{5}$ e de $\frac{1}{4}$ em $\frac{1}{4}$, respectivamente, até chegar aos pontos A e B, já que o zero está representado na reta. Um modo de resolver o item **c** é descobrir a qual fração de denominador 8 está associado o ponto -2 $\left(-\frac{16}{8}\right)$ e ir "andando" para a esquerda na reta, chegando até o ponto C. Assim, como estamos "andando" para a esquerda na reta na parte dos números negativos, temos de adicionar $-\frac{1}{8}$ a cada marca da reta. Nos itens **d** e **e**, pode-se descobrir qual fração de denominador 5 está associada ao ponto 6 $\left(\frac{30}{5}\right)$ e ao ponto -3 $\left(-\frac{15}{5}\right)$ e ir "andando" para a direita na reta, já que o ponto D está mais perto de 6 do que de 7, e o ponto E está mais perto de -3 do que de -2.

RESPOSTA

9. O raciocínio de Joaquim está correto, porém incompleto. É preciso considerar que, ao dividir o segmento em sete partes iguais, ele deve pegar a primeira parte à esquerda do -5.

REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE NÚMEROS RACIONAIS: FINITA OU INFINITA E PERIÓDICA

- Explique aos estudantes como encontrar a representação decimal de um número a partir da representação fracionária utilizando a ideia de fração como quociente.
- Diferencie os números decimais exatos das dízimas periódicas por meio do resto encontrado na divisão. Peça aos estudantes exemplos para ambos os casos. Desse modo, você poderá perceber se eles entenderam a diferença entre os dois conceitos: se a fração não tem representação decimal exata e apresenta repetição periódica e infinita de um ou mais algarismos, ela é denominada dízima periódica.
- Discuta com os estudantes como analisar o número para se obter o período de uma dízima periódica, pois eles devem entender que o período se repete mesmo que uma parte das casas decimais não se repita, como é o caso das dízimas periódicas compostas.

Representação decimal de números racionais: finita ou infinita e periódica

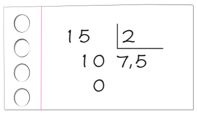
A representação decimal de qualquer número racional pode ser finita ou infinita e periódica.

Representação decimal finita

Vamos representar o número $\frac{15}{2}$ na forma decimal.

Sabemos que uma fração também indica uma divisão do numerador pelo denominador. Veja.

Ilustrações: ID/BR



Portanto, $\frac{15}{2} = 7,5$.

De maneira geral, para transformar um número racional na forma fracionária em um número racional na forma decimal, efetuamos a divisão do numerador pelo denominador da fração.

Exemplos

A. $\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0,5$

B. $\frac{6}{10} = 6 : 10 = 0,6$

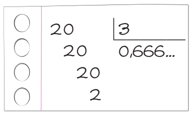
C. $\frac{13}{8} = 13 : 8 = 1,625$

Note que, nesses exemplos, obtemos, em algum momento, uma divisão com resto zero e um quociente decimal. Sempre que isso ocorrer, dizemos que o quociente é um número **decimal exato**. Assim, os números 0,5; 0,6 e 1,625 são exemplos de decimais exatos.

Representação decimal infinita e periódica

Vimos que, para transformar um número racional na forma fracionária em um número racional na forma decimal, efetuamos a divisão do numerador pelo denominador da fração.

Vamos escrever o número $\frac{2}{3}$ na forma decimal. Veja.



Perceba que, a cada etapa dessa divisão, acrescentamos o algarismo 6 no quociente e obtemos 2 como resto.

Poderíamos continuar essa divisão indefinidamente e nunca obteríamos resto zero. O resultado dessa divisão é um número decimal com infinitas casas decimais que se repetem. Chamamos esse número de **dízima periódica**. Podemos representar o resultado dessa divisão assim:

$$\frac{2}{3} = 0,666...$$

As reticências indicam que esse número tem infinitas casas decimais.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Utilize a calculadora para ajudar os estudantes a compreender quais são as características de um número que tem representação decimal finita ou infinita e periódica. Sugira algumas frações para que eles façam a divisão do numerador pelo denominador, usando a calculadora. Peça que observem o que acontece em cada situação e determinem o período. Por exemplo, ao trabalhar com as frações $\frac{1}{2}, \frac{4}{50}, \frac{120}{100}$, eles podem perceber que esses números racionais têm representação finita. No entanto, números como $\frac{2}{3}, \frac{102}{99}, \frac{4}{7}$, entre outros, têm representação infinita e periódica.

Período

O número formado pelos algarismos que se repetem em uma dízima periódica é chamado de **período**. No exemplo anterior, dizemos que 6 é o período da dízima 0,666... Podemos também usar um traço acima do período em vez de usar as reticências. Assim: 0,666... é o mesmo que $0,\overline{6}$.

Exemplos

A. $1,555... = 1,\overline{5}$

B. $6,1212... = 6,\overline{12}$

Dízimas periódicas simples ou compostas

Uma dízima periódica pode ser simples ou composta. Quando o período aparece logo após a vírgula, dizemos que a dízima é **simples**. Quando, na parte decimal, há uma parte não periódica e uma parte periódica, dizemos que a dízima periódica é **composta**.

Exemplos

A. Dízimas simples:

$0,\overline{15} \longrightarrow$ período: 15

$0,\overline{248} \longrightarrow$ período: 248

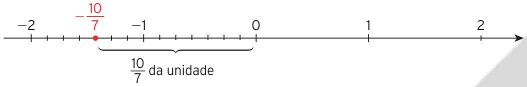
B. Dízimas compostas:

$10,12\overline{53} \longrightarrow$ parte não periódica: 12; período: 53

$4,7\overline{812} \longrightarrow$ parte não periódica: 7; período: 812

Valor absoluto ou módulo de um número racional

Veja a representação do número $-\frac{10}{7}$ em uma reta numérica.



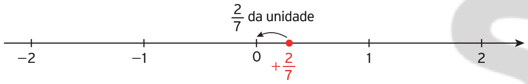
Observe que a distância do ponto associado ao número $-\frac{10}{7}$ ao ponto associado ao número 0 (origem da reta numérica) é $\frac{10}{7}$ da unidade.

Valor absoluto ou **módulo** de um número racional é a distância entre o ponto que representa esse número e a origem.

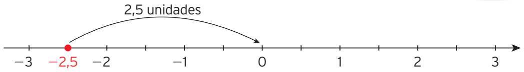
Assim, dizemos que o valor absoluto de $-\frac{10}{7}$ é $\frac{10}{7}$ e representamos da seguinte maneira: $\left|-\frac{10}{7}\right| = \frac{10}{7}$

Exemplos

A. O módulo de $\frac{2}{7}$ é $\frac{2}{7}$ e é indicado por $\left|\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7}$.



B. O valor absoluto de −2,5 é 2,5 e é indicado por $|-2,5| = 2,5$.



Ilustrações: ID/BR

- A representação da dízima periódica com um traço é mais interessante de ser usada, porque permite que se veja o período claramente. Mas é importante apresentar as duas representações para que os estudantes reconheçam dízimas independentemente da maneira que estiverem representadas.
- Verifique se os estudantes compreenderam a diferença entre dízimas simples e compostas. Peça a eles exemplos de cada tipo de dízimas usando as duas representações: com traço e com reticências.

VALOR ABSOLUTO OU MÓDULO DE UM NÚMERO RACIONAL

- A representação dos números na reta numérica auxilia muito na compreensão do conceito de módulo de um número.

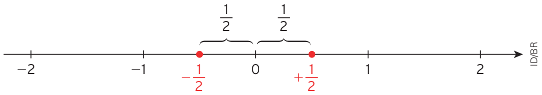
  Desenhe uma reta numérica na lousa e represente números racionais positivos e negativos nela. Solicite aos estudantes que falem qual é o módulo desses números. Representar números positivos e negativos os ajuda a perceber que o módulo de um número é sempre um valor positivo.
- Pergunte aos estudantes: Qual é o módulo de zero? Espera-se que eles concluam que o módulo de zero é zero, pois nesse caso o módulo corresponde à medida da distância do ponto associado a ele até ele mesmo.

NÚMEROS OPOSTOS OU NÚMEROS SIMÉTRICOS

- Verifique se os estudantes compreenderam bem o conceito de módulo de um número racional antes de começar o trabalho com números opostos.
- No item **e** da atividade **10**, peça aos estudantes que escrevam primeiro o número que está sendo dado e depois escrevam o simétrico.
- Amplie a atividade **13** pedindo aos estudantes que desenhem uma reta numérica e representem nela o ponto *A* e seu simétrico.
- Na atividade **14**, pergunte aos estudantes qual é a medida da distância do ponto que corresponde ao número 3 até o da origem e qual é a medida da distância do ponto do oposto do número 3 até o da origem. Peça que representem essas distâncias usando o módulo. Espera-se que eles escrevam $|3| = 3$ e $|-3| = 3$.
- No item **d** da atividade **18**, os estudantes devem lembrar que o módulo de um número é sempre positivo ou zero. Assim, não existe um número tal que seu módulo seja $-\frac{4}{5}$.

Números opostos ou números simétricos

Clara representou os números $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ em uma reta numérica. Veja.



Depois de observar a representação que havia feito, Clara notou que esses dois números estão à mesma distância da origem da reta numérica.

$$\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \text{ e } \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Quando números racionais com sinais diferentes têm o mesmo módulo, dizemos que eles são **opostos** ou **simétricos**.

Assim, dizemos que os números $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ são opostos ou simétricos.

Exemplos

A. Dizemos que $-\frac{32}{5}$ e $\frac{32}{5}$ são opostos ou simétricos, pois possuem valores absolutos iguais e sinais diferentes:

$$\left|-\frac{32}{5}\right| = \frac{32}{5} \text{ e } \left|\frac{32}{5}\right| = \frac{32}{5}$$

B. Dizemos que 7,8 e −7,8 são opostos ou simétricos, pois possuem valores absolutos iguais e sinais diferentes:

$$|7{,}8| = 7{,}8 \text{ e } |-7{,}8| = 7{,}8$$

ATIVIDADES

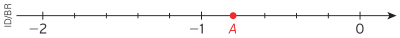
Responda sempre no caderno.

10. Escreva o número pedido em cada caso.
- a) O módulo de 29. **29**
- b) O valor absoluto de 0. **0**
- c) O módulo de 0,8888... **0,8888...**
- d) O valor absoluto de 9,7. **9,7**
- e) O número simétrico de três inteiros e quatro nonos. **$-3\frac{4}{9}$**

11. Dois números racionais diferentes podem ter módulos iguais? Cite um exemplo que confirme sua resposta. **Sim. Resposta possível: −2 e 2.**

12. Escreva os números opostos em cada caso.
- a) −5 **5**
- b) −2 **2**
- c) 9 **−9**
- d) 11 **−11**
- e) −84 **84**
- f) 108 **−108**

13. Determine o módulo e o número simétrico do número representado pelo ponto *A*.



$|-0{,}8| = 0{,}8$; simétrico: 0,8

14. Considerando o número 3 e seu oposto, qual deles está mais próximo da origem? **Ambos estão à mesma distância da origem.**

15. Determine a distância do número −2,4 ao dobro do valor de seu simétrico.

Dica: desenhe uma reta numérica e localize os números do enunciado. **A distância é de 7,2.**

16. Dois números racionais opostos representados em uma reta numérica estão a $\frac{6}{7}$ de distância um do outro. Quais são esses números? **$\frac{3}{7}$ e $-\frac{3}{7}$**

17. O oposto de um número racional qualquer sempre é um número racional negativo? Justifique. **Não, pois o oposto de um número racional negativo é um número racional positivo.**

18. Em cada caso a seguir, determine os possíveis valores para o símbolo ★.
- a) |★| = $\frac{7}{2}$ **$\frac{7}{2}$ ou $-\frac{7}{2}$**
- b) |★| = 26,2 **−26,2 ou 26,2**
- c) |−15,2| = ★ **15,2**
- d) |★| = $-\frac{4}{5}$ **Não existe.**

Comparação de números racionais

Vamos estudar como comparar números racionais.

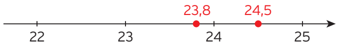
Comparação em uma reta numérica

Uma das maneiras de comparar os números racionais é localizando-os em uma reta numérica. Como representamos a reta numérica em ordem crescente, da esquerda para a direita, o maior entre dois números racionais é o que está à direita do outro.

Exemplos

A. Vamos comparar os números 24,5 e 23,8.

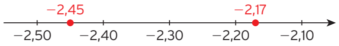
Localizamos cada um dos números na reta numérica.



Como 24,5 está localizado à direita de 23,8, temos que $24{,}5 > 23{,}8$. Também podemos dizer que $23{,}8 < 24{,}5$.

B. Vamos comparar os números $-2{,}45$ e $-2{,}17$.

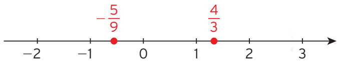
Localizamos cada um dos números na reta numérica.



Como $-2{,}17$ está localizado à direita de $-2{,}45$, temos que $-2{,}17 > -2{,}45$ ou $-2{,}45 < -2{,}17$.

C. Vamos comparar os números $-\frac{5}{9}$ e $\frac{4}{3}$.

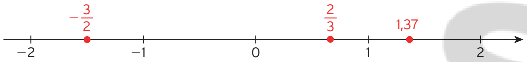
Localizamos cada um dos números na reta numérica.



Como $\frac{4}{3}$ está localizado à direita de $-\frac{5}{9}$, temos que $\frac{4}{3} > -\frac{5}{9}$. Também podemos dizer que $-\frac{5}{9} < \frac{4}{3}$.

D. Vamos comparar os números $\frac{2}{3}$, 1,37 e $-\frac{3}{2}$.

Localizamos cada um dos números na reta numérica.



Ilustrações: ID/BR

Como $\frac{2}{3}$ está localizado à esquerda de 1,37 e à direita de $-\frac{3}{2}$ na reta numérica, temos que $\frac{2}{3} < 1{,}37$ e $\frac{2}{3} > -\frac{3}{2}$ ou, ainda, $-\frac{3}{2} < \frac{2}{3} < 1{,}37$.

Observe que a relação $1{,}37 > \frac{2}{3} > -\frac{3}{2}$ também é verdadeira.

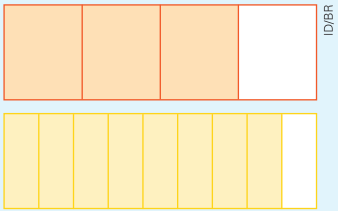
COMPARAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

- Reforce com os estudantes o sentido da ordem crescente dos números que normalmente adotamos para as retas numéricas: como organizamos os números em ordem crescente da esquerda para a direita, os números que estão mais à direita da reta são maiores que os números que estão mais à esquerda dela.
- Nos exemplos desta página, há comparações de dois números positivos na forma decimal no exemplo **A**, dois números negativos na forma decimal no exemplo **B**, uma fração negativa e uma fração positiva no exemplo **C** e uma fração positiva, um número positivo na forma decimal e uma fração negativa no exemplo **D**. Se julgar oportuno, faça outras comparações.
- Nos exemplos **C** e **D**, nos casos das frações, faça a divisão do numerador pelo denominador para que os estudantes confirmem a posição desses números na reta numérica.

DE OLHO NA BASE

Compreender como localizar e comparar dois ou mais números na reta numérica auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF07MA10**.

- No exemplo **E**, que continua a comparação de números na reta numérica iniciada na página anterior, temos a comparação de um número decimal negativo, uma fração positiva e uma fração negativa.
- Na comparação de frações sem o suporte da reta numérica, é comum que os estudantes sintam dificuldade quando precisam comparar frações com denominadores diferentes ou com numeradores diferentes. Se necessário, comece o trabalho com a comparação de frações usando figuras. Por exemplo, para comparar as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{8}{9}$, construa dois retângulos congruentes um abaixo do outro; divida um deles em 4 partes iguais e o outro em 9 partes iguais; pinte 3 das 4 partes do primeiro retângulo e 8 das 9 partes do segundo retângulo. Peça aos estudantes que comparem as partes pintadas dos dois retângulos.

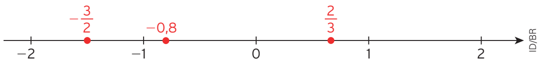


Observando a figura, é possível ver que a parte pintada do retângulo dividido em 9 partes é maior do que a parte pintada do retângulo dividido em 4 partes. Assim, a fração $\frac{8}{9}$ é maior que a fração $\frac{3}{4}$.

- Na situação **2**, também pode-se solicitar aos estudantes que reflitam sobre o tamanho dos pedaços de torta que os sobrinhos de Adriana e de Miriam receberam. Sendo as tortas de mesmo tamanho, dividi-las em mais pedaços resulta em pedaços menores. Dessa maneira, como o número de tortas feitas é o mesmo, ou seja, o numerador das frações é o mesmo, os sobrinhos que receberam pedaços das tortas que foram divididas em mais pedaços ficaram com menos torta do que os sobrinhos que receberam pedaços das tortas que foram divididas em menos pedaços.

E. Vamos comparar os números $-0{,}8$, $\frac{2}{3}$ e $-\frac{3}{2}$.

Localizamos cada um dos números na reta numérica.



Como $-0{,}8$ está localizado à esquerda de $\frac{2}{3}$ e à direita de $-\frac{3}{2}$ na reta numérica, temos $-0{,}8 > -\frac{3}{2}$ e $-0{,}8 < \frac{2}{3}$ ou $-\frac{3}{2} < -0{,}8 < \frac{2}{3}$. Observe que a relação $\frac{2}{3} > -0{,}8 > -\frac{3}{2}$ também é verdadeira.

Comparação de números racionais na forma fracionária

Vamos estudar como comparar números racionais na forma fracionária sem o suporte da reta numérica. Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Sérgio e Pedro vão dividir os 10 carrinhos que eles ganharam. Sérgio vai ficar com $\frac{4}{10}$ dos carrinhos, e Pedro vai ficar com $\frac{6}{10}$ dos carrinhos. Quem ficará com mais carrinhos?

Para responder a essa questão, temos de comparar as frações $\frac{4}{10}$ e $\frac{6}{10}$. Como as duas frações têm denominadores iguais, basta comparar os numeradores. Como $6 > 4$, temos que $\frac{6}{10} > \frac{4}{10}$.

Logo, Pedro ficará com mais carrinhos que Sérgio.

Situação 2

Adriana e Miriam fizeram 3 tortas iguais cada uma. Adriana dividiu as tortas que fez igualmente entre seus 5 sobrinhos, e Miriam dividiu as tortas que fez igualmente entre seus 4 sobrinhos. Quem ganhou uma quantidade maior de torta: os sobrinhos de Adriana ou os sobrinhos de Miriam?

Adriana dividiu cada uma das 3 tortas que fez em 5 pedaços iguais e separou um pedaço de cada torta para cada sobrinho. Assim, cada sobrinho dela ganhou $\frac{3}{5}$ das tortas.


João Picoli/ID/BR

OUTRAS FONTES

Freire, P. C. *Uma jornada por diferentes mundos da Matemática*: investigando os números racionais na forma fracionária. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

Nessa dissertação, discute-se a importância de se trabalhar os diversos significados de números racionais na forma fracionária nos anos finais do Ensino Fundamental.

Imenes, L. M.; Jakubovic, J.; Lellis, M. *Frações e números decimais*. 17. ed. São Paulo: Atual, 2011 (Coleção Pra que Serve Matemática?).

Nesse livro, os autores discutem e apresentam utilidades de frações e números na forma decimal que nem sempre são lembradas no ensino. Assim, trazem atividades interessantes e divertidas para o trabalho em sala de aula.

Niven, I. *Números*: racionais e irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Nesse livro, o autor discute a estrutura dos números e como determinar se um número é racional ou irracional.

Miriam dividiu cada uma das 3 tortas que fez em 4 pedaços iguais e separou um pedaço de cada torta para cada sobrinho. Assim, cada sobrinho dela ganhou $\frac{3}{4}$ das tortas.


João Picoli/ID/BR

Agora, vamos comparar as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$ para saber qual delas é a maior. Para isso, podemos escrevê-las usando frações equivalentes, de modo que elas sejam escritas com o mesmo denominador.

Como mmc(5, 4) = 20, temos:

$$\underset{\cdot 4}{\overset{\cdot 4}{\frac{3}{5} = \frac{12}{20}}} \quad \text{e} \quad \underset{\cdot 5}{\overset{\cdot 5}{\frac{3}{4} = \frac{15}{20}}}$$

Como as frações obtidas têm denominadores iguais, comparamos os numeradores. A fração $\frac{12}{20}$ é menor que $\frac{15}{20}$, pois $12 < 15$. Assim, a fração $\frac{3}{5}$ é menor que a fração $\frac{3}{4}$.

Portanto, os sobrinhos de Miriam ganharam uma quantidade maior de torta.

Situação 3

Clarice fez um arranjo de flores. Nesse arranjo, $\frac{2}{5}$ das flores são vermelhas e $\frac{3}{8}$ são amarelas. Há mais flores vermelhas ou amarelas no arranjo?

Podemos responder a essa questão fazendo a comparação das frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$. Note que essas frações apresentam numeradores e denominadores diferentes.

Para compará-las, encontramos o denominador comum às duas frações: mmc(5, 8) = 40. Assim:

$$\underset{\cdot 8}{\overset{\cdot 8}{\frac{2}{5} = \frac{16}{40}}} \quad \text{e} \quad \underset{\cdot 5}{\overset{\cdot 5}{\frac{3}{8} = \frac{15}{40}}}$$

Comparamos as frações obtidas para saber qual é a maior: $\frac{16}{40} > \frac{15}{40}$, pois $16 > 15$. Então, a fração $\frac{2}{5}$ é maior que a fração $\frac{3}{8}$.

Logo, há mais flores vermelhas no arranjo.

- Quando for necessário o uso de frações equivalentes na comparação de frações, não exija que os estudantes utilizem o menor dos múltiplos comuns entre os denominadores das frações a serem comparadas. É possível fazer essa comparação com qualquer múltiplo comum dos denominadores, ou seja, com qualquer fração equivalente. Depois, explique a eles que se utiliza o mmc para encontrar a fração equivalente com o menor denominador, o que pode facilitar o cálculo.

DE OLHO NA BASE

Compreender diferentes maneiras de comparar frações favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA05**.

- As situações apresentadas nessas páginas permitem verificar se os estudantes se recordam como comparar números racionais na forma decimal e analisar algumas estratégias de comparação. Antes de apresentar cada estratégia, pergunte a eles como fariam para comparar os números em cada uma das situações.
- Verifique se os estudantes estão tratando um número racional na representação decimal como dois números inteiros separados por vírgula. Isso é um obstáculo que os impede de compreender esse tipo de número e de fazer a comparação corretamente. Explique a eles que as casas decimais depois da vírgula são ordens menores que a unidade e devem ser comparadas assim como é feito nas ordens maiores que a unidade. Por exemplo: 23,456 não é maior que 23,54, mesmo que 456 seja maior que 54.
- Relembre os estudantes de que devem fazer a comparação dos números racionais na forma decimal, ordem a ordem, do maior para o menor.

DE OLHO NA BASE

As situações **1** e **3** contribuem para o desenvolvimento da **competência geral 9**, para que os estudantes exercitem a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitem e promovam o respeito ao outro e aos direitos humanos, acolham e valorizem a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

- Promova, de maneira recorrente, rodas de conversa que possibilitem aos estudantes sentir que o ambiente escolar é um espaço livre de quaisquer atos violentos (verbais ou não verbais), em que o respeito a diferentes opiniões e posicionamentos sejam constantemente desenvolvidos. Aproveite esses momentos para buscar soluções coletivas e democráticas de maneira que seja possível identificar, prevenir e reverter situações de conflito no ambiente escolar. Dessa maneira, os estudantes podem ter sentimentos de pertencimento à escola e reconhecê-la como um espaço saudável de convivência.

  Promover a cultura de paz possibilita aos estudantes que exercitem a empatia e elaborem estratégias de resolução não violenta de conflitos na convivência escolar.

> "A atitude não violenta tem como referência a filosofia indiana e está baseada em dois pilares: não causar sofrimento a si ou a outro de nenhuma forma e não se omitir frente a uma circunstância que cause sofrimento."

Fonte: *Convivência escolar e cultura de paz*. Brasília: SEEDF/Subeb, 2020. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 18 abr. 2022.

Comparação de números racionais na forma decimal

Você sabe como comparar números racionais na forma decimal sem o suporte da reta numérica? Então, vamos analisar as situações a seguir.


Danillo Souza/ID/BR

Situação 1

Bianca e Gabriel estavam competindo para ver quem percorria a maior distância. Bianca andou 4,3 quilômetros, e Gabriel andou 3,9 quilômetros. Qual dos dois percorreu uma distância maior?

Para responder a essa questão, podemos comparar os números 4,3 e 3,9.

Como as partes inteiras desses números são diferentes, podemos compará-las para saber qual dos números é maior.

Comparando as partes inteiras, temos: $4 > 3$. Logo, $4{,}3 > 3{,}9$.

Então, Bianca percorreu uma distância maior que Gabriel.

Situação 2

Vamos comparar os números 1,642; −2,518; 5,174 e −3,245 para colocá-los em ordem crescente.

Como um número positivo é sempre maior que um número negativo, podemos comparar os números negativos e depois os números positivos e, então, ordená-los.

- Números negativos: −2,518 e −3,245.

  Como as partes inteiras desses números são diferentes, podemos compará-las para saber qual dos números é maior.

  Como os números são negativos, comparando as partes inteiras, temos: $-3 < -2$. Logo, $-3{,}245 < -2{,}518$.

- Números positivos: 1,642 e 5,174.

  Como as partes inteiras desses números são diferentes, podemos compará-las para saber qual dos dois números é maior.

  Comparando as partes inteiras, temos: $1 < 5$. Logo, $1{,}642 < 5{,}174$.

Então: $-3{,}245 < -2{,}518 < 1{,}642 < 5{,}174$.

Situação 3

Rose, Cauê e Marta praticam salto em distância. No treino da última semana, Rose saltou 4,54 metros, Cauê saltou 4,98 metros e Marta saltou 4,71 metros. Qual deles saltou a maior distância?

Para responder a essa questão, temos de comparar 4,54; 4,98 e 4,71. Como a parte inteira desses números é igual (4), devemos comparar as partes decimais deles (0,54, 0,98, e 0,71). Assim:

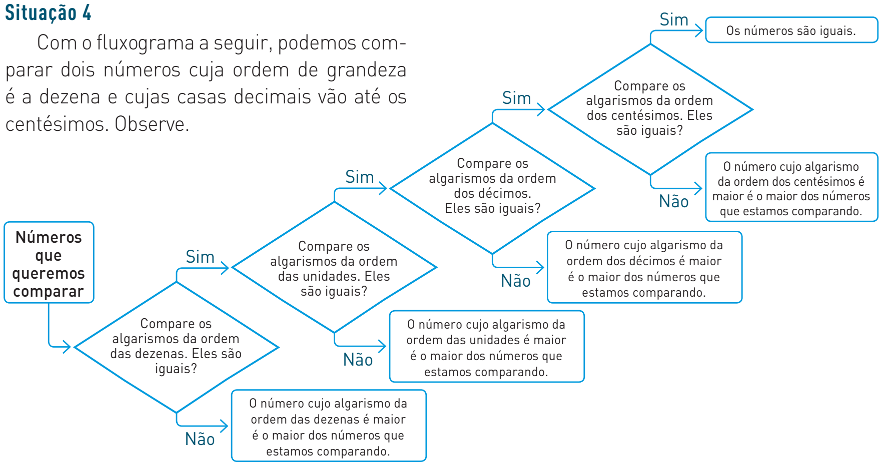
$$0{,}98 > 0{,}71 > 0{,}54$$

Como 98 centésimos é maior que 71 centésimos e 71 centésimos é maior que 54 centésimos, temos: $4{,}98 > 4{,}71 > 4{,}54$.

Portanto, Cauê saltou a maior distância.

Situação 4

Com o fluxograma a seguir, podemos comparar dois números cuja ordem de grandeza é a dezena e cujas casas decimais vão até os centésimos. Observe.



Agora, utilize esse fluxograma para comparar os números 15,87 e 15,84. Qual desses números é o maior? **15,87**

Comparação de números racionais em diferentes formas

Como podemos comparar números racionais escritos na forma decimal com os escritos na forma de fração sem o suporte da reta numérica? Para isso, vamos analisar as situações a seguir.

Situação 1

Paula gastou 0,35 de seu salário com lazer e $\frac{26}{50}$ para pagar as contas do mês. Ela gastou mais com lazer ou com as contas?

Para responder a essa pergunta, vamos comparar 0,35 com $\frac{26}{50}$. Uma das maneiras de comparar esses números é transformar 0,35 em uma fração.

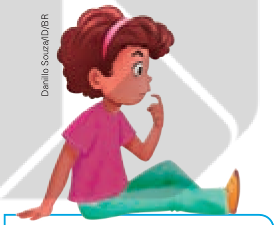
$$0{,}35 = \frac{35}{100}$$

Agora, podemos comparar as frações $\frac{35}{100}$ e $\frac{26}{50}$. Para que as frações fiquem com o mesmo denominador, podemos obter uma fração equivalente a $\frac{26}{50}$ cujo denominador seja 100:

$$\underset{\cdot 2}{\overset{\cdot 2}{\frac{26}{50} = \frac{52}{100}}}$$

Comparamos as frações obtidas para saber qual é a maior: $\frac{35}{100} < \frac{52}{100}$, pois $35 < 52$.

Logo, Paula gastou mais com as contas do mês.


Danilo Souza/ID/BR

PARE E REFLITA

Poderíamos ter transformado a fração $\frac{26}{50}$ em um número decimal e, então, fazer a comparação com o número 0,35? Converse com os colegas e o professor.

Espera-se que os estudantes respondam que sim. A comparação deveria, então, ser feita entre os números 0,35 e 0,52.

DE OLHO NA BASE

Compreender e fazer o uso de fluxograma com os passos para comparar números racionais na forma decimal auxilia os estudantes a desenvolver a habilidade **EF07MA07**.

- Na situação **4**, é apresentado um fluxograma para representar os passos utilizados com vistas a fazer a comparação de dois números cuja ordem de grandeza é a dezena e cujas casas decimais vão até os centésimos. Se necessário, faça com os estudantes a comparação dos números 15,871 e 15,845 com o uso do fluxograma. Caso julgue oportuno, construa outros fluxogramas com os estudantes para fazer a comparação de números na forma decimal de outras ordens de grandeza.
- Após explorar esse fluxograma, solicite aos estudantes que escrevam proposições relacionadas à comparação dos números decimais usando os conectivos “se” e “então”. Por exemplo, eles podem escrever:
  - Se os dois números têm o mesmo algarismo na ordem das dezenas, então precisamos comparar o algarismo na ordem das unidades.
  - Se os dois números têm algarismos diferentes na ordem das dezenas, então o número cujo algarismo da ordem das dezenas é maior é o maior dos números que estamos comparando.
  - Se os dois números têm o mesmo algarismo na ordem das unidades, então precisamos comparar o algarismo na ordem dos décimos.
  - Se os dois números têm algarismos diferentes na ordem das unidades, então o número cujo algarismo da ordem das unidades é maior é o maior dos números que estamos comparando.
- A comparação de números fica mais simples se eles estiverem representados na mesma forma. Se ambos os números são tomados na forma decimal, é necessário observar os algarismos de cada uma das ordens deles. Caso os dois números sejam tomados na forma fracionária, a utilização de frações equivalentes é uma boa estratégia para fazer a comparação.

- Explore a situação **2** pedindo aos estudantes que representem todos os números na forma decimal antes de fazer a comparação.
- Na atividade **20**, também pergunte aos estudantes como fariam para comparar os números se não estivessem representados na reta numérica.
- Verifique se os estudantes apresentam dificuldades para responder ao item **f** da atividade **23**. Se necessário, retome com eles como transformar número misto em fração imprópria.
- Pergunte aos estudantes como fizeram para responder ao item **d** da atividade **24**: se representando os números na forma decimal ou na forma fracionária.

RESPOSTA

21. a) Verdadeira.

b) Falsa. $-\frac{5}{3} > -\frac{9}{4}$

c) Falsa. $-\frac{13}{4} < \frac{15}{2}$

d) Falsa. $-1\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$

e) Verdadeira.

f) Falsa. $-\frac{9}{3} > -3\frac{1}{6}$

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas permitem aos estudantes comparar e ordenar números racionais, inclusive associando-os a pontos na reta numérica, desenvolvendo a habilidade **EF07MA10**.

Situação 2

Vamos comparar os números 3,7; −2,4; $\frac{10}{16}$; $-\frac{20}{8}$ e $1\frac{4}{5}$ e colocá-los em ordem decrescente.

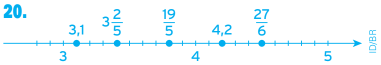
Para facilitar a comparação, vamos escrever todos os números na mesma forma. Escolhemos a forma decimal.

- 3,7
- −2,4
- $\frac{10}{16} = 0{,}625$
- $-\frac{20}{8} = -2{,}5$
- $1\frac{4}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8$

Agora, comparamos os números 3,7; −2,4; 0,625; −2,5 e 1,8 e os colocamos em ordem decrescente. Assim:

$3{,}7 > 1{,}8 > 0{,}625 > -2{,}4 > -2{,}5$ ou $3{,}7 > 1\frac{4}{5} > \frac{10}{16} > -2{,}4 > -\frac{20}{8}$

20.



ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

19. a) Respostas possíveis: maior, maior ou menor, menor.

19. Copie os itens a seguir no caderno, completando com as palavras "maior" ou "menor", de modo que as sentenças sejam verdadeiras.

a) Dados dois números racionais positivos, o ■ é aquele que tem ■ módulo.

b) Qualquer número racional positivo é ■ que o zero. **maior**

c) Qualquer número racional positivo é ■ que qualquer número racional negativo. **maior**

d) Qualquer número racional negativo é ■ que o zero. **menor**

e) Dados dois números racionais negativos, o ■ é aquele que tem ■ módulo.

Respostas possíveis: maior, menor ou menor, maior.

20. Desenhe uma reta numérica no caderno e localize nela os números do quadro a seguir.

$3\frac{2}{5}$; 4,2; $\frac{27}{6}$; 3,1; $\frac{19}{5}$

Agora, organize os números em ordem crescente. $\mathbf{3{,}1 < 3\frac{2}{5} < \frac{19}{5} < 4{,}2 < \frac{27}{6}}$

21. Verifique quais das sentenças a seguir são verdadeiras e corrija as falsas no caderno. **Consulte as respostas neste manual.**

a) $\frac{11}{2} > \frac{7}{2}$

b) $-\frac{5}{3} < -\frac{9}{4}$

c) $-\frac{13}{4} > \frac{15}{2}$

d) $-1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

e) $\left|-1\frac{3}{4}\right| > 1{,}5$

f) $-\frac{9}{3} < -3\frac{1}{6}$

22. Copie, no caderno, as sentenças a seguir e use os símbolos < (menor que) ou > (maior que) para torná-las verdadeiras.

a) 0,1 ■ 0,8 **<**

b) 1,7 ■ 2,3 **<**

c) −8,41 ■ −8,55 **>**

d) 49,39 ■ 49,35 **>**

e) 73,281 ■ 73,287 **<**

f) 501,94 ■ 501,9 **>**

23. Identifique o maior número racional em cada item.

a) 0 e $-\frac{4}{3}$ **0**

b) $-\frac{12}{2}$ e $-\frac{12}{3}$ $\mathbf{-\frac{12}{3}}$

c) 3,14 e −4,1 **3,14**

d) −7,8 e −0,25 **−0,25**

e) −6,2 e −6,75 **−6,2**

f) $-1\frac{3}{4}$ e −1,80 $\mathbf{-1\frac{3}{4}}$

24. Considere os números:

17	−3,2	−2
0	$-\frac{1}{8}$	0,16
$\frac{2}{5}$	4,1	$-\frac{17}{12}$

a) Quais deles são inteiros? **17; −2; 0**

b) Quais são racionais negativos?

c) Escreva os números racionais positivos.

d) Organize-os em ordem crescente, utilizando o sinal < (menor que).

24. b) $\mathbf{-3{,}2;\ -2;\ -\frac{1}{8};\ -\frac{17}{12}}$ **c)** $\mathbf{17;\ \frac{2}{5};\ 4{,}1;\ 0{,}16}$ **d)** $\mathbf{-3{,}2 < -2 < -\frac{17}{12} < -\frac{1}{8} < 0 < 0{,}16 < \frac{2}{5} < 4{,}1 < 17}$

ESTRATÉGIAS DE APOIO – SEÇÃO DIVERSIFICANDO

Ao trabalhar as atividades propostas, os estudantes ainda podem ter algumas dificuldades em comparar números ou em determinar quais são os números racionais.

Discuta com os estudantes o fluxograma de comparação de números na forma decimal. Organize-os em grupo, solicite que escolham números e utilizem o fluxograma da página 69 do Livro do Estudante, para que possam discutir entre si as possibilidades e esclarecer as possíveis dúvidas.

A identificação de números racionais pode ser complicada para os estudantes, pois todo número natural é também inteiro e todo número inteiro é racional. Verifique se eles entendem que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, sem formalizar a relação de inclusão. Faça uma lista de números naturais, inteiros e racionais e discuta com os estudantes as características de cada um deles.

Solicite aos estudantes que apresentem exemplos para cada conjunto numérico. É comum citarem como números racionais apenas aqueles que não são inteiros ou naturais (ou seja, aqueles pertencentes ao conjunto $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$). Caso isso aconteça, represente alguns números inteiros na forma de fração. Por exemplo: $\frac{7}{1}$, $\frac{16}{2}$, −18,0, etc.

DIVERSIFICANDO

2. a) 1; 3; 20; 26; 70; 30; 22; 2 014; 11; 2 022 b) 20% = $\frac{20}{100}$; 26% = $\frac{26}{100}$

Responda sempre no caderno.

1. Os números são racionais porque podem ser escritos na forma de uma fração, com numerador inteiro e denominador inteiro e diferente de zero.

1. Explique por que os números representados a seguir são racionais.

0,4 $-6{,}3$ $-\frac{7}{6}$ 2 0 $-2\frac{1}{2}$

2. Leia a notícia e, depois, faça no caderno o que se pede.

> **Coração de atleta**
>
> […] os cientistas compararam a atividade do coração de ratos e camundongos sedentários com a de roedores que praticam exercícios todos os dias.
>
> Após treinar uma hora por dia durante três meses, os animais tiveram o ritmo cardíaco diminuído quando comparados aos roedores que não praticaram exercício nenhum. O coração dos ratos e camundongos atletas batia num ritmo de 20 a 26% mais lentamente do que o dos animais sedentários.
>
> […]
>
> […] "Enquanto o coração de um adulto que não pratica exercícios bate, em média, 70 vezes por minuto, o de um atleta adulto pode chegar a bater 30 vezes por minuto […]".
>
> Coração de atleta. *Ciência Hoje das Crianças*, 22 jul. 2014. Disponível em: http://chc.org.br/coracao-de-atleta/. Acesso em: 11 mar. 2022.

a) Quais são os números citados no texto?

b) O texto apresenta algumas porcentagens. Escreva as frações que as representam.

c) Essas frações pertencem a que conjunto numérico? **Ao conjunto dos números racionais.**

3. Qual número é maior: 5,5 ou $\frac{11}{2}$? Explique a um colega a estratégia que você utilizou para responder à pergunta. **Os dois números são iguais. Resposta pessoal.**

4. Utilizando uma régua, verifique a medida do segmento representado a seguir.

a) Expresse essa medida utilizando um número decimal e uma fração. **2,5 cm ou $\frac{5}{2}$ cm**

b) Desenhe no caderno dois segmentos: um maior e outro menor que o segmento $\overline{AB}$. **Resposta pessoal.**

c) Peça a um colega que meça os segmentos que você desenhou. Que medidas ele obteve? **Resposta pessoal.**

5. A garrafa ilustrada ao lado foi dividida em partes iguais, sem considerar o gargalo. Se a enchermos até a última marca da parte de cima, ela ficará com 1 L.

João Picoli/ID/BR

Escreva um número racional que represente a quantidade de água que está na garrafa, em litro. **$\frac{3}{5}$ L ou 0,6 L**

6. Leia o texto a seguir.

> Um terremoto de magnitude 8,2 atingiu a Península do Alasca na noite de quarta-feira (27 [de julho de 2021]), gerando alertas de tsunami na região. As informações preliminares são das autoridades locais.
>
> O U.S. Geological Survey (USGS) informou que o terremoto ocorreu às 22h15, a uma profundidade de 35 quilômetros. A magnitude estimada é de 8,2. Inicialmente, o Centro Sismológico Europeu-Mediterrâneo apontou 7,2.
>
> […]
>
> Alerta de tsunami é dispensado após terremoto de magnitude 8,2 atingir Alasca. *CNN Brasil*, 29 jul. 2021. Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/internacional/terremoto-atinge-alasca-e-aciona-alerta-de-tsunami/. Acesso em: 8 mar. 2022.

a) Quais números aparecem nessa notícia? **8,2; 27; 2 021; 22; 15; 35; 7,2; 29; 8; 2 022**

b) Quais dos números mencionados no texto são números racionais? **Todos os números.**

c) Você sabe o que é um terremoto e quais são suas causas? Em grupo, façam uma pesquisa sobre esse assunto. **Resposta pessoal.**

d) É comum diversos países e cidadãos voluntários ajudarem uma localidade afetada por um terremoto, que muitas vezes causa grandes danos à região. O que você acha dessa atitude? Em sua comunidade já ocorreu alguma situação que tenha despertado a solidariedade de todos? Discuta com os colegas a necessidade de ajudar pessoas em situações como essa. **Respostas pessoais.**

7. Construa um fluxograma para comparar dois números na forma de fração. Depois, escolha duas frações e peça a um colega que descubra qual é a maior delas usando o fluxograma que você construiu. **Consulte a resposta neste manual.**

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

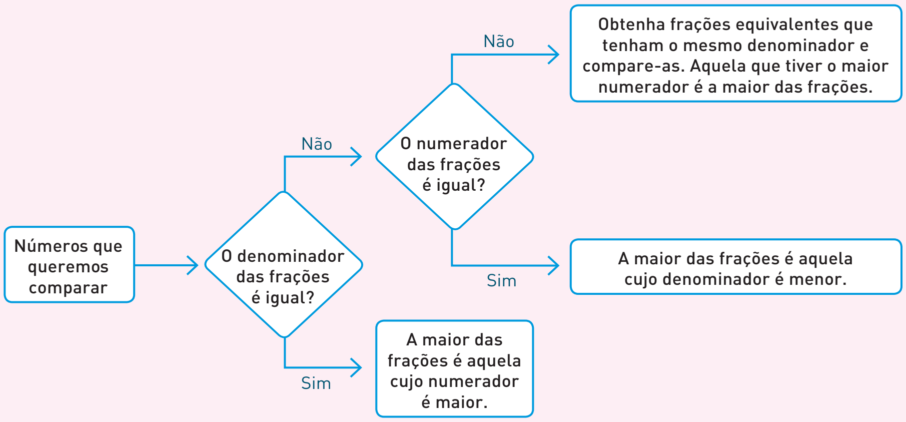
- Nesta seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Para resolver a atividade **3**, os estudantes devem observar que 5,5 e $\frac{11}{2}$ representam o mesmo número. Para chegar a essa conclusão, eles podem transformar 5,5 em fração, partindo do pressuposto de que esse número é o mesmo que cinco inteiros e um meio ou $5\frac{1}{2}$ ou $\frac{11}{2}$. Eles podem também dividir 11 por 2, obtendo 5,5.
- Aproveite o contexto da atividade **6** para discutir que, apesar de não ocorrerem terremotos com tanta intensidade no Brasil, ocorrem enchentes, secas prolongadas e outros desastres naturais. Pergunte aos estudantes o que é possível fazer para ajudar pessoas nessas situações.

DE OLHO NA BASE

Na atividade **7**, ao representar em um fluxograma o procedimento para comparar duas frações, os estudantes desenvolvem a habilidade **EF07MA07**. Além disso, permite a eles interagir em duplas, de forma cooperativa, buscando solucionar problemas, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 8**.

RESPOSTA

7. Resposta possível:



CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Operações com números racionais.
- Relação fundamental da subtração.
- Números inversos.
- Relação fundamental da divisão.
- Expressões numéricas envolvendo números racionais.

Objetivos

- Efetuar cálculos que envolvam as operações adição, subtração, multiplicação e divisão com números racionais.
- Reconhecer e utilizar a relação fundamental da subtração e a da divisão.
- Determinar o número inverso de um número racional.
- Resolver expressões numéricas que envolvam números racionais.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar e aprofundar o estudo das operações com números racionais, associando as diversas representações desse número. Eles poderão ainda compreender a ideia de adição algébrica e resolver expressões algébricas com números racionais. Esses estudos possibilitam aos estudantes fazer generalizações e abstrações em relação a regras, aumentando seu repertório para resolução de problemas do mundo que os cerca.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

- É importante que os estudantes compreendam como realizar operações envolvendo números racionais, pois é muito comum encontrar situações no cotidiano em que é necessário realizar algum cálculo com tais operações. Um exemplo disso é nosso sistema monetário, que trabalha com duas casas decimais, os centavos.
- A abertura do capítulo traz uma situação esportiva: a distância obtida no lançamento de dardo pelas três primeiras colocadas nos jogos olímpicos de 2021. É fornecida a medida da distância alcançada pelo lançamento da primeira colocada, Shiying Liu, e quantos metros o lançamento da segunda e da terceira colocadas alcançaram a menos que o de Shiying Liu. São fornecidos também quantos metros a mais o lançamento realizado pelo campeão da prova masculina da mesma modalidade alcançou. Desse modo, os estudantes são apresentados a duas subtrações e a uma adição com números racionais na forma decimal.

Capítulo

2 OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS

Para desenvolver os conteúdos deste capítulo, os estudantes devem ter compreendido as operações com números naturais e com números inteiros.

Adição e subtração de números racionais

Os jogos da XXII Olimpíada, que ocorreriam em 2020, foram realizados em 2021 em Tóquio, pois tiveram de ser adiados por conta da pandemia do novo coronavírus (covid-19). Entre as várias modalidades olímpicas, temos o atletismo, e uma de suas provas é o lançamento de dardo.

Vamos analisar o resultado final das três primeiras colocações do lançamento de dardo feminino nos Jogos Olímpicos de Tóquio 2020.

Atleta	Resultado	
Shiying Liu	66,34 m	← 1ª colocada
Maria Andrejczyk	−1,73 m	← 2ª colocada: quantidade de metros a menos que o lançamento da 1ª colocada
Kelsey-Lee Barber	−1,78 m	← 3ª colocada: quantidade de metros a menos que o lançamento da 1ª colocada

Fonte de pesquisa: Resultados Tóquio 2020. Atletismo. *El País*. Disponível em: https://brasil.elpais.com/resultados/deportivos/juegos-olimpicos/2021/atletismo/femenino/lanzamiento_de_javalina/final/. Acesso em: 8 mar. 2022.

Note que na coluna “Resultado” há apenas a medida da distância da primeira colocada, em metro, e que as demais linhas indicam a diferença em relação à primeira colocada.

Para determinar a medida da distância alcançada no lançamento de dardo das atletas que ficaram em segundo e terceiro lugares, podemos fazer uma subtração. Veja.

2º lugar: Maria Andrejczyk: 66,34 − 1,73 = 64,61

3º lugar: Kelsey-Lee Barber: 66,34 − 1,78 = 64,56

Shiying Liu, da China, disputa a final do lançamento de dardo feminino durante a prova de atletismo nos Jogos Olímpicos de Tóquio 2020, no Estádio Olímpico de Tóquio, no Japão. Foto de 2021.

Ben Stansall/Afp

Na prova masculina da mesma modalidade, o campeão foi Neeraj Chopra. Ele alcançou uma distância 21,24 metros maior que a alcançada por Shiying Liu. Para calcular qual foi a distância alcançada pelo dardo de Neeraj Chopra, podemos fazer uma adição. Veja.

$$66,34 + 21,24 = 87,58$$

Neste capítulo, vamos retomar e aprofundar nossos conhecimentos sobre operações com números racionais. Agora, vamos analisar outras situações que envolvem adição e subtração de números racionais.

Situação 1

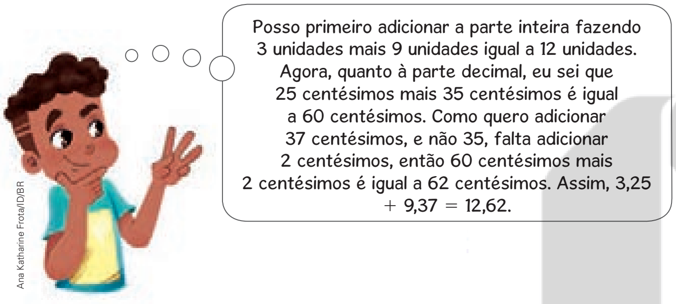
Eduardo foi até a padaria e comprou alguns pães e um bolo. Os pães custaram R$ 3,25, e o bolo, R$ 9,37. Quantos reais Eduardo gastou nessa compra?

Podemos responder a essa pergunta calculando o resultado da adição 3,25 + 9,37. Vamos fazer isso de duas maneiras diferentes.

1ª maneira: Usando o algoritmo usual.

$$\begin{array}{r} 3,\overset{1}{2}5 \\ +9,37 \\ \hline 12,62 \end{array}$$

2ª maneira: Calculando mentalmente.



Ana Katharine Frota/ID/BR

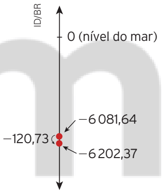
Portanto, Eduardo gastou R$ 12,62 nessa compra.

Situação 2

No início do dia, uma das máquinas de uma empresa de petróleo estava a uma profundidade de −6 081,64 metros, ou seja, 6 081,64 metros abaixo do nível do mar. Durante o dia, essa máquina conseguiu avançar 120,73 metros abaixo do nível em que estava, ou seja, uma profundidade de −120,73 metros. A qual profundidade essa máquina estava no final do dia?

A profundidade inicial da máquina é −6 081,64 metros, e ela avançou −120,73 metros. Para responder à pergunta, podemos efetuar uma adição.

$$-6\,081,64 + (-120,73) = -6\,081,64 - 120,73 = -6\,202,37$$



ID/BR

No final do dia, portanto, a máquina estava a uma profundidade de 6 202,37 metros abaixo do nível do mar.

- As situações apresentadas no Livro do Estudante abordam as operações adição e subtração envolvendo números racionais positivos e números racionais negativos na forma decimal.
- Na situação **1**, são mostradas duas maneiras de realizar uma adição de dois números racionais positivos na forma decimal: usando o algoritmo usual e o cálculo mental. Depois de explorar essa situação com os estudantes e acompanhar as duas maneiras de resolução, pergunte a eles como fariam para calcular mentalmente o resultado da adição 3,25 + 9,37. Peça que anotem o raciocínio que usaram e o compartilhem com a turma. Explore a diversidade de estratégias usada, comentando que não existe jeito certo ou errado de calcular mentalmente. Cada um deve realizar os cálculos da maneira que achar mais conveniente.

  Aproveite o contexto apresentado na situação e explore exemplos de compras efetuadas pelos estudantes, mostrando assim a importância de dominarem esse conteúdo.
- A situação **2** apresenta o cálculo de uma adição de dois números negativos na forma decimal, usando o contexto de profundidade em relação ao nível do mar.

- A situação **3** apresenta adição de dois números na forma decimal, sendo um positivo e outro negativo. Dado que o número positivo é maior que o número negativo, o resultado é positivo.
- Na situação **4**, há uma adição de um número com seu simétrico, ou seja, uma adição cuja soma é zero.
- A situação **5** trabalha a subtração de dois números negativos na forma decimal.
- Retome com os estudantes as propriedades da adição, mostrando alguns exemplos com números racionais. Enuncie as propriedades e dê alguns exemplos.

Propriedade comutativa da adição

Em uma adição de números racionais, a ordem das parcelas não altera a soma.

Exemplos

A. $7{,}5 + 6{,}8 = 14{,}3$

$6{,}8 + 7{,}5 = 14{,}3$

Assim, $7{,}5 + 6{,}8 = 6{,}8 + 7{,}5$.

B. $\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

$\left(-\frac{3}{8}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{1}{8}$

Assim, $\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{8}\right) = \left(-\frac{3}{8}\right) + \frac{1}{2}$.

Propriedade associativa da adição

Em uma adição de três ou mais números racionais, podemos associar as parcelas de diferentes maneiras, sem alterar a soma.

Exemplos

A. $(31{,}1 + 64{,}5) + (-28{,}3) =$

$= 95{,}6 - 28{,}3 = 67{,}3$

$31{,}1 + [64{,}5 + (-28{,}3)] =$

$= 31{,}1 + [64{,}5 - 28{,}3] =$

$= 31{,}1 + 36{,}2 = 67{,}3$

Assim:

$(31{,}1 + 64{,}5) + (-28{,}3) =$

$= 31{,}1 + [64{,}5 + (-28{,}3)]$

B. $\frac{3}{2} + \left[\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{3}\right] = \frac{9}{6} + \left[\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{2}{6}\right] =$

$= \frac{9}{6} + \left[-\frac{5}{6} + \frac{2}{6}\right] = \frac{9}{6} + \left[-\frac{3}{6}\right] =$

$= \frac{9}{6} - \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1$

$\left[\frac{3}{2} + \left(-\frac{5}{6}\right)\right] + \frac{1}{3} = \left[\frac{9}{6} + \left(-\frac{5}{6}\right)\right] + \frac{2}{6} =$

$= \left[\frac{9}{6} - \frac{5}{6}\right] + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Assim:

$\frac{3}{2} + \left[\left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{3}{2} + \left(-\frac{5}{6}\right)\right] + \frac{1}{3}$

Situação 3

Leonardo recebeu um prêmio de R$ 458,50 e utilizou R$ 243,80 para pagar um boleto. Com quantos reais Leonardo ficou?

Como ele ganhou R$ 458,50, podemos representar esse número por +R$ 458,50. Já o gasto de R$ 243,80 pode ser representado por −R$ 243,80. Logo, temos:

$$+458{,}50 + (-243{,}80) = 458{,}50 - 243{,}80 = 214{,}70$$

Então, Leonardo ficou com R$ 214,70.

Ana Katharine Frota/ID/BR

Situação 4

Cecília trabalha em um frigorífico e viu que o termômetro da câmara de resfriados estava marcando −4,5 °C. Ela ajustou o equipamento aumentando 4,5 °C. Que medida de temperatura o termômetro está marcando agora?

Para responder à pergunta, podemos efetuar a adição $(-4{,}5) + (4{,}5)$.

$$-4{,}5 + 4{,}5 = 0$$

Assim, o termômetro está marcando 0 °C.

Situação 5

Nos dias 28 e 29 de abril, os termômetros de certa cidade no Sul do país registraram, respectivamente, as medidas de temperatura −4,9 °C e −3,3 °C às 22 horas. Qual foi a variação entre essas medidas?

Para responder a essa questão, podemos efetuar uma subtração.

$$(-3{,}3) - (-4{,}9) = -3{,}3 + 4{,}9 = 1{,}6$$

Assim, a variação entre essas medidas foi de 1,6 °C.

Em uma **adição** de dois números racionais:
- positivos, a soma é positiva. Para encontrar essa soma, adicionamos o módulo desses números.
- negativos, a soma é negativa. Para encontrar essa soma, adicionamos o módulo desses números.

Exemplos

A. $4{,}47 + 69{,}3$

$4{,}47 + 69{,}3 = +(|4{,}47| + |69{,}3|) = +(4{,}47 + 69{,}3) =$

$= +73{,}77$

B. $(-3{,}52) + (-7{,}61)$

$(-3{,}52) + (-7{,}61) = -(|-3{,}52| + |-7{,}61|) =$

$= -(3{,}52 + 7{,}61) = -11{,}13$

Em uma **adição** de dois números racionais de sinais diferentes e:

- módulos diferentes, a soma terá o sinal do número de maior módulo. Para encontrar essa soma, devemos calcular o módulo da diferença do módulo desses números.
- módulos iguais, a soma é igual a zero.

Exemplos

A. $-\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$

Primeiro, determinamos o mínimo múltiplo comum dos denominadores: mmc(3, 4) = 12.

$$-\frac{2}{3} = -\frac{8}{12} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Os módulos desses números são:

$$\left|-\frac{8}{12}\right| = \frac{8}{12} \quad \text{e} \quad \left|\frac{3}{12}\right| = \frac{3}{12}$$

Como $\frac{8}{12} > \frac{3}{12}$, a soma será negativa. Assim:

$$-\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{8}{12} + \frac{3}{12} = -\left(\left|\left|-\frac{8}{12}\right| - \left|\frac{3}{12}\right|\right|\right) = -\left(\left|\frac{8}{12} - \frac{3}{12}\right|\right) =$$

$$= -\left(\left|\frac{5}{12}\right|\right) = -\frac{5}{12}$$

B. 3,5 + (−3,5)

Os módulos desses números são:

$$|3{,}5| = 3{,}5 \quad \text{e} \quad |-3{,}5| = 3{,}5$$

Como os módulos são iguais, a soma é zero: 3,5 + (−3,5) = 0.

Em uma **subtração** de dois números racionais, a diferença é igual à soma do primeiro número com o oposto do segundo.

Exemplo

6,8 − (−5,4) = 6,8 + (15,4) = 12,2

Observação

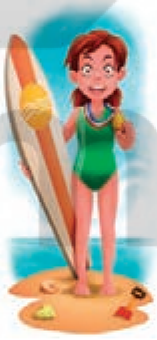
As propriedades da adição de números inteiros também são válidas para a adição de números racionais.

Relação fundamental da subtração

Gabriela participou de uma competição de surfe, em que seu desempenho seria medido pela nota de duas apresentações. Na primeira apresentação, ela obteve nota 37,14 e, no total, 50,00 pontos. No painel de divulgação dos resultados, a nota de sua segunda apresentação apareceu como 12,86.

Para verificar se a nota que apareceu no painel estava correta, podemos realizar uma subtração ou uma adição.

- Subtração: $\underbrace{50{,}00}_{\text{minuendo}} - \underbrace{37{,}14}_{\text{subtraendo}} = \underbrace{12{,}86}_{\text{resto ou diferença}}$
- Adição: 12,86 + 37,14 = 50,00



Danilo Souza/ID/BR

Propriedade do elemento oposto

Para cada número racional, existe um oposto. Em uma adição de um número racional e seu oposto, a soma é igual a zero.

Exemplos

A. 97,181 + (−97,181) = 0

Assim, 97,181 e −97,181 são números opostos.

B. $\left(-\frac{5}{94}\right) + \frac{5}{94} = 0$

Assim, $-\frac{5}{94}$ e $\frac{5}{94}$ são números opostos.

Propriedade do elemento neutro

Em uma adição em que uma das parcelas é igual a zero, a soma é igual a outra parcela.

Exemplos

A. $\frac{4}{9} + 0 = \frac{4}{9}$

B. 0 + 19,752 = 19,572

Para verificar se uma subtração está correta, podemos realizar uma adição, pois, ao adicionar o subtraendo com o resto (ou a diferença), devemos obter o minuendo. Essa é a **relação fundamental da subtração**.

Portanto, se:

minuendo − subtraendo = resto ou diferença

Então:

resto ou diferença + subtraendo = minuendo

A adição e a subtração são operações inversas.

Exemplos

A. Considere a subtração: 180,39 − 78,91 = 101,48

Pela relação fundamental da subtração, podemos conferir o resultado fazendo:

$$101{,}48 + 78{,}91 = 180{,}39$$

B. Considere a subtração: $\frac{18}{67} - \frac{37}{67} = -\frac{19}{67}$

Como a adição e a subtração são operações inversas entre si, podemos conferir o resultado fazendo:

$$-\frac{19}{67} + \frac{37}{67} = \frac{18}{67}$$

Adição algébrica

Uma expressão que contém as operações adição e subtração é chamada de **adição algébrica**.

Exemplos

A. $-10{,}3 + 3{,}6 + 8{,}1 - 6{,}9 = -6{,}7 + 8{,}1 - 6{,}9 = 1{,}4 - 6{,}9 = -5{,}5$

mmc(8, 5, 1) = 40

B. $\frac{1}{8} + \left(-\frac{3}{5}\right) + 1 = \frac{5}{40} + \left(-\frac{24}{40}\right) + \frac{40}{40} = \frac{5}{40} - \frac{24}{40} + \frac{40}{40} = -\frac{19}{40} + \frac{40}{40} = \frac{21}{40}$

Adição e subtração de números racionais com a calculadora

Também podemos utilizar a calculadora para realizar cálculos com os números racionais. Você sabe como utilizá-la?

Exemplos

A. Vamos efetuar −0,76 + 0,3 na calculadora.

- Apertamos as seguintes teclas na calculadora:

0 . 7 6 +/− + 0 . 3 =

- Aparecerá no visor: − 0.46

- Explore o uso da relação fundamental da subtração na conferência de transações financeiras. Comente com os estudantes que essa relação é comumente usada em conferência de troco, por exemplo.

ADIÇÃO ALGÉBRICA

- Se julgar necessário, retome a adição algébrica de números inteiros abordada no Capítulo 3 da Unidade 1 deste volume.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS COM A CALCULADORA

- A calculadora é uma ferramenta tecnológica que permite validar estratégias e resultados. Portanto, saber operá-la corretamente favorece a aprendizagem dos estudantes.
- Para o desenvolvimento deste tópico, é necessário que os estudantes manipulem a calculadora. É preciso ficar atento ao funcionamento de cada uma delas, pois algumas podem exigir o registro do sinal do número antes do registro dos algarismos dele. Nesse caso, os estudantes precisarão identificar como a calculadora opera. Para isso, eles podem realizar algumas operações mais simples com números inteiros para verificar como devem proceder com os registros das operações.
- Em algumas calculadoras, as teclas MC e MR correspondem à tecla MRC, usada para as duas finalidades apresentadas.
- Apresente também um exemplo de subtração de frações utilizando as teclas de memória. Por exemplo, para determinar o valor de $\frac{6}{5} - \frac{3}{4}$, podemos operar de três maneiras diferentes:

1. Digitamos na calculadora:

− 3 ÷ 4 =

Aparecerá no visor:

− 0.75

Digitamos na calculadora:

M+

Aparecerá no visor:

M 0.75

Digitamos na calculadora:

6 ÷ 5 =

Aparecerá no visor:

M 1.2

Digitamos na calculadora:

M+

Aparecerá no visor:

M 1.2

Digitamos na calculadora:

MR

Aparecerá no visor:

M 0.45

B. Agora, vamos efetuar a adição $\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$ na calculadora.

Como na maioria das calculadoras só é possível representar os números racionais na forma decimal, primeiro transformamos as frações em números decimais e, então, efetuamos as operações indicadas.

- Apertamos as seguintes teclas na calculadora:

3 ÷ 4 = M+ 1 ÷ 5 = + MR =

Essa tecla guarda na memória o número 0,75, resultado de 3 : 4.

Essa tecla recupera o número que estava na memória: 0,75.

- Aparece no visor: 0.95

5. $\frac{1}{63}$ **do cômodo.** **6.** $\frac{11}{12}$ **das figurinhas do álbum.**

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Determine o resultado de cada operação a seguir.

a) $\frac{81}{36} + \frac{12}{36}$ $\frac{93}{36}$

b) $\frac{178}{532} - \frac{69}{532}$ $\frac{109}{532}$

c) $\frac{74}{126} + \left(-\frac{27}{126}\right)$ $\frac{47}{126}$

d) $257{,}91 + 731{,}12$ **989,03**

e) $-3{,}21 + 6{,}5$ **3,29**

f) $17{,}2 - 6{,}17$ **11,03**

g) $-62{,}1 - 8{,}17$ **−70,27**

h) $-\frac{6}{5} + \frac{4}{3}$ $\frac{2}{15}$

i) $\frac{7}{3} - \frac{9}{2}$ $-\frac{13}{6}$

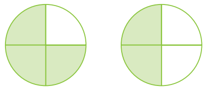
j) $-\frac{3}{7} - \frac{6}{5}$ $-\frac{57}{35}$

2. Escreva uma adição para representar as partes pintadas de verde nas figuras a seguir. Utilize números na forma decimal para escrever a adição.

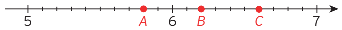
a)

Ilustrações: ID/BR

b)



3. Considere os pontos *A*, *B* e *C* representados a seguir.



Determine:

a) $|B| - |A|$ **0,4**

b) $|C| - |B|$ **0,4**

c) $|C| - |A|$ **0,8**

4. Registre no caderno a sequência de teclas da calculadora que devem ser utilizadas para efetuar: **Consulte as respostas neste manual.**

a) $32{,}4 - 12{,}35$

b) $\frac{3}{8} + \frac{1}{10}$

5. Na primeira hora em que um pintor de parede começou seu trabalho, ele pintou $\frac{5}{9}$ do cômodo de uma casa. Na segunda hora, pintou $\frac{3}{7}$ do mesmo cômodo. Que fração do cômodo falta ser pintada?

6. Dois amigos decidiram preencher juntos um álbum de figurinhas. Márcio trouxe $\frac{1}{6}$ das figurinhas do álbum e Cristina trouxe mais $\frac{3}{4}$ das figurinhas. Sabendo que não havia figurinhas repetidas, que fração das figurinhas os dois amigos juntaram?

7. A medida do comprimento do cabelo de Anita era igual a $\frac{2}{3}$ de um metro. Ela foi ao cabeleireiro e cortou $\frac{1}{6}$ de um metro. Qual é a medida do comprimento do cabelo de Anita agora? $\frac{1}{2}$ **metro.**

8. Maria e João estavam jogando um jogo de *videogame* cujo objetivo era pegar todo o tesouro. Maria pegou $\frac{1}{3}$ do tesouro, e João, $\frac{5}{9}$. Que fração do tesouro eles pegaram juntos? **Eles pegaram** $\frac{8}{9}$ **do tesouro.**

2. a) 0,625 + 0,25 = 0,875
b) 0,75 + 0,5 = 1,25

2. Digitamos na calculadora:

3 ÷ 4 =

Aparecerá no visor:

M 0.75

Digitamos na calculadora:

M+

Aparecerá no visor:

M 0.75

Digitamos na calculadora:

6 ÷ 5 =

Aparecerá no visor:

M 1.2

Digitamos na calculadora:

− MR =

Aparecerá no visor:

M 0.45

3. Digitamos na calculadora:

3 ÷ 4 =

Aparecerá no visor:

0.75

Digitamos na calculadora:

M−

Aparecerá no visor:

M 0.75

Digitamos na calculadora:

6 ÷ 5 =

Aparecerá no visor:

M 1.2

Digitamos na calculadora:

+ MR =

Aparecerá no visor:

M 0.45

RESPOSTA

4. a) 3 2 . 4 − 1 2 . 3 5 =

b) 3 ÷ 8 = M+ 1 ÷ 1 0 = + MR =

DE OLHO NA BASE

Aprender a usar a calculadora facilita a resolução de problemas cotidianos, validando resultados, o que favorece o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 5**.

Nas atividades propostas nesta página, os estudantes resolvem problemas que envolvem as operações adição e subtração com números racionais, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA12**.

MULTIPLICAÇÃO

- Verifique se os estudantes entenderam as situações e os cálculos apresentados nelas.
- A situação **1** apresenta o cálculo da multiplicação de um número natural por um número racional na forma decimal; a situação **2** apresenta o cálculo da multiplicação de um número natural por um número racional na forma fracionária; a situação **3** apresenta o cálculo da multiplicação de dois números racionais na forma fracionária; a situação **4** apresenta uma multiplicação de dois números racionais na forma decimal; a situação **5** apresenta uma multiplicação de um número racional na forma fracionária por um número racional na forma decimal.

Multiplicação

Temos dois casos de multiplicação de números racionais: multiplicação de números racionais com sinais iguais e multiplicação de números racionais com sinais diferentes.

Multiplicação de números racionais com sinais iguais

Vamos analisar as situações a seguir.

Danilo Souza/ID/BR

Situação 1

Pamela foi ao supermercado e comprou 4 frascos de iogurte que custam R$ 2,95 cada um. Quantos reais ela gastou nessa compra?

Podemos responder a essa questão efetuando a multiplicação 4 · 2,95. Observe como podemos calcular esse produto usando o algoritmo usual.

$$\begin{array}{rl} 2{,}9\,5 & \longleftarrow \text{duas casas decimais} \\ \times \qquad 4 & \\ \hline 1\,1{,}8\,0 & \longleftarrow \text{duas casas decimais} \end{array}$$

Portanto, Pamela gastou R$ 11,80 nessa compra.

Situação 2

José pretende fazer 3 bolos. A receita pede $\frac{1}{2}$ colher (de chá) de fermento para cada bolo. Quantas colheres de chá de fermento José usará no preparo dos 3 bolos?

Para responder à questão, podemos efetuar a multiplicação $3 \cdot \frac{1}{2}$. Veja.

$$3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$$

Portanto, José usará $\frac{3}{2}$ colheres de chá de fermento.

Situação 3

Mário fez uma torta e separou $\frac{1}{4}$ dela para dar aos primos. Como ele tem 3 primos, cada um recebeu $\frac{1}{3}$ desse pedaço que ele separou. Quanto da torta cada primo recebeu?

Para saber quanto da torta cada primo recebeu, basta calcular $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$, ou seja, $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$$

Logo, cada primo recebeu $\frac{1}{12}$ da torta.

Situação 4

Giovana vai fazer uma viagem de carro. Ela encheu o tanque de combustível antes de partir. Foram colocados 35,07 litros de gasolina. Sabendo que ela pagou R$ 6,19 por litro de gasolina, quantos reais Giovana gastou para encher o tanque do carro?

Para responder à questão, podemos efetuar a multiplicação 35,07 · 6,19. Observe como podemos calcular esse produto usando o algoritmo usual.


Danillo Souza/ID/BR

Podemos multiplicar cada um dos fatores por 100 para trabalhar com os números sem as casas decimais.

$$\begin{array}{r} 3\,5\,0\,7 \\ \times \quad 6\,1\,9 \\ \hline 3\,1\,5\,6\,3 \\ 3\,5\,0\,7\,0 \\ +\,2\,1\,0\,4\,2\,0\,0 \\ \hline 2\,1\,7\,0\,8\,3\,3 \end{array}$$

Como multiplicamos cada um dos fatores por 100, precisamos dividir o resultado por 10 000 (100 · 100 = 10 000). Então, temos:

$$2\,170\,833 : 10\,000 = 217{,}0833$$

Portanto, o resultado da multiplicação 35,07 · 6,19 é 217,0833.

No resultado de uma multiplicação com números decimais, colocamos a vírgula de modo que o número de casas decimais do produto seja igual à soma do número de casas decimais dos fatores da multiplicação.

$$35{,}\underbrace{07} \cdot 6{,}\underbrace{19} = 217{,}\underbrace{0833}$$

2 casas decimais + 2 casas decimais = 4 casas decimais

Como só utilizamos duas casas decimais quando usamos a unidade monetária real, arredondamos o número 217,0833 para que fique com duas casas decimais: 217,08.

Assim, Giovana gastou R$ 217,08 para encher o tanque do carro.

Situação 5

Tiago alugou um galpão de 250,8 m^2 de medida de área. Ele reservou $\frac{1}{4}$ da área desse galpão para montar um escritório. Qual será a medida da área do escritório, em metro quadrado?

Para responder a essa questão, podemos calcular o resultado da multiplicação $\frac{1}{4} \cdot 250{,}8$.

Para facilitar a multiplicação, vamos deixar os dois números escritos na mesma forma. Podemos fazer isso de duas maneiras.

1ª **maneira:** Escrevendo 250,8 como uma fração.

$$\frac{1}{4} \cdot 250{,}8 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\,508}{10} = \frac{1 \cdot 2\,508}{4 \cdot 10} = \frac{2\,508}{40} = 62{,}7$$

2ª **maneira:** Escrevendo $\frac{1}{4}$ como um número na forma decimal.

$$\frac{1}{4} \cdot 250{,}8 = 0{,}25 \cdot 250{,}8 = 62{,}7$$

Portanto, a medida da área do escritório será 62,7 m^2.

- Comente com os estudantes que, na situação **4**, também é possível efetuar o cálculo usando o algoritmo usual com os dois números ainda na forma decimal, analisando ao final dos cálculos a quantidade de casas decimais do produto.
- Organize os estudantes em pequenos grupos e proponha uma discussão sobre as situações apresentadas no Livro do Estudante. Na sequência, abra um debate envolvendo toda a turma, explorando as diferentes maneiras de resolução dos problemas.

DE OLHO NA BASE

As situações apresentadas colaboram para que os estudantes compreendam e utilizem a multiplicação de números racionais, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA11**.

- Retome com os estudantes as propriedades da multiplicação, mostrando alguns exemplos com números racionais. Enuncie as propriedades e dê alguns exemplos.

Propriedade comutativa da multiplicação

Em uma multiplicação de números racionais, a ordem dos fatores não altera o produto.

Exemplos

A. $\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = -\left(\frac{1\cdot 2}{4\cdot 5}\right) = -\frac{2}{20} = -\frac{1}{10}$

$\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{4} = -\left(\frac{2\cdot 1}{5\cdot 4}\right) = -\frac{2}{20} = -\frac{1}{10}$

Assim:

$\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{4}$

B. $0{,}8\cdot 9{,}6 = 7{,}68$

$9{,}6\cdot 0{,}8 = 7{,}68$

Assim:

$0{,}8\cdot 9{,}6 = 9{,}6\cdot 0{,}8$

Propriedade associativa da multiplicação

Em uma multiplicação de três ou mais números racionais, podemos associar os fatores de diferentes maneiras, sem alterar o produto.

Exemplos

A. $[0{,}7\cdot(-0{,}2)]\cdot 3{,}1 =$

$= (-0{,}14)\cdot 3{,}1 = -0{,}434$

$0{,}7\cdot[(-0{,}2)\cdot 3{,}1] =$

$= 0{,}7\cdot(-0{,}62) = -0{,}434$

Assim:

$[0{,}7\cdot(-0{,}2)]\cdot 3{,}1 = 0{,}7\cdot[(-0{,}2)\cdot 3{,}1]$

B. $\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{11}\right) = \frac{2}{7}\cdot\left(\frac{3\cdot 2}{9\cdot 11}\right) = \frac{2}{7}\cdot\frac{6}{99} =$

$= \frac{2\cdot 6}{7\cdot 99} = \frac{12}{693}$

$\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{9}\right)\cdot\frac{2}{11} = \left(\frac{2\cdot 3}{7\cdot 9}\right)\cdot\frac{2}{11} =$

$= \frac{6}{63}\cdot\frac{2}{11} = \frac{6\cdot 2}{63\cdot 11} = \frac{12}{693}$

Assim:

$\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{11}\right) = \left(\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{9}\right)\cdot\frac{2}{11}$

Na multiplicação de dois números racionais com sinais iguais, multiplicamos os módulos dos números, e o sinal do produto é positivo.

Exemplos

A. Vamos efetuar $4{,}91\cdot 5{,}6$.

Para efetuar o cálculo com o algoritmo usual, podemos multiplicar os valores dos módulos dos números e, depois, colocar o sinal positivo no produto.

$|4{,}91| = 4{,}91$ e $|5{,}6| = 5{,}6$

$$\begin{array}{r l} 4{,}\,9\,1 & \leftarrow \text{2 casas decimais} \\ \times\ \ 5{,}\,6 & \leftarrow \text{1 casa decimal} \\ \hline 2\,9\,4\,6 & \\ +\,2\,4\,5\,5\,0 & \\ \hline 2\,7{,}\,4\,9\,6 & \leftarrow \text{3 casas decimais} \end{array}$$

Logo, $4{,}91\cdot 5{,}6 = 27{,}496$.

B. Vamos efetuar $\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{10}$.

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{10} = +\left(\left|\frac{4}{7}\right|\cdot\left|\frac{6}{10}\right|\right) = +\left(\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{10}\right) = +\left(\frac{4\cdot 6}{7\cdot 10}\right) = +\frac{24}{70} = +\frac{12}{35}$$

Logo, $\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{10} = \frac{12}{35}$.

C. Vamos efetuar $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$.

$$\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right) = +\left(\left|-\frac{3}{5}\right|\cdot\left|-\frac{7}{8}\right|\right) = +\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}\right) = +\left(\frac{3\cdot 7}{5\cdot 8}\right) = +\frac{21}{40}$$

Logo, $\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{21}{40}$.

D. Vamos efetuar $(-23{,}1)\cdot(-0{,}45)$.

$|-23{,}1| = 23{,}1$ e $|-0{,}45| = 0{,}45$

$$\begin{array}{r l} 2\,3{,}\,1 & \leftarrow \text{uma casa decimal} \\ \times\ \ 0{,}\,4\,5 & \leftarrow \text{duas casas decimais} \\ \hline 1\,1\,5\,5 & \\ +\,9\,2\,4\,0 & \\ \hline 1\,0{,}\,3\,9\,5 & \leftarrow \text{três casas decimais} \end{array}$$

Logo, $(-23{,}1)\cdot(-0{,}45) = 10{,}395$.

Multiplicação de números racionais com sinais diferentes

Por 4 meses será debitado da conta-corrente de Gustavo um valor de R$ 45,80. Qual será o valor total a ser debitado da conta de Gustavo?

Por se tratar de um valor que está sendo retirado da conta, no extrato bancário, ele costuma ser representado por um número negativo: −R$ 45,80. Como serão 4 meses, podemos calcular o valor total efetuando $4\cdot(-45{,}80)$.

Como a multiplicação é uma adição de parcelas iguais, podemos fazer:

$$4 \cdot (-45{,}80) = (-45{,}80) + (-45{,}80) + (-45{,}80) + (-45{,}80) = -183{,}20$$

Portanto, o valor total a ser debitado da conta-corrente de Gustavo será R$ 183,20, e no extrato bancário aparecerá −R$ 183,20.

> Na multiplicação de dois números racionais com sinais diferentes, multiplicamos os módulos dos números, e o sinal do produto é positivo.

Exemplos

A. Vamos efetuar $5{,}216 \cdot (-7{,}1)$.

Para efetuar o cálculo com o algoritmo usual, podemos multiplicar os valores dos módulos dos números e, depois, colocar o sinal negativo no produto.

$$|5{,}216| = 5{,}216 \quad \text{e} \quad |-7{,}1| = 7{,}1$$

$$\begin{array}{r l} 5{,}216 & \leftarrow \text{três casas decimais}\\ \times \quad 7{,}1 & \leftarrow \text{uma casa decimal}\\ \hline 5216 & \\ +\,365120 & \\ \hline 37{,}0336 & \leftarrow \text{quatro casas decimais} \end{array}$$

Logo, $5{,}216 \cdot (-7{,}1) = -37{,}0336$.

B. Vamos efetuar $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(+\frac{7}{3}\right)$.

$$\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(+\frac{7}{3}\right) = -\left(\left|-\frac{2}{5}\right| \cdot \left|+\frac{7}{3}\right|\right) = -\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}\right) = -\left(\frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3}\right) = -\frac{14}{15}$$

Logo, $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(+\frac{7}{3}\right) = -\frac{14}{15}$.

Observação

As propriedades da multiplicação de números inteiros também são válidas para a multiplicação de números racionais.

Números inversos

Dois números racionais diferentes de zero são **inversos** um do outro quando o produto deles é 1.

Exemplos

A. $\frac{5}{7}$ e $\frac{7}{5}$ são números inversos, pois: $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{5 \cdot 7}{7 \cdot 5} = \frac{35}{35} = 1$

B. $-\frac{1}{13}$ e -13 são números inversos, pois:

$$\left(-\frac{1}{13}\right) \cdot (-13) = \left(-\frac{1}{13}\right) \cdot \left(\frac{-13}{1}\right) = \frac{(-1) \cdot (-13)}{13 \cdot 1} = \frac{13}{13} = 1$$

Observe que, para obter o número inverso de uma fração, basta trocarmos o numerador com o denominador e que o único número racional que não tem inverso é o zero.

Propriedade do elemento neutro da multiplicação

Em uma multiplicação de um número racional por 1, o produto é o próprio número racional.

Exemplos

A. $\frac{8}{15} \cdot 1 = \frac{8}{15}$

B. $1 \cdot 6{,}19 = 6{,}19$

Propriedade distributiva da multiplicação

Em uma multiplicação de um número racional por uma adição algébrica de duas ou mais parcelas, multiplicamos cada parcela por esse número e adicionamos os produtos obtidos.

Exemplos

A. $\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 6}\right) + \left(\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6}\right) =$

$= \frac{5}{12} + \frac{10}{18} = \frac{90}{216} + \frac{120}{216} = \frac{210}{216}$

B. $(43{,}4 + 18{,}3) \cdot 25{,}1 =$

$= (43{,}4 \cdot 25{,}1) + (18{,}3 \cdot 25{,}1) =$

$= 1\,089{,}34 + 459{,}33 = 1\,548{,}67$

DIVISÃO

- Se necessário, reproduza os algoritmos da divisão na lousa e explique o passo a passo para os estudantes, de modo que compreendam o uso da vírgula. A indicação das ordens dos algarismos no algoritmo usual pode auxiliar nesse entendimento.
- Observe que a situação **1** apresenta uma divisão de número racional na forma decimal por número natural; na situação **2**, há uma divisão de número natural por número racional na forma decimal; a situação **3**, por sua vez, apresenta uma divisão de número racional na forma decimal por um número racional na forma decimal.

DE OLHO NA BASE

As situações apresentadas colaboram para que os estudantes compreendam e utilizem a divisão de números racionais, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA11**.

Divisão

Vamos ver a seguir dois casos de divisão com números racionais: divisão de números racionais com sinais iguais e divisão de números racionais com sinais diferentes.

Divisão de números racionais com sinais iguais

Acompanhe as situações a seguir.


Danillo Souza/ID/BR

Situação 1

Davi é costureiro. Ele tem 10,8 m de tecido para atender a uma encomenda. Ele dividiu o comprimento desse tecido em quatro pedaços de mesmo tamanho para poder começar o trabalho. Cada pedaço ficou com quantos metros de medida de comprimento?

Para responder a essa questão, podemos calcular 10,8 : 4. Observe como podemos calcular o resultado dessa divisão de duas maneiras diferentes.

1ª maneira: Usando o algoritmo usual.

```
  D U d
  1 0, 8 |4
−   8     2, 7
     2 8  U d
   − 2 8
       0
```

2ª maneira: Transformando os números em frações.

$$10{,}8 : 4 = \frac{108}{10} \quad \text{e} \quad 4 = \frac{4}{1}$$

Existe um método prático para dividir duas frações: basta multiplicar uma fração pelo inverso da outra. Assim, temos:

$$10{,}8 : 4 = \frac{108}{10} : \frac{4}{1} = \frac{108}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{108 \cdot 1}{10 \cdot 4} = \frac{108}{40} = 2{,}7$$

Portanto, cada pedaço de tecido ficou com 2,7 m de medida de comprimento.

Situação 2

Rodrigo comprou 6 kg de carne em uma promoção. Ele vai dividir essa quantidade de carne em pacotes menores, de 1,5 kg, para congelá-la. Quantos pacotes Rodrigo usará para embalar essa quantidade de carne?

Podemos responder a essa pergunta efetuando a divisão 6 : 1,5. Observe como fazer esse cálculo transformando os números em frações.

$$6 : 1{,}5 = \frac{6}{1} : \frac{15}{10} = \frac{6}{1} \cdot \frac{10}{15} = \frac{6 \cdot 10}{1 \cdot 15} = \frac{60}{15} = 4$$

Portanto, Rodrigo usará 4 pacotes para embalar a carne.

Situação 3

Fernanda foi jogar boliche com os amigos. Eles jogaram por 2 horas e meia e pagaram R$ 237,50 pelo aluguel da pista. Qual é o valor do aluguel de uma hora nessa pista?

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Elabore atividades com situações que envolvam valores monetários, pois elas podem ajudar os estudantes a compreender tanto as situações já abordadas quanto a divisão com números racionais. Crie, por exemplo, uma tarefa em que cada estudante possa trazer preços de alimentos ou de produtos de um supermercado. Depois, a turma deve se organizar em grupos e cada grupo deve elaborar uma lista de compras que contenha produtos que eles já saibam os preços. Cada grupo deverá calcular o valor total da lista elaborada e dividir esse valor entre os integrantes do grupo.

Para responder a essa questão, podemos calcular 237,50 **:** 2,5. Observe como podemos calcular essa divisão de duas maneiras diferentes.

1ª maneira: Usando o algoritmo usual.

Para fazer o cálculo com o algoritmo usual, podemos multiplicar o dividendo e o divisor por 10 para suprimir a vírgula.

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] 237{,}5 \arrow[d, "\cdot 10"'] & : & 2{,}5 \arrow[d, "\cdot 10"] \\ 2\,375 & : & 25 \end{tikzcd}$$

Agora, efetuamos a divisão com o algoritmo usual.

$$\begin{array}{rl} 2\,3\,7\,5 & \underline{|2\,5} \\ \underline{-\,2\,2\,5} & 9\,5 \\ 0\,1\,2\,5 & \\ \underline{-\,1\,2\,5} & \\ 0 & \end{array}$$

2ª maneira: Transformando os números em frações.

$$237{,}5 = \frac{2\,375}{10} \quad \text{e} \quad 2{,}5 = \frac{25}{10}$$

$$237{,}5 : 2{,}5 = \frac{2\,375}{10} : \frac{25}{10} = \frac{2\,375}{10} \cdot \frac{10}{25} = \frac{2\,375 \cdot 10}{10 \cdot 25} = \frac{23\,750}{250} = 95$$

Portanto, o valor de uma hora de aluguel nessa pista de boliche é R$ 95,00.

Para dividir dois números racionais com sinais iguais, em que o divisor é diferente de zero, podemos dividir os módulos desses números. O sinal do resultado é sempre positivo.

Exemplos

A. $\frac{2}{5} : \frac{7}{10} = +\left(\left|\frac{2}{5}\right| : \left|\frac{7}{10}\right|\right) = +\left(\frac{2}{5} : \frac{7}{10}\right) = +\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{7}\right) = +\left(\frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 7}\right) = +\frac{20}{35} =$

$= +\frac{4}{7}$

B. $2{,}7 : \frac{3}{7} = \frac{27}{10} : \frac{3}{7} = +\left(\left|\frac{27}{10}\right| : \left|\frac{3}{7}\right|\right) = +\left(\frac{27}{10} : \frac{3}{7}\right) = +\left(\frac{27}{10} \cdot \frac{7}{3}\right) = +\left(\frac{27 \cdot 7}{10 \cdot 3}\right) =$

$= +\frac{189}{30} = +\frac{63}{10}$

C. $(-3{,}57) : (-0{,}7) = +\left(\left|-\frac{357}{100}\right| : \left|-\frac{7}{10}\right|\right) = +\left(\frac{357}{100} : \frac{7}{10}\right) = +\left(\frac{357}{100} \cdot \frac{10}{7}\right) =$

$= +\left(\frac{357 \cdot 10}{100 \cdot 7}\right) = +\left(\frac{3\,570}{700}\right) = +\frac{357}{70}$

D. $\left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{7}{8}\right) = +\left(\left|-\frac{3}{5}\right| : \left|-\frac{7}{8}\right|\right) = +\left(\frac{3}{5} : \frac{7}{8}\right) = +\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{8}{7}\right) = +\left(\frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 7}\right) = +\frac{24}{35}$

- Depois de trabalhar todas as situações com os estudantes, se julgar oportuno, peça a eles que realizem o cálculo da divisão da situação **1** usando o algoritmo usual, mas suprimindo a vírgula, como na situação **3**. Espera-se que eles calculem o resultado da divisão 108 : 40 e verifiquem que o quociente é o mesmo.

- As situações **1** e **2** apresentam uma divisão de número racional negativo na forma decimal por número natural.

DE OLHO NA BASE

As situações apresentadas colaboram para que os estudantes compreendam e utilizem a divisão de números racionais, favorencendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA11**.

Divisão de números racionais com sinais diferentes

Vamos analisar as situações a seguir.

Situação 1

Podemos efetuar a divisão −7,5 : 3 transformando os números em frações.

$$-7{,}5 : 3 = -\frac{75}{10} : \frac{3}{1} = -\frac{75}{10} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{75 \cdot 1}{10 \cdot 3} = -\frac{75}{30} = -2{,}5$$

Assim, −7,5 : 3 = −2,5.

Situação 2

Adolfo vai retirar, no total, R$ 275,25 de sua conta-corrente fazendo 5 retiradas de mesmo valor para atingir a quantia que precisa. Qual será o valor de cada retirada?

Como se trata de uma retirada, esse valor pode ser representado por −R$ 275,25 e, assim, podemos efetuar a divisão −275,25 : 5. Observe como fazer essa divisão transformando os números em frações.

$$-275{,}25 : 5 = -\frac{27\,525}{100} : \frac{5}{1} = -\frac{27\,525}{100} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= -\frac{27\,525 \cdot 1}{100 \cdot 5} = -\frac{27\,525}{500} = -55{,}05$$

Logo, o valor de cada retirada será de R$ 55,05, que pode ser representado por −R$ 55,05.

Para dividir dois números racionais com sinais diferentes, em que o divisor é um número diferente de zero, podemos dividir os módulos desses números. O sinal do resultado é sempre negativo.

Exemplos

A. $\frac{3}{16} : \left(-\frac{3}{12}\right) = -\left(\left|\frac{3}{16}\right| : \left|-\frac{3}{12}\right|\right) = -\left(\frac{3}{16} : \frac{3}{12}\right) = -\left(\frac{3}{16} \cdot \frac{12}{3}\right) = -\left(\frac{3 \cdot 12}{16 \cdot 3}\right) =$

$= -\left(\frac{36}{48}\right) = -0{,}75$

B. $\frac{28}{5} : (-1{,}4) = \frac{28}{5} : \left(-\frac{14}{10}\right) = -\left(\left|\frac{28}{5}\right| : \left|-\frac{14}{10}\right|\right) = -\left(\frac{28}{5} : \frac{14}{10}\right) =$

$= -\left(\frac{28}{5} \cdot \frac{10}{14}\right) = -\left(\frac{28 \cdot 10}{5 \cdot 14}\right) = -\left(\frac{280}{70}\right) = -4$

C. $(-6) : 2{,}4 = \left(-\frac{6}{1}\right) : \frac{24}{10} = -\left(\left|-\frac{6}{1}\right| : \left|\frac{24}{10}\right|\right) = -\left(\frac{6}{1} : \frac{24}{10}\right) = -\left(\frac{6}{1} \cdot \frac{10}{24}\right) =$

$= -\left(\frac{6 \cdot 10}{1 \cdot 24}\right) = -\left(\frac{60}{24}\right) = -2{,}5$

D. $19{,}08 : \left(-\frac{53}{10}\right) = \frac{1\,908}{100} : \left(-\frac{53}{10}\right) = -\left(\left|\frac{1\,908}{100}\right| : \left|-\frac{53}{10}\right|\right) = -\left(\frac{1\,908}{100} : \frac{53}{10}\right) =$

$= -\left(\frac{1\,908}{100} \cdot \frac{10}{53}\right) = -\left(\frac{1\,908 \cdot 10}{100 \cdot 53}\right) = -\left(\frac{19\,080}{5\,300}\right) = -(3{,}6) = -3{,}6$

OUTRAS FONTES

Gitirana, V. *et al.* *Repensando multiplicação e divisão*: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: Proem, 2014.

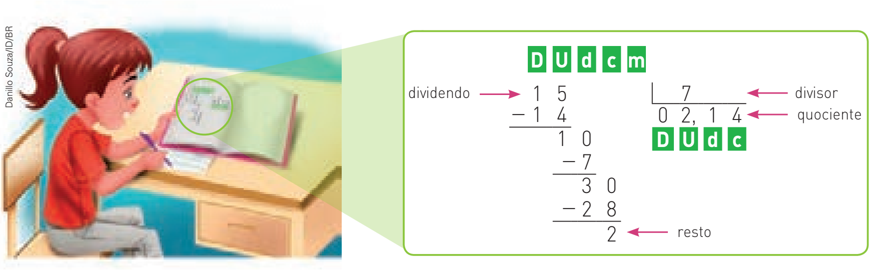
Esse livro apresenta uma discussão do ensino e da aprendizagem da multiplicação e da divisão a partir da Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud, em particular do campo multiplicativo e da contribuição dessa teoria para as aulas de Matemática.

Tahan, M. *O homem que calculava*. 55. ed. São Paulo: Record, 2001.

Esse livro conta a história de Beremiz Samir, que, em suas viagens pela Arábia, se depara com problemas de cálculo aparentemente insolúveis, mas consegue resolvê-los. Vários deles envolvem operações com números racionais. São divertidos para se discutir em sala de aula.

Relação fundamental da divisão

Fátima calculou o resultado da divisão 15 : 7 usando o algoritmo usual. Observe.


Danillo Souza/ID/BR

Assim, ao dividir 15 por 7 obtemos quociente 2,14 e resto 0,02.

Para verificar se a divisão está correta, podemos organizar os termos da divisão de outra maneira. Veja.

$$\overset{\overset{\text{dividendo}}{\downarrow}}{15} = \underset{\underset{\text{quociente}}{\uparrow}}{2{,}14} \cdot \overset{\overset{\text{divisor}}{\downarrow}}{7} + \underset{\underset{\text{resto}}{\uparrow}}{0{,}02}$$

Portanto:

dividendo = quociente · divisor + resto

Essa é a **relação fundamental da divisão**.

A multiplicação e a divisão são operações inversas.

Exemplos

A. Considere a divisão:

$$52{,}125 : 3 = 17{,}375$$

Pela relação fundamental da divisão, podemos conferir o resultado fazendo:

$$17{,}375 \cdot 3 = 52{,}125$$

B. Considere a divisão:

$$-87 : 6 = -14{,}5$$

Pela relação fundamental da divisão, podemos conferir o resultado fazendo:

$$(-14{,}5) \cdot 6 = -87$$

C. Ao dividir 843,58 por 6, obtive quociente 140,59 e resto 0,04.

Como a multiplicação é a operação inversa da divisão, podemos conferir o resultado fazendo:

$$140{,}59 \cdot 6 + 0{,}04 = 843{,}58$$

- Se necessário, relembre os estudantes que a relação fundamental da divisão também pode ser escrita como:

dividendo = divisor · quociente + resto

Comente que, nas divisões exatas, como o resto é zero, efetuamos somente a multiplicação do divisor pelo quociente para realizar a verificação.

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS RACIONAIS NA CALCULADORA

- Assim como na adição e na subtração de números racionais na calculadora, ao solicitar aos estudantes que tragam calculadoras para a sala de aula nessa ocasião, é importante verificar se elas funcionam da mesma maneira apresentada no Livro do Estudante. Há algumas calculadoras que podem não registrar o sinal negativo no início de uma operação; nesse caso, oriente os estudantes a identificar o procedimento que leva ao cálculo correto.

Multiplicação e divisão de números racionais na calculadora

Veja como podemos realizar algumas multiplicações e divisões de números racionais usando a calculadora.

Exemplos

A. Veja como efetuar 0,75 · 2,4 na calculadora.

- Apertamos as seguintes teclas na calculadora:

0 . 7 5 × 2 . 4 =

- Aparecerá no visor:

1.8

B. Acompanhe como efetuar (−16,5) : 6,6 na calculadora.

- Apertamos as seguintes teclas na calculadora:

1 6 . 5 +/– ÷ 6 . 6 =

- Aparecerá no visor:

– 2.5

C. Acompanhe como efetuar (−2,3) · (−8,4) na calculadora.

- Apertamos as seguintes teclas na calculadora:

2 . 3 +/– × 8 . 4 +/– =

- Aparecerá no visor:

19.32

D. Acompanhe como efetuar $-\frac{7}{8} : (-3{,}5)$ na calculadora.

Assim como vimos na adição e na subtração de números racionais com a calculadora, primeiro transformamos as frações em números decimais e, então, efetuamos as operações indicadas.

- Apertamos as seguintes teclas na calculadora:

7 +/– ÷ 8 = ÷ 3 . 5 +/– =

- Aparecerá no visor:

0,25

E. Acompanhe como efetuar $-\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5}$ na calculadora.

- Apertamos as seguintes teclas na calculadora:

3 +/– ÷ 4 = M+ 7 ÷ 5 = × MR =

- Aparecerá no visor:

– 1,05

OUTRAS FONTES

Guinther, A. *Análise do desempenho de alunos do Ensino Fundamental em jogos matemáticos*: reflexões sobre o uso da calculadora nas aulas de Matemática. 2009. 177 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Essa dissertação apresenta evidências de que o uso de calculadora em sala de aula pode colaborar para que os estudantes compreendam os erros que cometem ao trabalhar com operações envolvendo números racionais.

Selva, A. C. V. S; Borba, R. E. S. R. *O uso da calculadora nos anos iniciais do Ensino Fundamental*. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

Nessa obra, as autoras apresentam a contribuição que a calculadora pode dar ao aprendizado de conceitos matemáticos. São discutidos resultados de pesquisa a respeito do assunto. Mesmo que as atividades tenham sido trabalhadas nos anos iniciais, elas também são adequadas para o 6º e o 7º anos do Ensino Fundamental.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

12. O inverso de $-\frac{7}{6}$.

9. Determine o produto em cada item.

a) $\frac{7}{15} \cdot \left(-\frac{9}{21}\right)$ **$-\frac{1}{5}$**

b) $\left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$ **$\frac{15}{56}$**

c) $(-3{,}21) \cdot 6{,}5$ **$-20{,}865$**

d) $\frac{27}{10} \cdot (-3{,}1)$ **$-8{,}37$**

e) $0{,}75 \cdot 3{,}24$ **$2{,}43$**

f) $(-6{,}1) \cdot 6{,}5$ **$-39{,}65$**

10. Em um restaurante, o preço da comida é R$ 49,00 por quilograma. Quanto custa um prato com 0,450 kg de comida nesse restaurante? **R$ 22,05**

11. Considere este exemplo de números inversos e faça o que se pede.

$$-\frac{7}{13} \text{ e } -\frac{13}{7}$$

a) Que relação existe entre o numerador de uma fração e o denominador da outra?

b) Escreva os números 1,6 e 0,625 na forma de fração e simplifique-os. A relação observada no item anterior também é válida para esses números?

c) Com base na relação constatada, escreva outros pares de números racionais inversos e mostre que seu produto é igual a 1. **Resposta pessoal.**

12. Qual número está mais próximo do zero: o inverso de $\frac{4}{5}$ ou o inverso de $-\frac{7}{6}$?

13. Compare os números a seguir com os respectivos inversos e responda: Qual deles é maior? **Consulte as respostas neste manual.**

a) $\frac{5}{9}$

b) $-0{,}8$

c) $-\frac{4}{3}$

d) 6,4

14. Determine o valor de cada quociente.

a) $\left(-\frac{6}{5}\right) : \frac{4}{3}$ **$-\frac{9}{10}$**

b) $\left(-5\frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{1}{8}\right)$ **42**

c) $(-0{,}25) : (-0{,}75)$ **$\frac{1}{3}$**

d) $\left(3\frac{3}{4}\right) : (-0{,}25)$ **-15**

e) $3 : (-1{,}25)$ **$-2{,}4$**

f) $\frac{27}{10} : (-3{,}1)$ **$-\frac{27}{31}$**

15. Copie e complete o quadro a seguir no caderno, determinando o produto dos números da primeira coluna pelos números da primeira linha. **Consulte a resposta neste manual.**

×	1,25	3,7	−6,2	$-\frac{3}{4}$
−2,63	▥	▥	▥	▥
−11	▥	▥	▥	▥
6,893	▥	▥	▥	▥
$\frac{17}{10}$	▥	▥	▥	▥
$-1\frac{1}{5}$	▥	▥	▥	▥

16. Carlos ganhou R$ 72,90 e quer dividir essa quantia entre seus dois filhos, de modo que um filho receba $\frac{2}{3}$ do valor e o outro receba o restante. Quanto cada filho de Carlos deve receber? **Um filho deve receber R$ 48,60, e o outro filho, R$ 24,30.**

17. Copie os quadros a seguir no caderno e complete-os com as informações que estão faltando. **Consulte as respostas neste manual.**

a	−2,6	▥	▥
b	3,8	0,5	7,6
$a \cdot b$	▥	0,42	−14,06

m	−2,6	▥	−7,535
n	2,5	0,5	▥
$m : n$	▥	0,42	−13,7

18. Escreva qual é o número que aparecerá no visor de uma calculadora se apertarmos as teclas a seguir. Depois, confira os resultados usando uma calculadora.

a) 8 . 9 × 0 . 5 +/− = **−4,45**

b) 4 +/− ÷ 5 × 1 0 +/− = **8**

19. Elabore uma multiplicação e uma divisão com números racionais. Em seguida, peça a um colega que resolva, com o auxílio de uma calculadora, as operações que você criou e você resolve as que ele criou. **Resposta pessoal.**

11. a) O numerador de uma fração é o denominador da outra.

b) $1{,}6 = \frac{8}{5}$; $0{,}625 = \frac{5}{8}$; sim.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nesta seção colaboram para que os estudantes compreendam e utilizem a multiplicação e a divisão de números racionais e a relação entre essas operações e, também, para que resolvam e elaborem problemas referentes a elas, desenvolvendo as habilidades **EF07MA11** e **EF07MA12**.

Além disso, a atividade **16** trabalha com a associação entre razão e fração na resolução de problemas, desenvolvendo a habilidade **EF07MA09**.

RESPOSTAS

13. a) O inverso de $\frac{5}{9}$ é $\frac{9}{5}$. O maior desses números é $\frac{9}{5}$.

b) O inverso de $-0{,}8$ é $-\frac{10}{8}$. O maior desses números é $-0{,}8$.

c) O inverso de $-\frac{4}{3}$ é $-\frac{3}{4}$. O maior desses números é $-\frac{3}{4}$.

d) O inverso de 6,4 é $\frac{10}{64}$. O maior desses números é 6,4.

15.

×	1,25	3,7	−6,2	$-\frac{3}{4}$
−2,63	−3,2875	−9,731	16,306	$\frac{789}{400} = 1\frac{389}{400}$
−11	−13,75	−40,7	68,2	$\frac{33}{4} = 8\frac{1}{4}$
6,893	8,61625	25,5041	−42,7366	$-\frac{20\,679}{4\,000} = -5\frac{679}{4\,000}$
$\frac{17}{10}$	2,125	6,29	−10,54	$-\frac{51}{40} = -1\frac{11}{40}$
$-1\frac{1}{5}$	−1,5	−4,44	7,44	$\frac{9}{10}$

17.

a	−2,6	0,84	−1,85
b	3,8	0,5	7,6
$a \cdot b$	−9,88	0,42	−14,06

m	−2,6	0,21	−7,535
n	2,5	0,5	0,55
$m : n$	−1,04	0,42	−13,7

EXPRESSÕES NUMÉRICAS ENVOLVENDO NÚMEROS RACIONAIS

- Retome com os estudantes o que eles sabem sobre expressões numéricas envolvendo números naturais e números inteiros. Discuta com eles situações que podem ser relacionadas a expressões que envolvem números racionais. Ao trabalhá-las, procure verificar se compreenderam que os procedimentos para resolver tais expressões são os mesmos utilizados quando efetuamos operações envolvendo números naturais e números inteiros.

Expressões numéricas envolvendo números racionais

Para calcular o valor de expressões numéricas com números racionais, utilizamos os mesmos procedimentos adotados para calcular o valor de expressões com números naturais ou inteiros.

- Continuam válidas as propriedades das operações.
- Devemos respeitar a seguinte ordem para efetuar as operações: primeiro, multiplicações e divisões e, por último, adições e subtrações.
- Efetuamos primeiro as operações indicadas entre parênteses, depois as indicadas entre colchetes e, por último, as que estão entre chaves.

Exemplo

$$4{,}2 + 2{,}8 \cdot 3{,}1 - \left\{\left[\left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{2}\right) : 2\right] : 2\right\} =$$

$$= 4{,}2 + 8{,}68 - \left\{\left[\left(-\frac{5}{8} + \frac{4}{8}\right) : 2\right] : 2\right\} =$$

$$= 12{,}88 - \left\{\left[\left(-\frac{1}{8}\right) : 2\right] : 2\right\} =$$

$$= 12{,}88 - \left\{\left[\left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{2}\right] : 2\right\} =$$

$$= 12{,}88 - \left\{-\frac{1}{16} : 2\right\} =$$

$$= 12{,}88 - \left\{-\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2}\right\} =$$

$$= 12{,}88 - \left\{-\frac{1}{32}\right\} =$$

$$= 12{,}88 + \frac{1}{32} =$$

$$= 12{,}88 + 0{,}03125 = 12{,}91125$$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

20. Resolva as seguintes expressões numéricas.

a) $2 - 8 \cdot \left(-\frac{3}{8} - \frac{5}{16} + \frac{6}{4}\right)$ **$-\frac{9}{2}$**

b) $\left[\left(3\frac{1}{2} + \frac{5}{4}\right) : \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{2} + 5{,}8 \cdot 1{,}4$ **27,62**

c) $\left\{\left[2 + \left(\frac{1}{4} : 8\right)\right] : 2\right\} \cdot 3 - 5{,}3$ **−2,253125**

d) $\dfrac{3}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3}}}$ **$\frac{12}{7}$**

21. Represente a expressão numérica que corresponde a cada sentença a seguir e resolva-a.

a) A soma de um meio positivo com um terço negativo.

b) O quádruplo da soma de um sexto positivo com cinco doze avos negativos.

c) A soma do inverso de dois quintos positivos com um quarto negativo.

d) A soma do dobro do inverso de três quartos com seis décimos.

21. a) $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right); \frac{1}{6}$

b) $4 \cdot \left[\frac{1}{6} + \left(-\frac{5}{12}\right)\right]; -1$

c) $\frac{5}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right); \frac{9}{4}$

d) $2 \cdot \frac{4}{3} + \frac{6}{10}; \frac{49}{15}$

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. a) Resposta pessoal.

1. Veja na tabela a seguir o controle de temperatura feito por um fazendeiro e, depois, responda às questões.

Temperatura ao meio-dia na Fazenda Dourada (MT)

Dia no mês	Dia da semana	Temperatura
1º mar.	domingo	37,8 °C
2 mar.	segunda-feira	36,7 °C
3 mar.	terça-feira	35,9 °C
4 mar.	quarta-feira	$\frac{81}{2}$ °C
5 mar.	quinta-feira	40,3 °C
6 mar.	sexta-feira	39,8 °C
7 mar.	sábado	38,8 °C

Dados obtidos pelo fazendeiro.

a) Na quarta-feira, a temperatura foi representada de modo diferente. Essa representação é prática? Comente com um colega.

b) Em qual dia da semana foi registrada a maior temperatura? **Na quarta-feira.**

c) Em qual dia da semana foi registrada a menor temperatura? **Na terça-feira.**

2. Dê exemplos: **Consulte as respostas neste manual.**

a) das propriedades comutativa e do elemento neutro em relação à adição utilizando números racionais na forma fracionária;

b) das propriedades associativa e distributiva em relação à multiplicação utilizando números racionais na forma decimal.

3. Romeu juntou dinheiro para pagar uma dívida de R$ 83,87 e a conta de energia elétrica no valor de R$ 112,98. Após realizar esses pagamentos, porém, seu saldo bancário ficou negativo em R$ 9,10.

a) Quantos reais Romeu tinha antes de fazer esses pagamentos? **R$ 187,75**

b) Compare o resultado que você encontrou com o de um colega. Vocês chegaram ao mesmo valor? Quais estratégias utilizaram para chegar a esse resultado? **Respostas pessoais.**

4. Crie um problema cuja resolução envolva operações com números racionais e dê para um colega resolver. **Resposta pessoal.**

5. 15 enfeites; $54 - \left(\frac{54}{2} + 12\right)$.

5. Leonardo confeccionou 54 enfeites para vender. Luana comprou metade dos enfeites mais 12, e Renata comprou os que sobraram. Quantos enfeites Renata comprou? Escreva uma expressão numérica que represente esse problema e resolva-a.

6. Responda às questões a seguir.

a) Que número devemos multiplicar por 8 para obter 5? $\frac{5}{8}$

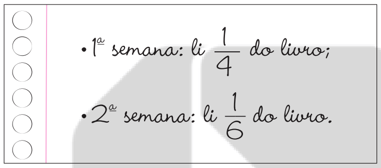
b) Que número devemos multiplicar por 3 para obter 7? $\frac{7}{3}$

c) Que número devemos multiplicar por 6 para obter 9? $\frac{9}{6}$

d) Que número devemos multiplicar por 4 para obter 13? $\frac{13}{4}$

7. Coloque em ordem crescente os números que você encontrou nos itens da atividade anterior. $\frac{5}{8} < \frac{9}{6} < \frac{7}{3} < \frac{13}{4}$

8. Ricardo leu um livro em três semanas. Veja como ele distribuiu a leitura:



- 1ª semana: li $\frac{1}{4}$ do livro;
- 2ª semana: li $\frac{1}{6}$ do livro.

ID/BR

a) Que fração do livro Ricardo leu nas duas primeiras semanas? $\frac{5}{12}$

b) Que fração do livro Ricardo leu na terceira semana? $\frac{7}{12}$

9. Variação de temperatura é a diferença entre a maior e a menor temperatura registradas. Em áreas desérticas há grande variação de temperatura: durante o dia faz muito calor e à noite faz muito frio. Essa grande variação acontece porque nessas regiões há pouca umidade.

Supondo que a temperatura mínima registrada em um dia em uma área desértica seja −1,8 °C e a variação de temperatura nesse dia tenha sido de 39,5 °C, qual foi a temperatura máxima registrada nesse dia? **37,7 °C**

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo, o que permite o aprofundamento desses conceitos. Além disso, essas atividades podem ser utilizadas para compor um instrumento de avaliação do processo, promovendo aos estudantes novas oportunidades de aprendizagem.

RESPOSTA

2. Exemplos de resposta:

a) Propriedade comutativa:

A. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

B. $\frac{18}{45} + \frac{4}{9} = \frac{38}{45}$

$\frac{4}{9} + \frac{18}{45} = \frac{38}{45}$

Elemento neutro:

A. $\frac{7}{9} + 0 = \frac{7}{9}$

B. $-\frac{18}{37} + 0 = -\frac{18}{37}$

b) Propriedade associativa:

A. $(0{,}7 \cdot 1{,}9) \cdot 2{,}5 = 1{,}33 \cdot 2{,}5 = 3{,}325$

$0{,}7 \cdot (1{,}9 \cdot 2{,}5) = 0{,}7 \cdot 4{,}75 = 3{,}325$

B. $(5{,}8 \cdot 26{,}4) \cdot (-4{,}8) =$

$= 153{,}12 \cdot (-4{,}8) = -734{,}976$

$5{,}8 \cdot [26{,}4 \cdot (-4{,}8)] =$

$= 5{,}8 \cdot (-126{,}72) = -734{,}976$

Propriedade distributiva:

A. $(15{,}8 + 23{,}6) \cdot 12{,}4 =$

$= 15{,}8 \cdot 12{,}4 + 23{,}6 \cdot 12{,}4 =$

$= 195{,}92 + 292{,}64 = 488{,}56$

B. $(94{,}1 + 5{,}42) \cdot 4{,}64 =$

$= 94{,}1 \cdot 4{,}64 + 5{,}42 \cdot 4{,}64 =$

$= 436{,}624 + 25{,}1488 = 461{,}7728$

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Operar com números racionais pode não ser tão simples, principalmente quando estão na forma fracionária. Caso os estudantes sintam dificuldades em operar com números racionais nessa forma, é uma estratégia interessante pedir a eles que os escrevam na forma decimal.

DE OLHO NA BASE

A realização das atividades propostas nesta seção colaboram para que os estudantes compreendam e utilizem a multiplicação e a divisão de números racionais e a relação entre essas operações, além de resolver e elaborar problemas que envolvam as quatro operações com números racionais, favorecendo o desenvolvimento das habilidades **EF07MA11** e **EF07MA12**.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, o tema abordado é o planejamento financeiro, em especial o orçamento pessoal ou doméstico e o orçamento comercial ou de serviços (que pedimos em lojas ou a prestadores), associado à tomada de decisões. Ao abordar esses tipos de orçamento, convidamos os estudantes a refletir sobre responsabilidades, atitudes e consequências de algumas decisões financeiras, favorecendo a formação para a cidadania.
- É preciso ficar claro que, ao lidar com orçamento, além das questões financeiras, como o preço, temos também de avaliar outros elementos, como a qualidade do produto, o prazo de pagamento ou de realização do serviço, a forma de pagamento, a confiabilidade da empresa, a realidade financeira de quem compra, etc.
- Explore com os estudantes a importância de compreender, planejar e fazer um orçamento para organizar as finanças e verificar a viabilidade de gastos.

DE OLHO NA BASE

Compreender o que é um orçamento e pensar em um planejamento financeiro individual ou familiar permitem aos estudantes agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade e flexibilidade, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários, desenvolvendo a **competência geral 10**.

Criatividade

Esta seção contribui para o desenvolvimento de atributos relacionados ao valor criatividade. Ele pode ser explorado na abordagem do assunto orçamento, pois fazer um bom orçamento às vezes exige estratégia e criatividade. Convide os estudantes a refletir sobre persistência, organização, autocontrole, paciência e sobre como essas questões comportamentais influenciam diretamente nossas escolhas e o modo como lidamos com finanças.

- O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes deve ser preservada. Para isso, valorize situações em que os estudantes se sintam acolhidos, incentivando o desenvolvimento da empatia e da solidariedade.

  A Educação Financeira tem um papel importante nesse contexto, pois as situações-problema que envolvem o uso do dinheiro visam a aproximar teoria e prática, desenvolvendo a capacidade deles de gerir as próprias finanças. Além disso, permitem a eles que se sintam inseridos na sociedade ao se depararem com uma situação real de compra e venda com pais ou responsáveis, colaborando com o aumento da autonomia e da autoestima nesses momentos.

AMPLIANDO HORIZONTES

Na ponta do lápis!

João e Júlia ficaram responsáveis por organizar a compra das camisetas para os times da escola que vão participar de um torneio. Observe a cena ilustrada.

Você deve ter percebido que, para comprar as camisetas, não basta saber a quantidade de uniformes a serem comprados e ter o dinheiro. É preciso ter planejamento. Uma ferramenta muito importante para um planejamento como o de João e Júlia é o **orçamento**. Você sabe o que é um orçamento?

Um orçamento é uma ferramenta – geralmente uma tabela – em que registramos de um lado o que ganhamos (receitas) e do outro o quanto pretendemos ou precisamos gastar (despesas).

Podemos, por exemplo, dispor de 400 reais (receita) e ter de comprar dez camisetas, uma bola de futebol e uma de handebol (despesas). Será que o dinheiro vai dar? O orçamento deve ser usado como instrumento de reflexão para avaliarmos o que compramos e como compramos. Assim, podemos decidir como vamos usar melhor o dinheiro que temos.

Há outro tipo de orçamento também muito usado em situações como a de João e Júlia. É o orçamento que solicitamos a um vendedor quando precisamos de um produto ou serviço. Nele, estão inclusos os valores que serão cobrados

1. Verificar quantas camisetas serão necessárias (futsal feminino + handebol masculino).
2. Fazer uma pesquisa de preço em mais de uma loja. Levar em consideração a qualidade da camiseta e a realidade financeira dos jogadores.
3. Negociar as condições de pagamento.
4. Escolher a melhor loja para o grupo.
5. Informar aos jogadores o preço de cada camiseta.
6. Definir a data-limite em que os jogadores devem pagar pela camiseta e de que forma (todos pagam e depois a compra é feita ou alguém compra e depois todos pagam a essa pessoa).
7. Registrar as entradas de dinheiro à medida que os jogadores forem pagando.
8. Comprar as camisetas na loja, verificando se elas estão em perfeitas condições.
9. Entregar as camisetas aos jogadores.

Leandro Lassmar/ID/BR

DE OLHO NA BASE

Ao se reunir em duplas e discutir as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza, desenvolvendo a **competência geral 9**.

A seção também contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**, o que permite aos estudantes sentir segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

e a forma e os prazos de pagamento. Para comparar preços e condições de pagamento, podemos, por exemplo, pedir o orçamento de um mesmo produto ou serviço em vários lugares. Dessa maneira, é possível tomar uma decisão mais adequada às nossas condições financeiras.

Os dois tipos de orçamento nos ajudam a refletir e a nos posicionar diante do que planejamos: Será que realmente preciso comprar esse produto? Posso comprá-lo? Devo comprá-lo agora? Essas são algumas perguntas que podem surgir quando se faz um orçamento.

Mesmo sendo difícil pensar sempre dessa forma quando precisamos comprar alguma coisa, o exercício dessas ações pode se tornar um hábito que vai nos ajudar na organização das finanças pessoais e familiares.

Para refletir

Responda sempre no caderno.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir. **Consulte as respostas neste manual.**

1. Qual é a diferença entre o orçamento pessoal ou doméstico e o orçamento que pedimos quando queremos adquirir um produto ou serviço? De que maneira cada um deles pode nos ajudar a tomar decisões financeiras?
2. Apresentem uma ou mais situações em que vocês fizeram um orçamento ou precisaram dos dois tipos de orçamento que trabalhamos nesta seção.
3. Suponham que a turma de Júlia e João precise comprar 10 camisetas para o time de futsal e de 14 camisetas para o time de handebol. Após uma pesquisa em duas lojas, a Sportmais e a Sportshow, Júlia e João precisam decidir qual dos dois orçamentos é o melhor. Observem os orçamentos a seguir e respondam às questões.

Leandro Lassmar/ID/BR

   a) Quanto João e Júlia gastariam em cada uma das lojas se comprassem todas as camisetas de que precisam?
   b) Em qual das lojas vocês fariam a compra? Justifiquem.
   c) Além do preço, que fatores devem ser considerados na escolha da loja para a compra das camisetas?
   d) Que outra estratégia poderia ser utilizada para garantir um bom preço e melhores condições de pagamento? Expliquem como vocês pensaram.
4. O que a história de Júlia e João nos ensina em termos de educação financeira? Escrevam o que vocês aprenderam com ela.

RESPOSTAS

1. Orçamento pessoal ou doméstico é um organizador das receitas e das despesas pessoais; orçamento comercial ou de serviços (pedido a uma loja, por exemplo) é a descrição dos produtos ou serviços oferecidos, preços, formas e prazos de pagamento e de entrega do produto ou de realização do serviço. Em ambos os casos, é necessária a organização financeira para a tomada de decisões.
2. Resposta pessoal.
3. **a)** Na loja Sportmais, eles gastariam R$ 600,00; na Sportshow, R$ 504,00.
   b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes apontem que a loja Sportshow seria a mais adequada para fazer a compra, levando em conta o fator preço.
   c) Resposta pessoal. É importante que os estudantes percebam que as condições de pagamento, assim como a qualidade do produto e a condição financeira dos jogadores, são fatores importantes a serem considerados.
   d) Respostas pessoais. Respostas possíveis: pedir desconto por pagamento à vista; explicar o uso que será feito das camisetas; pedir desconto por ser para escola; consultar mais lojas; entre outras.
4. Resposta pessoal. Observe se os estudantes apontam, entre outros aspectos, que a história apresenta um bom exemplo de organização financeira, o qual pode ser aplicado, com as devidas adaptações, a situações reais na vida pessoal deles e de suas famílias.

OUTRAS FONTES

ASSOCIAÇÃO de Educação Financeira do Brasil (AEF-Brasil). Estratégia Nacional de Educação Financeira. Educação financeira nas escolas. Disponível em: https://www.vidaedinheiro.gov.br/livros-ensino-fundamental/?doing_wp_cron=1646907401.6073269844055175781250. Acesso em: 10 mar. 2022.

Nesse *site*, há uma série de livros didáticos de Educação Financeira para o Ensino Fundamental.

BANCO Central do Brasil. Como eu faço um orçamento pessoal ou familiar. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/cidadaniafinanceira/cidadania_como_orcamento. Acesso em: 10 mar. 2022.

Nesse *site*, há um texto sobre orçamento pessoal e também um vídeo sobre como o orçamento familiar pode ajudar na identificação do que se gasta, como se gasta e o quanto se gasta. A reflexão sobre nossas despesas é uma temática central desse vídeo. É uma excelente oportunidade para convidar os estudantes a refletir sobre prioridades e escolhas.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Para resolver a atividade **2**, os estudantes podem observar que $\frac{3}{5}$ é maior que a metade e menor que $\frac{3}{4}$. Assim, Sueli deve ter caído entre os pontos *B* e *D*. O ponto que está nessa posição é o ponto *C*.
- Acompanhe os estudantes ao resolverem a atividade **7** e analise as estratégias que utilizam, valorizando seus conhecimentos. Uma estratégia possível é a seguinte:

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{3}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{6}\right):\left(\frac{42}{21}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right):\left(2-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\left(\frac{9}{15}+\frac{5}{15}\right):\left(\frac{8}{4}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\frac{14}{15}:\frac{7}{4}=\frac{14}{15}\cdot\frac{4}{7}=$$

$$=\frac{56}{105}=\frac{8}{15}$$

Logo, o inverso de $\frac{8}{15}$ é $\frac{15}{8}$.

Escrevendo $\frac{15}{8}$ como um número misto, temos $1\frac{7}{8}$, que está entre 1 e 2.

ATIVIDADES INTEGRADAS

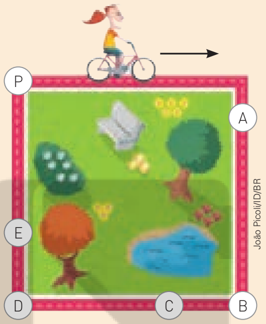
1. Indique a alternativa correta no caderno.

(CMB-DF) Um motorista percorreu $\frac{2}{5}$ da distância entre duas cidades e parou para abastecer. Sabendo-se que $\frac{1}{4}$ da distância que falta para completar o percurso corresponde a 105 km, a distância que separa as duas cidades, em quilômetros, é igual a: **Alternativa e.**

a) 180.
b) 252.
c) 420.
d) 620.
e) 700.

2. Escreva a alternativa correta no caderno.

(Obmep) Sueli resolveu dar uma volta em torno de uma praça quadrada. Ela partiu do vértice *P*, no sentido indicado pela flecha, e caiu ao atingir $\frac{3}{5}$ do percurso total.



Qual ponto indica o local em que Sueli caiu?

a) O ponto *A*.
b) O ponto *B*.
c) O ponto *C*.
d) O ponto *D*.
e) O ponto *E*.

Alternativa c.

3. Registre no caderno a alternativa correta.

(Saresp) Nas Lojas Compre Aqui, um micro-ondas pode ser vendido de duas formas: à vista por R$ 299,00 ou em 12 parcelas iguais de R$ 32,15. As amigas Giovana e Mariana compraram, cada uma, um micro-ondas nessa loja: a primeira, à vista, e a segunda, a prazo. Assinale a alternativa que mostra a quantia que Mariana pagou a mais do que Giovana.

a) R$ 22,50.
b) R$ 86,80.
c) R$ 129,30.
d) R$ 266,85.

Alternativa b.

4. Os produtores de abacaxi classificam seus produtos em classes de acordo com a medida da massa, em quilograma, conforme o quadro a seguir.

Classe ou calibre	Medida da massa (em kg)
1	De 0,900 até 1,200
2	De 1,201 até 1,500
3	De 1,501 até 1,800
4	De 1,801 até 2,100
5	De 2,101 até 2,400
6	A partir de 2,401

Fonte de pesquisa: Faep. Abacaxi. Disponível em: http://www.faep.com.br/comissoes/frutas/cartilhas/frutas/abacaxi.htm. Acesso em: 4 abr. 2022.

a) Qual é a classe de um abacaxi cuja medida da massa é 1,600 kg? **Classe 3.**

b) Entre quais medidas está a massa de dois abacaxis de classe 5? **Entre 4,202 kg e 4,800 kg.**

c) Em sua opinião, por que a tabela apresenta valores como 1,200 e 1,500, escritos com três casas decimais à direita da vírgula, em vez de 1,2 e 1,5? Converse com um colega. **Resposta pessoal.**

5. Veja a seguir a descrição feita por Aline e, depois, responda à questão.

> No bairro onde moro, $\frac{3}{4}$ das pessoas moram em casas e 0,25 delas em apartamentos. Entre as que moram em casas, $\frac{1}{5}$ possui imóveis próprios e, entre as que moram em apartamentos, 0,4.

Ana, que mora no mesmo bairro que Aline, chegou à conclusão de que 25% das residências do bairro eram imóveis próprios. Aline discordou e disse que apenas 15% das pessoas do bairro moram em imóveis próprios.

De acordo com a descrição feita por Aline, quem está certa: Ana ou Aline? **Ana.**

6. Escreva a alternativa correta no caderno.

(UFMG) A soma dos inversos de dois números é 1. Se um deles é $\frac{7}{2}$, o outro é: **Alternativa c.**

a) $\frac{2}{7}$.
b) $\frac{5}{7}$.
c) $\frac{7}{5}$.
d) $\frac{5}{3}$.
e) $\frac{7}{2}$.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Sugira aos estudantes que leiam os enunciados dos problemas, anotem as informações que acharem importantes e façam esquemas para auxiliar na resolução antes de efetuarem os cálculos em si.

Se os estudantes ainda apresentarem dificuldade em operar com números na forma decimal, sugira que efetuem as operações apenas com os algarismos, sem as vírgulas, e verifique se a dificuldade permanece. Em caso afirmativo, é interessante que eles pratiquem cálculos simples, estudem a tabuada e resolvam as atividades com o auxílio dela até se apropriarem dos cálculos e resolverem com autonomia. É importante que cada estudante produza a própria tabuada para se apropriar do procedimento da sua construção, que é associado aos múltiplos de um número.

Para auxiliar os estudantes que têm dificuldade com adição e subtração com frações, utilize esquemas até que se sintam confortáveis para abandonar esse recurso. Nas multiplicações, eles podem utilizar o recurso da tabuada; nas divisões, reforce o conceito de inverso de um número e de operação inversa: "dividir é multiplicar pelo inverso".

7. Indique a alternativa correta no caderno.

(CMPA-RS) O inverso do valor final da expressão $\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{3}-\frac{1}{4}\right)$ é um número entre: **Alternativa a.**

a) 1 e 2.
b) 0 e 1.
c) 4 e 5.
d) 2 e 3.
e) 3 e 4.

8. (OBM) Qual o número racional que devemos multiplicar por $\frac{2}{3}$ para obtermos como resultado o número racional $\frac{4}{5}$? $\mathbf{\frac{6}{5}}$

9. Uma floricultura recebeu uma encomenda de rosas, margaridas e tulipas para um evento. O pedido foi para que a cada 2 rosas houvesse 3 margaridas, e para cada 4 margaridas houvesse 5 tulipas. Sabendo que nesse pedido foram colocadas 120 rosas, quantas margaridas e quantas tulipas foram colocadas? **180 margaridas e 225 tulipas.**

10. Leia o problema a seguir, que é baseado em uma passagem do livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan. Depois, responda à questão.

> **O problema dos 35 camelos**
>
> Nesta passagem, Beremiz – o homem que calculava – e seu colega de jornada encontraram três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos. Entre pragas e impropérios, gritavam, furiosos:
>
> — Não pode ser!
>
> — Isto é um roubo!
>
> — Não aceito!
>
> O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.
>
> — Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos como herança esses 35 camelos. Segundo vontade de nosso pai devo receber a metade, o meu irmão Hamed, uma terça parte, e o mais moço, Harin, deve receber apenas a nona parte do lote de camelos. Contudo, não sabemos como realizar a partilha, visto que ela não é exata.
>
> — É muito simples – falou o homem que calculava. – Encarrego-me de realizar, com justiça, a divisão se me permitirem que junte aos 35 camelos da herança este belo animal, pertencente a meu amigo de jornada, que nos trouxe até aqui.
>
> E assim foi feito.
>
> — Agora – disse Beremiz –, de posse dos 36 animais, farei a divisão justa e exata. Voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:
>
> — Deverias receber a metade de 35, ou seja, 17,5. Receberás a metade de 36, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão.
>
> E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:
>
> — E tu deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, ou seja, 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.
>
> Por fim, disse ao mais novo:
>
> — Tu, segundo a vontade de teu pai, deverias receber a nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, ou seja, 4. Teu lucro foi igualmente notável.
>
> E, concluiu com segurança e serenidade:
>
> — Pela vantajosa divisão realizada, couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18 + 12 + 4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobraram, portanto, dois. Um pertence a meu amigo de jornada. O outro cabe por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!
>
> — Sois inteligente, ó Estrangeiro! – exclamou o mais velho dos irmãos. – Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!
>
> [...]

Malba Tahan. *O homem que calculava*. 83. ed.
Rio de Janeiro: Record, 2013.

A questão é: Qual é a explicação matemática para a partilha realizada por Beremiz, de tal forma que, além de conceder vantagens aos irmãos, ainda sobrou um camelo para ele? **Consulte a resposta neste manual.**

AUTOAVALIAÇÃO

Além de dar a oportunidade aos estudantes de refletir sobre seus atos e seus conhecimentos, a prática de solicitar que façam uma autoavaliação proporciona a você uma forma de conhecer melhor os estudantes e as dificuldades enfrentadas por eles.

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Sei dar exemplos de números racionais na forma fracionária e na forma decimal?
- Consigo localizar um número racional na reta numérica?
- Aprendi a comparar dois ou mais números racionais?
- Consigo realizar adições, subtrações, multiplicações e divisões com números racionais?
- Conheço as propriedades da adição e da multiplicação com números racionais?
- Consegui entender que todo número natural também é um número inteiro e que todo número inteiro é um número racional?
- Consigo resolver expressões com números racionais?
- Participei dos trabalhos em grupo ativamente? Colaborei com os colegas quando eles tinham dúvidas? Pedi ajuda a eles?
- Quais são os conteúdos em que tive mais dificuldade? E em quais tive mais facilidade? Por quê?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

RESPOSTA

10. Exemplo de explicação:

De acordo com o enunciado, deve-se dividir 35 camelos para 3 herdeiros da seguinte forma:

- O mais velho deve receber a metade da herança, isto é, 17 camelos e meio.
- O segundo deve receber um terço da herança, isto é, 11 camelos e dois terços.
- O terceiro, mais moço, deve receber um nono da herança, isto é, 3 camelos e oito nonos.

Feita a partilha dessa forma, há uma sobra:

$$17+\frac{1}{2}+11+\frac{2}{3}+3+\frac{8}{9}=$$
$$=31+\frac{9}{18}+\frac{12}{18}+\frac{16}{18}=31+\frac{37}{18}=$$
$$=31+2\frac{1}{18}=33+\frac{1}{18}$$

A sobra é de $1+\frac{17}{18}$, pois:

$$35-\left(33+\frac{1}{18}\right)=1+\frac{17}{18}$$

Beremiz resolve o problema da seguinte forma:

I. Acrescenta $\frac{1}{2}$ camelo para o primeiro herdeiro, que recebe 18 camelos.

II. Acrescenta $\frac{1}{3}$ de camelo para o segundo herdeiro, que recebe 12 camelos.

III. Acrescenta $\frac{1}{9}$ de camelo para o terceiro herdeiro, que recebe 4 camelos.

Então, eles receberam, ao todo, 34 camelos, pois 18 + 12 + 4 = 34, sobrando 1 camelo, que fica para Beremiz.

NESTA UNIDADE...

Competência geral
2

Competências específicas de Matemática
3, 4 e 6.

Temas Contemporâneos Transversais
Multiculturalismo e Cidadania e Civismo.

Habilidades

(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de *softwares* de geometria dinâmica.

(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.

(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.

(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.

(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

UNIDADE 3

FIGURAS GEOMÉTRICAS

SOBRE A UNIDADE

Esta unidade tem como propósito ampliar e aprofundar conhecimentos sobre ângulos e polígonos estudados em anos anteriores.

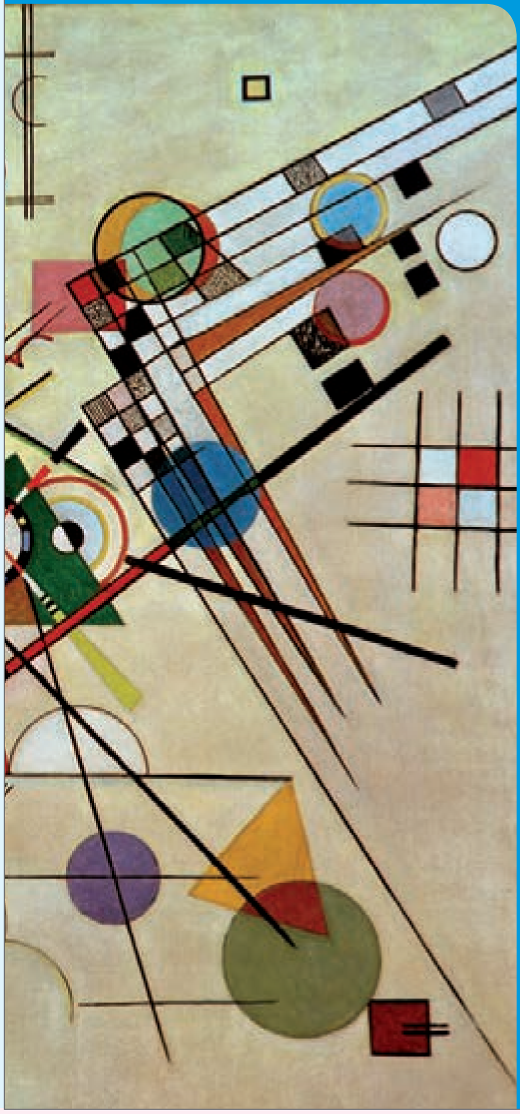
A abordagem do tema figuras geométricas permitirá aos estudantes reconhecer a presença da Geometria em diferentes situações, envolvendo desde obras de arte, passando por aspectos da natureza e chegando ao contexto matemático.

Em relação aos conhecimentos sobre ângulos, objeto do capítulo **1**, observa-se a interação entre os conceitos e os procedimentos de construções geométricas. Além disso, os estudantes terão a oportunidade de aplicar os conceitos relacionados aos ângulos no capítulo **2**, ao estudar polígonos.

As atividades são apresentadas de modo a contribuir para que os estudantes sejam os sujeitos na construção dos conceitos.

CAPÍTULO 1
Ângulos

CAPÍTULO 2
Polígonos



Solomon R. Guggenheim Founding Collection, Schenkung. Fotografia: Album/akg-images/Easypix

PRIMEIRAS IDEIAS

O Abstracionismo foi um movimento artístico que surgiu na Europa entre 1910 e 1920. Utilizava formas abstratas para interpretar o mundo, em vez de objetos ou figuras que o imitavam. Cores diferenciadas, linhas e figuras geométricas ganharam destaque. Até hoje existem artistas que produzem arte abstrata.

A imagem de abertura desta unidade, do pintor Wassily Kandinsky, é um exemplo de arte abstrata.

1. Você já foi a alguma exposição de obras de arte? Em caso afirmativo, o que mais chamou sua atenção? Relate a experiência aos colegas.
2. Observe a imagem de abertura desta unidade. Que figuras geométricas você identifica? O que você imagina que o artista quis representar nesse quadro?
3. No Brasil, também temos grandes pintores abstracionistas. Pesquise o nome e as obras de dois deles.

← Wassily Kandinsky. *Composição 8*, 1923.
Óleo sobre tela, 140 cm × 201 cm.

PRIMEIRAS IDEIAS

- Antes de explorar as questões relativas ao texto e à imagem, sugira aos estudantes que façam a leitura e indiquem palavras ou expressões cujo significado eles desconheçam. A expressão “movimento artístico”, por exemplo, possivelmente seja uma delas. Peça, então, que pesquisem o significado dessas palavras ou expressões. Explique que compreender o contexto histórico-cultural em que o artista desenvolveu sua obra é fundamental para a reflexão sobre a proposta de qualquer movimento artístico.

RESPOSTAS

1. Respostas pessoais.

2. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes identifiquem círculos, triângulos e quadriláteros.

Veja no *site* https://www-wassilykandinsky-net.translate.goog/work-50.php?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=pt&_x_tr_hl=pt-BR&_x_tr_pto=sc (acesso em: 26 maio 2022) mais informações sobre a obra *Composição 8* e o autor Wassily Kandinsky.

3. Exemplos de respostas: Di Cavalcanti (obras: *Mulher com chapéu amarelo* e *Mulher com gato*, por exemplo), Tarsila do Amaral (obras: *Palmeiras* e *Morro da favela*, por exemplo), Lygia Clark (obras: *Bichos* e *Casulos*, por exemplo), Ivan Serpa (obras: *Formas* e *Faixas ritmadas*, por exemplo), Hélio Oiticica (obras: *Metaesquemas* e *Grande núcleo*, por exemplo), Iberê Camargo (obras: *Formação de carretéis* e *Paisagem*, por exemplo), Antônio Bandeira (obras: *Cidade* e *Eclipse*, por exemplo).

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Ângulos.
- Grau e submúltiplos do grau.
- Construção de ângulos com régua e transferidor.
- Adição, subtração, multiplicação e divisão com medidas de ângulos.
- Ângulos congruentes, adjacentes, consecutivos, complementares e suplementares.
- Ângulos opostos pelo vértice.
- Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

Objetivos

- Reconhecer o grau como unidade-padrão para medir ângulos, bem como minutos e segundos como seus submúltiplos.
- Realizar transformações das unidades de medida de ângulos.
- Construir ângulos com uso de régua e transferidor.
- Realizar adição, subtração, multiplicação e divisão com medidas de ângulos.
- Identificar ângulos congruentes, adjacentes, complementares e suplementares.
- Reconhecer ângulos opostos pelo vértice, demonstrando algebricamente a congruência entre eles.
- Classificar ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal e verificar as relações entre eles.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de recordar o estudo de ângulos e efetuar operações com submúltiplos de suas medidas. Além disso, estudarão propriedades dos ângulos, ângulos opostos pelo vértice e ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Essa proposta é de fundamental importância para que o estudante tenha melhor compreensão do mundo em que vive, principalmente no que diz respeito a indicação de posição, localização e utilização de sistemas de coordenadas.

ÂNGULOS

- Após a leitura do texto e a discussão da questão “Você já parou para olhar um bando de aves em voo?”, verifique os conhecimentos prévios dos estudantes sobre a classificação dos ângulos em retos, agudos, obtusos e rasos.
- Para conferir os conhecimentos dos estudantes, faça a seguinte pergunta: Em quais locais e objetos da sala de aula podemos identificar ângulos? Espera-se que eles indiquem os “cantos” das paredes, da lousa, das carteiras, etc., como ângulos retos.
- Estimule os estudantes a procurar outros locais em que podemos identificar ângulos, por exemplo, os diferentes ângulos formados pela abertura da porta, das janelas, das páginas dos livros, etc.

Capítulo 1 ÂNGULOS

Para o desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes tenham noção de ângulos, saibam manusear o transferidor e consigam identificar retas paralelas e retas concorrentes.

Ângulos

Você já parou para olhar um bando de aves em voo? Aves migratórias, como os gansos canadenses, voam de modo organizado e, por isso, chegam mais longe em até 70% das vezes que viajam, em comparação com a distância percorrida por aves em voos desordenados.

Os gansos canadenses organizam-se no momento do voo formando um ângulo e, assim, economizam energia e aumentam a possibilidade de sobrevivência, pois todas as aves do bando, com exceção da que está na ponta – no vértice do ângulo –, podem ver umas às outras.

Quando essas aves se deparam com ventos contrários muito fortes, elas formam um ângulo de menor abertura. Quando a ave que comanda a formação cansa, ela vai para a parte de trás da fila e outra ave assume a liderança. Essa troca acontece várias vezes durante o voo.

↓ Bando de gansos em voo com formação organizada.


blickwinkel/Alamy/Fotoarena

(IN)FORMAÇÃO

Um pouco dos ângulos na história

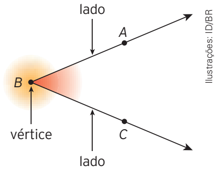
A palavra trigonometria é formada por três radicais gregos: *tri* (três), *gonos* (ângulos) e *metrum* (medir) e significa medidas do triângulo. Essas medidas, entretanto, requerem um conhecimento básico sobre ângulos de um triângulo e suas medidas. A necessidade de relacionar distâncias com ângulos levou astrônomos e topógrafos de diversos povos e períodos históricos, como os babilônios, gregos, árabes e hindus, a criarem a trigonometria.

Os gregos antigos concebiam a noção de ângulos, imaginando, por exemplo, duas pessoas apontando para uma mesma estrela, a partir de pontos diferentes da terra, cujas direções tinham um ponto em comum, a estrela. Com isso tentaram dar a exata ideia de ângulo, ou seja, cada pessoa apresentava uma orientação (direção), que tinha um ponto de convergência (a estrela), o vértice do ângulo.

[...]

Já os babilônios antigos (4000-3000 a.C.) utilizavam as noções de ângulos nas construções ligadas a sua astronomia, a sua religiosidade, bem como ao calendário das estações e da época do plantio. Para isso usaram o sistema de numeração sexagesimal no qual dividiam uma circunferência em seis partes iguais usando o seu raio como medida-padrão, seguindo-se de várias subdivisões até obter 360 partes (graus) geradas através das frações da medida do raio e talvez até por influência do total de dias do ano (eles consideravam o ano com apenas 360 dias). Dessa prática [surgiram] também as ideias básicas para a criação das medidas de minuto e segundo, pois no referido sistema de contagem as frações sexagesimais, Para melhor compreender a movimentação dessas aves, temos de relembrar a ideia de **ângulo**.

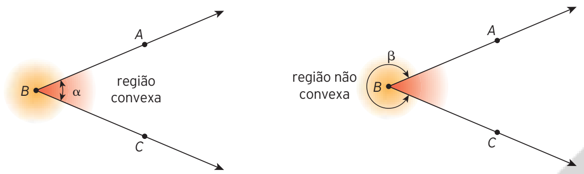
Na figura a seguir, as semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ dividem o plano em duas regiões que as contêm. Cada região formada por essas semirretas representa um ângulo.



Ilustrações: ID/BR

Os ângulos formados nessa figura podem ser indicados por $A\hat{B}C$, $C\hat{B}A$ ou $\hat{B}$. Dizemos que as semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ são os lados desses ângulos e que a origem *B* é o vértice.

Duas semirretas de mesma origem e que não são nem coincidentes nem opostas dividem o plano em duas regiões: uma convexa e outra não convexa. Podemos considerar tanto o ângulo formado pela região convexa como o ângulo formado pela região não convexa. Utilizamos um arco próximo ao vértice do ângulo para indicar qual deles está sendo considerado. Veja.



A medida de um ângulo pode ser indicada por letras gregas minúsculas: α, β, γ, η, μ, θ, etc.

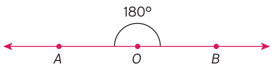
PADRÃO DA COLEÇÃO

Nesta coleção, quando não for indicado a qual dos dois ângulos determinados por duas semirretas de mesma origem estamos nos referindo, consideraremos o ângulo de menor abertura, ou seja, o correspondente à região convexa.

Medida de um ângulo

A medida de um ângulo está relacionada com sua abertura. A unidade de medida padrão para medir ângulos é o grau, cujo símbolo é °.

O ângulo raso, que corresponde a um giro de meia volta, por definição, mede 180°.



Consequentemente, a medida de 1° corresponde a $\frac{1}{180}$ da medida de um ângulo raso.

Quando não há abertura, as semirretas que formam o ângulo são coincidentes e o ângulo é nulo, ou seja, mede 0°.

- Em seguida, volte ao texto e pergunte aos estudantes o significado da expressão “ângulo de menor abertura” na frase: “Quando essas aves se deparam com ventos contrários muito fortes, elas formam um ângulo de menor abertura”. Espera-se que eles percebam que, quanto menor o ângulo de abertura, menor sua medida. E, no caso das aves, quanto menor a medida do ângulo formado durante o voo, mais fácil será transpor os fortes ventos que se colocam em sentido contrário ao voo.
- Verifique se a notação de ângulos e as letras gregas são familiares aos estudantes.
- Se tiver um compasso de lousa, utilize-o para diferenciar o ângulo nulo do raso, concretamente.

após traduções do grego para o árabe e[,] em seguida, para o latim, tornaram-se as partes *minutae primae* e partes *minutae secundae* das quais derivaram as palavras minuto e segundo.

O ângulo reto surgiu com a prática de medição dos antigos, quando mediam a altura de objetos, colocando uma vara em posição vertical em relação ao chão e comparavam as sombras projetadas, o que mais tarde tornou-se uma das ideias básicas da geometria apresentada por Euclides, quando suscitou a ideia de que duas retas que se cruzam formam ângulos iguais entre si e retos. Logo as retas que os formam são perpendiculares. Daí surgiram as noções de ângulos agudos e obtusos para os menores e maiores que o ângulo reto, considerando as noções de perpendicularismo.

MIGUEL, A. *et al. História da Matemática em atividades didáticas*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 132-133.

- Você pode fazer um paralelo com os números na forma decimal e os submúltiplos do grau para que os estudantes compreendam que ambos são utilizados quando se necessita dividir a unidade para aumentar a precisão de uma medida.

Submúltiplos do grau

Muitas vezes, para fabricar objetos que exigem grande precisão ou para traçar rotas aéreas ou navais, são utilizados ângulos cuja medida é expressa com um submúltiplo do grau.

Os submúltiplos do grau são o **minuto** e o **segundo**. Veja nos quadros a seguir a relação entre essas unidades de medida.

$\boxed{1^\circ = 60'}$ $\boxed{1' = 60''}$ $\boxed{1^\circ = 60' = 3\,600''}$

Exemplos

A. $37^\circ\ 12'\ 20''$

Lemos: trinta e sete graus, doze minutos e vinte segundos.

B. $53^\circ\ 15''$

Lemos: cinquenta e três graus e quinze segundos.

Transformações das unidades de medida de ângulos

Para transformar as unidades de medida de ângulos, podemos utilizar o seguinte esquema:

$$\begin{tikzcd}
\text{grau} \arrow[r, bend left, "\cdot 60"] & \text{minuto} \arrow[l, bend left, ": 60"] \arrow[r, bend left, "\cdot 60"] & \text{segundo} \arrow[l, bend left, ": 60"]
\end{tikzcd}$$

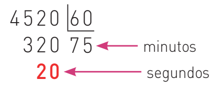
GRANDEZAS DIFERENTES

Apesar de os submúltiplos do grau serem chamados de minuto e segundo, eles são diferentes dos minutos e dos segundos que medem o tempo. Cada um deles mede uma grandeza diferente. Da mesma maneira, o grau que mede ângulos é diferente do grau que mede temperaturas, como é o caso do grau Celsius.

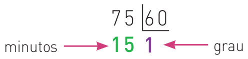
Exemplos

A. Vamos transformar $4\,520''$ em graus, minutos e segundos.

Primeiro, é preciso verificar quantos minutos existem em $4\,520''$. Para isso, dividimos $4\,520''$ por 60.



Em seguida, verificamos quantos graus existem em $75'$. Para isso, dividimos $75'$ por 60.



Portanto, $4\,520''$ correspondem a $1^\circ\ 15'\ 20''$.

B. Vamos transformar $3^\circ\ 24'\ 34''$ em segundos.

Convertemos 3° em minutos e adicionamos $24'$ ao resultado obtido.

$$3^\circ = 3 \cdot 1^\circ = 3 \cdot 60' = 180'$$
$$180' + 24' = 204'$$

Depois, convertemos $204'$ em segundos e adicionamos $34''$ ao resultado obtido.

$$204' = 204 \cdot 1' = 204 \cdot 60'' = 12\,240''$$
$$12\,240'' + 34'' = 12\,274''$$

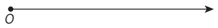
Portanto, $3^\circ\ 24'\ 34''$ correspondem a $12\,274''$.

Como construir um ângulo

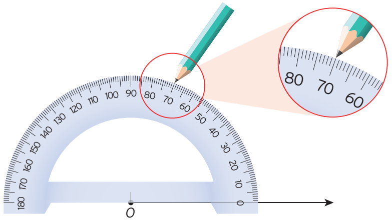
O transferidor é um instrumento utilizado para medir ângulos, mas ele também pode ser usado para construir ângulos.

Acompanhe, por exemplo, como construir um ângulo de 70° usando uma régua e um transferidor.

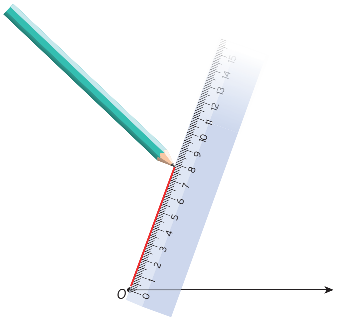
1º passo: Marcamos um ponto *O*, que será o vértice do ângulo e, a partir dele, com o auxílio de uma régua, traçamos uma semirreta, que representará um dos lados do ângulo.



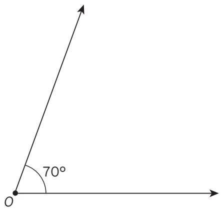
2º passo: Posicionamos o centro do transferidor no vértice do ângulo, de modo que a linha do transferidor que indica 0° fique alinhada com a semirreta traçada, e marcamos um ponto junto à medida graduada de 70°.



3º passo: Usamos a régua e traçamos uma semirreta unindo o vértice ao ponto marcado. Essa semirreta será o outro lado do ângulo.



Veja o ângulo construído.



Ilustrações: ID/BR

- Alguns transferidores têm duas escalas: uma de 0° a 180°, da esquerda para a direita, e outra de 180° a 0°.
- Quando os estudantes não compreendem bem a classificação dos ângulos em maiores ou menores que 90°, o uso de transferidores como esses pode gerar dúvidas na construção ou mesmo na obtenção da medida dos ângulos.
- Organize uma conversa para verificar se os estudantes aprenderam a medir ângulos utilizando o transferidor e pergunte: Como devemos posicionar o transferidor para medir um ângulo?
- Alguns estudantes podem ter o transferidor de 360°, então aproveite para perguntar se o procedimento de medição de ângulos com esse transferidor é o mesmo.
- Traga para a sala de aula algumas imagens de objetos cotidianos que se assemelham a figuras geométricas conhecidas, como triângulos, quadriláteros, hexágonos, etc. Organize a turma em duplas, certificando-se de que cada dupla tenha régua e transferidor, e distribua as figuras entre as duplas. Solicite que meçam os lados e os ângulos de cada figura e a reproduzam, com as medidas encontradas, utilizando régua e transferidor.

+ INTERESSANTE

Converse com os estudantes sobre o texto e reforce que os submúltiplos do ângulo são importantes para a obtenção de medidas precisas. Leve-os a perceber que, no caso dos aviões, a falta de rigor e precisão na medida poderia causar acidentes. A intenção é mostrar a eles a aplicação do conteúdo em contextos reais.

DE OLHO NA BASE

Conhecer o uso de ângulos em diferentes situações, como no caso da aviação, permite aos estudantes compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento, o que contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

- No item **a** da atividade **1**, por exemplo, em vez de construírem um ângulo de 40°, os estudantes podem se confundir e construir um ângulo de 140°, uma vez que essas duas medidas se encontram na mesma posição no transferidor. Nesse sentido, é importante que, antes da construção, eles identifiquem se a abertura do ângulo será maior ou menor que 90°.
- Para construir o ângulo de 230°, proposto no item **d** da atividade **1**, se os estudantes tiverem apenas o transferidor de 180°, eles podem fazer uma composição do ângulo de 50° (230° − 180°) e do ângulo raso. Isso pode ser aplicado em qualquer atividade em que os ângulos a serem construídos têm medida entre 180° e 360°.
- Nas atividades **3**, **4** e **5**, aproveite para verificar se os estudantes compreenderam as relações entre grau e minuto, minuto e segundo e grau e segundo. Caso ainda encontrem dificuldades, relembre as relações.

+ INTERESSANTE

Ângulos na aviação

Na aviação, as medidas de ângulos, em grau, minuto e segundo, são utilizadas para determinar a localização de aeroportos. No entanto, a necessidade de precisão dos cálculos de rotas é tão importante que encontramos coordenadas na aviação ou até mesmo em GPS com o segundo subdividido em casas até a ordem dos centésimos.

Veja um exemplo de como essas coordenadas aparecem.

23° 30′ 29,93″ S / 046° 38′ 32,90″ W

Indicação de hemisfério (em inglês) em relação à linha do Equador (Norte-Sul).

Indicação de hemisfério (em inglês) em relação ao meridiano de Greenwich (Leste-Oeste).

Observe, nas imagens, a localização das cabeceiras da pista no aeroporto Campo de Marte, em São Paulo (SP). Essas marcações podem ser consideradas para o procedimento de pouso das aeronaves.

Fotografias: 2017 Digital Globe/Google Earth

Imagens com as coordenadas das cabeceiras da pista, delimitando o local do procedimento de pouso. Nas indicações, S corresponde ao hemisfério Sul (em relação à linha do Equador) – *South*, em inglês – e W corresponde ao hemisfério Oeste (em relação ao meridiano de Greenwich) – *West*, em inglês.

ATIVIDADES

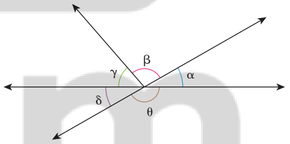
1. Consulte as respostas neste manual.

Responda sempre no caderno.

1. Com um transferidor, construa no caderno ângulos com as medidas indicadas.

a) 40°
b) 85°
c) 112°
d) 230°

2. Observe a figura.



ID/BR

Agora, copie as sentenças a seguir no caderno e complete-as usando os símbolos > ou <.

a) β ■ γ >
b) γ ■ θ <
c) θ ■ α >

3. Responda ao que se pede.

a) Um ângulo de 180° tem quantos minutos? **10 800′**

b) Um ângulo de 45° tem quantos segundos? **162 000″**

c) Um ângulo de três mil e seiscentos segundos tem quantos graus? **1°**

4. Escreva cada medida a seguir em segundo.

a) 20′ **1 200″**
b) 8′ **480″**
c) 1° **3 600″**
d) 9° 12′ 5″ **33 125″**

5. Faça as transformações das unidades de medida indicadas em cada item.

a) Ângulo de 90° em minutos. **5 400′**

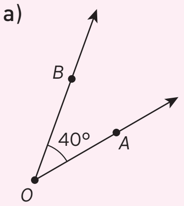
b) Ângulo de 180° em segundos. **648 000″**

c) Ângulo de 120° em minutos. **7 200′**

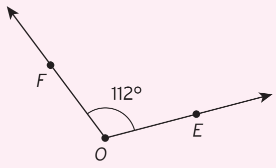
RESPOSTA

1. Respostas possíveis:

a)

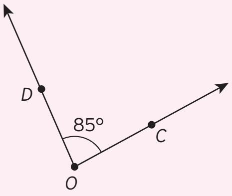


c)

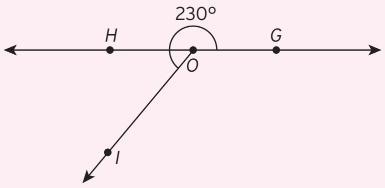


Ilustrações: ID/BR

b)



d)



Operações com medidas de ângulos

Agora, vamos estudar como realizar as operações de adição, subtração, e multiplicação por um número natural e divisão por um número natural não nulo, quando essas operações envolvem medidas de ângulos.

Adição

Para adicionar medidas de ângulos, adicionamos segundo com segundo, minuto com minuto e grau com grau.

João Piccoli/ID/BR

Exemplos

A. Vamos efetuar 42° 51′ 29″ + 21° 20′ 52″.

$$\begin{array}{r} 42°\ 51'\ 29'' \\ +\ 21°\ 20'\ 52'' \\ \hline 81'' \end{array}$$

Ao adicionar 29″ a 52″, obtemos 81″. Como a soma é um valor maior que 60, fazemos a conversão de 81″ para **minuto**:

$$81'' = \underbrace{60''}_{60'' = 1'} + 21'' = 1' + 21''$$

$$\begin{array}{r} \overset{1'}{} \\ 42°\ 51'\ 29'' \\ +\ 21°\ 20'\ 52'' \\ \hline 72'\ 21'' \end{array}$$

Agora, adicionamos o minuto obtido aos demais minutos, obtendo 72′ (1′ + 51′ + 20′ = 72′). Como a soma é um valor maior que 60, fazemos a conversão de 72′ para **grau**:

$$72' = \underbrace{60'}_{60' = 1°} + 12' = 1° + 12'$$

$$\begin{array}{r} \overset{1°}{} \\ 42°\ 51'\ 29'' \\ +\ 21°\ 20'\ 52'' \\ \hline 64°\ 12'\ 21'' \end{array}$$

Por fim, adicionamos o grau obtido aos demais graus, obtendo 64° (1° + 42° + 21° = 64°).

Portanto:
42° 51′ 29″ + 21° 20′ 52″ = 64° 12′ 21″

B. Vamos efetuar 63° 11″ + 17° 59′ 51″.

$$\begin{array}{r} 63°\ \quad\ 11'' \\ +\ 17°\ 59'\ 51'' \\ \hline 62'' \end{array}$$

Ao adicionar 11″ a 51″, obtemos 62″. Como a soma é um valor maior que 60, fazemos a conversão de 62″ para **minuto**:

$$62'' = \underbrace{60''}_{60'' = 1'} + 2'' = 1' + 2''$$

$$\begin{array}{r} \overset{1'}{} \\ 63°\ \quad\ 11'' \\ +\ 17°\ 59'\ 51'' \\ \hline 60'\ \ 2'' \end{array}$$

Agora, adicionamos o minuto obtido aos demais minutos, obtendo 60′ (1′ + 59′ = 60′). Como a soma é exatamente 60, fazemos a conversão de 60′ para **grau**:

60′ = 1°

$$\begin{array}{r} \overset{1°}{} \\ 63°\ \quad\ 11'' \\ +\ 17°\ 59'\ 51'' \\ \hline 81°\ \ 0'\ \ 2'' \end{array}$$

Por fim, adicionamos o grau obtido aos demais graus, obtendo 81° (1° + 63° + 17° = 81°).

Portanto:
63° 11″ + 17° 59′ 51″ = 81° 2″

ATIVIDADE

Responda sempre no caderno.

6. Efetue as adições a seguir.

a) 26° 45′ 9″ + 40° 11′ 27″ **66° 56′ 36″**

b) 40° 12′ 13″ + 58° 20′ 40″ **98° 32′ 53″**

c) 72° 13′ 40″ + 36° 12′ 20″ **108° 26′**

d) 75° 23′ 10″ + 16° 30′ **91° 53′ 10″**

OPERAÇÕES COM MEDIDAS DE ÂNGULOS

- A abordagem das operações com medidas de ângulos prevê que os estudantes já tenham se apropriado das relações entre os submúltiplos do grau e dos agrupamentos de 60 em 60.

DE OLHO NA BASE

A apreensão de significados dos objetos matemáticos depende, entre outros fatores, de conexões que os estudantes estabelecem entre os diferentes campos da Matemática. Nesse sentido, o estudo das unidades de medida de ângulos permite a conexão com conceitos e procedimentos de adição, subtração, multiplicação e divisão, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

OUTRAS FONTES

Lellis, M. C. *Ângulos*. São Paulo: Atual, 1992 (Coleção Pra que Serve Matemática?).

Esse livro apresenta diferentes situações em que os ângulos são utilizados, entre elas a história real da queda de um Boeing na selva amazônica, causada pela marcação equivocada, nos instrumentos de bordo, do ângulo relativo à rota determinada.

- Na atividade **7**, aproveite para verificar se os estudantes compreenderam os fundamentos de subtração de medidas de ângulos. Lembre-os de que podem verificar se o resultado encontrado está correto usando a relação fundamental da subtração, ou seja, adicionando a diferença ao subtraendo e comparando com o minuendo.

Subtração

Na subtração de medidas de ângulos, algumas vezes é necessário transformar previamente as unidades.

Exemplos

A. Vamos efetuar 72° 15′ 28″ − 35° 37′ 51″.

$$\begin{array}{rrrr} & 72^\circ & 15' & 28'' \\ - & 35^\circ & 37' & 51'' \\ \hline & & & 37'' \end{array}$$

Não é possível subtrair 51″ de 28″. Então, escrevemos 15′ como 14′ 60″:

$$15' = 14' + \underbrace{1'}_{} = 14' + 60''$$

Depois, adicionamos os 60″ aos 28″:

$$28'' + 60'' = 88''$$

Ao subtrair 51″ de 88″, obtemos 37″.

$$\begin{array}{rrrr} & 72^\circ & 14' & 88'' \\ - & 35^\circ & 37' & 51'' \\ \hline & & 37' & 37'' \end{array}$$

Agora, subtraímos os minutos. Não é possível subtrair 37′ de 14′. Então, escrevemos 72° como 71° 60′:

$$72^\circ = 71^\circ + \underbrace{1^\circ}_{} = 71^\circ + 60'$$

Depois, adicionamos os 60′ aos 14′:

$$14' + 60' = 74'$$

Ao subtrair 37′ de 74′, obtemos 37′.

$$\begin{array}{rrrr} & 71^\circ & 74' & 88'' \\ - & 35^\circ & 37' & 51'' \\ \hline & 36^\circ & 37' & 37'' \end{array}$$

Por fim, subtraímos os graus:

$$71^\circ - 35^\circ = 36^\circ$$

Portanto:

72° 15′ 28″ − 35° 37′ 51″ =
= 36° 37′ 37″

B. Vamos calcular 47° 35′ − 15° 40′ 20″.

$$\begin{array}{rrrr} & 47^\circ & 35' & 0'' \\ - & 15^\circ & 40' & 20'' \\ \hline & & & 40'' \end{array}$$

Não é possível subtrair 20″ de 0″. Então, escrevemos 35′ como 34′ 60″:

$$35' = 34' + \underbrace{1'}_{} = 34' + 60''$$

Depois, adicionamos os 60″ aos 0″:

$$0'' + 60'' = 60''$$

Ao subtrair 20″ de 60″, obtemos 40″.

$$\begin{array}{rrrr} & 47^\circ & 34' & 60'' \\ - & 15^\circ & 40' & 20'' \\ \hline & & 54' & 40'' \end{array}$$

Agora, subtraímos os minutos. Não é possível subtrair 40′ de 34′. Então, escrevemos 47° como 46° 60′:

$$47^\circ = 46^\circ + \underbrace{1^\circ}_{} = 46^\circ + 60'$$

Depois, adicionamos os 60′ aos 34′:

$$34' + 60' = 94'$$

Ao subtrair 40′ de 94′, obtemos 54′.

$$\begin{array}{rrrr} & 46^\circ & 94' & 60'' \\ - & 15^\circ & 40' & 20'' \\ \hline & 31^\circ & 54' & 40'' \end{array}$$

Por fim, subtraímos os graus:

$$46^\circ - 15^\circ = 31^\circ$$

Portanto:

47° 35′ − 15° 40′ 20″ =
= 31° 54′ 40″

ATIVIDADE

Responda sempre no caderno.

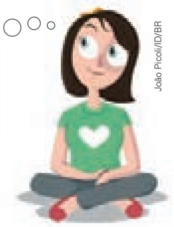
7. Efetue as subtrações a seguir.

a) 60° 30′ 15″ − 40° 20′ 10″ **20° 10′ 5″**
b) 50° 12′ − 36° 10′ 20″ **14° 1′ 40″**
c) 22° 32′ 28″ − 7° 36′ 23″ **14° 56′ 5″**
d) 43° 39′ 18″ − 27° 41′ 53″ **15° 57′ 25″**
e) 23° 45′ 50″ − 10° 36′ 30″ **13° 9′ 20″**
f) 80° − 35° 49′ 46″ **44° 10′ 14″**
g) 172° 15″ − 40° 20′ 7″ **131° 40′ 8″**
h) 66° 33′ 17″ − 52° 45′ 36″ **13° 47′ 41″**

Multiplicação de um número natural pela medida de um ângulo

Para multiplicar um número natural pela medida de um ângulo, devemos multiplicar esse número natural pelos graus, minutos e segundos dessa medida.

Se a quantidade de segundos ou de minutos resultante for maior que ou igual a 60, é necessário fazer a conversão da unidade de medida: segundos para minutos e minutos para graus.


João Picoli/ID/BR

Exemplos

A. Vamos calcular 4 · (40° 18′ 20″).

	40°	18′	20″
×			4
	4 · 40°	4 · 18′	4 · 20″
	160°	72′	80″
	160°	73′	20″
	161°	13′	20″

80″ = 60″ + 20″ = 1′ + 20″
1′ + 72′ = 73′

73′ = 60′ + 13′ = 1° + 13′
1° + 160° = 161°

Portanto: 4 · (40° 18′ 20″) = 161° 13′ 20″.

B. Vamos calcular 7 · (13° 32″).

	13°	0′	32″
×			7
	7 · 13°	7 · 0′	7 · 32″
	91°	0′	224″
	91°	3′	44″

224″ = 60″ + 60″ + 60″ + 44″ = 3′ + 44″

Portanto: 7 · (13° 32″) = 91° 3′ 44″.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

8. Efetue as multiplicações a seguir.
a) 4 · (7° 16′ 31″) **29° 6′ 4″**
b) 5 · (25° 14′ 20″) **126° 11′ 40″**
c) 3 · (15° 20′ 24″) **46° 1′ 12″**
d) 8 · (7° 43′ 58″) **61° 51′ 44″**

9. Responda às questões a seguir.
a) Qual é o dobro de 23° 12′ 15″? **46° 24′ 30″**
b) Qual é o triplo de 13° 32″? **39° 1′ 36″**
c) O triplo de 2° 24′ tem quantos segundos? **25 920″**

10. Pedro e Samanta estavam estudando operações com ângulos. Uma das tarefas que eles deveriam realizar era efetuar 6 · (17° 52′ 44″). Pedro encontrou o resultado 107° 16′ 24″ e Samanta, 102° 312′ 264″. Eles obtiveram resultados diferentes para a mesma multiplicação? O que pode ter ocorrido? **Eles obtiveram o mesmo resultado. Porém, Samanta esqueceu de converter os segundos para minutos e os minutos para graus.**

- Na atividade **10**, peça aos estudantes que façam a multiplicação e comparem o resultado obtido por eles com os resultados encontrados por Pedro e Samanta.

- Retome a divisão com números naturais pelo método da chave e a relação fundamental da divisão, para auxiliar os estudantes a entender o procedimento da divisão com ângulos.
- Na atividade **11**, sugira aos estudantes que verifiquem se o resultado encontrado está correto por meio da operação inversa, fazendo a multiplicação do quociente pelo divisor e a comparação com o dividendo.

Divisão da medida de um ângulo por um número natural não nulo

Na divisão de uma medida de um ângulo por um número natural não nulo, devemos dividir os graus, os minutos e os segundos, nessa ordem, pelo número natural.

Em alguns casos, primeiro é necessário fazer a conversão das unidades de medida e, então, realizar a divisão.

Exemplos

A. Vamos calcular (42° 30′ 4″) : 4.

$$\begin{array}{r|l}
42^\circ\ 30'\ 4'' & 4 \\ \cline{2-2}
-\ 40^\circ & 10^\circ \\ \cline{1-1}
2^\circ &
\end{array}$$

Dividimos 42° por 4.
Obtemos 10° e sobram **2°**.
Convertemos os graus restantes em minutos:
2° = 2 · 1° = 2 · 60′ =
= **120′**

$$\begin{array}{r|l}
42^\circ\ 30'\ 4'' & 4 \\ \cline{2-2}
150' & 10^\circ\ 37' \\
-\ 120' & \\ \cline{1-1}
30' & \\
-\ 28' & \\ \cline{1-1}
2' &
\end{array}$$

Depois, adicionamos os **120′** aos **30′**, obtendo **150′** (120′ + 30′ = 150′), e dividimos por 4.
Obtemos 37′ e sobram **2′**.
Convertemos os minutos restantes em segundos:
2′ = 2 · 1′ = 2 · 60″ =
= **120″**

$$\begin{array}{r|l}
42^\circ\ 30'\ 4'' & 4 \\ \cline{2-2}
124'' & 10^\circ\ 37'\ 31'' \\
-\ 120'' & \\ \cline{1-1}
4'' & \\
-\ 4'' & \\ \cline{1-1}
0'' &
\end{array}$$

Por fim, adicionamos os **120″** aos **4″**, obtendo **124″** (120″ + 4″ = 124″), e dividimos por 4.
Obtemos 31″ e resto 0″.

Portanto: (42° 30′ 4″) : 4 = 10° 37′ 31″.

B. Vamos calcular (53° 18″) : 3.

$$\begin{array}{r|l}
53^\circ\ \ 0'\ \ 18'' & 3 \\ \cline{2-2}
2^\circ\qquad\qquad & 17^\circ
\end{array}$$

Dividimos 53° por 3.
Obtemos 17° e sobram **2°**.
Convertemos os graus restantes em minutos:
2° = 2 · 1° = 2 · 60′ =
= **120′**

$$\begin{array}{r|l}
53^\circ\ \ 0'\ \ 18'' & 3 \\ \cline{2-2}
120'\quad\ \ & 17^\circ\ 40' \\
0'\quad\ \ &
\end{array}$$

Depois, dividimos os **120′** por 3.
Obtemos 40′ e resto 0′.
Como o resto da divisão de 120′ por 3 resulta em 0′, passamos para a divisão dos segundos.

$$\begin{array}{r|l}
53^\circ\ \ 0'\ \ 18'' & 3 \\ \cline{2-2}
0'' & 17^\circ\ 40'\ 6''
\end{array}$$

Dividimos 18″ por 3.
Obtemos 6″ e resto 0″.

Portanto: (53° 18″) : 3 = 17° 40′ 6″.

ATIVIDADE

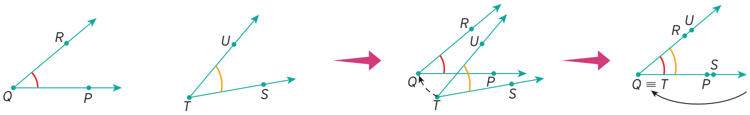
Responda sempre no caderno.

11. Efetue as divisões a seguir.

a) 15° : 3 **5°**
b) 15° : 8 **1° 52′ 30″**
c) (45° 20′) : 4 **11° 20′**
d) (63° 3′ 20″) : 5 **12° 36′ 40″**
e) (120° 36′ 42″) : 6 **20° 6′ 7″**
f) (74° 15′ 2″) : 7 **10° 36′ 26″**
g) (84° 16′) : 8 **10° 32′**
h) (55° 12′ 9″) : 9 **6° 8′ 1″**
i) (82° 42′ 30″) : 10 **8° 16′ 15″**

Ângulos congruentes

Observe os ângulos $P\hat{Q}R$ e $S\hat{T}U$. Vamos deslocar o ângulo $S\hat{T}U$ até que T coincida com Q e as semirretas $\overrightarrow{QR}$ e $\overrightarrow{TU}$ também coincidam.



O símbolo ≡ indica que os pontos Q e T são coincidentes.

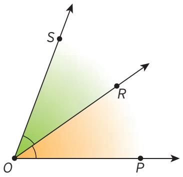
Você percebeu que as semirretas $\overrightarrow{QP}$ e $\overrightarrow{TS}$ também coincidiram? E que os ângulos $P\hat{Q}R$ e $S\hat{T}U$ têm a mesma abertura? **Respostas pessoais.**

Quando dois ângulos apresentam a mesma abertura, dizemos que eles são **congruentes**.

Assim, dizemos que $P\hat{Q}R$ e $S\hat{T}U$ são congruentes e indicamos $P\hat{Q}R \cong S\hat{T}U$. O símbolo ≅ indica congruência.

Ângulos adjacentes

Veja a figura a seguir.



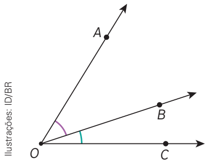
Observe que os ângulos $P\hat{O}R$ e $R\hat{O}S$ têm apenas um lado em comum: a semirreta $\overrightarrow{OR}$. Além disso, as regiões convexas determinadas por esses ângulos não têm pontos em comum, exceto os pontos pertencentes ao lado em comum. Por essas características, dizemos que os ângulos $P\hat{O}R$ e $R\hat{O}S$ são **ângulos adjacentes**.

Dois ângulos são **adjacentes** se apresentarem apenas um lado em comum e se as regiões determinadas por eles não tiverem outros pontos em comum, exceto os pertencentes ao lado comum.

Agora, observe os ângulos $P\hat{O}R$ e $P\hat{O}S$ dessa figura. Eles são adjacentes? Explique. **Não, pois a região laranja é comum às regiões convexas determinadas pelos dois ângulos.**

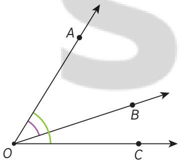
Observação

Ângulos consecutivos são ângulos que têm um lado em comum, podendo ser ou não ângulos adjacentes. Veja os exemplos.



Ilustrações: ID/BR

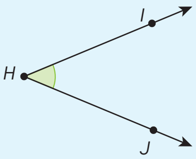
$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são ângulos adjacentes e consecutivos, pois têm o lado $\overrightarrow{OB}$ em comum.



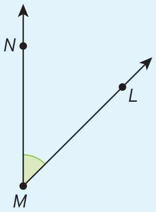
$A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ são ângulos consecutivos, pois têm o lado $\overrightarrow{OA}$ em comum.

ÂNGULOS CONGRUENTES

- Para que os estudantes compreendam os conceitos de ângulos congruentes, adjacentes e consecutivos, é importante que tenham se apropriado da definição de ângulos e, ainda, que reconheçam seus elementos: vértice e lados.
- Verifique se os estudantes entenderam que a congruência entre dois ou mais ângulos é determinada pela abertura entre as semirretas, independentemente da posição em que os ângulos se encontram. Por exemplo, os ângulos $\widehat{IHJ}$ e $\widehat{NML}$ são congruentes, pois, embora suas posições não sejam as mesmas, ambos medem 45°.



Ilustrações: ID/BR



- Explique aos estudantes que o símbolo ≅ indica congruência e o símbolo ≡ indica coincidência.

ÂNGULOS ADJACENTES

- Reforce aos estudantes que dois ângulos adjacentes não têm pontos internos em comum, mas apenas um lado em comum.
- Diferencie os conceitos de ângulos adjacentes e ângulos consecutivos explicando que há ângulos consecutivos que são adjacentes e outros que não são, pois têm, além do lado comum, pontos internos em comum, mas todo ângulo adjacente é consecutivo.

ÂNGULOS COMPLEMENTARES

- Para a compreensão de ângulos complementares e complementares adjacentes, é necessário que os estudantes reconheçam o ângulo de 90°, ângulos menores que 90° e ângulos maiores que 90°.
- Para calcular a medida do ângulo complementar de outro ângulo, deve-se calcular quanto falta a esse último ângulo para completar 90°. Comente com os estudantes que ângulos com medida maior que 90° não possuem complementar.

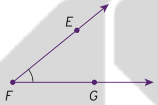
ÂNGULOS SUPLEMENTARES

- Para calcular a medida do ângulo suplementar de outro ângulo, basta calcular quanto falta a esse último ângulo para completar 180°. Comente com os estudantes que ângulos que medem mais que 180° não possuem suplementar.

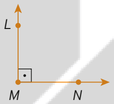
CLASSIFICAÇÃO DOS ÂNGULOS

Ângulo nulo: É o ângulo de medida 0°.

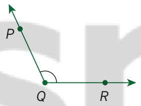
Ângulo agudo: É o ângulo cuja medida está entre 0° e 90°.



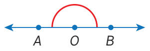
Ângulo reto: É o ângulo de medida 90°.



Ângulo obtuso: É o ângulo cuja medida está entre 90° e 180°.

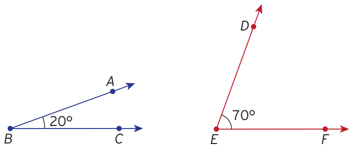


Ângulo raso: É o ângulo de medida 180°.



Ângulos complementares

Observe os ângulos representados a seguir.



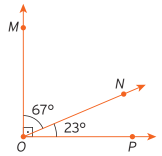
Qual é a soma das medidas dos ângulos $C\hat{B}A$ e $F\hat{E}D$? **90°**

Quando a soma das medidas de dois ângulos resulta na medida de um ângulo reto (90°), dizemos que eles são **ângulos complementares**.

Assim, os ângulos $C\hat{B}A$ e $F\hat{E}D$ dessas figuras são complementares, pois $20° + 70° = 90°$. Dizemos que $C\hat{B}A$ é o complemento de $F\hat{E}D$ e que $F\hat{E}D$ é o complemento de $C\hat{B}A$.

Ângulos adjacentes complementares

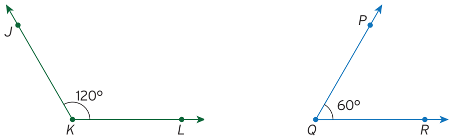
Na figura a seguir, $P\hat{O}N$ e $N\hat{O}M$ são ângulos adjacentes, pois a semirreta $\overrightarrow{ON}$ é lado comum dos dois ângulos, e complementares, pois $23° + 67° = 90°$.



Quando dois ângulos são adjacentes e complementares, os lados não comuns formam o ângulo reto. Nesse caso, $P\hat{O}M$ é ângulo reto.

Ângulos suplementares

Observe os ângulos representados a seguir.



Ilustrações: ID/BR

Qual é a soma das medidas dos ângulos $J\hat{K}L$ e $P\hat{Q}R$? **180°**

Quando a soma das medidas de dois ângulos resulta na medida do ângulo raso (180°), dizemos que eles são ângulos **suplementares**.

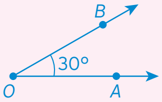
Assim, os ângulos $J\hat{K}L$ e $P\hat{Q}R$ dessas figuras são suplementares, pois $120° + 60° = 180°$. Dizemos que $J\hat{K}L$ é o suplemento de $P\hat{Q}R$ e que $P\hat{Q}R$ é o suplemento de $J\hat{K}L$.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

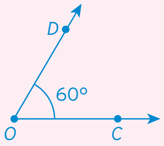
Para verificar se os estudantes entenderam o significado de ângulos complementares, adjacentes complementares e suplementares, retome o uso do transferidor para a construção de ângulos, sugerindo a eles que construam um ângulo de:

a) 30° e seu complementar.

Para construir um ângulo de 30°, marco um ponto O, que será o vértice do ângulo, e a partir dele traço uma semirreta $\overrightarrow{OA}$, que representará um dos lados do ângulo. Posiciono o centro do transferidor em O e marco o ponto B junto à medida de 30°. Traço com a régua a semirreta $\overrightarrow{OB}$ unindo o vértice ao ponto marcado.

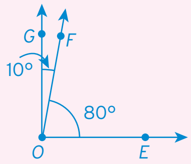


O complementar do ângulo de 30° mede 60° (90° − 30°). Marco um ponto O, que será o vértice do ângulo, e a partir dele traço uma semirreta $\overrightarrow{OC}$, que representará um dos lados do ângulo. Posiciono o centro do transferidor em O e marco o ponto D junto à medida de 60°. Traço com a régua a semirreta $\overrightarrow{OD}$ unindo o vértice ao ponto marcado.



b) 80° e seu adjacente complementar.

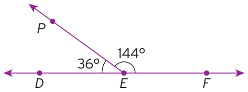
Para construir um ângulo de 80°, marco um ponto O, que será o vértice do ângulo, e a partir dele traço uma semirreta $\overrightarrow{OE}$, que representará um dos lados do ângulo. Posiciono o centro do transferidor em O e marco o ponto F junto à medida de 80°. Traço com a régua a semirreta $\overrightarrow{OF}$ unindo o vértice ao ponto marcado. O complementar do ângulo de 80° mede 10° (90° − 80°). Coloco o zero do transferidor em O e marco o ponto G junto à medida de 90°. Traço com a régua a semirreta $\overrightarrow{OG}$ unindo o vértice ao ponto marcado.



Ilustrações: ID/BR

Ângulos adjacentes suplementares

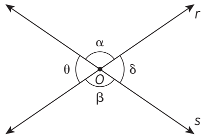
Na figura a seguir, $F\hat{E}P$ e $P\hat{E}D$ são ângulos adjacentes, pois a semirreta $\overrightarrow{EP}$ é lado comum dos dois ângulos, e suplementares, pois 144° + 36° = 180°.



Quando dois ângulos são adjacentes e suplementares, os lados não comuns formam um ângulo raso. Nesse caso, $F\hat{E}D$ é um ângulo raso.

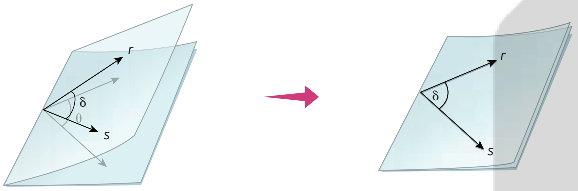
Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)

Quando duas retas são concorrentes, elas determinam quatro ângulos. Na figura a seguir, as retas *r* e *s* são concorrentes e determinam os ângulos de medidas α, β, θ e δ.

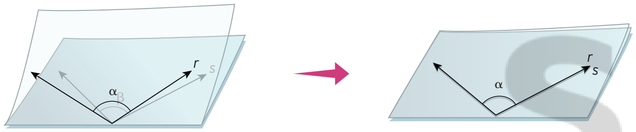


Observe que os lados do ângulo $\hat{\alpha}$ são semirretas opostas aos lados do ângulo $\hat{\beta}$ e que os lados do ângulo $\hat{\theta}$ são semirretas opostas aos lados do ângulo $\hat{\delta}$. Dizemos, então, que os pares de ângulos $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ e $\hat{\theta}$ e $\hat{\delta}$ são **ângulos opostos pelo vértice** (**o.p.v.**).

Para mostrar a relação entre os ângulos o.p.v., Camila reproduziu essa figura em uma folha de papel vegetal e, depois, dobrou o desenho verticalmente ao meio.



Camila percebeu que os ângulos $\hat{\delta}$ e $\hat{\theta}$ ficaram sobrepostos e que, portanto, tinham a mesma medida. Depois, ela desdobrou o papel e o dobrou novamente ao meio, mas dessa vez horizontalmente.



Ilustrações: ID/BR

Camila percebeu que os ângulos $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ também ficaram sobrepostos e que, portanto, tinham a mesma medida.

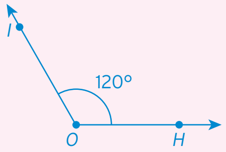
Realizando essa experiência, Camila notou que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE (o.p.v.)

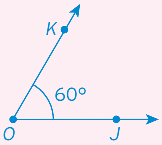
- Para que os estudantes compreendam o conceito de ângulos opostos pelo vértice, são necessários alguns conhecimentos prévios, como sobre retas concorrentes, elementos dos ângulos e congruência de ângulos. Caso julgue necessário, retome esses conceitos.
- Sugira aos estudantes que façam a experiência realizada por Camila apresentada no Livro do Estudante. Verifique se eles percebem a congruência entre os ângulos opostos pelo vértice.

c) 120° e seu suplementar.

Para construir um ângulo de 120°, marco um ponto *O*, que será o vértice do ângulo, e a partir dele traço uma semirreta $\overrightarrow{OH}$, que representará um dos lados do ângulo. Posiciono o centro do transferidor em *O* e marco o ponto *I* junto à medida de 120°. Traço com a régua a semirreta $\overrightarrow{OI}$ unindo o vértice ao ponto marcado.

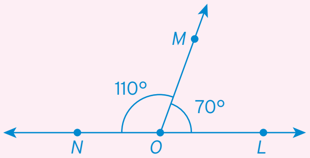


O suplementar do ângulo de 120° mede 60° (180° − 120°). Marco um ponto *O*, que será o vértice do ângulo, e a partir dele traço uma semirreta $\overrightarrow{OJ}$, que representará um dos lados do ângulo. Posiciono o centro do transferidor em *O* e marco o ponto *K* junto à medida de 60°. Traço com a régua a semirreta $\overrightarrow{OK}$ unindo o vértice ao ponto marcado.



d) 70° e seu adjacente suplementar.

Para construir um ângulo de 70°, marco um ponto *O*, que será o vértice do ângulo, e a partir dele traço uma semirreta $\overrightarrow{OL}$, que representará um dos lados do ângulo. Posiciono o centro do transferidor em *O* e marco o ponto *M* junto à medida de 70°. Traço com a régua a semirreta $\overrightarrow{OM}$ unindo o vértice ao ponto marcado. O suplementar do ângulo de 70° mede 110° (180° − 70°). Coloco o zero do transferidor em *O* e marco o ponto *N* junto à medida de 180°. Traço com a régua a semirreta $\overrightarrow{ON}$ unindo o vértice ao ponto marcado.



Ilustrações: ID/BR

- Para realizar as atividades **12** e **13**, peça aos estudantes que utilizem o transferidor.
- Solicite aos estudantes que resolvam a atividade **17** sem o uso de transferidor e registrem as estratégias utilizadas na resolução do item **b**. Por exemplo: $A\hat{O}B$ é suplementar de $B\hat{O}C$.

  Se a medida de $A\hat{O}B$ é 135°, então a medida de $B\hat{O}C$ é 45°, pois $180° - 135° = 45°$. $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}D$ são ângulos opostos pelo vértice; logo, são congruentes. Dessa forma, $A\hat{O}D$ mede 45°.

RESPOSTA

16. **a)** Verdadeira.

b) Falsa. Correção possível: O suplemento do complemento do ângulo de medida 23° mede 113°.

c) Verdadeira.

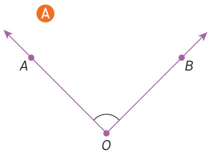
d) Falsa. Correção possível: O suplementar do suplementar do ângulo de medida 75° mede 75°.

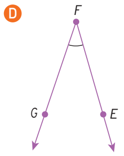
12. Os pares de ângulos congruentes são os das figuras: A e F; B e E; C e D.

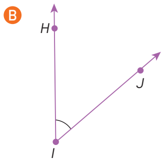
ATIVIDADES

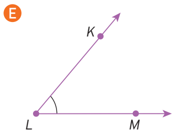
Responda sempre no caderno.

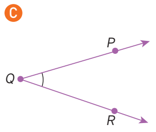
12. Nas figuras a seguir há três pares de ângulos congruentes. Encontre-os.

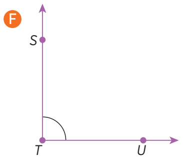




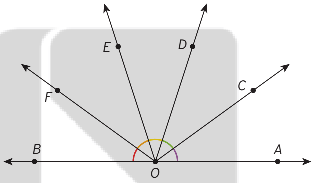








13. Na figura a seguir estão representados ângulos congruentes.



Com base na figura e na informação do enunciado, classifique cada sentença a seguir em verdadeira ou falsa.

a) $A\hat{O}C \cong B\hat{O}F$
b) $A\hat{O}C \cong D\hat{O}E$
c) $A\hat{O}D \cong D\hat{O}B$
d) $A\hat{O}E \cong C\hat{O}F$
e) $C\hat{O}E \cong C\hat{O}A$
f) $B\hat{O}F \cong E\hat{O}D$

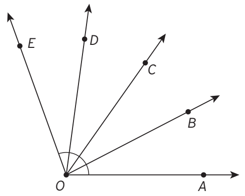
13. **a)** Verdadeira. **b)** Verdadeira. **c)** Falsa. **d)** Verdadeira. **e)** Falsa. **f)** Verdadeira.

14. Copie e complete o quadro a seguir no caderno.

	Medida do ângulo	Medida do complemento	Medida do suplemento
20°; 110°	70°		
66°; 24°			114°
90°; 90°		0°	
45°; 135°		45°	

16. Consulte as respostas neste manual.

15. Com base na figura a seguir, avalie cada uma das afirmações como verdadeira ou falsa.

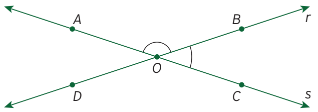


a) $A\hat{O}C$ é consecutivo a $A\hat{O}B$. **Verdadeira.**
b) $A\hat{O}D$ é adjacente a $A\hat{O}B$. **Falsa.**
c) $A\hat{O}B$ é adjacente a $B\hat{O}C$. **Verdadeira.**
d) $A\hat{O}B$ é consecutivo a $B\hat{O}C$. **Verdadeira.**
e) $A\hat{O}E$ é consecutivo a $B\hat{O}D$. **Falsa.**
f) $D\hat{O}E$ é adjacente a $C\hat{O}D$. **Verdadeira.**

16. Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas e corrija as falsas.

a) O complemento do ângulo de medida 47° mede 43°.
b) O suplemento do complemento do ângulo de medida 23° mede 103°.
c) O complementar do complementar do ângulo de medida 53° mede 53°.
d) O suplementar do suplementar do ângulo de medida 75° mede 105°.

17. Observe a figura a seguir. As retas *r* e *s* se cruzam no ponto *O*. A medida do ângulo $A\hat{O}B$ é 135°.



Ilustrações: ID/BR

a) Quais são os pares de ângulos que são opostos pelo vértice?
b) Determine as medidas dos ângulos $A\hat{O}D$, $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$.

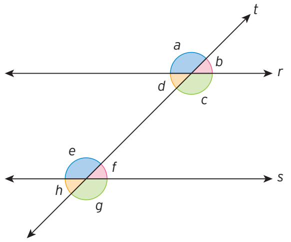
18. Dado um ângulo de medida 32°, indique a medida:

a) de seu complemento; **58°**
b) de seu suplemento; **148°**
c) do dobro do seu suplemento; **296°**
d) do complemento de sua quarta parte. **82°**

17. **a)** $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$; $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$.
b) med($A\hat{O}D$) = 45°; med($B\hat{O}C$) = 45°; med($C\hat{O}D$) = 135°

Ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal

Observe, na figura, os oito ângulos formados pelas retas paralelas *r* e *s* e pela reta *t*, concorrente a *r* e a *s*. A reta *t* é uma reta transversal a *r* e a *s*.



ID/BR

Os ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal podem ser classificados em **internos** ou **externos**, de acordo com a posição que ocupam.

Considerando a figura anterior, chamamos de ângulos internos os ângulos que estão entre as paralelas *r* e *s*. São eles:

$\hat{c}$ e $\hat{d}$

$\hat{e}$ e $\hat{f}$

Os demais são denominados ângulos externos:

$\hat{a}$ e $\hat{b}$

$\hat{g}$ e $\hat{h}$

Alguns dos pares de ângulos da figura recebem nomes especiais. Veja.

- Ângulos alternos externos: $\hat{a}$ e $\hat{g}$, $\hat{b}$ e $\hat{h}$.
- Ângulos alternos internos: $\hat{c}$ e $\hat{e}$, $\hat{d}$ e $\hat{f}$.
- Ângulos colaterais internos: $\hat{c}$ e $\hat{f}$, $\hat{d}$ e $\hat{e}$.
- Ângulos colaterais externos: $\hat{a}$ e $\hat{h}$, $\hat{b}$ e $\hat{g}$.
- Ângulos correspondentes: $\hat{a}$ e $\hat{e}$, $\hat{b}$ e $\hat{f}$, $\hat{c}$ e $\hat{g}$, $\hat{d}$ e $\hat{h}$.

Agora, com o auxílio de um transferidor, meça os ângulos $\hat{b}$ e $\hat{f}$. A medida que você obteve para esses ângulos é a mesma? **Resposta pessoal.** Repita as medições para os demais ângulos da figura e verifique quais outros pares de ângulos dela são congruentes. **Pares de ângulos congruentes: $\hat{a}$ e $\hat{e}$, $\hat{a}$ e $\hat{c}$, $\hat{a}$ e $\hat{g}$, $\hat{c}$ e $\hat{e}$, $\hat{c}$ e $\hat{g}$, $\hat{e}$ e $\hat{g}$, $\hat{b}$ e $\hat{d}$, $\hat{b}$ e $\hat{f}$, $\hat{b}$ e $\hat{h}$, $\hat{d}$ e $\hat{f}$, $\hat{d}$ e $\hat{h}$, $\hat{f}$ e $\hat{h}$.**

De modo geral, temos:

Ângulos correspondentes formados por duas retas paralelas e uma transversal são congruentes.

Observação

Chamamos de reta transversal a reta que corta duas ou mais retas em pontos distintos.

Consulte as respostas neste manual.

PARE E REFLITA

Reúna-se com um colega. Juntos, descrevam os ângulos:

- alternos internos;
- alternos externos;
- colaterais internos;
- colaterais externos;
- correspondentes.

ÂNGULOS FORMADOS POR DUAS RETAS PARALELAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

- Neste tema, os estudantes aprenderão a identificar os diferentes ângulos formados quando uma reta transversal corta duas retas paralelas. Para isso, é importante que eles saibam identificar retas paralelas e concorrentes e tenham conhecimentos prévios sobre ângulos, como os abordados até o momento.
- Complemente a atividade proposta no boxe *Pare e reflita* auxiliando os estudantes a escrever argumentos lógicos relacionados à descrição de cada par de ângulos. Por exemplo, sobre os ângulos alternos internos, eles podem escrever:
  - Se os dois ângulos são alternos internos e formados por duas retas paralelas e uma reta transversal, então eles são congruentes.
  - Como os dois ângulos não estão do mesmo lado de uma reta transversal, então esses ângulos são alternos.
  - Como os dois ângulos estão na região entre as retas paralelas, então esses ângulos são alternos internos.
  - Como os dois ângulos não estão do mesmo lado da reta transversal e estão na região entre as retas paralelas, então esses ângulos são alternos internos.
  - Portanto, esses ângulos são congruentes.

DE OLHO NA BASE

Medir com transferidor e verificar as relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma reta transversal são ações que contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA23**.

RESPOSTAS – *PARE E REFLITA*

Resposta possível:

- Alternos internos: pares de ângulos que estão em posição alternada em relação à reta transversal e estão na região entre as duas retas paralelas.
- Alternos externos: pares de ângulos que estão em posição alternada em relação à reta transversal e estão na região externa às duas retas paralelas.
- Colaterais internos: pares de ângulos que estão do mesmo lado em relação à reta transversal e estão na região entre as duas retas paralelas.
- Colaterais externos: pares de ângulos que estão do mesmo lado em relação à reta transversal e estão na região externa às duas retas paralelas.
- Correspondentes: pares de ângulos que ocupam a mesma posição em relação à reta transversal, sendo que um ângulo está em uma reta paralela e o outro ângulo está na outra reta.

DESCUBRA MAIS

Essa atividade pode ser realizada utilizando a metodologia de sala de aula invertida, uma vez que ela apresenta um roteiro claro para os estudantes seguirem e construírem os ângulos solicitados. Explique que eles deverão realizar a atividade em casa, tomando cuidado no manuseio da tesoura. Além disso, reforce a importância de as retas serem paralelas e de nomearem os ângulos antes de recortá-los. Após a confecção do material, os estudantes poderão responder às questões. Em sala de aula, eles deverão utilizar o material construído e, então, o espaço da aula será usado para discussões acerca das dificuldades e aprendizagens envolvidas na construção dos ângulos e na elaboração das respostas. Se julgar oportuno, grave um vídeo reproduzindo o passo a passo da construção apresentado no Livro do Estudante e disponibilize-o aos estudantes para que sigam suas orientações.

- Na questão **6**, após sobreporem os ângulos e perceberem que eles não são congruentes, pergunte aos estudantes se podem estabelecer alguma outra relação entre eles. Espera-se que eles percebam que os pares de ângulos colaterais internos e externos são suplementares.

PARA CONCLUIR

Ao responderem às questões propostas, os estudantes identificam padrões e fazem conjecturas, o que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático.

Veja a seguir as respostas das questões propostas.

1. $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$; $\widehat{a}$ e $\widehat{c}$; $\widehat{a}$ e $\widehat{d}$; $\widehat{a}$ e $\widehat{e}$; $\widehat{a}$ e $\widehat{f}$; $\widehat{a}$ e $\widehat{g}$; $\widehat{a}$ e $\widehat{h}$; $\widehat{b}$ e $\widehat{c}$; $\widehat{b}$ e $\widehat{d}$; $\widehat{b}$ e $\widehat{e}$; $\widehat{b}$ e $\widehat{f}$; $\widehat{b}$ e $\widehat{g}$; $\widehat{b}$ e $\widehat{h}$; $\widehat{c}$ e $\widehat{d}$; $\widehat{c}$ e $\widehat{e}$; $\widehat{c}$ e $\widehat{f}$; $\widehat{c}$ e $\widehat{g}$; $\widehat{c}$ e $\widehat{h}$; $\widehat{d}$ e $\widehat{e}$; $\widehat{d}$ e $\widehat{f}$; $\widehat{d}$ e $\widehat{g}$; $\widehat{d}$ e $\widehat{h}$; $\widehat{e}$ e $\widehat{f}$; $\widehat{e}$ e $\widehat{g}$; $\widehat{e}$ e $\widehat{h}$; $\widehat{f}$ e $\widehat{g}$; $\widehat{f}$ e $\widehat{h}$; $\widehat{g}$ e $\widehat{h}$.
2. 28 pares.
3. **a.** Resposta possível: $\widehat{a}$ e $\widehat{d}$; $\widehat{e}$ e $\widehat{f}$.
   b. Resposta possível: $\widehat{c}$ e $\widehat{g}$; $\widehat{a}$ e $\widehat{e}$.
   c. $\widehat{c}$ e $\widehat{e}$; $\widehat{d}$ e $\widehat{f}$
   d. $\widehat{b}$ e $\widehat{h}$; $\widehat{a}$ e $\widehat{g}$
   e. $\widehat{d}$ e $\widehat{e}$; $\widehat{c}$ e $\widehat{f}$
   f. $\widehat{b}$ e $\widehat{g}$; $\widehat{a}$ e $\widehat{h}$
4. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que os ângulos alternos internos são congruentes.
5. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que os ângulos alternos externos são congruentes.
6. Não. Espera-se que os estudantes percebam que a conclusão é diferente, pois os ângulos colaterais são suplementares.

DESCUBRA MAIS

Relação entre ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal

Vimos que os ângulos correspondentes formados por duas retas paralelas e uma transversal são congruentes. Agora, vamos realizar uma atividade para verificar essa relação.

Materiais

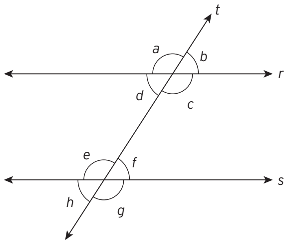
- folha de papel vegetal
- lápis
- caderno
- régua
- lápis de cor
- tesoura com pontas arredondadas

Como fazer

❶ Observe a figura. Posicione a folha de papel vegetal sobre ela e reproduza-a. Depois, repita esse procedimento, mas reproduza separadamente cada um dos ângulos da figura.

❷ Agora, pinte de uma cor diferente cada um dos ângulos que você reproduziu separadamente no passo anterior.

❸ Recorte, com cuidado, os ângulos que você coloriu.



ID/BR

Para concluir

Responda sempre no caderno.

Consulte as respostas neste manual.

1. Usando os ângulos que você recortou, faça combinações e registre no caderno todos os pares de ângulos que podem ser formados.
2. Quantos pares de ângulos foram formados no total?
3. Observando a figura que você reproduziu, identifique dois pares de ângulos:
   a) adjacentes;
   b) correspondentes;
   c) alternos internos;
   d) alternos externos;
   e) colaterais internos;
   f) colaterais externos.
4. Escolha um par de ângulos alternos internos. Sobreponha o ângulo recortado da reta *r* com o seu correspondente na reta *s* da figura que você reproduziu. O que você percebe em relação às suas medidas?
5. Repita o procedimento da atividade anterior para um par de ângulos alternos externos. O que você percebe em relação às suas medidas?
6. Se sobrepusermos pares de ângulos colaterais internos ou colaterais externos como fizemos com os alternos internos e alternos externos, observaremos a mesma relação entre suas medidas?

DE OLHO NA BASE

Verificar e determinar, por meio de uma atividade concreta de sobreposição de ângulos, que existem relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma reta transversal, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA23**.

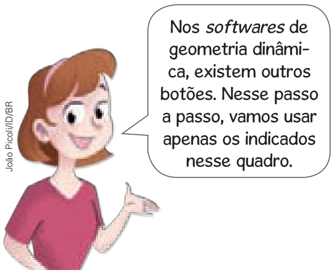
Esse boxe contribui também para a **competência específica de Matemática 3**, permitindo aos estudantes que se sintam seguros em relação à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança de solucionar problemas.

Além disso, a atividade proposta incentiva a curiosidade intelectual por meio da elaboração e verificação de hipóteses, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 2**.

Verificando as relações entre ângulos alternos e ângulos colaterais

Vamos verificar as relações entre ângulos alternos e ângulos colaterais, com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica.

Mas, antes, vamos conhecer algumas das ferramentas comuns nesses *softwares*. Observe a representação dos ícones e seus significados.

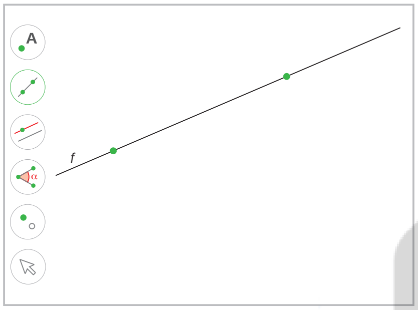


João Picoli/ID/BR

Ferramenta ponto.
Ferramenta reta definida por dois pontos.
Ferramenta reta paralela.
Ferramenta ângulo definido por três pontos.
Ferramenta esconder objetos.
Ferramenta mover.

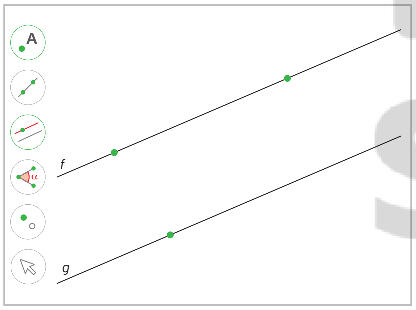
ID/BR

1º passo: Com a ferramenta , construa uma reta *f*.



ID/BR

2º passo: Com a ferramenta , marque um ponto fora da reta *f* e, com a ferramenta , construa a reta *g* paralela a *f* (clique sobre o ponto marcado e sobre a reta *f*).



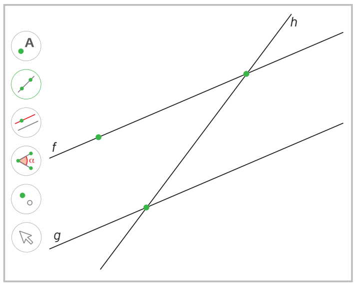
ID/BR

- Depois de os estudantes realizarem a atividade de sobreposição dos ângulos proposta no boxe *Descubra mais*, se possível, leve-os ao laboratório de informática para observar as características desses pares de ângulos utilizando um *software* de geometria dinâmica.
- Esse tipo de atividade é importante para que os estudantes analisem as relações entre os ângulos formados quando duas retas paralelas são cortadas por uma reta transversal.
- Explore o *software* com relação ao movimento que os estudantes podem fazer para analisar o que acontece com os ângulos. Leve-os a perceber que, mesmo modificando a medida dos ângulos, as relações (o fato de serem congruentes ou suplementares) permanecem válidas.
- Caso você ainda não conheça o *software* que vai utilizar com os estudantes, realize a atividade antes de propô-la a eles para se familiarizar com as ferramentas, pois, de um *software* para outro, pode haver botões com ícones ou nomes diferentes.

DE OLHO NA BASE

Verificar, por meio de *software* de geometria dinâmica, que as relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma reta transversal são válidas para qualquer ângulo formado pelas retas favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA23**.

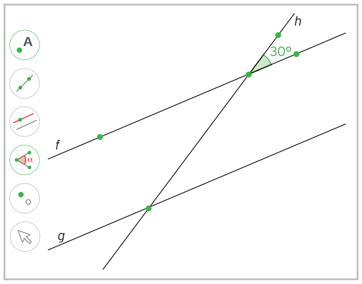
3º passo: Com a ferramenta , construa a reta *h* transversal às retas paralelas *f* e *g*.



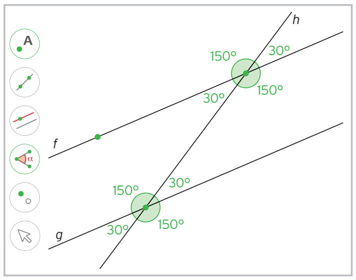
Ilustrações: ID/BR

4º passo: Com a ferramenta , marque um ponto na reta *f* e outro na reta *h*.

Depois, com a ferramenta , selecione os três pontos para marcar o ângulo.



5º passo: Repita o passo anterior, marcando pontos na reta *g* também, até obter uma figura parecida com a figura a seguir (as medidas dos ângulos podem variar). Dica: Use a ferramenta para esconder alguns pontos.



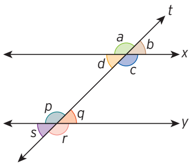
Agora, com a ferramenta , selecione um dos pontos da reta *f* e mova-o. Faça o mesmo para o outro ponto da reta *f* e, depois, para um ponto da reta *g*. O que acontece com os pares de ângulos alternos internos ou externos? E com os pares de ângulos colaterais internos ou externos?

Espera-se que os estudantes percebam que os pares de ângulos alternos internos ou alternos externos, apesar de mudarem suas medidas, continuam congruentes, e que os pares de ângulos colaterais internos ou colaterais externos permanecem suplementares.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

19. Observe os ângulos formados pelas retas *x*, *y* e *t*, sendo *x* e *y* retas paralelas entre si.



Agora, responda: Quais pares de ângulos são:

a) correspondentes? **$\hat{a}$ e $\hat{p}$; $\hat{d}$ e $\hat{s}$; $\hat{b}$ e $\hat{q}$; $\hat{c}$ e $\hat{r}$.**

b) alternos internos? **$\hat{d}$ e $\hat{q}$; $\hat{c}$ e $\hat{p}$.**

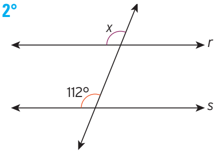
c) alternos externos? **$\hat{a}$ e $\hat{r}$; $\hat{b}$ e $\hat{s}$.**

d) colaterais internos? **$\hat{c}$ e $\hat{q}$; $\hat{d}$ e $\hat{p}$.**

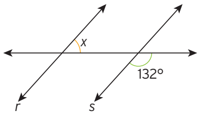
e) colaterais externos? **$\hat{a}$ e $\hat{s}$; $\hat{b}$ e $\hat{r}$.**

20. Nas figuras a seguir, as retas *r* e *s* são paralelas entre si. Determine a medida, em grau, do ângulo *x*, em cada item.

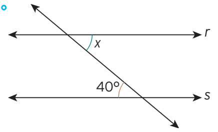
a) **112°**



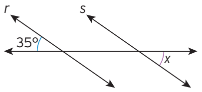
b) **48°**



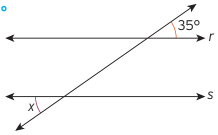
c) **40°**



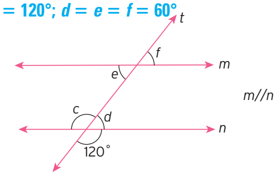
d) **35°**



e) **35°**

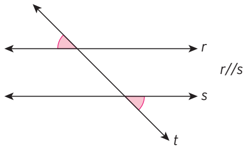


21. Determine a medida dos ângulos indicados pelas letras *c*, *d*, *e* e *f* na figura a seguir. **$c = 120°$; $d = e = f = 60°$**

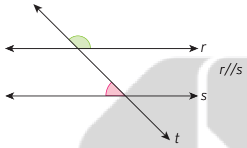


22. Todas as frases a seguir estão incorretas. Encontre o erro em cada caso e reescreva as frases corretamente. **Consulte as respostas neste manual.**

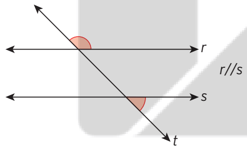
a) Os ângulos destacados são correspondentes, pois eles são congruentes.



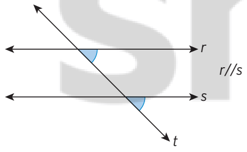
b) Os ângulos destacados são alternos internos e suplementares.



c) Os ângulos destacados são correspondentes, pois estão do mesmo lado da transversal.



d) Os ângulos destacados são colaterais externos, pois estão do mesmo lado em relação à transversal.



Ilustrações: ID/BR

RESPOSTA

22. Respostas possíveis.

a) O erro está em afirmar que os ângulos destacados são correspondentes, pois, como estão em lados opostos em relação à reta transversal, eles não são correspondentes.
Correção da frase: Os ângulos destacados são congruentes, pois são alternos externos.

b) O erro está em afirmar que os ângulos destacados são alternos internos, pois um deles não está entre as retas paralelas.
Correção da frase: Os ângulos destacados não são alternos internos, mas são suplementares.

c) O erro está em afirmar que os ângulos destacados são correspondentes, pois para que eles sejam correspondentes não basta que estejam do mesmo lado da reta transversal. Um deles deve ser interno em relação às retas paralelas e o outro, externo.
Correção da frase: Os ângulos destacados são colaterais externos, pois estão do mesmo lado da reta transversal e não estão entre as retas paralelas.

d) O erro está em afirmar que os ângulos destacados são colaterais externos, pois o fato de estarem do mesmo lado em relação à reta transversal não garante essa condição. Ângulos colaterais externos não devem estar entre as retas paralelas.
Correção da frase: Os ângulos destacados são correspondentes, pois estão do mesmo lado em relação à reta transversal e um é interno e o outro é externo em relação às retas paralelas.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Ao realizar a atividade **3**, verifique se os estudantes efetuam os cálculos ou apenas relacionam as colunas ordenando os valores. Se eles colocarem os valores em segundos em ordem crescente, vão responder corretamente à atividade, mas incentive-os a efetuar os cálculos.
- Antes de iniciar a atividade **6**, retome os conceitos de ângulos complementares e suplementares. No item **e**, verifique se os estudantes conseguem resolver mentalmente; caso contrário, dê exemplos. Questione-os se isso ocorre com qualquer ângulo e pergunte, ao final, se o suplemento do suplemento de um ângulo também tem a mesma medida que o ângulo.
- Verifique, na atividade **9**, se os estudantes percebem que na figura há dois lados paralelos, pois ambos os lados são perpendiculares a um mesmo lado.

RESPOSTA

7. Respostas possíveis:

a) $\widehat{d} = 40°$, pois é oposto pelo vértice ao ângulo que mede 40°.

$\widehat{c} = \widehat{e} = 140°$, pois cada um é suplementar ao ângulo que mede 40°.

b) $\widehat{x} = 130°$, pois é oposto pelo vértice ao ângulo que mede 130°.

$\widehat{y} = \widehat{z} = 40°$, pois cada um é suplementar ao ângulo que mede 140°.

c) $\widehat{a} = 85°$, pois é oposto pelo vértice ao ângulo de 85°.

$\widehat{c} = 13°$, pois é oposto pelo vértice ao ângulo que mede 13°.

$\widehat{d} = 82°$, pois $\widehat{d} = 180° - (85° + 13°) = 82°$.

$\widehat{b} = \widehat{d} = 82°$, pois são opostos pelo vértice (portanto, têm a mesma medida) e as medidas de todos os ângulos somam 360°.

DIVERSIFICANDO

1. Gustavo está tentando abrir um cofre seguindo as orientações de um roteiro. O último passo para abrir o cofre é dar um giro no sentido anti-horário igual ao triplo de 36° 16′ 56″. Qual é a medida do giro que Gustavo terá de realizar para abrir o cofre? **108° 50′ 48″**


João Picoli/ID/BR

2. Determine o resultado da adição da metade de 104° 35′ 14″ com um terço de 33° 33′ 33″. **63° 28′ 48″**

3. Relacione as medidas de ângulos representadas em grau, minuto e segundo com as respectivas medidas em segundo.

a)	2° 30′ 20″	I)	12 016″
b)	3° 20′ 16″	II)	23 450″
c)	4° 38′ 25″	III)	9 020″
d)	5° 20′ 44″	IV)	16 705″
e)	6° 30′ 50″	V)	19 244″

a-III; b-I; c-IV; d-V; e-II

4. Qual é o resultado da divisão de 1° por 3? Esse resultado é diferente se for calculado em minuto ou em segundo? **20′; o resultado é o mesmo se for calculado em minuto ou em segundo.**

5. Usando um transferidor, determine as medidas aproximadas dos ângulos destacados em cada bandeira e some-as.

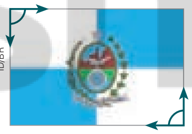
a)


Peace PhotoHunter/Shutterstock.com/ID/BR

132°

← **Bandeira do Mato Grosso.**

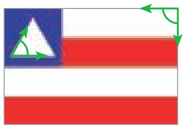
b)


NaughtyNut/Shutterstock.com/ID/BR

182°

← **Bandeira do Rio de Janeiro.**

c)


Oxygen64/Shutterstock.com/ID/BR

150°

← **Bandeira da Bahia.**

d)


dovla982/Shutterstock.com/ID/BR

102°

← **Bandeira de Santa Catarina.**

6. Copie as frases dos itens a seguir no caderno e complete-as. **6. b) suplementares**

a) Se dois ângulos são complementares e um deles mede 36°, então o outro mede ★. **54°**

b) Dois ângulos com medidas 57° e 123° podem ser chamados de ângulos ★.

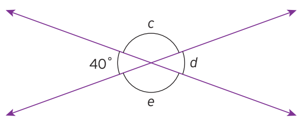
c) O suplemento de um ângulo de 86° mede ★. **94°**

d) 33° é a medida do complemento de um ângulo de ★. **57°**

e) O complemento do complemento de um ângulo de 56° é ★. **56°**

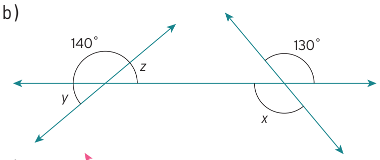
7. Encontre as medidas dos ângulos indicados em cada item a seguir. Justifique suas respostas. **Consulte as respostas neste manual.**

a)



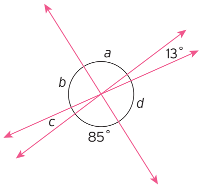
ID/BR

b)



ID/BR

c)



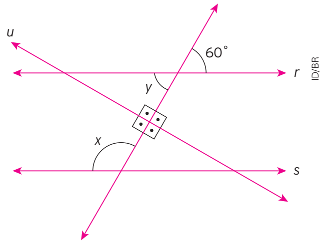
ID/BR

ESTRATÉGIAS DE APOIO

- Retome as relações entre graus, minutos e segundos e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números inteiros em que ocorram reagrupamentos, caso os estudantes sintam dificuldade em operar com ângulos.
- Se, ao medir os ângulos da atividade **5**, os estudantes tiverem dificuldade em ler o valor do ângulo no transferidor, sugira a eles que prolonguem os lados dos ângulos a serem medidos. Verifique se estão posicionando corretamente o transferidor, fazendo coincidir um dos lados do ângulo com a linha de fé do transferidor e o vértice do ângulo com o centro do transferidor.
- Sugira aos estudantes que façam decalque dos ângulos da atividade **7**, caso ainda não consigam visualizar as relações.
- Nas atividades **8**, **10** e **12**, em que os estudantes precisam perceber os ângulos o.p.v., sugira a eles que copiem a figura no caderno e cubram as retas de cores diferentes para facilitar a visualização.

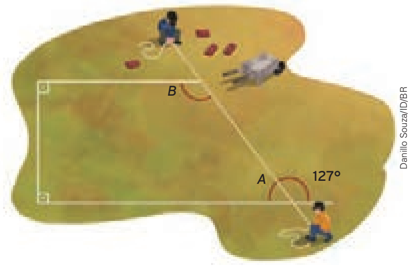
Responda sempre no caderno.

8. Sabendo que as retas *r* e *s* são paralelas e que as retas *t* e *u* são transversais a elas, determine o valor de *x* e *y*, em grau.
$x = 120°$; $y = 60°$



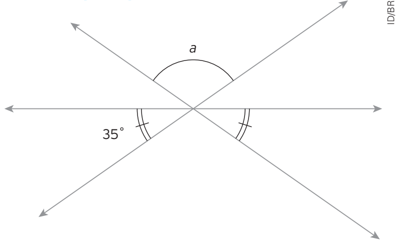
9. Reúna-se com um colega para ler o texto a seguir e fazer o que se pede.

Dois pedreiros usaram cordas para demarcar uma área em forma de trapézio, como indicado na figura a seguir.

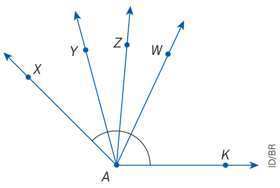


Determine o valor de *A* e *B*, em grau, dos ângulos formados pelas cordas. **$A = 53°$; $B = 127°$**

10. Observe a figura a seguir e determine o valor de *a*, em grau. Registre como você pensou para chegar a essa conclusão.
110°. Resposta pessoal.



11. Observe a figura e faça o que se pede.

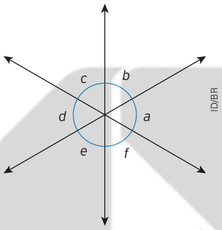


a) Classifique cada afirmação a seguir em verdadeira ou falsa.

I. $X\hat{A}Y$ é consecutivo a $W\hat{A}K$. **Falsa.**
II. $Y\hat{A}Z$ é adjacente a $Z\hat{A}W$. **Verdadeira.**
III. $X\hat{A}Z$ é adjacente a $Z\hat{A}K$. **Verdadeira.**

b) Com o auxílio de um transferidor, meça os ângulos $X\hat{A}Y$, $Y\hat{A}Z$, $Z\hat{A}W$ e $W\hat{A}K$. Há algum par de ângulos congruentes? Em caso afirmativo, qual ou quais? **Sim: $Y\hat{A}Z$ e $Z\hat{A}W$.**

12. A figura a seguir representa três retas concorrentes em um único ponto. Copie a figura no caderno e responda às perguntas.



a) Quais são os pares de ângulos opostos pelo vértice? **$\hat{a}$ e $\hat{d}$; $\hat{b}$ e $\hat{e}$; $\hat{c}$ e $\hat{f}$.**

b) Quais trios de ângulos somam 180°?

c) Você precisou descobrir a medida de cada um dos ângulos representados na figura para responder ao item anterior? **Não.**

d) Ao adicionar a medida de quais ângulos obtemos 360°? **$\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$ e $\hat{f}$.**

e) Você precisou descobrir a medida de cada um dos ângulos representados na figura para responder ao item anterior? **Não.**

13. Os ângulos $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}E$ são adjacentes, e a medida de $C\hat{O}D$ excede a medida de $D\hat{O}E$ em 26 graus. Sabendo que $D\hat{O}E$ mede 65 graus, calcule a medida de $C\hat{O}E$. **156°**

12. b) $\hat{c}$, $\hat{b}$, $\hat{a}$; $\hat{b}$, $\hat{a}$, $\hat{f}$; $\hat{a}$, $\hat{f}$, $\hat{e}$; $\hat{f}$, $\hat{e}$, $\hat{d}$; $\hat{e}$, $\hat{d}$, $\hat{c}$; $\hat{d}$, $\hat{c}$, $\hat{b}$

- Comente com os estudantes que, na atividade **10**, os símbolos iguais representam ângulos iguais.
- Retome os conceitos de ângulos consecutivos e de ângulos adjacentes antes de iniciar a atividade **11**.
- Na atividade **13**, sugira aos estudantes que façam um desenho dos ângulos para determinar a medida solicitada. Pergunte a eles se os ângulos $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}E$ são consecutivos. A ideia é reforçar os conceitos de ângulos adjacentes e consecutivos. Espera-se que eles percebam que, se os ângulos forem adjacentes, serão consecutivos. Lembre-os de que todo par de ângulos adjacentes é um par de ângulos consecutivos, mas nem todo par de ângulos consecutivos é um par de ângulos adjacentes.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Elementos dos polígonos.
- Diagonais dos polígonos.
- Ângulos externos e internos dos polígonos.
- Condição de existência de um triângulo.
- Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.
- Soma das medidas dos ângulos internos e externos de polígonos.
- Classificação dos triângulos quanto aos lados e aos ângulos.
- Construção de triângulos com régua e compasso.
- Construção de polígonos regulares com régua e transferidor.

Objetivos

- Reconhecer polígonos e seus elementos.
- Determinar o número de diagonais de um polígono.
- Identificar os ângulos de um polígono.
- Estabelecer a relação entre ângulos internos e externos de um polígono.
- Reconhecer que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
- Reconhecer que a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono é 360°.
- Determinar a medida dos ângulos internos e externos de um polígono regular.
- Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos.
- Classificar os triângulos quanto aos lados e aos ângulos.
- Reconhecer a condição de existência do triângulo em relação à medida de seus lados.
- Construir triângulos com o auxílio de régua e compasso.
- Descrever por fluxograma a construção de um triângulo qualquer.
- Construir quadrado e polígono regular com régua e transferidor.
- Descrever por fluxograma a construção de polígonos regulares com régua e transferidor.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de continuar o estudo de ângulos, reconhecendo, em polígonos, as relações entre ângulos internos e ângulos externos. Além de compreender a condição de existência de um triângulo, eles poderão construir triângulos e quadrados utilizando régua, compasso e transferidor. Com esses conhecimentos, os estudantes poderão ter maior familiaridade com termos espercíficos do vocabulário geométrico, favorecendo o pensamento geométrico e, consequentemente, aumentando o repertório matemático nesse campo.

Capítulo

2 POLÍGONOS

Para o desenvolvimento do capítulo, é necessário que os estudantes identifiquem os elementos de um polígono e saibam manusear régua e compasso e construir ângulos usando o transferidor.

Retomando a ideia de polígono

Acredita-se que a primeira pipa surgiu na China, 200 anos antes de Cristo. No Brasil, ela foi trazida pelos portugueses por volta de 1596 e hoje é conhecida por diversos nomes: arraia ou raia, papagaio, pandorga, entre outros.

Empinar pipa é uma brincadeira muito praticada em diversas culturas. Seja como brinquedo, seja como objeto artístico ou de ornamentação, as pipas atravessaram séculos de história e, ainda hoje, dançam e colorem o céu com diversas cores e formas, atraindo muitos olhares.

No entanto, é sempre bom estar atento! Ao empinar pipas é importante seguir as recomendações de segurança, como nunca empiná-las em locais onde há cabos elétricos aéreos, evitando, assim, acidentes.

Agora, observe o formato da pipa da imagem a seguir. Que figura geométrica ela lembra? Apesar de algumas pipas apresentarem partes curvas, de maneira geral suas formas lembram polígonos.

> Uma figura geométrica plana formada por uma linha poligonal fechada e simples e sua região interna é chamada de **polígono**.

↓ A pipa já teve diversas finalidades. Ela serviu de inspiração para a invenção do para-raios e já foi utilizada até mesmo em guerras, como um modo de sinalização militar.

(IN)FORMAÇÃO

O caminho das estrelas

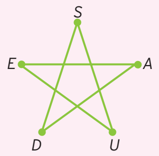
Certa noite, por volta de 500 anos antes do nascimento de Cristo, um viajante chegava a uma estalagem grega, para ali passar a noite.

Durante a noite, o viajante sentiu-se muito mal.

O dono da estalagem fez o máximo possível para ajudá-lo a restabelecer-se. Mas nada [de o] doente melhorar.

O viajante, percebendo que ia morrer sem ter a possibilidade de pagar o dono da estalagem pelos seus esforços, pediu uma lousa. Com a mão trêmula, desenhou uma estrela de cinco pontas ou pentagrama. Em seguida, pediu ao dono da estalagem que deixasse a lousa fixada à porta de seu estabelecimento.

Logo depois o viajante morria.

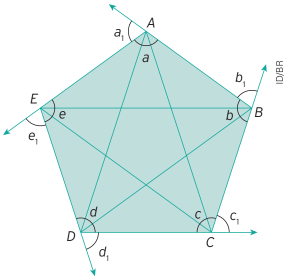


ID/BR

Um certo dia, um outro viajante que passava identificou o sinal na estalagem. Entrou, perguntou ao dono sobre a origem do desenho e, ouvindo a resposta, recompensou o estabelecimento por sua caridade.

Conhecemos hoje esta história através de um historiador e matemático romano, que acrescenta que os dois viajantes pertenciam à escola do grande sábio grego chamado Pitágoras, nascido no ano de 581 a.C. Os pitagóricos eram geralmente

Agora, considere o polígono a seguir. Vamos rever e aprofundar nossos conhecimentos sobre os elementos de um polígono.



- **Lados:** São os segmentos de reta que formam o polígono. No polígono *ABCDE*, os lados são: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$.
- **Vértices:** São os pontos de encontro de dois lados consecutivos de um polígono. No polígono *ABCDE*, os vértices são: *A*, *B*, *C*, *D* e *E*.
- **Ângulos internos:** São os ângulos formados por dois lados consecutivos. No polígono *ABCDE*, os ângulos internos são: $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$ e $\hat{e}$.
- **Ângulos externos:** São os ângulos formados por um lado do polígono e pelo prolongamento de outro lado consecutivo. Na figura, os ângulos externos são: $\hat{a}_1$, $\hat{b}_1$, $\hat{c}_1$, $\hat{d}_1$ e $\hat{e}_1$.
- **Diagonais:** São os segmentos internos ao polígono que unem dois vértices não consecutivos. No polígono *ABCDE*, as diagonais são: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$.

POLÍGONOS CONVEXOS E POLÍGONOS NÃO CONVEXOS

Quando, para quaisquer dois pontos *A* e *B*, pertencentes ao interior de um polígono, o segmento $\overline{AB}$ estiver totalmente contido nesse polígono, dizemos que ele é convexo. Caso contrário, dizemos que ele é um polígono não convexo.

Neste capítulo vamos trabalhar apenas com polígonos convexos, que chamaremos simplesmente de polígonos.


Evgeny Atamanenko/Shutterstock.com/ID/BR

sm

RETOMANDO A IDEIA DE POLÍGONO

- A pipa é um brinquedo popular que resgata vivências e culturas de uma comunidade ao longo dos tempos. Em algumas cidades brasileiras, ela é considerada um patrimônio cultural, histórico e imaterial. A ludicidade do ato de empinar pipa permite fazer reflexões com os estudantes. Pergunte a eles se costumam brincar ao ar livre, de quais brincadeiras seus pais ou responsáveis gostavam e se eles têm algum momento de brincadeiras ou atividades com seus familiares como o retratado na abertura deste capítulo. Essa conversa contribui para desenvolver os **Temas Contemporâneos Transversais** Diversidade Cultural e Vida Familiar e Social, que pertencem às macroáreas **Multiculturalismo** e **Cidadania e Civismo**, respectivamente.
- Retome os conceitos relacionados aos elementos dos polígonos com o intuito de verificar o conhecimento prévio dos estudantes e nortear o estudo deste capítulo.
- Peça aos estudantes que desenhem, no caderno, uma pipa como a que está na abertura deste capítulo. Verifique se eles representam as varetas (diagonais) e compreendem que elas são perpendiculares. Solicite, também, que identifiquem semelhanças e diferenças comparando a representação da pipa com outras figuras geométricas planas que conhecem, como quadrados, retângulos, losangos, triângulos, etc. Nesse caso, espera-se que eles observem o número de lados, a congruência dos lados de mesma medida, etc.
- Desenhe exemplos de polígonos côncavos e convexos na lousa e peça aos estudantes que os classifiquem, caso perceba que eles não têm esses conceitos bem definidos.

DE OLHO NA BASE

Fazer observações relativas aos aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais favorece o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 4**.

pessoas ricas da sociedade de sua época. Envolviam-se nas atividades políticas, religiosas, filosóficas e matemáticas e o emblema da escola era o pentagrama ou pentágono estrelado.

Mas por que uma estrela? Não se sabe ao certo, mas durante o século VI a.C., em certas regiões do mundo grego, intensificou-se a vida religiosa. Dentre as religiões, uma delas, que acreditava na imortalidade da alma e na transmigração da alma através de vários corpos, acabou se difundindo bastante. Essa religião era o orfismo e, segundo ela, a alma das pessoas, por sua própria natureza, aspiraria a retornar à sua pátria celeste, isto é, às estrelas. Isso através da ajuda de um Deus libertador chamado Dionísio.

Pitágoras modificou essa religião, colocando no lugar de Dionísio nada mais nada menos que a própria matemática. Isso mesmo. O pitagorismo fez da Matemática a via de salvação da alma; o único meio de conduzi-la das trevas terrenas às estrelas. Talvez seja essa a razão da adoção da estrela como símbolo da escola.

Mas não se deve entender ao pé da letra a expressão “Salvação da Alma” e o termo “Estrela”. Isso porque era da escola pitagórica de onde saíam os principais conselheiros políticos daquela época. Os pitagóricos – políticos por excelência – foram os primeiros a perceber com clareza que a matemática constituía a chave de acesso aos segredos do universo. E utilizaram-na não apenas para compreender os números e as figuras, mas também para governar os próprios homens, de acordo com uma política conservadora e reacionária.

Sabe-se que na antiguidade era bastante difundida e aceita a crença de que apenas os membros das classes dirigentes possuíam alma. Assim, apenas algumas almas estariam destinadas ao caminho das estrelas.

MIGUEL, A. *et al*. *História da Matemática em atividades didáticas*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009. p. 189-190.

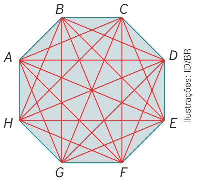
DIAGONAIS DE UM POLÍGONO

- Depois de apresentar as diagonais de um octógono regular, explore os polígonos com menor número de lados.
- Indique as diagonais do retângulo e do pentágono e, depois, peça aos estudantes que desenhem dois polígonos, um de 5 lados e outro de 6 lados, traçando suas diagonais. Assim, espera-se que eles compreendam a definição de diagonal de um polígono e consigam perceber a relação entre o número de diagonais e o número de lados do polígono.

Diagonais de um polígono

Agora, vamos estudar um pouco mais um dos elementos de um polígono: a diagonal.

Considere o polígono *ABCDEFGH* a seguir.



Ilustrações: ID/BR

figura 1

Todas as diagonais desse polígono foram traçadas em vermelho. Observe na figura 2 que, a partir do vértice *A*, foram traçadas 5 diagonais: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{AG}$.

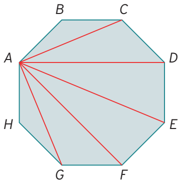


figura 2

Perceba que isso também ocorre com os demais vértices. Nas figuras 3 e 4, veja as 5 diagonais que foram traçadas dos vértices *B* e *C*.

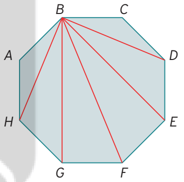


figura 3

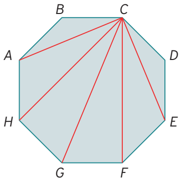


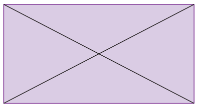
figura 4

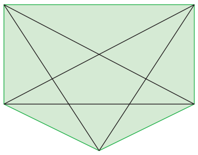
O polígono *ABCDEFGH* é um octógono e tem 8 vértices. Como de cada vértice foram traçadas 5 diagonais, poderíamos concluir que a quantidade de diagonais desse polígono é 40, pois $8 \cdot 5 = 40$. Mas, se olharmos novamente para a figura 1 e contarmos, uma a uma, as diagonais traçadas, não obteremos 40. Você sabe por que isso acontece? **Resposta pessoal.**

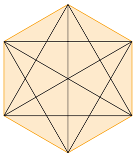
Observe que, nas figuras 2 e 4, $\overline{AC}$ e $\overline{CA}$ representam a mesma diagonal.

Assim, ao contar as diagonais traçadas a partir do vértice *A* e as diagonais traçadas a partir do vértice *C*, a diagonal $\overline{AC}$ seria contada duas vezes. Note que isso acontece com as demais diagonais do polígono *ABCDEFGH*. Assim, dividimos o total de diagonais que calculamos por 2, concluindo que o polígono *ABCDEFGH* tem 20 diagonais, pois $40 : 2 = 20$.

Agora, veja estes outros polígonos, com todas as suas diagonais traçadas.







Ilustrações: ID/BR

Será que existe alguma relação entre o número de diagonais e o número de lados de cada um desses polígonos? Para verificar, vamos organizar as informações em um quadro.

Polígono	Número de lados	Número de diagonais traçadas a partir de um vértice	Total de diagonais do polígono
Quadrilátero	4	1	2
Pentágono	5	2	5
Hexágono	6	3	9
Octógono	8	5	20

Compare a coluna com o número de lados com a coluna com o número de diagonais traçadas a partir de um vértice. Você observou alguma regularidade? **Resposta pessoal.**

Perceba que o número de diagonais traçadas a partir de um vértice é o número de lados do polígono menos 3 unidades.

- Quadrilátero: $4 - 3 = 1$
- Pentágono: $5 - 3 = 2$
- Hexágono: $6 - 3 = 3$
- Octógono: $8 - 3 = 5$

Agora, observe a coluna com o total de diagonais do polígono e os procedimentos utilizados na página anterior para obter o total de diagonais do octógono *ABCDEFGH*. Você consegue explicar como obter o número total de diagonais de um polígono qualquer de *n* lados? **Resposta pessoal.**

O total de vértices de um polígono é igual ao número de lados desse polígono. Assim, para obter o total de diagonais de um polígono, podemos multiplicar o número de lados pelo número de diagonais traçadas a partir de um vértice e dividir o resultado por 2.

Exemplo

Vamos determinar quantas diagonais tem um polígono de 20 lados.

Primeiro, determinamos o número de diagonais traçadas a partir de um vértice. Para isso, basta subtrair 3 do total de lados do polígono.

Assim, temos:

$$20 - 3 = 17$$

Concluímos que, a partir de cada vértice desse polígono, são traçadas 17 diagonais.

Agora, multiplicamos 17 pelo número de lados do polígono, que corresponde ao número de vértices desse polígono, e dividimos o resultado por 2, pois cada uma das diagonais é contada duas vezes.

$$\frac{17 \cdot 20}{2} = \frac{340}{2} = 170$$

Logo, um polígono de 20 lados tem, no total, 170 diagonais.

- Utilize o quadro com as informações sobre os polígonos para sistematizar as observações dos estudantes acerca da relação entre o número de lados e o número de diagonais de um polígono.
- Proponha aos estudantes que registrem suas observações sobre os polígonos quanto:
  - ao número de diagonais que saem de cada vértice e sua relação com o número de lados do polígono;
  - ao número total de diagonais e sua relação com o número de lados do polígono.
- Peça aos estudantes que expliquem por que um polígono de 6 lados, que tem 3 diagonais saindo de cada vértice, não possui 18 diagonais. Espera-se que eles compreendam que a diagonal traçada a partir de um vértice *A* até um vértice *C* deve ser contada apenas uma vez, pois é a mesma que aquela traçada a partir do vértice *C* até o vértice *A*.

Assim, espera-se que os estudantes percebam que o número de diagonais de um polígono é obtido a partir do número de diagonais em cada vértice menos 3, multiplicado pelo número de lados do polígono e dividido por 2.

ÂNGULOS DE UM POLÍGONO

- Para apreender os conceitos de ângulos internos e externos, é necessário que os estudantes já tenham compreendido as noções de ângulos adjacentes suplementares.

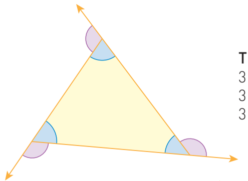
DE OLHO NA BASE

Compreender a relação entre os ângulos internos e externos de um polígono favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA27**.

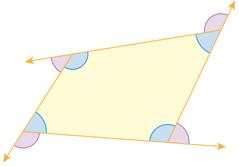
Ângulos de um polígono

Observe os polígonos representados a seguir. Neles, os ângulos internos foram destacados em azul e os ângulos externos, em lilás.

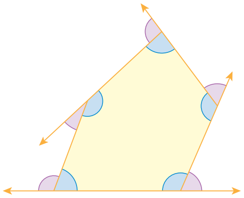
Ilustrações: ID/BR



Triângulo
3 lados
3 ângulos internos
3 ângulos externos



Quadrilátero
4 lados
4 ângulos internos
4 ângulos externos



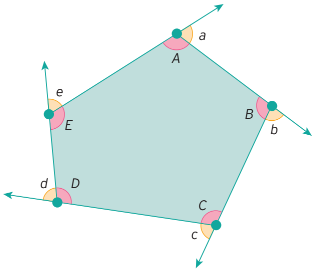
Pentágono
5 lados
5 ângulos internos
5 ângulos externos

Note que o número de ângulos internos, o número de ângulos externos e o número de lados são iguais.

Agora, vamos estudar outras relações entre os ângulos de um polígono.

Relação entre os ângulos internos e os ângulos externos

Considere o polígono a seguir.



Nesse pentágono, os ângulos internos ($\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ e $\widehat{E}$) estão destacados em vermelho e os ângulos externos ($\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$, $\widehat{d}$ e $\widehat{e}$) estão destacados em laranja. Observando cada par de ângulos interno e externo, o que você nota? Quanto eles medem juntos? **Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes percebam que os ângulos interno e externo que formam cada par são suplementares; logo, juntos, medem 180°.**

Em cada vértice, a soma da medida do ângulo interno com a medida do ângulo externo é igual a 180°. Assim:

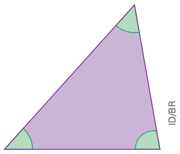
- med($\widehat{A}$) + med($\widehat{a}$) = 180°
- med($\widehat{B}$) + med($\widehat{b}$) = 180°
- med($\widehat{C}$) + med($\widehat{c}$) = 180°
- med($\widehat{D}$) + med($\widehat{d}$) = 180°
- med($\widehat{E}$) + med($\widehat{e}$) = 180°

Em todo polígono convexo, os ângulos internos ($\widehat{a}_i$) e os ângulos externos ($\widehat{a}_e$) com vértice comum são adjacentes suplementares. Assim:

$$a_i + a_e = 180°$$

Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

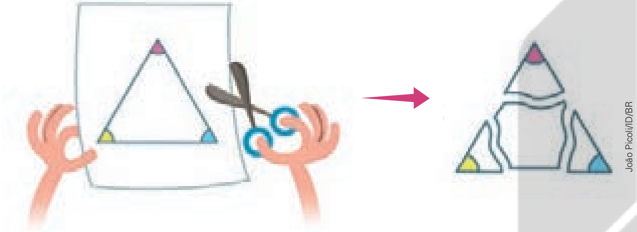
Os ângulos internos do triângulo a seguir foram destacados em verde.


ID/BR

Você saberia dizer, sem utilizar um transferidor, qual é a soma das medidas dos ângulos internos desse triângulo? E de um triângulo qualquer? **Respostas pessoais.**

Acompanhe como Lia pensou para verificar qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Primeiro, ela desenhou um triângulo equilátero em uma folha de papel. Em seguida, pintou os ângulos internos do triângulo com cores diferentes e recortou a figura como mostrado a seguir.


João Picoli/ID/BR

Depois, Lia separou as partes correspondentes aos três ângulos internos e as juntou de modo que os lados desses ângulos coincidissem.


João Picoli/ID/BR

Observe que, ao juntar os ângulos internos do triângulo, eles formaram um ângulo raso, ou seja, um ângulo de 180°.

Lia repetiu esse procedimento para outros triângulos e obteve sempre o mesmo resultado.

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

- A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono pode ser obtida a partir de sua decomposição em triângulos. Daí a importância de verificar a soma dos ângulos internos de um triângulo por meio do recorte e da junção de seus ângulos, o que é proposto nesta página. É a partir dessa soma que os estudantes vão generalizar o procedimento para a obtenção da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono.

DE OLHO NA BASE

Verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA24**.

- Peça aos estudantes que calculem a soma das medidas dos ângulos internos do eneágono e do decágono e expliquem como pensaram.

DE OLHO NA BASE

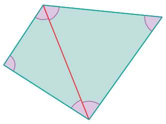
Compreender a construção do conceito da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono partindo da decomposição do polígono em triângulos colabora para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA27**.

Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono

Vimos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Agora, vamos verificar qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono qualquer.

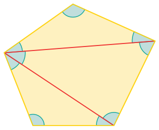
Para isso, considere os polígonos a seguir. Em cada um deles foi escolhido um vértice qualquer e foram traçadas todas as diagonais possíveis que partem desse vértice. Observe que os polígonos ficaram divididos em triângulos. Veja.

quadrilátero



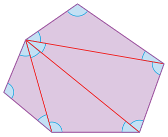
4 lados
2 triângulos

pentágono



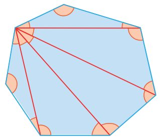
5 lados
3 triângulos

hexágono



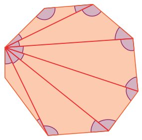
6 lados
4 triângulos

heptágono



7 lados
5 triângulos

octógono



8 lados
6 triângulos

Ilustrações: ID/BR

O quadrilátero, por exemplo, foi dividido em dois triângulos. Assim, podemos dizer que a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero equivale à soma das medidas dos ângulos internos dos dois triângulos que o compõem. Ou seja, essa soma é 360°, pois 2 · 180° = 360°.

Utilizando esse raciocínio, qual é a soma das medidas dos ângulos internos dos demais polígonos? Como você faria para calcular? **Respostas pessoais.**

Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°, podemos organizar o seguinte quadro:

Número de lados do polígono	Número de triângulos obtidos na decomposição do polígono	Soma das medidas dos ângulos internos do polígono
4	2	2 · 180° = 360°
5	3	3 · 180° = 540°
6	4	4 · 180° = 720°
7	5	5 · 180° = 900°
8	6	6 · 180° = 1 080°

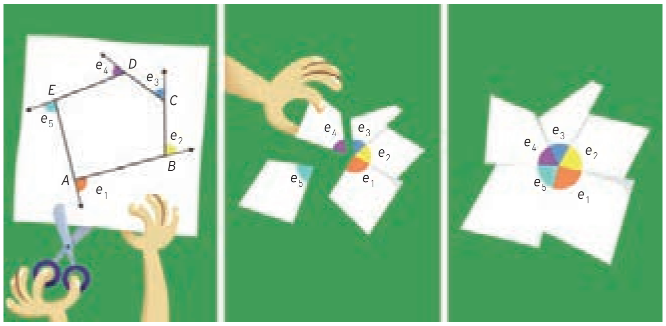
Observando a primeira e a segunda colunas do quadro, podemos perceber uma relação. Note que o número de triângulos obtidos na decomposição do polígono corresponde ao número de lados do polígono menos 2. Assim, para obter a soma das medidas dos ângulos internos do polígono, basta multiplicar o resultado dessa subtração por 180°.

Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono

Agora, acompanhe uma maneira de determinar a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono.

1º passo: Desenhamos o polígono *ABCDE* em uma folha de papel, prolongamos seus lados e marcamos os ângulos externos $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$, $\hat{e}_4$ e $\hat{e}_5$.

2º passo: Recortamos os ângulos externos e juntamos todos eles em torno de um ponto, de modo que se tornem adjacentes.



João Picoli/ID/BR

Os ângulos externos desse polígono formaram um ângulo de 360°.

Agora, repita esses procedimentos com um triângulo e com um quadrilátero qualquer. O que você observou? **Espera-se que os estudantes observem que os ângulos externos desses polígonos também formam um ângulo de 360°.**

A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono é igual a 360°.

Ângulos nos polígonos regulares

Podemos classificar os polígonos de acordo com as medidas de seus lados ou de seus ângulos. Um polígono é:

- **equilátero** se todos os lados são congruentes.
- **equiângulo** se todos os ângulos internos são congruentes.
- **regular** se for equilátero e equiângulo.

Como nos polígonos regulares os ângulos internos são congruentes, para encontrar a medida de cada ângulo interno de um polígono regular basta dividir a soma das medidas de seus ângulos internos pelo número de seus lados. Além disso, sabemos que, em um polígono qualquer, o ângulo interno e o ângulo externo de um mesmo vértice são suplementares.

Com base nessas informações, podemos construir o seguinte quadro:

Número de lados do polígono regular	Soma das medidas dos ângulos internos	Medida de cada ângulo interno	Medida de cada ângulo externo
3	180°	60° (180° : 3 = 60°)	120° (180° − 60° = 120°)
4	360°	90° (360° : 4 = 90°)	90° (180° − 90° = 90°)
5	540°	108° (540° : 5 = 108°)	72° (180° − 108° = 72°)
6	720°	120° (720° : 6 = 120°)	60° (180° − 120° = 60°)

- Explore a atividade de soma das medidas dos ângulos externos de um polígono solicitando aos estudantes que a realizem em sala de aula e escrevam uma breve conclusão a respeito da soma das medidas desses ângulos.
- Peça aos estudantes que desenhem ou citem pelo menos um polígono que é equilátero, mas não é equiângulo. Um exemplo pode ser o losango. Faça o mesmo para um polígono que seja equiângulo, mas não equilátero, como o retângulo. É importante que eles compreendam os conceitos por meio de exemplos.
- Enfatize que só faz sentido dividir a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono pelo número de seus lados para encontrar a medida do ângulo interno quando o polígono for regular.

DESCUBRA MAIS

- O objetivo desse boxe é levar os estudantes a utilizar os conhecimentos sobre medida dos ângulos internos de um polígono para a construção de ladrilhamentos. Além disso, eles devem notar que, para a cobertura total de uma superfície, a soma dos ângulos internos dos polígonos que se tocam em volta de um ponto é sempre 360°.
- Se for possível, organize uma exposição com os ladrilhamentos elaborados pelos estudantes.
- Caso os estudantes queiram fazer as figuras usando uma medida de lado maior, lembre-os de que todos os lados de todos os moldes devem ser congruentes para encaixar e, assim, formar os ladrilhos.
- A situação proposta envolvendo ladrilhamento pode ser o ponto de partida para um trabalho que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF69AR05** [Experimentar e analisar diferentes formas de expressão artística (desenho, pintura, colagem, quadrinhos, dobradura, escultura, modelagem, instalação, vídeo, fotografia, *performance* etc.)], do componente curricular Arte.

DESCUBRA MAIS

Ladrilhamento

Você já ouviu falar em ladrilhamento? Essa arte consiste em preencher uma superfície utilizando moldes, sem que haja sobreposição ou buracos.

O ladrilhamento teve início quando o ser humano utilizou pedras para revestir o chão e as paredes de sua casa e evoluiu com o uso de cores e ilustrações, o que tornou os ladrilhos objetos decorativos.

Geralmente, os ladrilhos utilizados em um ambiente são iguais e têm formato quadrado ou retangular. Nesta atividade, vamos verificar se é possível ladrilhar uma superfície plana usando ladrilhos com formato de outros polígonos.

Materiais

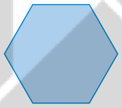
- lápis
- régua
- papel-cartão colorido
- tesoura com pontas arredondadas
- folha de papel vegetal
- folha de papel avulsa

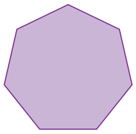
Como fazer

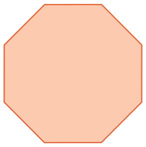
① Primeiro, vamos construir os moldes de alguns polígonos. Usando lápis e régua, desenhe na folha de papel vegetal os polígonos regulares a seguir de modo que os lados de todos eles meçam 3 cm.


↑ Triângulo equilátero.


↑ Quadrado.


↑ Hexágono regular.


↑ Heptágono regular.


↑ Octógono regular.

Ilustrações: ID/BR

② Coloque a folha de papel vegetal sobre o papel-cartão e desenhe 10 triângulos, 6 quadrados, 3 hexágonos, 3 heptágonos e 3 octógonos. Você pode diversificar e utilizar uma cor de papel-cartão para cada modelo de polígono.

③ Recorte, com cuidado, cada uma das figuras desenhadas.

④ Considere a folha de papel avulsa como a superfície a ser ladrilhada. Sobreponha as figuras que você recortou e explore diversos tipos de ladrilhamento. Mas atenção: não cole as figuras sobre a folha!

OUTRAS FONTES

Sallum, E. M. Ladrilhamentos. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2015/10/monografia2.pdf. Acesso em: 27 maio 2022.

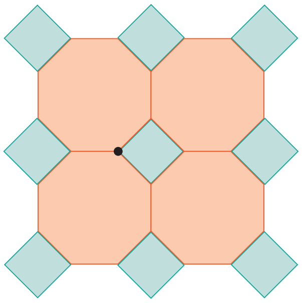
O trabalho apresenta um estudo geométrico acerca de ladrilhamento com polígonos.

Para concluir

Responda sempre no caderno.

Consulte as respostas neste manual.

1. Ângelo começou a fazer um ladrilhamento utilizando modelos de quadrados e de octógonos. Veja.



ID/BR

No ladrilhamento feito por Ângelo foi marcado um ponto. Qual é a soma das medidas de todos os ângulos que estão ao redor desse ponto?

2. Tente ladrilhar a folha de papel avulsa utilizando um único modelo de polígono.

a) Com quais modelos de polígono isso foi possível?

b) Marque um ponto em algum vértice de encontro de polígonos do seu ladrilho e some a medida dos ângulos em volta dele.

3. Tente ladrilhar a folha de papel avulsa utilizando dois modelos de polígono.

a) Com quais modelos de polígono você conseguiu fazer o ladrilhamento?

b) Marque um ponto em algum vértice de encontro de polígonos do seu ladrilho e some a medida dos ângulos em volta dele.

4. Agora, tente ladrilhar a folha de papel avulsa utilizando três modelos de polígono.

a) Com quais modelos de polígono isso foi possível?

b) Marque um ponto em algum vértice de encontro de polígonos do seu ladrilho e some a medida dos ângulos em volta dele.

5. Compare suas respostas das atividades 1 a 4 com as dos colegas. Elas são iguais? Com quais modelos de polígono foi possível fazer o ladrilhamento em cada uma dessas atividades?

6. Agora, reúna-se com um colega para resolver os itens a seguir.

a) Façam um quadro com as medidas dos ângulos internos e externos de cada um dos modelos de polígono que vocês utilizaram nas atividades.

b) Analisando as medidas obtidas no item anterior e a soma das medidas dos ângulos em volta de um ponto no ladrilho, o que vocês podem concluir?

c) Escrevam uma regra geral para fazer ladrilhamento com modelos de polígonos regulares.

7. É hora de colocar a criatividade em ação! Ainda em duplas, montem um ladrilhamento utilizando os modelos de polígonos produzidos. Quando encontrarem uma disposição adequada, colem as peças na folha de papel avulsa e compartilhem com os demais colegas.

RESPOSTAS – *PARA CONCLUIR*

1. 360°

2. a) Com triângulo equilátero, com quadrado e com hexágono regular.

b) 360°

3. a) Resposta possível: Com triângulo equilátero e com hexágono regular.

b) 360°

4. a) Resposta possível: Com triângulo equilátero, com quadrado e com hexágono regular.

b) 360°

5. Resposta pessoal. Com triângulo equilátero, com quadrado, com hexágono regular e com octógono regular.

6. a)

Polígono regular	Número de lados	Medida do ângulo interno	Medida do ângulo externo
Triângulo	3	60°	120°
Quadrado	4	90°	90°
Hexágono	6	120°	60°
Octógono	8	135°	45°

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que em todos os casos a soma das medidas dos ângulos em volta de um ponto no ladrilho é igual a 360°.

c) Espera-se que os estudantes concluam que, para fazer um ladrilhamento com polígonos regulares, é necessário que a soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos que se tocam em volta de um ponto seja 360° e que os lados de todos os polígonos sejam congruentes.

7. Resposta pessoal.

DE OLHO NA BASE

Atividades que permitem aos estudantes verificar e estabelecer relações entre a medida dos ângulos internos e externos de polígonos por meio de ladrilhamentos contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA27**.

- Para calcular a soma das medidas dos ângulos internos do octógono da atividade **2**, pode-se calcular a quantidade de triângulos em que podemos decompor esse polígono (8 − 2 = 6) e multiplicar o resultado por 180°.
- Na atividade **3**, o polígono não precisa ser regular. Para determinar o número de diagonais, leve os estudantes a generalizar, observando o que acontece com um vértice (ou partindo de um polígono com menor quantidade de lados), para que encontrem a quantidade de diagonais sem precisar traçá-las. Espera-se que eles percebam que a quantidade de diagonais é igual à metade do produto entre o número de vértices (ou lados) e o número de diagonais traçadas por cada vértice (3 a menos que a quantidade de vértices do polígono).
- Na atividade **4**, peça aos estudantes que desenhem um polígono qualquer para que percebam que as medidas dos ângulos interno e externo de um polígono, relativos ao mesmo vértice, são suplementares. Você pode ampliar essa atividade perguntando a eles qual é o polígono em questão. Dividindo 360° pela medida do ângulo externo, eles encontrarão o número de lados, que nesse caso é 5, concluindo que o polígono é um pentágono.

TRIÂNGULOS

- A abordagem dos conhecimentos sobre triângulos retoma a classificação quanto às características de seus lados e quanto às medidas de seus ângulos internos. Além disso, discute a condição de existência de um triângulo com base na medida de seus lados.

DE OLHO NA BASE

Calcular, sem o uso de fórmulas, as medidas dos ângulos internos e externos de um polígono favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA27**.

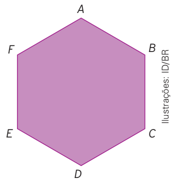
Compreender a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações por meio da observação de construções ou de atividades com manipulação de objetos e reconhecê-las contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA25**.

ATIVIDADES

1. c) 6 lados; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$.

Responda sempre no caderno.

1. Analise o polígono a seguir e responda ao que se pede.



Ilustrações: ID/BR

a) Que polígono é esse? **Hexágono.**

b) Quantos vértices têm esse polígono? Quais são eles? **6 vértices; *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*.**

c) Quantos lados têm esse polígono? Dê os nomes de seus lados.

d) Qual é o número de ângulos internos desse polígono? E o de ângulos externos? **6 ângulos internos; 6 ângulos externos.**

2. Calcule a soma, em grau, das medidas dos ângulos internos de um octógono convexo. **1 080°**

3. O dodecágono é um polígono que tem 12 lados.

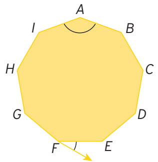
a) No caderno, desenhe um dodecágono. **Resposta pessoal.**

b) Determine o número de diagonais desse polígono. **54 diagonais.**

c) Explique como você pensou para responder ao item anterior. **Resposta pessoal.**

4. Um polígono regular tem a medida de cada ângulo interno $a_i = 108°$. Calcule a medida de cada ângulo externo (a_e). **72°**

5. Considere o eneágono regular a seguir.



a) Calcule a medida de cada ângulo interno ($\hat{a}_i$). **140°**

b) Calcule a medida de cada ângulo externo ($\hat{a}_e$). **40°**

6. Um polígono regular tem a seguinte medida de cada ângulo externo: $a_e = 36°$. Qual é o nome desse polígono? **Decágono.**

Triângulos

Em muitas construções e objetos, é frequente o uso de estruturas formadas por triângulos. Isso se deve essencialmente ao fato de que, entre todos os polígonos, o triângulo apresenta uma rigidez geométrica que os outros não têm. Uma vez construído, é impossível modificar a abertura de seus ângulos e formar outro triângulo.

Essa propriedade tem muito valor e é utilizada em diversas áreas. Observe o exemplo a seguir.

PARA EXPLORAR

Com um responsável, faça um passeio pela região onde você mora e observe em quais construções e objetos as estruturas formadas por triângulos foram usadas.

Zé Paiva/Pulsar Imagens

↑ Ponte Hercílio Luz, em Florianópolis (SC). Foto de 2020.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

É importante que os estudantes reconheçam a rigidez geométrica dos triângulos por meio de atividades de manipulação de materiais. Isso os ajudará na comparação de diferentes polígonos em relação à rigidez.

Para esta atividade, os estudantes deverão dispor de um metro de carpinteiro.

Jannik Bruun/Shutterstock.com/ID/BR

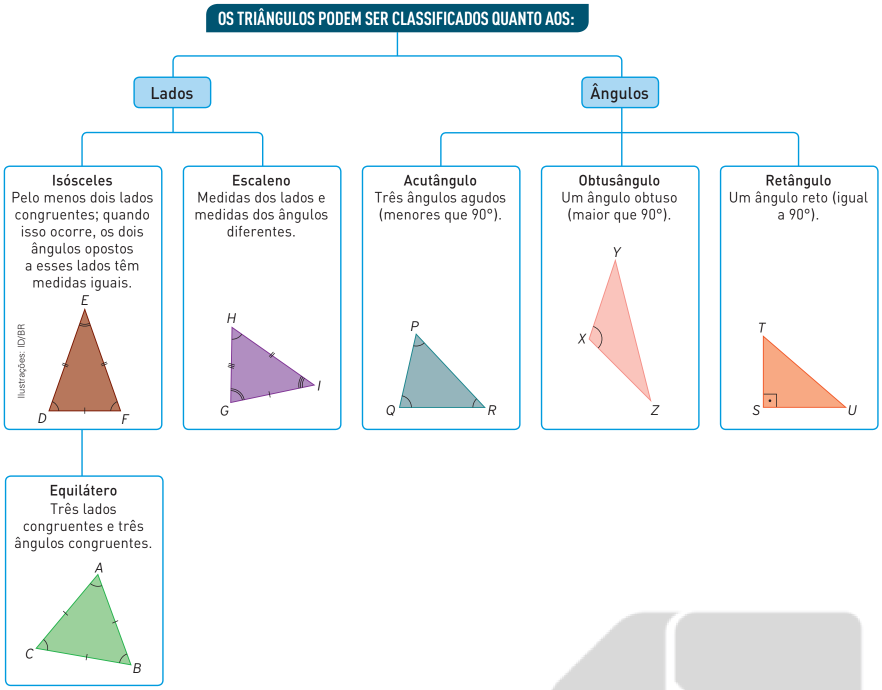
Abra totalmente o instrumento, mostrando aos estudantes que suas partes são articuladas, o que permite a representação de diferentes polígonos. Desafie-os a representar alguns deles.

Manipule cada polígono representado alterando as medidas dos ângulos internos sem alterar as medidas de seus lados, a fim de que os estudantes observem que, embora seus lados tenham a mesma medida, o mesmo pode não ocorrer com seus ângulos.

Em seguida, represente um triângulo e pergunte aos estudantes se é possível alterar as medidas de seus ângulos internos sem alterar as medidas de seus lados. Destaque que o triângulo é considerado exceção entre os polígonos representados, ou seja, não é possível alterar as medidas dos seus ângulos sem alterar as medidas de seus lados, fato que caracteriza a rigidez geométrica dessa figura.

Classificação dos triângulos

Podemos classificar os triângulos seguindo dois critérios.



OS TRIÂNGULOS PODEM SER CLASSIFICADOS QUANTO AOS:

Lados

Isósceles
Pelo menos dois lados congruentes; quando isso ocorre, os dois ângulos opostos a esses lados têm medidas iguais.

Escaleno
Medidas dos lados e medidas dos ângulos diferentes.

Equilátero
Três lados congruentes e três ângulos congruentes.

Ângulos

Acutângulo
Três ângulos agudos (menores que 90°).

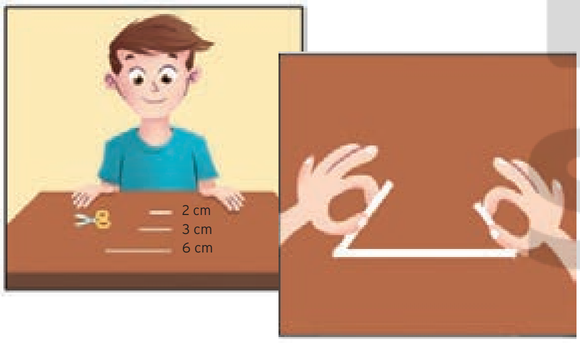
Obtusângulo
Um ângulo obtuso (maior que 90°).

Retângulo
Um ângulo reto (igual a 90°).

Ilustrações: ID/BR

Condição de existência de um triângulo

Leandro cortou três pedaços de barbante com as seguintes medidas de comprimento: 6 cm, 2 cm e 3 cm. Depois, ele tentou construir uma região triangular com eles. Veja.



João Picoli/ID/BR

PARA EXPLORAR

Josh Bryan

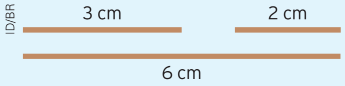
Leia a reportagem e conheça as obras de arte de Josh Bryan. Utilizando apenas triângulos, esse artista cria retratos de pessoas famosas.

Disponível em: https://www.hypeness.com.br/2013/02/retratos-super-detalhados-feitos-a-mao-usando-somente-triangulos/. Acesso em: 21 fev. 2022.

- Reproduza na lousa o esquema da classificação dos triângulos apresentado no Livro do Estudante. Verifique se os estudantes entendem que todo triângulo equilátero é um triângulo isósceles; por esse motivo, o triângulo equilátero está abaixo do isósceles no esquema.
- Explore esse esquema e apresente aos estudantes algumas proposições que relacionam as classificações dos triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos. Depois, solicite a eles que classifiquem cada proposição como verdadeira ou falsa, pedindo que corrijam as proposições falsas. Por exemplo:
  - Se um triângulo tem um ângulo reto, então esse triângulo pode ser equilátero. Os estudantes devem perceber que essa proposição é falsa, porque um triângulo equilátero sempre tem os três ângulos congruentes. Nesse caso, eles devem inferir que, se a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre é igual a 180°, então cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60° (180° : 3 = 60°). Para corrigir essa proposição, eles podem inferir, por exemplo, que, se um triângulo tem um ângulo reto, então esse triângulo pode ser isósceles ou escaleno.
- O estudo da classificação dos triângulos proporciona aos estudantes situações de aprendizagem que desenvolvem noções de pensamento computacional (identificação de padrões), mobilizando diferentes processos cognitivos, na medida em que reconhecem que é possível formar classes de figuras que seguem determinado padrão, agrupando-as de acordo com as medidas dos lados e dos ângulos internos.
- Se julgar conveniente, disponibilize aos estudantes pedaços de barbante de diferentes tamanhos e sugira que tentem formar triângulos com eles.

Utilize triângulos isósceles e triângulos escalenos, além dos equiláteros, para que os estudantes percebam que a rigidez geométrica se aplica a qualquer triângulo, independentemente de sua classificação.

- Apresente aos estudantes o conceito de construção de um triângulo com três segmentos de reta por meio do teorema da desigualdade triangular ou condição de existência de um triângulo.
- É importante que os estudantes percebam que, quando Leandro escolheu os pedaços de barbante de 2 cm e de 3 cm, na situação da página anterior, ele não conseguiu formar o triângulo, pois a soma das medidas dos dois pedaços menores era menor que a medida do pedaço maior (6 cm).

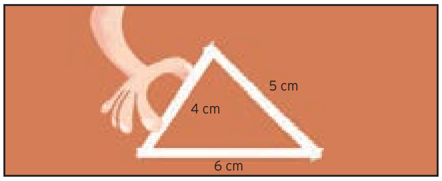


- Chame a atenção dos estudantes para o fato de que, quando Leandro usou os barbantes com as medidas 6 cm, 5 cm e 4 cm, foi possível construir o triângulo, pois:
  - $6 < 5 + 4$
    $6 < 9$ (Verdadeiro.)
  - $5 < 6 + 4$
    $5 < 10$ (Verdadeiro.)
  - $4 < 6 + 5$
    $4 < 11$ (Verdadeiro.)

DE OLHO NA BASE

Reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA24**.

Como não conseguiu formar uma região triangular, Leandro pensou em utilizar pedaços de barbante com outros comprimentos. Ele cortou pedaços com as seguintes medidas de comprimento: 6 cm, 5 cm e 4 cm.



João Picoli/ID/BR

Com esses novos pedaços de barbante, Leandro conseguiu formar uma região triangular. Por que será que isso aconteceu? **Resposta pessoal.**

Não é sempre que, com três segmentos de reta, é possível construir um triângulo. Para verificar essa possibilidade, podemos utilizar o **teorema da desigualdade triangular** ou a **condição de existência de um triângulo**.

A medida de comprimento de um lado de um triângulo é menor que a soma das medidas de comprimento dos outros dois lados.

Exemplos

A. Dados três segmentos de reta cujas medidas de comprimento são 5 cm, 1,5 cm e 4 cm, vamos verificar se é possível construir um triângulo.

Para cada um dos segmentos, temos:

- $5 < 4 + 1,5 \longrightarrow$ Verdadeiro, pois $5 < 5,5$.
- $4 < 5 + 1,5 \longrightarrow$ Verdadeiro, pois $4 < 6,5$.
- $1,5 < 4 + 5 \longrightarrow$ Verdadeiro, pois $1,5 < 9$.

Portanto, é possível construir um triângulo com segmentos de reta com medidas de comprimento iguais a 5 cm, 1,5 cm e 4 cm.

B. Dados três segmentos de reta cujas medidas de comprimento são 5 cm, 1,5 cm e 3,5 cm, vamos verificar se é possível construir um triângulo.

Para cada um dos segmentos, temos:

- $5 < 1,5 + 3,5 \longrightarrow$ Falso, pois $5 = 5$.
- $3,5 < 5 + 1,5 \longrightarrow$ Verdadeiro, pois $3,5 < 6,5$.
- $1,5 < 3,5 + 5 \longrightarrow$ Verdadeiro, pois $1,5 < 8,5$.

Portanto, não é possível construir um triângulo com segmentos de reta com medidas de comprimento iguais a 5 cm, 1,5 cm e 3,5 cm.

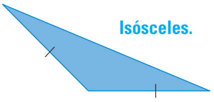
ATIVIDADES

11. 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm, 10 cm, 11 cm, 12 cm ou 13 cm.

Responda sempre no caderno.

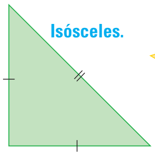
7. Classifique os triângulos quanto aos lados.

Ⓐ



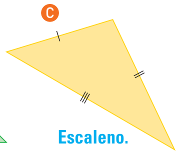
Isósceles.

Ⓑ



Isósceles.

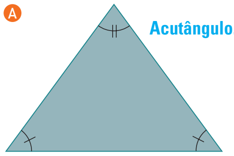
Ⓒ



Escaleno.

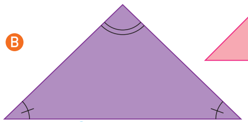
8. Classifique os triângulos quanto aos ângulos internos.

Ⓐ



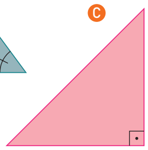
Acutângulo.

Ⓑ



Obtusângulo.

Ⓒ



Retângulo.

Ilustrações: ID/BR

9. Um triângulo tem dois ângulos internos congruentes. O terceiro ângulo mede 46°. Com base nessas informações, responda às questões.

a) Qual é a medida dos ângulos congruentes? **67°**

b) Como esse triângulo pode ser classificado quanto aos seus ângulos e quanto aos seus lados? **Quanto aos ângulos: acutângulo; quanto aos lados: isósceles.**

10. Resolva mentalmente: Se as medidas de comprimento de dois lados de um triângulo são 4 cm e 6 cm, qual é a maior medida de comprimento inteira que o outro lado pode ter? **9 cm**

11. Dois lados de um triângulo medem 6 cm e 8 cm. Quais são as medidas de comprimento inteiras, em centímetro, que o terceiro lado desse triângulo pode ter?

12. Qual é a medida de comprimento do terceiro lado de um triângulo isósceles se os outros dois lados têm medidas de comprimento iguais a:

a) 3 cm e 5 cm? **3 cm ou 5 cm**

b) 2 cm e 5 cm? **5 cm**

Construção de polígonos com régua, compasso e transferidor

A régua, o compasso e o transferidor são instrumentos importantes de desenho. Vamos ver como construir alguns polígonos com o auxílio desses instrumentos.

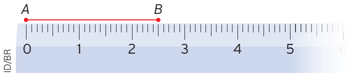
Construção de triângulos

Acompanhe três exemplos de como construir um triângulo usando régua e compasso.

Exemplo A

Vamos construir um triângulo escaleno cujas medidas de comprimento dos lados são: med($\overline{AB}$) = 2,5 cm, med($\overline{BC}$) = 3,0 cm e med($\overline{AC}$) = 3,5 cm.

1º passo: Com o auxílio da régua, trace um segmento de reta de medida 2,5 cm.



ID/BR

NOTAÇÃO

A notação med($\overline{AB}$) indica a medida do segmento de reta de extremidades *A* e *B*. Assim, a notação med($\overline{AB}$) = 2,5 cm indica que a medida de comprimento do segmento $\overline{AB}$ é 2,5 cm.

- Nas atividades **7** e **8**, certifique-se de que os estudantes entendem a simbologia de traços para representar lados ou ângulos de medidas iguais.
- Na atividade **9**, os estudantes devem lembrar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Sendo conhecido um desses ângulos, é possível encontrar a medida de cada um dos outros dois.
- Na atividade **11**, as medidas podem ser números inteiros maiores que 2 (8 − 6) e menores que 14 (8 + 6).

CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS COM RÉGUA, COMPASSO E TRANSFERIDOR

- Para que os estudantes utilizem os procedimentos indicados na construção de triângulos, é necessário que saibam manusear o compasso e transportar medidas de segmentos.
- Antes de solicitar a construção dos triângulos, mostre aos estudantes cada uma das partes do compasso e qual sua função nas construções geométricas. Alerte-os sobre o cuidado que devem ter com compassos, pois eles apresentam pontas que podem causar ferimentos se não for utilizado de maneira adequada. Chame a atenção deles para a precisão exigida nessas construções e sobre a necessidade de a ponta grafite estar sempre apontada obliquamente, em bisel, com lixa e alinhada com a ponta-seca do compasso.

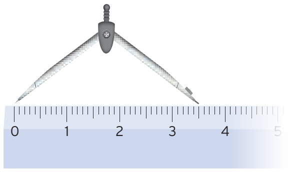
rosarioscalia/Shutterstock.com/ID/BR

- Se julgar conveniente, depois da leitura dos procedimentos para a construção de triângulos, peça aos estudantes que reproduzam essas construções, seguindo o passo a passo os procedimentos indicados.

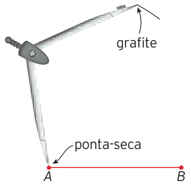
DE OLHO NA BASE

Compreender o procedimento de construção de triângulos com o uso do compasso e da régua favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA24**.

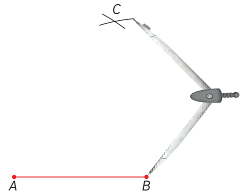
2º passo: Abra o compasso até que a distância entre a ponta-seca e a grafite meça 3,5 cm (medida de comprimento do lado $\overline{AC}$). Use uma régua como auxílio.



3º passo: Com a ponta-seca do compasso em *A* e mantendo a distância obtida no passo anterior, faça um arco.

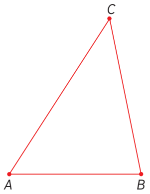


4º passo: Repita o 2º passo, mas considerando a medida de comprimento do segmento $\overline{BC}$. Depois, mantendo essa abertura e com a ponta-seca em *B*, faça outro arco passando pelo arco já existente. O ponto de encontro dos dois arcos é o ponto *C*.



Ilustrações: ID/BR

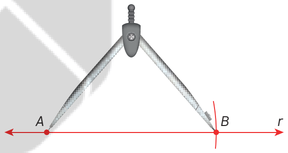
5º passo: Utilizando a régua, trace os segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.



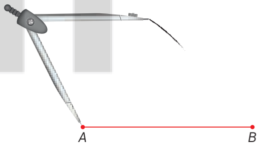
Exemplo B

Acompanhe as etapas para a construção de um triângulo isósceles *ABC* qualquer.

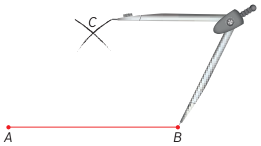
1º passo: Com a régua, trace uma reta *r* qualquer e marque nela um ponto *A*. Depois, com a ponta-seca do compasso em *A*, marque, com a grafite, um ponto *B* qualquer na reta *r*.



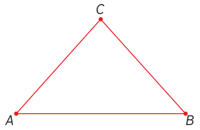
2º passo: Deixe entre as pontas do compasso uma distância maior que a metade da medida do segmento $\overline{AB}$. Com a ponta-seca do compasso em *A*, trace um arco.



3º passo: Com a ponta-seca do compasso em *B* e a mesma distância entre as pontas do passo anterior, faça outro arco passando pelo arco já existente. O ponto de encontro dos dois arcos é o ponto *C*.

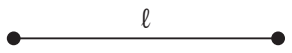


4º passo: Utilizando a régua, trace os segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

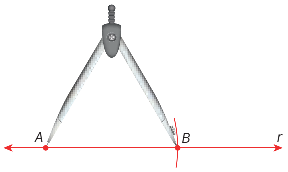


Exemplo C

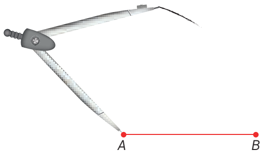
Vamos construir um triângulo equilátero *ABC*, sendo ℓ a medida de comprimento do lado.



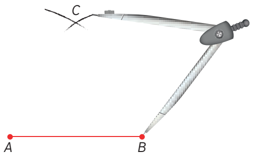
1º passo: Com uma régua, trace uma reta *r* qualquer e marque um ponto *A*. Depois, abra o compasso até que a distância entre a ponta-seca e a grafite meça ℓ. Posicione a ponta-seca do compasso em *A* e marque o ponto *B* na reta r.



2º passo: Com a ponta-seca do compasso em *A* e a distância entre as pontas do compasso medindo ℓ, trace um arco.

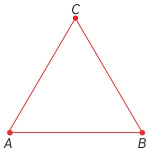


3º passo: Com a ponta-seca do compasso em *B* e a distância entre as pontas do compasso medindo ℓ, faça outro arco passando pelo arco já existente. O ponto de encontro dos dois arcos é o ponto *C*.



Ilustrações: ID/BR

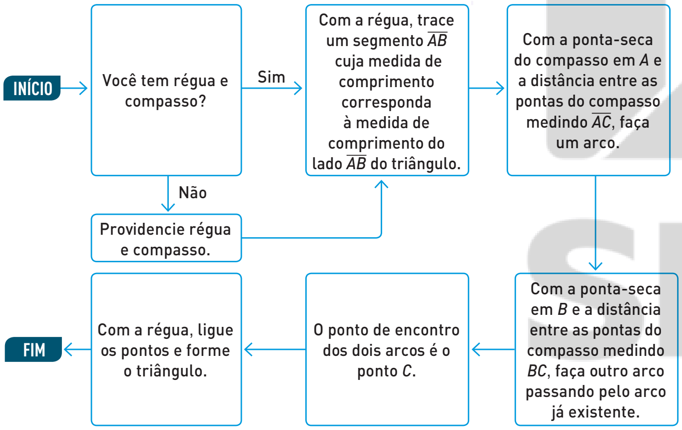
4º passo: Utilizando a régua, trace os segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.



Construindo um triângulo qualquer

As construções dos exemplos anteriores são parecidas. Você percebeu algo em comum entre elas? **Resposta pessoal.**

O esquema a seguir pode ser usado para construir um triângulo qualquer *ABC*. Observe.



- Após a apresentação dos três exemplos que envolvem a construção de triângulos, retome com a turma a condição de existência de um triângulo e organize uma conversa com algumas perguntas: Qual é a função do compasso na construção de um triângulo?; Como podemos saber se um triângulo existe antes de tentar construí-lo?; Que dados do triângulo precisamos conhecer para realizar sua construção com régua e compasso?.
- Se julgar necessário, organize a turma em duplas e proponha a elas que, observando os exemplos do Livro do Estudante, façam os cálculos que comprovam a existência desses triângulos e construam cada um deles seguindo o passo a passo apresentado. Certifique-se de que todos os estudantes tenham os instrumentos de desenho.

DE OLHO NA BASE

Compreender o procedimento para a construção de um triângulo qualquer, descrito por meio de algoritmo e com o uso de fluxograma, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA26**.

- Para que os estudantes compreendam os procedimentos na construção do quadrado com a utilização de régua e transferidor, eles devem ter conhecimento de retas perpendiculares e ângulo reto e saber manusear o transferidor.
- Verifique se os estudantes se lembram de como usar o transferidor, tanto para medir quanto para construir ângulos.
- Em seguida, solicite a eles que reproduzam os procedimentos para a construção de um quadrado descritos no Livro do Estudante, sugerindo 5 cm para a medida de comprimento dos lados.

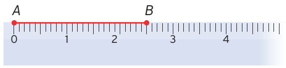
Construção de quadrados

Acompanhe como construir um quadrado utilizando régua e transferidor.

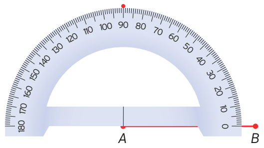
Exemplo

Vamos construir um quadrado com lado medindo 2,5 cm de comprimento.

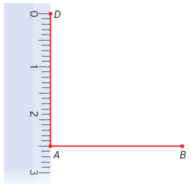
1º passo: Com a régua, traçamos o segmento $\overline{AB}$ com medida de 2,5 cm de comprimento.



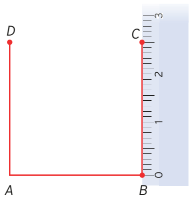
2º passo: No ponto *A*, construímos um ângulo de 90° com o auxílio do transferidor.



3º passo: Com a régua, traçamos um segmento com medida de 2,5 cm de comprimento perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, obtendo o ponto *D*.

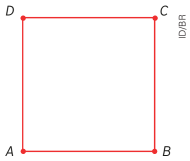


4º passo: Repetimos o 2º e o 3º passos no ponto *B*, obtendo o ponto *C*.



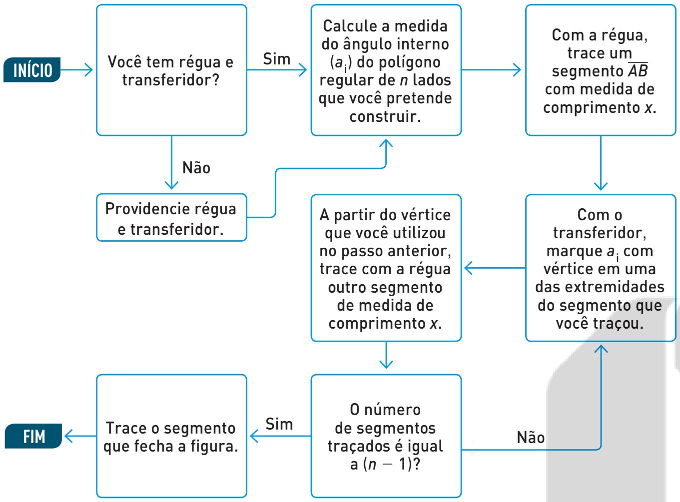
Ilustrações: ID/BR

5º passo: Traçamos o segmento $\overline{CD}$ para obter o quadrado *ABCD*.



Construção de um polígono regular qualquer

O esquema a seguir pode ser usado para construir um polígono regular de *n* lados, sendo *x* a medida do lado.



Agora, acompanhe como construir um pentágono regular com lado de 2 cm de medida de comprimento.

Exemplo

Para fazer essa construção, vamos utilizar esse esquema. Assim, temos $n = 5$, pois *n* corresponde ao número de lados do polígono regular, nesse caso um pentágono, e $x = 2$ cm, pois *x* corresponde à medida de comprimento dos lados do polígono.

Considerando que temos régua e transferidor, o primeiro passo é determinar a medida do ângulo interno (a_i) de um pentágono regular. Consultando o quadro da página 123, temos:

$$a_i = 108°$$

Agora, seguimos com os passos para a construção.

sm

- Para a construção de polígonos regulares com uso da régua e do transferidor, é importante que os estudantes tenham se apropriado dos procedimentos para a obtenção da medida dos ângulos internos de polígonos regulares.
- Pergunte aos estudantes como determinar a medida de cada ângulo interno de um polígono regular. Para isso, eles devem lembrar que todo polígono pode ser decomposto em triângulos e, ainda, que o número de triângulos será sempre o número de lados do polígono menos 2. Devem saber, também, que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim, para determinar a medida de cada ângulo interno de um hexágono, por exemplo, eles devem:
  - encontrar o número de triângulos em que esse polígono pode ser decomposto: $\underbrace{4}_{\text{(número de lados do hexágono)} - 2}$ triângulos
  - multiplicar esse número por 180° (medida da soma dos ângulos internos de qualquer triângulo):

    $$180° \cdot 4 = 720°$$
  - dividir o resultado encontrado por 6 (número de lados do hexágono):

    $$720° : 6 = 120°$$

  Portanto, cada ângulo interno do hexágono mede 120°.
- Se julgar conveniente, proponha aos estudantes que construam o pentágono regular seguindo os procedimentos aqui descritos.

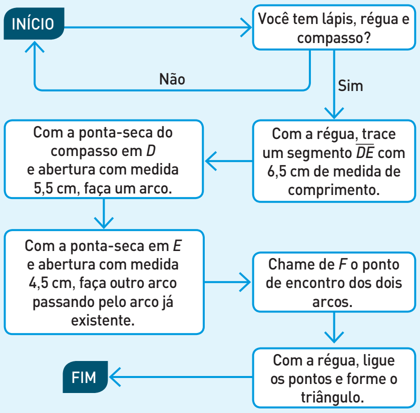
DE OLHO NA BASE

Compreender o procedimento, por meio de um fluxograma, que descreve um algoritmo para a construção de um polígono regular qualquer, dada a medida de seu lado, favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA28**.

RESPOSTAS

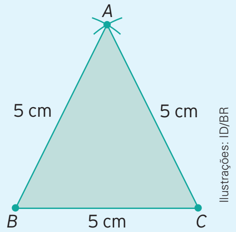
13. Resposta possível:

Com a régua, trace um segmento $\overline{DE}$ com 6,5 cm de medida de comprimento. Com a ponta-seca do compasso em *D* e abertura com medida 5,5 cm, faça um arco. Com a ponta-seca do compasso em *E* e abertura com medida 4,5 cm, faça outro arco passando pelo arco já existente. O ponto de encontro dos dois arcos é o ponto *F*. Com a régua, ligue os pontos e forme o triângulo.

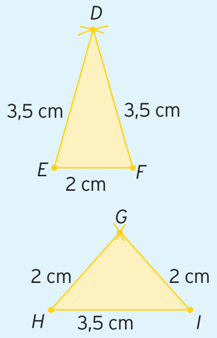


14. Exemplos de construções:

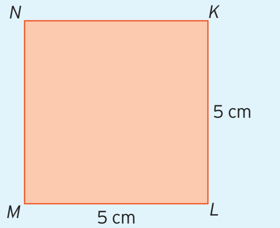
a)



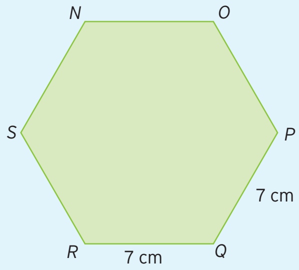
b)



c)

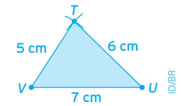


d)

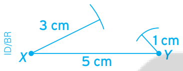


16. Respostas possíveis:

a) Com a régua, trace um segmento $\overline{VU}$ de medida 7 cm. Tendo a abertura do compasso com 5 cm e a ponta-seca em *V*, trace um arco. Tendo a abertura do compasso com 6 cm e a ponta-seca em *U*, trace outro arco. A intersecção dos dois arcos será o vértice *T* do triângulo. Ligue-o aos pontos *U* e *V*.

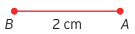


b) Com a régua, trace um segmento $\overline{XY}$ de medida 5 cm. Tendo a abertura do compasso com 3 cm e a ponta-seca em *X*, trace um arco. Tendo a abertura do compasso com 1 cm e a ponta-seca em *Y*, trace outro arco. Como não há intersecção entre os arcos, não é possível construir o triângulo.

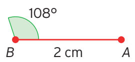


17. Resposta possível: Usando o transferidor, construa um ângulo de 135° no vértice *D*; trace com a régua um segmento de 5,5 cm de comprimento e marque o ponto *E*. Em seguida, construa um ângulo de 135° no vértice *E* e trace com a régua outro segmento de 5,5 cm de comprimento. Como o número de segmentos traçados é diferente de 7 (8 − 1), repetimos a construção do ângulo de 135° e do segmento, obtendo o ponto *F* e o segmento $\overline{EF}$. Novamente verificamos que o número de segmentos traçados é diferente de 7, então repetimos a construção do ângulo de 135° e do segmento, obtendo o ponto *G* e o segmento $\overline{FG}$. Como o número de segmentos traçados ainda é diferente de 7, repetimos a construção do ângulo de 135° e do segmento, obtendo o ponto *H* e o segmento $\overline{GH}$. O número de segmentos traçados é igual a 7; então, com a régua ligue os pontos *H* e *A* e forme o octógono *ABCDEFGH*.

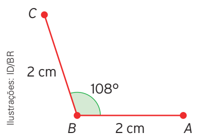
1º passo: Com a régua, traçamos o segmento $\overline{AB}$ de 2 cm de comprimento.



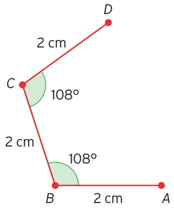
2º passo: Com o transferidor, marcamos o ângulo de 108° no vértice *B*.



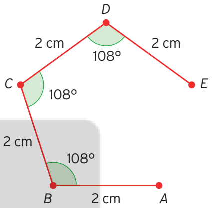
3º passo: Traçamos o segmento $\overline{BC}$ de 2 cm de comprimento.
O número de segmentos não é igual a ($n - 1$), pois traçamos 2 segmentos e
$(n - 1) = (5 - 1) = 4$.



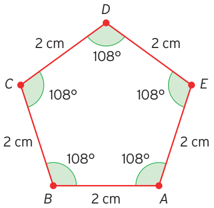
4º passo: Assim, repetimos a construção do ângulo e do segmento, obtendo o segmento $\overline{CD}$.



5º passo: Como o número de segmentos traçados é diferente de ($n - 1$), repetimos a construção do ângulo e do segmento, obtendo o segmento $\overline{DE}$.



6º passo: Como o número de segmentos traçados é igual a ($n - 1$), traçamos o segmento $\overline{EA}$, que fecha o pentágono regular.



ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

13. Descreva, por escrito e por meio de um esquema, como construir um triângulo *DEF* cujos lados meçam 4,5 cm, 5,5 cm e 6,5 cm de comprimento. **Consulte a resposta neste manual.**

14. Usando régua, compasso e transferidor, construa os polígonos indicados. **14. Consulte as respostas neste manual.**

a) Um triângulo equilátero com lados medindo 5 cm de comprimento.

b) Dois triângulos isósceles diferentes cujos lados meçam 2 cm e 3,5 cm de comprimento.

c) Um quadrado com lados medindo 5 cm de comprimento.

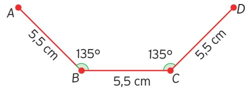
d) Um hexágono regular com lados medindo 7 cm de comprimento.

15. Elabore um esquema para construir um hexágono regular. **Consulte a resposta neste manual.**

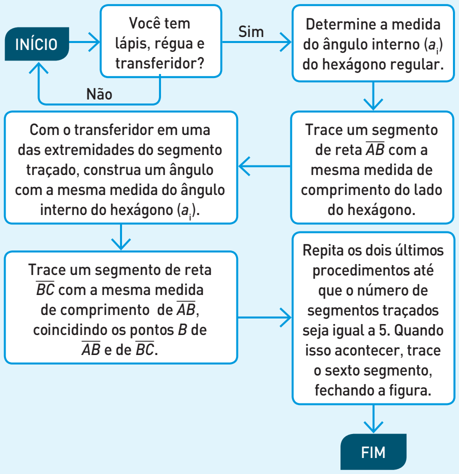
16. Utilizando régua e compasso, verifique, em cada caso, se é possível construir um triângulo cujos lados tenham as seguintes medidas de comprimento:

a) 7 cm, 5 cm e 6 cm; b) 5 cm, 3 cm e 1 cm.

17. A figura a seguir representa uma parte da construção de um octógono regular com lado de 5,5 cm de comprimento. Descreva os passos que faltam para terminar a construção.



15. Resposta possível:



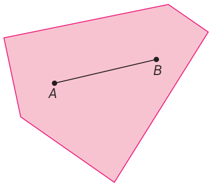
DE OLHO NA BASE

A atividade **13** proporciona aos estudantes desenvolver a habilidade **EF07MA26**, e a atividade **15**, a desenvolver a habilidade **EF07MA28**.

DIVERSIFICANDO

1. c) Falsa. O polígono deve ser considerado convexo.

1. Classifique cada afirmação sobre a figura representada a seguir em verdadeira ou falsa. Depois, reescreva as falsas, corrigindo-as.



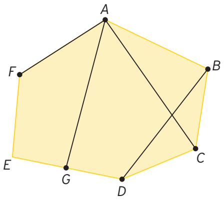
a) Essa figura tem 5 lados, 6 vértices e 6 ângulos internos. **Falsa. O polígono tem 5 lados, 5 vértices e 5 ângulos internos.**

b) Essa figura é um polígono, pois é formada por uma linha poligonal fechada e simples. **Verdadeira.**

c) Como o segmento $\overline{AB}$ está totalmente contido nesse polígono, podemos classificá-lo como polígono não convexo.

d) Considerando o número de lados dessa figura, podemos nomeá-la como hexágono. **Falsa. O polígono é um pentágono.**

2. Observe o polígono *ABCDEF* e responda às questões a seguir.

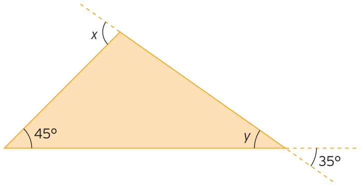


a) Quais segmentos representados na figura são diagonais desse polígono? **$\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.**

b) Quantas diagonais esse polígono tem? **9 diagonais.**

3. Qual é a medida, em grau, dos ângulos internos de um triângulo, sabendo que dois de seus ângulos externos medem 100° e 135°? **55°, 45° e 80°.**

4. Determine as medidas, em grau, dos ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ indicados. **$x = 80°$; $y = 35°$**

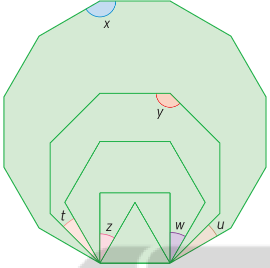


5. Desenhe no caderno duas retas paralelas (*r* e *s*). Marque sobre a reta *r* um ponto *A* e sobre a reta *s* dois pontos distintos *B* e *C*.

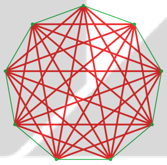
Trace o triângulo *ABC*. Pensando em ângulos formados por duas paralelas e uma transversal, verifique se a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é 180°. **Consulte a resposta neste manual.**

6. É possível que um quadrilátero tenha ângulos internos medindo 125°, 22°, 170° e 53°? Explique. **Não, pois a soma das medidas desses ângulos é 370°.**

7. Os polígonos mostrados a seguir são regulares. Com um colega, determine, em grau, as medidas dos ângulos indicados pelas letras *x*, *u*, *y*, *t*, *z* e *w*. **$x = 150°$; $u = 15°$; $y = 135°$; $t = 15°$; $z = 30°$; $w = 30°$**



8. Cleiton é artesão e, para produzir o quadro a seguir, ele contornou todos os pregos presos em uma madeira com linha verde e, depois, ligou cada prego aos outros não adjacentes uma única vez usando linha vermelha.



Ilustrações: ID/BR

a) A figura formada pela linha verde lembra que polígono? **O eneágono.**

b) Quantas vezes Cleiton ligou um prego a outro usando a linha vermelha? **27 vezes.**

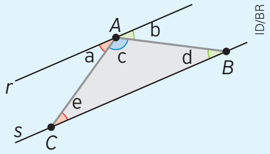
9. Dois lados de um triângulo medem 10 cm e 28 cm de comprimento. Determine as possíveis medidas de comprimento, em centímetro, do terceiro lado, sabendo que é um número múltiplo de 7. **21 cm, 28 cm ou 35 cm.**

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **7**, valorize cada estratégia encontrada pelos estudantes.

RESPOSTA

5. Resposta possível:



ID/BR

- Os ângulos *a* e *e* são congruentes, pois são alternos internos.
- Os ângulos *b* e *d* são congruentes, pois são alternos internos.
- $a + b + c = 180°$ (I), pois formam um ângulo raso.
- A soma das medidas dos ângulos internos (S_i) do triângulo *ABC* é dada por:

$$S_i = c + d + e \text{ (II)}$$

Substituindo *e* por *a* e *d* por *b* em (II), obtemos $a + b + c$. Comparando com (I), temos:

$$S_i = e + d + c = a + b + c = 180°$$

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para auxiliar os estudantes que apresentarem dificuldades, retome os conceitos de soma de ângulos externos dos polígonos convexos e da relação entre seus ângulos internos e externos. Lembre-os de que ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida e que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°.

Relembre os estudantes de que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo pode ser calculada por meio da decomposição do polígono em vários triângulos.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Resolver um problema usando a estratégia “representação esquemática ou mental” permite que os estudantes organizem suas ideias, colocando as informações do problema em quadros, tabelas, gráficos e esquemas de figuras ou mentais.
- É interessante propor aos estudantes que resolvam esse problema de outra maneira e compartilhem as estratégias utilizadas, para que criem um repertório de resolução. Se julgar oportuno, sugira que utilizem a estratégia “tentativa e erro”.
- O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes seja preservada. Para isso, valorize situações em que os estudantes se sintam acolhidos.
- Os processos cognitivos como percepção, memorização, raciocínio, imaginação e resolução de problemas podem contribuir para elevar a autoestima dos estudantes.

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

- Para a compreensão de um problema, é necessário que os estudantes leiam-no e extraiam dele os dados importantes para desenvolver a resolução. Assim, eles devem observar que Marta é mais rápida que Carlos, pois ela percorre 150 metros no tempo que Carlos percorre 100 metros. Então, Carlos deverá sair antes de Marta para que cheguem juntos à festa.

RESOLVENDO PROBLEMAS

O problema

Leia a situação a seguir.

Marta e Carlos são dois amigos que resolveram se encontrar em uma festa junina. Ambos moram a 1 200 metros do local da festa. Carlos percorre 100 metros por minuto, enquanto Marta consegue percorrer 150 metros nesse mesmo tempo. Para chegarem juntos ao local da festa, quanto tempo Carlos terá de sair antes de Marta?

Evertoons/ID/BR

Compreensão do problema

Compreensão do problema - 2. 1 200 metros.

① Quantos metros Marta percorre em um minuto? E Carlos? **150 metros; 100 metros.**

② Quanto mede a distância entre a casa de cada um deles e o local da festa junina?

③ Quem deverá sair de casa primeiro para que os dois cheguem juntos à festa? **Carlos deve sair primeiro.**

Resolução do problema

Resolução do problema - 1. Consulte as respostas neste manual.

① Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o com a medida da distância percorrida por Marta e Carlos. Depois, responda às perguntas a seguir.

Tempo (em minuto)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Distância percorrida por Carlos (em metro)	0	100	200										
Distância percorrida por Marta (em metro)	0	150	300										

a) Observe a linha referente às distâncias percorridas por Carlos. A sequência desses números corresponde à sequência dos múltiplos de que número? **100.**

b) Agora, observe a linha referente às distâncias percorridas por Marta. A sequência desses números corresponde à sequência dos múltiplos de que número? **150.**

c) Em quanto tempo Carlos percorreu 1 200 metros? E Marta? **12 minutos; 8 minutos.**

d) Considerando a sequência dos múltiplos de 100 e a sequência dos múltiplos de 150, o que um número em comum representa? **Esse número representa um múltiplo comum de 100 e 150.**

e) Sabendo que Carlos saiu de sua casa 6 minutos depois que Marta tinha deixado a casa dela, quantos minutos Marta vai esperar por Carlos no local da festa?

f) Quanto tempo Carlos terá de sair antes que Marta para chegarem juntos? **Carlos deve sair 4 minutos antes que Marta.**

Resolução do problema - 1. e) 10 minutos.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

- Uma das estratégias possíveis para a resolução desse problema é montar um quadro em que seja possível observar quantos metros cada amigo percorre por minuto.

Tempo (em minuto)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Distância percorrida por Carlos (em metro)	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000	1 100	1 200
Distância percorrida por Marta (em metro)	0	150	300	450	600	750	900	1 050	1 200	1 350	1 500	1 650	1 800

- Depois que os estudantes copiarem o quadro no caderno e o completarem, leve-os a perceber que Marta demorou 8 minutos para percorrer 1 200 metros, enquanto Carlos demorou 12 minutos para percorrer a mesma distância. Assim, Carlos deve sair 4 minutos antes de Marta para que eles cheguem juntos à festa.

Reflexão sobre o problema

Respostas pessoais.

1. Você gostou de resolver esse problema? Por quê?
2. Você encontrou dificuldades para resolver esse problema? Se encontrou, quais foram elas?
3. Você desenhou alguma figura para ajudá-lo a compreender o problema?
4. Qual estratégia você usou para resolver esse problema?
5. Seus colegas utilizaram estratégias diferentes da sua? Se sim, quais?
6. Você pode apresentar outra maneira de resolver esse mesmo problema? Em caso afirmativo, qual?

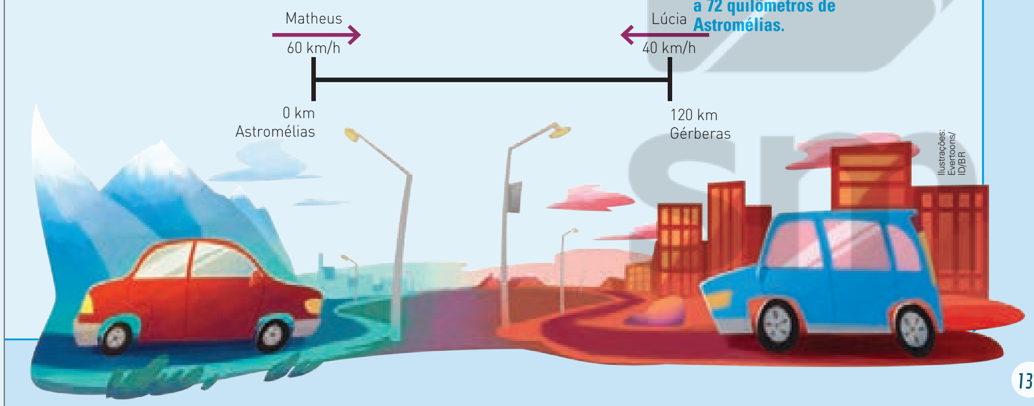
Mais problemas – 2. b) O carro vermelho dá 3 piscadas antes de eles piscarem juntos novamente e o carro azul dá 4 piscadas.

Mais problemas

1. Karina vai mudar para outra cidade e, mesmo relutando em organizar sua coleção de selos, percebeu que essa seria a única maneira de levá-la consigo sem danificá-los. Então, começou a separá-los em montes de acordo com a origem deles. Seis montes foram montados. Ao contar quantos selos havia em cada monte, percebeu que as quantidades de selos em cada um deles correspondiam aos seis primeiros múltiplos positivos de 4. Ela riu sozinha, pois lembrou que estava estudando justamente os múltiplos e divisores em suas aulas de Matemática. Quantos selos há na coleção de Karina? **84 selos.**

2. Luís estava na estrada, à noite, voltando para casa com sua família. De repente, os carros da frente ligaram os pisca-alertas, pois era necessário parar. Ele ficou observando dois carros à frente, um vermelho e um azul, e percebeu que, em dado momento, os pisca-alertas dos dois carros piscavam juntos. Então, ficou interessado em saber quando as luzes de pisca-alerta dos dois carros piscariam juntas novamente. Observou que o pisca-alerta do carro vermelho piscava de 15 em 15 segundos, e o do carro azul, de 12 em 12 segundos. **Mais problemas – 2. a) Depois de 60 segundos.**
   a) De quantos em quantos segundos os pisca-alertas dos dois carros piscam juntos?
   b) Quantas piscadas dá cada pisca-alerta antes de eles piscarem juntos novamente?

3. A distância entre as cidades de Astromélias e Gérberas mede 120 quilômetros. Considere ponto zero a cidade de Astromélias e ponto 120 a cidade de Gérberas, como mostrado no esquema a seguir. Matheus saiu de Astromélias em sentido a Gérberas a uma velocidade de 60 km/h, enquanto Lúcia saiu no sentido contrário a uma velocidade de 40 km/h. Em qual ponto da estrada eles se encontrarão? **No ponto 72, ou seja, a 72 quilômetros de Astromélias.**



Ilustrações: Evertoon/ID/BR

REFLEXÃO SOBRE O PROBLEMA

- Refletir sobre o problema permite verificar se o tipo de problema apresentado foi interessante para os estudantes e se pode ser utilizado em outro momento.
- Saber quais dificuldades os estudantes enfrentaram ao resolver o problema e levar eles próprios a se conscientizar disso torna possível ajudá-los a construir o conhecimento para futuras soluções de problemas. Se a situação proposta for considerada muito fácil para os estudantes, isso pode desmotivá-los a resolver problemas em outro momento.
- A observação da própria estratégia de resolução é importante para os estudantes, pois permite que eles a compreendam melhor e a utilizem em outros momentos da vida escolar. Construir um quadro pode ajudá-los a representar o raciocínio que seguiram. Além disso, deparar com diferentes estratégias de resolução amplia a visão e o repertório de resolução de problemas e a compreensão de que, em Matemática, um problema pode ter mais de uma estratégia de resolução.

MAIS PROBLEMAS

- Na atividade **3**, os estudantes poderão construir um quadro e anotar o ponto em que os dois motoristas estão e ir aproximando os dois veículos, respeitando as velocidades, para verificar onde eles se encontram.

DE OLHO NA BASE

Os problemas propostos nesta seção auxiliam os estudantes a enfrentar situações-problema em múltiplos contextos (incluindo situações imaginadas), a expressar suas respostas e a sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens, o que desenvolve a **competência específica de Matemática 6**. Contribuem também para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**, permitindo que os estudantes sintam segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

Além disso, os problemas permitem aos estudantes exercitar a curiosidade intelectual por meio da investigação, da reflexão, da análise crítica e da criatividade para testar hipóteses e resolver problemas, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 2**.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Na atividade **6**, a soma das medidas dos dois ângulos deve ser igual a 180°, e a diferença deve ser 40°. Sugira aos estudantes que montem um quadro com algumas possibilidades e resolvam por tentativas.
- Verifique se os estudantes percebem que, no item **c** da atividade **8**, não é necessário medir os ângulos para determinar a soma de suas medidas. Basta dividir 540° por 180° e observar nas representações qual polígono está decomposto em três triângulos.
- Na atividade **9**, os estudantes podem cometer um erro e assinalar a alternativa **a** se não compreenderem que não basta multiplicar 180° por 4, pois assim estarão considerando os quatro ângulos retos que são formados pelo encontro das diagonais. Sugira a eles que escrevam os ângulos no losango e adicionem então apenas as medidas dos ângulos internos.
- Na atividade **11**, ao seguir a dica de Gabriela e prolongar os quatro lados do paralelogramo, os estudantes perceberão que os ângulos α e 60° são suplementares, pois são colaterais internos.
- Na atividade **12**, as quatro primeiras alternativas são falsas. Proponha aos estudantes que as justifiquem.
- Espera-se que os estudantes percebam que, na atividade **14**, a soma das medidas dos ângulos em torno do vértice de θ deve ser 360°.

RESPOSTA

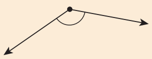
2. Sim, é possível fazer uma subtração entre os dois valores do transferidor que coincidem com lados do ângulo.

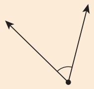
ATIVIDADES INTEGRADAS

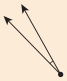
1. Por meio de estimativas, associe, no caderno, cada ângulo a uma das seguintes medidas: **A-III; B-IV; C-II; D-I**

I. 15° **II.** 135° **III.** 180° **IV.** 60°

A


C


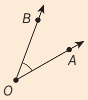
B


D


Ilustrações: ID/BR

2. Reúna-se com um colega. Juntos, reflitam para responder à atividade a seguir.

É possível medir o ângulo $A\hat{O}B$ representado ao lado sem que a linha que indica 0° do transferidor fique alinhada com um dos lados do ângulo? Justifiquem. **Consulte a resposta neste manual.**



ID/BR

3. Calcule mentalmente e registre no caderno:

a) a terça parte de 54°; **18°**

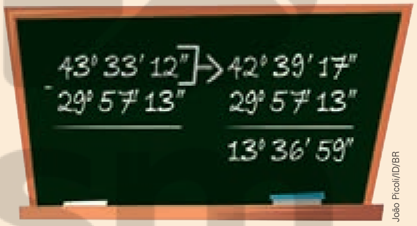
b) a metade de 48° 50′ 26″; **24° 25′ 13″**

c) a quinta parte de 70° 55′ 35″; **14° 11′ 7″**

d) um décimo de 90° 20′ 40″. **9° 2′ 4″**

4. Um objeto desloca-se 15° em torno de um eixo a cada 30 minutos. Quanto tempo esse objeto gastará para se deslocar 90°? **3 horas.**

5. Observe como Carolina subtraiu 29° 57′ 13″ de 43° 33′ 12″.

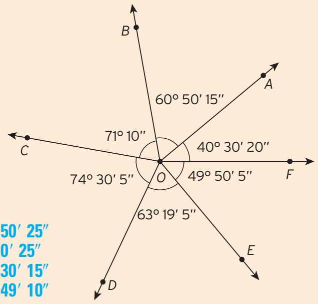


João Picoli/ID/BR

A maneira como Carolina efetuou a subtração está correta? Se não estiver, corrija-a no caderno e explique como você resolveu a operação. **Não, as transformações não foram feitas corretamente. Resposta correta: 13° 35′ 59″.**

6. A diferença entre as medidas de dois ângulos suplementares é 40°. Quanto mede cada ângulo? **70° e 110°.**

7. Observe a figura a seguir e determine a medida do ângulo indicado em cada item. Considere o ângulo de menor abertura.

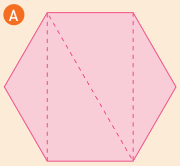


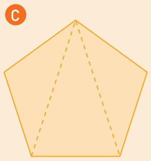
ID/BR

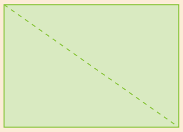
a) 131° 50′ 25″
b) 90° 20′ 25″
c) 145° 30′ 15″
d) 137° 49′ 10″

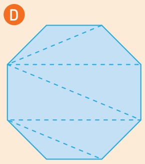
a) $A\hat{O}C$ b) $A\hat{O}E$ c) $B\hat{O}D$ d) $C\hat{O}E$

8. Observe os polígonos representados a seguir.

A


C


B


D


Ilustrações: ID/BR

a) Qual é o nome de cada polígono?

b) Quais desses polígonos são regulares? Como você chegou a essa conclusão? Foi preciso utilizar régua e transferidor?

c) Observe que esses polígonos foram divididos em triângulos. Em qual deles a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 540°? **C**

9. Registre no caderno a alternativa que responde corretamente à questão a seguir.

(Saresp) Com quatro triângulos iguais ao da figura [a seguir], Gustavo montou um losango.

8. a) A – hexágono; B – quadrilátero; C – pentágono; D – octógono.
b) A, C e D. Espera-se que os estudantes usem régua e transferidor e verifiquem se as medidas dos lados de cada figura são iguais, assim como as medidas dos ângulos.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para que os estudantes que apresentaram dificuldade nas atividades **3**, **5** e **7** compreendam os agrupamentos de 60 em 60, retome o sistema de numeração decimal e suas operações, a fim de que possam fazer comparações entre eles e perceber semelhanças e diferenças entre os procedimentos utilizados nas operações. Lembre-os de que, em uma adição com números inteiros, agrupamos as unidades, as dezenas, as centenas, etc. Já em uma adição com submúltiplos do grau, agrupamos os segundos, os minutos e os graus.

Por exemplo, na adição 324 + 89, temos:

324 = 3 centenas, 2 dezenas e 4 unidades = = 300 + 20 + 4

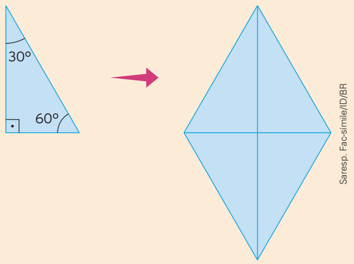
89 = 8 dezenas e 9 unidades = 80 + 9

$$\begin{array}{rccccc} & 300 & + & 20 & + & 4 \\ + & & & 80 & + & 9 \\ \hline & 300 & + & 100 & + & 13 \end{array}$$

Em 13 unidades, temos 1 dezena (10) e 3 unidades. Logo, essa dezena será adicionada às demais dezenas (20 e 80), resultando em 110 dezenas. Em 110 dezenas, há 1 centena (100) e 1 dezena. Da mesma forma, essa centena será adicionada às 3 centenas, resultando em 4 centenas.

$$\begin{array}{rccc} & \overset{1}{3} & \overset{1}{2} & 4 \\ + & & 8 & 9 \\ \hline & 4 & 1 & 3 \end{array}$$

Responda sempre no caderno.

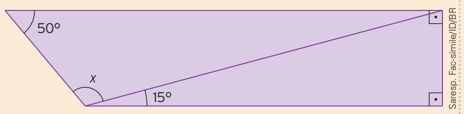


A soma das medidas dos ângulos internos do losango de Gustavo é: **Alternativa b.**

a) 720° b) 360° c) 240° d) 180°

10. Indique no caderno a alternativa correta.

(Saresp) Pode-se calcular a medida do ângulo indicado por *x* na figura sem necessidade de uso do transferidor.

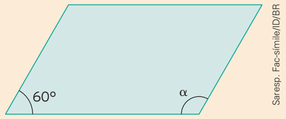


Sua medida é igual a: **Alternativa a.**

a) 115° b) 125° c) 105° d) 135°

11. Registre no caderno a alternativa que responde corretamente à atividade a seguir, mas antes leia a dica de Gabriela.

(Saresp) Assinale a alternativa que mostra corretamente a medida do ângulo α desenhado na figura abaixo: **Alternativa a.**



a) 120° b) 60° c) 150° d) 90°

12. Registre no caderno a alternativa correta.

Considerando um decágono convexo não regular, é possível afirmar que: **Alternativa e.**

a) os ângulos internos desse polígono têm a mesma medida.

b) esse polígono possui 12 lados.

c) esse polígono possui 135 diagonais.

d) a soma das medidas de seus ângulos internos é 180°.

e) a soma das medidas de seus ângulos externos é 360°.

13. Escreva no caderno a alternativa correta.

(Faap-SP) A medida mais próxima de cada ângulo externo do heptágono regular da moeda de R$ 0,25 é: **Alternativa e.**

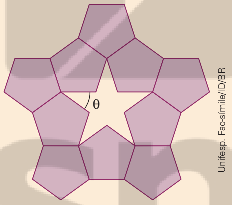
a) 60° d) 83°

b) 45° e) 51°

c) 36°

14. Reúna-se com um colega. Juntos, pensem em como resolver a atividade a seguir. Depois, registrem no caderno a alternativa correta.

(Unifesp) Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados, lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura.



Nestas condições, o ângulo θ mede: **Alternativa d.**

a) 108° d) 36°

b) 72° e) 18°

c) 54°

Em seguida, discuta com os estudantes os agrupamentos de 60 em 60 utilizando os exemplos dados na seção ou crie outros com valores menores. Por exemplo:

$$\begin{array}{rrr} & 30^\circ & 50' \\ + & 20^\circ & 30' \\ \hline & 50^\circ & 80' \end{array}$$

Em 80′, temos 60′ + 20′; como 60′ correspondem a 1°, agrupamos esse valor à soma 30° + 20°, resultando em 51°.

$$\begin{array}{rrr} & \overset{1^\circ}{30^\circ} & 50' \\ + & 20^\circ & 30' \\ \hline & 51^\circ & 20' \end{array}$$

Utilize a mesma estratégia para a subtração, a multiplicação e a divisão.

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Consigo realizar transformações das unidades de medida de ângulos de graus para minutos, de minutos para segundos e de graus para segundos?
- Sei construir ângulos usando régua e transferidor?
- Aprendi a efetuar adição, subtração, multiplicação e divisão com medidas de ângulos?
- Sei identificar ângulos congruentes, adjacentes, complementares e suplementares?
- Identifico ângulos opostos pelo vértice?
- Aprendi a classificar ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal e consigo verificar as relações entre eles?
- Identifico polígonos e seus elementos, como lados, diagonais, vértices e ângulos?
- Sei determinar o número de diagonais de um polígono, sabendo o nome ou o número de lados dele?
- Aprendi a relação entre ângulos internos e ângulos externos de um polígono?
- Aprendi quanto somam as medidas dos ângulos internos de um triângulo?
- Aprendi quanto somam as medidas dos ângulos externos de um polígono?
- Consigo determinar a medida dos ângulos internos e dos ângulos externos de um polígono regular?
- Sei classificar os triângulos quanto aos lados? E quanto aos ângulos?
- Aprendi a descobrir se determinado triângulo existe apenas com as medidas dos lados, sem precisar construí-lo?
- Consigo construir triângulos usando apenas régua e compasso?
- Consigo descrever em um fluxograma a construção de um triângulo qualquer?
- Aprendi a construir um polígono regular com régua e transferidor?
- Consigo descrever em um fluxograma a construção de polígonos regulares?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
4, 6, 8, 9 e 10.

Competência específica de Matemática
3

Temas Contemporâneos Transversais
Economia e Cidadania e Civismo.

Habilidades

(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

UNIDADE 4

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA

SOBRE A UNIDADE

Esta unidade é iniciada pelo estudo de expressões algébricas. Como geralmente muitos estudantes apresentam dificuldade na transição do cálculo numérico para o algébrico, deve-se dar atenção especial a esse momento introdutório, por ser fundamental a compreensão da linguagem algébrica e do uso de letras em generalizações. Pode-se trabalhar com indicações de operações aritméticas, mas sem desenvolvê-las, para mostrar que é possível indicar uma operação matemática sem efetuá-la. Por exemplo, mesmo sem efetuar a operação (12 + 24), nela está indicada a adição de 12 unidades com 24 unidades. É importante ressaltar esse aspecto das expressões algébricas, pois é comum os estudantes pensarem que, ao deparar com a expressão $(a + b)$, sempre podem reduzi-la a um único termo, como acontece na Aritmética.

Nessa fase da aprendizagem, mais do que realizar cálculos algébricos, é importante que os estudantes atribuam significado às expressões algébricas e entendam as letras como símbolos que substituem números para representar quantidades que variam.

PRIMEIRAS IDEIAS

O aumento da frota de carros acarreta o aumento dos problemas gerados por esse meio de transporte. Pensando nisso, muitas cidades repensaram seus modelos de mobilidade. Uma das estratégias adotadas foi o incentivo para o uso de bicicletas. Atrelados a esse incentivo, surgiram os compartilhamentos de bicicletas. De maneira geral, o compartilhamento de bicicletas consiste em disponibilizá-las pela cidade para que as pessoas possam alugá-las por um tempo.

1. No município em que você mora, há programas de compartilhamento de bicicletas?
2. Como você representaria a expressão que determina o total a ser pago pelo aluguel de uma bicicleta, sabendo que é cobrado o valor de R$ 3,50 a cada 15 minutos?
3. Considerando o aluguel por R$ 3,50 a cada 15 minutos, quantos reais devem ser pagos pelo aluguel de uma bicicleta por 50 minutos?


Joacy Souza/Alamy/Fotoarena

← O compartilhamento de bicicletas tem se tornado cada vez mais comum nas grandes cidades. Estação de compartilhamento de bicicletas em Salvador (BA). Foto de 2020.

PRIMEIRAS IDEIAS

- Converse com os estudantes sobre os possíveis problemas ambientais causados pelo aumento da frota de veículos.
- Pergunte a eles como costumam se locomover pela cidade. Discuta outras maneiras de se locomover; por exemplo, utilizando o compartilhamento de caronas.
- Peça aos estudantes que compartilhem com os colegas suas experiências e opiniões sobre o assunto e, então, levantem possíveis soluções para reduzir a quantidade de carros nas ruas, visando preservar o meio ambiente e o trânsito.

RESPOSTAS

1. Resposta pessoal. Se no município não houver programas de compartilhamento de bicicletas, faça uma pesquisa com os estudantes para que eles compreendam como esses programas funcionam. Se houver, peça a eles que comentem o que sabem sobre eles e/ou se já os utilizaram.
2. Há diversas possibilidades de resposta. É possível que os estudantes expliquem com suas palavras como fariam. Nesse caso, oriente-os a utilizar uma representação. Caso nenhum estudante proponha a representação usando uma letra ou um símbolo, mostre aos estudantes essa possibilidade e estimule-os a verificar se a representação feita por você é válida. Como exemplo, sugerimos utilizar a notação $3{,}5t$, em que t representa a quantidade de períodos de 15 minutos em que a bicicleta ficou alugada.
3. Os estudantes devem perceber que 50 minutos não representam uma quantidade inteira de períodos de 15 minutos, pois correspondem a mais que 3 períodos de 15 minutos, porém a menos que 4 períodos de 15 minutos.

   Esse período equivale a $\frac{50}{15}$ períodos de 15 minutos. Alguns estudantes podem concluir que o valor a ser pago deve ser por 4 períodos de 15 minutos, ou seja, 60 minutos; outros podem achar que essa maneira de cobrança não é justa. Promova um momento de discussão sobre essa cobrança de aluguel. Peça a eles que deem sugestões para uma cobrança justa desse aluguel e valide as sugestões coletivamente.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Introdução às expressões algébricas.
- Termos de uma expressão algébrica.
- Simplificação de uma expressão algébrica.
- Sequências e expressões algébricas.

Objetivos

- Compreender a ideia de variável, representada por símbolo ou letra.
- Identificar regularidades em sequências.
- Utilizar expressões algébricas para expressar regularidades em sequências numéricas.
- Reconhecer os termos de uma expressão algébrica e classificá-los em algébricos ou numéricos.
- Reconhecer expressões algébricas equivalentes.
- Simplificar expressões algébricas.
- Classificar regras de sequências em recursivas ou não recursivas.
- Compreender que a recursão está presente em outras áreas de conhecimento além da Matemática, como nas Artes e na Literatura.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes vão iniciar o estudo das expressões algébricas, reconhecendo o uso de letras para indicar variáveis, e vão representar diversas sequências utilizando linguagem matemática. As tarefas são propostas de modo a favorecer o conhecimento de algumas dimensões da Álgebra, como a investigação de padrões em sequências numéricas ou de figuras e interpretações do uso das letras na resolução de problemas, contribuindo com a contrução do pensamento algébrico dos estudantes.

INTRODUÇÃO ÀS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

- Leia com os estudantes a situação descrita no texto e observe se eles compreendem qual é a ideia proposta. Espera-se que eles percebam que é possível estimar a quantidade de pessoas de uma multidão sabendo a medida da área ocupada por ela usando uma expressão. Nesse caso, usamos a letra *A* para representar a medida da área.
- Pergunte aos estudantes em que outras situações é possível utilizar expressões algébricas. Se julgar apropriado, inicie com exemplos, como os valores pagos por uma corrida de táxi e pelo abastecimento de um automóvel, e então estimule-os a refletir sobre outras situações do dia a dia. Incentive-os a representar essas situações por meio de expressões algébricas.
- Observe se os estudantes percebem que, ao utilizar a expressão $5 \cdot A$ ou $5A$, para representar o número de pessoas presentes em uma multidão densa, em que *A* é a medida da área ocupada pela multidão, eles estão fazendo uma generalização. Comente que nessa situação foi utilizada a letra *A*, mas que qualquer outra letra poderia ter sido utilizada.

Capítulo

1 EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Para facilitar a compreensão dos conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes dominem as estratégias utilizadas para realizar operações com números naturais, inteiros e racionais. Além disso, o conhecimento adquirido neste capítulo será fundamental para o estudo de equações e de funções.

Introdução às expressões algébricas

Como você faria para determinar a quantidade de pessoas em um evento de grande porte? Seria viável contar pessoa por pessoa? Dependendo do evento, essa seria uma tarefa trabalhosa e demandaria muito tempo.

Existem alguns métodos que possibilitam estimar o tamanho de uma multidão densa. Um deles é o método de Jacobs, que leva o nome de seu criador, Herbert Jacobs (1903-1987). Esse método estima o tamanho de uma multidão, relacionando a quantidade de pessoas por metro quadrado e a medida da área total ocupada por elas.

Após algumas observações, Jacobs concluiu que nas multidões mais densas há cerca de 5 pessoas por metro quadrado. Assim, por exemplo, em uma área de medida igual a 10 m^2 haveria 50 pessoas, pois $5 \cdot 10 = 50$. Do mesmo modo, em 100 m^2 haveria 500 pessoas, pois $5 \cdot 100 = 500$.

↓ Nesta foto, é possível ver uma multidão de pessoas na praça Frei Caetano Brandão, em Belém (PA). Foto de 2019.

Rubens Chaves/ Pulsar Imagens

Então, sendo A a medida da área ocupada pela multidão, em metro quadrado, podemos estimar a quantidade de pessoas presentes usando a seguinte expressão:

$$5 \cdot A \quad \text{ou} \quad 5A$$

Dizemos que a expressão $5A$ é uma **expressão algébrica**.

Expressões matemáticas formadas por números e letras ou somente por letras são chamadas de expressões algébricas e podem ser usadas para representar diversas situações.

Exemplos

A. Para a produção do concreto, é preciso misturar cimento, areia e brita na seguinte proporção: 1 parte de cimento (c), 2 partes de areia (a) e 3 partes de brita (b). Assim, podemos representar a mistura para a produção do concreto com a seguinte expressão algébrica:

$$1c + 2a + 3b$$

B. Para calcular a diferença entre o dobro de um número x e o triplo de um número n, podemos usar a seguinte expressão algébrica:

$$2x - 3n$$

As letras que utilizamos nas expressões algébricas desta página representam números quaisquer, ou seja, o valor dessas letras pode variar. Por isso, tais letras chamam-se **variáveis**. Utilizamos variáveis em generalizações.

Agora, vamos analisar o quadro a seguir.

Expressão algébrica	Variáveis	O que está sendo generalizado	Valores que as variáveis podem assumir
$5A$	A	A quantidade de pessoas em certa medida de área.	Qualquer número racional maior que zero.
$1c + 2a + 3b$	c, a e b	A quantidade de material a ser usado para produzir concreto.	Qualquer número racional maior que zero.
$2x - 3n$	x e n	A diferença entre o dobro de x e o triplo de n.	Qualquer número.

As letras também podem ser utilizadas em situações que envolvem números desconhecidos. Nesse caso, são chamadas de **incógnitas**.

Exemplo

Vamos determinar o número n cujo quádruplo, ou seja, $4n$, é 600.

Para determinar esse número, temos de descobrir o valor de n de modo que $4n = 600$.

O número n é o 150, pois $4 \cdot 150 = 600$.

Nesse exemplo, n é uma incógnita, pois representa o número a ser determinado.

- Explique aos estudantes que outras situações podem ser representadas por meio de expressões algébricas, reforçando a ideia de que elas são utilizadas em situações nas quais os números de valor desconhecido são denominados variáveis e representados por letras. Além de analisar cada exemplo dado, apresente outros, como:
  - O quadrado de um número: x^2.
  - O dobro de um número: $2 \cdot x$ ou $2x$.
  - A metade de um número: $\frac{1}{2} \cdot x$ ou $\frac{x}{2}$.
  - O produto de dois números: $x \cdot y$.
  - A diferença entre dois números: $x - y$.
  - Um número par: $2 \cdot x$.
  - Um número ímpar: $2 \cdot x + 1$.
- Explique aos estudantes que, em situações que temos a representação de expressões algébricas, mas precisamos determinar um número desconhecido, a letra ou o símbolo utilizado para representar a variável da generalização passa a ser uma incógnita. Por exemplo, na sequência 2, 4, 6, 8, 10, ... o termo geral (generalização) pode ser representado pela expressão algébrica $2n$, em que n é um número natural maior que zero e, portanto, é uma variável. Se quisermos determinar a posição do número 222 nessa sequência, fazemos $2n = 222$, ou seja, $n = 111$. O número 222 é o 111º termo dessa sequência. Em $2n = 222$, n é uma incógnita.
- O conceito de incógnita será retomado mais adiante, no estudo de equações. Assim, se os estudantes não demonstrarem compreensão total desse termo neste momento, ele será retomado e ampliado.

DE OLHO NA BASE

Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA13**.

- Escreva na lousa outra expressão algébrica, formada por uma quantidade maior de termos que a apresentada no Livro do Estudante. Por exemplo:

$$2x^3 + 3y - xy + 4$$

Depois, destaque seus quatro termos: $2x^3$, $3y$, $-xy$ e 4. Solicite aos estudantes que identifiquem quais desses termos são numéricos e quais são algébricos. Observe se eles percebem que há termos algébricos com uma variável e outros com duas variáveis.

Por fim, oriente os estudantes a identificar os coeficientes e a parte literal de cada um dos termos algébricos.

RESPOSTA

2. a) Termos: x e y
    - Para o termo x, temos: coeficiente 1 e parte literal x.
    - Para o termo y, temos: coeficiente 1 e parte literal y.

   b) Termos: $2k$, 3 e $\frac{1}{3}k$
    - Para o termo $2k$, temos: coeficiente 2 e parte literal k.
    - Para o termo $\frac{1}{3}k$, temos: coeficiente $\frac{1}{3}$ e parte literal k.

   c) Termos: mn^2 e $7n$
    - Para o termo mn^2, temos: coeficiente 1 e parte literal mn^2.
    - Para o termo $7n$, temos: coeficiente 7 e parte literal n.

   d) Termos: 10 e $-20t$
    - Para o termo $-20t$, temos: coeficiente -20 e parte literal t.

   e) Termos: b^2 e $2ax$
    - Para o termo b^2, temos: coeficiente 1 e parte literal b^2.
    - Para o termo $2ax$, temos: coeficiente 2 e parte literal ax.

   f) Termos: x, y e $\frac{1}{2}z^2$
    - Para o termo x, temos: coeficiente 1 e parte literal x.
    - Para o termo y, temos: coeficiente 1 e parte literal y.
    - Para o termo $\frac{1}{2}z^2$, temos: coeficiente $\frac{1}{2}$ e parte literal z^2.

   g) Termos: $-4x$ e 7
    - Para o termo $-4x$, temos: coeficiente -4 e parte literal x.

   h) Termos: a^2, $-2ab$ e b^2
    - Para o termo a^2, temos: coeficiente 1 e parte literal a^2.
    - Para o termo $-2ab$, temos: coeficiente -2 e parte literal ab.
    - Para o termo b^2, temos: coeficiente 1 e parte literal b^2.

Termos de uma expressão algébrica

Considere a expressão algébrica $-9 + 7wy^3$. Observe que essa expressão é formada por partes. Chamamos cada uma dessas partes de **termo**.

Agora, veja como podemos classificar os termos dessa expressão.

$$\overbrace{-9}^{\text{termo numérico}} + \overbrace{7wy^3}^{\text{termo algébrico}}$$

Os termos numéricos de uma expressão algébrica não apresentam letras. Já os termos algébricos correspondem ao produto entre um número, chamado de **coeficiente**, e uma **parte literal** (que contém letras). No exemplo anterior, temos:

$$\overbrace{7}^{\text{coeficiente}}\underbrace{wy^3}_{\text{parte literal}}$$

Exemplos

A. $-3xw^2$
- coeficiente: -3
- parte literal: xw^2

B. $\frac{y}{2}$
- coeficiente: $\frac{1}{2}$
- parte literal: y

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Represente com letras as quantidades mencionadas em cada item usando uma expressão algébrica. **Respostas possíveis:**

a) O valor de determinado número. x

b) A diferença entre dois números. $x - y$

c) A metade da diferença entre dois números. $\frac{x - y}{2}$

d) O dobro de um número mais sete. $2x + 7$

e) Um número adicionado à sua terça parte. $x + \frac{x}{3}$

f) Um número adicionado ao quadrado de seu sucessor. $x + (x + 1)^2$

g) O quadrado do produto entre dois números. $(x \cdot y)^2$

2. Identifique os termos das expressões a seguir. Depois, para cada termo algébrico, indique o coeficiente e a parte literal.

a) $x + y$

b) $2k + 3 + \frac{1}{3}k$

c) $mn^2 + 7n$

d) $10 - 20t$

e) $b^2 + 2ax$

f) $x + y + \frac{1}{2}z^2$

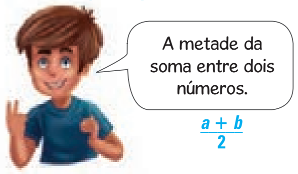
g) $-4x + 7$

h) $a^2 - 2ab + b^2$

Consulte as respostas neste manual.

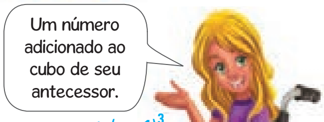
3. Escreva uma expressão algébrica para representar as falas das crianças mostradas nos itens a seguir. Use as letras a e b para representar os números desconhecidos. **Respostas possíveis:**

a)



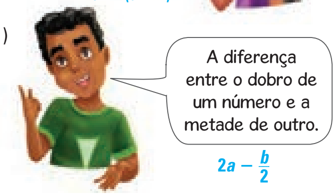
$\frac{a + b}{2}$

b)



$a + (a - 1)^3$

c)



$2a - \frac{b}{2}$

Ilustrações: Danilo Souza/ID/BR

Simplificação de uma expressão algébrica

Algumas expressões contêm **termos semelhantes**, ou seja, termos que apresentam a parte literal igual. Quando uma expressão apresenta termos semelhantes, podemos simplificá-la.

Exemplo A

Vamos tentar simplificar a expressão a seguir.

$$4+2t+5wx-a+1+wx+3a^2-2-2t-a^2$$

Primeiro, verificamos se ela apresenta termos semelhantes. Depois de identificar os termos semelhantes e os termos numéricos, podemos destacá-los com cores iguais para facilitar a simplificação. Veja.

$$4+2t+5wx-a+1+wx+3a^2-2-2t-a^2$$

Agrupamos os termos semelhantes e usamos a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para simplificar a expressão. Acompanhe.

$$4+1-2\underbrace{+2t-2t}+5wx+wx+3a^2-a^2-a=$$

$$\boxed{+2t-2t=2\cdot t-2\cdot t=(2-2)\cdot t=0\cdot t=0}$$

$$=\ 4+1-2+0\underbrace{+5wx+wx}+3a^2-a^2-a=$$

$$\boxed{+5wx+wx=5\cdot wx+1\cdot wx=(5+1)\cdot wx=+6wx}$$

$$=\ 4+1-2+0+6wx\underbrace{+3a^2-a^2}-a=$$

$$\boxed{+3a^2-a^2=3\cdot a^2-1\cdot a^2=(3-1)\cdot a^2=+2a^2}$$

$$=\ 4+1-2+0+6wx+2a^2-a$$

Por fim, simplificamos os termos numéricos.

$$\underbrace{4+1-2+0}+6wx+2a^2-a=$$

$$\boxed{4+1-2+0=5-2+0=3+0=3}$$

$$=\ 3+6wx+2a^2-a$$

Observe que, depois da simplificação, a expressão ficou com apenas quatro termos e que não há mais termos semelhantes. Além disso, o termo $-a$ não foi alterado, pois não havia na expressão inicial nenhum termo semelhante a ele.

PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA

A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição pode ser usada para a subtração também. Veja dois exemplos.

- $2r+4r=(2+4)\cdot r=6r$
- $2r-4r=(2-4)\cdot r=-2r$

sm

- Para a simplificação de expressões algébricas, mostre aos estudantes uma expressão algébrica que apresente alguns termos semelhantes, como:

$$x^2+2y+5-3x^2-1+4y$$

Explique que x^2 e $-3x^2$ são termos semelhantes, pois possuem a mesma parte literal, assim como $2y$ e $4y$. Logo, é possível agrupar:

$$x^2+(-3x^2)=-2x^2$$

$$2y+4y=6y$$

Podem-se agrupar também os termos numéricos. Assim:

$$+5+(-1)=4$$

Portanto:

$$x^2+2y+5-3x^2-1+4y=$$
$$=x^2-3x^2+2y+4y+5-1=$$
$$=-2x^2+6y+4$$

- Esclareça aos estudantes que $2x$ e x^2 não são termos semelhantes, o que é uma dúvida muito comum. Explique a eles que $2x$ é o mesmo que $x+x$, enquanto x^2 é o mesmo que $x\cdot x$.

OUTRAS FONTES

Coxford, A. F. E.; Shulte, A. P. *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1994.

Nessa obra, os autores abordam temas importantes para a aprendizagem da Álgebra, como prontidão para o estudo de conceitos algébricos; equações e expressões algébricas; e resolução de problemas. O uso de computadores e calculadoras no aprendizado da Álgebra também é contemplado, com sugestões de aplicação.

Imenes, L. M. P. *et al. Álgebra*. 6. ed. São Paulo: Atual, 1992 (Coleção Pra que Serve Matemática?).

Para que serve a Álgebra? O autor responde a essa pergunta por meio de vários temas do cotidiano, como: para conhecer as chances de um piloto de Fórmula 1 vencer; para estabelecer a massa ideal em relação à idade; e para definir a órbita de um satélite de telecomunicação. O livro também pretende desvendar truques de cálculo, desafios, adivinhações, novas fórmulas, etc.

- O trabalho com a Álgebra possibilita aos estudantes desenvolver o pensamento algébrico e a capacidade de resolver problemas e de modelar situações matemáticas ou de outras áreas. Para alcançar esse objetivo, proporcione, sempre que possível, experiências variadas de exploração e investigação, de forma contextualizada, fazendo conexões com outras áreas, como a Aritmética e a Geometria, possibilitando aos estudantes uma aprendizagem com significado.
- Para auxiliar os estudantes na atividade **4**, comente que os termos são semelhantes quando têm a mesma parte literal.
- Retome a propriedade distributiva da multiplicação antes de os estudantes iniciarem a atividade **5** e relembre as operações com números racionais para que resolvam a atividade **6**.

Exemplo B

A expressão $\frac{3}{2}y + \frac{7}{5}y + 8y$ apresenta termos semelhantes. Acompanhe como podemos simplificá-la.

$$\frac{3}{2}y + \frac{7}{5}y + 8y =$$

$$= \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{5} + 8\right)y =$$

mmc(2, 5, 1) = 10

$$\frac{3}{2} \underset{\cdot 5}{\overset{\cdot 5}{=}} \frac{15}{10} \qquad \frac{7}{5} \underset{\cdot 2}{\overset{\cdot 2}{=}} \frac{14}{10} \qquad \frac{8}{1} \underset{\cdot 10}{\overset{\cdot 10}{=}} \frac{80}{10}$$

$$= \left(\frac{15}{10} + \frac{14}{10} + \frac{80}{10}\right)y =$$

$$= \left(\frac{15 + 14 + 80}{10}\right)y =$$

$$= \frac{109}{10}y$$

Quando simplificamos uma expressão algébrica, obtemos uma **expressão equivalente** à expressão dada. Assim, dos exemplos anteriores, temos que:

- a expressão $4 + 2t + 5wx - a + 1 + wx + 3a^2 - 2 - 2t - a^2$ é equivalente à expressão $3 + 6w + 2a^2 - a$;
- a expressão $\frac{3}{2}y + \frac{7}{5}y + 8y$ é equivalente à expressão $\frac{109}{10}y$.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

4. Em cada item, identifique os pares de termos semelhantes. **a-IV; b-III; c-II; d-I.**

a)	$3x^2$	I.	$3y^2$
b)	$4xy$	II.	$-2ab$
c)	ab	III.	$-xy$
d)	$-y^2$	IV.	$8x^2$

5. Associe cada expressão à respectiva expressão equivalente. **a-III; b-V; c-IV; d-II; e-I.**

a)	$3x(x - 2y)$	I.	$3a^2x + 3axy$
b)	$2y(x - 3y)$	II.	$4a^2 + 4ab$
c)	$2a(a^2 + 2ab)$	III.	$3x^2 - 6xy$
d)	$4a(a + b)$	IV.	$2a^3 + 4a^2b$
e)	$3ax(a + y)$	V.	$-6y^2 + 2xy$

6. Simplifique as expressões a seguir.

a) $3ab + 2ab$ **$5ab$**

b) $4{,}2x + 5{,}3x$ **$9{,}5x$**

c) $\frac{r}{3} - 2r$ **$-\frac{5}{3}r$**

d) $\frac{5y}{2} + \frac{3y}{5} - \frac{y}{3}$ **$\frac{83}{30}y$**

e) $6{,}1a - 0{,}8b + 1{,}7b - 4a$ **$2{,}1a + 0{,}9b$**

f) $\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^2 + 2$ **$\frac{t^2}{6} + 2$**

g) $\frac{1}{4}w + z - w + 1 + \frac{z}{2}$ **$\left(-\frac{3}{4}\right)w + \left(\frac{3}{2}\right)z + 1$**

h) $\frac{5u + 15}{5} + 3u$ **$4u + 3$**

7. Identifique quais das expressões a seguir são iguais quando simplificadas. **a e d; b e c.**

a) $12a^2 - x + 7 + 5x - 4a + 1 - a^2$

b) $a - 3 + 4a^2 + 1 + 5x + 3a + 11 - 6a^2$

c) $7a^2 - a + 5x + 9 - 9a^2 + 5a$

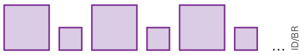
d) $6a^2 + x + 10 - 4a + 5a^2 + 3x - 2$

- Agora, escreva outra equação equivalente a cada par de equações encontrado. **Resposta pessoal.**

Sequências e expressões algébricas

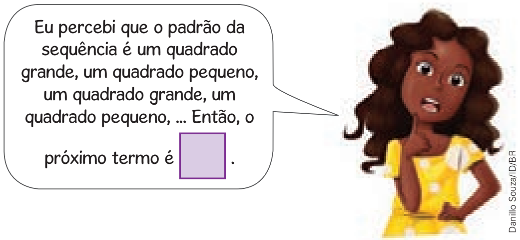
Sequência é uma lista ordenada de elementos. Cada elemento de uma sequência é chamado de termo. Assim, por exemplo, a sequência (7, 8, 9) é diferente da sequência (9, 8, 7), pois os termos estão ordenados de maneiras diferentes.

Agora, observe a sequência a seguir.

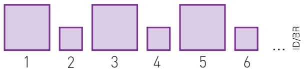


Você consegue perceber algum padrão nessa sequência? Qual deve ser o próximo termo dessa sequência? **Respostas pessoais.**

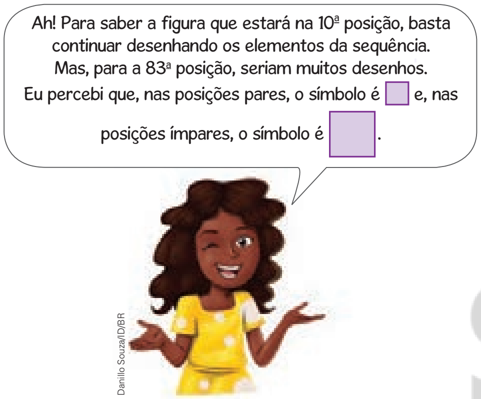
Veja como Jane pensou para responder a essas perguntas.



Considerando o que Jane percebeu, podemos numerar as posições de cada quadrado. Veja.



Agora, observando novamente a sequência, como poderíamos determinar a figura do 10º termo? E do 83º termo?



Note que, de acordo com o raciocínio de Jane, o 10º termo seria ☐ e o 83º, ☐.

LEMBRE-SE!

As reticências (...) indicam que a sequência continua indefinidamente.

PARE E REFLITA

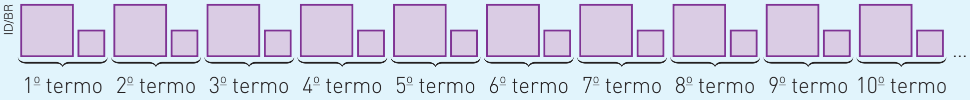
Se tivéssemos considerado o par de quadrados um único termo, qual seria o 10º termo? E o 83º termo?

Espera-se que os estudantes respondam que tanto o 10º como o 83º termos seriam o par de quadrados.

SEQUÊNCIAS E EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

- Reforce com os estudantes o significado de sequência. Relembre-os de que já estudaram algumas sequências, como a dos números naturais e a dos números inteiros.
- Comente com os estudantes que a ordenação dos elementos de uma sequência pode ser de diferentes tipos: lógica, cronológica, por tamanho, entre outros.
- As sequências são muito comuns no dia a dia dos estudantes. Comente que às vezes lidamos com sequências sem perceber, como ao contar as horas do dia, os meses do ano, etc.
- Em Matemática, é comum estudarmos dois tipos de sequência: as figurais, cujos elementos são figuras, e as numéricas, cujos elementos são números. Proponha aos estudantes alguns exemplos de cada tipo. Procure expor tanto sequências em que é possível observar uma regularidade como sequências em que não é possível notar regularidade nenhuma. Por fim, comente que em algumas sequências é possível observar tanto uma regularidade figural como uma regularidade numérica.
- As relações entre sequências e expressões algébricas proporcionam aos estudantes situações de aprendizagem que desenvolvem noções de pensamento computacional (identificação de padrões), mobilizando diferentes processos cognitivos, na medida em que eles reconhecem as regras de formação das sequências e representam variáveis por meio de linguagem matemática. Além disso, esse trabalho favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, em que os estudantes vão levantar hipóteses e fazer conjecturas sobre as regras de formação de sequências.

- Converse com os estudantes sobre o boxe *Pare e reflita*. Desenhe a sequência na lousa considerando o par de quadrados um único termo, para exemplificar como ficaria a sequência com 10 termos.



Verifique se eles perceberam que todos os termos (pares de quadrados) são iguais. Isso caracteriza uma sequência constante. Portanto, não importa qual seja o termo solicitado, a resposta sempre será a mesma: o par de quadrados.

- Reproduza a sequência apresentada no Livro do Estudante na lousa e incentive os estudantes a perceber que ela apresenta um padrão tanto de quantidade de pontinhos como de construção das figuras. Permita que eles expressem o padrão observado do modo como preferirem e, sempre que necessário, faça intervenções. É provável que, de início, eles identifiquem apenas o padrão figural envolvido. Se esse for o caso, construa coletivamente o quadro que relaciona a posição de cada figura com sua quantidade de pontinhos.
- Quanto à 1ª maneira apresentada no Livro do Estudante, a representação algébrica do padrão ou da regularidade de uma sequência deve ser feita de maneira gradual, para que possa ser mais bem compreendida pelos estudantes.
- Na 2ª maneira, caso os estudantes não percebam que as cores têm significados diferentes, pergunte a eles o que cada cor representa na expressão. Reforce que *p* está representando a posição do termo na sequência e questione o significado de $(p - 1)$. A cor verde representa o primeiro termo, a primeira bolinha. A cor roxa representa as partes que vão aparecer ao redor da bolinha verde – são os “locais”: para a direita, para a esquerda, para cima e para baixo. A cor vermelha representa a quantidade de bolinhas que vai compor cada um desses “locais” representados pela cor roxa. A quantidade de bolinhas vermelhas é sempre uma unidade a menos que a posição (p) que está sendo formada, ou seja, $(p - 1)$.
- Observe se os estudantes são capazes de compreender a diferença entre uma expressão recursiva e uma não recursiva.

DE OLHO NA BASE

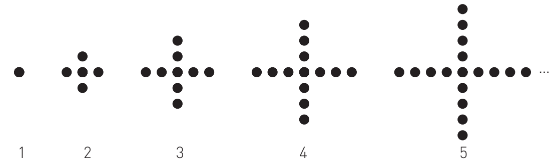
Compreender como utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA15**.

Além disso, compreender e identificar quando uma regra é recursiva e quando ela não é recursiva contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA14**.

Usando letras na representação de padrões

Vimos que podemos utilizar expressões algébricas para representar diversas situações do dia a dia. Agora, veremos que também podemos utilizá-las para representar padrões de sequências. Como exemplo, acompanhe a situação a seguir.

Francisco começou a desenhar uma sequência. Observe:



Ilustrações: ID/BR

Como você desenharia a 6ª figura dessa sequência? Qual foi o padrão utilizado por Francisco? **Respostas pessoais.**

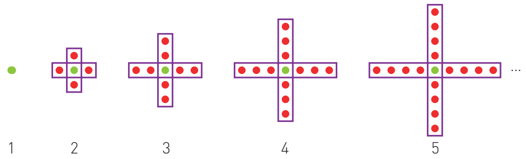
Podemos pensar de duas maneiras para descrever o padrão da sequência formada pelo número de pontinhos em cada figura.

- **1ª maneira:** A cada figura, adicionamos 4 pontinhos à figura anterior.

Posição	1	2	3	4	5	...
Quantidade de pontinhos	1	5	9	13	17	...

+ 4 + 4 + 4 + 4

- **2ª maneira:** Sendo *p* a posição do termo, poderíamos pensar na seguinte expressão: $1 + (p - 1) \cdot 4$



Você percebeu que, para determinar o número de pontinhos de uma posição usando a 1ª maneira, é preciso conhecer o número de pontinhos da posição anterior? E que na 2ª maneira é preciso conhecer apenas a posição? **Respostas pessoais.**

Dizemos que a primeira maneira é **recursiva**, pois precisamos de informações dos termos anteriores da sequência para determinar o termo de uma posição. Já a segunda maneira é chamada de **não recursiva**, pois depende apenas da posição do termo na sequência.

Agora, imagine a seguinte situação: Francisco precisa determinar o número de pontinhos da figura que ocupa a 103ª posição. Qual das duas maneiras seria melhor ele utilizar? **Resposta pessoal.**

PARE E REFLITA

Reúna-se com um colega para determinar outra expressão algébrica que possibilite obter o número de pontinhos das figuras da sequência desenhada por Francisco. A expressão encontrada por vocês é equivalente à expressão apresentada na 2ª maneira?

Resposta pessoal.

OUTRAS FONTES

Modanez, L. *Das sequências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico*. 2003. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11235/1/leila%20modanez.pdf. Acesso em: 30 maio 2022.

A pesquisa dessa monografia teve como objetivo o estudo da introdução ao pensamento algébrico por meio de sequências de padrões geométricos. O texto apresenta uma proposta de ensino da pré-álgebra, no Ensino Fundamental, e uma reflexão sobre a aprendizagem desse conteúdo por meio de uma sequência didática envolvendo oito atividades elaboradas a partir do uso de sequências de padrões geométricos.

Acompanhe outros exemplos que envolvem sequências e expressões algébricas.

Exemplos

A. Mário escreveu a sequência a seguir em um quadro e pediu a dois colegas, Juliana e Édson, que descobrissem o padrão e escrevessem uma regra para determinar os termos dessa sequência.

$$3, 5, 7, 9, \ldots$$

Utilizando a letra *p* para indicar a posição dos termos da sequência, cada um dos amigos escreveu uma regra.

- Juliana: $2p + 1$
- Édson: $\frac{4p + 2}{2}$

Vamos verificar se as duas regras são válidas.

Juliana
- 1º termo: $2p + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$
- 2º termo: $2p + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$
- 3º termo: $2p + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 6 + 1 = 7$
- 4º termo: $2p + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9$

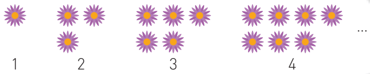
Édson
- 1º termo: $\frac{4p + 2}{2} = \frac{4 \cdot 1 + 2}{2} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$
- 2º termo: $\frac{4p + 2}{2} = \frac{4 \cdot 2 + 2}{2} = \frac{8 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$
- 3º termo: $\frac{4p + 2}{2} = \frac{4 \cdot 3 + 2}{2} = \frac{12 + 2}{2} = \frac{14}{2} = 7$
- 4º termo: $\frac{4p + 2}{2} = \frac{4 \cdot 4 + 2}{2} = \frac{16 + 2}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Perceba que tanto a expressão utilizada por Juliana como a expressão utilizada por Édson são válidas. Isso acontece porque as expressões algébricas encontradas por eles são equivalentes.

Observe que, ao simplificar a expressão encontrada por Édson, obtemos a expressão escrita por Juliana.

$$\frac{4p + 2}{2} = \frac{4p}{2} + \frac{2}{2} = 2p + 1$$

B. Considere a sequência a seguir.



ID/BR

Ângela e Marco encontraram regras não recursivas para determinar a quantidade de flores em cada posição. Eles utilizaram a letra *p* para indicar a posição. Veja.

- Ângela: $p + (p - 1)$
- Marco: $2p - 1$

Note que as expressões encontradas são diferentes, mas ambas estão corretas. Isso acontece porque as expressões são equivalentes.

$$p + (p - 1) = p + p - 1 = 2p - 1$$

- Solicite aos estudantes que verifiquem se as expressões utilizadas por Ângela e Marco no exemplo **B** são válidas. Oriente-os a registrar no caderno como pensaram. Espera-se que façam o seguinte registro:
  - Ângela: $p + (p - 1)$
    1º termo: $1 + (1 - 1) = 1 + 0 = 1$
    2º termo: $2 + (2 - 1) = 2 + 1 = 3$
    3º termo: $3 + (3 - 1) = 3 + 2 = 5$
    4º termo: $4 + (4 - 1) = 4 + 3 = 7$
  - Marco: $2p - 1$
    1º termo: $2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$
    2º termo: $2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$
    3º termo: $2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$
    4º termo: $2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7$

DE OLHO NA BASE

Verificar que duas expressões são válidas para representar uma mesma sequência numérica, reconhecendo que são expressões equivalentes, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA16**.

+ INTERESSANTE

Converse com os estudantes sobre a recursão em outras áreas do conhecimento, como nas Artes e na Literatura. Mostre a eles algumas obras de arte que utilizam fractais.

Além disso, a recursão pode ser utilizada em outras áreas da própria Matemática. Um exemplo é a torre de Hanói, um quebra-cabeça formado por três hastes e diversos discos empilhados em ordem decrescente de área, que podem variar em quantidade. O objetivo do jogo é mover toda a pilha de discos para outra haste com o menor número de movimentos possível, obedecendo às seguintes regras:

1ª) apenas um disco pode ser movido de cada vez;

2ª) nenhum disco pode ser colocado em cima de um disco menor.

O número mínimo de movimentos necessários para resolver um quebra-cabeça da torre de Hanói é:

$$2^n - 1$$

em que n é o número de discos.

O trabalho com a recursividade em outras áreas do conhecimento e a proposta do jogo favorecem o desenvolvimento do raciocínio por analogia.

RESPOSTA

8. a) A seguir apresentamos algumas possibilidades de resposta. Incentive os estudantes a compartilhar como pensaram.
   - **I.** Recursiva: multiplicar o termo anterior por 10; não recursiva: sendo p a posição, 10^{p-1}.
   - **II.** Recursiva: multiplicar o termo anterior por 2; não recursiva: sendo p a posição, 2^p.
   - **III.** Recursiva: adicionar 3 ao termo anterior; não recursiva: sendo p a posição, $3p + 1$.
   - **IV.** Recursiva: adicionar 3 ao termo anterior; não recursiva: sendo p a posição, $3p - 10$.

   b) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes percebam que as regras recursivas dependem dos termos anteriores, e as não recursivas dependem apenas da posição.

   c) Resposta pessoal.

+ INTERESSANTE

A recursão também está presente em outras áreas!

A recursão não é exclusiva da área de Matemática. Ela também está presente em outras áreas do conhecimento, como na arte, na literatura, na computação e até mesmo na música! Em cada uma dessas áreas, a recursividade apresenta características específicas. Veja um exemplo.

Você conhece ou já ouviu falar de fractais?

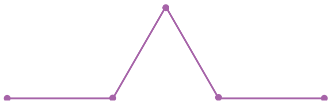
Os fractais são figuras cuja principal característica é a autossimilaridade. Em outras palavras, são figuras que contêm em si reproduções menores da figura original. Essas reproduções, por sua vez, contêm cópias ainda menores e assim sucessivamente. Os fractais podem ser encontrados com frequência em representações artísticas.

Um dos fractais mais conhecidos é a curva de Koch, que lembra um floco de neve. Acompanhe como podemos construir a curva de Koch.

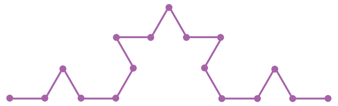
① Considera-se um segmento de reta.

② Divide-se o segmento de reta em três segmentos de mesmo comprimento.

③ Substitui-se o segmento do meio por dois lados de um triângulo equilátero, fazendo um ângulo de 60° nos pontos das extremidades do segmento retirado.



④ Repetem-se os procedimentos 1, 2 e 3 para cada um dos segmentos da figura e assim sucessivamente.



Ilustrações: ID/BR

Você percebeu que, para obter uma figura da curva de Koch, precisamos conhecer a figura anterior? Por esse motivo, dizemos que a recursão está presente nos fractais.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

8. Consulte as respostas neste manual.

8. Considere as sequências a seguir e faça o que se pede em cada item.

I. 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, ...
II. 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...
III. 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...
IV. −7, −4, −1, 2, 5, 8, ...

a) Escreva uma regra para o padrão de cada sequência.

b) As regras que você escreveu no item **a** são recursivas ou não recursivas? Como você pensou para fazer essa classificação?

c) Compare as regras que você criou com as de um colega. Elas são iguais? Verifique se as duas são válidas.

9. Dois amigos escreveram expressões diferentes para determinar o padrão de algumas sequências. Depois de analisar as expressões, o professor deles disse que ambos escreveram expressões corretas.

Relacione as expressões de cada coluna e verifique quais podem ser as regras que os dois amigos criaram para a mesma sequência. **a-II; b-IV; c-I; d-III.**

a)	$2n + 10$	I.	$4(n - 2)$
b)	$(8 - 4n) : 4$	II.	$2(n + 5)$
c)	$2(2n - 4)$	III.	$3(5n + 1)$
d)	$15n + 3$	IV.	$2 - n$

DE OLHO NA BASE

A atividade **8** permite que os estudantes utilizem simbologia algébrica para expressar regularidades em sequências, desenvolvendo a habilidade **EF07MA15**.

Além disso, a atividade permite a eles classificar sequências em recursivas e não recursivas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA14**.

OUTRAS FONTES

Coêlho, A. V. de S. *Recursividade e arte*. Disponível em: http://alvarodegas.blogspot.com/2009/04/recursividade-e-arte.html. Acesso em: 30 maio 2022.

Além de ilustrar a recursividade em algumas obras de Escher, o autor traz a ideia de recursividade ligada à lógica e à música.

Manoel, L. R. da S. *Torre de Hanói*. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/torre_de_hanoi.pdf. Acesso em: 30 maio 2022.

O autor apresenta, além das regras do quebra-cabeça, a história e a lenda da torre de Hanói.

DIVERSIFICANDO

6. a) 2 maçãs: R$ 5,80; 3 maçãs: R$ 8,70; 4 maçãs: R$ 11,60; 5 maçãs: R$ 14,50.

Responda sempre no caderno.

1. b) 5,9: valor da bandeirada; 2,9: valor do quilômetro rodado.

1. Para calcular o valor de uma corrida, um taxista cobra R$ 5,90 pela bandeirada mais R$ 2,90 por quilômetro percorrido.

Cristina Gallo/Fotoarena

a) A expressão algébrica a seguir pode ser usada para calcular o valor de uma viagem? **Sim.**

$$5{,}9 + 2{,}9 \cdot q$$

b) O que o número 5,9 representa nessa expressão algébrica? E o número 2,9?

c) O que representa a letra *q*?

2. Resolva os itens a seguir, considerando que o preço em reais de uma camiseta seja *x*.

Danillo Souza/ID/BR

a) Escreva no caderno a expressão algébrica que representa o preço de cada produto a seguir.

- A calça custa o triplo do valor da camiseta.
- A luva custa metade do valor da camiseta.
- O casaco custa R$ 20,00 a mais que a camiseta. **Calça: $3x$; luva: $\frac{x}{2}$; casaco: $x + 20$.**

b) Se o preço da camiseta for R$ 36,00, quanto custará:

- a calça?
- a luva?
- o casaco?

3. Escreva uma expressão algébrica para representar cada sentença. **Respostas possíveis:**

a) 10% de um número. **$0{,}1x$**

b) A metade de 25% de um número. **$\frac{0{,}25x}{2}$**

4. Represente com expressões algébricas o que se pede em cada item.

a) A medida do perímetro do hexágono regular, sabendo que a medida do comprimento de cada lado é *h*. **$6h$**

b) Um terço da medida do perímetro do pentágono regular, sabendo que a medida do comprimento de cada lado é *d*. **$\frac{5}{3}d$**

1. c) É a variável dessa expressão algébrica e representa a quantidade de quilômetros percorridos.

5. c) Falsa. Correção possível: 7 é o coeficiente de x^2 na expressão $7x^2 + 2x - \frac{6}{5}$.

5. Identifique cada sentença como verdadeira ou falsa e, depois, corrija as falsas.

a) Na expressão algébrica $xy - 4 + 3x$, o termo numérico é -4. **Verdadeira.**

b) O termo algébrico é composto de duas partes: a parte numérica, denominada coeficiente, e a parte literal, que contém as letras. **Verdadeira.**

c) -7 é o coeficiente de x^2 na expressão $7x^2 + 2x - \frac{6}{5}$.

6. Sabendo que, em certo supermercado, cada maçã custa R$ 2,90, escreva:

Maks Narodenko/Shutterstock.com/ID/BR

a) quantos reais são necessários para comprar 2, 3, 4 e 5 maçãs;

b) a expressão algébrica que representa o valor a ser pago por uma quantidade *x* de maçãs. **$2{,}90x$**

7. No caderno, relacione cada expressão algébrica com a respectiva forma simplificada.

a) $8a^2m - 3a^2m$

b) $2am^2 - 1 + 3am^2$

c) $3x - 2a + 4x + a$

d) $15x + 4 - 8x - 3$

e) $3(x + m) + 2x - m$

I. $7x - a$

II. $7x + 1$

III. $5x + 2m$

IV. $5a^2m$

V. $5am^2 - 1$

a-IV; b-V; c-I; d-II; e-III.

8. Joana e Marcos estão jogando *videogame* e descobriram uma maneira de passar direto para a última fase: eles precisam digitar três números, que são o 23º, o 35º e o 50º números da sequência:

4, 7, 10, 13, ...

Identifique os números que Joana e Marcos devem digitar para passar direto para a última fase. **70; 106; 151.**

9. Reúna-se com um colega. Observem a sequência a seguir e façam o que se pede.

9, 13, 17, 21, 25, 29, ...

a) Escrevam uma regra recursiva e uma regra não recursiva para essa sequência.

b) Qual é o próximo número dessa sequência? **33**

c) As expressões criadas por vocês são equivalentes? **Resposta pessoal.**

9. a) Regra recursiva: $a_n = a_{n-1} + 4$, com $a_1 = 9$; regra não recursiva: $a_n = 4n + 5$

2. b) Calça: R$ 108,00; luva: R$ 18,00; casaco: R$ 56,00.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Verifique se os estudantes conhecem o termo “bandeirada”, para responderem ao item **b** da atividade **1**. Explique a eles que R$ 5,90 representa um valor fixo, independentemente da quantidade de quilômetros rodados. Se julgar oportuno, comente que geralmente nas corridas há dois tipos de bandeirada, que variam de acordo com o horário.
- Na atividade **2**, é importante que os estudantes percebam que todos os valores do item **a** dependem do valor da camiseta.
- Retome o conceito de medida de perímetro antes de iniciar a atividade **4**.
- Aproveite a atividade **5** para verificar se os estudantes compreenderam os conceitos relacionados a termo algébrico: parte literal e parte numérica.
- Outro modo de resolução da atividade **6** é a construção de um quadro.

Maçãs	Cálculo	Valor (R$)
2	2,90 · 2	5,80
3	2,90 · 3	8,70
4	2,90 · 4	11,60
5	2,90 · 5	14,50
x	2,90 · *x*	2,90*x*

- Para realizar a atividade **8**, incentive os estudantes a descobrir uma regra não recursiva para a sequência. Caso alguns deles prefiram escrever termo a termo até chegar ao 50º, pergunte a eles qual seria o 1 000º termo. Uma possível regra é $a_n = 3n + 1$. Assim, o 1 000º termo será 3 001.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nesta seção permitem que os estudantes compreendam a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA13**.

A atividade **9** permite que os estudantes reconheçam se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma sequência numérica são ou não equivalentes, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA16**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Caso os estudantes apresentem dificuldade em encontrar a regra recursiva em determinada sequência, sugira a eles que montem um quadro com as posições e os respectivos termos da sequência para que a observação do padrão seja mais fácil.

Proponha a atividade a seguir aos estudantes que apresentarem dificuldades no estudo de sequências e expressões algébricas, com o objetivo de levá-los a generalizar uma situação, obtendo, assim, uma expressão algébrica que a represente.

1. O plano de telefonia móvel de Ana cobra uma taxa de R$ 50,00 ao mês, mais R$ 0,50 por minuto excedente. Observe o quadro de cobrança de faturas que Ana organizou para os meses de janeiro a abril.

Mês	Minutos excedidos	Cálculo	Valor pago
Janeiro	30	50 + 30 · 0,50	R$ 65,00
Fevereiro	40	50 + 40 · 0,50	R$ 70,00
Março	20	50 + 20 · 0,50	R$ 60,00
Abril	60	50 + 60 · 0,50	R$ 80,00

Complete o quadro com os cálculos e o valor que Ana pagou em cada mês. Escreva uma expressão para calcular o valor a ser pago em qualquer mês.

50 + *x* · 0,50 ou 50 + 0,50*x*, sendo *x* a quantidade de minutos excedidos.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Solução ou raiz de uma equação.
- Conjunto universo e conjunto solução de uma equação.
- Equações do 1º grau com uma incógnita.
- Equações com duas incógnitas.

Objetivos

- Verificar se determinado número é raiz (ou solução) de uma equação.
- Representar situações-problema por meio de equações polinomiais do 1º grau.
- Resolver equações polinomiais do 1º grau do tipo $ax + b = c$ com base na propriedade da igualdade.
- Reconhecer e determinar as soluções de equações com duas incógnitas.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de avançar no estudo da Álgebra, utilizando letras para representar incógnitas em equações do 1º grau. Além disso, eles poderão analisar a resolução de equações do 1º grau com uma e com duas incógnitas. Esses conhecimentos são fundamentais para melhorar a capacidade de abstração dos estudantes, contribuindo com a autonomia deles na generalizalização de situações e na resolução de problemas do cotidiano.

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES

- Verifique se os estudantes compreenderam os conceitos estudados no capítulo anterior, pois eles serão a base para a compreensão do conceito de equações.
- Com base na imagem da abertura, explique aos estudantes que, para chegar ao preço final de um produto, como os vendidos em uma avicultura, um comerciante precisa conhecer a cadeia produtiva dele, desde o produtor até o consumidor final. Incentive a turma a refletir com base nesse contexto sobre alguns tributos, taxas, impostos e contribuições sociais que incidem nos preços dos produtos que consumimos e como esses tributos, taxas, etc.

Capítulo 2 EQUAÇÕES

Para que os estudantes compreendam com clareza os conteúdos desenvolvidos neste capítulo, é importante que tenham absorvido os conceitos do capítulo anterior. Compreender o conceito de equação possibilita a resolução de muitos problemas diários e é suporte para o entendimento do conteúdo de função, que será estudado nos próximos anos.

Introdução às equações

Como um comerciante estabelece o preço de um produto? Você já pensou sobre isso? De modo geral, o comerciante chega a esse valor não de maneira arbitrária, mas com base em alguns cálculos. Geralmente, o preço estabelecido para a venda corresponde à soma do preço de custo (preço que o comerciante pagou pelo produto ou quanto ele gastou na fabricação do produto) ao valor dos impostos a serem pagos ao governo e ao valor do lucro esperado (valor que o comerciante ganhará com a venda do produto).

Assim, podemos pensar na seguinte igualdade:

$$P = C + I + L$$

em que P é a soma do preço de custo (C) com o valor dos impostos (I) e com o valor do lucro (L).

↓ O preço de um produto é pensado pelos comerciantes e fiscalizado por órgãos do governo.

wavebreakmedia/Shutterstock.com/ID/BR

(IN)FORMAÇÃO

A origem das equações do 1º grau

"Assim como o Sol empalidece as estrelas com o seu brilho, um homem inteligente eclipsa a glória de outro homem nos concursos populares, resolvendo os problemas que este lhe propõe."

François Viète.

Este texto da Índia antiga fala de um passatempo muito popular dos matemáticos hindus da época: a solução de quebra-cabeças em competições públicas, em que um competidor propunha problemas para outro resolver.

Era muito difícil a Matemática nesse período. Sem nenhum sinal, sem nenhuma variável, somente alguns poucos sábios eram capazes de resolver os problemas, usando muitos artifícios e trabalhosas construções geométricas.

Hoje, temos a linguagem exata para representar qualquer quebra-cabeça ou problema. Basta traduzi-los para o idioma da Álgebra: a equação.

Equação é uma maneira de resolver situações nas quais surgem valores desconhecidos quando se tem uma igualdade. A palavra "equação" vem do latim *equatione*, equacionar, que quer dizer igualar, pesar, igualar em peso. E a origem primeira da palavra "equação" vem do árabe *adala*, que significa "ser igual a", de novo a ideia de igualdade. Por serem desconhecidos, esses valores são representados por letras. Por isso na língua portuguesa existe uma expressão muito usada: "o *x* da questão". Ela é utilizada quando temos um problema dentro de uma determinada situação. Matematicamente, dizemos que esse *x* é o valor que não se conhece.

A primeira referência a equações de que se [tem] notícia consta do papiro de Rhind, um dos documentos egípcios mais antigos que tratam de matemática, escrito há mais ou menos 4 000 anos.

Como os egípcios não utilizavam a notação algébrica, os métodos de solução de uma equação eram complexos e cansativos.

Os gregos resolviam equações através de Geometria.

Mas foram os árabes que, cultivando a Matemática dos gregos, promoveram um acentuado progresso na resolução de equações. Para representar o valor desconhecido em uma situação matemática, ou seja, em uma equação, os árabes chamavam o valor desconhecido em uma situação matemática de "coisa". Em árabe, a palavra "coisa" era pronunciada como *xay*. Daí surge o *x* como tradução simplificada de palavra "coisa" em árabe.

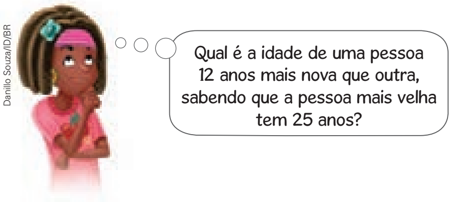
No trabalho dos árabes, destaca-se o de Al-Khowarizmi (século IX), que resolveu e discutiu equações de vários tipos.

Considerando a igualdade da página anterior, para calcular o preço P de um produto cujo custo é R$ 10,00, o imposto é R$ 2,00 e o lucro é metade de P, podemos utilizar a seguinte sentença: $P = 10 + 2 + \frac{P}{2}$. Essa sentença é chamada de **equação**.

Sentenças matemáticas expressas por uma igualdade que contém pelo menos uma letra são chamadas de equações.
Cada letra que aparece em uma equação é chamada de **incógnita** e representa um número desconhecido.

No nosso dia a dia, podemos utilizar igualdades para representar muitas situações. Observe que o símbolo utilizado para representar uma igualdade é o sinal de igual (=).

Agora, acompanhe outro exemplo em que é possível utilizar uma igualdade.



Danilo Souza/ID/BR

Se representarmos a idade da pessoa mais nova por x, podemos representar a idade da pessoa mais velha por $x + 12$. Agora, para incluir a informação de que a pessoa mais velha tem 25 anos, podemos recorrer a uma igualdade. Veja.

$$x + 12 = 25$$

Em uma equação, a expressão à esquerda do sinal de igual é chamada de **1º membro**, e a expressão à direita do sinal de igual é chamada de **2º membro**.

Exemplos

A. $4z + 2 = z$
- incógnita: z
- 1º membro: $4z + 2$
- 2º membro: z

B. $12y^2 - 7 = \frac{x}{3} + 4$
- incógnitas: y e x
- 1º membro: $12y^2 - 7$
- 2º membro: $\frac{x}{3} + 4$

Observações

- $2 + 9 = 11$ é uma igualdade, mas não é uma equação, pois em nenhum dos membros há uma incógnita.
- $-5 < \sqrt{2}$ não é uma igualdade nem tem uma incógnita.
- $8x + 3y - 1$ não é uma equação, pois não apresenta sinal de igualdade.

PARA EXPLORAR

***Equação: o idioma da Álgebra*, de Oscar Guelli. São Paulo: Ática, 1999 (Coleção Contando a História da Matemática).**

Muitas vezes, para resolver problemas de Matemática, o melhor caminho é traduzi-los para a linguagem da Álgebra. Esse livro conta a história do desenvolvimento dessa linguagem em várias épocas e culturas.

devem retornar à sociedade de maneira justa. Se julgar necessário, consulte as informações sobre educação fiscal no *site* https://educacaofiscal.fazenda.mg.gov.br/educacao-fiscal/o-que-e/ (acesso em: 14 jul. 2022). Essa reflexão contribui para desenvolver o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação Fiscal, alinhado à macroárea **Economia**.

- Observe se os estudantes compreenderam a representação do preço de um produto por meio de uma igualdade em que aparecem letras. Se julgar oportuno, proponha outras situações que podem ser representadas dessa maneira.
- Incentive os estudantes a perceber que à esquerda e à direita da igualdade dada aparecem expressões algébricas.
- Verifique se eles compreenderam o que é uma equação: sentenças matemáticas expressas por uma igualdade que contém pelo menos uma letra.
- Deve ficar claro aos estudantes que nas equações cada letra é chamada de incógnita e representa um número desconhecido. É possível atribuir valores para cada incógnita, de modo que a igualdade dada se torne verdadeira.
- Se julgar oportuno, escreva na lousa outros exemplos de equações e sentenças que não sejam equações e peça aos estudantes que digam quais delas são equações.

DE OLHO NA BASE

Entender que incógnita é uma letra que representa um número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA13**.

Al-Khowarizmi é considerado o matemático árabe de maior expressão do século IX. Ele escreveu dois livros que desempenharam importante papel na história da Matemática. Num deles, *Sobre a arte hindu de calcular*, Al-Khowarizmi faz uma exposição completa dos numerais hindus. O outro, considerado o seu livro mais importante, *Al-jabr wa'l mugãbalah*, contém uma exposição clara e sistemática sobre resolução de equações.

As equações ganharam importância a partir do momento em que passaram a ser escritas com símbolos matemáticos e letras. O primeiro a fazer isso foi o francês François Viète, no final do século XVI. Por esse motivo é chamado "pai da Álgebra".

Viète também foi o primeiro a estudar as propriedades das equações através de expressões gerais como $ax + b = 0$. Graças a Viète os objetos de estudo da Matemática deixaram de ser somente problemas numéricos sobre preços das coisas, idade das pessoas ou medidas dos lados das figuras e passaram a englobar também as próprias expressões algébricas.

A partir desse momento, as equações começaram a ser interpretadas como as entendemos atualmente: equação, o idioma da álgebra.

Atualmente as equações são usadas, entre outras coisas, para determinar o lucro de uma firma, para calcular a taxa de uma aplicação financeira, para fazer a previsão do tempo, etc.

E devido à evolução dos estudos das equações, podemos utilizar outras variáveis, letras, para representar o valor desconhecido, ou seja, o que se quer descobrir em uma equação.

Hoje, chamamos o termo desconhecido de incógnita, que é uma palavra originária do latim *incognitu*, que também quer dizer "coisa desconhecida". A incógnita é um símbolo que está ocupando o lugar de um elemento desconhecido em uma equação.

AFONSO, A. M. A origem das equações do 1º grau. Matematiquês. Disponível em: http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=582. Acesso em: 30 maio 2022.

SOLUÇÃO OU RAIZ DE UMA EQUAÇÃO

- Os estudantes devem compreender que as incógnitas de uma equação podem ser substituídas por diversos números, mas nem todos tornam a igualdade verdadeira. Se julgar oportuno, proponha outros valores para x, de modo que $x + 12 = 25$ não seja uma equação verdadeira.
- Para resolver uma equação, devemos determinar o número que vai substituir a incógnita de modo a tornar a igualdade verdadeira. Chamamos esse número de raiz ou solução da equação.
- É importante mostrar aos estudantes que eles podem verificar se determinado número é raiz de uma equação apenas substituindo a incógnita da equação pelo valor que se quer verificar. Por exemplo:
  - $x = -2$ é solução de $2x + 1 = 5$?

    Substituindo x por -2, obtemos:

    $$2 \cdot (-2) + 1 = -4 + 1 = -3 \neq 5$$

    Logo, $x = -2$ não é solução ou raiz da equação.
  - $x = 2$ é solução de $2x + 1 = 5$?

    Substituindo x por 2, obtemos:

    $$2 \cdot (2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

    Logo, $x = 2$ é solução ou raiz da equação.
- Apresente aos estudantes exemplos análogos antes de iniciar o trabalho com as técnicas para a obtenção da raiz de uma equação. Proponha equações simples, permitindo que eles calculem e verifiquem mentalmente suas raízes.

Exemplos

- Se $x + 3 = -4$, então $x = -7$, pois:

  $$-7 + 3 = -4$$
- Se $2x = 6$, então $x = 3$.

  Nesse caso, convém dar significado à equação, perguntando, por exemplo: Qual é o número cujo dobro é 6?
- Se $5x = 0$, então $x = 0$, pois zero é o elemento nulo da multiplicação.
- Se $x - 7 = 0$, então $x = 7$, pois 7 é o oposto de -7.

E assim sucessivamente, levando os estudantes a resolver as equações, atribuindo significado ao processo sempre que possível.

Solução ou raiz de uma equação

As incógnitas de uma equação podem ser substituídas por diversos números, mas apenas alguns deles tornam a igualdade verdadeira.

Por exemplo, vamos considerar a equação $x + 12 = 25$ e substituir a incógnita x pelos números 10 e 13.

- Para $x = 10$, temos:

$$x + 12 = 25$$
$$10 + 12 = 25$$
$$22 = 25 \longleftarrow \text{falso}$$

- Para $x = 13$, temos:

$$x + 12 = 25$$
$$13 + 12 = 25$$
$$25 = 25 \longleftarrow \text{verdadeiro}$$

Observe que o número 13 torna a sentença verdadeira, mas o número 10, não. Dizemos que o número 13 é a solução ou a raiz da equação $x + 12 = 25$.

> **Raiz** ou **solução** de uma equação é todo número pelo qual a incógnita é substituída e que torna a sentença verdadeira.

Exemplo

Vamos verificar se 1 é raiz da equação $y^2 + 3 = 2 - \frac{1}{4}y$.

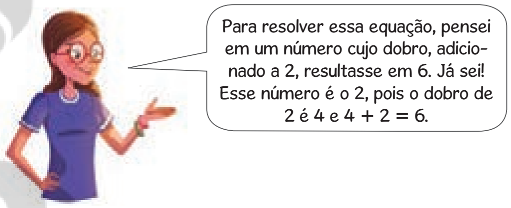
Para isso, substituímos y por 1 na equação dada.

$$y^2 + 3 = 2 - \frac{1}{4}y$$
$$1^2 + 3 = 2 - \frac{1}{4} \cdot 1$$
$$1 + 3 = 2 - \frac{1}{4}$$
$$4 = \frac{8}{4} - \frac{1}{4}$$
$$4 = \frac{7}{4} \longleftarrow \text{falso}$$

Portanto, 1 não é solução da equação.

Para resolver uma equação, devemos pensar em um número que, ao substituir a incógnita, mantém a sentença verdadeira.

Leia como Clara pensou para resolver a equação $2n + 2 = 6$.



Danilo Souza/ID/BR

Perceba que o número 2 torna a sentença $2n + 2 = 6$ verdadeira e, portanto, é solução dessa equação.

$$2n + 2 = 6$$
$$2 \cdot 2 + 2 = 6$$
$$4 + 2 = 6$$
$$6 = 6 \longleftarrow \text{verdadeiro}$$

OUTRAS FONTES

Garbi, G. G. *O romance das equações algébricas*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

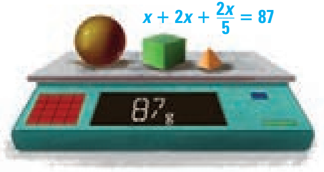
Nesse livro, ganhador do prêmio Jabuti em 1998 na categoria Ciências Exatas, o autor traz a história das equações e a biografia de matemáticos que trabalharam nas soluções de equações.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

5. Apenas o número $\frac{2}{3}$ é raiz dessa equação.

1. Escreva uma equação para representar a situação a seguir. **Resposta possível: $x + 2x + \frac{2x}{5} = 87$**



Os objetos sobre essa balança têm massas diferentes: a medida da massa da esfera é duas vezes a medida da massa do cubo, e a da pirâmide é um quinto da medida da massa da esfera.

2. Observe a equação a seguir.

$$8y + (x - 2) = 9 + y$$

Qual é o primeiro membro dessa igualdade? E qual é o segundo membro? **Primeiro membro: $8y + (x - 2)$; segundo membro: $9 + y$**

3. Verifique quais das sentenças a seguir são equações. **c, d e e.**

a) $2 - 7 = 5 - 10$

b) $2x^2 + 1\frac{12}{7} \geqslant 10$

c) $\sqrt{2} - 4 = \frac{x}{2}$

d) $10 + x^3 = -1$

e) $3a - 2b = 5$

f) $5m - \frac{m}{3} < 1$

4. Verifique se os números -2, -1, 0, 1 e 2 são raízes da equação $x^2 - x = 2$. **Raízes da equação: -1 e 2.**

5. Verifique se os números $-2, -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}$ e 2 são raízes da equação $\frac{a}{2} + 1 = 2a$.

6. O número 4 é solução de algumas das equações a seguir. Verifique quais são elas e anote-as no caderno. **a e c.**

a) $5y + 7 = 27$

b) $x^2 - 2x - 15 = 0$

c) $\sqrt{1 + 2t} = 3$

d) $\frac{a}{10} - 2(a + 7) = \frac{3}{2}$

7. A quarta parte da soma de um número inteiro com 2 é igual à terça parte desse número.

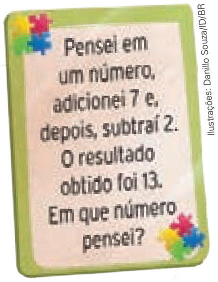
a) Qual das equações a seguir representa corretamente essa situação? **II**

I. $\frac{x}{4} + 2 = \frac{x}{3}$

II. $\frac{x + 2}{4} = \frac{x}{3}$

b) Verifique se 8 é raiz dessa equação. **8 não é raiz dessa equação.**

8. Escreva uma equação que represente a questão proposta na carta a seguir.



Ilustrações: Danilo Souza/ID/BR

Agora, determine a raiz da equação que você escreveu.
Resposta possível: $x + 7 - 2 = 13$; $x = 8$.

9. Nos itens a seguir, são apresentados equações e valores para as incógnitas. Verifique se os valores fornecidos são raízes dessas equações.

a) $5 \cdot (x + 4) - (x - 1) = 40, x = 6$. **Não é raiz.**

b) $-3 \cdot (-t^2) + 4 = 16, t = -2$. **É raiz.**

c) $\frac{x^2}{2} + 3x - 4 = 0, x = -\frac{1}{2}$. **Não é raiz.**

d) $3x^3 - 12 = 0, x = 3$. **Não é raiz.**

e) $\frac{w^3}{3} + 6 = 0, w = -3$. **Não é raiz.**

f) $3y^2 - 3(y + 12) = 0, y = -3$. **É raiz.**

g) $x^3 + 3x^2 + 3x + 7 = 0, x = 1$. **Não é raiz.**

h) $a^3 + a^2 = 1, a = -1$. **Não é raiz.**

10. No Dia dos Professores, Tamires presenteou nove professores com caixas idênticas de bombons. No total, ela distribuiu 63 bombons.

a) Tamires usou uma equação para representar a quantidade de bombons em cada caixa. Escreva uma possível equação que ela pode ter utilizado. **$9x = 63$**

b) Resolva mentalmente a equação que você escreveu no item anterior e, depois, registre o valor encontrado para a incógnita. **$x = 7$**

- Na atividade **1**, espera-se que os estudantes percebam que tanto a esfera quanto a pirâmide têm sua medida da massa em função da medida da massa do cubo, relacionando a ela, por exemplo, a incógnita x e às demais $2x$ e $\frac{2}{5}x$, respectivamente. Verifique se eles escrevem a equação completa, inserindo a soma das medidas das três massas, o sinal de igualdade e o valor que aparece na balança.
- Na atividade **3**, é importante que os estudantes expliquem por que as sentenças dos itens **a**, **b** e **f** não são equações. No item **a** não há incógnita, e nos demais as sentenças não são igualdades. Não há necessidade de definir o conceito de inequação nesse momento.
- Nas atividades **4**, **5** e **6**, os estudantes devem substituir os números sugeridos para verificar se eles tornam as igualdades verdadeiras. Caso perceba que eles estão com dificuldade em substituir as incógnitas pelos números indicados nas atividades, sugira que façam o “esqueleto” da equação utilizando parênteses no lugar das incógnitas e, então, coloquem os números indicados dentro deles para efetuar os cálculos. Por exemplo, no item **c** da atividade **6**, ficaria assim:

$$\sqrt{1 + 2 \cdot (\ \ )} = 3$$

Então, os estudantes devem inserir o número 4 dentro dos parênteses e realizar os cálculos:

$$\sqrt{1 + 2 \cdot (4)} = 3$$
$$\sqrt{1 + 8} = 3$$
$$\sqrt{9} = 3$$
$$3 = 3 \text{ (verdadeiro)}$$

Logo, 4 é raiz da equação $\sqrt{1 + 2t} = 3$.

- Para realizar a atividade **7**, peça aos estudantes que escrevam uma equação para representar a sentença dada e, depois, comparem-na com as equações propostas.
- Na atividade **8**, é possível que os estudantes tentem descobrir o número antes de escrever a equação. Reforce a importância de escrever a equação, ainda que resolvê-la mentalmente seja mais fácil.
- Dê especial atenção ao item **b** da atividade **9**, em que aparece $-3 \cdot (-t^2)$, e certifique-se de que os estudantes diferenciam $(-t^2)$ de $(-t)^2$. O primeiro será sempre um número negativo, enquanto o segundo será sempre um número positivo para qualquer valor racional de t.

Respeito

Converse com os estudantes sobre a prática de adotar animais abandonados, em vez de comprá-los. Pergunte a eles se têm animais em casa ou já tiveram e se adotaram ou compraram e proponha-lhes a pesquisa sugerida no Livro do Estudante.

- Há mais de uma maneira de resolver a atividade **11**. Socialize os métodos aplicados pelos estudantes na resolução, assim como os resultados encontrados.

Ilustrações: Danillo Souza/ID/BR

RESPEITO AOS ANIMAIS

Você já andou pelas ruas e se deparou com algum gato ou cão abandonado? De acordo com o artigo 32 da Lei Federal n. 9 605/98, é considerado crime "praticar ato de abuso, maus-tratos, ferir ou mutilar animais silvestres, domésticos ou domesticados, nativos ou exóticos".

Abandonar um animal é um ato que se enquadra na categoria de maus-tratos e, portanto, é considerado crime.

- **Com os colegas, pesquise outras leis de proteção aos animais. Depois, liste algumas maneiras de promover a conscientização das pessoas sobre esse assunto.**

Conjunto universo e conjunto solução de uma equação

O conjunto formado por todos os valores possíveis que a incógnita pode assumir em uma equação é chamado de **conjunto universo** (**U**). Já o conjunto formado pelos valores de U, que, ao substituírem as incógnitas, tornam a sentença verdadeira, é chamado de **conjunto solução** (**S**).

Resolver uma equação consiste em determinar seu conjunto solução. Como exemplo, acompanhe a situação a seguir.

Júlia adotou alguns cães e vai construir um cercado quadrado cujas medidas do comprimento dos lados será de 6 metros. Para isso, ela vai utilizar peças de cerca modulares que medem 2 metros de comprimento. Para determinar a quantidade x de peças, ela precisa encontrar a raiz da seguinte equação: $2x = 6 \cdot 4$

Vamos analisar a situação para determinar o conjunto universo (U). Como a incógnita x se refere à quantidade de peças, ela pode ser qualquer número natural, com exceção do zero. Representamos esse conjunto universo do seguinte modo:

$$U = \mathbb{N}^*$$

Júlia pensou no possível valor de x que tornaria a sentença $2x = 6 \cdot 4$ verdadeira e concluiu que esse valor é 12.

Observe que o valor que Júlia encontrou está correto, pois torna a sentença verdadeira, e pertence ao conjunto universo.

$$2 \cdot 12 = 6 \cdot 4$$
$$24 = 24$$

Nessa situação, o conjunto solução é $S = \{12\}$.

O que aconteceria se Júlia tivesse obtido um valor que não pertencesse ao conjunto universo? **Espera-se que os estudantes percebam que nesse caso a equação não teria solução.**

ATIVIDADE

Responda sempre no caderno.

11. Associe cada equação ao conjunto solução correspondente. **a-II; b-III; c-IV; d-I.**

a) $3x - 3 = 6$, com $U = \mathbb{N}$.

b) $8 - m = 11$, com $U = \mathbb{Z}$.

c) $-4a + 8 = 0$, com $U = \mathbb{Z}$.

d) $b + \frac{1}{6} = 0$, com $U = \mathbb{Q}$.

I. $S = \left\{-\frac{1}{6}\right\}$

II. $S = \{3\}$

III. $S = \{-3\}$

IV. $S = \{2\}$

Equações equivalentes

Sendo $U = \mathbb{Q}$, considere as seguintes equações:

I. $x + 3 = 7$

II. $3x = 16 - x$

III. $0{,}5x + 1 = 3$

Observe que 4 é raiz de todas elas.

I.	II.	III.
$x + 3 = 7$	$3x = 16 - x$	$0{,}5x + 1 = 3$
$4 + 3 = 7$	$3 \cdot 4 = 16 - 4$	$0{,}5 \cdot 4 + 1 = 3$
$7 = 7$	$12 = 12$	$2 + 1 = 3$
		$3 = 3$

Em um mesmo conjunto universo, equações que apresentam o mesmo conjunto solução (não vazio) são chamadas de **equações equivalentes**.

Assim, dizemos que as equações I, II e III são equivalentes.

Para obter equações equivalentes mais simples que as equações dadas, podemos aplicar os princípios de equivalência das igualdades, que estudaremos a seguir.

Princípio aditivo da igualdade

Ao adicionar um mesmo número aos dois membros de uma equação ou ao subtrair um mesmo número dos dois membros de uma equação, obtemos uma equação equivalente à primeira.

Exemplos

Considere $U = \mathbb{Q}$.

A. $x - 4 = 8$

$x - 4 + 4 = 8 + 4$

$x = 12$

As equações $x - 4 = 8$ e $x = 12$ são equivalentes.

B. $w + 8 = 21{,}5$

$w + 8 - 8 = 21{,}5 - 8$

$w = 13{,}5$

As equações $w + 8 = 21{,}5$ e $w = 13{,}5$ são equivalentes.

Princípio multiplicativo da igualdade

Ao multiplicar os dois membros de uma equação ou ao dividir os dois membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma equação equivalente à primeira.

Exemplos

Considere $U = \mathbb{Q}$.

A. $\frac{x}{2} = 5$

$\frac{x}{2} \cdot 2 = 5 \cdot 2$

$x = 10$

As equações $\frac{x}{2} = 5$ e $x = 10$ são equivalentes.

B. $3w = -87$

$(3w) : 3 = -87 : 3$

$w = -29$

As equações $3w = -87$ e $w = -29$ são equivalentes.

- Observe se os estudantes compreenderam que, para duas ou mais equações serem equivalentes, elas devem estar em um mesmo conjunto universo e apresentar o mesmo conjunto solução (não vazio).
- Outra maneira de verificar se duas equações são equivalentes é conferir se uma é igual à outra multiplicada por certo número. Por exemplo, considerando as equações I, II e III analisadas nesta página, pode-se anular o segundo membro de cada uma delas, fazendo:

I. $x + 3 \mathbf{- 7} = 7 \mathbf{- 7}$

$x - 4 = 0$

II. $3x \mathbf{- 16 + x} = 16 - x \mathbf{- 16 + x}$

$4x - 16 = 0$

III. $0{,}5x + 1 \mathbf{- 3} = 3 \mathbf{- 3}$

$0{,}5x - 2 = 0$

Mostre aos estudantes que, dessa maneira, podemos perceber que a equação II é igual à equação I multiplicada por 4, assim como a equação I é igual à equação III multiplicada por 2.

- É interessante retomar as propriedades da igualdade que foram estudadas nas operações com números racionais. Isso facilitará a compreensão de como obter equações equivalentes.
- Verifique se os estudantes compreenderam que, no princípio aditivo da igualdade, podemos adicionar ou subtrair um mesmo número aos dois membros de uma equação, obtendo assim uma equação equivalente à primeira.
- Do mesmo modo, no princípio multiplicativo da igualdade, podemos multiplicar ou dividir os dois membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obtendo assim uma equação equivalente à primeira.
- Se julgar oportuno, peça aos estudantes que escrevam três equações e, para cada uma, apresentem duas equações equivalentes, uma utilizando o princípio aditivo e a outra utilizando o princípio multiplicativo.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

A atividade proposta visa exercitar, entre os estudantes, o cálculo mental na resolução de equações, aplicando os conceitos de conjunto universo e conjunto solução.

Determine o conjunto solução das equações apresentadas, observando o conjunto universo dado:

a) $x + 1 = 5$, sendo $U = \mathbb{N}$.
$S = \{4\}$

b) $2x = -4$, sendo $U = \mathbb{N}$.
$S = \{\ \}$

c) $3x = 10$, sendo $U = \mathbb{N}$.
$S = \{\ \}$

d) $5 + x = -4$, sendo $U = \mathbb{Z}$.
$S = \{-9\}$

e) $4x = -1$, sendo $U = \mathbb{Z}$.
$S = \{\ \}$

f) $2x + 1 = 11$, sendo $U = \mathbb{Z}$.
$S = \{5\}$

g) $3x - 1 = 8$, sendo $U = \mathbb{Q}$.
$S = \{3\}$

h) $\frac{x}{2} = -5$, sendo $U = \mathbb{Q}$.
$S = \{-10\}$

i) $x + x = 5$, sendo $U = \mathbb{Q}$.
$S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

j) $x + x + x = 0$, sendo $U = \mathbb{Q}$.
$S = \{0\}$

EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM UMA INCÓGNITA

- Converse com os estudantes sobre o motivo pelo qual o coeficiente *a* deve ser diferente de zero. Se necessário, faça a substituição de *a* por zero para que eles compreendam a necessidade de o coeficiente da parte literal não ser nulo.
- Se julgar oportuno, proponha outras equações do 1º grau para que os estudantes indiquem a incógnita, o valor do coeficiente *a* e o valor do coeficiente *b*.

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

Explique aos estudantes o que é um papiro ou, se julgar oportuno, peça a eles que pesquisem o significado do termo e a história de outros papiros, além do de Rhind, que também trazem problemas matemáticos, como o de Moscou e o do Cairo.

Equações do 1º grau com uma incógnita

Agora, vamos estudar as equações do 1º grau com uma incógnita.

Uma **equação do 1º grau com uma incógnita** é qualquer equação que pode ser escrita na forma $ax + b = 0$, em que x é a incógnita e os coeficientes a e b são números racionais, com $a \neq 0$.

Exemplos

A. $2x - 4 = 0$ é uma equação do 1º grau com incógnita x e coeficientes $a = 2$ e $b = -4$.

B. $-\frac{h}{7} + 1{,}5 = 0$ é uma equação do 1º grau com incógnita h e coeficientes $a = -\frac{1}{7}$ e $b = 1{,}5$.

C. $2 + 3t - 5t = 8$ é uma equação do 1º grau, pois podemos escrevê-la na forma $-2t - 6 = 0$, com incógnita t e coeficientes $a = -2$ e $b = -6$.

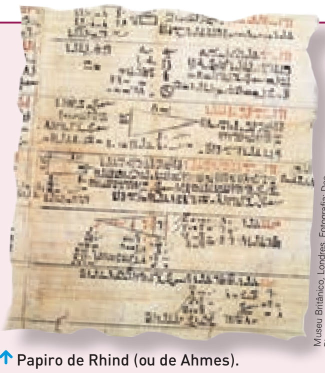
Perceba que equações desse tipo apresentam apenas uma incógnita, com expoente igual a 1.

Fique atento! Nem toda equação é do 1º grau com uma incógnita. Por exemplo:

- $w^2 - 4 = 0$ **não** é uma equação do 1º grau com uma incógnita, pois o expoente da incógnita w é diferente de 1.
- $0y - 1 = 0$ **não** é uma equação do 1º grau com uma incógnita, pois o coeficiente a é igual a zero.

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

Papiro de Rhind (ou de Ahmes)



Museu Britânico, Londres. Fotografia: Dea Picture Library/De Agostini/Getty Images

↑ Papiro de Rhind (ou de Ahmes).

Registrado por volta de 1650 a.C., o papiro de Rhind (ou de Ahmes) é um documento histórico, considerado a principal fonte sobre a matemática egípcia antiga. Ele foi assim denominado em homenagem a Ahmes (escriba que o copiou de um trabalho mais antigo) e a Henry Rhind (antiquário escocês que o adquiriu no Egito em 1858). Atualmente, esse papiro pertence ao Museu Britânico (Londres, Inglaterra), mas alguns de seus fragmentos estão no Museu do Brooklyn (Nova York, Estados Unidos).

O papiro de Rhind tem cerca de 0,30 m de medida de altura e 5 m de medida de comprimento e é escrito na forma de manual prático, com cerca de 80 problemas. Nesse manual, os egípcios buscavam soluções para situações cotidianas.

Atualmente, alguns dos problemas do papiro de Rhind são considerados problemas algébricos, pois para solucioná-los é preciso realizar operações com quantidades desconhecidas. Diferentemente do que consta nos livros modernos, os egípcios resolviam esses problemas experimentando valores para *aha* (nome que davam ao número desconhecido), tirando a prova em seguida.

Fontes de pesquisa: Carl B. Boyer; Uta C. Merzbach. *História da matemática*. 3. ed. Tradução: Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012; Howard Eves. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2011.

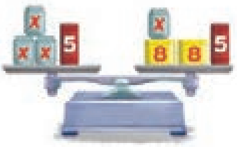
Resolução de equações do 1º grau com uma incógnita

Resolver uma equação do 1º grau com uma incógnita significa determinar o número pelo qual a incógnita é substituída e que torna a sentença verdadeira. Podemos usar o que vimos sobre equações equivalentes e princípios de equivalência de igualdades para resolver equações desse tipo.

Situação 1

Vamos comparar uma equação a uma balança de pratos em equilíbrio. O ponto de equilíbrio é associado ao sinal de igualdade, e cada membro da equação é composto dos objetos colocados em cada prato da balança, medidos em quilograma.

Na balança a seguir, cada lata com a indicação *x* tem a mesma medida de massa.



Como essa balança está em equilíbrio, podemos representar a situação usando a seguinte equação:

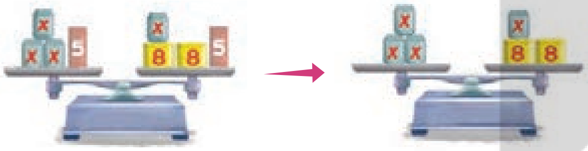
$$x + x + x + 5 = x + 8 + 8 + 5$$

Agrupando os termos semelhantes e os termos numéricos em cada membro, temos:

$$3x + 5 = x + 21$$

Para determinar a medida da massa de uma lata com a indicação *x*, podemos retirar ou colocar latas de medidas de massas iguais nos dois pratos da balança de modo que ela permaneça em equilíbrio.

Começamos retirando uma lata de medida de massa 5 kg dos dois pratos da balança.

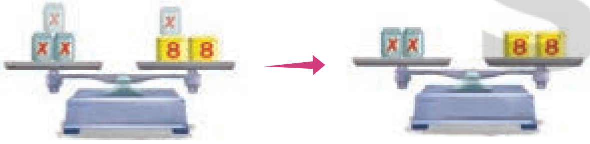


Em seguida, vamos representar essa situação na equação.

$$3x + 5 = x + 21$$
$$3x + 5 - 5 = x + 21 - 5$$
$$3x = x + 16$$

princípio aditivo da igualdade

Agora, vamos retirar uma lata com a indicação *x*, de cada prato.



Ilustrações: Danillo Souza/ID/BR

- Sempre que necessário, reforce que resolver uma equação é determinar seu conjunto solução. Muitos estudantes costumam apenas encontrar a(s) raiz(ízes) da equação, sem verificar se o(s) valor(es) encontrado(s) pertence(m) ao conjunto universo. Enfatize que a prática da verificação das raízes e a obtenção do conjunto solução são de grande importância.
- Observe se os estudantes compreenderam que, para resolver uma equação do 1º grau com uma incógnita, é necessário determinar o número pelo qual a incógnita deve ser substituída para tornar a sentença verdadeira. Para isso, usaremos os conceitos de equações equivalentes e os princípios de equivalência de igualdades.
- A situação **1** compara uma equação com uma balança em equilíbrio: o sinal de igualdade representaria o ponto de equilíbrio da balança, e cada membro da equação, os objetos colocados em cada prato da balança.

  Leve os estudantes a observar que, como os dois membros da equação têm valores iguais, os objetos colocados em cada prato da balança somam a mesma massa.

  Na prática, isso significa que, se adicionarmos ou subtrairmos objetos de massas iguais em cada prato da balança, ela continuará em equilíbrio. Do mesmo modo, se adicionarmos ou subtrairmos um mesmo termo aos dois membros da equação, a igualdade continuará verdadeira. Nesse caso, estaremos utilizando o princípio aditivo da igualdade.

  Isso também será válido se multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros da equação por um mesmo número diferente de zero. Nesse caso, estaremos aplicando o princípio multiplicativo da igualdade.

- Nesta página, continuamos com a situação **1**. A ideia agora é retirar uma lata com a indicação de massa x de cada prato.
- Deixe claro aos estudantes que, neste volume da coleção, quando não for informado o conjunto universo, deve-se considerar o conjunto dos números racionais.
- É importante que os estudantes compreendam que é possível verificar se o resultado obtido em uma equação está correto. Para isso, basta substituir a incógnita da equação por esse valor e verificar se a sentença obtida é verdadeira. Por exemplo, na situação **2**, podemos verificar se a solução da equação $x - 17 = 35$ é 52 fazendo:

$$\begin{aligned} x - 17 &= 35 \\ 52 - 17 &= 35 \\ 35 &= 35 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

Representando essa situação na equação, temos:

$$\begin{aligned} 3x &= x + 16 \\ 3x - x &= x + 16 - x \\ 2x &= 16 \end{aligned}$$

princípio aditivo da igualdade

Observe que a medida de massa das duas latas com indicação x, representada no primeiro membro da equação, corresponde a 16 kg. Assim, para determinar a medida da massa de uma lata com a indicação x, podemos utilizar o princípio multiplicativo da igualdade.

$$\begin{aligned} 2x &= 16 \\ 2x : 2 &= 16 : 2 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

princípio multiplicativo da igualdade

Portanto, cada lata com a indicação x tem a medida de massa igual a 8 kg. Representamos a solução da equação $3x + 5 = x + 21$ da seguinte maneira:

$$S = \{8\}$$

OBSERVAÇÃO

Nesta coleção, quando não for informado o conjunto universo, considere o conjunto dos números racionais.

Situação 2

A diferença entre um número e 17 é 35. Que número é esse?

Sendo x o número desconhecido, temos:

$$x - 17 = 35$$

Assim:

$$\begin{aligned} x - 17 &= 35 \\ x - 17 + 17 &= 35 + 17 \\ x &= 52 \end{aligned}$$

princípio aditivo da igualdade

Observe que podemos excluir o termo -17 do primeiro membro e adicionar 17 apenas no segundo membro, pois a soma $(-17 + 17)$ no primeiro membro é nula e, por isso, não a deixamos indicada. Veja.

$$\begin{aligned} x - 17 &= 35 \\ x &= 35 + 17 \\ x &= 52 \end{aligned}$$

Portanto, o número procurado é 52.

Representamos a solução da equação $x - 17 = 35$ por:

$$S = \{52\}$$

Situação 3

A metade de um número adicionada a 2 é igual a um terço desse número adicionado a 3. Que número é esse?

Sendo p o número desconhecido, podemos representar essa situação usando a seguinte equação:

$$\frac{p}{2} + 2 = \frac{p}{3} + 3$$

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

É muito importante que os estudantes compreendam que resolver uma equação do 1º grau com uma incógnita é determinar seu conjunto solução, além do valor da incógnita que satisfaz a igualdade. Para isso, eles devem simplificá-la até que a incógnita esteja isolada em um de seus membros.

Após resolver a equação, pode-se testar o resultado substituindo a incógnita por esse resultado e verificando se a sentença obtida é verdadeira.

Apresente exemplos que mostrem como determinar a solução de uma equação do 1º grau aplicando o princípio aditivo e/ou o princípio multiplicativo da igualdade para obter equações equivalentes e, consequentemente, a solução. Então, proponha as seguintes atividades:

1. Qual é o número cujo triplo é 18?

Sendo n o número desconhecido e considerando $U = \mathbb{N}$, temos:

$$\begin{aligned} 3n &= 18 \\ \frac{3n}{3} &= \frac{18}{3} \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Para testar esse resultado, consideramos $n = 6$ e fazemos:

$$\begin{aligned} 3n &= 18 \\ 3 \cdot 6 &= 18 \\ 18 &= 18 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

Logo, 6 é solução da equação.

Portanto: $S = \{6\}$.

Agora, vamos resolver a equação $\frac{p}{2} + 2 = \frac{p}{3} + 3$.

$$\frac{p}{2} + 2 = \frac{p}{3} + 3$$

$$6 \cdot \left(\frac{p}{2} + 2\right) = 6 \cdot \left(\frac{p}{3} + 3\right) \longleftarrow$$

Para simplificar as frações, multiplicamos cada membro da igualdade por 6, que é o mínimo múltiplo comum de 2 e 3 (mmc(2, 3) = 6). Depois, aplicamos a propriedade distributiva em relação à adição.

$$\frac{6p}{2} + 12 = \frac{6p}{3} + 18$$

$$3p + 12 = 2p + 18$$

$$3p = 2p + 18 - 12 \longleftarrow$$

Usando os princípios de equivalência das igualdades, subtraímos 12 nos dois membros da equação:

$$3p + 12 - 12 = 2p + 18 - 12$$

$$3p = 2p + 6$$

$$3p - 2p = 6 \longleftarrow$$

Usando os princípios de equivalência das igualdades, subtraímos 2*p* nos dois membros da equação:

$$3p - 2p = 2p + 6 - 2p$$

$$p = 6$$

Assim, o número procurado é 6.

Representamos a solução dessa equação por:

$$S = \{6\}$$

TESTANDO SOLUÇÕES

Após resolver uma equação, pode-se testar o resultado obtido. Para isso, basta substituir a incógnita pela solução e verificar se a sentença obtida é verdadeira.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

12. Escreva uma equação do 1º grau com uma incógnita e peça a um colega que escreva uma equação equivalente a ela. **Resposta pessoal.**

13. Determine uma equação equivalente em cada um dos itens a seguir, de modo que um dos membros não apresente parte literal. **Respostas possíveis:**

a) $x + y + 7 = 3x - 2y + 9$ $\mathbf{-2x + 3y = 2}$

b) $2y - x = 36x + 38 - y$ $\mathbf{3y - 37x = 38}$

c) $5a + 2ab - 7 = 8 - ab$ $\mathbf{5a + 3ab = 15}$

d) $3x - \frac{y}{3} = 2 + \frac{x}{2} + 19$ $\mathbf{\frac{5x}{2} - \frac{y}{3} = 21}$

14. Determine a solução das equações a seguir, considerando o conjunto universo indicado.

a) $x + 7 = 21$, para $U = \mathbb{Q}$. $S = \{14\}$

b) $3x - 12 = -87$, para $U = \mathbb{Q}$. $S = \{-25\}$

c) $17 + 2x = 25$, para $U = \mathbb{Q}$. $S = \{4\}$

d) $2 \cdot (6x - 4) = 3 \cdot (3x - 1)$, para $U = \mathbb{Q}$. $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

e) $\frac{x}{5} - \frac{4}{3} = \frac{5}{2} - \left(\frac{-x + 8}{3}\right)$, para $U = \mathbb{Q}$. $S = \left\{-\frac{35}{4}\right\}$

f) $\frac{2x - 3}{4} - 1 = -2 + \frac{x + 3}{6}$, para $U = \mathbb{Q}$. $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

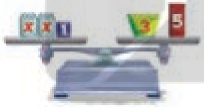
15. Em cada item, escreva uma equação que represente o problema apresentado. Em seguida, determine o valor da incógnita. **Respostas possíveis:**

a) Somando-se 7 ao resultado da multiplicação de um número por 3, obtém-se 13. $\mathbf{3x + 7 = 13;\ x = 2.}$

b) Somando-se um número ao seu triplo, o resultado é 32. $\mathbf{x + 3x = 32;\ x = 8.}$

c) A metade de um número adicionada a 5 é igual a 14. $\mathbf{\frac{x}{2} + 5 = 14;\ x = 18.}$

16. Sabendo que os pratos da balança representada a seguir estão em equilíbrio, faça o que se pede.



Danillo Souza/ID/BR

a) Considerando que os valores estampados indicam a respectiva medida da massa, em quilograma, de cada objeto, escreva uma equação que represente esse equilíbrio. $\mathbf{2x + 1 = 8}$

b) A equação que você usou é do 1º grau com uma incógnita? Justifique.

c) Qual é a medida da massa de cada lata cinza, em quilograma? **3,5 kg**

16. b) Sim, pois ela é do tipo *ax* + *b* = 0, em que *x* é a incógnita e *a* e *b* são números racionais, com *a* diferente de zero.

- As propriedades da igualdade são fundamentais para que os estudantes compreendam os passos na resolução de equações. É importante que, pelo menos no início, eles escrevam as operações que estão efetuando para simplificar as equações. Dê liberdade a eles para resolver as equações de diferentes maneiras, permitindo que construam o processo de forma significativa e individualmente. Impor regras pode levar à mecanização, a qual se deve evitar principalmente no início do aprendizado de um conceito.
- Ao realizarem a atividade **12**, verifique se os estudantes compreenderam que, para ser uma equação do 1º grau com uma incógnita, é necessário ter uma única incógnita e uma igualdade. Além disso, peça a eles que resolvam a equação que escreveram antes de pedir ao colega que escreva a equação equivalente. Lembre-os de indicar também o conjunto universo.
- Caso os estudantes tenham dificuldade em separar a parte literal da parte numérica na atividade **13**, peça a eles que façam uma passagem de cada vez. Não é necessário que as incógnitas fiquem no primeiro membro, apesar de essa ordenação ser a mais usual.
- Amplie a atividade **14** propondo aos estudantes que resolvam as mesmas equações considerando outros conjuntos universo, como o $\mathbb{N}$ e o $\mathbb{Z}$.
- Muitas vezes, os estudantes têm mais dificuldade em escrever a equação que representa determinado problema do que em resolvê-la. Sempre que possível, ao resolver uma equação, apresente (ou peça aos estudantes que o façam) uma situação a qual ela possa representar. Por exemplo, a equação $2 \cdot (6x - 4) = 3 \cdot (3x - 1)$, do item **d** da atividade **14**, pode representar a seguinte situação: “O dobro da diferença entre o sêxtuplo de um número e 4 é igual ao triplo da diferença entre o triplo desse número e 1”.
- No item **a** da atividade **16**, aceite também como resposta a equação:

$$x + x + 1 = 3 + 5$$

2. Qual é o número cuja metade da soma dele com 8 resulta no número 10?

Sendo *y* o número desconhecido e considerando $U = \mathbb{N}$, temos:

$$\frac{y + 8}{2} = 10$$

$$2 \cdot \left(\frac{y + 8}{2}\right) = 10 \cdot 2$$

$$y + 8 = 20$$

$$y + 8 - 8 = 20 - 8$$

$$y = 12$$

Para testar esse resultado, consideramos $y = 12$ e fazemos:

$$\frac{y + 8}{2} = 10$$

$$\frac{12 + 8}{2} = 10$$

$$\frac{20}{2} = 10$$

$$10 = 10 \text{ (verdadeiro)}$$

Logo, 12 é solução da equação.
Portanto: $S = \{12\}$.

- Ao resolverem os problemas que podem ser representados por equações, os estudantes devem ser incentivados a organizar o pensamento em etapas, o que favorece o entendimento do problema e facilita a resolução e a verificação do resultado.
- Para identificar a incógnita, é preciso ler com atenção o enunciado para compreender o que é necessário determinar e escolher a letra da incógnita e, em algumas situações, outros elementos que serão representados em função da incógnita. Na situação **1**, por exemplo, foi escolhido *s* para representar a medida da distância alcançada no primeiro salto. Os outros dois saltos têm uma relação com o primeiro: a distância alcançada pelo segundo salto mede 2 metros a menos que a alcançada pelo primeiro, e a medida da distância alcançada pelo terceiro salto é um terço da alcançada pelo primeiro.
  Caso alguns estudantes escolham três incógnitas, uma para cada salto, para depois relacioná-las, deixe-os à vontade e verifique como fazem essa relação. Incentive-os a perceber que é mais prático prosseguir com os procedimentos de resolução quando existe uma relação de dependência ou quando é escolhida apenas uma incógnita desde o início.
- Montar a equação é traduzir o problema para a linguagem algébrica, o que precisa ser feito com bastante atenção, considerando todas as informações apresentadas no enunciado.
- Auxilie os estudantes a classificar a incógnita para fazer a escolha correta do conjunto universo. Na situação **1**, por exemplo, a medida do salto pode assumir apenas valores positivos. Além disso, o conjunto escolhido deve ser contínuo, já que a incógnita representa a medida de comprimento de uma distância entre dois pontos.
- Na etapa final, ressalte a importância de verificar se os resultados obtidos são coerentes com a situação proposta.
- Aproveite a cena da situação **1** para comentar com os estudantes sobre alguns esportes que compõem o atletismo e pergunte se conhecem atletas que se destacaram nessa modalidade. Cite alguns atletas brasileiros afrodescendentes cujas trajetórias foram de superação e de protagonismo. Por exemplo, a ex-atleta Aida dos Santos (1937-), negra, pobre e única mulher nas Olimpíadas de Tóquio, em 1964, sem contar com apoio de dirigentes, sem recursos e sem vestimentas apropriadas, sofreu preconceito e ainda assim representou nosso país, conquistando o 4º lugar. Se possível, apresente aos estudantes o vídeo *O uniforme que nunca existiu*, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=fOaFQRVNWuQ (acesso em: 30 maio 2022), sobre a trajetória de Aida. Outro atleta olímpico foi João do Pulo (1954-1999), recordista mundial, com duas medalhas olímpicas no salto triplo. Teve uma perna amputada em

Resolvendo situações-problema com a ajuda das equações

Muitas situações-problema podem ser solucionadas por meio de equações do 1º grau com uma incógnita. Para isso, é preciso organizar algumas etapas. Acompanhe algumas situações resolvidas com base nessas etapas.

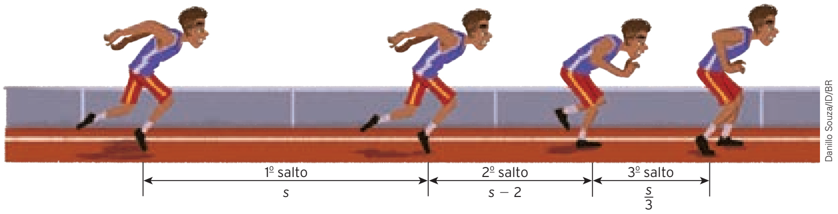
Situação 1

André realizou um salto triplo e alcançou 12 metros no total. A medida da distância atingida no segundo salto foi 2 metros menor que a medida da distância atingida no primeiro salto; e a medida da distância atingida no terceiro salto foi um terço da medida da distância atingida no primeiro salto. Quantos metros André atingiu em cada um dos três saltos?

❶ Identificar o valor desconhecido (incógnita) e montar a equação

Vamos estabelecer que o valor desconhecido corresponde à medida da distância atingida por André no primeiro salto (mas poderia ser de qualquer outro salto). Vamos representá-lo pela letra *s*.

Para facilitar a escrita da equação que representa essa situação, podemos fazer um esquema.



Danillo Souza/ID/BR

A equação que representa a situação-problema é: $s + (s - 2) + \frac{s}{3} = 12$

❷ Determinar as condições para a incógnita (o conjunto universo)

O valor de *s* deve ser racional positivo, pois representa a medida de uma distância ($U = \mathbb{Q}_+$).

❸ Resolver a equação

$$s + (s - 2) + \frac{s}{3} = 12$$

Multiplicamos cada membro da igualdade por 3.

$$3s + 3 \cdot (s - 2) + \frac{3s}{3} = 36$$

Aplicamos a propriedade distributiva em relação à adição.

$$3s + 3s - 6 + s = 36$$

$$7s - 6 = 36$$

Adicionamos 6 a cada um dos termos da equação: $7s - 6 + 6 = 36 + 6$

$$7s = 42$$

Dividimos cada membro da igualdade por 7: $\frac{7s}{7} = \frac{42}{7}$

$$s = 6$$

❹ Verificar se o resultado obtido confere com a situação proposta

- 1º salto: $s = 6$
- 2º salto: $s - 2 = 6 - 2 = 4$
- 3º salto: $\frac{s}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$6 + 4 + 2 = 12$
(confere com a situação proposta)

Portanto, André atingiu 6 metros no 1º salto, 4 metros no 2º salto e 2 metros no 3º salto.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Para reforçar a ideia de que a raiz de uma equação é o número que a torna verdadeira, proponha aos estudantes a atividade a seguir.

Em cada item, assinale a alternativa que apresenta o número que é raiz da equação dada.

I. $x + 5 = -3$

a) 8 **b)** −2 **c)** −8 **d)** 2

Alternativa **c**.

II. $2x - x = 1$

a) 0 **b)** 1 **c)** −1 **d)** 2

Alternativa **b**.

III. $2x + 5 = x + 4$

a) 3 **b)** 1 **c)** 0 **d)** −1

Alternativa **d**.

IV. $x - 2 = 3x - 6$

a) 2 **b)** 1 **c)** −1 **d)** −2

Alternativa **a**.

V. $4x = 0$

a) −4 **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** 1 **d)** 0

Alternativa **d**.

VI. $\frac{x}{3} = -3$

a) 3 **b)** 9 **c)** −3 **d)** −9

Alternativa **d**.

VII. $\frac{x + 1}{2} = \frac{x + 2}{3}$

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

Alternativa **b**.

VIII. $2(x + 1) = 5(x - 2)$

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4

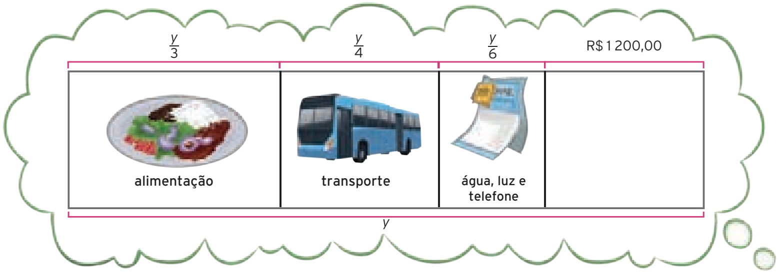
Alternativa **d**.

Situação 2

Paulo trabalha como motorista particular. Do valor do seu salário, ele gasta a terça parte com alimentação, um quarto com transporte e um sexto com água, luz e telefone. Com isso, ainda lhe restam R$ 1 200,00. Quanto Paulo gasta com cada uma dessas despesas?

❶ Identificar o valor desconhecido (incógnita) e montar a equação

O valor desconhecido corresponde ao salário de Paulo. Vamos representá-lo pela letra *y*. Para escrever a equação que representa a situação-problema, podemos fazer um esquema.



A equação que representa a situação-problema é: $\frac{y}{3} + \frac{y}{4} + \frac{y}{6} + 1\,200 = y$

❷ Determinar as condições para a incógnita (o conjunto universo)

O valor de *y* deve ser um número racional positivo ($U = \mathbb{Q}_+$).

❸ Resolver a equação

$$\frac{y}{3} + \frac{y}{4} + \frac{y}{6} + 1\,200 = y$$

$$\frac{4y}{12} + \frac{3y}{12} + \frac{2y}{12} + \frac{14\,400}{12} = \frac{12y}{12}$$

$$4y + 3y + 2y + 14\,400 = 12y$$

$$9y + 14\,400 = 12y$$

$$14\,400 = 3y$$

$$y = 4\,800$$

Subtraímos 9*y* em cada termo da equação:
$9y + 14\,400 - 9y = 12y - 9y$

Danillo Souza/ID/BR

❹ Verificar se o resultado confere com a situação proposta

- Gasto com alimentação:
$\frac{y}{3} = \frac{4\,800}{3} = 1\,600$
- Gasto com transporte:
$\frac{y}{4} = \frac{4\,800}{4} = 1\,200$
- Gasto com água, luz e telefone:
$\frac{y}{6} = \frac{4\,800}{6} = 800$

$1\,600 + 1\,200 + 800 + 1\,200 = 4\,800$

Portanto, Paulo gasta R$ 1 600,00 com alimentação, R$ 1 200,00 com transporte e R$ 800,00 com água, luz e telefone.

um acidente de carro em uma rodovia e, posteriormente, graduou-se em educação física e atuou na política. Ambos os atletas tornaram-se não só personalidades em suas atividades esportivas, como exemplos de superação e de quebra de paradigmas e preconceitos na própria sociedade. Essa conversa destaca positivamente a imagem de personalidades afrodescendentes a toda a sociedade, considerando sua participação no esporte e valorizando sua visibilidade e protagonismo social.

- Aproveite a situação **2** para verificar se os estudantes estão operando com os números racionais sem dificuldades. Caso julgue necessário, retome o cálculo do mmc e proponha a eles que resolvam algumas expressões fracionárias.

DE OLHO NA BASE

Compreender que alguns problemas podem ser representados por equações polinomiais de 1º grau e ser resolvidos utilizando as propriedades da igualdade favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA18**.

- Na situação **3**, verifique se os estudantes compreenderam que, para resolver a equação, da primeira passagem para a segunda foi realizada a multiplicação dos dois membros da equação por $\frac{9}{5}$; da terceira passagem para a quarta, adicionou-se 32 a cada membro da equação.

  Se julgar oportuno, proponha algumas medidas de temperatura que estão na escala Fahrenheit e peça aos estudantes que, usando a relação dada, convertam-nas para a escala Celsius.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Em uma prova de 50 testes, cada resposta certa vale 2 pontos, e cada erro vale −1 ponto. Se um estudante fez 70 pontos, quantos testes ele acertou?

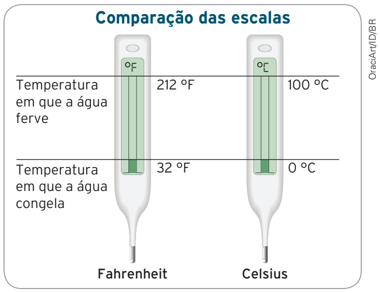
Sendo x a quantidade de testes que o estudante acertou, então ele errou $(50 - x)$ testes. Como sua pontuação foi de 70 pontos, pode-se representar a situação com a equação:

$$2 \cdot x + (-1) \cdot (50 - x) = 70$$
$$2x - 50 + x = 70$$
$$3x = 120$$
$$x = 40$$

Logo, o estudante acertou 40 testes.

Situação 3

Além da escala Celsius (°C), há outras escalas utilizadas para medir temperaturas. A escala Fahrenheit, representada por °F, é um exemplo de outra escala termométrica.



Comente com os estudantes que essa relação também pode ser usada para converter uma medida de temperatura que está na escala Fahrenheit para a escala Celsius.

Para converter uma medida de temperatura que está na escala Celsius para a escala Fahrenheit, usamos a seguinte relação:

$$C = \frac{5 \cdot (F - 32)}{9}$$

em que C é a medida de temperatura em grau Celsius e F é a medida de temperatura em grau Fahrenheit.

Agora, imagine a seguinte situação: Uma pessoa está levando alguns alimentos em uma viagem aos Estados Unidos. Na embalagem de um desses alimentos, consta que a medida de temperatura de conservação deve ser, no mínimo, −5 °C. Qual é a medida de temperatura mínima, em grau Fahrenheit, a que esse alimento deve ser conservado?

❶ **Identificar os valores desconhecidos (incógnitas) e montar as equações**

O valor desconhecido corresponde à medida de temperatura mínima para a conservação do alimento. Vamos representá-lo por F.

Do enunciado, sabemos que a equação que representa essa situação é:

$$-5 = \frac{5 \cdot (F - 32)}{9}$$

❷ **Determinar as condições para a incógnita (o conjunto universo)**

Os valores de F devem ser números racionais.

❸ **Resolver a equação**

$$-5 = \frac{5 \cdot (F - 32)}{9}$$
$$-5 \cdot \frac{9}{5} = \frac{5 \cdot (F - 32)}{9} \cdot \frac{9}{5}$$
$$-9 = F - 32$$
$$-9 + 32 = F - 32 + 32$$
$$23 = F$$

Observe se os estudantes compreendem o que está sendo feito de uma linha para a outra na resolução dessa equação.

Portanto, a medida de temperatura mínima para a conservação desse alimento é 23 °F.

RESPOSTA

17. Respostas possíveis:

a) **I.** x é a idade de Aline e $(x - 2)$, a idade de Renata.

II. $U = \mathbb{N}$

III. $(x - 10) + (x - 2 - 10) = 46$

IV. $x = 34$

V. Aline: $x = 34$

Renata: $x - 2 = 34 - 2 = 32$

Resposta: Aline tem 34 anos e Renata, 32.

b) **I.** x é a quantia que Adão tinha.

II. $U = \mathbb{Q}_+^*$

III. $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{5} + 15$

IV. $x = 50$

V. quantia: $x = 50$

frutas: $\frac{x}{2} = \frac{50}{2} = 25$

leite: $\frac{x}{5} = \frac{50}{5} = 10$

$50 = 25 + 10 + 15$

Resposta: Adão tinha reservado R$ 50,00 para fazer compras.

c) **I.** x é o número de meninos e $(x + 5)$, o número de meninas.

II. $U = \mathbb{N}$

III. $x + x + 5 = 49$

IV. $x = 22$

V. meninos: $x = 22$

meninas: $x + 5 = 22 + 5 = 27$

Resposta: Estavam na festa 27 meninas.

19. a) Os valores desconhecidos são a quantidade de dúzias de ovos de cada tipo que o pai de Lúcia comprou. $25n = 50$.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

17. Consulte as respostas neste manual.

17. Resolva os problemas a seguir, registrando as etapas indicadas no quadro.

> I. Identifique o valor desconhecido e represente-o por uma incógnita.
> II. Determine o conjunto universo.
> III. Escreva uma equação que represente o problema.
> IV. Resolva a equação.
> V. Verifique se a solução encontrada está correta.

a) Renata é dois anos mais nova que sua irmã Aline. Há dez anos, a soma da idade delas era 46 anos. Quantos anos tem cada uma das irmãs?

b) Adão foi comprar leite e frutas. Da quantia que havia reservado para gastar, ele usou metade com frutas, um quinto com leite e sobraram R$ 15,00. Quanto Adão tinha reservado para fazer as compras?

c) Em uma festa, compareceram cinco meninas a mais que a quantidade de meninos. Quantas meninas estavam na festa, sabendo que o total de meninos e de meninas era 49?

d) Júlia gastou R$ 52,00 na compra de um caderno, uma caixa de lápis de cor e uma cola em bastão. A caixa de lápis de cor custou R$ 10,00 a menos que o caderno, e a cola custou R$ 5,00. Quanto custou a caixa de lápis de cor?

e) Na chácara de Joaquim, a produção de ovos nos últimos três dias foi a seguinte: no segundo dia, uma dúzia de ovos a mais que no primeiro dia e, no terceiro dia, duas dúzias a mais que no segundo dia. Sabendo que, após os três dias, a produção total foi de cinco dúzias, quantos ovos foram produzidos no terceiro dia?

18. O dobro de um número é adicionado à sua terça parte. Retira-se dessa soma a metade do número inicial, resultando em 22.

a) Que equação representa esse problema?

b) Verifique se 5 é raiz dessa equação. **Não é raiz.**

c) Determine o valor que a incógnita representa. **12**

19. O pai de Lúcia faz doces para vender e complementar a renda da família. Para uma nova remessa de doces, ele comprou $2n$ dúzias de ovos vermelhos e n dúzias de ovos brancos, gastando R$ 50,00. Veja, a seguir, quanto ele pagou nas dúzias dos ovos.

Danillo Souza/ID/BR

a) Identifique os valores desconhecidos dessa situação e escreva uma equação que relacione a quantidade de dúzias de ovos que o pai de Lúcia comprou e o total pago por ele.

b) Determine o valor de n. **$n = 2$**

c) Verifique se o valor encontrado para n confere com a situação proposta. **Confere.**

d) Quantos ovos vermelhos e quantos ovos brancos o pai de Lúcia comprou? **48 ovos vermelhos e 24 ovos brancos.**

20. Um grupo de estudantes decidiu comprar um presente de despedida para um professor. O valor do presente é R$ 120,00, e ficou combinado que cada estudante contribuiria com R$ 5,00. Na última hora, porém, quatro estudantes desistiram de participar do rateio. Com quantos reais cada um dos estudantes restantes deverá contribuir para que eles possam comprar esse presente? **R$ 6,00**

21. Pedro comprou uma bermuda e uma camiseta e gastou R$ 180,00. A bermuda custou o dobro da camiseta. Quanto Pedro pagou pela bermuda? **R$ 120,00**

22. Uma loja vende calças e camisas pelo mesmo preço. Caio pediu um desconto, e o gerente da loja diminuiu R$ 10,00 no preço da camisa e R$ 20,00 no preço da calça. Caio levou três calças e quatro camisas, e o valor total da sua compra foi R$ 250,00. Qual era o preço da calça antes do desconto? Qual passou a ser o preço da calça depois do desconto? **Antes do desconto: R$ 50,00; depois do desconto: R$ 30,00.**

18. a) Resposta possível: $\left(2x + \frac{x}{3}\right) - \frac{x}{2} = 22$

- Peça aos estudantes que façam a atividade **17** seguindo as cinco etapas descritas no enunciado.
- Na atividade **19**, n representa a quantidade de dúzias de ovos brancos comprada. A quantidade de ovos vermelhos comprada foi o dobro da quantidade de ovos brancos comprada. Verifique se os estudantes compreendem que $2n$ é o dobro de n e que 50 se refere ao valor total pago pelos ovos; portanto, em um dos membros da equação deve aparecer a soma dos valores pagos pelos ovos, e não a quantidade de ovos comprados. Por isso, eles deverão multiplicar a quantidade de dúzias de cada tipo pelo valor da dúzia correspondente. Ressalte que $18n$ é o valor pago por todos os ovos vermelhos e que $7n$ é o valor pago pelos ovos brancos. A soma dos dois valores resulta em 50 reais.

  Verifique se os estudantes compreendem que o conjunto universo nessa situação é o conjunto dos números naturais.

  Para conferir se o valor encontrado é coerente com a situação proposta, basta substituir n por 2 e resolver a expressão. Assim:

$$\begin{aligned} 18n + 7n &= 50 \\ 18 \cdot 2 + 7 \cdot 2 &= 50 \\ 36 + 14 &= 50 \\ 50 &= 50 \text{ (verdadeiro)} \end{aligned}$$

  Para certificar-se de que os estudantes estão atribuindo significado às equações, pergunte a eles qual foi o valor gasto pelo pai de Lúcia com os ovos brancos e com os ovos vermelhos. Espera-se que eles relacionem $18 \cdot 2$ com o valor pago pelos ovos vermelhos e $7 \cdot 2$ com o valor pago pelos ovos brancos. Assim, o pai de Lúcia gastou 36 reais com ovos vermelhos e 14 reais com ovos brancos.

  Ao responder ao item **e**, os estudantes deverão multiplicar a quantidade de dúzias por 12, pois a pergunta se refere à quantidade de ovos comprados e foi calculada a quantidade de dúzias.
- A atividade **20** pode ser resolvida de diferentes maneiras; compartilhe as estratégias utilizadas pelos estudantes, a fim de ampliar o repertório de resolução de problemas.
- Na atividade **22**, é importante que os estudantes compreendam que, antes do desconto, a calça e a camisa tinham o mesmo preço, mas com o desconto passam a ter preços diferentes.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nesta página permitem que os estudantes resolvam problemas que podem ser representados por equações polinomiais do 1º grau do tipo $ax + b = c$ utilizando as propriedades da igualdade, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA18**.

d) **I.** x é o preço do caderno; $(x - 10)$, o preço da caixa de lápis de cor; e o preço da cola é R$ 5,00.

II. $U = \mathbb{Q}_+^*$

III. $x + x - 10 + 5 = 52$

IV. $x = 28,5$

V. caderno:

$x = 28,5$

caixa de lápis de cor:

$x - 10 =$

$= 28,5 - 10 = 18,5$

cola bastão: 5

Resposta: A caixa de lápis de cor custou R$ 18,50.

e) **I.** x é a quantidade de ovos produzidos no primeiro dia; $(x + 12)$ é a quantidade de ovos produzidos no segundo dia; e $(x + 12 + 24)$ é a quantidade de ovos produzidos no terceiro dia.

II. $U = \mathbb{N}$

III. $x + (x + 12) + (x + 12 + 24) = 5 \cdot 12$

IV. $x = 4$

V. primeiro dia:

$x = 4$

segundo dia:

$x + 12 = 4 + 12 = 16$

terceiro dia:

$x + 12 + 24 =$

$= 4 + 12 + 24 = 40$

Resposta: Foram produzidos 40 ovos no terceiro dia.

EQUAÇÕES COM DUAS INCÓGNITAS

- Ao apresentar as equações com duas incógnitas, a intenção é mostrar aos estudantes que elas podem ser usadas para resolver problemas nos quais temos mais de um valor desconhecido.
- Se julgar oportuno, escreva outras equações com duas incógnitas na lousa e peça aos estudantes que identifiquem quais são as incógnitas dessas equações.
- Observe se os estudantes compreenderam que, nas equações com duas incógnitas, as soluções são apresentadas em pares ordenados.
- Incentive os estudantes a refletir sobre a imagem de atletas praticando vôlei paraolímpico. Pergunte a eles se já viram alguém praticando esse tipo de modalidade ou se conhecem outras modalidades destinadas a pessoas com algum tipo de deficiência física. Incentive-os a pensar sobre outras áreas da sociedade nas quais as pessoas com deficiência tiveram seus direitos garantidos e nas áreas em que elas ainda não conquistaram direitos e o que precisa ser feito. Esse debate contribui para desenvolver o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação em Direitos Humanos, que pertence à macroárea **Cidadania e Civismo**.

DE OLHO NA BASE

A situação apresentada contribui para o desenvolvimento da **competência geral 8**, para que os estudantes conheçam, apreciem e cuidem de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

- O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes seja preservada. Para isso, valorize situações em que eles se sintam acolhidos, incentivando o desenvolvimento da empatia e da solidariedade.

> "Além de melhorar a aptidão física, o exercício físico regular também pode melhorar a capacidade cognitiva e reduzir os níveis de ansiedade e estresse em geral. Os exercícios ajudam a melhorar a autoestima, a imagem corporal, a cognição e a função social de pacientes em risco de saúde mental."

BENEFÍCIOS do esporte para a saúde mental. Governo do Estado de São Paulo. Disponível em: https://www.desenvolvimentosocial.sp.gov.br/beneficios-do-esporte-para-a-saude-mental/#:~:text=Al%C3%A9m%20de%20melhorar%20a%20aptid%C3%A3o,em%20risco%20de%20sa%C3%BAde%20mentalcios-do-esporte-para-a-saude-mental/#:~:text=Al%C3%A9m%20de%20melhorar%20a%20aptid%C3%A3o,em%20risco%20de%20sa%C3%BAde%20mental. Acesso em: 31 maio 2022.

Equações com duas incógnitas

Muitas vezes, para representar uma situação e resolver um problema, uma equação com apenas uma incógnita não é suficiente. Então, podemos usar mais de uma incógnita. Nesse momento, vamos estudar equações com duas incógnitas.

Exemplos

A. $x^2 + y = 5$, em que x e y são as incógnitas.

B. $\frac{w}{5} + 5k = \frac{3}{7}$, em que w e k são as incógnitas.

C. $a + b = 5$, em que a e b são as incógnitas.

Acompanhe a situação a seguir.

A escola em que Camila estuda vai formar um time misto de vôlei com os estudantes do 7º ano para participar de um campeonato.

Na inscrição para a seletiva, Camila perguntou ao técnico quantos meninos e quantas meninas fariam parte do time titular.

Sabendo que um time titular de vôlei tem 6 atletas, se representarmos por x a quantidade de meninos e por y a quantidade de meninas do time titular, podemos representar essa situação da seguinte maneira:

$$x + y = 6$$

Como x e y representam números naturais e devem satisfazer a equação $x + y = 6$, as possibilidades de formação do time titular são as apresentadas no quadro a seguir.

Quantidade de meninos x	Quantidade de meninas y	Formação do time titular $x + y = 6$
1	5	$1 + 5 = 6$
2	4	$2 + 4 = 6$
3	3	$3 + 3 = 6$
4	2	$4 + 2 = 6$
5	1	$5 + 1 = 6$

Observe que as possibilidades de formação para o time titular correspondem às soluções da equação $x + y = 6$ e podem ser escritas na forma de pares ordenados (x, y): $(1, 5)$; $(2, 4)$; $(3, 3)$; $(4, 2)$; e $(5, 1)$.

Nesse caso, temos:

$$(\underbrace{x}_{\text{quantidade de meninos no time titular}},\underbrace{y}_{\text{quantidade de meninas no time titular}})$$

Tasos Katopodis/Getty Images

Uma equipe de vôlei sentado, assim como no vôlei disputado em pé, é formada por 6 atletas. Podem participar da modalidade atletas com algum tipo de deficiência locomotora, como amputações ou lesões na coluna vertebral. Partida de vôlei sentado entre Brasil e Canadá nos Jogos Paraolímpicos de Tóquio 2020, no Japão. Foto de 2021.

Soluções de uma equação com duas incógnitas

Vimos que as soluções de uma equação com duas incógnitas são os pares ordenados que tornam a sentença verdadeira. A quantidade de pares ordenados que são solução de uma equação com duas incógnitas está relacionada com o conjunto universo considerado.

Dependendo do conjunto universo, a equação com duas incógnitas...

- ... pode ter uma quantidade finita de soluções.
- ... pode ter uma quantidade infinita de soluções.
- ... pode não ter solução.

Um modo para determinar um par ordenado que seja solução de uma equação com duas incógnitas é analisar o conjunto universo, atribuir um valor a uma das incógnitas e determinar o valor da outra incógnita, resolvendo a equação obtida.

Veja, a seguir, dois pares ordenados (h, b) que são soluções da equação com duas incógnitas $h^2 + 3b = 12$, em que h e b são números racionais.

- Para $h = 2$, temos:

$$2^2 + 3b = 12$$
$$4 + 3b = 12$$
$$3b = 12 - 4$$
$$3b = 8$$
$$b = \frac{8}{3}$$

- Para $b = 4$, temos:

$$h^2 + 3 \cdot 4 = 12$$
$$h^2 + 12 = 12$$
$$h^2 = 12 - 12$$
$$h^2 = 0$$
$$h = 0$$

Os pares $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ e (0, 4) são soluções da equação $h^2 + 3b = 12$, mas há diversos outros pares ordenados que também são soluções. Verifique, por exemplo, se o par (0, 1) é uma possível solução. **Não é uma possível solução.**

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

23. Indique quais equações têm exatamente duas incógnitas. **c e f.**

a) $x^2 + y^2 + z = 8$

b) $2x - 3x^3 = 9$

c) $\frac{x}{y} = 1$

d) $\frac{2x + 3}{3} = \frac{5}{3}$

e) $x = 3 - 4 \cdot 2$

f) $x + y = 55$

24. Verifique de quais destas equações com duas incógnitas o par ordenado (3, 6) é uma solução. **a e c.**

a) $x - y = -3$

b) $2x - \frac{y}{3} = 2$

c) $2x + 3y = 4y$

d) $y^2 + x^3 = 21 \cdot 7$

25. Associe os itens das colunas, sabendo que cada par ordenado (z, u) é solução de uma das equações. **a-II; b-I; c-III.**

a) (0, −1)

b) (1,6; 0)

c) (1,5; 3)

I. $\frac{z}{2} + 5u + 3{,}6 = 4{,}4$

II. $\frac{z^3}{5} + u^2 = -1$

III. $2 \cdot z + u^2 = 12$

26. Determine pelo menos três soluções distintas para cada uma das seguintes equações:

a) $5x - 3y = 5$

b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = \frac{7}{8}$

c) $2x + y = 20$

d) $2x - 4y = 12$

26. Respostas possíveis:

a) (1, 0); $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$; (4, 5)

b) (0; 3,5); $\left(\frac{7}{4}, 0\right)$; $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

c) (10, 0); (5, 10); (0, 20)

d) (0, −3); (6, 0); (2, −2)

- Apesar de as equações do 2º grau não serem objeto de estudo nesta etapa, optamos por apresentá-las aos estudantes como exemplos de equações com duas incógnitas. A intenção é desenvolver o pensamento algébrico a partir da representação de situações-problema por meio da algebrização.
- Observe se os estudantes entenderam que, dependendo do conjunto universo, a equação com duas incógnitas pode ter uma quantidade finita de soluções, pode ter uma quantidade infinita de soluções ou pode não ter solução.
- Apresente alguns exemplos de equações sem solução, pois para os estudantes a ideia de não existir solução para determinada equação é muito abstrata. É importante que eles relacionem essas equações com situações impossíveis de acontecer. Por exemplo:
  - Considerando o conjunto dos números racionais: a soma do quadrado de um número natural com o quadrado de um número inteiro é igual a −5.

    Equação: $n^2 + x^2 = -5$

    Independentemente do valor escolhido para uma das incógnitas, não existe valor para a outra incógnita que satisfaça a equação. Portanto, não há solução.
- Deixe claro aos estudantes que uma das maneiras de encontrar um par ordenado que seja solução de uma equação com duas incógnitas é analisar o conjunto universo, atribuir um valor a uma das incógnitas e determinar o valor da outra incógnita, resolvendo a equação obtida. Proponha exemplos como o mostrado a seguir.
  - Na equação com duas incógnitas $2x - y = 1$, em que x e y são números naturais, para $y = 1$, temos:

$$2x - y = 1$$
$$2x - 1 = 1$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

    Então, o par (1, 1) é solução da equação $2x - y = 1$.
  - Na equação com duas incógnitas $x^2 + 2y = 4$, em que x e y são números naturais, para $x = 2$, temos:

$$x^2 + 2y = 4$$
$$2^2 + 2y = 4$$
$$2y = 4 - 4$$
$$2y = 0$$
$$y = 0$$

    Então, o par (2, 0) é solução da equação $x^2 + 2y = 4$.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **1**, discuta com os estudantes outros erros que poderiam ser cometidos na resolução da equação proposta pelo professor de Camila.
- Na atividade **2**, após representar a situação através de um esquema, verifique se os estudantes percebem graficamente que metade do salário representa R$ 1 500,00 e que, então, o salário de Marcela é R$ 3 000,00. Para determinar quanto ela destina para a poupança e o valor que ela reserva para pagar as contas, basta analisar o esquema do item **a** ou a resolução da equação apresentada no item **b**.
- Na atividade **4**, antes de fazer o esquema, é interessante adicionar as frações correspondentes às quantidades de estudantes que jogarão futebol, vôlei e handebol, para calcular que parte do total de estudantes vai jogar basquete.

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{9}=\frac{14}{18}$$

$$\frac{18}{18}-\frac{14}{18}=\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$$

- Se julgar necessário, retome o conceito de medida de perímetro para auxiliar os estudantes na resolução da atividade **5**.
- Na atividade **6**, peça aos estudantes que montem um quadro com as medidas das 18 arestas para resolver a questão.
- Verifique se, na atividade **7**, os estudantes compreendem que 2*d* e 3*t* são os produtos entre a quantidade de cestas de cada tipo (de 2 pontos ou de 3 pontos) e o valor da pontuação unitária de cada cesta (por tipo) e que resultam no total de pontos de cada tipo de cesta.
- Discuta com os estudantes os valores que encontraram para o item **a** da atividade **10** e, principalmente, qual método utilizaram para encontrar tais valores.
- Outra maneira de resolver a atividade **13** é perceber que os objetos do prato esquerdo da balança (3) são equivalentes aos objetos do prato esquerdo da balança (1) adicionados à metade dos objetos do prato esquerdo da balança (2). Assim, pode-se concluir que, para a balança (3) ficar em equilíbrio, devemos ter nela os objetos do prato direito da balança (1) mais metade dos objetos do prato direito da balança (2). Ou seja, serão necessários 10 quadrados para equilibrá-la.

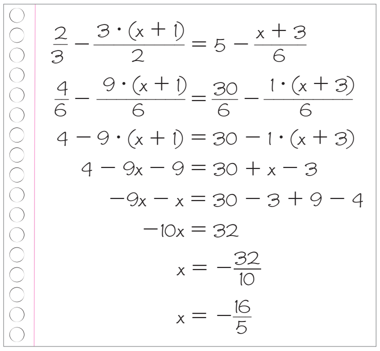
DIVERSIFICANDO

2. b) $\frac{1}{3}s+\frac{1}{6}s+1500=s$

1. O professor de Camila escreveu a seguinte equação na lousa:

$$\frac{2}{3}-\frac{3\cdot(x+1)}{2}=5-\frac{x+3}{6}$$

Veja como Camila resolveu essa equação.



$$\frac{2}{3}-\frac{3\cdot(x+1)}{2}=5-\frac{x+3}{6}$$

$$\frac{4}{6}-\frac{9\cdot(x+1)}{6}=\frac{30}{6}-\frac{1\cdot(x+3)}{6}$$

$$4-9\cdot(x+1)=30-1\cdot(x+3)$$

$$4-9x-9=30+x-3$$

$$-9x-x=30-3+9-4$$

$$-10x=32$$

$$x=-\frac{32}{10}$$

$$x=-\frac{16}{5}$$

ID/BR

Há um erro nessa resolução. Com um colega, identifique o erro e refaça a resolução dessa equação, corrigindo-a. **Consulte a resposta neste manual.**

2. Marcela recebe o salário uma vez por mês, investe a terça parte, reserva um sexto para pagar as contas e ainda lhe restam R$ 1 500,00.

a) Faça um esquema que represente essa situação. **Consulte a resposta neste manual.**

b) Monte uma equação que represente a distribuição do salário de Marcela.

c) Determine quanto, por mês, Marcela investe e quanto utiliza para pagar as contas.
Investimento: R$ 1 000,00; contas: R$ 500,00.

3. Carla está treinando para bater seu recorde em um jogo de *videogame* de três fases. No seu último treino, ela fez 110 pontos, distribuídos entre as fases da seguinte maneira:

- 1ª fase: 40 pontos a mais que na 2ª fase;
- 2ª fase: 10 pontos a menos que na 3ª fase;
- 3ª fase: a metade de pontos da 1ª fase.

Escreva uma equação para representar essa situação e determine quantos pontos Carla marcou em cada fase.

3. Equação possível:
$x+40+x+\left(\frac{x+40}{2}\right)=110$;
1ª fase: 60 pontos;
2ª fase: 20 pontos;
3ª fase: 30 pontos.

4. Uma escola no centro da cidade tem três turmas do 7º ano. No próximo fim de semana, todos os estudantes do 7º ano participarão de um campeonato esportivo. Cada estudante jogará apenas uma modalidade, entre futebol, vôlei, handebol e basquete. Os estudantes se distribuíram da seguinte maneira: um sexto dos estudantes jogará vôlei, metade jogará futebol, um nono jogará handebol e 24 estudantes jogarão basquete.

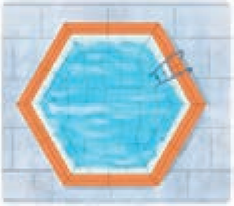
a) Monte um esquema que represente o total de estudantes distribuídos pelas modalidades. **Consulte a resposta neste manual.**

b) Escreva uma equação que represente a situação. $\frac{x}{6}+\frac{x}{2}+\frac{x}{9}+24=x$

c) Qual é o conjunto universo a ser considerado para essa situação? Justifique.

d) Determine quantos estudantes participarão de cada modalidade durante o campeonato.

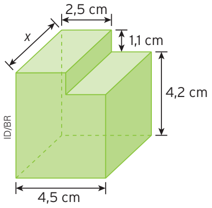
5. Para construir uma piscina em formato de hexágono regular (todos os lados com a mesma medida de comprimento) com 14,4 m de medida de perímetro, um engenheiro precisa calcular a medida do comprimento dos lados do hexágono.



Danillo Souza/ID/BR

Escreva a equação que representa a medida do perímetro dessa piscina e determine a medida do comprimento dos seus lados.
$6\ell=14,4$; **2,4 m**

6. Considere as medidas dos comprimentos das arestas indicadas no poliedro representado na figura a seguir.



ID/BR

Sabendo que a soma de todas as medidas das arestas desse poliedro é 62 cm, determine *x*, em centímetro. **3,8 cm**

4. c) O conjunto dos números naturais, pois representa a quantidade de estudantes.
d) Vôlei: 18 estudantes; futebol: 54 estudantes; handebol: 12 estudantes; basquete: 24 estudantes.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

- Para auxiliar os estudantes que apresentarem dúvidas na resolução dos problemas, em que geralmente a principal dificuldade é relacionar as informações fornecidas no enunciado com a linguagem algébrica adequada para cada situação-problema, é fundamental que eles compreendam a situação proposta, identificando estratégias mais adequadas para a resolução – e isso depende, além da leitura e do processo interpretativo, da capacidade de abstração dos estudantes. Apresente a eles diferentes exemplos que demonstrem como traduzir os enunciados para a linguagem algébrica, por meio de uma leitura interpretativa das situações-problema, selecionando as palavras-chave e utilizando incógnitas para representar e relacionar os valores desconhecidos por meio das operações matemáticas, obtendo assim as equações para representar de forma mais adequada cada situação apresentada.
- Caso os estudantes sintam dificuldade em resolver as equações fracionárias, retome a ideia de equivalência de frações, de mmc e de operações com frações.

8. Respostas possíveis:
a) $2x - 8 = -2$ e $x + 1 = 4$ b) $x - 5 = 0$ e $x + 5 = 10$ c) $3x = 0$ e $2x + 2 = 2$ d) $x + 3 = 1$ e $5 + 3x = -1$

Responda sempre no caderno.

10. a) Resposta possível: $\left(-1, \frac{13}{2}\right)$; (0, 6); (2, 5).

7. Em seu último jogo, o time de basquete da escola de Luís fez apenas cestas de 2 e 3 pontos. No total, o time marcou 72 pontos.

a) Sendo d a quantidade de cestas de 2 pontos e t a quantidade de cestas de 3 pontos marcadas pelo time de Luís, qual das equações a seguir estabelece uma relação entre a quantidade de cestas de cada tipo e o total de pontos marcados? **III**

I. $5(d + t) = 72$
III. $2d + 3t = 72$
II. $3d + 2t = 72$
IV. $dt(2 + 3) = 72$

b) Verifique se o par (9, 18) é solução da equação que você indicou no item anterior. **É solução.**

8. As equações $x + 4 = 6$ e $x + 5 = 7$ são exemplos de equações equivalentes, em que 2 é a raiz. Para cada raiz a seguir, escreva duas equações equivalentes.

a) 3
b) 5
c) 0
d) −2

9. Copie, no caderno, a equação que relaciona os valores dos pares p e q que estão no quadro.

p	−2	0	1	5
q	−3	1	3	11

Alternativa c.

a) $q = 2p - 1$
c) $q = 2p + 1$
b) $q = p - 2$
d) $q = 3p - 1$

10. Considere a equação a seguir.

$$x + 2y = 12$$

a) Determine três pares ordenados que são soluções dessa equação.

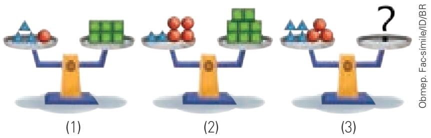
b) Verifique se o par ordenado $\left(-7, \frac{19}{2}\right)$ é uma solução dessa equação. **É uma solução.**

11. Você sabia que existe uma relação entre o número do calçado e o comprimento do pé de uma pessoa? Sendo S o número do sapato que ela calça e P a medida do comprimento do pé, em centímetro, temos a seguinte relação: $S = \frac{5P + 28}{4}$. Qual é a medida do comprimento do pé de uma pessoa que calça sapato número 37? **24,0 cm**

12. (OBM) Gastei $\frac{3}{7}$ do meu dinheiro. Depois gastei R$ 70,00 e fiquei com $\frac{1}{3}$ do que tinha no início, menos R$ 10,00. Quanto dinheiro eu tinha? **R$ 252,00**

13. Registre no caderno a alternativa que indica a resposta correta.

(Obmep) As balanças (1) e (2) da figura dada estão em equilíbrio. Sabe-se que todos os triângulos têm a mesma massa, bem como todos os quadrados e também todos os círculos.



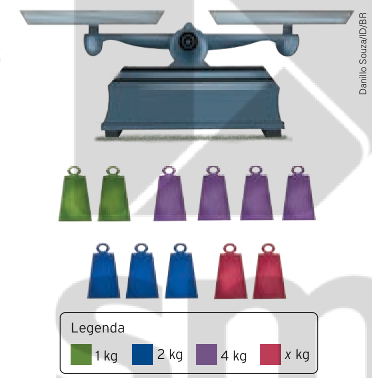
Obmep: Fac-símile/ID/BR

Quantos quadrados devem ser colocados no prato direito da balança (3) para que ela também fique equilibrada? **Alternativa d.**

a) 7
c) 9
e) 12
b) 8
d) 10

14. (EPCAr-MG) A quantia de R$ 2 100,00 foi distribuída entre 4 pessoas do seguinte modo: a segunda recebeu metade do que a primeira recebeu; a terceira recebeu metade da soma do que recebeu a primeira com a segunda; a quarta, metade do que a terceira recebeu. Quanto recebeu a segunda pessoa? **R$ 400,00**

15. Elabore um problema usando os elementos da figura a seguir, de modo que ele possa ser resolvido por meio de uma equação do 1º grau.



Danilo Souza/ID/BR

Depois, troque de caderno com um colega e resolva o problema criado por ele, enquanto ele resolve o que você criou.

Os estudantes devem criar livremente qualquer problema que envolva o equilíbrio da balança. É importante que eles percebam que não é qualquer configuração de pesos nos pratos que garante o equilíbrio.

- Uma possível resolução para a atividade de **14**, evitando o trabalho com frações, é escrever a seguinte relação entre as pessoas e os valores recebidos:

1ª pessoa: $8x$
2ª pessoa: $4x$
3ª pessoa: $6x$
4ª pessoa: $3x$

$$8x + 4x + 6x + 3x = 2\,100$$
$$21x = 2\,100$$
$$x = 100$$

- Na atividade **15**, ao criar o problema, os estudantes não precisam usar todos os elementos apresentados. Além disso, a massa do elemento vermelho não precisa necessariamente ser diferente das massas dos demais elemento.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nestas páginas permitem que os estudantes resolvam e elaborem problemas que podem ser representados por equações polinomiais do 1º grau, utilizando as propriedades da igualdade e favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA18**.

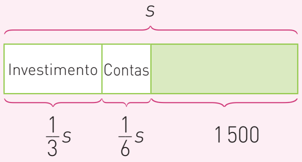
RESPOSTAS

1. O erro cometido por Camila está na quarta linha, na aplicação da propriedade distributiva em $-1 \cdot (x + 3)$. O correto é $-x - 3$, em vez de $+x - 3$.

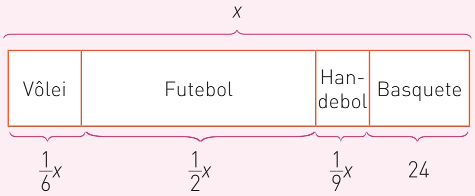
Resolução correta:

$$\frac{2}{3} - \frac{3 \cdot (x + 1)}{2} = 5 - \frac{x + 3}{6}$$
$$\frac{4}{6} - \frac{9 \cdot (x + 1)}{6} = \frac{30}{6} - \frac{x + 3}{6}$$
$$4 - 9x - 9 = 30 - x - 3$$
$$-8x = 32$$
$$x = -4$$

2. a) Esquema possível:



4. a) Esquema possível:



ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Esta seção aborda o tema planejamento financeiro e trabalha, em especial, com a importância do equilíbrio na elaboração, no ajuste e no cumprimento de um orçamento pessoal ou doméstico.
- Auxilie os estudantes a compreender a importância de um orçamento equilibrado. Incentive-os a perceber que fazer um orçamento constitui uma boa oportunidade para pensar no valor do trabalho, e não apenas no valor das coisas. Se julgar oportuno, faça perguntas como: Quanto trabalho dos seus pais foi necessário para que você pudesse comprar algo que queria?; Será que estamos desperdiçando dinheiro ou tempo comprando tanto?; Você realmente precisa do que está pensando em comprar?; Quais são as alternativas que podemos buscar para atingir os objetivos traçados no planejamento?.

DE OLHO NA BASE

Compreender que orçamentos ajudam a analisar os gastos, a identificar desperdícios, a avaliar hábitos de consumo, etc., apropriando-se de conhecimentos e experiências que possibilitem aos estudantes entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade, também favorece o desenvolvimento da **competência geral 6**.

AMPLIANDO HORIZONTES

Vivendo na corda bamba?

Muitas pessoas lidam com o dinheiro como se estivessem em uma corda bamba, ou seja, gastando mais do que ganham, não poupando para realizar sonhos ou se proteger de imprevistos e endividando-se para alimentar um consumismo por vezes irresponsável e prejudicial à sua vida, à de suas famílias e até ao meio ambiente.

Para não viver financeiramente desequilibrado e cheio de dívidas, é importante registrar em uma folha, *smartphone* ou computador as receitas (ou seja, a quantia de dinheiro que recebemos ou ganhamos) e as despesas (o que precisamos pagar e o que pretendemos comprar) relativas a determinado período (semana, quinzena, mês, etc.). Esse registro é chamado de **orçamento**.

Um orçamento pode nos ajudar a saber realmente quanto se gasta e como se gasta, a identificar desperdícios – como compras equivocadas ou desnecessárias –, a redefinir prioridades e a estudar a viabilidade de adotar novos hábitos de consumo, como trocar de marcas, entre outros. Além disso, o orçamento possibilita avaliar o impacto do aumento dos preços e dos salários nas finanças pessoais e da família. Quando, por exemplo, o aumento percentual das tarifas de energia elétrica, de água e esgoto, de telefone ou de transporte é maior que o dos salários da família, isso significa que a família vai passar a gastar um percentual maior do total que ganha. Assim, se sobrava algum dinheiro, agora talvez não sobre mais. E, se o dinheiro era suficiente, não será mais, caso a família mantenha o mesmo consumo. Perceber a diferença entre os percentuais de aumento do salário e dos preços é algo importante para ter um orçamento equilibrado, no qual a receita é maior ou igual às despesas.

Lembre-se de que um orçamento não faz milagres, apenas deixa as coisas mais claras, ao fornecer uma espécie de mapa das finanças pessoais.

OUTRAS FONTES

Cerbasi, G. *Como organizar sua vida financeira*. Rio de Janeiro: Campus, 2009.

Para leitura do professor, esse livro oferece tanto ensinamentos para organização de sua vida pessoal quanto exemplos de atividades para realizar em sala de aula.

O piano ou a Aninha. Banco Central do Brasil. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=X1UZuQ8h30o. Acesso em: 31 maio 2022.

O vídeo mostra como o orçamento familiar pode ajudar na identificação do que se gasta, como se gasta e o quanto se gasta. A reflexão sobre nossas despesas é uma temática central. Excelente oportunidade para convidar os estudantes a refletir sobre prioridades e escolhas. A tomada de decisão, associada a questões financeiras, sociais e comportamentais, permeia todo o vídeo.

Para refletir

Responda sempre no caderno.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir. **Consulte as respostas neste manual.**

1. Observem a situação apresentada na ilustração. Na opinião de vocês, o que a expressão “andar na corda bamba” tem a ver com educação financeira?

2. No Brasil, o orçamento desequilibrado pode ter consequências desastrosas na vida de muitas pessoas e famílias, como o alto nível de endividamento. Observem o quadro a seguir, com dados percentuais de 2016 a 2021.

PEIC (Percentual do total) – Média anual	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Famílias endividadas	60,2%	60,8%	60,3%	63,6%	66,5%	70,9%
Famílias com conta em atraso	24,2%	25,4%	24,0%	24,0%	25,5%	25,2%
Famílias sem condições de pagar as dívidas em atraso	9,2%	10,2%	9,7%	9,6%	11,0%	10,5%

O perfil do endividamento das famílias brasileiras em 2021. Pesquisa CNC. Disponível em: https://static.poder360.com.br/2022/01/peic-cnc-2021.pdf. Acesso em: 4 abr. 2022.

a) Em sua opinião, que relação pode haver entre os dados apresentados no quadro e o orçamento familiar?

b) Supondo que, em 2021, tenha havido 12 milhões de famílias endividadas, quantas famílias brasileiras estavam, nesse mesmo ano, sem condições de pagar as dívidas em atraso, segundo os dados do quadro?

3. Considerem que uma família tinha uma renda de R$ 2000,00 por mês e gastava R$ 1800,00, poupando R$ 200,00. Em um ano, os salários aumentaram 5% e os gastos, 10%, devido a vários aumentos de preço, como o de aluguel, de alimentação, de transporte e das tarifas de energia elétrica, água, telefone e gás. Que porcentagem do salário a família conseguia poupar antes dos aumentos? E depois?

Raphael Mortari/ID/BR

RESPOSTAS

DE OLHO NA BASE

Ao se reunirem em duplas e discutirem as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza, o que favorece o desenvolvimento da **competência geral 9**.

1. Resposta pessoal. O objetivo é levar os estudantes a refletir sobre a importância do equilíbrio no orçamento. Espera-se que eles percebam que, para ter uma vida tranquila e equilibrada, é importante organizar as finanças.

2. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes relacionem um possível desequilíbrio entre receitas e despesas nas famílias em situação de endividamento. No entanto, esclareça que nem sempre isso acontece por culpa da família, uma vez que em situações de desemprego, por exemplo, as famílias podem ficar em situações difíceis, inclusive para se alimentar. Ou seja, nem sempre é possível diminuir as despesas.

   b) Em 2021 havia, aproximadamente, 1,8 milhão de famílias sem condições de pagar as dívidas em atraso.

3. Antes dos aumentos, a família poupava 10% e, depois dos aumentos, aproximadamente 5,7%.

Honestidade

Compreender como é feito o orçamento familiar, entendendo a receita e a despesa, e refletir sobre seus hábitos de consumo e como isso afeta o orçamento familiar permite trabalhar o valor responsabilidade, auxiliando os estudantes a pensar nas decisões que devem ser tomadas para que o equilíbrio no orçamento seja mantido.

Se julgar oportuno, proponha aos estudantes que façam um orçamento ao longo de um mês, registrando receitas e despesas. Terminado o mês, eles devem analisar as despesas: Há despesas desnecessárias?; Conseguiram manter um orçamento equilibrado?; Caso não tenham conseguido, como podem se organizar para equilibrar o orçamento?.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, os estudantes vão pesquisar a vida e a obra de arquitetos e suas relações com a Geometria e serão motivados a observar e a reconhecer a Matemática nos espaços em que vivem.
- Figuras geométricas estão representadas em obras arquitetônicas desde a Antiguidade até os dias atuais. Assim, é importante que os estudantes reconheçam a Geometria como um dos alicerces para a compreensão da Matemática.
- Avalie a possibilidade de eles realizarem uma pesquisa de campo na escola ou em espaços públicos.

PARA COMEÇAR

- Leia o texto e faça as primeiras perguntas desta seção aos estudantes. Deixe-os que falem livremente. Por meio da mediação, pergunte a eles se conhecem alguma obra arquitetônica na cidade ou se lembram de alguma em que reconheçam obras geométricas que tenha chamado a atenção deles em que reconheçam alguma forma geométrica nela. Solicite que a descrevam e amplie a discussão perguntando: Qual é a relação dessa obra com o espaço ao redor?; Ela deixou o espaço mais bonito com suas formas?; Há edificações antigas e modernas no mesmo espaço?; Há alguma obra que se integra à natureza, com árvores, jardins e praças públicas?; Ela privilegia espaços com acessibilidade a pessoas com deficiência?; entre outras perguntas.
- Ajude os estudantes a perceber que a Matemática é uma ciência importante para a arquitetura e que se relaciona com outras áreas e profissões. Para compreenderem como os profissionais dessa área atuam, esclareça que arquitetos e urbanistas criam os projetos usando formas geométricas e elaboram os desenhos; e os engenheiros efetuam os cálculos (atualmente com programas de computador) para a concretização do projeto (de casas, escolas, pontes, museus, etc.), sempre pensando na integração das construções com os espaços. Com base nisso, explique aos estudantes esse olhar que devem ter para a pesquisa e, para auxiliá-los, cite alguns arquitetos brasileiros, como Burle Marx, Oscar Niemeyer, Lina Bo Bardi e Lúcio Costa.

PROCEDIMENTOS

- A *Parte I* privilegia a atividade individual, para que os estudantes possam usar o conhecimento construído até o momento e, posteriormente, contribuir para a pesquisa em grupo com as descobertas que realizaram. Assim, eles vão emitir opiniões com argumentos e ouvir os colegas, construindo novos conhecimentos com a turma. Peça a eles que considerem na pesquisa as discussões realizadas em sala de aula.

INVESTIGAR

Arquitetura e Matemática

Para começar

Você costuma prestar atenção à arquitetura das edificações no seu bairro? Já percebeu que em muitas construções é possível notar figuras geométricas, algumas consideradas obras de arte?

Nesta seção, você e os colegas vão fazer uma pesquisa sobre arquitetos que usam a geometria em suas obras e, assim, mudam os espaços onde as pessoas vivem. Depois, a turma vai organizar uma exposição fotográfica, na escola, desses profissionais e suas respectivas obras.

O PROBLEMA

- Quais arquitetos têm o estilo marcado pelo destaque dado às formas e pelo uso das figuras geométricas em suas obras? Quais são essas obras?

A INVESTIGAÇÃO

- **Prática de pesquisa:** pesquisas bibliográficas.
- **Instrumento de coleta:** levantamento de referências teóricas (livros, revistas e *sites*).

MATERIAIS

- caderno e lápis
- livros e revistas
- canetas hidrográficas
- máquina fotográfica (pode ser de telefone celular)
- cartolina
- computador com acesso à internet e impressora

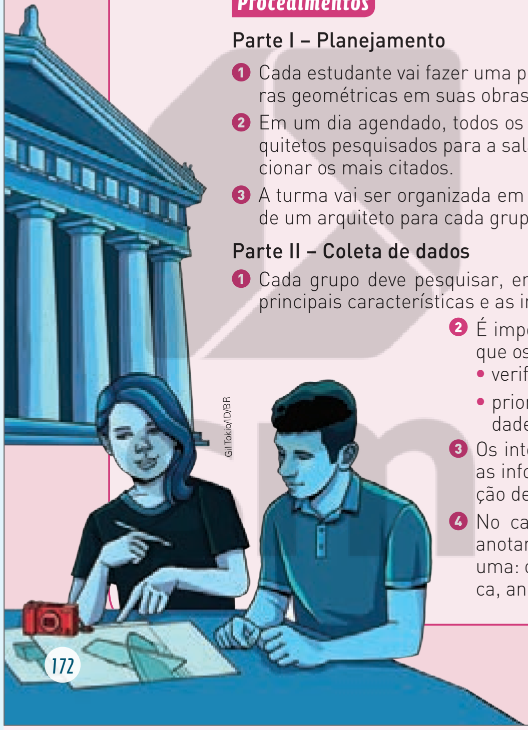
Procedimentos

Parte I – Planejamento

1. Cada estudante vai fazer uma pesquisa sobre os arquitetos que dão destaque às figuras geométricas em suas obras.
2. Em um dia agendado, todos os estudantes devem trazer a relação dos nomes de arquitetos pesquisados para a sala de aula. O professor vai escrevê-los na lousa e selecionar os mais citados.
3. A turma vai ser organizada em grupos. Em seguida, o professor vai fazer um sorteio de um arquiteto para cada grupo, que vai pesquisar informações sobre ele.

Parte II – Coleta de dados

1. Cada grupo deve pesquisar, em livros, revistas e *sites*, a biografia do arquiteto, as principais características e as imagens de suas obras.
2. É importante que as fontes de pesquisa sejam confiáveis e que os estudantes:
   - verifiquem se o autor do texto é especializado no assunto;
   - priorizem os *sites* de instituições como museus e universidades e os do próprio arquiteto pesquisado.
3. Os integrantes do grupo devem anotar ou reproduzir todas as informações relevantes que encontrarem para a confecção de um cartaz.
4. No caso das fotografias, além de reproduzi-las, deve-se anotar o maior número possível de informações sobre cada uma: onde foi encontrada, nome e local da obra arquitetônica, ano da fotografia, nome do fotógrafo, etc.



Gil Tokio/D/BR

172

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO

- Proponha aos estudantes que, em uma roda de conversa, exponham suas opiniões sobre a pesquisa e, assim, contribuam para o objetivo dela.
- Na questão **1**, espera-se que os estudantes percebam as vantagens das situações interpretativas que as pesquisas individual e coletiva proporcionam. Enquanto a primeira exige dos estudantes os conhecimentos que foram construídos até o momento da pesquisa, a segunda contribui para que eles os compartilhem em grupo e ampliem o conhecimento por meio das reflexões dos colegas.
- Na questão **3**, se houver no município ou no bairro alguma obra arquitetônica que use figuras geométricas, espera-se que os estudantes a citem. Se eles conseguiram realizar a pesquisa de campo sob a supervisão de um responsável, solicite que relatem a experiência à turma, descrevendo as formas e o espaço ao redor da obra; ou, ainda, que citem a experiência de explorar os espaços da escola para reconhecer nele figuras geométricas.
- Na questão **4**, espera-se que os estudantes relatem que, com base na pesquisa, passaram a observar os lugares com mais atenção.

COMUNICAÇÃO DOS RESULTADOS

- Providencie um espaço na escola para realizar a exposição de fotografias. O ideal é que seja um lugar de fácil visualização, como o pátio, e a exposição permaneça durante algum tempo, para que toda a comunidade escolar possa apreciá-la.

Parte III – Organização e seleção de dados

1. Organizem os dados coletados pelo grupo, discutam o que encontraram sobre o arquiteto e elaborem itens com as principais informações sobre ele.
2. No caso das fotografias:
   - selecionem as que estão reproduzidas com maior qualidade, descartando as repetidas, as que não estiverem em bom estado e as que forem muito pequenas;
   - entre as imagens selecionadas, identifiquem e anotem as figuras geométricas que estão em evidência nas obras e se há proporção entre elas;
   - pesquisem se há alguma obra desse arquiteto no município onde moram. Se houver, verifiquem a possibilidade de observá-la e fotografá-la, acompanhados de um responsável.

Parte IV – Preparação da exposição

1. Digitem e imprimam (ou transcrevam) os dados biográficos e a lista com as principais características das obras do arquiteto que pesquisaram. O tamanho da fonte não deve ser pequeno, pois esse texto deve ser facilmente lido pelo público da exposição. Além disso, o texto deve ser atraente e não muito extenso para facilitar a leitura e deixar espaço na cartolina para as imagens e suas legendas.
2. Separem as fotografias selecionadas e escrevam as legendas. Em cada legenda, devem constar os dados da imagem e da obra e as figuras geométricas que a compõem.
3. Colem as fotografias das obras com as respectivas legendas na cartolina, abaixo do nome do arquiteto que as projetou. Em outro lugar, escrevam o nome dos integrantes do grupo e a respectiva turma.

Questões para discussão

Respostas pessoais.

1. Você gostou mais de realizar a pesquisa individual ou coletivamente? Por quê?
2. Você teve dificuldade de encontrar fotos de obras arquitetônicas que dão destaque às figuras geométricas? Justifique.
3. Além das pesquisas bibliográfica e biográfica, você realizou a de campo? Em caso afirmativo, conte à turma como foi essa experiência.
4. Você sabia da relação entre arquitetura e Matemática ou se surpreendeu durante a pesquisa? Explique.

Comunicação dos resultados

Exposição fotográfica

Organizem o espaço da exposição de acordo com a quantidade de grupos. Cada grupo deve colar seu cartaz no espaço reservado para ele. A exposição deve conter a biografia do autor, a lista com as características da obra dele e as figuras geométricas representadas nela, no espaço indicado.

No dia da exposição, vocês vão falar aos visitantes sobre a pesquisa que realizaram. Agora, mãos à obra e boa exposição!

Gil Tokio/ID/BR

- Na *Parte II*, oriente os grupos a fazer uma divisão de tarefas entre os integrantes e a trocar as experiências desse processo em trabalhos anteriores. A pesquisa solicitada pode levar os estudantes a páginas da internet em Língua Inglesa. Nesse sentido, eles poderão navegar em ambientes virtuais em busca dessas informações, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07LI10** [Escolher, em ambientes virtuais, textos em língua inglesa, de fontes confiáveis, para estudos/pesquisas escolares.], do componente curricular Língua Inglesa.
- Na *Parte III*, supervisione o trabalho dos grupos. Auxilie-os a perceber a importância da discussão e da tomada de decisões coletiva. Oriente-os na análise das fotografias, observando as figuras geométricas e as proporções. Nessa parte, é interessante realizarem também a pesquisa de campo. Caso não seja possível observar a obra de arquitetos no município onde vivem, sob sua supervisão, sugira que explorem a escola e fotografem figuras geométricas identificadas nela para complementar a pesquisa.
- Na *Parte IV*, chame a atenção dos estudantes especialmente para o aspecto estético do que estão organizando. Mesmo que cada grupo seja responsável por uma parte do que será exposto, a obra deve ter uma unidade visual.

DE OLHO NA BASE

Sugira aos estudantes que troquem informações entre si, mostrando a eles que o sucesso da exposição depende da união e da troca de ideias entre os colegas, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 10**.

- O espaço destinado à exposição deve ser organizado de acordo com a parte correspondente a cada grupo. Ajude os estudantes a posicionar e a colar os cartazes. É importante que eles percebam que o conteúdo exposto deve ser de fácil e agradável visualização aos visitantes.
- Combine um dia para a abertura da exposição. Outras turmas e funcionários da escola podem ser convidados para participar da abertura. Um ou dois estudantes podem relatar, de modo geral, em que consistiu a pesquisa, e em seguida os visitantes podem se aproximar para ler e observar os conteúdos e também para tirar dúvidas com os estudantes.

DE OLHO NA BASE

Esta seção proporciona aos estudantes o contato com mídias digitais, o que pode trazer novas experiências à pesquisa e à exposição fotográfica, dando a eles outros significados do uso da internet. Dessa maneira, eles vão usar as ferramentas digitais sob a lente da própria realidade, desenvolvendo a **competência geral 4**.

Compreender que a Matemática está relacionada com outras áreas, como a Arquitetura, contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- A atividade **3** possibilita aos estudantes perceber as operações inversas e as propriedades da igualdade. Incentive-os a explicar as semelhanças e as diferenças entre os dois procedimentos e a opinar a respeito da preferência por um dos dois métodos.
- A atividade **4** pode ser resolvida de diferentes maneiras. Peça aos estudantes que exponham seus pensamentos para resolvê-la. É importante que eles percebam que uma quantidade mais seu triplo equivale ao quádruplo dessa quantidade. A medida da distância procurada equivale, então, a $\frac{3}{4}$ do percurso total, ou seja, $\frac{3}{4}$ de 350 quilômetros.
- Se julgar conveniente, sugira aos estudantes que resolvam as atividades **5**, **6** e **8** em duplas. Por se tratar de atividades desafiadoras, a troca de ideias pode facilitar a compreensão dos enunciados e a busca de diferentes soluções. Incentive-os a explicar como pensaram para resolver cada uma delas.
- Na atividade **7**, verifique se, ao resolverem a equação $2 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (2x + 4) = 4 \cdot 10{,}5$, os estudantes percebem que o problema ainda não foi resolvido por completo. É necessário determinar as medidas de comprimento dos lados do retângulo, substituindo o valor encontrado para x nas expressões que representam as medidas de comprimento dos lados dele.

RESPOSTAS

1. A cada estrofe da música aparece um novo elemento, construindo uma sequência recursiva de animais a partir dos elementos da estrofe anterior.

5. Se o dono do restaurante devolveu R$ 5,00 às clientes como desconto, o valor final da conta foi R$ 25,00, e não mais R$ 30,00. Então, as amigas pagaram:

$$\text{R\$ } 9{,}00 \cdot 3 = \text{R\$ } 27{,}00$$

Sendo R$ 25,00 para pagar a conta e R$ 2,00 para o garçom.

Há uma indução ao erro na última conta: deveriam ser subtraídos R$ 2,00 de R$ 27,00 para chegar em R$ 25,00, em vez de adicionados R$ 2,00 a R$ 27,00, resultando em R$ 29,00.

8. Marcos não considerou que o numerador pode ser igual a zero, o que implicaria os denominadores admitirem quaisquer valores diferentes entre si, ou seja:

$$5x - 4 = 0 \Rightarrow 5x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Leia o trecho da música a seguir.

A velha a fiar

Estava a velha em seu lugar
Veio a mosca lhe fazer mal
A mosca na velha e a velha a fiar

Estava a mosca em seu lugar
Veio a aranha lhe fazer mal
A aranha na mosca, a mosca na velha
e a velha a fiar

Estava a aranha em seu lugar
Veio o rato lhe fazer mal
O rato na aranha, a aranha na mosca, a mosca
na velha e a velha a fiar

Estava o rato em seu lugar
Veio o gato lhe fazer mal
O gato no rato, o rato na aranha, a aranha na
mosca, a mosca na velha e a velha a fiar

Domínio público.

2. c) João: 5 quilômetros; Pedro: 3 quilômetros.

A recursão é um conceito que não está presente apenas na Matemática, mas também em outras áreas do conhecimento. Com um colega, conversem e tentem identificar como a recursão está presente na letra dessa música.

Consulte a resposta neste manual.

2. As corridas de revezamento são provas realizadas geralmente por equipes com quatro integrantes que se revezam em trechos de um circuito.

Quatro amigos vão participar de uma corrida de revezamento para atletas amadores. Como eles não possuem o mesmo condicionamento físico, decidiram correr trechos com distâncias diferentes. João correrá $\frac{1}{3}$ da prova, Pedro correrá $\frac{1}{5}$ da prova, Vítor correrá 3 quilômetros e Rafael correrá os 4 quilômetros restantes da prova.

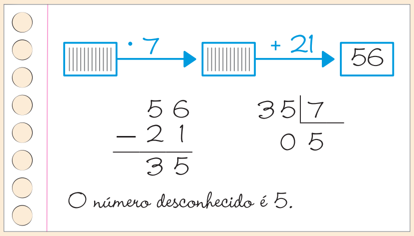
a) Represente essa situação usando os conhecimentos que você adquiriu nesta unidade.

b) Qual é a medida do comprimento total do percurso?

c) Quantos quilômetros João e Pedro terão de correr?

2. a) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + 3 + 4 = x$ b) 15 quilômetros.

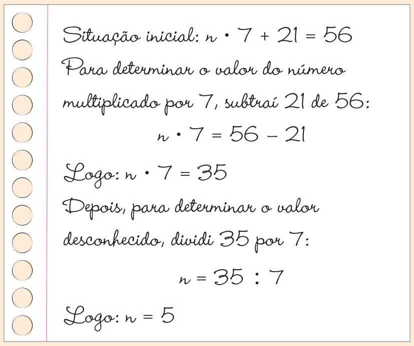
3. Veja no esquema como Lia fez para determinar um número desconhecido.



O número desconhecido é 5.

ID/BR

Ao ver a resolução de Lia, um colega afirmou que é possível registrar, com equações, os cálculos feitos por ela. Veja como ele fez.



Situação inicial: $n \cdot 7 + 21 = 56$

Para determinar o valor do número multiplicado por 7, subtraí 21 de 56:

$n \cdot 7 = 56 - 21$

Logo: $n \cdot 7 = 35$

Depois, para determinar o valor desconhecido, dividi 35 por 7:

$n = 35 : 7$

Logo: $n = 5$

ID/BR

a) Compare os dois procedimentos e indique o que existe de parecido e de diferente entre eles.

b) Qual dos dois métodos você escolheria para resolver a situação apresentada? **Resposta pessoal.**

4. Escreva no caderno a alternativa que responde de corretamente à atividade a seguir.

(Cesgranrio-RJ) José viaja 350 quilômetros para ir de carro de sua casa à cidade onde moram seus pais. Numa dessas viagens, após alguns quilômetros, ele parou para um cafezinho. A seguir, percorreu o triplo da quantidade de quilômetros que havia percorrido antes de parar. Quantos quilômetros ele percorreu após o café?

a) 87,5
b) 125,6
c) 262,5
d) 267,5
e) 272,0

Alternativa c.

3. a) Resposta possível: Parecido: as operações são as mesmas e na mesma ordem: primeiro, subtrai-se o número 21 do 56; em seguida, divide-se o resultado por 7, obtendo 5. Diferente: a apresentação da resolução: uma por meio da aritmética, outra por meio da álgebra.

DE OLHO NA BASE

A atividade **1** permite aos estudantes reconhecer o conceito de recursão na música e no texto poético, contribuindo para o desenvolvimento de parte da habilidade **EF07MA14**.

As atividades propostas nesta seção possibilitam aos estudantes analisar, representar e resolver problemas envolvendo equações polinomiais do 1º grau redutíveis à forma $ax + b = c$ e utilizando as propriedades da igualdade, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA18**.

5. O problema a seguir é um conhecido desafio que deixa muitas pessoas intrigadas.

> Três amigas foram a um restaurante e gastaram, no total, R\$ 30,00. Para facilitar o pagamento, cada uma delas deu uma nota de R\$ 10,00. O garçom levou o dinheiro até o caixa, e o dono do restaurante disse o seguinte:
>
> — Como essas três moças são clientes antigas do restaurante, vou devolver a elas R\$ 5,00.
>
> Então, o caixa entregou ao garçom cinco moedas de R\$ 1,00, sendo duas moedas para o garçom e três para as moças. O garçom entregou uma moeda para cada moça. No final, cada uma das amigas pagou o seguinte:
>
> R\$ 10,00 − R\$ 1,00 = R\$ 9,00
>
> Depois de ver quanto havia gastado, uma das amigas pensou:
>
> — Se cada uma de nós gastou R\$ 9,00, o que nós três gastamos juntas foi R\$ 27,00.
>
> Se o garçom ficou com R\$ 2,00, temos:
>
> - Amigas: R\$ 27,00
> - Garçom: R\$ 2,00
> - Total: R\$ 29,00
>
> Então, onde foi parar R\$ 1,00?

Danillo Souza/ID/BR

Tente solucionar esse desafio.
Consulte a resposta neste manual.

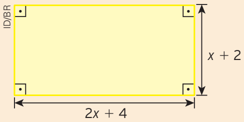
6. Registre no caderno a alternativa correta.

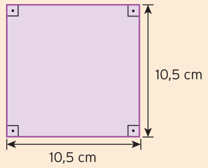
(Enem) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R\$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R\$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

a) R\$ 14,00
b) R\$ 17,00
c) R\$ 22,00
d) R\$ 32,00
e) R\$ 57,00

Alternativa d.

7. Considere os seguintes polígonos.





Determine a medida do comprimento de cada lado do retângulo, sabendo que o retângulo e o quadrado têm a mesma medida de perímetro. Lembre-se de que a medida do perímetro de um polígono é a medida do comprimento do contorno do polígono. **7 cm e 14 cm**

8. Leia a situação e faça o que se pede.

O professor de Marcos pediu a ele que determinasse a única solução racional da seguinte equação:

$$\frac{5x-4}{2x^2+x+2}=\frac{5x-4}{x^2+x+1}$$

Para começar a resolver a equação, Marcos pensou o seguinte:
"Se as duas frações são iguais e os numeradores são iguais, então seus denominadores também são iguais".
Assim, Marcos igualou os denominadores e resolveu a equação da seguinte maneira:

$$2x^2+x+2=x^2+x+1$$
$$2x^2-x^2+x-x=1-2$$
$$x^2=-1$$

Ao terminar, ele notou que a equação não tinha uma solução racional, como o professor havia dito.
Depois de apresentar sua resolução, o professor disse a Marcos que ele havia cometido um engano no desenvolvimento e que a equação tinha, sim, uma única solução racional.

Identifique onde está a falha no desenvolvimento de Marcos e justifique.
Consulte a resposta neste manual.

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Compreendi a ideia de variável?
- Consigo identificar regularidades em sequências?
- Reconheço e consigo diferenciar os termos algébricos dos numéricos em uma expressão algébrica?
- Consigo determinar se duas ou mais expressões algébricas são equivalentes?
- Sei simplificar expressões algébricas?
- Aprendi a diferenciar sequências recursivas de sequências não recursivas?
- Aprendi a verificar se determinado número é raiz ou solução de uma equação?
- Aprendi a representar situações-problema por meio de equações?
- Consigo resolver equações $ax + b = c$ utilizando as propriedades da igualdade?
- Aprendi a verificar resultados e a determinar as soluções de equações com duas incógnitas?
- Conversei com meus colegas e o professor sobre possíveis dificuldades?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

ESTRATÉGIAS DE APOIO

- Compreender as estruturas e os princípios envolvidos nos cálculos algébricos e que os símbolos podem ser utilizados para traduzir as ideias matemáticas, inclusive por meio do estudo de padrões, contribui significativamente para o desenvolvimento do pensamento algébrico.
- Para consolidar os conceitos relacionados ao estudo de sequências e facilitar a compreensão dos conceitos algébricos, proponha aos estudantes algumas sequências e peça a eles que apresentem os padrões que foram utilizados para construí-las em cada caso.
- Os estudantes devem se tornar aptos a procurar, a reconhecer e a generalizar os padrões para que consigam relacionar e abstrair adquirindo o pensamento algébrico.
- Sempre que possível, relacione a Álgebra a outros campos da Matemática, com o intuito de tornar significativo o estudo das expressões algébricas e das equações.
- É importante que esse trabalho com padrões e o início da representação algébrica seja feito de maneira significativa, para que o desenvolvimento da abstração e da generalização seja eficiente. Portanto, é necessário evitar a mecanização e a memorização de regras. Apresentar a Álgebra com seu significado histórico e conceitual de linguagem pode ser um facilitador na passagem do pensamento numérico para o algébrico.

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
2, 7, 9 e 10.

Competências específicas de Matemática
3, 5 e 6.

Tema Contemporâneo Transversal
Meio Ambiente.

Habilidades

(EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.

(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

UNIDADE 5

PROPORCIONALIDADE E PORCENTAGEM

SOBRE A UNIDADE

Os conteúdos desenvolvidos nesta unidade podem ser facilmente associados a situações do dia a dia. Os estudantes serão convidados a refletir sobre as ideias de razão, proporção e porcentagem.

Os conceitos de razão e de proporção devem ser contextualizados com vários aspectos do cotidiano trazidos pelas mídias. Por exemplo: estatísticas sobre analfabetismo; diferença entre o consumo de etanol e de gasolina em um veículo; notícias da quantidade de automóveis que passam por hora em certa rodovia.

O raciocínio proporcional é uma habilidade importante a ser desenvolvida no Ensino Fundamental, devendo o conceito ser trabalhado por meio de conteúdos prévios, como: comparação entre números, relação parte-todo, relação parte-parte e taxas. A relação parte-todo pode ser explorada, por exemplo, na relação entre a quantidade de mulheres e a quantidade total de funcionários de uma empresa. A relação parte-parte pode ser usada para comparar a quantidade de homens de uma empresa com a quantidade de mulheres dessa empresa. As taxas podem expressar a relação entre duas grandezas, como velocidade e tempo.

No capítulo 2, os estudantes vão trabalhar com porcentagens em situações diversificadas, mas principalmente nas relacionadas a temas da educação financeira.

PRIMEIRAS IDEIAS

Você consegue perceber algo de curioso nesta fotografia? Será que o boné e o tênis estão adequados às medidas de comprimento da criança?

De maneira geral, a estrutura do boné de um adulto e a do boné de uma criança são iguais, o que muda é apenas a medida de comprimento das peças usadas na produção. Podemos pensar da mesma maneira para o tênis.

1. Você já escutou a expressão “fora de proporção”? O que acha que ela significa? Será que ela poderia se relacionar com a situação da fotografia?
2. Inspire-se no exemplo desta abertura e liste outras situações que envolvem proporcionalidade. Procure não se limitar a situações de numeração de vestimenta. Solte a imaginação!
3. Agora, pense na seguinte situação: Se uma máquina produz 100 calçados por hora, quantas horas são necessárias para que essa máquina produza 1 000 calçados?

Blair_witch/iStock/Getty Images

← Criança usando tênis e boné de um adulto.

PRIMEIRAS IDEIAS

- Converse com os estudantes sobre a imagem de abertura. Solicite a eles que a descrevam. É provável que as descrições expressem que se trata de uma criança ou de um bebê utilizando boné e tênis de adulto. Pergunte aos estudantes: Qual é a diferença entre um boné de criança e um boné de adulto? E entre uma camiseta de adulto e uma camiseta de criança? Espera-se que os estudantes percebam que a principal diferença está no tamanho, e não na “estrutura”.

RESPOSTAS

1. Respostas pessoais. Caso nenhum dos estudantes tenha escutado essa expressão, apresente a eles algumas situações em que ela pode ser empregada, como: as imagens estão fora de proporção; a reclamação feita estava fora de proporção; a quantidade de comida encomendada estava fora de proporção, etc. Espera-se que os estudantes percebam que o uso dessa expressão está relacionado à ideia de “tamanho não adequado”, tanto para mais quanto para menos. Depois que essa ideia estiver esclarecida, oriente os estudantes a relacionar o significado da expressão com a foto de abertura. Explique que o tamanho do tênis e o do boné não estão adequados em relação ao tamanho da cabeça e dos pés da criança, respectivamente.
2. Os estudantes podem apresentar exemplos parecidos ao relacionado à fotografia da abertura. Incentive a imaginação deles para pensar em outras situações, como as que envolvem objetos grandes representados em tamanho reduzido; por exemplo, miniaturas de carros e maquetes de construções (representações em escala de uma obra de arquitetura ou engenharia a ser executada ou de um cenário de filme ou teatro a ser montado); o valor do prato de comida em um restaurante por quilo e o “peso” da comida, a quantidade de água gasta no banho e o tempo em que o chuveiro ficou aberto.
3. São necessárias 10 horas. Solicite aos estudantes que compartilhem como pensaram para responder a essa pergunta. Se julgar conveniente, monte na lousa um quadro relacionando a quantidade de calçados produzidos e o tempo necessário para produzi-los.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Razão.
- Proporção.
- Sequências diretamente e inversamente proporcionais.
- Grandezas diretamente e inversamente proporcionais.
- Regra de três.

Objetivos

- Compreender o conceito de razão entre dois números.
- Compreender o conceito de proporção e suas propriedades.
- Resolver e elaborar problemas que envolvam a ideia de números e grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.
- Utilizar sentenças algébricas para expressar a relação de proporcionalidade entre duas grandezas.
- Compreender a ideia de variável, representada por letra, para expressar a relação entre duas grandezas e ser capaz de diferenciá-la da ideia de incógnita.
- Reconhecer e utilizar a regra de três simples como estratégia para a resolução de situações-problema que envolvem proporcionalidade.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de compreender as ideias de razão e proporção e resolver problemas que envolvem grandezas diretamente e inversamente proporcionais por meio de diversas estratégias, como a regra de três.

  Os conteúdos trabalhados neste capítulo são utilizados cotidianamente pelos estudantes e, por isso, compreendê-los é tão importante. Muitas vezes esses conhecimentos são utilizados sem que se tome consciência, mas ao determinarmos se é mais viável abastecer um veículo com etanol ou com gasolina ou, ainda, ao verificar qual embalagem de determinado produto compensa ser adquirida.

Capítulo 1

RAZÃO E PROPORÇÃO

Para desenvolver os conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes tenham compreendido as operações com números racionais.

Razão

Nas Olimpíadas de Tóquio 2020 foram distribuídas 1 080 medalhas. O Brasil ficou na 12ª colocação entre os países participantes, obtendo 21 medalhas no total, distribuídas da seguinte maneira:


7 de ouro

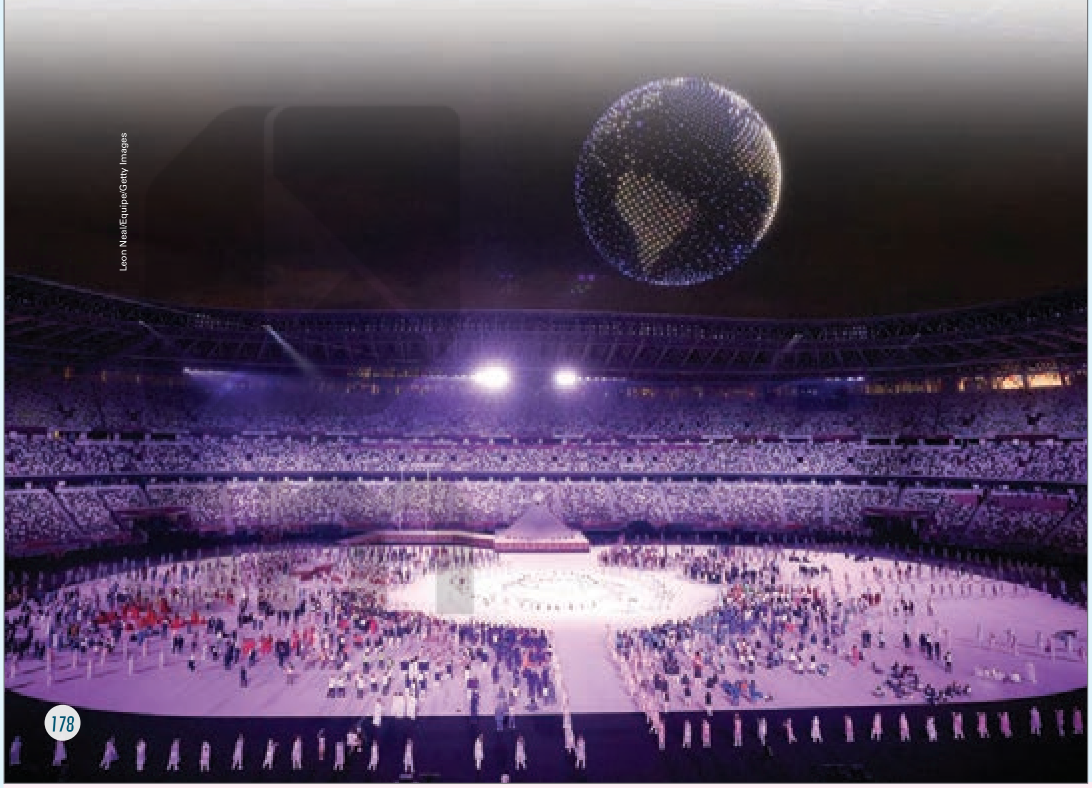

6 de prata


8 de bronze

João Picoli/ID/BR

Veja como podemos comparar a quantidade de medalhas conquistadas pelo Brasil em relação ao total de medalhas distribuídas.

total de medalhas conquistadas pelo Brasil → $\frac{21}{1\,080}$ ← total de medalhas distribuídas



Abertura das Olimpíadas de Tóquio 2020, no Japão. Foto de 2021.

Leon Neal/Equipe/Getty Images

Quando comparamos duas medidas ou duas quantidades por meio de uma divisão, o quociente dessa divisão é chamado de **razão**. Assim, dizemos que a razão entre o número total de medalhas conquistadas pelo Brasil em relação ao número total de medalhas distribuídas nas Olimpíadas de 2020 é $\frac{21}{1\,080}$.

A razão entre dois números *a* e *b*, com $b \neq 0$, nessa ordem, é o quociente de *a* por *b*. Essa razão é indicada por $\frac{a}{b}$ ou $a : b$ (lê-se: "razão de *a* para *b*" ou "*a* para *b*").

Uma razão pode ser expressa usando números na forma de fração ou na forma decimal.

O primeiro termo de uma razão é chamado de **antecedente**, e o segundo termo é chamado de **consequente**. Veja um exemplo.

$$\text{antecedente} \rightarrow \frac{3}{4} \leftarrow \text{consequente}$$

Exemplo

Na turma de Marcos, 18 dos 24 estudantes moram no mesmo bairro da escola. Podemos comparar a quantidade de estudantes que moram no mesmo bairro da escola em relação ao total de estudantes por meio de uma razão.

$$\frac{18}{24}$$

número de estudantes da turma que moram no mesmo bairro da escola

total de estudantes da turma

Podemos escrever uma fração equivalente a esta.

$$\begin{tikzcd}\frac{18}{24} \arrow[r, bend left, ": 6"] \arrow[r, bend right, ": 6"'] & \frac{3}{4}\end{tikzcd}$$

Também podemos escrever essa razão na forma decimal.

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$$

Assim, a razão entre a quantidade de estudantes que moram no mesmo bairro da escola em relação ao total de estudantes da escola é $\frac{18}{24}$, ou $\frac{3}{4}$ ou, ainda, 0,75.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Determine a razão entre o primeiro e o segundo número na forma de fração e na forma decimal.

a) 1 e 2 **$\frac{1}{2}$; 0,5.**

b) 5 e 4 **$\frac{5}{4}$; 1,25.**

c) 3 e 9 **$\frac{1}{3}$; aprox. 0,33.**

d) 10 e 40 **$\frac{1}{4}$; 0,25.**

2. Escreva como se leem as razões a seguir.

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{8}{85}$

3. Identifique o antecedente e o consequente das razões a seguir. Depois, escreva as razões na forma decimal.

a) $\frac{6}{8}$ b) $\frac{21}{14}$ c) $\frac{16}{40}$ d) $\frac{36}{72}$ e) $\frac{17}{68}$ f) $\frac{21}{105}$ g) $\frac{55}{110}$ h) $\frac{81}{216}$

2. a) Razão de 2 para 3, ou 2 para 3.
b) Razão de 3 para 5, ou 3 para 5.
c) Razão de 1 para 10, ou 1 para 10.
d) Razão de 8 para 85, ou 8 para 85.

3. a) Antecedente: 6; consequente: 8; forma decimal: 0,75.
b) Antecedente: 21; consequente: 14; forma decimal: 1,5.
c) Antecedente: 16; consequente: 40; forma decimal: 0,4.
d) Antecedente: 36; consequente: 72; forma decimal: 0,5.
e) Antecedente: 17; consequente: 68; forma decimal: 0,25.
f) Antecedente: 21; consequente: 105; forma decimal: 0,2.
g) Antecedente: 55; consequente: 110; forma decimal: 0,5.
h) Antecedente: 81; consequente: 216; forma decimal: 0,375.

RAZÃO

- A ideia de razão está presente em diversas situações do dia a dia. É fundamental que os estudantes a compreendam para avançar nos conteúdos que envolvem proporcionalidade.
- Explore a situação da abertura do capítulo e verifique se os estudantes compreendem que a ideia de razão pode estar associada à comparação. Se considerar pertinente, retome as ideias relacionadas a frações.
- Esclareça que, em uma comparação, se desconsideram outras variáveis e se comparam apenas duas. Na abertura do capítulo, compara-se o total de medalhas conquistadas pelo Brasil nas Olimpíadas Tóquio 2020 com o total de medalhas distribuídas nessas olimpíadas. Incentive os estudantes a perceber que esse tipo de comparação é comumente utilizada para verificar o desempenho de uma seleção ou de um time em um campeonato.
- Proponha aos estudantes que determinem a razão entre o total de medalhas de ouro que o Brasil recebeu nas Olimpíadas Tóquio 2020 em relação ao total de medalhas conquistadas pelo Brasil nessas olimpíadas. Espera-se que eles percebam que essa razão pode ser indicada pela fração $\frac{7}{21}$.
- De maneira geral, os temas olimpíadas e esportes despertam o interesse dos estudantes. Assim, se possível, oriente-os a pesquisar outras informações sobre esses temas para que possam observar outras razões.
- Observe se os estudantes compreendem o modo como o conceito de razão foi definido. O objetivo não é que eles decorem a definição matemática, mas que sejam capazes de ler e compreender as notações envolvidas.
- Ao explicar que uma razão pode ser expressa tanto na forma de fração como na forma decimal, pergunte aos estudantes como seria possível fazer essa conversão. Espera-se que eles lembrem que uma fração também pode ser escrita como uma divisão do numerador pelo denominador. Assim, é interessante retomar a razão $\frac{21}{1\,080}$ (total de medalhas conquistadas pelo Brasil para o total de medalhas distribuídas) e escrevê-la na forma decimal: aproximadamente 0,02.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Organize a turma em duplas e solicite a cada dupla que escreva uma razão que envolva elementos da própria sala de aula ou da escola. A seguir, elencamos alguns exemplos:

- Número de meninas em relação ao total de estudantes da turma.
- Número de professores da escola em relação ao total de estudantes da escola.
- Número de aulas de Matemática na semana em relação ao total de aulas da semana.

Depois, peça aos estudantes de cada dupla que compartilhem com os demais colegas as razões que obtiveram.

Esta atividade permite aos estudantes perceber como o conceito de razão está inserido no contexto deles.

Se considerar oportuno, registre as razões na lousa e oriente os estudantes a representá-las tanto na forma de fração como na forma decimal.

PROPORÇÃO

- Antes de estudar a utilização dos algoritmos em situações-problema, é importante que os estudantes compreendam o conceito de proporcionalidade como uma igualdade entre razões e também o conceito de duas grandezas com relações não proporcionais. Isso evita a falsa impressão de que todas as relações entre grandezas são proporcionais. Um exemplo: a queda livre de corpos em que duas grandezas – o tempo e o espaço percorrido – não são proporcionais; outro exemplo: o perímetro e a área de um quadrilátero.
- Um trabalho integrado com outras componentes curriculares também é recomendado. Em aulas de Geografia, por exemplo, os estudantes podem estudar escala e densidade demográfica; em aulas de Ciências, eles podem resolver alguns problemas com escalas termométricas.
- No exemplo que envolve Renato e Débora, se considerar pertinente, retome o que são frações equivalentes e como é possível obtê-las.

DE OLHO NA BASE

Compreender o conceito de proporcionalidade é essencial para que os estudantes possam resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA17**.

Proporção

Daniel e Maria participaram de dois jogos diferentes de basquete. Durante a partida que Daniel jogou, ele acertou 6 dos 10 arremessos que fez e, na partida em que Maria participou, ela acertou 9 dos 15 arremessos que fez.

Vamos calcular a razão entre a quantidade de acertos e a quantidade total de arremessos dos dois amigos.

- Daniel

$$\frac{\text{quantidade de acertos}}{\text{quantidade total de arremessos}} = \frac{6}{10} \underset{:2}{\overset{:2}{=}} \frac{3}{5}$$

- Maria

$$\frac{\text{quantidade de acertos}}{\text{quantidade total de arremessos}} = \frac{9}{15} \underset{:3}{\overset{:3}{=}} \frac{3}{5}$$

Observe que, ao simplificar as razões, obtivemos a mesma fração: $\frac{3}{5}$. Assim, dizemos que as razões $\frac{6}{10}$ e $\frac{9}{15}$ formam uma **proporção**.

Quatro números não nulos *a*, *b*, *c* e *d*, nessa ordem, formam uma proporção quando:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Lê-se: "*a* está para *b*, assim como *c* está para *d*".

Também podemos representar a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por $a : b = c : d$.

Exemplo

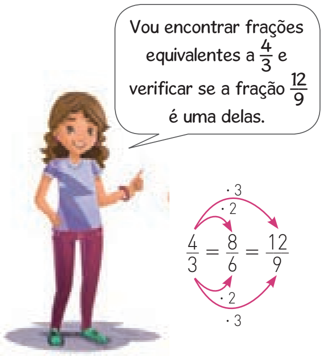
O professor Antônio escreveu as razões $\frac{12}{15}$ e $\frac{4}{3}$ na lousa e pediu a Renato que verificasse se essas razões formam uma proporção. Ele também escreveu as razões $\frac{4}{3}$ e $\frac{12}{9}$ e pediu a Débora que verificasse se essas razões formam uma proporção. Veja como eles fizeram para verificar.

Ilustrações: Danilo Souza/ID/BR

$$\frac{12}{15} \underset{:3}{\overset{:3}{=}} \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5} \neq \frac{4}{3}$$

Então, as razões $\frac{12}{15}$ e $\frac{4}{3}$ não formam uma proporção.



$$\underset{\cdot 3}{\overset{\cdot 3}{\frac{4}{3} \underset{\cdot 2}{\overset{\cdot 2}{=}} \frac{8}{6} = \frac{12}{9}}}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{12}{9}$$

Então, as razões $\frac{4}{3}$ e $\frac{12}{9}$ formam uma proporção.

(IN)FORMAÇÃO

É hora de ensinar proporção

[...]

Qual é a principal falha do ensino da Matemática hoje?

É a proporcionalidade, questão central que envolve tanto frações como multiplicação, está presente em todas as ciências e faz parte do dia a dia de qualquer pessoa, seja no trabalho, seja em casa. O conceito, bastante simples na sua origem, nada mais é do que a relação entre duas variáveis. Para compreendê-lo, fazemos uma relação com a multiplicação, mas a escola não. Lá no início da escolarização, as primeiras noções de proporção deveriam aparecer junto com os conceitos de multiplicação. Mas muitos professores ensinam essa operação básica apenas como uma "adição repetida" de parcelas. E não fazem relação com a noção de proporção. A adição repetida de parcelas não mostra o sentido de proporção que existe por trás dessa conta. [...]

[...]

De que forma, então, se constrói o raciocínio proporcional?

Ele nasce quando se ensina a multiplicação usando o raciocínio de correspondência e se estimula na mente do aluno uma representação para a relação entre duas variáveis. Dou um exemplo. Vai haver uma festa para 15 convidados. Cada um vai ganhar três balões. Quantos balões devem ser comprados? Um problema de multiplicação como esse, resolvido da maneira tradicional, exige do aluno apenas uma conta. Numa concepção mais moderna, é construída uma tabela com uma variável de cada lado. Os estudantes colocam o número de convidados numa coluna e o de balões na outra. Essa prática torna mais fácil perceber a relação fixa entre as variáveis e, ao mesmo tempo, é uma maneira de resolver o problema. Eles podem se enganar, mas ao comparar com os colegas vão perceber que o raciocínio estava correto e que o erro só ocorreu na conta.

[...]

O raciocínio proporcional se desenvolve independentemente da educação formal?

No Recife fizemos um estudo com mestres de obras, muitos sem escolaridade, que mal assinavam o nome. Mas o raciocínio proporcional é tão essencial nos afazeres deles, como preparação da massa e cálculo de área, que todos o utilizavam corretamente. Analisei em detalhes um dos problemas comuns: como pegar uma planta baixa e saber o tamanho real da parede. Aqueles homens não tinham a menor dificuldade porque sabiam que a escala é uma proporção exata entre o tamanho do desenho e o da parede.

Em uma proporção do tipo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com a, b, c e d não nulos, os números a e d são denominados **extremos** da proporção, e os números b e c são denominados **meios** da proporção.

$$\frac{\overset{\text{extremo}}{a}}{\underset{\text{meio}}{b}} = \frac{\overset{\text{meio}}{c}}{\underset{\text{extremo}}{d}} \qquad \text{ou} \qquad \underbrace{a : \overbrace{b = c}^{\text{meios}} : d}_{\text{extremos}}$$

Propriedade fundamental das proporções

Considere quatro números racionais e não nulos a, b, c e d, de modo que eles formem a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Vamos verificar uma relação nessa proporção.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$$

multiplicamos os dois lados da igualdade por *bd*

$$ad = bc$$

Observe que o produto dos extremos (ad) é igual ao produto dos meios (bc). Isso ocorre em todas as proporções.

> Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Ou seja, dados quatro números a, b, c e d não nulos, de modo que eles formem a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:
>
> $$a \cdot d = b \cdot c$$
>
> Essa propriedade é chamada de **propriedade fundamental das proporções**.

Exemplos

A. Vamos verificar se as razões $\frac{2}{10}$ e $\frac{3}{15}$ formam uma proporção.

Utilizando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$\frac{\overset{\text{extremo}}{2}}{\underset{\text{meio}}{10}} = \frac{\overset{\text{meio}}{3}}{\underset{\text{extremo}}{15}} \qquad \overbrace{2 \cdot 15}^{\text{extremos}} = \overbrace{3 \cdot 10}^{\text{meios}}$$

$$30 = 30$$

Como o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, dizemos que as razões $\frac{2}{10}$ e $\frac{3}{15}$ formam uma proporção.

B. Vamos determinar o valor de y na proporção $\frac{3}{2} = \frac{y}{46}$.

$$\frac{3}{2} = \frac{y}{46}$$

$$3 \cdot 46 = 2 \cdot y$$

propriedade fundamental das proporções

$$138 = 2y$$

$$\frac{138}{2} = y$$

$$69 = y$$

- Depois de ler com os estudantes o quadro com a propriedade fundamental das proporções, retome a situação que relaciona a quantidade de acertos com a quantidade total de arremessos e solicite a um estudante que, voluntariamente, a leia em voz alta: seis está para dez assim como três está para cinco.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Proponha aos estudantes que se organizem em pequenos grupos e criem um problema que possa ser solucionado utilizando a propriedade fundamental das proporções. Sugira que os problemas sejam relacionados a situações do dia a dia deles. Ao término da elaboração dos problemas, peça aos grupos que resolvam os problemas de um outro grupo e discutam os resultados obtidos.

Como eles faziam essa conta?

É fascinante. Eu perguntava: o arquiteto marcou aqui 10 metros, mas se esqueceu de indicar o tamanho da outra parede. Como vamos fazer para descobrir? E eles respondiam: "Aqui a senhora faz desse jeito, ó. Vê quanto no papel corresponde a essa metragem. Dá 2,5 centímetros no papel e são 10 metros na realidade. Quanto vale cada centímetro? 10 é quatro vezes 2,5. Então cada meio centímetro vale 2 metros". Determinada a escala, eles passavam a medida para a parede em que não havia a indicação da metragem.

Outros profissionais também fizeram parte da pesquisa?

Sim. Em Pernambuco os pescadores pegam no mar um peixinho chamado rabo-de-fogo e o vendem logo que chegam à praia. Os atravessadores deixam o peixe secar ao sol, salgam e vendem na ≠feira de Caruaru. Eu perguntava como faziam para determinar o preço. Eles respondiam: "A senhora tem de saber quanto é que quebra o peixe". O que eles queriam dizer é que do peixe fresco para o salgado o peso diminui porque há perda de água. Então, é necessário saber de quanto é a "quebra" para vender. Tantos quilos de peixe fresco resultam em tantos quilos do salgado. Isso é proporção.

Qual era a meta da pesquisa?

Compreender a intuição por trás do raciocínio, antes da educação formal, porque as aulas devem ser construídas com base no que a pessoa já sabe. Se alguém tem uma maneira de abordar certos problemas e recebe uma orientação que não acompanha esse esquema, fica com duas formas de pensar. Ou seja, tem grandes chances de se perder. Mas, se aprender com base no raciocínio que já possui, enriquece o conhecimento, ganha instrumentos para a vida. O aluno toma consciência do próprio pensamento e começa a utilizá-lo de maneira mais apurada, mais generalizada.

[...]

FALZETTA, R. É hora de ensinar proporção. *Nova Escola*, 1º abr. 2003. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/958/e-hora-de-ensinar-proporcao. Acesso em: 8 jul. 2022.

- No exemplo **C**, pergunte aos estudantes qual é a relevância da informação de que os pedreiros trabalham no mesmo ritmo. Observe se eles compreendem que sem essa informação não seria possível obter uma proporção. Ao término do trabalho com esse exemplo, é possível retomar a última atividade da abertura da unidade e explorar com os estudantes a importância da informação "no mesmo ritmo" aqui e não lá.
- A proporção apresentada no exemplo **D** refere-se à ideia de escala. Se considerar conveniente, aproveite a oportunidade para retomar com os estudantes a notação usada em escalas. Em seguida, disponibilize mapas e plantas de habitações, que podem ser facilmente obtidos na internet ou em propagandas de venda de imóveis. Se possível, apresente também uma maquete. Elabore, então, uma atividade para verificar as escalas utilizadas.
- Informe que a escala é utilizada para denotar a razão (relação) entre as dimensões do modelo e as do objeto real. Comente que antes da construção de carros de corrida e de aviões, por exemplo, são fabricados modelos e maquetes em escala para serem colocados em túneis de vento; assim, várias situações reais podem ser simuladas e verificadas, para as correções necessárias no desempenho desses objetos.
- Observe como os estudantes resolvem o item **d** da atividade **6**. É possível que alguns deles esqueçam de utilizar os parênteses e, então, acabem obtendo uma reposta incorreta. Caso eles apresentem o valor de *a* na forma de fração, considere a resposta correta.
- Verifique como os estudantes resolvem a atividade **7**. Eles podem tanto substituir *x* por 7 nas proporções e observar se as frações são equivalentes como utilizar a propriedade fundamental das proporções e comparar o valor obtido para *x* com 7.

C. Alfredo contratou 6 pedreiros para construir um muro de 34 m². Se todos os pedreiros trabalham no mesmo ritmo, de quantos pedreiros ele precisará para construir um muro de 102 m² no mesmo prazo?

Como os pedreiros trabalham no mesmo ritmo, a razão entre o número de pedreiros e a quantidade de muro que eles constroem no mesmo prazo é constante. Assim, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\frac{6}{34} = \frac{x}{102}$$

propriedade fundamental das proporções

$$6 \cdot 102 = 34 \cdot x$$

$$612 = 34x$$

$$\frac{612}{34} = x$$

$$18 = x$$

Portanto, Alfredo precisará de 18 pedreiros para construir um muro de 102 m² no mesmo prazo.

D. A Torre Eiffel, em Paris, na França, tem cerca de 320 metros de medida de altura. Juliana montou uma miniatura da Torre Eiffel de modo que cada 1 centímetro da miniatura corresponde a 800 centímetros da Torre Eiffel. Qual é a medida da altura da miniatura?

As medidas da altura da Torre Eiffel e da altura da miniatura (*x*) devem ser proporcionais. Assim, temos:

$$\frac{1}{800} = \frac{\text{medida da altura da miniatura}}{\text{medida da altura da Torre Eiffel}}$$

$$\frac{1}{800} = \frac{x}{32\,000}$$

propriedade fundamental das proporções

$$800 \cdot x = 1 \cdot 32\,000$$

$$800 \cdot x = 32\,000$$

$$x = \frac{32\,000}{800}$$

$$x = 40$$

Portanto, a medida da altura da miniatura é 40 cm.

4. a) 2 está para 5, assim como 4 está para 10; extremos: 2 e 10; meios: 4 e 5.
b) 1 está para 7, assim como 3 está para 21; extremos: 1 e 21; meios: 3 e 7.
c) 4 está para 3, assim como 20 está para 15; extremos: 4 e 15; meios: 20 e 3.
d) 10 está para 25, assim como 6 está para 15; extremos: 10 e 15; meios: 6 e 25.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

4. Escreva como se lê cada proporção a seguir e identifique seus extremos e seus meios.

a) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

b) $\frac{1}{7} = \frac{3}{21}$

c) $\frac{4}{3} = \frac{20}{15}$

d) $\frac{10}{25} = \frac{6}{15}$

5. Verifique se as razões a seguir formam uma proporção.

a) $\frac{9}{3}$ e $\frac{12}{4}$ **Formam.**

b) $\frac{15}{8}$ e $\frac{18}{6}$ **Não formam.**

c) $\frac{0,5}{0,4}$ e $\frac{2}{4}$ **Não formam.**

d) $\frac{50}{30}$ e $\frac{15}{9}$ **Formam.**

6. d) $a = 2,825$

6. Determine o valor desconhecido nas proporções a seguir.

a) $\frac{3,4}{1,7} = \frac{80}{n}$ $n = 40$

b) $\frac{m}{35} = \frac{70}{5}$ $m = 490$

c) $\frac{2x}{5} = \frac{16}{5}$ $x = 8$

d) $\frac{2a - 6}{2,3 - a} = \frac{4}{6}$

7. Em quais das proporções a seguir o valor de *x* é 7? **a, c e d.**

a) $\frac{1}{3} = \frac{x}{21}$

b) $\frac{2}{5} = \frac{x}{20}$

c) $\frac{x}{10} = \frac{70}{100}$

d) $\frac{x}{8} = \frac{49}{56}$

OUTRAS FONTES

Abdounur, O. J. Uma abordagem histórico/didática de analogias envolvendo razões e proporções em contexto musical: um ensaio preliminar. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v. 14, n. 3, p. 386-397, 2012. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/12767. Acesso em: 14 fev. 2022.

Esse artigo busca valorizar, sob uma perspectiva educacional, o potencial do pensamento analógico, considerando para isso características estruturais peculiares presentes no desenvolvimento histórico de razão e proporção matemáticas, características essas que se evidenciam quando tais conceitos são tratados em determinados contextos musicais.

Outras propriedades das proporções

Vamos estudar duas outras propriedades das proporções.

1ª propriedade

Dados *a*, *b*, *c* e *d* não nulos, temos:

- se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então: $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ e $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
- se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então: $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$ e $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

Exemplo

André trabalha em um restaurante e é responsável por preparar o suco concentrado. Ele segue esta proporção: para cada 6 partes de água, acrescenta 1 parte de suco concentrado. O reservatório que armazena o suco pronto tem capacidade para 84 litros e está completamente cheio. Quantos litros de água há no reservatório?

Indicando por x a quantidade de litros de suco concentrado e por y a quantidade de litros de água nesse reservatório, temos $x + y = 84$ (volume total de suco no reservatório).

Escrevendo a proporção entre a quantidade de litros de suco concentrado e a quantidade de litros de água nesse reservatório, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{6}$$

Como sabemos o valor de $x + y$, aplicamos a 1ª propriedade das proporções:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{x+y}{y} = \frac{1+6}{6}$$

1ª propriedade das proporções

$$\frac{84}{y} = \frac{7}{6}$$

$$y \cdot 7 = 84 \cdot 6$$

propriedade fundamental das proporções

$$y \cdot 7 = 504$$

$$y = \frac{504}{7}$$

$$y = 72$$

Portanto, do total de 84 litros de suco no reservatório, há 72 litros de água.


Danilo Souza/ID/BR

PARA EXPLORAR

Matemática na cozinha. Série *Matemática em toda parte*, da TV Escola.

O vídeo mostra como as receitas são pensadas, usando a quantidade correta de ingredientes. Além disso, discute termos como razão e proporção.

Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=gbb1hS4rQLE. Acesso em: 26 abr. 2022.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

8. Se $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, calcule as razões a seguir.

a) $\frac{a+b}{a}$ $\frac{5}{2}$

b) $\frac{a+b}{b}$ $\frac{5}{3}$

c) $\frac{a-b}{a}$ $-\frac{1}{2}$

d) $\frac{a-b}{b}$ $-\frac{1}{3}$

9. Sabendo que $x + y = 15$, determine x e y na proporção $\frac{x}{y} = \frac{3}{6}$. $x = 5$ e $y = 10$.

- A seguir, apresentamos a demonstração da primeira propriedade das proporções. Se considerar pertinente e adequado, mostre-a aos estudantes. Trabalhar esse tipo de demonstração com eles é uma oportunidade para que desenvolvam o raciocínio dedutivo.

Considerando a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com *a*, *b*, *c* e *d* não nulos, valem as seguintes relações:

I. $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$

Demonstração:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a \cdot d = b \cdot c$$

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{c}{c} + \frac{d}{c}$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

II. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

Demonstração:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

A demonstração para a subtração é análoga.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Para complementar o estudo da primeira propriedade das proporções, proponha aos estudantes atividades nas quais eles possam aplicar a propriedade de maneira contextualizada. A seguir, apresentamos uma atividade possível.

1. Em um borboletário, há borboletas azuis e borboletas brancas. A razão entre o número de borboletas azuis e o número de borboletas brancas é de 3 para 5. Sabendo que nesse borboletário existem 48 borboletas, quantas são azuis e quantas são brancas?

Indicando por x a quantidade de borboletas azuis e por y a quantidade de borboletas brancas, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} \quad \text{e} \quad x + y = 48$$

Usando a primeira propriedade das proporções, temos:

$$\frac{x+y}{y} = \frac{3+5}{5}$$

$$\frac{48}{y} = \frac{3+5}{5}$$

Usando a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$48 \cdot 5 = y \cdot (3 + 5)$$

$$48 \cdot 5 = y \cdot 8$$

$$240 = 8y$$

$$\frac{240}{8} = y$$

$$30 = y$$

Como $x + y = 48$ e $y = 30$, temos:

$$x + 30 = 48$$

$$x = 18$$

Portanto, nesse borboletário, há 18 borboletas azuis e 30 borboletas brancas.

- Leia com os estudantes a segunda propriedade. É importante que eles lembrem de que para aplicá-la não se adicionam frações, pois a soma de frações é diferente do exposto nessa propriedade. Ao adicionar os numeradores e os denominadores de uma proporção, obtemos uma nova razão, equivalente às razões que formam a proporção.
- Por exemplo, na proporção $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$, adicionamos os numeradores e os denominadores da proporção; obtemos $\frac{2+4}{3+6}=\frac{6}{9}$, que é uma razão equivalente às duas primeiras. Já na adição das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$, obtemos: $\frac{4+4}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$, que não é uma fração equivalente às frações da adição.
- A seguir, apresentamos a demonstração da segunda propriedade das proporções. Se considerar pertinente e adequado, mostre-a aos estudantes.

Considerando a proporção $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, com a, b, c e d não nulos, valem as seguintes relações:

I. $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Demonstração:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
$$a\cdot d=b\cdot c$$
$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$
$$\frac{a}{c}+1=\frac{b}{d}+1$$
$$\frac{a}{c}+\frac{c}{c}=\frac{b}{d}+\frac{d}{d}$$
$$\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$$
$$d(a+c)=c(b+d)$$
$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

A demonstração para a subtração é análoga.

2ª propriedade

Dados a, b, c e d não nulos, temos:

- se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, então: $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
- se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, então: $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Exemplo

Antônio, Bruno e Camila abriram juntos uma empresa e investiram R\$ 5 000,00, R\$ 7 000,00 e R\$ 8 000,00, respectivamente. Depois de certo tempo, eles obtiveram um lucro de R\$ 4 200,00. A cada sócio coube uma parte do lucro proporcional ao investimento. Quanto cada um deles recebeu do lucro?

Indicando por a o valor que Antônio recebeu, por b o valor que Bruno recebeu e por c o valor que Camila recebeu, temos a seguinte proporção:

$$\frac{a}{5\,000}=\frac{b}{7\,000}=\frac{c}{8\,000}$$

De acordo com a 2ª propriedade das proporções, podemos escrever:

$$\frac{a}{5\,000}=\frac{b}{7\,000}=\frac{c}{8\,000}=\frac{a+b+c}{5\,000+7\,000+8\,000}$$
$$\frac{a}{5\,000}=\frac{b}{7\,000}=\frac{c}{8\,000}=\frac{4\,200}{20\,000}=\frac{21}{100}$$

Assim:

- Antônio

$$\frac{a}{5\,000}=\frac{21}{100}$$
$$a\cdot 100=5\,000\cdot 21$$
$$100a=105\,000$$
$$a=\frac{105\,000}{100}$$
$$a=1\,050$$

- Bruno

$$\frac{b}{7\,000}=\frac{21}{100}$$
$$b\cdot 100=7\,000\cdot 21$$
$$100b=147\,000$$
$$b=\frac{147\,000}{100}$$
$$b=1\,470$$

- Camila

$$\frac{c}{8\,000}=\frac{21}{100}$$
$$c\cdot 100=8\,000\cdot 21$$
$$100c=168\,000$$
$$c=\frac{168\,000}{100}$$
$$c=1\,680$$

Portanto, Antônio recebeu R\$ 1 050,00; Bruno, R\$ 1 470,00; e Camila, R\$ 1 680,00.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

10. Use as informações para determinar os valores de a e b em cada item.

a) $a+b=28$; $\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=\frac{a+b}{5+3}$ **$a=17{,}5$; $b=10{,}5$**

b) $a-b=182$; $\frac{a}{10}=\frac{b}{3}=\frac{a-b}{10-3}$ **$a=260$; $b=78$**

11. Ana, Lucas e Liz investiram em uma sociedade R\$ 6 000,00, R\$ 10 000,00 e R\$ 4 000,00, respectivamente. Com a decisão de encerrar a sociedade, resolveram distribuir proporcionalmente o prejuízo de R\$ 4 000,00 entre os sócios. Qual foi o prejuízo de cada sócio após o encerramento da sociedade? Com quanto dinheiro cada um ficou depois que a sociedade foi desfeita? **Os prejuízos atribuídos a Ana, a Lucas e a Liz são R\$ 1 200,00, R\$ 2 000,00 e R\$ 800,00, respectivamente. Ana saiu com R\$ 4 800,00; Lucas, com R\$ 8 000,00; e Liz, com R\$ 3 200,00.**

DE OLHO NA BASE

Ao observar a demonstração de propriedades ou ao tentar demonstrá-las, os estudantes exercitam a curiosidade intelectual e a investigação, utilizando a imaginação e a criatividade para elaborar e testar hipóteses, o que favorece o desenvolvimento da **competência geral 2**.

Sequências diretamente ou inversamente proporcionais

Considere as sequências a seguir.

2, 3, 4 4, 6, 8

Vamos calcular as razões entre os termos correspondentes nas duas sequências. Observe.

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Como as razões entre os termos correspondentes nas duas sequências são sempre iguais, dizemos que os termos da primeira sequência são **diretamente proporcionais** aos termos da segunda sequência. A razão entre os termos correspondentes nas duas sequências é chamada de **razão** ou **fator de proporcionalidade**. Nesse exemplo, dizemos que $\frac{1}{2}$ é a razão de proporcionalidade.

> Os números racionais não nulos da sequência (a_1, a_2, ..., a_n) são **diretamente proporcionais** aos números não nulos correspondentes da sequência (b_1, b_2, ..., b_n) quando:
>
> $$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k$$
>
> em que k é a razão ou o fator de proporcionalidade.

Agora, considere estas outras sequências.

1, 2, 4 8, 4, 2

Ao calcular as razões entre um termo da primeira sequência e o inverso do termo correspondente na segunda sequência, obtemos sempre o mesmo valor. Veja.

$$\frac{1}{\frac{1}{8}} = 8 \qquad \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8 \qquad \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

Dizemos que os termos da primeira sequência são **inversamente proporcionais** aos termos da segunda sequência. A razão entre os termos da primeira sequência e os inversos dos termos correspondentes da segunda sequência é chamada de **razão** ou **fator de proporcionalidade**. Nesse exemplo, dizemos que 8 é a razão de proporcionalidade.

Observe que o produto dos termos correspondentes nas duas sequências é sempre o mesmo.

$$1 \cdot 8 = 8 \qquad 2 \cdot 4 = 8 \qquad 4 \cdot 2 = 8$$

> Os números racionais não nulos da sequência (a_1, a_2, ..., a_n) são **inversamente proporcionais** aos números não nulos correspondentes da sequência (b_1, b_2, ..., b_n) quando:
>
> $$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = ... = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}} = k \text{ ou } a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = ... = a_n \cdot b_n = k$$
>
> em que k é a razão ou o fator de proporcionalidade.

SEQUÊNCIAS DIRETAMENTE OU INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

- Antes de iniciar o conteúdo desta página, retome com os estudantes o que é uma sequência. Na unidade anterior, eles foram apresentados a esse conceito: uma sequência é uma lista ordenada de elementos.
- Alguns estudantes podem sentir dificuldade em compreender a expressão “termos correspondentes”. Caso isso aconteça, esclareça que se trata do primeiro termo da primeira sequência com o primeiro termo da segunda sequência, do segundo termo da primeira sequência com o segundo termo da segunda sequência, do terceiro termo da primeira sequência com o terceiro termo da segunda sequência e assim sucessivamente.
- Leia com os estudantes os boxes de contorno rosa para verificar se eles compreendem as notações envolvidas. Explique a eles que a variável *n* indica a posição do termo na sequência.
- No par de sequências inversamente proporcionais, observe se os estudantes percebem que, enquanto os termos da primeira “aumentam”, os termos da segunda “diminuem”.
- Alguns estudantes podem não se lembrar da ideia de número inverso e de como dividir um número inteiro por uma fração. Assim, retome essas ideias com eles com o intuito de esclarecer possíveis dúvidas.
- Apesar de os exemplos do Livro do Estudante não trazerem sequências cujos termos correspondam a números negativos, comente com os estudantes que é possível observar relações de proporcionalidade em sequências cujos termos sejam negativos. Ilustre essa afirmação com exemplos, como o apresentado a seguir.

  Considere as sequências: −5, −10, −50 e 5, 10, 50. Observe que essas sequências são diretamente proporcionais, pois:

  $$-\frac{5}{5} = -\frac{10}{10} = -\frac{50}{50} = -1$$

  Agora, considere as sequências: −5, −10, −20 e 100, 50, 25. Observe que essas sequências são inversamente proporcionais, pois:

  $$-\frac{5}{\frac{1}{100}} = -\frac{10}{\frac{1}{50}} = -\frac{20}{\frac{1}{25}} = -500$$

GRANDEZAS DIRETAMENTE OU INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

- Neste tópico, os estudantes serão apresentados a algumas situações que envolvem grandezas diretamente ou inversamente proporcionais e a situações nas quais as grandezas envolvidas não são proporcionais.

DE OLHO NA BASE

Compreender a variação de proporcionalidade (direta ou inversa) entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA17**.

- Observe se os estudantes conseguem identificar com clareza quais são as grandezas envolvidas na situação **1**. Para isso, leia o enunciado com eles e pergunte o que está sendo medido ou contado. Espera-se que eles percebam que a quantidade de folhas pode ser contada e que o tempo gasto para imprimi-las pode ser medido.
- A utilização de quadros e/ou tabelas pode ser bastante explorada para evidenciar o comportamento das grandezas e facilitar a identificação da constante de proporcionalidade.
- É importante que os estudantes compreendam que é possível utilizar variáveis para representar a relação entre duas grandezas. Observe se eles compreendem que as variáveis dependem uma da outra e que, ao atribuirmos um valor para uma delas, a outra torna-se uma incógnita e podemos determinar seu valor.

DE OLHO NA BASE

Compreender a ideia de variável, representada por letra, para expressar a relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita, desenvolve a habilidade **EF07MA13**.


João Picoli/ID/BR

MENOS PAPEL, MAIS SUSTENTABILIDADE

Além da economia de dinheiro, tempo e espaço que a redução do uso de papel representa, existe a questão ambiental envolvida nesta escolha. Para a produção de uma tonelada de papel, são necessárias 17 árvores e 115 mil litros de água. Além disso, 16% dos resíduos sólidos em aterros são formados por papel, o que contribui para a liberação de gás metano.

A tinta usada nas impressoras também envolve o consumo de recursos naturais e uso de materiais tóxicos e poluentes. O transporte, as embalagens e o descarte do material também contribuem para aumentar a pegada ambiental do ciclo de vida do papel.

Natasha Olsen. Reduzir o uso do papel poupa tempo, dinheiro e recursos naturais. *Ciclo Vivo*, 6 ago. 2021. Disponível em: https://ciclovivo.com.br/vida-sustentavel/minimalismo/reduzir-papel-poupa-tempo-dinheiro-recursos-naturais/. Acesso em: 26 abr. 2022.

- **Em duplas, pesquisem quais atitudes podemos tomar para imprimir apenas o indispensável. Depois, elaborem e compartilhem as informações encontradas com a turma. Montem um cartaz e coloquem no mural da escola para conscientizar outros colegas sobre esse assunto.**

Grandezas diretamente ou inversamente proporcionais

Grandeza é tudo o que pode ser medido ou contado. Comprimento, massa, tempo, superfície, velocidade e idade são alguns exemplos de grandezas.

No dia a dia, são frequentes as situações que envolvem duas ou mais grandezas, e algumas vezes é possível perceber relações entre os valores dessas grandezas.

Acompanhe as situações a seguir, nas quais vamos investigar algumas dessas relações.

Situação 1

Uma impressora imprime 100 folhas em 5 minutos. Considerando que o rendimento dessa impressora se mantenha constante, ela imprimirá 200 folhas em 10 minutos, 300 folhas em 15 minutos, 400 folhas em 20 minutos e assim por diante.

Dizemos que essas grandezas são **diretamente proporcionais**, pois, ao dobrar a quantidade de folhas a serem impressas, o tempo também dobra; ao triplicar a quantidade de folhas a serem impressas, o tempo também triplica; e assim por diante.

Quantidade de folhas	100	200	300	400
Tempo gasto (em minuto)	5	10	15	20

Note que a razão entre os valores correspondentes de cada uma das grandezas é sempre a mesma.

$$\frac{\text{quantidade de folhas}}{\text{tempo gasto}} = \frac{100}{5} = \frac{200}{10} = \frac{300}{15} = \frac{400}{20} = 20$$

Assim, sendo x o valor correspondente à quantidade de folhas e y o valor correspondente ao tempo gasto, podemos escrever:

$$\frac{x}{y} = 20 \quad \text{ou} \quad x = 20y$$

Observe que utilizamos as letras x e y para expressar a relação entre as duas grandezas. Além disso, perceba que essas variáveis dependem uma da outra. Ou seja, ao atribuir um valor para uma delas, conseguimos determinar o valor da outra.

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando a razão entre os valores correspondentes das duas grandezas é sempre a mesma.

Responsabilidade

O boxe *Menos papel, mais sustentabilidade* busca desenvolver o valor responsabilidade diante do consumo: consumo responsável e racional dos produtos. Se julgar necessário para mais informações a respeito do assunto, consulte o material *Manual de educação para o consumo sustentável*, disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/publicacao8.pdf (acesso em: 8 jul. 2022). Essa reflexão contribui para desenvolver o **Tema Contemporâneo Transversal** Educação para o Consumo, que pertence à macroárea **Meio Ambiente**.

Combine com os estudantes uma data para que eles tragam a pesquisa para a sala de aula e permita que utilizem um tempo da aula para listar algumas atitudes que podem contribuir para desenvolver a consciência na hora de imprimir.

Em seguida, organize uma roda de conversa para que as duplas compartilhem as informações encontradas. Se considerar pertinente, registre na lousa os tópicos que os estudantes forem falando. Aproveite o momento para incentivar o respeito mútuo e a cooperação. Permita que as duplas complementem as informações umas das outras.

Apresentamos a seguir algumas atitudes que contribuem para a impressão consciente:

- Imprima documentos frente e verso e no modo econômico.
- Evite imprimir documentos apenas para revisá-los.
- Utilize o verso das folhas como rascunho.
- Antes de imprimir, avalie se é realmente necessária a impressão.

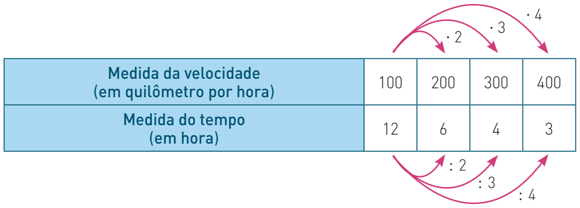
DE OLHO NA BASE

Incentivar os estudantes a agir, pessoal e coletivamente, com responsabilidade, tomando decisões com base em princípios éticos e sustentáveis, contribui para o desenvolvimento da **competência geral 10**.

Situação 2

Um trem com velocidade de 100 quilômetros por hora leva 12 horas para percorrer certa distância. Se a velocidade do trem fosse de 200 quilômetros por hora, ele levaria 6 horas para percorrer a mesma distância; se fosse de 300 quilômetros por hora, levaria 4 horas; se fosse de 400 quilômetros por hora, levaria 3 horas; e assim por diante.

Dizemos que essas grandezas são **inversamente proporcionais**, pois, ao dobrarmos a medida da velocidade, a medida do tempo diminui pela metade; ao triplicarmos a medida da velocidade, a medida do tempo será reduzida à terça parte; e assim sucessivamente.



Medida da velocidade (em quilômetro por hora)	100	200	300	400
Medida do tempo (em hora)	12	6	4	3

Note que a razão entre a medida de uma das grandezas e o inverso da medida correspondente da outra grandeza é sempre a mesma.

$$\frac{\text{velocidade}}{\frac{1}{\text{tempo}}} = \frac{100}{\frac{1}{12}} = \frac{200}{\frac{1}{6}} = \frac{300}{\frac{1}{4}} = \frac{400}{\frac{1}{3}} = 1\,200$$

Assim, sendo x a medida correspondente à grandeza velocidade e y a medida correspondente à grandeza tempo, podemos escrever:

$$\frac{x}{\frac{1}{y}} = 1\,200 \quad \text{ou} \quad x = 1\,200 \cdot \frac{1}{y} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1\,200}{y}$$

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando a razão entre os valores da primeira grandeza e os inversos dos valores correspondentes da segunda grandeza é sempre a mesma.

Situação 3

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), um menino de 6 anos mede, em média, 116,0 cm de altura; um menino de 7 anos, 121,7 cm; e um menino de 8 anos, 127,3 cm.

Ao observar as medidas das grandezas idade e altura, é possível notar que ambos aumentam. Mas será que esse aumento é diretamente proporcional? Vamos verificar.

$$\frac{6}{116{,}0} \neq \frac{7}{121{,}7} \neq \frac{8}{127{,}3} \qquad 0{,}051... \neq 0{,}057... \neq 0{,}062...$$

Como a razão entre as medidas correspondentes de cada uma das grandezas não é sempre a mesma, as grandezas idade e altura não são proporcionais.

- Leia a situação **2** com os estudantes e, antes de analisá-la, proponha a eles que realizem uma atividade. Considere, por exemplo, a distância entre uma parede da sala de aula à parede oposta. Solicite a um estudante que ande essa distância. Marque com um cronômetro a medida do tempo que esse estudante gastou. Em seguida, peça a outro estudante que percorra a mesma distância, mas correndo. Registre a medida do tempo gasto por ele. Depois, escreva na lousa as duas medidas registradas. Espera-se que eles percebam que a medida do tempo do estudante que percorreu a distância andando é maior que a medida do estudante que percorreu a distância correndo. Reforce que nas duas situações a medida da distância foi a mesma. A ideia é que os estudantes percebam que, quanto maior for a velocidade para percorrer uma distância, menor será o tempo gasto.
- Se considerar pertinente, incentive os estudantes a verificar que não se trata de grandezas diretamente proporcionais.

$$\frac{100}{12} \simeq 8{,}33$$

$$\frac{200}{6} \simeq 33{,}33$$

$$\frac{300}{4} = 75$$

$$\frac{400}{3} \simeq 133{,}33$$

- Assim como foi feito para as grandezas diretamente proporcionais, verifique se os estudantes compreendem o uso de variáveis para representar a relação entre as grandezas velocidade e tempo. Reforce que, ao atribuir um valor para uma das variáveis, é possível determinar o valor da outra.
- Se possível, permita aos estudantes que vivenciem a situação **3**. Faça na lousa uma lista com a idade e a respectiva medida da altura de cada um deles. É possível que muitos deles tenham a mesma idade, mas alturas diferentes. Experiências como essa auxiliam na compreensão e na apreensão do conteúdo.

- Leia a situação **4** com os estudantes. Ela traz um contexto da Geometria. Espera-se que os estudantes percebam que: quanto maior for o lado do quadrado, maior será a sua área. Entretanto, a variação entre essas grandezas não é proporcional.
- Reserve um tempo para que os estudantes leiam e realizem a reflexão proposta no boxe *Pare e reflita*. Depois, faça registros no quadro para que todos compreendam as comparações.

Medida do lado (cm)	Medida do perímetro (cm)
2	8
3	12
5	20

Como $\frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, dizemos que a medida do lado de um quadrado e a medida de seu perímetro são diretamente proporcionais.

Por fim, oriente os estudantes a representar a variação da medida do lado do quadrado e seu perímetro usando variáveis.

DE OLHO NA BASE

Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

- Observe como os estudantes resolvem a atividade **14**. Eles ainda não conhecem o procedimento da regra de três. Espera-se que eles percebam que a quantidade de barras de chocolate produzidas e o tempo são proporcionais. Assim, no item **a**, por exemplo, eles podem pensar na seguinte proporção:

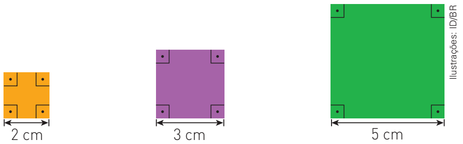
$$\frac{400}{5} = \frac{600}{?}$$

Depois, eles podem utilizar o conhecimento que possuem sobre frações equivalentes para determinar a medida de tempo necessário para produzir as 600 barras de chocolate.

$$\underset{\cdot\,1{,}5}{\overset{\cdot\,1{,}5}{\frac{400}{5} = \frac{600}{7{,}5}}}$$

Situação 4

Veja a sequência de quadrados.



Ilustrações: ID/BR

O quadro a seguir relaciona a medida dos lados de cada quadrado à medida de sua área.

Medida do lado (em cm)	Medida da área (em cm^2)
2	4
3	9
5	25

Observe que as medidas das duas grandezas aumentam de uma linha para a outra. Mas será que esse aumento é proporcional? Vamos calcular as razões entre a medida do lado do quadrado e a medida de sua área e verificar o que acontece.

$$\frac{2}{4} \neq \frac{3}{9} \neq \frac{5}{25} \qquad 0{,}5 \neq 0{,}333... \neq 0{,}2$$

Portanto, a medida do lado de um quadrado e a medida de sua área não são proporcionais.

12. **a) Diretamente proporcionais; $k = \frac{1}{20}$.**
b) Inversamente proporcionais; $k = 126$.
c) Inversamente proporcionais; $k = 440$.
d) Diretamente proporcionais; $k = \frac{1}{2}$.

Espera-se que os estudantes percebam que a medida do lado e a medida do perímetro são diretamente proporcionais.

PARE E REFLITA

Reúna-se com um colega. Usando as figuras da situação 4, verifiquem se a medida do lado do quadrado e a medida de seu perímetro são proporcionais.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

12. Verifique se os números da primeira sequência são direta ou inversamente proporcionais aos números da segunda sequência. Depois, determine a constante de proporcionalidade.
- a) (1, 3, 5, 7) e (20, 60, 100, 140).
- b) (2, 3, 7, 9) e (63, 42, 18, 14).
- c) (5, 8, 10, 11) e (88, 55, 44, 40).
- d) (1,5; 3,0; 4,5) e (3, 6, 9).

13. Identifique qual par de grandezas a seguir é inversamente proporcional. **Alternativa a.**
- a) O tempo para colher frutas em um pomar e o número de pessoas que farão a colheita, todas com a mesma produtividade.
- b) A quantidade de farinha para fazer um bolo e a quantidade de bolos.
- c) A quantidade de músicos tocando uma mesma música e o tempo gasto para tocar a música.

14. c) São diretamente proporcionais. A justificativa é pessoal.

14. A fábrica em que Diego trabalha produz 400 barras de chocolate em 5 horas. Considerando que o rendimento da produção seja constante:
- a) quanto tempo será necessário para produzir 600 barras? **7,5 horas.**
- b) quantas barras de chocolate serão produzidas em duas horas? **160 barras.**
- c) o tempo e o número de barras de chocolate são direta ou inversamente proporcionais? Explique como você chegou a essa conclusão.

15. Um concurso ofereceu um prêmio de R$ 2 600,00 para os três primeiros candidatos que conseguissem resolver um desafio. O prêmio foi dividido entre os vencedores em partes inversamente proporcionais ao tempo que cada um deles gastou para solucionar o desafio. Com um colega, calculem o prêmio que coube a cada um dos vencedores, sabendo que o primeiro colocado levou 8 minutos para resolver o desafio; o segundo, 12 minutos; e o terceiro, 16 minutos.
O primeiro colocado recebeu R$ 1 200,00; o segundo, R$ 800,00; e o terceiro, R$ 600,00.

Regra de três

Muitas situações que envolvem grandezas diretamente ou inversamente proporcionais podem ser resolvidas de maneira prática com um procedimento chamado **regra de três.**

Esse procedimento é, na verdade, um processo prático para resolver problemas de proporcionalidade que envolvem quatro valores, dos quais conhecemos apenas três. O outro valor, a incógnita, é determinado com base nos outros três já conhecidos.

As situações a seguir foram resolvidas usando esse procedimento. Vamos analisá-las.

Situação 1

Para a reforma de sua casa, Otávio comprou 12 metros de fio por R$ 25,00. Alguns dias depois, voltou à loja de materiais de construção para comprar mais 42 metros desse fio. Sabendo que o preço do metro do fio não teve alteração, quanto Otávio gastou na segunda compra?

A quantidade de fio e o valor a ser pago são grandezas diretamente proporcionais, pois a quantidade de fio comprada e o valor a ser pago por essa quantidade variam na mesma razão.

Indicando por x o preço a ser pago por 42 metros de fio, podemos organizar as informações da situação em um quadro. Veja.

	Quantidade de fio (em metro)	Valor a ser pago (em real)
primeira compra →	12	25
segunda compra →	42	x

Como as grandezas são diretamente proporcionais, podemos escrever a seguinte proporção:

$$\underset{\text{razão entre as quantidades de fios}}{\frac{12}{42}} = \underset{\text{razão entre os preços}}{\frac{25}{x}}$$

De acordo com a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$\frac{12}{42} = \frac{25}{x}$$

$$12 \cdot x = 42 \cdot 25$$

$$12x = 1\,050$$

$$x = \frac{1\,050}{12}$$

$$x = 87{,}5$$

João Picoli/ID/BR

Portanto, Otávio gastou R$ 87,50 na segunda compra.

REGRA DE TRÊS

- Neste momento, os estudantes serão apresentados a uma ferramenta comumente utilizada para resolver problemas que envolvem proporcionalidade.
- Não apresente imediatamente aos estudantes como funciona a “ferramenta” regra de três. É importante que eles compreendam o que ocorre e não que eles a considerem uma simples sequência de regras que resolvem problemas de proporcionalidade.
- Sempre que possível, incentive os estudantes a utilizar amplamente recursos e estratégias pessoais de resolução de problemas. Evite a automatização de procedimentos, procurando enriquecer o raciocínio proporcional presente na relação entre as grandezas.
- Explique aos estudantes que, embora algumas situações pareçam ter sua resolução associada a uma regra de três, em uma melhor avaliação, percebe-se que não são proporções. É o caso da conhecida “pegadinha”: se 1 gato come 1 rato em 1 minuto, quanto tempo é necessário para que 100 gatos comam 100 ratos? Na verdade, 100 gatos comeriam 100 ratos em 1 minuto.
- Leia a situação **1** com os estudantes e faça intervenções caso perceba que eles apresentam dificuldade em compreender o que é feito em cada etapa. Depois de construir o quadro, ao montar a proporção, alguns estudantes podem sugerir que a seguinte proporção seja formada:

$$\frac{12}{25} = \frac{42}{x}$$

Ela corresponde à igualdade entre a razão referente à primeira compra e a razão referente à segunda compra. Caso isso não aconteça, pergunte aos estudantes se acreditam que essa proporção é válida e solicite que justifiquem como pensaram. Observe:

$$\frac{12}{25} = \frac{42}{x}$$

$$12 \cdot x = 25 \cdot 42$$

$$12x = 1\,050$$

$$x = \frac{1\,050}{12}$$

$$x = 87{,}5$$

- É possível que os estudantes sintam dificuldade em identificar se as grandezas envolvidas na situação **2** são diretamente ou inversamente proporcionais. Assim, se possível, reserve um espaço para que eles realizem uma experiência e vivenciem a situação. Para isso, providencie com antecedência um balde, um copo descartável de 200 mL e uma garrafa PET de 500 mL. Explique aos estudantes que o objetivo é encher o balde completamente. Observe se eles percebem que é possível realizar essa tarefa usando os dois recipientes (o copo e a garrafa) e que a quantidade de vezes em que o copo deve ser enchido é maior que a quantidade de vezes em que a garrafa deve ser enchida. Depois, retome a situação apresentada e verifique se os estudantes a compreendem.
- Antes de dar continuidade ao texto do Livro do Estudante, quando terminar o estudo da situação **2**, estimule os estudantes a refletir sobre as duas situações apresentadas. Incentive-os a verificar quais procedimentos foram parecidos na resolução das duas etapas, como a identificação das variáveis, a análise para determinar se as grandezas envolvidas eram diretamente ou inversamente proporcionais, a montagem do quadro, etc.
- É possível que alguns estudantes não tenham percebido do que, efetivamente, se trata a regra de três. De fato, decorar as etapas que compreendem esse procedimento não é essencial aos estudantes. Busque garantir que eles tenham compreendido as etapas utilizadas nas situações propostas e, se considerar necessário, apresente outras situações que possam ser resolvidas desse mesmo modo. Ao compreender essas etapas, os estudantes serão capazes de transferir esse conhecimento para outros contextos e para situações provindas de outras áreas do conhecimento, como Ciências e Geografia.

Situação 2

Para encher um reservatório, são necessárias 60 vasilhas de 6 litros cada uma. Se forem usadas vasilhas de 2 litros cada uma, quantas delas serão necessárias para encher esse mesmo reservatório?

A quantidade de vasilhas necessárias para encher o reservatório e a capacidade de cada uma delas são grandezas inversamente proporcionais, pois a quantidade de vasilhas e a medida da capacidade de cada vasilha variam na razão inversa.

Indicando por x a quantidade de vasilhas, podemos construir o seguinte quadro:

Quantidade de vasilhas	Medida da capacidade de cada vasilha (em litro)
60	6
x	2

Como as grandezas são inversamente proporcionais, temos a seguinte proporção:

$$\frac{60}{\frac{1}{6}} = \frac{x}{\frac{1}{2}}$$

Agora, usamos a propriedade fundamental das proporções para resolver a equação:

$$60 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \cdot x$$

$$30 = \frac{x}{6}$$

$$30 \cdot 6 = x$$

$$180 = x$$

Outra maneira de escrever a proporção $\frac{60}{\frac{1}{6}} = \frac{x}{\frac{1}{2}}$ é:

$$\underset{\uparrow \atop \text{razão entre as quantidades de vasilhas}}{\frac{60}{x}} = \underset{\uparrow \atop \text{razão inversa entre as capacidades de cada vasilha}}{\frac{2}{6}}$$

Nesse caso, de acordo com a propriedade fundamental das proporções, temos:

$$60 \cdot 6 = x \cdot 2$$

$$360 = 2x$$

$$\frac{360}{2} = x$$

$$180 = x$$

Portanto, serão necessárias 180 vasilhas de 2 litros para encher o tanque.

PARA EXPLORAR

***Uma proporção ecológica*, de Luzia Faraco Ramos. São Paulo: Ática, 2008 (Coleção A Descoberta da Matemática).**

Por meio do tema reciclagem, esse livro trabalha com os conceitos de razão, proporção, regra de três e porcentagem.

Você percebeu que para resolver os problemas nas situações anteriores seguimos os mesmos passos?

Construímos um quadro agrupando as grandezas de mesma espécie nas mesmas colunas e mantemos na mesma linha as grandezas de espécies diferentes correspondentes.

Analisamos a situação para verificar se ela trata de uma situação direta ou inversamente proporcional.

Para finalizar, escrevemos a proporção e, utilizando a propriedade fundamental das proporções, resolvemos a equação.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

17. c) 20 semanas.

16. Na época da copa do mundo, Joaquim comprou figurinhas para colar em seu álbum. Na banca de jornal perto da casa dele, 6 pacotes de figurinhas custavam R$ 21,00. Quanto Joaquim pagou ao comprar 14 pacotes do mesmo tipo? **R$ 49,00**

17. Carol é artesã de uma comunidade quilombola e produz 15 peças iguais de cerâmica a cada semana trabalhada. Com base nessas informações e sabendo que a produção se manteve constante, faça o que se pede em cada item.

a) Copie e complete o quadro no caderno.

	Quantidade de semanas trabalhadas	Quantidade de peças produzidas
	1	15
30	2	||||||||||||||||||||||||||
45	3	||||||||||||||||||||||||||
60	4	||||||||||||||||||||||||||
75	5	||||||||||||||||||||||||||
105	7	||||||||||||||||||||||||||

b) As grandezas representadas nesse quadro são direta ou inversamente proporcionais? **Diretamente proporcionais.**

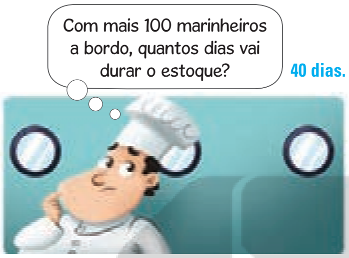
c) Quantas semanas serão necessárias para Carol produzir 300 peças?

d) Quantas peças Carol consegue produzir em 12 semanas? **180 peças.**

18. Adriano preparou um churrasco para 40 pessoas e verificou, com base em sua experiência, que a comida era suficiente para 6 horas de festa. No entanto, chegaram 8 pessoas a mais que o previsto. Determine quantas horas durará a comida, supondo que todas as pessoas consumam a mesma quantidade de comida. **5 horas.**

20. a) Inversamente proporcionais.

19. A tripulação de um navio é composta de 800 marinheiros. Para essa quantidade de pessoas, o estoque de alimentos dura 45 dias. Em determinada viagem, foi necessário ter mais 100 marinheiros. Ajude o cozinheiro do navio com a dúvida dele.



40 dias.

João Picoli/ID/BR

20. O quadro a seguir mostra a quantia em dinheiro que cada vencedor de um prêmio receberia, conforme a quantidade total de vencedores.

Quantidade de vencedores	Prêmio para cada vencedor (em real)
2	30 mil
4	15 mil
12	*y*
x	4 mil

a) As grandezas apresentadas são direta ou inversamente proporcionais?

b) Qual é o valor de *x*? E qual é o valor de *y*? **$x = 15$; $y = 5$ mil**

c) Qual é o valor total do prêmio? **60 mil reais.**

d) Se fossem 120 vencedores, que quantia cada um deles receberia? **500 reais.**

DE OLHO NA BASE

As atividades desta página permitem que os estudantes resolvam problemas que envolvem variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas e, assim, favorecem o desenvolvimento da habilidade **EF07MA17**.

Além disso, as situações propostas permitem que os estudantes utilizem ferramentas matemáticas, como o caso da regra de três, para modelar e resolver problemas cotidianos, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 5**.

- Caminhe pela sala de aula enquanto os estudantes resolvem as atividades e observe como eles estão trabalhando. Não é necessário que utilizem os procedimentos apresentados anteriormente. Valorize as estratégias pessoais empregadas nessas resoluções e, sempre que possível, incentive-os a compartilhar como pensaram para chegar à resposta solicitada.
- Utilize as atividades propostas nesta página para averiguar como está a apreensão do conteúdo por parte dos estudantes.
- Aproveite a atividade **17**, para comentar sobre o termo “quilombola”. Pergunte aos estudantes se eles sabem a que se refere esse termo. A palavra “quilombola” se refere a pessoas negras escravizadas que fugiram de fazendas e de engenhos de cana-de-açúcar na época colonial. Essa população organizou-se em comunidades, lutou por liberdade e por direitos civis igualitários como maneira de resistência ao preconceito racial. Atualmente, os descendentes desses povos mantêm algumas tradições e continuam a batalhar por seus direitos. Enfatize que ao longo do tempo as comunidades quilombolas tiveram as ancestralidades indígena e branca também. Se possível, para ampliar o debate do tema com a turma e promover positivamente a cultura e a história de povos quilombolas, apresente alguns trechos desde leis até o contexto histórico, acessando o *site* da Coordenação Nacional da Articulação das Comunidades Negras Rurais Quilombolas (Conaq), disponível em: http://conaq.org.br/quem-somos/, bem como o *Guia de políticas públicas para comunidades quilombolas*, disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/centrais-de-conteudo/igualdade-racial/guia-de-politicas-publicas-para-comunidades-quilombolas (acessos em: 14 abr. 2022).
- Na atividade **18**, observe se os estudantes percebem quais são as variáveis envolvidas: “quantidade de pessoas” e “quantidade de horas de festa”. Incentive-os a perceber que a quantidade de comida, apesar de poder ser contada e/ou medida, não varia nessa situação. Indicando a quantidade de horas de festa por *h*, eles podem organizar o seguinte quadro:

Quantidade de pessoas	Quantidade de horas de festa
40	6
48 (40 + 8 = 48)	*h*

Como as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais, podemos escrever:

$$\frac{40}{\frac{1}{6}} = \frac{48}{\frac{1}{h}}$$

Espera-se que os estudantes concluam que a comida durará 5 horas se estiverem presentes 48 pessoas.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- As atividades apresentadas nestas páginas destacam, de maneira contextualizada, os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo. Aproveite este momento para avaliar o aprendizado e o desenvolvimento dos estudantes, tendo como base os objetivos propostos inicialmente.
- Sempre que possível, amplie e aprofunde as atividades propostas.

DE OLHO NA BASE

Nestas páginas, são propostas atividades que possibilitam aos estudantes resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas e, desse modo, desenvolver a habilidade **EF07MA17**.

- Na atividade **1**, verifique se os estudantes compreendem o significado de “arremessos convertidos”. Caso eles apresentem dificuldade em entender que essa quantia refere-se à quantidade de arremessos que Carlos acertou, explique a eles.

  O objetivo do item **a** é indicar a relação apresentada como uma razão entre dois números. Se julgar apropriado, amplie a atividade solicitando aos estudantes que escrevam essa razão como um número na forma decimal (0,75).

  Peça aos estudantes que compartilhem como pensaram para resolver o item **b**. Sabemos que $5 \cdot 4 = 20$, que é o total de arremessos feitos. Assim, como $4 \cdot 4 = 16$, determinamos uma fração equivalente, de denominador 20, que representa a razão:

$$\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

  Logo, houve 16 arremessos certos no total.

  Alguns estudantes também podem determinar passo a passo:

  - Em 5 arremessos, acertaram-se 4;
  - Em 10 arremessos, acertaram-se 8;
  - Em 15 arremessos, acertaram-se 12;
  - Em 20 arremessos, acertaram-se 16.

  Portanto, foram 16 arremessos certos no total, como calculado anteriormente.
- Oriente os estudantes a utilizar uma régua para medir os lados dos triângulos representados na atividade **3**. O objetivo é verificar se a razão entre as medidas dos lados de cor vermelha de dois triângulos é igual à razão entre as medidas dos lados de cor preta. Depois de os estudantes responderem à atividade, pergunte a eles o que esperam ao determinar a razão entre as medidas dos lados azuis desses triângulos. Espera-se que eles percebam, sem fazer medições, que as medidas desses lados também serão proporcionais. Depois, sugira que façam a verificação.

  Aproveite o contexto da atividade para retomar o conceito de semelhança de figuras. Depois, amplie a atividade propondo aos estudantes que construam no caderno um triângulo semelhante ao triângulo II, mas considerando a proporção 1 : 5. Espera-se que eles construam um triângulo cujos lados correspondentes ao lados vermelho, preto e azul meçam 15 cm, 22,5 cm e 20 cm, respectivamente.

DE OLHO NA BASE

A atividade **3** permite aos estudantes compreender relações entre conceitos dos diferentes campos da Matemática, Geometria e Álgebra, contribuindo para que adquiram segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos e, desse modo, favorece o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

- É possível que muitos estudantes demonstrem dificuldade em interpretar a atividade **8**. É preciso que eles organizem uma sequência lógica de etapas para obter a resposta do problema. Uma possível sequência é:

  1. Determinar quanto Marília paga de aluguel;
  2. Calcular quanto sobra do salário de Marília depois que ela paga o aluguel;
  3. Finalmente, determinar quanto Marília gasta por mês com lazer.
- Na atividade **14**, observe se os estudantes conseguem extrair do enunciado que Maria tem uma quantia fixa para gastar e que para completar o quadro é necessário determinar essa quantia. Logo, é preciso determinar o resultado da multiplicação $24 \cdot 7 = 168$, ou seja, Maria tem R$ 168,00.

DIVERSIFICANDO

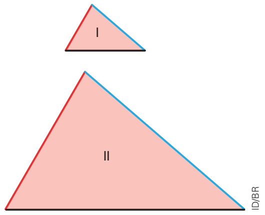
1. Ao fazer 20 arremessos em uma cesta de basquete, Carlos concluiu que a razão entre os arremessos convertidos e a quantidade de arremessos feitos era de 4 para 5.

a) Indique essa razão como quociente entre dois números. **$\frac{4}{5}$ ou 4 : 5**

b) Quantos arremessos Carlos acertou no total? **16 arremessos.**

2. A razão entre a idade de Marcela e a de Renata é $\frac{4}{5}$. Sabendo que Renata tem 35 anos, qual é a idade de Marcela? **28 anos.**

3. Observe os dois triângulos a seguir.



ID/BR

Verifique se a razão entre a medida do lado vermelho do triângulo I e a medida do lado vermelho do triângulo II é igual à razão entre a medida do lado preto do triângulo I e a medida do lado preto do triângulo II. **As razões são iguais.**

4. Considerando que com 10 kg de grãos de trigo fazemos 5 kg de farinha, faça o que se pede.

a) Escreva a razão entre a quantidade de trigo e a quantidade de farinha produzida. **$\frac{10}{5}$**

b) Para fazer 20 kg de farinha, quantos quilogramas de trigo são necessários? **40 kg**

5. Na eleição para síndico do conjunto habitacional onde mora, Antônio recebeu 3 de cada 7 votos. Qual foi o número total de pessoas que participaram da eleição, sabendo que Antônio recebeu 24 votos? **56 pessoas.**

6. A escola em que Caio estuda está realizando um campeonato de conhecimentos gerais entre os estudantes. Ao verificar seu desempenho na prova de Matemática, composta de 50 questões, Caio observou que a razão entre a quantidade de questões que ele acertou e a quantidade total de questões da prova foi de 7 para 10. Quantas questões Caio acertou? E quantas ele errou? **35 questões; 15 questões.**

7. Rita recebe R$ 1 800,00 por 10 dias de trabalho. Quanto ela receberia por 12 dias de trabalho? **R$ 2 160,00**

8. Marília mora com os pais e ajuda nas despesas mensais da casa. Ela fez as contas e verificou que, mensalmente, a razão entre a quantia que ela gasta com o aluguel e o salário mensal que ela recebe, de R$ 3 600,00, é de 7 para 25. Depois de pagar o aluguel, ela gasta $\frac{3}{25}$ do que resta do salário com lazer. Quantos reais Marília gasta com lazer por mês? **R$ 311,04**

9. A tabela a seguir mostra a quantidade de vagas e a quantidade de inscritos para algumas carreiras no vestibular da Fuvest (Fundação Universitária para o Vestibular) em 2022.

Quantidade de vagas e de inscritos por carreira na Fuvest 2022

Carreira	Quantidade de vagas	Quantidade de inscritos
Relações Internacionais (São Paulo)	42	1 982
Medicina (São Paulo)	122	15 224
Ciências Biológicas (São Paulo)	84	1 263
Computação	247	3 931
Música (Ribeirão Preto)	30	62
Psicologia (São Paulo)	49	3 048
Engenharia Elétrica e de Computação (São Carlos)	114	1 187
Química Bacharelado e Licenciatura (São Paulo)	84	502
Filosofia (São Paulo)	119	553

Fonte de pesquisa: Fuvest 2022. Disponível em: https://acervo.fuvest.br/fuvest/2022/FUVEST_2022_relacao_candidato_vagas.html. Acesso em: 14 mar. 2022.

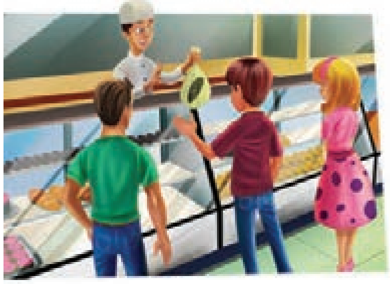
9. a) Consulte a resposta neste manual.

a) Quantos candidatos há por vaga para cada uma dessas carreiras? Utilize uma calculadora para efetuar os cálculos.

b) Qual é a carreira mais concorrida? E qual é a menos concorrida? **Medicina; Música.**

11. **a) Sim; diretamente proporcional.**

10. Na padaria de Renato, a razão entre o número de pessoas que compram pão integral e o das que compram pão recheado é de 2 para 3. Se durante um mês 360 pessoas compraram pães recheados nessa padaria, quantas pessoas compraram pão integral? **240 pessoas.**



11. Verifique se há ou não proporcionalidade entre as grandezas envolvidas nos itens a seguir. Nos casos em que houver, indique se ela é direta ou inversamente proporcional.

a) Um pedreiro levou 3 horas para construir 2 m^2 de muro. Para construir 4 m^2 de muro, ele levará 6 horas.

b) Lucas nasceu com 49,5 cm e 3,3 kg. Após um mês, ele tinha 54,7 cm e 4,5 kg e, após 2 meses, 58,4 cm e 5,5 kg. **Não.**

c) Uma fábrica de meias tem 25 funcionários e produz determinada quantidade de pares de meias em 10 horas. Se o número de funcionários passar para 50 e for mantida a mesma produção, então elas serão produzidas em 5 horas. **Sim; inversamente proporcionais.**

12. Milena confeccionou bermudas e quer distribuí-las em diferentes lojas, de modo que cada loja receba quantidades iguais de bermudas.

a) As grandezas quantidade de lojas e quantidade de bermudas que cada loja receberá são grandezas direta ou inversamente proporcionais? **Inversamente proporcionais.**

b) Se Milena distribuir as 240 bermudas que confeccionou entre 4 lojas, quantas bermudas cada loja receberá? **60 bermudas.**

c) Para que cada loja receba 40 das 240 bermudas que Milena produziu, entre quantas lojas as bermudas precisam ser distribuídas? **Entre 6 lojas.**

13. Para o aniversário de seu filho, Kelly fez sanduíches. Ela utilizou 6 pacotes de pão de forma e fez 126 sanduíches. Quantos pacotes do mesmo pão de forma Kelly vai usar para fazer 210 sanduíches? **10 pacotes.**

14. Maria precisa fazer compras para repor o estoque de um supermercado. Ela dispõe de uma quantia fixa de dinheiro para comprar escovas de dente. Com o dinheiro disponível, é possível comprar de um fornecedor 24 escovas de dente a R$ 7,00 cada uma. Ela pesquisou os preços de outros fornecedores e anotou as informações no quadro a seguir. Copie e complete o quadro no caderno e descubra qual foi o menor preço encontrado por Maria.

Preço de uma escova de dente (R$)	Quantidade de escovas de dente
7,00	24
6,00	**28**
8,00	**21**
2,00	84
12,00	**14**
0,50	336
21,00	**8**

O menor preço encontrado por Maria foi R$ 0,50.

15. Determinada quantidade de ração alimenta 24 porcos durante 5 dias. Quantos porcos devem ser vendidos para que essa ração dure 6 dias? **4 porcos.**

Ilustrações: Danillo Souza/ID/BR

16. Elabore um problema que envolva grandezas diretamente proporcionais e um problema que envolva grandezas inversamente proporcionais. Em seguida, peça a um colega que resolva os problemas criados por você, enquanto você resolve os problemas que ele criou. Por fim, conversem sobre como pensaram tanto para elaborar como para resolver os problemas. **Resposta pessoal.**

RESPOSTA

9. **a)** As respostas apresentadas são aproximadas: Relações Internacionais (São Paulo): 47; Medicina (São Paulo): 125; Ciências Biológicas (São Paulo): 15; Computação: 16; Música (Ribeirão Preto): 2; Psicologia (São Paulo): 62; Engenharia Elétrica e de Computação (São Carlos): 10; Química Bacharelado e Licenciatura (São Paulo): 6; Filosofia (São Paulo): 5.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Caminhe pela sala de aula e observe como os estudantes realizam as atividades. Atividades que envolvem variação de grandezas podem apresentar diferentes pontos de atenção. Alguns estudantes podem apresentar dificuldade na identificação das grandezas envolvidas, outros na percepção da variação das grandezas, outros no que diz respeito à construção da proporção. Depois de diagnosticar no que consistem as dificuldades dos estudantes, apresente a eles outras atividades e resolva-as pausadamente e de maneira coletiva.

- Na atividade **15**, converse com os estudantes sobre a rotina das pessoas que moram na área rural, como as tarefas que envolvem a alimentação e o manejo da criação de animais e os horários em que essas tarefas são realizadas. Incentive-os a refletir que essa população sofre preconceito em razão do estilo de vida, do trabalho árduo e das tradições a que pertencem, e algumas vezes são ridicularizadas por causa desse contexto. Ressalte a importância dessa população de acordo com a região ou o estado. Uma das políticas públicas implementadas foi a do direito à educação aos povos do campo, de acordo com o documento disponível em: http://pronacampo.mec.gov.br/images/pdf/bib_educ_campo.pdf (acesso em: 14 abr. 2022). Se julgar necessário, uma vez que o tema é amplo e pode ser abordado sob diversas perspectivas, escolha alguns temas amplamente discutidos e seus impactos socioambientais, como o bem-estar dos animais desde o nascimento até o abate, a alimentação com substâncias para acelerar o crescimento desses animais e o desmatamento para a ampliação de pastagens.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Porcentagem envolvendo números na forma fracionária, na forma decimal e cálculo mental.
- Porcentagem e proporcionalidade.
- Acréscimos e descontos.

Objetivos

- Reconhecer porcentagem como a razão entre um número e 100.
- Calcular a porcentagem de um número utilizando diversas estratégias.
- Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens em diferentes contextos.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo de porcentagem utilizando novas ferramentas de cálculo, como a ideia de proporcionalidade, buscando relações entre números racionais na forma decimal e na forma fracionária.
- As porcentagens estão presentes no cotidiano dos estudantes nos mais variados contextos. Compreender o significado desse conceito permite que eles sejam capazes de ler, interpretar e analisar diversas informações com autonomia, além de refletir sobre elas.

RETOMANDO A IDEIA DE PORCENTAGEM

- As porcentagens fazem parte de diversas situações cotidianas. São amplamente utilizadas em contextos de Educação Financeira e na área da Probabilidade.
- Nestas páginas e nas seguintes, os estudantes serão convidados a observar o uso de porcentagens em situações diversificadas, algumas delas relacionadas a Matemática Financeira, como as que envolvem acréscimos e decréscimos.
- Esclareça aos estudantes a diferença de se estudar Educação Financeira e Matemática Financeira. A Educação Financeira está relacionada a emoções, hábitos e atitudes; tem como objetivo auxiliar os consumidores na administração das suas receitas e despesas, orientá-los em relação ao consumo consciente e ajudá-los a prevenir casos de fraude. Já a Matemática Financeira compreende o conjunto de conhecimentos técnicos que permitem calcular o valor de juros, saber o valor presente de uma dívida, etc.

Capítulo

2 PORCENTAGEM

Os estudantes já foram apresentados ao conceito de porcentagem e, neste momento, ele será retomado. Recomendamos que eles estejam familiarizados com operações que envolvem números na forma de fração e na forma decimal. Além disso, é importante que eles compreendam as ideias de porcentagem para usá-las em outras áreas do conhecimento, principalmente no que diz respeito à Probabilidade e Estatística.

Retomando a ideia de porcentagem

Para aumentar as vendas em determinados períodos do ano, geralmente as lojas fazem grandes remarcações de preços: são as famosas liquidações. Nesses períodos, é comum ver o símbolo de porcentagem (%) estampado nas vitrines.

A porcentagem ou taxa percentual é uma razão entre um número racional qualquer e 100. Ela pode ser indicada por uma fração ou por um número na forma decimal. Por exemplo, 50% (lemos: cinquenta por cento) é a razão de 50 para 100. Assim:

$$50\% = \frac{50}{100} = 0{,}50$$

TZIDO SUN/Shutterstock.com/ID/BR

↓ Ao olhar para vitrines com anúncios de promoções, é comum ver o símbolo de porcentagem estampado.

(IN)FORMAÇÃO

O surgimento da porcentagem

Dados históricos dizem que a porcentagem surgiu em Roma, por volta do ano IX d.C, quando o imperador romano decretou a cobrança de vários impostos, entre eles o centésimo, cobrado sobre todas as mercadorias vendidas no mercado público. O cálculo era bem simples: dividia-se o valor das mercadorias por cem e retirava a quantidade de centésimos necessários, equivalendo, cada centésimo, a uma das cem partes.

Havia outros impostos, como os calculados em cima da quantidade de [pessoas escravizadas] que eram vendidos nos mercados e sobre eles eram pagos impostos de $\frac{1}{25}$ (um vinte e cinco avos).

Naquela época, os romanos utilizavam as letras pc para indicar porcentagem. Por exemplo, 10% era escrito X p.c, mas os símbolos foram evoluindo e chegou-se ao que atualmente conhecemos, %, que é a representação gráfica do número 100.

O surgimento da porcentagem e o cálculo mental. Disponível em: http://dpid.cidadaopg.sp.gov.br/pde/arquivos/1636743844327~7%C2%AA%20Serie-matem%C3%A1tica%20ponte%20V.02-EJA%20-%20Semana%2015.pdf. Acesso em: 14 fev. 2022.

As porcentagens são usadas em diferentes situações do dia a dia: para calcular descontos, aumentos, taxas, entre outros.

A seguir, apresentamos algumas situações em que esse conceito está presente e como calcular porcentagens.

Situação 1

Um tênis que custava R$ 200,00 está com desconto de 60%. Quanto representa, em reais, esse desconto?

Veja como podemos determinar essa quantia de quatro maneiras diferentes.

1ª maneira: Usando fração.

Para obter 60% de R$ 200,00 usando fração, primeiro representamos essa porcentagem na forma de fração. Veja.

$$60\% = \frac{60}{100}$$

Agora, calculando $\frac{60}{100}$ de 200, temos:

$$\frac{60}{100} \cdot 200 = \frac{60 \cdot 200}{100} = \frac{12\,000}{100} = 120$$

2ª maneira: Usando números na forma decimal.

Para determinar quanto é 60% de R$ 200,00 usando números na forma decimal, primeiro representamos essa porcentagem na forma decimal. Veja.

$$60\% = 0{,}60$$

Calculando 0,6 de 200, temos:

$$0{,}6 \cdot 200 = 120$$

3ª maneira: Usando cálculo mental.

Sabemos que 60% corresponde a $6 \cdot 10\%$ e que calcular 10% de uma quantia é o mesmo que dividi-la por 10, pois $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

Assim, para obter 60% de 200, basta calcular 10% desse valor e multiplicar o resultado por 6.

$$\frac{200}{10} \cdot 6 = 20 \cdot 6 = 120$$

4ª maneira: Usando uma calculadora.

Para calcular 60% de 200 usando uma calculadora, apertamos as seguintes teclas:

2 0 0 × 6 0 % =

Aparecerá no visor:

120

Portanto, o desconto de 60% de R$ 200,00 representa R$ 120,00.

PARE E REFLITA

Observe que o valor calculado em todas as maneiras é o valor do desconto, e não quanto será pago pelo tênis. Se quiséssemos saber esse valor, como poderíamos calculá-lo?

Espera-se que os estudantes percebam que é necessário subtrair o valor do desconto do preço inicial do tênis: 200 − 120 = 80.

- Organize uma roda de conversa e discuta com os estudantes o significado da palavra “desconto”. Verifique se eles entendem que esse termo está associado à obtenção de um valor menor que o inicial. Em seguida, leia com eles o enunciado da situação **1**. Pergunte se, na opinião deles, após o desconto, o preço do tênis será maior ou menor que R$ 200,00.
- No Livro do Estudante, são apresentadas quatro estratégias distintas para a resolução da mesma situação. Discuta cada estratégia com os estudantes e reforce que boa parte dos problemas matemáticos pode ser resolvida por meio de mais de uma estratégia. Incentive-os a pensar em outra estratégia.
- Se possível, providencie calculadoras simples para que os estudantes façam a verificação da quarta maneira. Chame atenção para o fato de que na sequência de teclas não aparece a tecla igual. Caminhe pela sala de aula e observe como eles utilizam a calculadora. Comente com os estudantes que algumas calculadoras podem funcionar de um modo diferente do mostrado. Em algumas delas, é necessário apertar a tecla igual após a sequência de teclas apresentada.
- Reserve um tempo para conversar com os estudantes sobre o boxe *Pare e reflita*. Essa discussão é importante para que eles compreendam as situações seguintes que serão apresentadas.

- Retome com os estudantes a ideia de que a relação parte-todo pode ser representada por uma razão. Por esse motivo, podemos representar, por exemplo, o fato de Carla ter morado 10 dos 40 anos de sua vida no Canadá pela razão $\frac{10}{40}$. Incentive os estudantes a perceber que, para determinar a porcentagem solicitada, é preciso encontrar uma fração equivalente a $\frac{10}{40}$ cujo denominador seja 100.
- Ainda em relação à situação **2**, pergunte aos estudantes se eles conseguiriam resolver a atividade utilizando os conhecimentos sobre regra de três, estudados no capítulo anterior. Caso eles não percebam essa relação, faça na lousa um quadro que relacione ano e porcentagem. Por exemplo:

Ano	Porcentagem (%)
40	100
22 (40 − 10 − 8 = 22)	x

$$\frac{40}{22}=\frac{100}{x}$$
$$40\cdot x=22\cdot 100$$
$$40x=2\,200$$
$$x=\frac{2\,200}{40}$$
$$x=55$$

Assim, a porcentagem que representa o tempo que Carla mora no Brasil é 55%.

- Na situação **3**, alguns estudantes podem pensar que devemos descobrir quanto R$ 48,00 representam de R$ 848,00. Caso isso aconteça, esclareça que o aumento foi dado em relação ao preço inicial e não ao preço final, por isso, devemos estabelecer a comparação com R$ 800,00.
- Se considerar oportuno, explore o contexto da situação e comente com os estudantes que uma pessoa não pode aumentar o valor do aluguel sem comunicar com um prazo de antecedência combinado e que existem órgãos que regulam o valor desse aumento.

Situação 2

Carla tem 40 anos de idade e morou no Canadá até os 10 anos, depois 8 anos na China e então veio para o Brasil, onde mora até hoje. Qual é a porcentagem que representa o tempo que ela mora no Brasil?

A idade de Carla corresponde a 100% de sua vida. Assim, podemos descobrir quanto de sua vida representa o tempo que ela morou no Canadá e o tempo que ela morou na China e subtrair esses valores de 100% para obter o tempo que ela mora no Brasil.

- Canadá

  10 dos 40 anos de Carla representam 25% de sua vida, pois:

$$\frac{10}{40}=\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=25\%$$

- China

  8 dos 40 anos de Carla representam 20% de sua vida, pois:

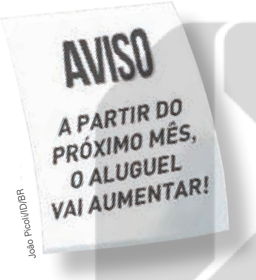
$$\frac{8}{40}=\frac{1}{5}=\frac{20}{100}=20\%$$

Logo, como a idade atual de Carla (40 anos) representa 100% da vida dela, temos:

$$100\%-25\%-20\%=55\%$$

Portanto, 55% é a porcentagem que representa o tempo que Carla mora no Brasil.

Situação 3



João Picoli/ID/BR

A casa em que Romeu mora é alugada. Ele recebeu um aviso de que, no próximo mês, o valor do aluguel passará de R$ 800,00 para R$ 848,00. Qual será o percentual de aumento do aluguel?

Para determinar o percentual de aumento, precisamos, primeiro, encontrar o valor (em real) do aumento. Para isso, subtraímos do novo valor do aluguel o valor antigo.

$$\text{R\$ } 848{,}00-\text{R\$ } 800{,}00=\text{R\$ } 48{,}00$$

Agora, precisamos descobrir quanto R$ 48,00 representam de R$ 800,00. Veja uma possível maneira de obter essa porcentagem:

$$\begin{tikzcd}
\text{R\$ } 800{,}00 \arrow[r, dash] \arrow[d, ":100"'] & 100\% \arrow[d, ":100"] \\
\text{R\$ } 8{,}00 \arrow[r, dash] \arrow[d, "\cdot 6"'] & 1\% \arrow[d, "\cdot 6"] \\
\text{R\$ } 48{,}00 \arrow[r, dash] & 6\%
\end{tikzcd}$$

Observe também que a fração $\frac{48}{800}$ representa esse aumento e, para determiná-lo na forma de porcentagem, basta fazer:

$$\frac{48}{800}=0{,}06=\frac{6}{100}=6\%$$

Portanto, o percentual de aumento do aluguel será de 6%.

Situação 4

Mário vai viajar e precisa comprar uma mala. Ele foi até uma loja e gostou de uma que custa R$ 380,00. O vendedor lhe informou que, se quisesse comprar a mala em prestações, o valor final seria 15% maior. Se Mário escolheu comprar a mala em prestações, quanto vai pagar por ela?

Veja como podemos resolver essa situação de três maneiras diferentes.

1ª maneira

Primeiro, vamos calcular 15% de R$ 380,00 para saber quanto a mais Mário vai pagar pela mala.

$$\frac{15}{100} \cdot 380 = \frac{15 \cdot 380}{100} = \frac{5\,700}{100} = 57$$

Agora, para descobrir quanto Mário vai pagar pela mala, adicionamos o valor do acréscimo ao preço inicial da mala.

$$\text{R\$ } 57{,}00 + \text{R\$ } 380{,}00 = \text{R\$ } 437{,}00$$

2ª maneira

Podemos resolver essa situação usando cálculo mental.

Calcular 15% de um valor é o mesmo que calcular 10% desse valor, depois 5% desse valor e, então, adicionar as quantias obtidas.

Assim, podemos resolver esse problema calculando inicialmente 10% de 380, pois sabemos que, para isso, basta dividir 380 por 10. Ao fazer essa divisão, obtemos 38 como resultado.

Como o acréscimo é de 15%, falta calcular 5% de 380. Sabendo que 10% de 380 é 38, para determinar 5% de 380 basta dividir 38 por 2, obtendo 19 como resultado.

Portanto, o valor total do acréscimo será de:

$$\text{R\$ } 38{,}00 + \text{R\$ } 19{,}00 = 57{,}00$$

Adicionando o valor do acréscimo ao preço da mala, temos:

$$\text{R\$ } 57{,}00 + \text{R\$ } 380{,}00 = 437{,}00$$

3ª maneira

O valor da mala, R$ 380,00, corresponde a 100%. Como o acréscimo será de 15% no valor da mala, podemos dizer que Mário vai pagar 115% do valor da mala, pois:

$$100\% + 15\% = 115\%$$

Assim, temos que calcular 115% de R$ 380,00.

$$\frac{115}{100} \cdot 380 = \frac{115 \cdot 380}{100} = 437$$

Portanto, Mário vai pagar R$ 437,00 pela mala.

Sashkin/Shutterstock.com/ID/BR

- Nesta página, apresentamos aos estudantes uma situação de acréscimo. Aproveite a situação para conversar com eles sobre compra a prazo ou à vista. Eles podem considerar que comprar à vista é sempre a melhor opção, pois não tem "aumento" no valor. Entretanto, incentive-os a refletir sobre possíveis vantagens ou necessidades de se comprar a prazo, como não ter o valor total no momento da compra.
- Caso tenha sugerido aos estudantes utilizar os conhecimentos sobre regra de três para resolver as situações anteriores, proponha que os utilizem novamente. Essa estratégia reforça a definição de que porcentagem é uma razão.

DE OLHO NA BASE

As situações propostas nestas páginas abordam múltiplos contextos, incluindo situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, de modo que contribuem para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 6**.

Além disso, apresentam a resolução de problemas que envolvem porcentagens, utilizando diferentes estratégias, com o intuito de contribuir para a ampliação do repertório de estratégias pessoais dos estudantes e, então, favorecer o desenvolvimento da habilidade **EF07MA02**.

- Na situação **5**, os estudantes serão convidados a trabalhar com valores maiores, da ordem dos milhares. Por mais que isso gere desconforto inicial, é importante que eles percebam que, independentemente do valor, as estratégias e os procedimentos utilizados podem ser os mesmos.
- A estratégia de cálculo mental é, na maioria das vezes, pessoal. Apesar disso, é importante apresentar aos estudantes diversas possibilidades para que eles ampliem seu repertório. Já foi dito a eles que calcular 10% de um valor é o mesmo que dividi-lo por 10. Verifique se eles percebem que, do mesmo modo, calcular 1% de um valor é o mesmo que dividi-lo por 100, pois:

$$1\% = \frac{1}{100}$$

Assim, na situação **5**, os estudantes poderiam pensar em calcular 1% de R$ 195 000,00 e multiplicar o resultado por 5, para obter o valor correspondente a 5%.

$$1\% \text{ de } 195\,000 = \frac{195\,000}{100} = 1\,950$$

$$1\,950 \cdot 5 = 9\,750$$

- Oriente os estudantes a caminhar, sob a supervisão de um responsável, por lojas, mercados e outros comércios da região em que vivem ou da região em que a escola está localizada. Combine um dia para que eles tragam as observações coletadas e, então, organize uma roda de conversa ou um mural para que compartilhem as experiências.

Situação 5

Isaura juntou dinheiro para comprar um apartamento. Ela escolheu um apartamento que custa R$ 195 000,00. Conversando com o corretor, ela conseguiu um desconto de 5% para o pagamento à vista. Considerando que Isaura escolha pagar à vista, quanto ela pagará pelo apartamento?

Acompanhe três maneiras de resolver esse problema.

1ª maneira

Primeiro, vamos calcular 5% de R$ 195 000,00 para saber qual será o desconto que Isaura terá se pagar à vista.

$$\frac{5}{100} \cdot 195\,000 = \frac{5 \cdot 195\,000}{100} = \frac{975\,000}{100} = 9\,750$$

Para determinar o preço final que Isaura pagará pelo apartamento, vamos subtrair do valor do apartamento o valor do desconto.

R$ 195 000,00 − R$ 9 750,00 = R$ 185 250,00

2ª maneira

Podemos resolver essa situação calculando mentalmente. Calcular 5% de um valor é o mesmo que calcular 10% desse valor e, depois, dividir o resultado por 2, pois 10% : 2 = 5%.

Sabendo que calcular 10% de um valor é o mesmo que dividi-lo por 10, temos, assim, que 10% de R$ 195 000,00 é R$ 19 500,00.

Para calcular 5% desse valor, devemos determinar a metade de R$ 19 500,00. Ou seja, R$ 9 750,00.

Por fim, subtraímos do valor inicial do apartamento o valor do desconto.

R$ 195 000,00 − R$ 9 750,00 = R$ 185 250,00

3ª maneira

O valor do apartamento, R$ 195 000,00, corresponde a 100%. Como o desconto será de 5% no valor do apartamento, podemos dizer que Isaura vai pagar 95% do valor do apartamento, pois:

$$100\% - 5\% = 95\%$$

Assim, temos de calcular 95% de R$ 195 000,00.

$$\frac{95}{100} \cdot 195\,000 = \frac{95 \cdot 195\,000}{100} = 185\,250$$

Portanto, Isaura pagará R$ 185 250,00 pelo apartamento.

PARA EXPLORAR

Vimos que as porcentagens são utilizadas nos mais diversos contextos. Com um responsável, faça um passeio pelo comércio da região em que você mora e observe como as porcentagens estão presentes em anúncios comerciais e em vitrines. Anote ou fotografe suas observações e compartilhe-as com os colegas e o professor.

Situação 6

Manoel recebeu R$ 875,00 de hora extra e decidiu investir essa quantia. Depois de um ano, ao resgatar o dinheiro, ele descobriu que a ação em que ele investiu caiu 3%. Quanto Manoel resgatou?

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Proponha aos estudantes que resolvam a situação **5** usando outras duas estratégias. Explique que eles podem usar a estratégia de cálculo mental, desde que ela seja diferente da apresentada no Livro do Estudante. A seguir, apresentamos duas possíveis estratégias.

1ª estratégia: usando a regra de três.

Sendo *x* a quantia que Isaura pagará pelo apartamento à vista, temos:

Valor a ser pago (R$)	Porcentagem (%)
195 000	100
x	95 (100 − 5 = 95)

$$195\,000 \cdot 95 = 100 \cdot x$$

$$\frac{195\,000 \cdot 95}{100} = x$$

$$\frac{1950\cancel{00} \cdot 95}{1\cancel{00}} = x$$

$$185\,250 = x$$

2ª estratégia: usando a calculadora.

O preço a ser pago à vista corresponde a 95% do preço total, pois 100% − 5% = 95%. Assim, podemos apertar as seguintes teclas:

1 9 5 0 0 0 × 9 5 %

No visor aparecerá:

185 250

Vamos resolver essa situação de duas maneiras diferentes usando uma calculadora.


Danilo Souza/ID/BR

1ª maneira

Subtraímos a porcentagem correspondente ao prejuízo que Manoel teve do valor que ele investiu apertando as seguintes teclas:

8 7 5 − 3 % =

Aparecerá no visor:

848.75

2ª maneira

Como o valor que Manoel vai resgatar será de 97% (100% − 3%), vamos calcular 97% do valor que ele investiu. Para isso, convertemos 97% para a forma decimal e apertamos as seguintes teclas:

0 · 9 7 × 8 7 5 =

No visor aparecerá:

848.75

Portanto, Manoel resgatou R$ 848,75.

Situação 7

O preço da gasolina subiu 8,14% da segunda para a terceira semana de março de 2022. Se a gasolina custava, na bomba, R$ 6,909 o litro no início da segunda semana de março, quanto ela passou a custar na terceira semana desse mesmo mês?

Vamos resolver esse problema de duas maneiras diferentes com o auxílio de uma calculadora.

1ª maneira

Digitamos o preço do litro da gasolina e adicionamos a porcentagem de aumento. Para isso, apertamos as seguintes teclas:

6 · 9 0 9 + 8 · 1 4 % =

No visor aparecerá:

7.4713926

2ª maneira

Como o valor final do preço da gasolina será de 108,14% (100% + 8,14%), vamos calcular 108,14% do preço do litro gasolina. Para isso, convertemos 108,14% para a forma decimal e apertamos as seguintes teclas:

1 · 0 8 1 4 × 6 · 9 0 9 =

No visor aparecerá:

7.4713926

Portanto, a gasolina passou a custar, aproximadamente, R$ 7,47 na terceira semana de março de 2022.

- Se possível, providencie com antecedência calculadoras simples para que os estudantes reproduzam os procedimentos do Livro do Estudante.
- Reforce com os estudantes que nem todas as calculadoras funcionam da mesma maneira e, por isso, podem existir divergências em relação às teclas indicadas. Deixe que eles investiguem e tentem descobrir as equivalências e, se perceber que eles estão com dificuldade, faça interferências.
- Na situação **7**, os estudantes podem podem estranhar a representação do preço da gasolina com três casas decimais. Se isso ocorrer, comente com eles que, de acordo com a Portaria n. 30, de 6 de julho de 1994, ficou determinado que os preços de combustíveis indicados nas bombas do posto revendedor devem ser expressos com três casas após a vírgula porque vários itens da estrutura de preços, como o frete e alguns impostos, não teriam representatividade com apenas duas casas decimais (o preço da gasolina é calculado com base no custo de produção, nos impostos e nos custos de distribuição e revenda).

DE OLHO NA BASE

Compreender como resolver problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando diversas estratégias: pessoais, cálculo mental, calculadora, em diferentes contextos, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA02**.

DE OLHO NA BASE

Nas atividades propostas nesta página, os estudantes serão convidados a resolver e a elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, no contexto de educação financeira, entre outros, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA02**.

- Caminhe pela sala de aula e observe como os estudantes resolvem as atividades. Incentive-os a utilizar diferentes estratégias.
- Na atividade **5**, verifique se algum estudante utilizou o recurso da regra de três. Se julgar apropriado, permita que eles utilizem a calculadora para resolver essa atividade.
- Caso os estudantes apresentem dificuldade no entendimento da atividade **10**, diga a eles que o pagamento da multa na conta do mês de agosto não acaba com a dívida referente ao não pagamento da conta de julho.
- Elaborar um problema não é uma atividade simples, requer criatividade e compreensão do conteúdo. Antes de os estudantes resolverem a atividade **12**, pergunte se eles já viram vitrines com esses tipos de descontos, chamados de progressivos, nos quais, quanto maior é a quantidade de itens comprados, maior é o desconto dado. Incentive-os a compartilhar os problemas que eles criaram e como pensaram para fazê-lo.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. a) $\frac{20}{100}$; 0,20
b) $\frac{5}{100}$; 0,05
c) $\frac{130}{100}$; 1,30
d) $\frac{18,6}{100}$; 0,186
e) $\frac{2,25}{100}$; 0,0225
f) $\frac{0,54}{100}$; 0,0054

1. Represente as porcentagens a seguir na forma de fração e na forma decimal.

a) 20%
c) 130%
e) 2,25%
b) 5%
d) 18,6%
f) 0,54%

2. Represente as frações a seguir na forma de porcentagem.

a) $\frac{1}{10}$ **10%**
c) $\frac{33}{75}$ **44%**
e) $\frac{3}{2}$ **150%**
b) $\frac{3}{25}$ **12%**
d) $\frac{14}{56}$ **25%**
f) $\frac{17}{40}$ **42,5%**

3. Calcule mentalmente:

a) 10% de 20 000; **2 000**
c) 40% de 20 000; **8 000**
b) 25% de 20 000; **5 000**
d) 75% de 20 000. **15 000**

4. Com o auxílio de uma calculadora, calcule:

a) 30% de 320; **96**
c) 13% de 2 400; **312**
b) 18% de 50; **9**
d) 0,8% de 1 100. **8,8**

5. Calcule o que se pede em cada item.

a) 1 872 corresponde a quanto por cento de 31 200? **6%**

b) 912,5 corresponde a quanto por cento de 73 000? **1,25%**

6. Rosana comprou uma saia e, como pagou em dinheiro, recebeu um desconto de 10%. Se a saia custava R$ 120,00, qual foi o valor que Rosana pagou por ela? **R$ 108,00**

7. Armando é proprietário de uma loja de eletrodomésticos. Ele comprou, diretamente do fabricante, um aparelho de som e pagou R$ 240,00 por ele. Para vender o mesmo aparelho em sua loja, ele aumentou esse valor em 20%. Qual é o valor que Armando está cobrando pelo aparelho de som em sua loja? **R$ 288,00**

8. No dia 1º de junho, um celular estava sendo vendido por R$ 800,00. No dia 10 do mesmo mês, o preço desse produto sofreu uma redução de 50%.

a) No dia 1º de junho, o produto estava mais barato que no dia 10? **Não.**

b) No dia 10 de junho, o produto estava mais caro ou mais barato que no dia 1º? **Mais barato.**

c) Quantos reais representam a redução de 50% no preço do produto? **R$ 400,00**

d) Qual é o novo preço do celular no dia 10 de junho? **R$ 400,00**

9. a) R$ 20,70 b) R$ 1 062,68

9. Com o auxílio de uma calculadora, descubra qual é o novo valor de um produto que custava:

a) R$ 15,00 e teve um aumento de 38%;

b) R$ 3 428,00 e teve um desconto de 69%;

c) R$ 100,00 e teve um desconto de 23,4%. **R$ 76,60**

10. Eliana esqueceu de pagar sua conta de luz do mês de julho, no valor de R$ 60,00. Na conta de agosto, havia a cobrança de multa de 12,5% sobre o valor da conta do mês anterior mais o consumo do mês de agosto, que foi de R$ 63,00.

a) Qual é o valor que Eliana pagará na conta de agosto? **R$ 70,50**

b) O consumo do mês de agosto representa qual porcentagem do consumo do mês de julho? **105%**

11. Responda aos itens a seguir, considerando que um produto custa R$ 6 400,00.

a) Na liquidação, esse produto estava com 15% de desconto. Quanto passou a ser o preço do produto? **R$ 5 440,00**

b) Uma pessoa pediu 10% de desconto sobre o valor da liquidação. Quanto essa pessoa queria pagar? **R$ 4 896,00**

c) Calcule o preço do produto com desconto de 25% e compare-o com o valor obtido no item anterior.

d) Analisando esse problema, concluímos que descontos sucessivos de 15% e 10% não geram um único desconto de 25%. Por quê?

12. Elabore um problema com base na ilustração a seguir. Depois, peça a um colega que resolva o problema criado por você, enquanto você resolve o dele. **Resposta pessoal.**

João Picoli/ID/BR

11. c) R$ 4 800,00. É um valor inferior ao obtido no item **b**.

11. d) Porque os descontos foram aplicados sobre valores diferentes de uma mesma mercadoria. Ou seja, os descontos sucessivos de 15% e 10% correspondem a um único desconto de 23,5%, pois $0,85 \cdot 0,90 = 0,765 = 76,5\%$ e $100\% - 76,5\% = 23,5\%$.

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

3. Respostas possíveis: R$ 227,50 ou R$ 122,50. Verifique se os estudantes percebem que o reajuste pode ser tanto para mais como para menos.

1. Tomás comprou um carro por R$ 50 000,00. Três meses depois, vendeu-o com prejuízo de 20%. Por quanto Tomás vendeu o carro? Faça os cálculos mentalmente. **R$ 40 000,00**

2. Em bares, restaurantes e lanchonetes, é comum a conta vir com um acréscimo de 10% sobre o valor total gasto, que é a comissão paga ao garçom. Essa cobrança é válida, mas o pagamento pelo consumidor é opcional.

Após jantar com seus pais em um restaurante, Juliana viu que o valor do consumo foi de R$ 160,00. Ela sabia que pagar 10% sobre esse valor era opcional. Caso eles tenham optado por pagar essa comissão ao garçom, qual foi o valor total da conta? **R$ 176,00**

3. Uma calça custava R$ 175,00 e teve um reajuste de 30%. Qual é o novo preço da calça?

4. Solange é secretária e foi contratada com um salário de R$ 2 000,00. Após seis meses, houve um aumento de 2% para todos os funcionários do setor de Solange.

a) De quantos reais foi o aumento que Solange recebeu? **R$ 40,00**

b) Qual é o valor do salário de Solange com esse aumento? **R$ 2 040,00**

5. Um fogão cujo preço era R$ 900,00 está em promoção, com 25% de desconto. Por quanto está sendo vendido esse fogão? **R$ 675,00**

6. No final de ano, é comum as lojas fazerem promoções. Observando a ilustração a seguir e sabendo que em janeiro o valor do computador estará 22% mais caro, qual será o preço do computador depois do reajuste? **R$ 3 294,00**

Ilustrações: João Picoli/ID/BR

7. Observe a situação a seguir.

Se o preço do celular, sem desconto, era de R$ 800,00, qual foi a taxa de desconto que a compradora recebeu? **7,2%**

8. Uma geladeira pode ser comprada à vista por R$ 2 300,00. Se for paga em três prestações iguais, haverá um acréscimo de 8% sobre o valor à vista. Qual é o valor de cada prestação na compra a prazo? **R$ 828,00**

9. Pedro comprou um tênis à vista e recebeu um desconto, economizando, assim, R$ 48,00. Quanto Pedro pagou pelo tênis? **R$ 272,00**

10. De acordo com o Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese), o salário mínimo nacional, que era de R$ 1 212,00 em 2022, deveria ser cerca de 496% desse valor para suprir as necessidades mínimas da população brasileira em fevereiro desse ano. Quanto deveria ser, o salário mínimo necessário? Utilize uma calculadora para realizar os cálculos. **R$ 6 011,52.**

11. Joaquim colocou a casa dele à venda pelo valor de R$ 240 000,00. Sabendo que essa casa valoriza 6% ao ano, calcule o valor dessa casa após:

a) 1 ano; **R$ 254 400,00** b) 3 anos. **R$ 285 843,84**

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- As atividades apresentadas nesta página destacam, de maneira contextualizada, os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo. Aproveite este momento para avaliar o aprendizado e o desenvolvimento dos estudantes, tendo como base os objetivos propostos inicialmente.
- Leia com os estudantes a atividade **3** e solicite a eles que digam se o preço da calça após o reajuste será maior ou menor que o inicial. É importante que eles percebam que a palavra "reajuste" pode ser usada para indicar tanto um acréscimo como um decréscimo. É provável que a maior parte dos estudantes associe essa palavra a um decréscimo, mas comente que pelo enunciado não é possível garantir essa informação e, portanto, essa atividade admite duas possibilidades de resposta.
- Alguns estudantes podem encontrar dificuldade na interpretação da atividade **9**. Se esse for o caso, estimule-os a perceber que R$ 48,00 corresponde ao desconto de 15%. Assim, uma possibilidade para responder a essa atividade seria:

Como R$ 48,00 corresponde a 15%, vamos utilizar a regra de três para determinar o valor de x correspondente a 100%.

Valor (R$)	Porcentagem (%)
48,00	15
x	100

$$48 \cdot 100 = x \cdot 15$$
$$4\,800 = 15x$$
$$\frac{4\,800}{15} = x$$
$$320 = x$$

Depois de determinar o valor inicial do tênis, devemos subtrair o valor do desconto:

$$320 - 48 = 272$$

Portanto, Pedro pagou R$ 272,00 pelo tênis.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

- Se perceber que os estudantes ainda apresentam dificuldade em resolver as atividades, retome o conceito de porcentagem e as diversas estratégias de resolução apresentadas.
- De maneira geral, muitos estudantes apresentam dificuldade na compreensão e na interpretação dos enunciados de problemas que envolvem porcentagens, e não propriamente na parte operacional.
- Proponha aos estudantes outras atividades e desenvolva com eles a interpretação delas. Incentive a troca de ideias, pois muitas vezes a linguagem utilizada por um colega ajuda na compreensão do problema.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, os temas abordados são juros e taxa de juros a partir de duas perspectivas: quando pedimos empréstimos e quando emprestamos dinheiro (investimento). Esse tema é importante, pois incentiva os estudantes a refletir sobre a real necessidade de pegar um empréstimo, desenvolvendo atributos relacionados ao valor responsabilidade.
- É importante que os estudantes percebam que muitas vezes o juro está atrelado ao consumismo e à irresponsabilidade, por isso um orçamento consciente possibilita estratégias para se resolver determinado problema. Além disso, os estudantes devem compreender o conceito de juro e que ele pode proporcionar oportunidades, quando investimos determinada quantia, buscando a realização de sonhos e tendo em vista a proteção para imprevistos no futuro.

DE OLHO NA BASE

Refletir sobre este tema possibilita aos estudantes argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável, desenvolvendo a **competência geral 7**.

Responsabilidade

O assunto tratado nesta seção possibilita a aproximação com o valor responsabilidade ao compreender que uma tomada de decisão, no caso de um empréstimo ou de uma aplicação financeira, em que os juros estão presentes, pode influenciar e muito a vida das pessoas. Organizar os rendimentos e pensar em um orçamento equilibrado são atitudes responsáveis.

AMPLIANDO HORIZONTES

Juros vorazes

Todos nós estamos sujeitos a imprevistos, ou seja, a problemas pelos quais não esperávamos. E muitos desses problemas exigem soluções rápidas e que necessitam de dinheiro. Precisamos resolver o problema, mas não temos o dinheiro. E agora?

Uma possibilidade é pedir um empréstimo do valor que precisamos, recorrendo, por exemplo, a amigos e parentes ou a uma instituição financeira. A instituição empresta à pessoa a quantia e, na hora de devolver, a pessoa paga essa quantia e mais um valor chamado **juro**.

Os juros são cobrados por diversos motivos, como: remuneração pelo dinheiro emprestado – uma espécie de “aluguel” do dinheiro que a pessoa pegou e vai usar; inflação, que desvaloriza o dinheiro que foi emprestado; lucro pela operação do empréstimo; risco de calote – quando a dívida não é paga. Mas, muitas vezes, pagam-se juros por outras causas, como a ganância dos detentores do dinheiro, que cobram juros abusivos; falta de conhecimento de muitos que pagam juros altos e que, com planejamento e orçamento, poderiam buscar e obter juros menores ou até mesmo, em alguns casos, não recorrer a um empréstimo, entre outros fatores.

Outra forma de empréstimo é o cartão de crédito, cujos juros, aqui no Brasil, são os mais altos do mundo. Isso pode gerar um endividamento tão grande que a pessoa pode levar anos para pagar o que deve, incluindo os juros cobrados, prejudicando financeiramente projetos futuros; sem contar outros problemas, como não poder comprar por ter o nome no SPC.

SPC (Sistema de Proteção ao Crédito): sistema que monitora quem não paga por um bem adquirido ou por um empréstimo feito. As empresas fornecem ao SPC o nome das pessoas e das firmas não pagadoras, de maneira que outras lojas, bancos, etc. tomem conhecimento de quem são os devedores e, com isso, não realizem negócios com quem já está devendo.

Bruno Nunes/ID/BR

OUTRAS FONTES

Dias, J. N. M. Educação financeira escolar: a noção de juros. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais. Disponível em: https://www2.ufjf.br/mestradoedumat//files/2011/05/Disserta%c3%a7%c3%a3o-Jesus.pdf. Acesso em: 14 fev. 2022.

Essa dissertação apresenta uma investigação sobre a produção de significados e conhecimentos de estudantes de Ensino Fundamental em tarefas didáticas que envolvem a noção de juros.

Leitão, M. *Saga brasileira*: a longa luta de um povo por sua moeda. São Paulo: Record, 2015.

Esse livro conta a história da inflação brasileira e sua relação com as taxas de juros cobradas. Nele, a economista mostra que a inflação é tão velha quanto o Brasil: de D. João VI cunhando uma quantidade enorme de moeda para financiar o gasto da corte ao período de hiperinflação dos anos 1980 do século passado até os momentos de estabilidade da moeda.

Precisamos aprender, desde cedo, a fazer um planejamento e um orçamento responsável, e isso inclui aprender a se proteger das armadilhas dos juros altos, exigindo medidas das autoridades públicas responsáveis, para que essas taxas não sejam abusivas.

Entretanto, podemos ver o empréstimo e as taxas de juros de outra maneira. Muitas pessoas costumam emprestar parte da sua rentabilidade às instituições financeiras. Um exemplo disso é a famosa **poupança**. A pessoa empresta um montante de dinheiro ao banco e, após um tempo, recebe o dinheiro de volta acrescido de juros. Assim como podemos pagar juros, também podemos receber juros. É possível emprestar dinheiro aos bancos de diversas formas, além da poupança, como fazer **investimentos**. As pessoas que fazem isso abrem mão de gastar e de usufruir parte do dinheiro hoje para ter uma reserva no futuro e, assim, poder realizar diferentes projetos, como adquirir um imóvel, viajar, doar a instituições que ajudam pessoas mais necessitadas, etc.

Para refletir

Responda sempre no caderno.

Consulte as respostas neste manual.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir.

1. Com base no que vocês leram, por que as instituições financeiras cobram juros?
2. Observem a cena. Qual opção vocês escolheriam? Justifiquem.
3. Os irmãos João e Maria se envolveram em empréstimos no valor de R$ 10 000,00 cada um com um mesmo banco. João pediu R$ 10 000,00 emprestado a uma taxa de 50% de juros ao ano. Já Maria emprestou R$ 10 000 ao mesmo banco, aplicando o dinheiro na poupança, a uma taxa de juros de 8% ao ano. Ao final de um ano, João pagou tudo o que devia e Maria recebeu tudo a que tinha direito.
   a) Quanto João pagou? E Maria, quanto recebeu?
   b) Qual foi a diferença entre o juro pago por João e o recebido por Maria?
   c) Vocês acham isso justo? Por que os bancos agem dessa forma? Expliquem.

Hornos, A. P. *5 princípios da educação financeira*. Casa do Saber. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=_rtfqSmyPWo. Acesso em: 14 fev. 2022.

Esse vídeo trabalha valores, como gratidão, respeito, cuidado, paciência, criatividade, entre outros. A responsabilidade se amplia do individual para o coletivo.

Muniz Jr, I. Uma investigação sobre a abordagem de situações financeiras envolvendo taxas de juros no Brasil em um curso pós-médio. *In*: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla. Actas del XIV CIAEM. Tuxtla, México, 2015. p. 1070-1081.

Esse artigo apresenta uma investigação sobre aspectos matemáticos e não matemáticos apresentados por estudantes quando analisaram situações financeiras envolvendo diferentes taxas de juros praticadas no Brasil.

RESPOSTAS

DE OLHO NA BASE

Ao se reunir em duplas e discutir as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, favorencendo o desenvolvimento da **competência geral 9**.

1. Resposta pessoal. Observe as respostas dos estudantes e, se julgar oportuno, explique que juro é a diferença entre o que se pega e o que se paga em um empréstimo. Taxa de juros (geralmente expressa em percentual) relativa a um período é a razão entre os juros pagos nesse período e o valor que se pegou emprestado. Sobre o porquê de as instituições cobrarem juros, é possível fazer uma discussão em torno de alguns aspectos, como: (i) custo de utilização de um dinheiro que não é seu; (ii) aluguel do dinheiro; (iii) riscos de não pagamento; (iv) inflação – o dinheiro que foi emprestado se desvaloriza e precisa ser corrigido; (v) para guardar e administrar o dinheiro é preciso trabalho remunerado, e parte dos juros, ainda que pequena – principalmente no Brasil –, paga esse trabalho; (vi) lucro do emprestador.
2. Resposta pessoal. Para ampliar as possibilidades de respostas a esta questão, peça aos estudantes que a respondam em casa, com os pais ou responsáveis. Reforce que, assim como se pesquisa para comprar um produto, deve-se pesquisar para investir ou gastar o dinheiro. Auxilie-os, ainda, a relativizar suas respostas com base em fatores como a urgência da necessidade da compra e a importância do produto a ser comprado (no caso da ilustração, uma geladeira).
3. **a)** João pagou R$ 15 000,00.
   Maria recebeu R$ 10 800,00.
   b) A diferença foi de R$ 4 200,00
   c) Respostas pessoais. Reforce com os estudantes que os juros disponíveis para as pessoas são geralmente inferiores aos que elas pagam em bancos ou outras instituições financeiras. Essa discrepância gera distorções na sociedade. Trabalhar esse tema com os professores de outros componentes como História e Geografia pode ampliar e enriquecer ainda mais o debate sobre tais questões. Lembre-se de que, apesar de serem jovens, os estudantes têm acesso às informações. Tudo isso impacta a vida deles e os prepara para a cidadania, ainda que, nessa faixa etária, não sintam tanta responsabilidade pelas suas ações.

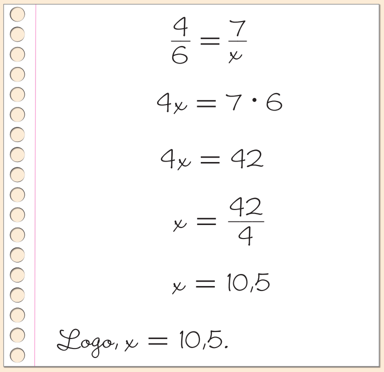
ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Caminhe pela sala de aula enquanto os estudantes resolvem as atividades e observe se eles apresentam dificuldade. Caso julgue oportuno, resolva algumas das atividades na lousa e incentive-os a compartilhar as estratégias que utilizaram.
- A atividade **3** exige que os estudantes se recordem que 1 dia tem 24 horas e que sejam capazes de interpretar um gráfico de setores.
- A atividade **11** trabalha, de maneira integrada, com os conteúdos dos dois capítulos da unidade. Se necessário, auxilie os estudantes na resolução.
- Na atividade **12**, os estudantes precisam recorrer a conhecimentos da Geometria para resolvê-la. Observe se eles apresentam dificuldade e, caso necessário, mostre a eles imagens de um prisma de base pentagonal e de uma pirâmide de base pentagonal.

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Os números 4 e 7 são diretamente proporcionais aos números 6 e x, nessa ordem. Veja como Pedro determinou corretamente o valor de x.

ID/BR



$$\frac{4}{6} = \frac{7}{x}$$

$$4x = 7 \cdot 6$$

$$4x = 42$$

$$x = \frac{42}{4}$$

$$x = 10{,}5$$

Logo, $x = 10{,}5$.

a) Se os números 5 e x são diretamente proporcionais aos números 3 e 9, nessa ordem, qual é o valor de x? **$x = 15$**

b) Sabendo que os números 2 e 7 são, nessa ordem, proporcionais a 9 e x, qual é o valor de x? **$x = 31{,}5$**

2. Registre no caderno a alternativa que responde corretamente à questão a seguir.

Em 2017, uma escola tinha 600 estudantes de graduação, 1 200 de pós-graduação e 150 professores. Em 2022, com o processo de expansão, passou a atender 1 200 estudantes de graduação e 1 800 de pós-graduação e a ter 300 professores em seu corpo docente. Tomando como base o processo de expansão dessa escola, podemos afirmar que a razão entre o número total de estudantes e o de professores teve variação de: **Alternativa b.**

a) 8 estudantes por professor em 2017 para 30 estudantes por professor em 2022.

b) 12 estudantes por professor em 2017 para 10 estudantes por professor em 2022.

c) 10 estudantes por professor em 2017 para 10 estudantes por professor em 2022.

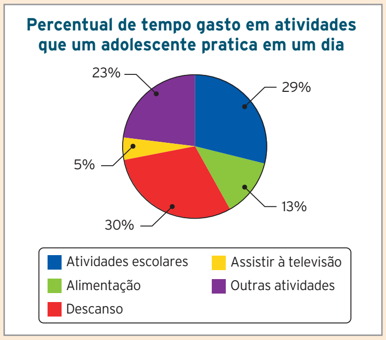
d) 10 estudantes por professor em 2017 para 8 estudantes por professor em 2022.

e) 10 estudantes por professor em 2017 para 12 estudantes por professor em 2022.

3. Registre no caderno a alternativa correta.

Observe o gráfico a seguir, que apresenta o percentual de tempo que um adolescente gasta em suas atividades durante um dia.

ID/BR



Percentual de tempo gasto em atividades que um adolescente pratica em um dia

Dados fictícios.

Com base no gráfico, podemos afirmar que o tempo destinado por um adolescente para ver televisão diariamente é de: **Alternativa b.**

a) 12 horas.

b) 1,2 hora.

c) 2 horas

d) 2,1 horas.

e) 28,8 horas.

4. Registre no caderno a alternativa correta.

Ao planejar uma viagem para os Estados Unidos em janeiro, uma família pesquisou a cotação do dólar e soube que US$ 1 estava cotado a R$ 5,10. Porém, a viagem teve de ser adiada, e uma nova data foi marcada. Da data da pesquisa até o dia da viagem, a moeda americana sofreu um aumento de 9,4% e estava sendo vendida com valores diferentes em cinco casas de câmbio. Veja o quadro a seguir.

Cotação da moeda americana (em real) na data da viagem

Casa de câmbio	A	B	C	D	E
Valor (R$)	5,10	5,36	5,60	5,45	5,20

Entre as cinco casas de câmbio apresentadas, a que estava vendendo o dólar pelo valor mais próximo do aumento de 9,4% é a casa de câmbio: **Alternativa c.**

a) A.

b) B.

c) C.

d) D.

e) E.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

As atividades desta seção trabalham com os conteúdos desenvolvidos ao longo da unidade. Muitas delas são mais complexas que as propostas anteriormente. Assim, se considerar pertinente, permita que os estudantes as resolvam em duplas.

Alguns estudantes ainda podem demonstrar dificuldade em identificar quando duas grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais e até mesmo quando não há relação de proporcionalidade entre elas. Esse possível obstáculo pode comprometer o aprendizado dos demais conteúdos. Para esclarecer possíveis dúvidas, apresente aos estudantes uma lista de situações que envolvem duas grandezas e converse com eles com o intuito de estimulá-los a verificar se é possível estabelecer alguma relação de proporcionalidade entre elas.

Como dito anteriormente, o tema porcentagem está presente em diversas situações do cotidiano dos estudantes. Observe se eles apresentam dificuldade ao escrever porcentagens nas formas fracionária e decimal. Se necessário, retome esse conteúdo e proponha outras atividades. Incentive-os a utilizar diferentes estratégias para resolvê-las.

5. Após um ano de funcionamento, os dois sócios de uma empresa obtiveram lucro de R$ 20 000,00. Se o valor a ser recebido deve ser proporcional ao valor que cada um investiu, quanto cada sócio deve receber, sabendo que um deles investiu R$ 190 000,00 e o outro, R$ 210 000,00? **R$ 9 500,00 e R$ 10 500,00.**

6. Indique no caderno a alternativa correta.

(Enem) Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

- Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
- Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
- Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
- Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
- Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: www.blog.saude.gov.br.
Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é: **Alternativa b.**

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

7. Em julho, uma academia distribuiu R$ 500,00 de desconto aos quatro alunos mais assíduos às aulas de natação. Esse desconto foi dado de maneira inversamente proporcional ao número de faltas. Laura, Mônica, Patrícia e Aline tiveram, respectivamente, as seguintes faltas nesse mês: 2, 4, 6 e 8. Quantos reais cada uma delas teve de desconto?

João Picoli/ID/BR

8. Registre no caderno a alternativa correta.

(OBM) Em uma certa cidade, a razão entre o número de homens e mulheres é 2 : 3 e entre o número de mulheres e crianças é 8 : 1. A razão entre o número de adultos e crianças é:

a) 5 : 1.
b) 16 : 1.
c) 12 : 1.
d) 40 : 3.
e) 13 : 1.

Alternativa d.

7. Laura: R$ 240,00; Mônica: R$ 120,00; Patrícia: R$ 80,00; Aline: R$ 60,00.

9. Com um colega, leia a atividade a seguir e a resolva. Depois, registre no caderno a alternativa correta.

(OBM) Em um tanque há 4 000 bolinhas de pingue-pongue. Um menino começou a retirá-las, uma por uma, com velocidade constante, quando eram 10 h. Após 6 horas, havia no tanque 3 520 bolinhas. Se o menino continuasse no mesmo ritmo, quando o tanque ficaria com 2 000 bolinhas? **Alternativa a.**

a) Às 11 h do dia seguinte.
b) Às 23 h do dia seguinte.
c) Às 4 h do dia seguinte.
d) Às 7 h do dia seguinte.
e) Às 9 h do dia seguinte.

10. Indique no caderno a alternativa correta.

(OBM) Anita imaginou que levaria 12 minutos para terminar sua viagem, enquanto dirigia à velocidade constante de 80 km/h, numa certa rodovia. Para sua surpresa, levou 15 minutos. Com qual velocidade constante essa previsão teria se realizado? **Alternativa c.**

a) 90 km/h
b) 95 km/h
c) 100 km/h
d) 110 km/h
e) 120 km/h

11. Registre no caderno a alternativa correta.

(Obmep) Um trabalho de Matemática tem 30 questões de Aritmética e 50 de Geometria. Júlia acertou 70% das questões de Aritmética e 80% do total de questões. Qual o percentual das questões de Geometria que ela acertou? **Alternativa e.**

a) 43%
b) 54%
c) 58%
d) 75%
e) 86%

12. Resolva a questão a seguir e, depois, indique a alternativa correta no caderno.

(Saresp) A razão entre o número de vértices de um prisma de base pentagonal e o número de vértices de uma pirâmide também de base pentagonal é: **Alternativa b.**

a) 2
b) $\frac{5}{3}$
c) $\frac{3}{2}$
d) 4

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Compreendi o que é a razão entre dois números?
- Compreendi o que é uma proporção e quais são suas propriedades?
- Consigo reconhecer grandezas diretamente e inversamente proporcionais?
- Consegui resolver e elaborar problemas que envolviam a ideia de números e grandezas diretamente ou inversamente proporcionais?
- Consegui utilizar sentenças algébricas para expressar a relação de proporcionalidade entre duas grandezas?
- Compreendi a ideia de variável, representada por letra, para expressar a relação entre duas grandezas?
- Consegui compreender o procedimento da regra de três?
- Compreendi que porcentagem é a razão entre um número qualquer e 100?
- Consigo calcular a porcentagem de um número?
- Consegui resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, utilizando diferentes estratégias e em diferentes contextos?
- Procurei conversar com os colegas ou o professor para esclarecer minhas dúvidas?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

NESTA UNIDADE...

Competência geral
7

Competências específicas de Matemática
1, 2, 5 e 6.

Tema Contemporâneo Transversal
Meio Ambiente.

Habilidades

(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.

(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.

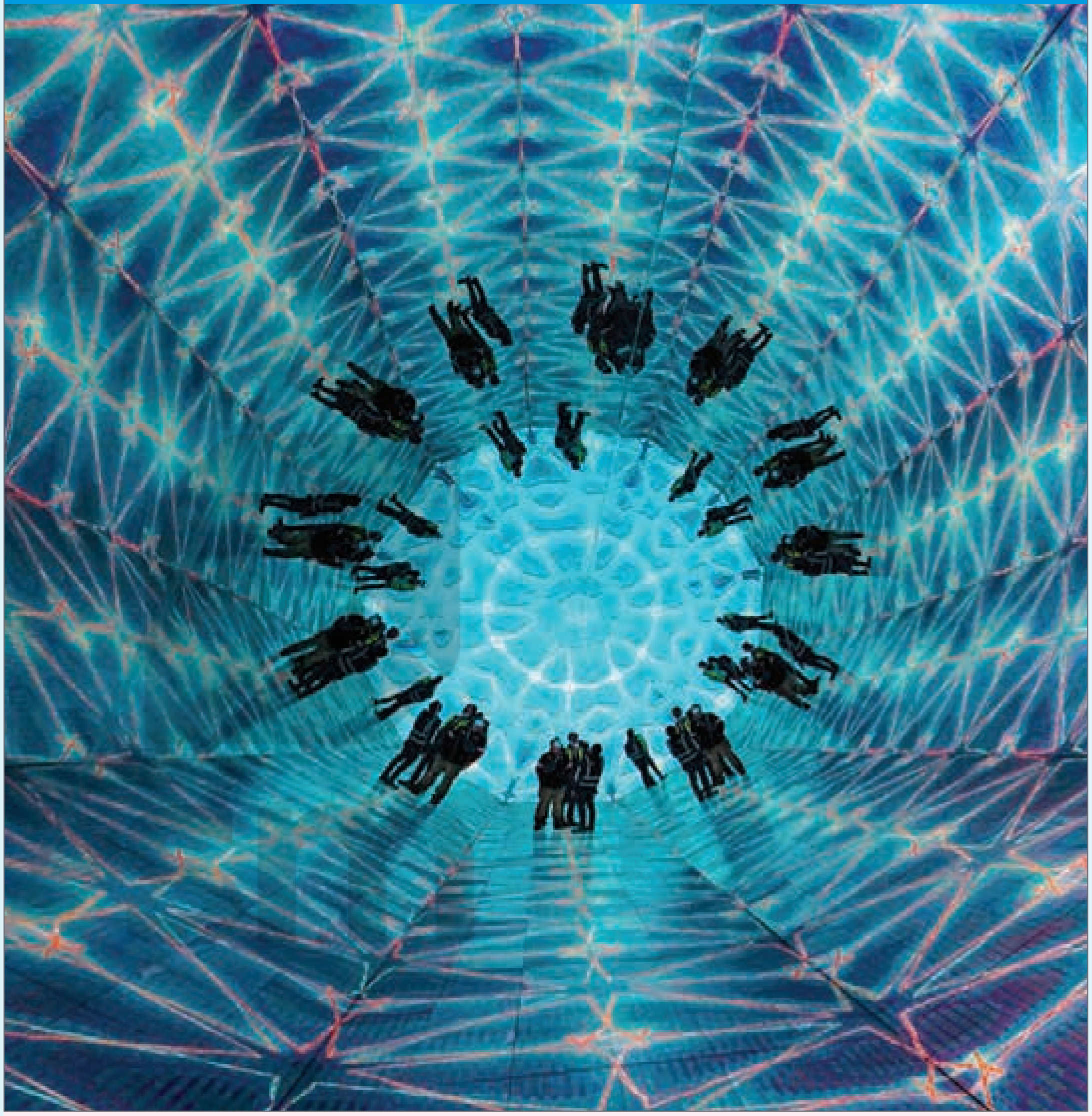
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

(EF07MA33) Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.

UNIDADE 6

CIRCUNFERÊNCIA, CÍRCULO E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS



SOBRE A UNIDADE

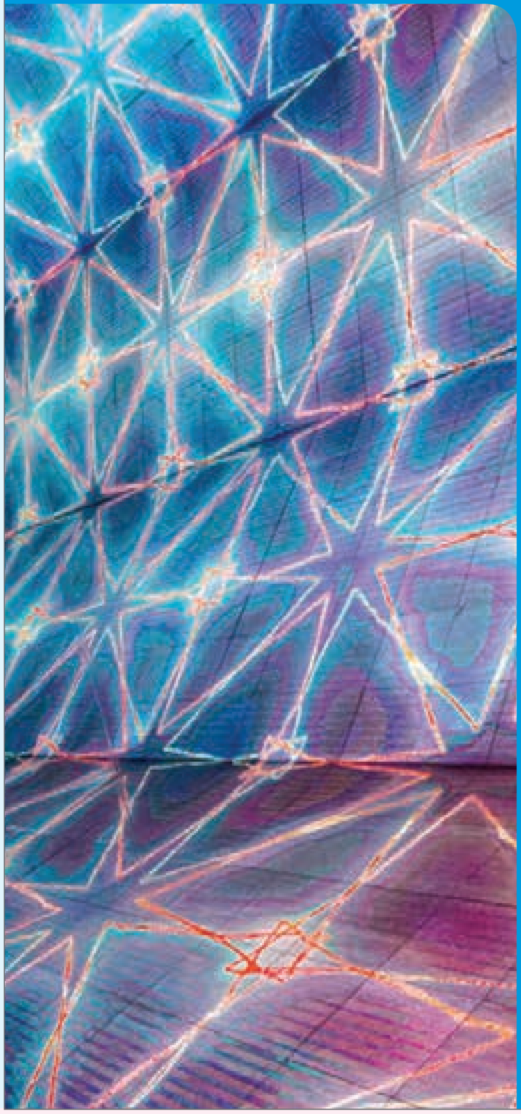
Nesta unidade, o foco é o estudo das circunferências, dos círculos e das transformações geométricas.

No primeiro capítulo da unidade exploram-se as propriedades da circunferência e do círculo como lugar geométrico, propondo-se a seguir uma discussão sobre sua utilidade em situações cotidianas dos estudantes.

Os elementos da circunferência – raio, corda e diâmetro – e a diferença entre circunferência e círculo também são discutidos. Além disso, são abordados conceitos relacionados, como arcos, ângulo central, medida de arco e cálculo do π, bem como as posições relativas a retas e circunferências em eventos físicos.

No segundo capítulo são analisadas as movimentações de figuras no plano por meio de transformações geométricas que mantêm as características e as propriedades das figuras. Essas transformações são isométricas, ou seja, nelas são mantidas também as medidas dos elementos, permitindo o estudo de congruência de figuras. Também são estudadas outras transformações que podem alterar o tamanho e a forma das figuras.

Os conceitos e as propriedades das transformações – reflexão, rotação e translação – são explorados ao longo do capítulo 2. Se julgar oportuno, quando apresentar o conteúdo, mostre exemplos de situações cotidianas: a simetria de translação pode ser observada nas dobradiças de portas e portões, e a simetria de rotação pode ser observada nas hélices de ventilador ou nas turbinas de avião ou de hidrelétricas.



Cover Images/Zuma Press/Fotoarena

PRIMEIRAS IDEIAS

Caleidoscópio é um instrumento que produz padrões de imagens a partir de uma imagem original refletida em um sistema de espelhos. O padrão da reflexão depende da quantidade de espelhos e da posição em que eles são encaixados uns nos outros.

O caleidoscópio mostrado na imagem de abertura funciona como uma instalação e foi lançado em fevereiro de 2022. Ele é considerado o maior do mundo nessa categoria. Seu comprimento mede 40 metros, sua altura, 6 metros, e sua largura, 3 metros.

Esse caleidoscópio foi projetado com espelhos sem costura ou dobras, o que permite dar a ideia de um ambiente em constante expansão.

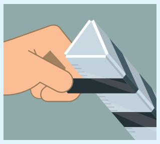
1. Você conhece um caleidoscópio? Se sim, já utilizou um?
2. Você sabe o que é reflexão?
3. Em sua opinião, é possível encontrar algum eixo de simetria na imagem de abertura desta unidade?

← Maior caleidoscópio do mundo do tipo instalação, na cidade de Riyadh, Arábia Saudita. Foto de 2022.

PRIMEIRAS IDEIAS

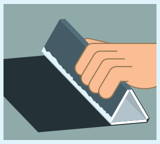
- Leia o texto de abertura com os estudantes e pergunte a eles se já tiveram a oportunidade de manusear um caleidoscópio.
- Aproveite a discussão sobre a imagem de abertura para propor a montagem de um caleidoscópio. Esclareça que o caleidoscópio tem um padrão da reflexão que depende da quantidade de espelhos e da posição em que eles são encaixados uns nos outros. É possível construir um caleidoscópio de maneira simples, como proposto a seguir.

  1. Faça um tubo no formato de um prisma de base triangular unindo três réguas transparentes iguais (de preferência, novas, para refletir melhor). Use fita adesiva para afixá-las.

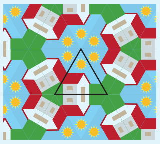
  

  Ilustrações: Mario Kanno/ID/BR

  2. Encape cuidadosamente esse tubo com um papel escuro, de forma que não passe luz pelas réguas.

  3. Pronto! Olhe em uma das extremidades do tubo e veja a outra extremidade refletindo várias formas em seu caleidoscópio.

RESPOSTAS

1. Respostas pessoais. Se os estudantes ainda não conhecem ou nunca usaram um caleidoscópio, sugira a construção dele. Lembre-se de solicitar com antecedência os materiais necessários.
2. Resposta pessoal. Pode-se discutir com os estudantes o que eles entendem por reflexão. Talvez eles relacionem a palavra ao uso de um espelho. Isso é interessante, pois lhe dá a oportunidade de esclarecer que um espelho é um plano de simetria que gera a reflexão de uma figura.
3. Resposta pessoal. Discuta com os estudantes o que eles entendem por eixo de simetria.

Além disso, é interessante conversar com os estudantes sobre as transformações geométricas – por reflexão, rotação e translação –, ressaltando a simetria entre objeto e imagem e suas diversas aplicações no cotidiano e em outras áreas de conhecimento. Na Física, por exemplo, o estudo de espelhos, no campo da óptica, envolve conhecimentos de simetria de reflexão da imagem em espelhos planos. Na Biologia, a reflexão está presente no estudo da simetria de diversos organismos, como estrela-do-mar, peixe, borboleta e corpo humano. Se possível, converse com o professor de Ciências para realizar uma atividade interdisciplinar.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Circunferência.
- Elementos de uma circunferência: raio, corda, diâmetro, arcos e ângulo central.
- Medida de comprimento e medida angular de um arco.
- Cálculo aproximado do número π.
- Posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências.
- Círculo e setor circular.

Objetivos

- Conhecer os elementos da circunferência e do círculo.
- Reconhecer posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de reconhecer a circunferência e o círculo e seus elementos em diversas situações. Além disso, vão explorar posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências. Com esses estudos, eles estarão desenvolvendo o pensamento geométrico por meio de atividades que contribuem para um saber lógico, intuitivo e que caminha para o sistematizado.

CIRCUNFERÊNCIA

- Use o texto sobre o cálculo da idade das árvores para introduzir o conceito de circunferência. Os anéis de crescimento que lembram circunferências no tronco das árvores, formados ano a ano, são um exemplo de como a Geometria pode ser identificada na natureza.
- Esclareça sobre os métodos de estimar a idade das árvores, sem danificá-las, por exemplo baseando-se em padrões de crescimento, como mencionado no Livro do Estudante.
- Pesquise com os estudantes outros elementos da natureza em que a circunferência está presente. Depois, proporcione um momento de troca de ideias, a fim de contribuir para o desenvolvimento da responsabilidade em relação à preservação ambiental. Esta é uma oportunidade para o trabalho com o **Tema Contemporâneo Transversal Meio Ambiente**.
- Depois, leve os estudantes a refletir sobre como o desmatamento atual pode impedir futuramente a obtenção de dados das árvores com idade mais avançada. Se julgar necessário, apresente a eles um boletim do Sistema de Alerta de Desmatamento, disponível em: https://imazon.org.br/wp-content/uploads/2022/02/SAD_Janeiro2022.pdf (acesso em: 31 maio 2022).

Capítulo

1

CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

Os conceitos desenvolvidos neste capítulo são a base para a compreensão dos conceitos de área do círculo e de comprimento da circunferência, que serão estudados no 8º ano, e da relação entre arcos e ângulos na circunferência, que será estudada no 9º ano, e também para a construção do gráfico de setores, que será estudada mais adiante neste volume.

Circunferência

Você sabia que a idade de uma árvore pode ser calculada por medições de seu tronco?

Ao longo de sua vida, as árvores crescem e desenvolvem-se tanto em altura quanto em espessura. O crescimento em espessura é o aumento do diâmetro do tronco, por meio de camadas que vão se formando ao redor dele, com o passar do tempo, de dentro para fora.

Essas camadas são chamadas de anéis de crescimento, e cada par de anéis (claro e escuro) corresponde a um ano de vida da árvore. As árvores costumam crescer em períodos mais quentes e chuvosos, e, em regiões com melhores condições climáticas, os anéis de crescimento são mais largos. Então, para determinar a idade de uma árvore, verifica-se o número de duplas de anéis aparentes em uma secção transversal de seu tronco.

Secção transversal: ponto ou local em que algo foi cortado ou dividido em sentido perpendicular.

Alzay/Shutterstock.com/ID/BR

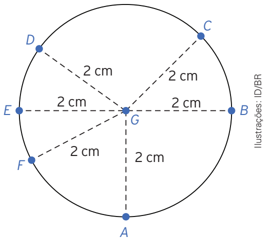
↓ Ecologista medindo o comprimento da circunferência do tronco de uma árvore durante pesquisa na Floresta Nacional do Tapajós, no Pará. Foto de 2019.

Marizilda Cruppe/Rede Amazônia Sustentável/AFP

Tradicionalmente, o método de datação de árvores mais usado era o processo de contagem dos anéis de crescimento. Esse procedimento, além de danificar as árvores, tinha algumas limitações, pois árvores muito velhas sofrem degradação na parte interna do tronco, ficando ocas. Por isso, professores e pesquisadores da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (Utad), em Portugal, desenvolveram um método de datação baseado em padrões de crescimento, que não danifica as espécies. Segundo essa metodologia, a idade das árvores é estimada por um modelo matemático que relaciona medidas do raio, do diâmetro e do perímetro do tronco de determinado exemplar de uma espécie de acordo com a idade. Com esse modelo, é possível datar qualquer outra árvore da mesma espécie e região. Essa técnica permite a datação de uma árvore sem necessidade de causar nenhuma lesão a ela. Além disso, é possível determinar a idade de árvores ocas.

O texto anterior menciona termos como “raio” e “diâmetro”. Esses termos estão relacionados a uma figura geométrica chamada circunferência.

Circunferência é conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo nesse plano.



Ilustrações: ID/BR

LUGAR GEOMÉTRICO

Lugar geométrico é o conjunto de todos os pontos que têm uma propriedade em comum.

A circunferência é um lugar geométrico.

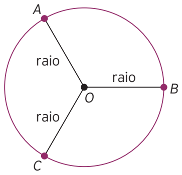
O ponto fixo do plano chama-se **centro** da circunferência. Observe que ele não pertence à circunferência.

Elementos da circunferência

Vamos conhecer alguns elementos da circunferência.

Raio

Raio é qualquer segmento de reta cujas extremidades são o centro da circunferência e um ponto qualquer dela.



$\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ são raios da circunferência de centro *O*.

A distância de qualquer ponto da circunferência ao centro é a medida do raio, que indicaremos por *r*.

- Leia o boxe com os estudantes e peça a eles que expliquem qual é a propriedade comum a todos os pontos da circunferência que a definem como lugar geométrico. Espera-se que eles compreendam que a circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo.
- Apresente aos estudantes a definição dos elementos da circunferência e discuta com eles as diferenças entre raio, corda e diâmetro.

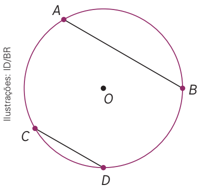
- Apresente aos estudantes a imagem dos Arcos da Lapa e a do Arco do Triunfo e diga que são exemplos de como arcos de uma circunferência podem aparecer na arquitetura. Incentive-os a refletir sobre as semelhanças entre as edificações e sobre a influência, em nosso país, da cultura e da arquitetura de outros povos, bem como sobre o uso de tecnologias estrangeiras. Nessa abordagem, apresente os aspectos sociais, históricos e culturais de outros países, destacando as semelhanças e as diferenças com a realidade brasileira.
- Comente que os Arcos da Lapa foram construídos na época colonial, no século XVIII, com mão de obra escravizada, e consistiam em um aqueduto que transportava a água da nascente de um rio até outra região, inspirado nesse mesmo sistema de captação de águas em Portugal. Posteriormente, os arcos foram utilizados como via de transporte, por onde passava um bonde. Atualmente, eles foram revitalizados para fins turísticos.
- Se possível, mostre aos estudantes a história dos Arcos da Lapa, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=4jash7JqFNo (acesso em: 31 maio 2022).
- Por fim, oriente-os a observar se há arcos na arquitetura da região em que vivem, a fim de contextualizar o tema com a realidade deles.

DE OLHO NA BASE

Os exemplos apresentados colaboram para que os estudantes reconheçam figuras geométricas em representações planas de elementos arquitetônicos, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA22**.

Corda

É qualquer segmento de reta cujas extremidades são dois pontos quaisquer da circunferência.

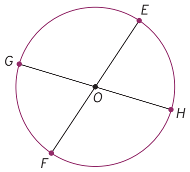


Ilustrações: ID/BR

$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são cordas da circunferência de centro *O*.

Diâmetro

Diâmetro é qualquer corda que passe pelo centro da circunferência.



$\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ são diâmetros da circunferência de centro *O*.

PARE E REFLITA

Meça o diâmetro e o raio da circunferência ao lado. O que você percebe?

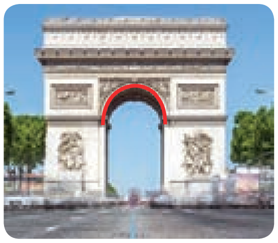
Espera-se que os estudantes percebam que a medida do raio é a metade da medida do diâmetro ou que a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio.

Arcos de circunferência

Observe as imagens das construções a seguir.

Rodrigo S. Coelho/Shutterstock.com/ID/BR

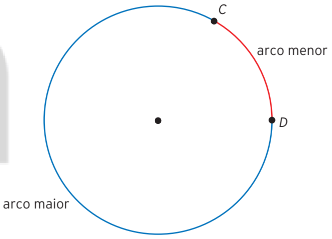
Arcos da Lapa, no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2020.



PIKSL Aurelien KEMPF/Shutterstock.com/ID/BR

Arco do Triunfo, em Paris, França. Foto de 2020.

Os elementos destacados nas imagens lembram arcos de circunferência. Observe a circunferência a seguir.



Arcos com extremidades nos pontos *C* e *D*.

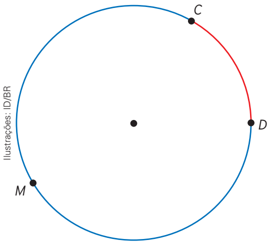
OUTRAS FONTES

Silva, M. L. de P. *et al*. Um estudo de arcos geométricos na arquitetura de Antonio José Landi. *In*: XI ENEM, 2013, Curitiba. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática*. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/3028_1749_ID.pdf. Acesso em: 30 maio 2022.

Relato de experiência sobre abordagens didáticas de ensino de Geometria na formação inicial de professores de Matemática, com foco no ensino de arcos geométricos utilizando a investigação histórica do patrimônio arquitetônico.

Perceba que os dois pontos distintos *C* e *D*, que pertencem à circunferência, dividem-na em duas partes. Cada uma dessas partes é chamada de **arco de circunferência**.

Para diferenciar a indicação do arco de maior medida da indicação do arco de menor medida, escolhemos um ponto em um dos arcos e os representamos da seguinte maneira:



Ilustrações: ID/BR

- Arco de maior medida, por $\overset{\frown}{CMD}$.
- Arco de menor medida, por $\overset{\frown}{CD}$.

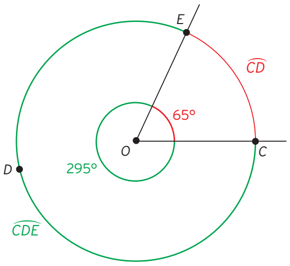
Observação

Quando dois pontos dividem a circunferência em dois arcos de mesma medida de comprimento, chamamos cada um dos arcos de **semicircunferência**.

Ângulo central

Um ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência e cujos lados contêm raios da circunferência é denominado **ângulo central**.

Cada ângulo central está associado a um arco de circunferência e vice-versa. Nas circunferências a seguir, o arco $\overset{\frown}{CD}$ está associado ao ângulo de menor abertura $C\hat{O}E$, e o arco $\overset{\frown}{CDE}$ está associado ao ângulo de maior abertura $C\hat{O}E$.



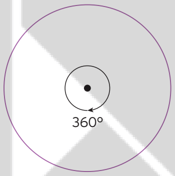
A **medida angular** de um arco de circunferência é definida como a medida do ângulo central associado a ele.

Observação

A medida de um ângulo central não se altera caso a medida do raio da circunferência seja modificada.

CIRCUNFERÊNCIA

O ângulo central da circunferência mede 360°.



- As definições e a relação entre medida de ângulo central e medida do arco apresentadas no texto devem ser bastante exploradas. Ajude os estudantes a inferir qual é a maior medida de arco possível (360°).
- Se possível, leve os estudantes à sala de informática e, utilizando um *software* de geometria dinâmica, verifique a afirmação apresentada como observação no Livro do Estudante: “A medida de um ângulo central não se altera caso a medida do raio da circunferência seja modificada”.

- O compasso, além de servir para transportar medidas, é utilizado para traçar circunferências. Treine com os estudantes o uso desse instrumento.

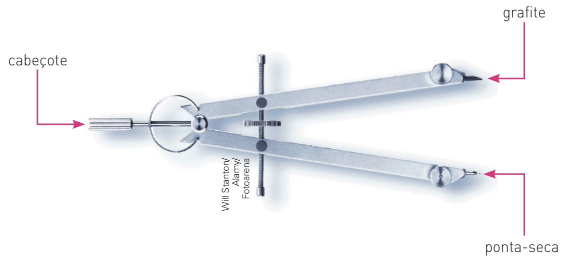
DE OLHO NA BASE

Após apresentar a definição e os elementos da circunferência, peça aos estudantes que a construam utilizando compasso e a reconheçam como lugar geométrico, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA22**.

- Se julgar oportuno, mostre aos estudantes como traçar uma circunferência sem compasso, utilizando dois lápis e um barbante, por exemplo. Para isso, amarre um barbante em um dos lápis. O barbante deve ter o comprimento do raio da circunferência que se deseja traçar. Pegue a ponta livre do barbante e apoie na superfície da folha. Esse apoio pode ser feito com o outro lápis, que será o centro da circunferência. Em seguida, estique o barbante e, com ele sempre esticado, trace a circunferência.

Construindo circunferências com compasso

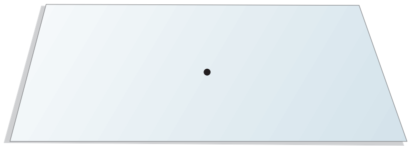
O compasso é formado por duas hastes: em uma delas, há a ponta-seca e, na outra, a grafite. Veja um modelo a seguir.



Will Stanton/Alamy/Fotoarena

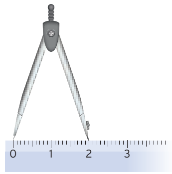
Para construir uma circunferência utilizando o compasso, acompanhe os passos a seguir.

1º passo: Com um lápis, marque um ponto qualquer em uma folha de papel.

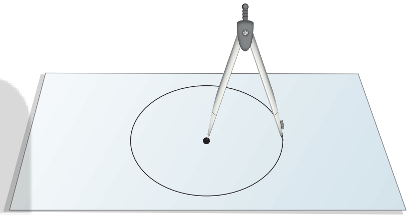


Ilustrações: ID/BR

2º passo: Abra o compasso na medida desejada. Por exemplo, 2 cm.



3º passo: Coloque a ponta-seca no ponto marcado, segure o cabeçote do compasso e trace a circunferência com o grafite, girando o compasso até completar uma volta.



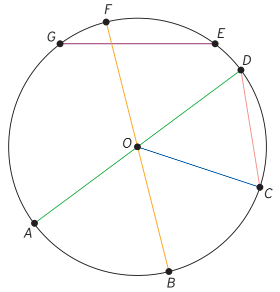
Dessa forma, traçamos uma circunferência cujo raio mede 2 cm de comprimento.

sm

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Observe a circunferência de centro *O* a seguir e, depois, responda às questões.



Quais dos segmentos representam:

a) os raios? **$\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ e $\overline{OF}$**

b) as cordas? **$\overline{GE}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{BF}$**

c) os diâmetros? **$\overline{AD}$ e $\overline{BF}$**

2. Qual é a medida do diâmetro de uma circunferência cuja medida do raio mede 6,5 cm? **13 cm**

3. Qual é a medida do raio de uma circunferência cuja medida do diâmetro mede 21 cm? **10,5 cm**

4. Uma circunferência tem quantos raios? E quantos diâmetros? **Infinitos. Infinitos.**

5. Considere uma circunferência de 30,3 cm de medida de raio. Quanto mede a maior corda dessa circunferência? **60,6 cm**

6. Considere duas circunferências, *A* e *B*. Sabendo que a medida do raio de *A* é o triplo da medida do diâmetro de *B* e que a medida do raio de *B* é igual a 7 cm, quanto mede o diâmetro de *A*? **84 cm**

7. A medida do raio e a medida do diâmetro de uma circunferência são expressas como $(4x - 2)$ cm e $(x + 10)$ cm, respectivamente. Quanto mede o raio dessa circunferência? **6 cm**

8. Desenhe no caderno uma circunferência com: **Consulte as respostas neste manual.**

a) 3 cm de medida de raio;

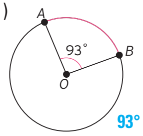
b) 2,5 cm de medida de raio;

c) 8 cm de medida de diâmetro;

d) 9 cm de medida de diâmetro.

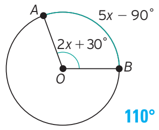
9. Determine a menor medida, em grau, do arco $\overset{\frown}{AB}$ nos casos a seguir.

a)



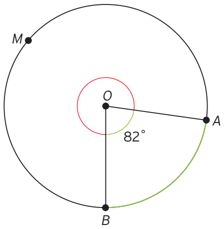
93°

b)



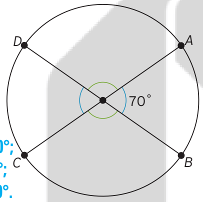
110°

10. Observe a figura a seguir e determine a medida, em grau, do arco $\overset{\frown}{AMB}$. **278°**



11. Qual é a medida, em grau, do ângulo central associado a uma semicircunferência? **180°**

12. Determine as menores medidas, em grau, dos arcos $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{DC}$ e $\overset{\frown}{CB}$.



Ilustrações: ID/BR

$\text{med}(\overset{\frown}{AD}) = 110°$;
$\text{med}(\overset{\frown}{DC}) = 70°$;
$\text{med}(\overset{\frown}{CB}) = 110°$.

13. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

a) Se dois ângulos centrais de uma circunferência são congruentes, os arcos correspondentes a esses ângulos centrais são congruentes entre si. **Verdadeira.**

b) Dois ângulos que têm vértice no centro de uma circunferência são congruentes. **Falsa.**

c) Um ângulo central de medida *x* determina dois arcos na circunferência: um arco de medida *x* e outro arco de medida (180° − *x*). **Falsa.**

- Na atividade **7**, os estudantes devem utilizar a relação entre a medida do raio e a medida do diâmetro, identificando que a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio, e depois escrever e resolver a equação:

$$x + 10 = 2 \cdot (4x - 2)$$

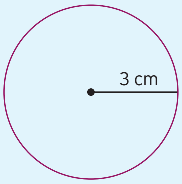
Depois de resolverem a equação, verifique se os estudantes compreendem que é necessário substituir o valor de *x* em $(4x - 2)$, obtendo a medida do raio: 6 cm.

DE OLHO NA BASE

A atividade **8** permite aos estudantes construir circunferências utilizando o compasso, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA22**.

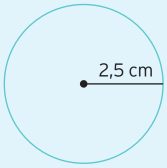
RESPOSTAS

8. a)

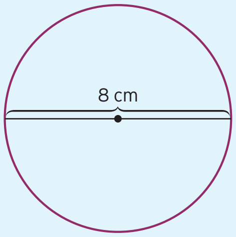


Ilustrações: ID/BR

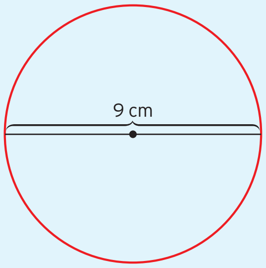
b)



c)



d)



DESCUBRA MAIS

A razão entre a medida do diâmetro e a medida do comprimento de uma circunferência remete a um número do conjunto dos números irracionais, que será estudado futuramente, no 9º ano. Porém, neste momento, os estudantes têm a oportunidade de obter o valor aproximado desse número, representado por π.

As atividades propostas nesse boxe exploram a ideia da razão entre a medida do diâmetro de uma circunferência e a medida do comprimento dela. Discuta a ideia com os estudantes, para que compreendam essa razão e o número π. A discussão contribui para a compreensão da existência de uma razão constante em figuras geométricas. Atividades desse tipo permitem aos estudantes reconhecer padrões, levantar hipóteses e fazer conjecturas, contribuindo para o desenvolvimento dos raciocínios abdutivo e indutivo.

Organize os estudantes em grupos e apresente o maior número possível de objetos circulares para eles calcularem a razão. O uso de calculadora favorece a realização dessa atividade, pois é necessário desenvolver vários cálculos com rapidez.

DE OLHO NA BASE

Por meio dessas atividades, espera-se que os estudantes reconheçam o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e a medida de seu diâmetro, podendo utilizá-la para resolver problemas, desenvolvendo, assim, a habilidade **EF07MA33**.

DESCUBRA MAIS

Uma razão especial

Já vimos uma relação importante na circunferência: a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio. Vimos também que uma das características da circunferência é a equidistância de seus pontos em relação ao seu centro.

Uma circunferência é sempre uma ampliação perfeita de outra menor. Com base nesses fatos, vamos verificar se existe uma razão de proporcionalidade entre suas partes.

Materiais

- objetos circulares de medida de raios diferentes (forma de bolo, tampa de panela, latas, etc.)
- fita métrica
- régua
- calculadora simples
- caderno para anotações
- lápis ou caneta

Como fazer

❶ Construa um quadro como este para organizar as informações dos itens 2 a 5.

Objeto	Medida do comprimento da circunferência (em cm)	Medida do diâmetro (em cm)	Razão entre a medida do comprimento e a medida do diâmetro

❷ Contorne toda a parte externa circular do objeto com a fita métrica. Ajuste-a ao objeto e verifique o valor medido. Anote no quadro a medida do comprimento da circunferência medida.

Fotografias: Sérgio Dotta Jr./ID/BR

❸ Agora, meça o diâmetro do objeto. A fita métrica deve passar pelo centro da circunferência. Anote no quadro a medida do diâmetro obtida.

❹ Repita o procedimento de obtenção das medidas de todos os objetos circulares e anote as medidas no quadro.

❺ Com a calculadora, divida a medida do comprimento de cada circunferência pela correspondente medida do diâmetro. Registre esses valores na última coluna do quadro.

OUTRAS FONTES

Eves, H. *Introdução à história da Matemática*. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

O autor adota uma narrativa da história da Matemática que vai desde a Antiguidade até os tempos modernos, sendo alguns capítulos introduzidos por panoramas culturais da época abordada.

Lima, E. L. *Meu professor de Matemática e outras histórias*. São Paulo: SBM, 2012.

O livro aborda tópicos de Matemática que constam de programas escolares dos diferentes níveis de ensino. Ele é dirigido aos professores de Matemática e esclarece algumas questões com que eles deparam em sala de aula.

Para concluir

Responda sempre no caderno.

1. Observe as medidas do comprimento e do diâmetro da circunferência de cada objeto. Elas variaram de objeto para objeto? **Sim. Se os objetos escolhidos para a atividade têm medidas de raio diferentes, as medidas do comprimento e do diâmetro serão diferentes.**
2. Observe o que você preencheu na coluna *Razão entre a medida do comprimento e a medida do diâmetro* do quadro da página anterior. O que você percebeu? **Espera-se que os estudantes tenham percebido que, embora haja diferenças, o valor da razão está próximo de 3.**
3. O número que se obtém ao dividir a medida do comprimento de uma circunferência pela medida de seu diâmetro é representado pela letra grega π (pi) e tem o valor racional aproximado:

   $$\pi = 3{,}14159265$$

   Compare esse número com os quocientes obtidos na última coluna do quadro da página anterior. **Resposta pessoal.**
4. Se a razão entre a medida do comprimento da circunferência e a medida do seu diâmetro é constante e vale, aproximadamente, 3,14, isso significa que podemos calcular a medida do comprimento de uma circunferência multiplicando a medida do diâmetro por 3,14. Se quisermos calcular a medida do diâmetro, sabendo a medida do comprimento, o que podemos fazer? **Podemos dividir o valor da medida do comprimento da circunferência por 3,14.**
5. A medida do diâmetro de uma circunferência mede 5 cm. Qual é a medida do comprimento aproximado dessa circunferência? **15,7 cm**
6. Se a medida do comprimento de uma circunferência é 31,4 cm, então qual é a medida do seu diâmetro? **10 cm**

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

O cálculo de π

A busca de um valor exato para a razão entre a medida do comprimento da circunferência e a medida de seu diâmetro constituiu-se, certamente, em um dos problemas geométricos mais antigos da história. Na Antiguidade, os egípcios acreditavam que essa razão valia, aproximadamente, $\frac{256}{81}$. Na Mesopotâmia, os antigos babilônios usavam a fração $\frac{25}{8}$. Por volta do século II, em Alexandria, o filósofo grego Ptolomeu aproximou o valor de π da fração $\frac{377}{120}$. Porém, uma das primeiras tentativas de se calcular rigorosamente o comprimento da circunferência e o valor de π é atribuída a Arquimedes (287-212 a.C.).

Em sua obra *As medidas do círculo*, Arquimedes desenvolveu um método de aproximações para cálculo do comprimento da circunferência. Ele obteve um valor para π entre 3,1408 e 3,1428, uma aproximação excelente para a época.

Com a invenção do computador, o cálculo do valor de π evoluiu de tal maneira que, em 2002, os pesquisadores japoneses Kanada e Takahashi conseguiram obter um valor com mais de 1 trilhão de casas decimais.

Fonte de pesquisa: São Paulo (Estado). Secretaria da Educação. *Material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo*: caderno do professor – Matemática, Ensino Fundamental – anos finais, 8ª série/9º ano. São Paulo: SE/Cenp, 2014.

Agora é com você! Faça uma pesquisa para descobrir se os cálculos do número π evoluíram após 2002. Depois, exponha oralmente para a turma o que descobriu. **Consulte a resposta neste manual.**

MATEMÁTICA TEM HISTÓRIA

Discuta com os estudantes a busca de vários matemáticos por um número na forma de fração (com numerador e denominador naturais) para representar π. É importante salientar que nessa busca eles encontraram números aproximados, e não o valor exato de π, que é irracional.

RESPOSTA

A resposta depende da pesquisa realizada.

É possível encontrar vários estudos sobre o número π. Uma das possibilidades de pesquisa é no *site* https://www2.ifsc.usp.br/portal-ifsc/o-numero-pi-com-628-trilhoes-de-casas-decimais/ (acesso em: 31 maio 2022).

Os estudantes poderão verificar que, em 2021, o número π foi calculado com uma precisão de 62,8 trilhões de casas decimais por pesquisadores da Universidade de Ciências Aplicadas de Graubünden (Suíça). Esse tipo de atividade incentiva a prática de pesquisa com foco na História da Matemática.

DE OLHO NA BASE

Apresentar o contexto histórico do desenvolvimento dessa razão, bem como a busca de vários matemáticos pela sua representação, permite aos estudantes valorizar e utilizar conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico para entender e explicar a realidade, desenvolvendo a **competência específica de Matemática 1**.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

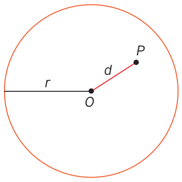
- Discuta com os estudantes as possíveis relações entre ponto e circunferência. Desenhe uma circunferência na lousa e marque possíveis pontos, destacando que eles podem estar na parte interna ou externa da circunferência ou pertencer à própria circunferência.
- Após apresentar as posições relativas entre ponto e circunferência, solicite aos estudantes que escrevam proposições relacionadas à descrição de cada posição relativa. Eles podem escrever, por exemplo:
  - Se a medida da distância entre um ponto e o centro de uma circunferência for menor que a medida do raio dessa circunferência, então o ponto é interno à circunferência.
  - Se a medida da distância entre um ponto e o centro de uma circunferência for igual à medida do raio dessa circunferência, então o ponto pertence à circunferência.
  - Se a medida da distância entre um ponto e o centro de uma circunferência for maior que a medida do raio dessa circunferência, então o ponto é externo à circunferência.

Posições relativas entre ponto e circunferência

Podemos determinar a posição de um ponto *P* em relação a uma circunferência ao comparar a medida do raio *r* da circunferência com a medida da distância *d* entre o centro da circunferência e o ponto *P*.

Ponto interno à circunferência

Quando a medida da distância do centro *O* a um ponto *P* é menor que a medida do raio da circunferência, o ponto *P* é **interno** à circunferência.



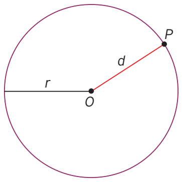
Ilustrações: ID/BR

$d < r$

Reciprocamente, quando um ponto *P* é interno à circunferência, a medida da distância do ponto *P* ao centro da circunferência é menor que a medida do raio.

Ponto pertencente à circunferência

Quando a medida da distância do centro *O* a um ponto *P* é igual à medida do raio da circunferência, o ponto *P* **pertence** à circunferência.

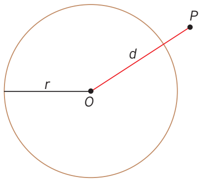


$d = r$

Reciprocamente, quando um ponto *P* pertence à circunferência, a medida da distância do ponto *P* ao centro da circunferência é igual à medida do raio.

Ponto externo à circunferência

Quando a medida da distância do centro *O* a um ponto *P* é maior que a medida do raio da circunferência, o ponto *P* é **externo** à circunferência.



$d > r$

Reciprocamente, quando um ponto *P* é externo à circunferência, a medida da distância do ponto *P* ao centro da circunferência é maior que a medida do raio.

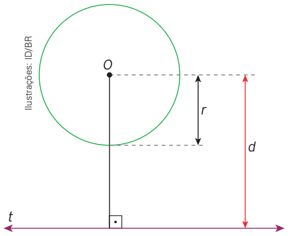
Posições relativas entre reta e circunferência

Podemos determinar a posição de uma reta *t* em relação a uma circunferência ao comparar a medida do raio *r* da circunferência com a medida da distância *d* entre o centro da circunferência e a reta *t*.

Reta externa à circunferência

Uma reta *t* é externa a uma circunferência quando a reta *t* e a circunferência não têm nenhum ponto comum.

Ilustrações: ID/BR

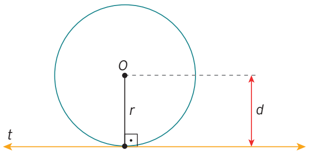


$d > r$

Nesse caso, a medida da distância *d* entre o centro da circunferência e a reta *t* é maior que a medida do raio *r*.

Reta tangente à circunferência

Uma reta *t* é tangente a uma circunferência quando a reta *t* e a circunferência têm um único ponto comum.



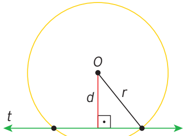
$d = r$

Nesse caso, a medida da distância *d* entre o centro da circunferência e a reta *t* é igual à medida do raio *r*.

A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Reta secante à circunferência

Uma reta *t* é secante a uma circunferência quando a reta *t* intersecta a circunferência em dois pontos distintos.



$d < r$

Nesse caso, a medida da distância *d* entre o centro da circunferência e a reta *t* é menor que a medida do raio *r*.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

- Discuta com os estudantes as posições das retas em relação à circunferência. Comente que:
  - a reta externa não tem nenhum ponto em comum com a circunferência e que a medida da distância do centro da circunferência a essa reta é maior que a medida do raio da circunferência;
  - a reta tangente "encosta" na circunferência, tendo um ponto em comum com ela, e a medida da distância entre ela e o centro é igual à medida do raio da circunferência;
  - a reta secante passa pela parte interna da circunferência, tendo dois pontos em comum com ela. A medida da distância da reta secante em relação ao centro da circunferência é menor que a medida do raio da circunferência.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

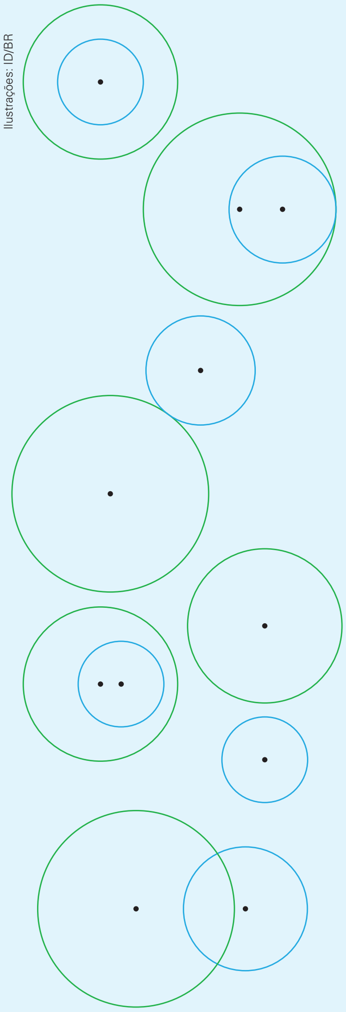
Solicite aos estudantes que, em duplas ou em trios, criem uma circunferência em um *software* de geometria dinâmica e construam três retas: uma externa, uma secante e uma tangente à circunferência criada. Para isso, eles devem refletir sobre as propriedades dessas figuras e sobre como construir, por exemplo, uma reta tangente que sempre esteja tangente à circunferência, independentemente do movimento realizado com qualquer das figuras.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

- Antes de iniciar esse conteúdo, proponha aos estudantes uma atividade com o objetivo de analisar a posição relativa entre duas circunferências. Para essa atividade, eles vão precisar de folhas de papel avulsas, régua e compasso.

  Em duplas ou em trios, os estudantes devem desenhar pares de circunferências em diversas posições. Eles devem observar essas posições e suas propriedades e agrupar aquelas que têm a mesma característica.

  Feita essa classificação, peça aos estudantes que escolham um par de circunferências que represente cada tipo de agrupamento. Verifique se eles escolhem um representante de cada tipo:



Ilustrações: ID/BR

- Discuta as características de cada par de circunferências e pergunte aos estudantes se conhecem alguma situação que possa ser relacionada a elas. Ao analisar as respostas deles, verifique se têm coerência.

Posições relativas entre duas circunferências

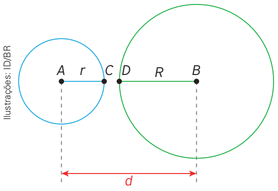
Considere duas circunferências, uma maior, cujo raio mede *R*, e outra menor, cujo raio mede *r*, e a medida da distância *d* entre os seus centros. As relações entre essas medidas determinam a posição relativa entre as circunferências.

Circunferências sem nenhum ponto em comum

Duas circunferências que não têm nenhum ponto em comum podem ser circunferências externas ou internas. O que distingue uma da outra é a medida da distância *d* entre seus centros.

Circunferências externas

Uma circunferência é externa à outra quando a medida da distância *d* entre os centros das circunferências é sempre maior que a soma das medidas dos raios ($r + R$).

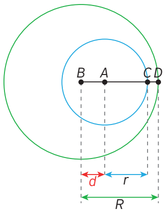


Ilustrações: ID/BR

$d > r + R$

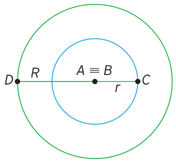
Circunferência interna

Uma circunferência é **interna** à outra quando a medida da distância *d* entre os centros das circunferências é menor que a diferença entre as medidas dos raios ($R - r$).



$d < R - r$

Um caso particular dessa situação ocorre quando a medida da distância é zero, ou seja, quando as circunferências são concêntricas (isto é, têm o mesmo centro).



SÍMBOLO ≡

O símbolo ≡ significa "coincidente".

Por exemplo: $A \equiv B$.

Lemos "o ponto *A* coincide com o ponto *B*".

COROA CIRCULAR

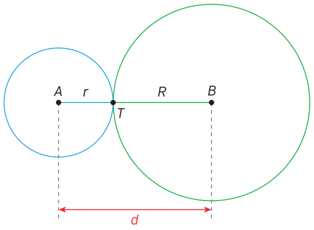
Região limitada por duas circunferências concêntricas de raios não congruentes.

Circunferências com um ponto em comum

Duas circunferências que têm apenas um ponto em comum são denominadas circunferências **tangentes**. Elas podem ser tangentes externas ou tangentes internas.

Circunferências tangentes externas

Duas circunferências são **tangentes externas** quando a medida da distância *d* entre os centros das circunferências é igual à soma das medidas dos raios ($R + r$).

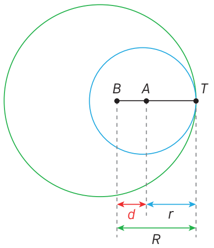


Ilustrações: ID/BR

$d = R + r$

Circunferências tangentes internas

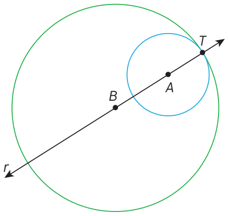
Duas circunferências são **tangentes internas** quando a medida da distância *d* entre os centros das circunferências é igual à diferença entre as medidas dos raios ($R - r$).

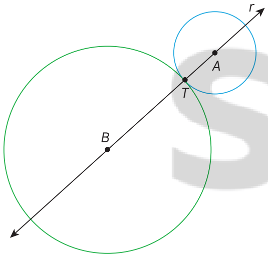


$d = R - r$

Propriedade das circunferências tangentes

Se duas circunferências são tangentes internas ou externas, o centro de cada uma delas e o ponto de contato entre elas pertencem à mesma reta.





- Reproduza na lousa os pares de circunferências citados anteriormente e sugira aos estudantes que os copiem no caderno. Em seguida, peça que meçam as distâncias entre os centros de cada par de circunferência.
- Chame a atenção deles para a medida da distância entre os centros das circunferências em cada caso. Para isso, pergunte: O que ocorre com as medidas das distâncias comparadas com as medidas dos raios quando os pares de circunferência têm um, dois ou nenhum ponto em comum?
- Analise as respostas dos estudantes e siga com o conteúdo destas páginas, nomeando as posições de uma circunferência em relação a outra e explicitando suas propriedades, de acordo com a medida da distância entre os centros.

Respeito ao espírito olímpico

Leia com os estudantes o boxe *Respeito ao espírito olímpico* e pergunte a eles se já tinham escutado falar nessa medalha. Aproveite o momento e questione se eles conhecem outras homenagens que são feitas em olimpíadas.

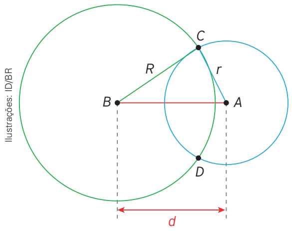
RESPOSTAS

1. Resposta pessoal. Comente com os estudantes que o nome da medalha é uma homenagem a Pierre de Coubertin (1863-1937), aristocrata francês que teve a ideia de retomar os jogos olímpicos na era moderna como uma competição internacional inspirada nos jogos olímpicos da Antiguidade. Ele criou o Comitê Olímpico Internacional, que em 1964 resolveu homenageá-lo com um novo tipo de premiação, a medalha Pierre de Coubertin.
2. Resposta pessoal. Vanderlei recebeu a medalha nas Olimpíadas de 2004, em Atenas, na Grécia, quando, ao liderar a competição, foi agarrado por um padre irlandês e perdeu a liderança, mas continuou na prova e recebeu a medalha de bronze. Além dessa homenagem, Vanderlei Cordeiro de Lima teve a honra de acender a pira olímpica nos Jogos Olímpicos do Rio de Janeiro, em 2016. Outras informações acerca da homenagem a esse atleta podem ser obtidas no *site* http://institutocpfl.org.br/medalha-olimpica-de-vanderlei-cordeiro-de-lima-completa-16-anos/ (acesso em: 31 maio 2022).

Circunferências com dois pontos em comum

Duas circunferências que têm dois pontos em comum são chamadas de secantes.

Uma circunferência é **secante** à outra quando a medida da distância *d* entre os centros das circunferências é menor que a soma das medidas dos raios ($r + R$) e maior que a diferença entre a medida deles ($R - r$).

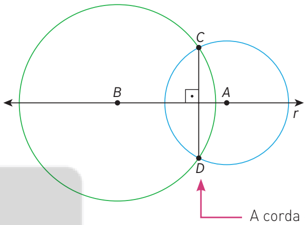


Ilustrações: ID/BR

$$R - r < d < r + R$$

Propriedade das circunferências secantes

A corda comum a duas circunferências secantes é perpendicular à reta que passa pelos centros das circunferências.



A corda comum às circunferências secantes é o segmento cujas extremidades são os dois pontos da intersecção das duas circunferências. Neste exemplo, a corda comum às duas circunferências secantes é o segmento $\overline{CD}$.

RESPEITO AO ESPÍRITO OLÍMPICO

Você conhece a Medalha Pierre de Coubertin? Ela é uma honraria esportiva-humanitária concedida a atletas que demonstrem alto grau de esportividade e espírito olímpico durante a disputa dos jogos.

Essa medalha não tem relação com o desempenho técnico do competidor, mas com suas qualidades morais e éticas e a demonstração do mais puro espírito esportivo em situações difíceis ou inusitadas presentes durante as disputas.

Fernando Dantas/Gazeta Press

↑ Medalha Pierre de Coubertin do maratonista Vanderlei Cordeiro de Lima.

1. Junte-se a um colega para pesquisar um pouco mais sobre essa medalha. Registrem as informações que mais chamarem a atenção de vocês. **Resposta pessoal.**

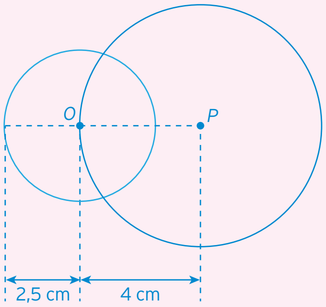
2. O maratonista brasileiro Vanderlei Cordeiro de Lima recebeu uma medalha Pierre de Coubertin. Vocês sabem o motivo? Se sim, compartilhem com os demais colegas. Se não, descubram o que aconteceu para que ele recebesse essa premiação. **Resposta pessoal.**

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

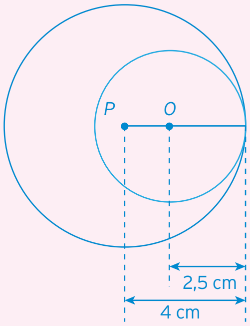
Solicite aos estudantes que resolvam a situação a seguir usando régua e compasso.

Sendo *O* e *P* os centros de duas circunferências de raios com medidas iguais a 2,5 cm e 4 cm respectivamente, construa essas duas circunferências de modo que elas sejam:

a) secantes.
Resposta possível:



b) tangentes internas.
Resposta possível:



Ilustrações: ID/BR

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

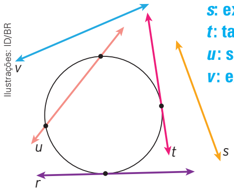
14. Em cada item a seguir são dadas as medidas do raio r de uma circunferência e da distância d entre um ponto P e o centro dessa circunferência. Responda se o ponto P é interno, externo ou pertencente à circunferência.

a) $r = 6$ cm e $d = 12$ cm **Externo à circunferência.**

b) $r = 9$ cm e $d = 4$ cm **Interno à circunferência.**

c) $r = 31$ cm e $d = 31$ cm **Pertencente à circunferência.**

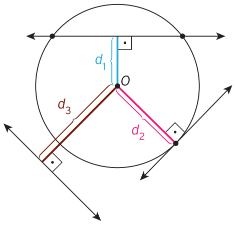
15. Na figura a seguir, qual é a classificação que cada reta recebe em relação à circunferência?



Ilustrações: ID/BR

***r*: tangente;**
***s*: externa;**
***t*: tangente;**
***u*: secante;**
***v*: externa.**

16. Supondo que a medida do raio da circunferência de centro O, a seguir, seja igual a 15 cm, copie os itens no caderno e, depois, substitua os ■ pelos sinais <, > ou = para comparar d_1, d_2 e d_3 com a medida do raio da circunferência.



a) d_1 ■ 15 cm **<**

b) d_2 ■ 15 cm **=**

c) d_3 ■ 15 cm **>**

17. Considere:

- uma circunferência de 15 cm de medida de raio;
- uma reta s;
- a medida da distância d do centro da circunferência à reta s.

Escreva a posição de s em relação à circunferência nos seguintes casos:

a) $d = 8$ cm **Secante.**

b) $d = 16$ cm **Externa.**

c) $d = 15$ cm **Tangente.**

18. Considere um ponto A distante 8 cm do centro O de uma circunferência de 6 cm de medida de raio. Construa essa figura no caderno e trace uma reta passando por A que seja:

a) externa à circunferência;

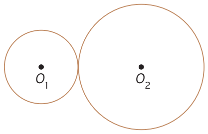
b) tangente à circunferência;

c) secante à circunferência.

Consulte as respostas neste manual.

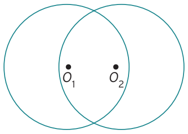
19. Quais são as posições relativas entre as duas circunferências em cada item?

a)



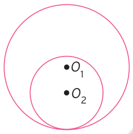
Tangentes externas.

b)



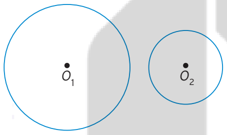
Secantes.

c)



Tangentes internas.

d)



Externas.

20. Sendo r_1 e r_2 as medidas dos raios de duas circunferências e d a medida da distância entre os centros delas, indique a posição relativa em cada caso.

a) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 2$ cm e $d = 2$ cm

b) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 10$ cm e $d = 4$ cm

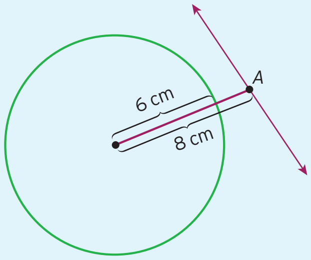
c) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 4$ cm e $d = 9$ cm

21. O segmento determinado por um ponto P, externo a uma circunferência, e o centro dessa circunferência corta a circunferência em um ponto Q pertencente a ela. Determine a medida do raio dessa circunferência, sabendo que a distância entre P e o centro da circunferência mede 25 cm e que $PQ = 15$ cm. **$r = 10$ cm**

20. a) Circunferências tangentes internas.
b) Circunferências internas.
c) Circunferências secantes.

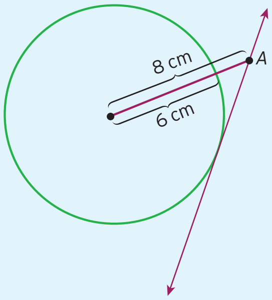
RESPOSTAS

18. a) Resposta possível:

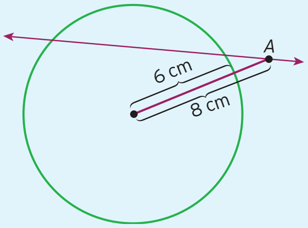


Ilustrações: ID/BR

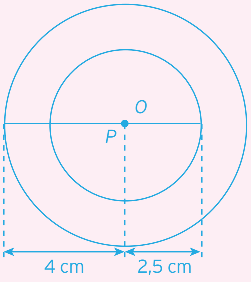
b) Resposta possível:



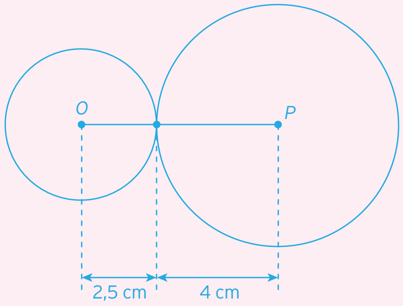
c) Resposta possível:



c) concêntricas.
Resposta possível:



d) tangentes externas.
Resposta possível:



Ilustrações: ID/BR

CIRCUNFERÊNCIAS E ARTE

- Depois de construir a rosácea, desafie os estudantes a fazer novas figuras com a divisão de circunferências em partes iguais e a compartilhar suas produções. Proponha uma exposição dos desenhos para estimulá-los na atividade.
- Se julgar oportuno, sugira aos estudantes que repitam a atividade usando um *software* de geometria dinâmica. Isso permitirá que eles reflitam sobre as propriedades geométricas da figura para que possam construí-la.
- A situação proposta envolvendo a construção de rosáceas por meio do compasso pode ser o ponto de partida para um trabalho interdisciplinar que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF69AR05** [Experimentar e analisar diferentes formas de expressão artística (desenho, pintura, colagem, quadrinhos, dobradura, escultura, modelagem, instalação, vídeo, fotografia, *performance* etc.)] do componente curricular Arte.

DE OLHO NA BASE

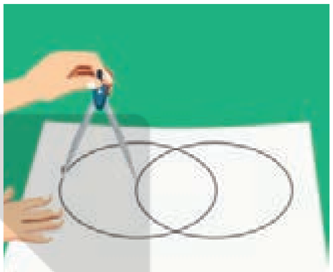
Construir a rosácea de seis pétalas possibilita aos estudantes utilizar circunferências para fazer composições artísticas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA22**.

Circunferências e arte

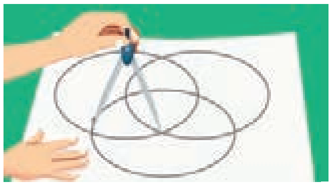
Vamos desenhar uma rosácea de seis pétalas a partir de circunferências. Para isso, acompanhe os passos a seguir.

1º passo: Em uma folha de papel e com um compasso, trace uma circunferência.

2º passo: Com a ponta-seca em um ponto qualquer da circunferência, mantenha a mesma abertura do compasso e trace uma nova circunferência.

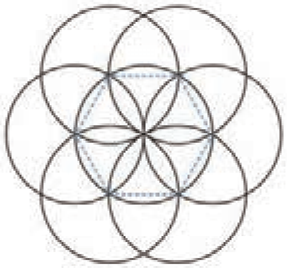


3º passo: Mantenha a mesma abertura do compasso e, com a ponta-seca na intersecção das duas circunferências anteriores, trace uma nova circunferência.

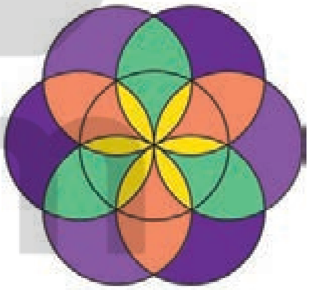


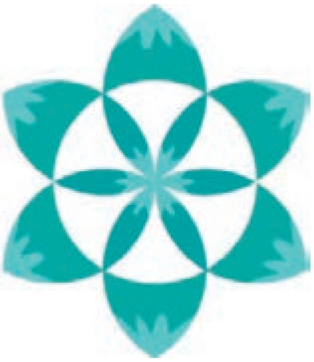
Ilustrações: João Picoli/ID/BR

4º passo: Repita o terceiro passo até obter seis circunferências em torno da circunferência inicial. Observe que a circunferência inicial foi dividida em seis partes congruentes, dando origem a um hexágono regular.



Depois de construir a rosácea, você pode pintá-la do jeito que preferir. Veja os exemplos a seguir.





OUTRAS FONTES

LEMMERTZ, A. S. Construindo rosáceas no *Scratch*. *In*: VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, 2017. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/6545/3057. Acesso em: 31 maio 2022.

Esse artigo traz um relato de experiência com estudantes do 8º ano de uma escola do Rio Grande do Sul que foram convidados a construir uma rosácea utilizando o *software* de programação *Scratch*.

Círculo

Observe os desenhos que Ana fez.

Você sabe explicar a diferença entre circunferência e círculo? **Espera-se que os estudantes percebam que a circunferência é somente o contorno e que o círculo corresponde ao contorno e à parte interna a esse contorno.**

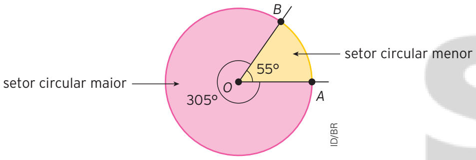
Como já vimos no início deste capítulo, a **circunferência** é o conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma distância fixa de um ponto fixo nesse plano, chamado de centro. Note que a circunferência divide o plano em duas regiões: uma região interna e uma região externa.

O **círculo** é a região do plano formada por uma circunferência e sua região interna.

Setor circular

De maneira semelhante ao que vimos nas circunferências, em um plano, um ângulo cujo vértice é o centro de um círculo é denominado **ângulo central**.

Todo ângulo central de um círculo divide esse círculo em duas partes. Cada uma dessas partes é chamada de **setor circular**. Para distinguir cada uma dessas partes, vamos chamar de setor circular menor o setor que apresenta o ângulo central de menor medida e de setor circular maior o setor que apresenta o ângulo central de maior medida.



Observação

A medida da área do setor circular é diretamente proporcional à medida do ângulo central que o determina.

sm

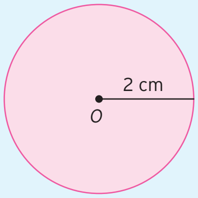
CÍRCULO

- Retome a definição e os elementos de uma circunferência para, depois, apresentar a descrição de círculo.
- Ilustre a diferença entre circunferência e círculo utilizando uma aliança para representar a circunferência e uma moeda para ilustrar o círculo.
- O conceito de setor circular deve ser bem compreendido pelos estudantes, pois eles o utilizarão na construção de gráficos de setores.

- Para auxiliar na visualização dos setores nas atividades **24** e **25**, é possível utilizar os discos de fração. Em ambas as atividades, os estudantes podem fazer divisões para encontrar as respostas.
- Observe como os estudantes resolvem a atividade **26** e verifique se eles percebem que essa atividade pode ser resolvida usando equações do 1º grau.

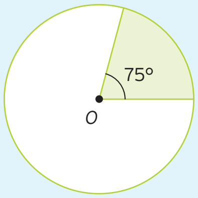
RESPOSTAS

25. a)



Ilustrações: ID/BR

b)



+ INTERESSANTE

Exemplos cotidianos, como as tampas de bueiros, demonstram aos estudantes a importância do estudo sobre as figuras geométricas. Outro exemplo do dia a dia são as embalagens de vários produtos, como as latas de extrato de tomate, de leite em pó, etc.

Se achar oportuno, apresente aos estudantes o vídeo "Isto é Matemática – Reinventar a roda", que apresenta curiosidades sobre o formato das tampas de bueiros, moedas e rodas de bicicleta. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=-fK_v-hyMrUo. Acesso em: 31 maio 2022.

Comente também que no Japão há tampas de bueiro que são um tipo de arte de rua. Para saber mais, visite o *site* https://www.japanhousesp.com.br/artigo/tampa-de-bueiro/ (acesso em: 31 maio 2022).

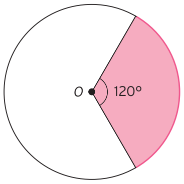
ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

22. Escreva o nome da figura geométrica (círculo ou circunferência) que pode ser relacionada a cada item.

a) Anel. **Circunferência.**
b) Moeda. **Círculo.**
c) Bambolê. **Circunferência.**
d) Tampo de uma mesa redonda. **Círculo.**

23. A parte destacada da figura a seguir mostra um setor circular.



Ilustrações: ID/BR

Quantos setores como esse são necessários para "completar" o círculo? **3 setores.**

24. Calcule mentalmente.

a) Qual é a medida do setor circular que cabe exatamente duas vezes no círculo? **180°**
b) Qual é a medida do setor circular que cabe exatamente cinco vezes no círculo? **72°**

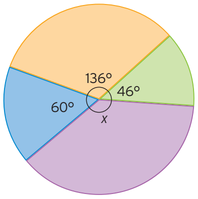
Consulte as respostas neste manual.

25. Com o auxílio de uma régua, de um compasso e de um transferidor, construa as seguintes figuras no caderno:

a) um círculo com 2 cm de medida de raio;
b) um setor circular cujo ângulo central mede 75°.

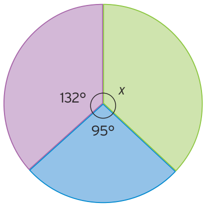
26. Calcule o valor de x, em grau, em cada um dos itens.

a)



$x = 118°$

b)



$x = 133°$

+ INTERESSANTE

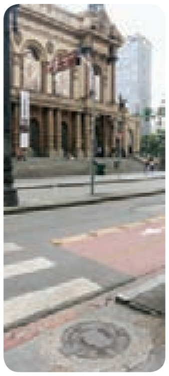
Por que as tampas de bueiros são redondas?

Se você tem o hábito de olhar para o chão enquanto anda, já deve ter notado aquelas tampas de bueiros redondas que ficam no meio das ruas ou nas calçadas. Mas você já se perguntou por que o formato arredondado foi o escolhido para as tampas?

[...] os bueiros são redondos porque é o melhor formato para a compressão da terra ao [seu] redor [...]. Além disso, coisas em formatos redondos são mais fáceis de serem feitas do que coisas em formato retangular ou quadrado. O formato [...] também facilita [na hora de mover as] [...] tampas [...].

Mas talvez a [principal] razão pela qual as tampas de bueiros são redondas é porque tampas redondas não caem em buracos circulares equivalentes. Todo bueiro redondo tem uma borda também arredondada que segura a tampa, e com isso as tampas não podem cair dentro dos bueiros. Tampas quadradas, retangulares ou ovais poderiam cair nos bueiros se fossem colocadas na diagonal, o que seria péssimo para os pedestres e motoristas desavisados.

Fatos desconhecidos. Por que as tampas dos bueiros são redondas? 7 jul. 2015. Disponível em: https://www.fatosdesconhecidos.com.br/por-que-as-tampas-de-bueiros-sao-redondas. Acesso em: 3 mar. 2022.



Valdir de Oliveira/Fotoarena

↑ **Tampa de galeria de água no centro de São Paulo (SP). Foto de 2022.**

DIVERSIFICANDO

Responda sempre no caderno.

1. Considerando que a corda máxima de uma circunferência mede 2,60 m, quanto mede:

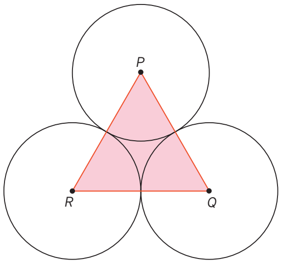
a) o diâmetro dessa circunferência? **2,60 m**

b) o raio dessa circunferência? **1,30 m**

2. Quanto mede a distância entre o centro de uma circunferência de 13,3 cm de medida de raio e uma reta tangente a essa circunferência? **13,3 cm**

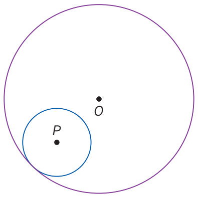
3. Determinada antena emite um sinal eletromagnético que bloqueia o funcionamento de telefones celulares em um raio de 100 m de medida de comprimento. Uma pessoa que esteja a 80 m da base dessa antena consegue usar telefone celular? **Não.**

4. Sabendo que a medida do raio das circunferências a seguir é igual a 5 cm e que os pontos *P*, *Q* e *R* são os centros das circunferências, qual é a medida do perímetro do triângulo *PQR*? **30 cm**



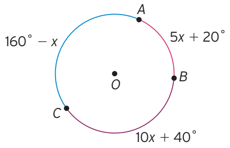
5. Duas circunferências são tangentes internamente uma a outra, e a soma das medidas de seus raios é 23 cm. Determine as medidas dos raios das duas circunferências, sabendo que a distância entre os centros mede 9 cm. **$r_1 = 16$ cm; $r_2 = 7$ cm.**

6. A figura a seguir mostra o esboço de um brinquedo formado por duas rodas. A menor delas gira dentro da maior.



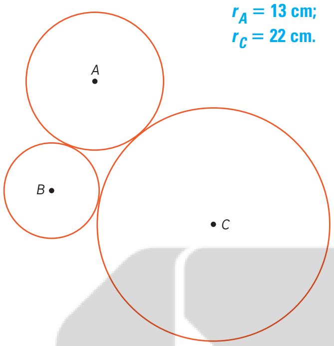
Se a medida do diâmetro da roda maior é 22 cm e a medida do diâmetro da roda menor é 8 cm, quanto mede a distância entre os centros das rodas? **7 cm**

7. Observe a figura.



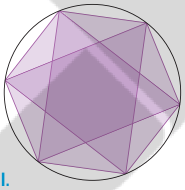
Quantos graus mede o arco $\overset{\frown}{ABC}$? **210°**

8. Três circunferências são mutuamente tangentes, e as medidas das distâncias entre seus centros são $AB = 22$ cm, $AC = 35$ cm e $BC = 31$ cm. Sabendo que o raio da menor circunferência mede 9 cm, determine a medida do raio das outras duas circunferências. **$r_A = 13$ cm; $r_C = 22$ cm.**



Ilustrações: ID/BR

9. Veja a figura que Rose construiu dividindo a circunferência em seis partes iguais.



Reúna-se com um colega para fazer uma figura parecida com a de Rose. **Resposta pessoal.**

10. Um hospital e mais três edifícios (escola, estádio e *shopping*) serão construídos num local onde a medida da distância percorrida no deslocamento do hospital a cada um dos outros edifícios seja a mesma, ou seja, quem sair do hospital percorrerá a mesma distância para ir à escola, ao estádio ou ao *shopping*. Qual é o local mais adequado para construir o hospital, levando em conta apenas esse critério de deslocamento? **Espera-se que os estudantes percebam que o local mais adequado é posicionar o hospital no centro de uma circunferência, de modo que a escola, o estádio e o *shopping* fiquem localizados na circunferência.**

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

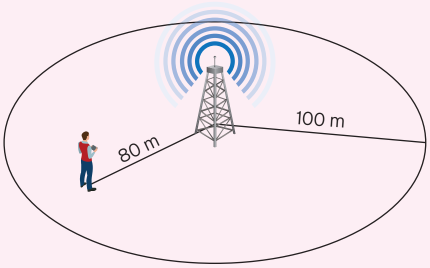
- Nesta seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Solicite aos estudantes que trabalhem em grupos de três integrantes, de forma que possam discutir e analisar cada situação. Aproveite para verificar quais conceitos eles já compreenderam e quais ainda necessitam de nova discussão.
- Na atividade **3**, peça aos estudantes que justifiquem suas respostas. Espera-se que eles percebam que, se a antena bloqueia o funcionamento de telefones celulares em um raio de 100 m de comprimento, então o efeito de bloqueio do sinal emitido tem alcance de 100 m da base da antena.
- Na atividade **4**, verifique se os estudantes percebem que cada lado do triângulo tem a mesma medida de comprimento que o diâmetro de uma circunferência, ou seja, mede 10 cm.
- Para resolver a atividade **8**, os estudantes devem perceber que é necessário começar pela informação de que a medida do raio da circunferência menor é 9 cm e, então, optar por encontrar primeiro a medida do raio da circunferência de centro *A* (r_A) ou a medida do raio da circunferência de centro *C* (r_C).
- Ao resolver a atividade **9**, espera-se que os estudantes construam a figura traçando segmentos cujas extremidades são pontos obtidos ao dividir a circunferência em seis partes iguais.

DE OLHO NA BASE

A atividade **10** possibilita aos estudantes utilizar o que aprenderam sobre circunferência para resolver problemas que envolvem objetos equidistantes, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA22**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Incentive os estudantes a criar desenhos que representem as situações de cada atividade da seção *Diversificando*, de modo que possam refletir com mais cuidado sobre a posição em que circunferências, pontos ou retas devem estar para satisfazer as indicações dos enunciados. Na atividade **3**, por exemplo, a situação pode ser representada como mostra a ilustração a seguir.



ID/BR

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Eixo de simetria.
- Figuras assimétricas.
- Construções de figuras simétricas.
- Transformações geométricas: reflexão, rotação e translação.
- Outras transformações geométricas no plano cartesiano.

Objetivo

- Reconhecimento de simetria e de transformações geométricas.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de reconhecer a ideia de simetria e compreender transformações geométricas, como a reflexão, a rotação e a translação. As habilidades desenvolvidas na realização das atividades propostas são fundamentais para o processo de formação do estudante, pois favorecem o desenvolvimento do pensamento geométrico.

RECONHECENDO A SIMETRIA

- Aproveite a imagem do Templo de Mármore para discutir com os estudantes o uso da simetria na arquitetura e a beleza que ela traz para as edificações e para as construções artísticas. Esse templo, em Bangcoc, é um exemplo de construção realizada com conceitos matemáticos.
- Explore com os estudantes o eixo de simetria, as equidistâncias e as medidas da figura apresentada. Verifique se eles observam que esses são elementos que caracterizam a simetria.
- Informe aos estudantes que o motivo pelo qual essa construção se chama Templo de Mármore é o fato de ela ter sido realizada com mármore italiano. A edificação foi construída em 1889 para celebrar a religião budista. Pergunte a eles se já conheciam essa religião e se já tinham visto esse lugar por meio de desenhos, filmes, fotos, etc. Incentive-os a refletir sobre a diversidade e a riqueza cultural e religiosa de vários povos, lembrando que devemos respeitar a escolha religiosa de todos. Esse debate proporciona a reflexão sobre as diferenças sociais e culturais de outros povos.

Capítulo

2 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Saber localizar pontos no plano cartesiano é pré-requisito para o desenvolvimento de alguns conteúdos desta unidade, assim como o manuseio de transferidor, compasso, régua e esquadros. Os conceitos de translação, rotação e reflexão desenvolvidos neste capítulo são a base para o estudo de composição de transformações geométricas, que será desenvolvido no 8º ano.

Reconhecendo a simetria

Ao olhar algumas imagens de paisagens, de rostos de pessoas ou de algumas figuras geométricas, podemos ter a impressão de que essas imagens têm metades repetidas ou até mesmo acreditar que a imagem inteira está duplicada. Para entender melhor essas ocorrências, vamos estudar a simetria.

A imagem desta página mostra o *Wat Benchamabophit Dusitvanaram*, ou Templo de Mármore, localizado em Bangcoc, na Tailândia. É um dos templos mais conhecidos de Bangcoc e considerado uma grande atração turística. Ele foi construído em 1899 e é um exemplo de arquitetura tailandesa tradicional.

Observe na fotografia a representação plana do Templo de Mármore. Ela dá a ideia de simetria, e a linha vertical tracejada indica o eixo de simetria. Você consegue perceber que obtemos duas “metades” praticamente iguais?

Se dobrarmos uma imagem ao meio e as duas partes coincidirem, diremos que a imagem apresenta **simetria** em relação à linha de dobra, que chamamos de **eixo de simetria**.

↓ *Wat Benchamabophit Dusitvanaram*, ou Templo de Mármore, em Bangcoc, na Tailândia. Foto de 2021.

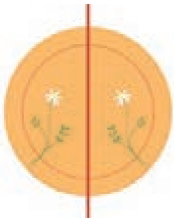
southtownboy/iStock/ Getty Images

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Converse com os estudantes sobre a presença da simetria em imagens que mostram situações cotidianas, como fotos de paisagens, de objetos, de animais e de rostos de pessoas. Se possível, traga para a sala de aula imagens que apresentam simetria e outras que não são simétricas, para que eles observem e identifiquem as simetrias e suas diferenças.

Com base nessa atividade, organize os estudantes em grupos e solicite a cada grupo que traga imagens de jornais, revistas ou publicações na internet que apresentem um ou mais eixos de simetria. Promova a troca das imagens entre os grupos, pedindo a cada grupo que identifique e trace os eixos de simetria dessas imagens.

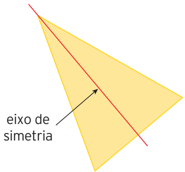
As imagens a seguir apresentam simetria, pois, ao dobrá-las ao meio, as duas partes se sobrepõem e coincidem.

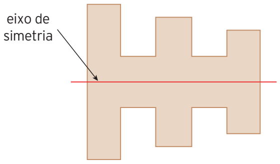


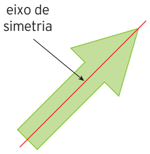
Ilustrações: João Picoli/ID/BR

A linha vermelha desenhada em cada uma das imagens representadas anteriormente indica o eixo de simetria que divide a imagem em duas partes simétricas.

Algumas figuras geométricas também apresentam simetria, pois podemos representar nelas um ou mais eixos de simetria. Veja alguns exemplos.







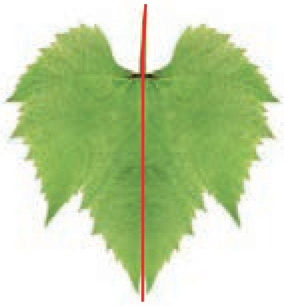
Ilustrações: ID/BR

Existem figuras que não apresentam simetria, isto é, não é possível desenhar uma linha que as divida em duas partes simétricas.

Você acha que podemos traçar um eixo de simetria em um triângulo escaleno? **Espera-se que os estudantes digam que não é possível traçar um eixo de simetria em um triângulo escaleno.**

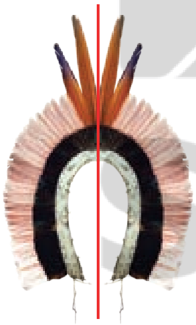
Simetria no cotidiano

Podemos perceber a simetria em nosso cotidiano tanto na natureza como em objetos produzidos pelo ser humano. Observe as representações planas de uma folha de videira e de um cocar e veja que ambas apresentam a ideia de simetria.



Jiang Hongyan/Shutterstock.com/ID/BR

↑ Folha de videira.



Renato Soares/Pulsar Imagens

↑ Cocar indígena.

- O desenho de uma borboleta é um bom exemplo para trabalhar simetria, pois os estudantes têm facilidade para imaginar as asas de uma borboleta se fechando e as partes correspondentes coincidindo. Prato, triângulo isósceles, polígono côncavo e seta são outras figuras que podem ser apresentadas como exemplos para discussão e para a definição de eixo de simetria.
- Explore a simetria da folha de uva e do cocar e peça aos estudantes que apresentem outros exemplos de simetria no cotidiano.
- Proponha aos estudantes que desenhem em uma folha de papel avulsa um triângulo escaleno. Em seguida, peça que façam dobras e verifiquem se é possível obter um eixo de simetria. Nessa experiência, eles podem verificar que um triângulo escaleno não apresenta simetria em relação a um eixo.
- Converse com os estudantes sobre a função social e o significado do cocar indígena para cada povo, mas enfatize que não são todos os povos indígenas que o utilizam. Ressalte que esse adorno representa força e resistência aos exploradores da América que massacraram esses povos e impuseram a religião católica a eles. Peça que observem as cores, os tipos de cocar, a técnica para amarrar as penas, entre outras características desse ornamento que remetem à fauna e ao local onde vive cada povo. Saliente à turma que, pelo fato de se tratar de um objeto considerado sagrado por esses povos, o cocar não deve ser utilizado como fantasia, uma vez que isso banaliza a história e a luta deles. É importante que os estudantes compreendam que a descontextualização de símbolos de etnia e a representação da cor da pele de qualquer povo são atos desrespeitosos, chamados de apropriação cultural, que perpetuam atitudes e falas preconceituosas ou racistas de um povo que se considerava superior a outro. Essa troca de ideias promove positivamente a cultura e a história dos povos indígenas, valorizando suas tradições, organizações, saberes, valores e formas de participação social.

OUTRAS FONTES

Imenes, L. M.; Lellis, M. *Geometria dos mosaicos*. São Paulo: Scipione, 2002 (Coleção Vivendo a Matemática).

Nesse livro é apresentado um estudo sobre mosaicos geométricos, além de um painel geral acerca das transformações do plano, das simetrias de translação, da reflexão e da rotação.

Vieira, G.; Paulo, R. M.; Allevato, N. S. G. Simetria no Ensino Fundamental através da resolução de problemas: possibilidades para um trabalho em sala de aula. *Boletim de Educação Matemática*, v. 27, n. 46, p. 613-630, ago. 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/3XpQmxcgD6rBkFKH8YJ3qBj/?lang=pt. Acesso em: 31 maio 2022.

Esse artigo apresenta uma sequência didática sobre simetria na perspectiva de resolução de problemas. A sequência foi aplicada para uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental.

FIGURAS COM MAIS DE UM EIXO DE SIMETRIA

- Algumas figuras geométricas planas podem ter mais de um eixo de simetria, como o quadrado, o triângulo equilátero e o pentágono regular. Peça aos estudantes que citem outros exemplos de figuras que tenham mais de um eixo de simetria.
- Se julgar pertinente, apresente aos estudantes outros exemplos de imagens com eixos de simetria, como alguns símbolos usados em culturas africanas, disponíveis no *site* https://novaescola.org.br/conteudo/2741/cultura-africana-e-geometria (acesso em: 31 maio 2022).

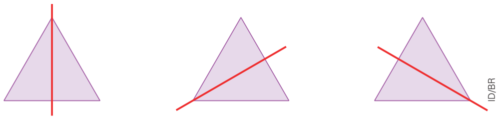
SIMÉTRICA DE UMA FIGURA

- É importante que os estudantes compreendam que a linha que representa o eixo de simetria funciona como um espelho e que a medida da distância de cada ponto da figura original ao eixo de simetria deve ser igual à da distância dos pontos da figura simétrica ao eixo de simetria.
- Se julgar oportuno, traga um espelho plano para a sala de aula e faça algumas experiências com os estudantes. Por exemplo, coloque sobre a mesa o espelho em pé e uma caixa de giz para que todos possam ver o reflexo da caixa no espelho. Depois, faça perguntas como: O que acontece com a imagem da caixa quando aproximamos o espelho da caixa? E quando afastamos o espelho? Espera-se que os estudantes respondam que a imagem também se aproxima ou se afasta, respectivamente, da superfície do espelho.

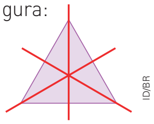
  Sugira aos estudantes que coloquem o espelho em outras posições ou sobre diferentes eixos de simetria para que observem o que acontece com as figuras formadas.

Figuras com mais de um eixo de simetria

Em algumas figuras geométricas podemos traçar mais de um eixo de simetria. Observe o triângulo a seguir. Em cada imagem, temos a representação do mesmo triângulo, mas destacamos um eixo de simetria diferente.

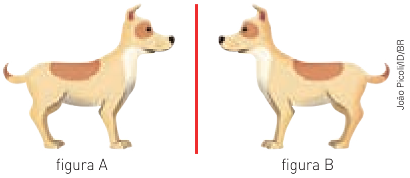

ID/BR

Destacando todos os eixos de simetria em uma única representação do triângulo, obtemos a seguinte figura:


ID/BR

Simétrica de uma figura

Observe as figuras a seguir.



João Picoli/ID/BR

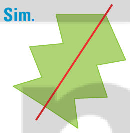
Repare que a figura A e a figura B formam um par de figuras simétricas em relação à linha vermelha, ou seja, ambas têm mesmo tamanho e forma e estão à mesma distância da linha vermelha, porém em lados opostos dessa linha. Podemos dizer, então, que a figura A é **simétrica** à figura B em relação à linha vermelha, que é o eixo de simetria.

ATIVIDADES

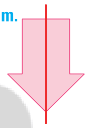
Responda sempre no caderno.

1. Verifique, em cada caso, se a linha vermelha representa um eixo de simetria da figura.

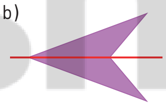
a) **Sim.**



c) **Sim.**



b)



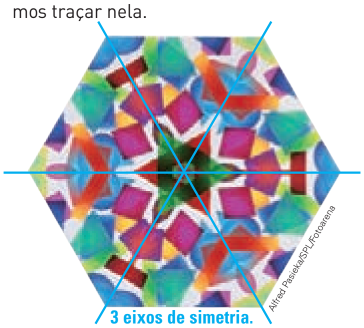
Sim.

d)

Não.

Ilustrações: ID/BR

2. Observe a imagem a seguir e escreva no caderno quantos eixos de simetria podemos traçar nela.


Alfred Pasieka/SPL/Fotoarena

3 eixos de simetria.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Solicite aos estudantes que criem símbolos, inspirados em outras culturas, como a africana ou a indígena.

Para isso, pode-se utilizar um *software* de geometria dinâmica, por exemplo o GeoGebra, que é gratuito e de fácil manuseio. Depois de explicar aos estudantes como ele funciona, sugira que criem uma figura geométrica e construam outras simétricas a ela utilizando a ferramenta de simetria do *software*.

DESCUBRA MAIS

Verificando eixos de simetria por meio de dobradura

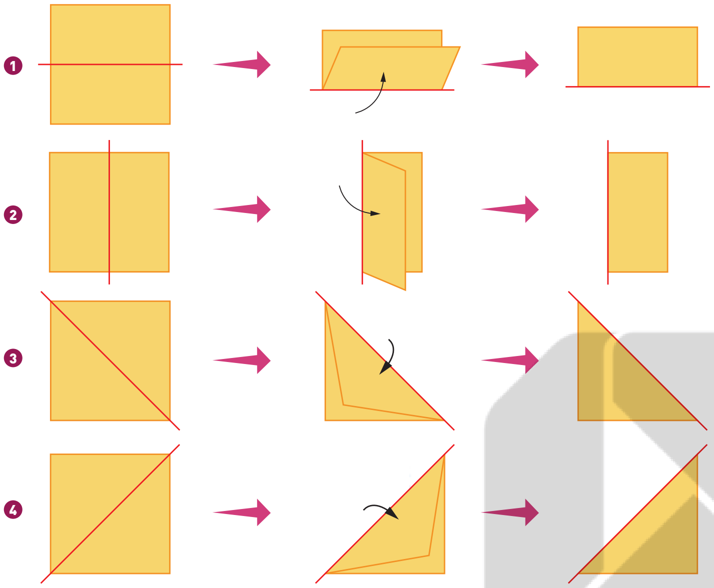
Podemos dobrar uma folha de papel para determinar os eixos de simetria da figura representada por essa folha.

Materiais

- 1 folha de papel quadrada
- lápis
- régua

Como fazer

❶ Dobre a folha de papel de acordo com as instruções a seguir.



Ilustrações: ID/BR

❷ Com o lápis e a régua, trace um eixo em cada marca de dobra que ficou no papel.

Para concluir

Responda sempre no caderno.

1. Os eixos que você traçou em cima das marcas de dobra da folha representam os eixos de simetria da figura representada por essa folha? **Sim.**
2. Você acha que há outros eixos de simetria no quadrado além dos que você traçou na folha de papel? Por quê?
3. Como você faria para determinar os eixos de simetria de um hexágono regular representado em uma folha de papel? **Resposta pessoal.**

2. Espera-se que os estudantes respondam que não há outros eixos de simetria no quadrado, pois não há outras maneiras de dobrar a folha de modo que se obtenham duas figuras simétricas em relação à dobra.

DESCUBRA MAIS

A atividade de dobradura possibilita aos estudantes manipular uma figura geométrica representada na folha e perceber fisicamente um eixo de simetria nela. Isso colabora para que compreendam essa ideia em figuras desenhadas, como as reproduzidas no Livro do Estudante, ou mesmo no plano cartesiano.

DE OLHO NA BASE

As atividades de dobradura podem ser trabalhadas em grupos, para que os estudantes compreendam os conceitos de simetria e exercitem a curiosidade intelectual, investigando e refletindo sobre a tarefa proposta, desenvolvendo assim a **competência específica de Matemática 2**.

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

- Reproduza com os estudantes a construção proposta. Explique a eles que, para construir, no 1º passo, retas perpendiculares usando uma régua e um esquadro, primeiro deve-se apoiar a régua sobre a reta *r*. Depois, sem movimentar a régua, deve-se colocar um lado do ângulo reto do esquadro encostado na régua e traçar com ele uma linha perpendicular. Também é possível construir retas perpendiculares com compasso.
- Ajude os estudantes a seguir os passos da construção das retas e explique por que esse exercício é válido.
- É possível relacionar esses procedimentos a outros feitos com um *software* de geometria dinâmica.

DE OLHO NA BASE

Aqui, o exemplo dado possibilita aos estudantes reconhecer figuras obtidas por reflexão, usando instrumentos de desenho, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA21**.

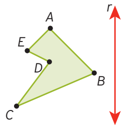
Transformações geométricas

Para movimentar ou realizar transformações de figuras no plano, podemos utilizar as transformações geométricas. Vamos conhecer algumas delas.

Reflexão

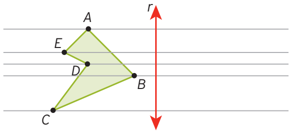
Na reflexão em relação a uma reta, cada ponto é transformado em seu simétrico em relação a essa reta. Uma figura geométrica refletida pode ser perfeitamente sobreposta à original tomando-se essa reta como referência. Assim, a forma e o tamanho da figura são mantidos, mas ela aparece “invertida”, como em um espelho.

Veja a seguir o polígono *ABCDE* e a reta *r*.

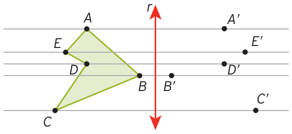


Imagine que desejamos construir o polígono simétrico desse polígono em relação à reta *r*. Para isso, podemos utilizar uma régua e um esquadro. Acompanhe a construção a seguir.

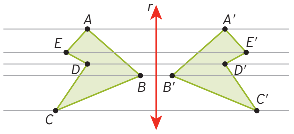
1º passo: Com uma régua e um esquadro, construímos retas perpendiculares à reta *r* passando pelos vértices do polígono.



2º passo: Medimos a distância do ponto *A* até a reta *r* e, do lado direito da reta *r*, marcamos a mesma distância na reta perpendicular a *r* que passa pelo ponto *A*, obtendo o ponto *A*′. Repetindo o mesmo procedimento para os pontos *B*, *C*, *D* e *E*, obtemos os pontos *B*′, *C*′, *D*′ e *E*′, respectivamente.



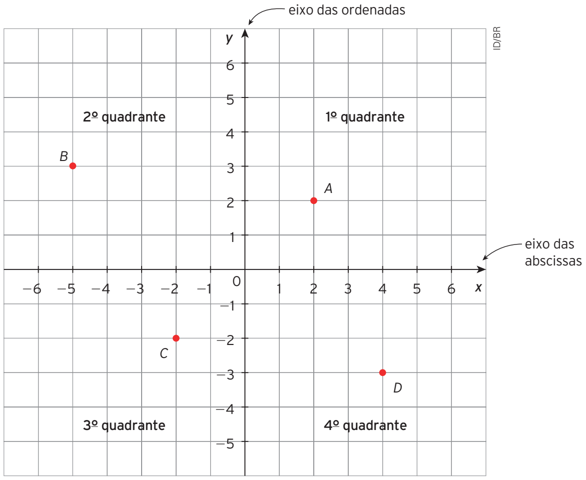
3º passo: Unindo os pontos *A*′, *B*′, *C*′, *D*′ e *E*′, como mostra a figura a seguir, obtemos o polígono simétrico a *ABCDE* em relação à reta *r*. Observe que, se dois pontos da figura original estão unidos por um segmento de reta, seus simétricos também estão unidos por um segmento de reta.



Ilustrações: ID/BR

Reflexão no plano cartesiano

Observe o plano cartesiano a seguir.



O plano está dividido em quatro quadrantes:

- o 1º quadrante está acima do eixo das abscissas e do lado direito do eixo das ordenadas;
- o 2º quadrante está acima do eixo das abscissas e do lado esquerdo do eixo das ordenadas;
- o 3º quadrante está abaixo do eixo das abscissas e do lado esquerdo do eixo das ordenadas; e
- o 4º quadrante está abaixo do eixo das abscissas e do lado direito do eixo das ordenadas.

Os dois números que localizam um ponto no plano, ou seja, o par ordenado, são chamados de coordenadas cartesianas. O primeiro número é a abscissa do ponto e o segundo, a ordenada do ponto. Podemos representar um ponto qualquer do plano por (x, y).

Observe que o ponto *A*, localizado no 1º quadrante, tem coordenadas (2, 2), o ponto *B*, no 2º quadrante, tem coordenadas (−5, 3), o ponto *C*, no 3º quadrante, tem coordenadas (−2, −2) e o ponto *D*, no 4º quadrante, tem coordenadas (4, −3).

Podemos dizer que qualquer ponto pertencente ao 1º quadrante tem abscissas e ordenadas positivas e qualquer ponto pertencente ao 2º quadrante tem abscissa negativa e ordenada positiva.

Os pontos que estão sobre os eixos cartesianos não pertencem a nenhum dos quadrantes.

Os pontos pertencentes ao 3º quadrante têm abscissas e ordenadas negativas, e os pontos pertencentes ao 4º quadrante têm abscissas positivas e ordenadas negativas.

PARE E REFLITA

As abscissas e as ordenadas dos pontos pertencentes ao 3º quadrante são positivas ou negativas? E as abscissas e as ordenadas dos pontos que pertencem ao 4º quadrante?

- O uso do plano cartesiano, em especial a localização dos pontos no plano, pode facilitar o entendimento dos estudantes em relação à reflexão. Procure trabalhar diferentes figuras e solicite a eles que façam a reflexão delas no plano, transportando-as para os quatro quadrantes.

- Converse com os estudantes a respeito dos exemplos apresentados para verificar se eles compreenderam como obter a simetria por reflexão no plano cartesiano.

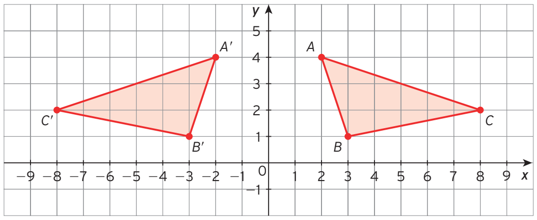
DE OLHO NA BASE

Nestas páginas trabalha-se a reflexão de figuras, obtendo a simétrica no plano em relação aos eixos e à origem, desenvolvendo, assim, a habilidade **EF07MA19**.

Observe alguns exemplos de como podemos obter uma figura usando a simetria de reflexão no plano cartesiano.

Exemplos

A. Observe os triângulos *ABC* e *A′B′C′*.



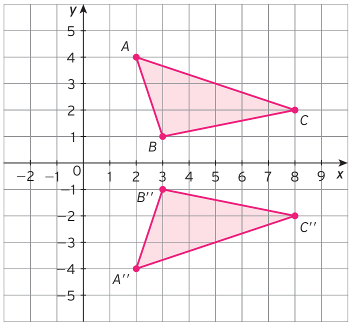
Ilustrações: ID/BR

As coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo *ABC* são *A*(2, 4), *B*(3, 1) e *C*(8, 2) e as do triângulo *A′B′C′* são *A′*(−2, 4), *B′*(−3, 1) e *C′*(−8, 2).

Observe que as ordenadas dos pontos *A*, *B* e *C* são iguais às ordenadas dos pontos correspondentes (*A′*, *B′* e *C′*). Para obter as abscissas dos pontos *A′*, *B′* e *C′*, multiplicamos as abscissas dos pontos *A*, *B* e *C* por −1, respectivamente.

Dizemos que o triângulo *A′B′C′* é uma reflexão do triângulo *ABC* em relação ao eixo *y*. Além disso, podemos dizer que, em relação ao eixo *y*, os pontos *A′*, *B′* e *C′* são simétricos aos pontos *A*, *B* e *C*, respectivamente.

B. Observe agora os triângulos *ABC* e *A′′B′′C′′*.

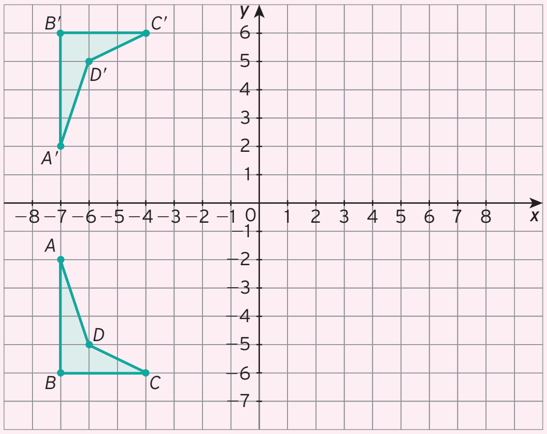


Note que as abscissas dos pontos *A*, *B* e *C* são iguais às abscissas dos pontos correspondentes (*A′′*, *B′′* e *C′′*). Para obter as ordenadas dos pontos *A′′*, *B′′* e *C′′*, multiplicamos as ordenadas dos pontos *A*, *B* e *C* por −1, respectivamente.

Dizemos que o triângulo *A′′B′′C′′* é uma reflexão do triângulo *ABC* em relação ao eixo *x*. Além disso, podemos dizer que, em relação ao eixo *x*, os pontos *A′′*, *B′′* e *C′′* são simétricos aos pontos *A*, *B* e *C*, respectivamente.

RESPOSTA

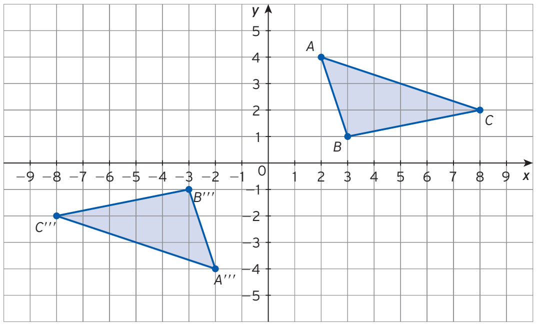
4. a)



ID/BR

A′(−7, 2), *B′*(−7, 6), *C′*(−4, 6) e *D′*(−6, 5).

C. Observe os triângulos *ABC* e *A'''B'''C'''*.

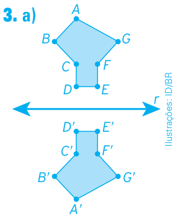


Ilustrações: ID/BR

Observe que, nesse caso, para obter a ordenada e a abscissa dos pontos *A'''*, *B'''* e *C'''*, multiplicamos as ordenadas e as abscissas dos pontos *A*, *B* e *C* por −1, respectivamente.

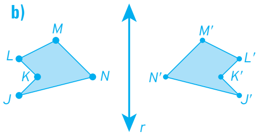
Dizemos que o triângulo *A'''B'''C'''* é uma reflexão do triângulo *ABC* em relação à origem do plano cartesiano. Além disso, podemos dizer que, em relação à origem, os pontos *A'''*, *B'''* e *C'''* são simétricos aos pontos *A*, *B* e *C*, respectivamente.

3. a)

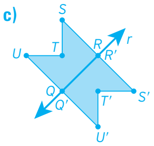


Ilustrações: ID/BR

b)



c)

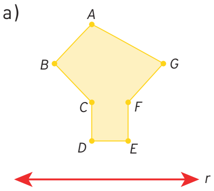


ATIVIDADES

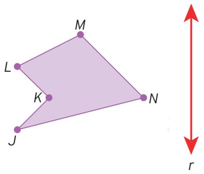
Responda sempre no caderno.

3. Copie as figuras e as retas no caderno. Depois, com o auxílio de uma régua e de esquadros, construa a simétrica da figura em relação à reta *r* em cada caso.

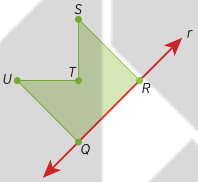
a)



b)

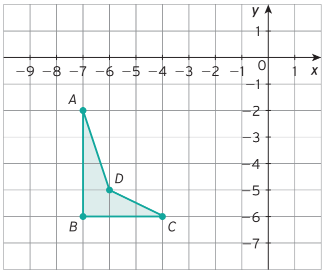


c)



Ilustrações: ID/BR

4. Copie a figura *ABCD* e o plano cartesiano a seguir em uma malha quadriculada e construa a simétrica da figura *ABCD*: **Consulte as respostas neste manual.**



a) em relação ao eixo *x* e escreva as coordenadas cartesianas de cada vértice da figura que você construiu;

b) em relação ao eixo *y* e escreva as coordenadas cartesianas de cada vértice da figura que você construiu;

c) em relação à origem e escreva as coordenadas cartesianas de cada vértice da figura que você construiu.

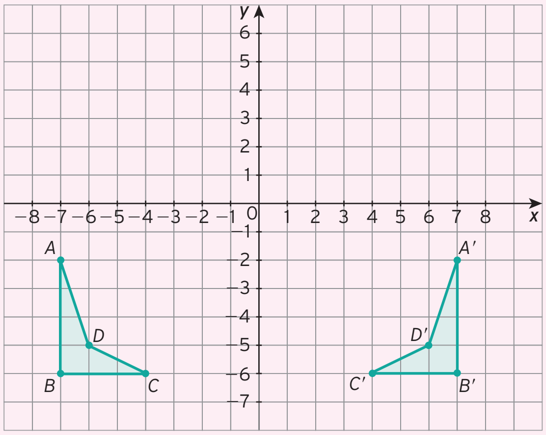
- Os estudantes podem ter dificuldades em realizar o item **c** da atividade **3**, pois ela apresenta um eixo de simetria inclinado. Nesse caso, peça a eles que prolonguem os lados $\overline{SR}$ e $\overline{UQ}$, de modo que ultrapassem o eixo de simetria e, depois, com o compasso, transportem a medida desses lados sobre o prolongamento a partir do eixo. Para transportar o ponto *T*, primeiro eles devem traçar uma linha perpendicular ao eixo de simetria que passa pelo ponto *T* e, depois, com o compasso, transportar a medida da distância de *T* ao eixo de simetria sobre a linha perpendicular traçada, a partir do eixo.

DE OLHO NA BASE

A atividade **3** permite aos estudantes construir figuras obtidas por simetria de reflexão usando instrumentos de desenho, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA21**.

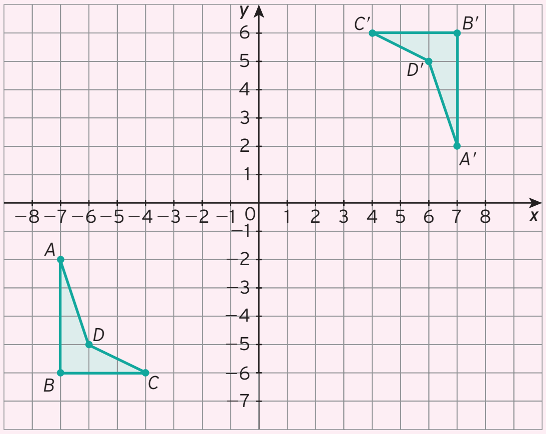
Já a atividade **4** permite aos estudantes representar no plano cartesiano o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA20**.

b)



A'(7, −2), *B'*(7, −6), *C'*(4, −6) e *D'*(6, −5).

c)



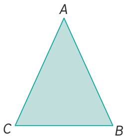
Ilustrações: ID/BR

A'(7, 2), *B'*(7, 6), *C'*(4, 6) e *D'*(6, 5).

- Debata com os estudantes a diferença entre reflexão e rotação. Para facilitar a visualização da rotação, proponha uma atividade: por exemplo, escolha um objeto e o amarre em um barbante, afixando o barbante em um ponto predeterminado, mostrando assim a posição em que as figuras ficam com a rotação. Uma ideia é fazer a rotação usando um plano cartesiano. Explore também o uso do compasso e do transferidor.
- Converse com os estudantes sobre a convenção de considerar a medida de ângulo positiva no sentido anti-horário.

Rotação

A rotação de uma figura é uma transformação da figura obtida por meio de um giro. O giro pode ser no sentido horário ou anti-horário. Observe o esquema a seguir, que mostra uma figura sendo rotacionada.



Posicão inicial.

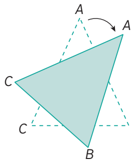


Figura sendo rotacionada.

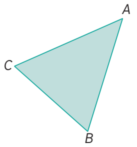


Figura rotacionada.

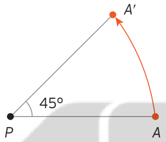
Ilustrações: ID/BR

Para realizar uma rotação, precisamos determinar um ponto (que será o vértice do ângulo de rotação), a medida do ângulo de rotação e o sentido da rotação.

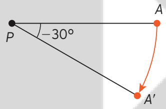
Observe, a seguir, como podemos realizar a rotação de um triângulo *ABC* em torno de um ponto *O*, segundo um ângulo de 70° no sentido anti-horário, utilizando régua, transferidor e compasso.

MEDIDA DOS ÂNGULOS

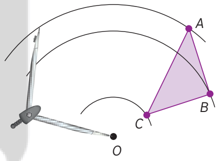
Geralmente, medidas positivas de ângulos são usadas para indicar rotações no sentido anti-horário.



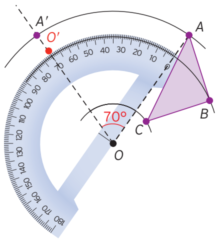
Já medidas negativas de ângulos são usadas para indicar rotações no sentido horário.



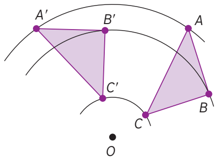
1º passo: Com a ponta-seca do compasso em *O* e raio $\overline{OA}$, traçamos um arco de circunferência no sentido anti-horário. Repetimos o procedimento com a ponta-seca do compasso em *O* e raio $\overline{OB}$. Em seguida, repetimos o procedimento com a ponta-seca do compasso em *O* e raio $\overline{OC}$.



2º passo: Colocamos o centro do transferidor no centro de rotação, que, nesse caso, é o ponto *O*. Alinhamos a marcação 0° do transferidor com o segmento $\overline{OA}$ e assinalamos o ponto *O'* correspondente a 70°. A intersecção da semirreta $\overrightarrow{OO'}$ com o arco que passa por *A* é o vértice *A'* do triângulo rotacionado.



3º passo: Repetindo o passo anterior para os pontos *B* e *C*, obtemos os pontos *B'* e *C'*. Unindo *A'*, *B'* e *C'*, obtemos um triângulo que é imagem do triângulo *ABC*, por uma rotação de 70° em torno do ponto *O* no sentido anti-horário.



Translação

Outra transformação geométrica que podemos usar é a translação. Essa transformação consiste no deslocamento de todos os pontos da figura em uma mesma direção, um mesmo sentido e uma mesma distância.

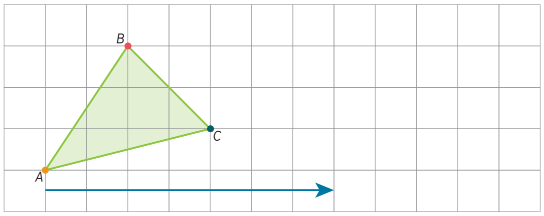
Para fazer uma translação, escolhemos a distância, a direção e o sentido que queremos que a figura se desloque. Essas características podem ser representadas por um **vetor**, que é uma seta cujo comprimento representa a medida da distância escolhida e que aponta para a direção e o sentido escolhidos. Depois, transportamos cada ponto da figura de acordo com a distância, a direção e o sentido do deslocamento.

ISOMETRIAS

A reflexão, a rotação e a translação são transformações geométricas que preservam a congruência das figuras, ou seja, em cada uma delas, a figura transformada é sempre congruente à figura original. Por não deformar a figura original, essas três transformações são chamadas de **movimentos rígidos** ou de **isometrias** (*iso*: "mesma"; *metria*: "medida").

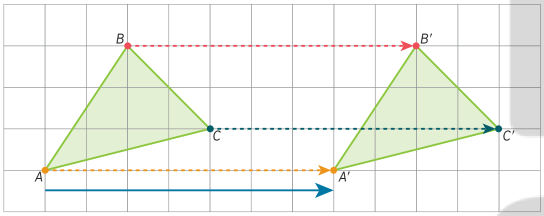
Exemplo

Observe o triângulo *ABC*.



O vetor indica que o deslocamento terá uma medida de distância de 7 lados de quadradinhos da malha, direção horizontal e sentido para a direita.

Assim, temos de deslocar cada ponto do triângulo *ABC* de acordo com essas informações.



Ilustrações: ID/BR

Note que cada ponto do triângulo *ABC* foi deslocado seguindo a mesma medida de distância, a mesma direção e o mesmo sentido do vetor, obtendo os pontos *A*′, *B*′ e *C*′.

Unindo os pontos *A*′, *B*′ e *C*′, formamos o triângulo *A*′*B*′*C*′. Dizemos que o triângulo *A*′*B*′*C*′ foi obtido a partir da translação do triângulo *ABC*.

- Comente com os estudantes a diferença entre reflexão e translação. A visualização do movimento pode ajudá-los a perceber esse conceito. Para isso, construa uma figura, com tamanho suficiente para que eles a visualizem, e, apoiando essa figura na lousa, desloque-a realizando um movimento de translação.

DE OLHO NA BASE

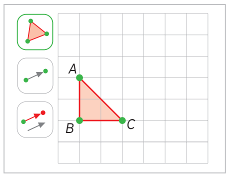
Nas atividades desta página, os estudantes têm a oportunidade de colocar em prática os conceitos de transformação geométrica, como rotação e translação, fazendo uso de um *software* de geometria dinâmica de forma reflexiva nas práticas escolares, de modo a produzir conhecimento, favorecendo também o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 5**.

- Na atividade **9**, para realizar a translação de um pentágono, por exemplo, os estudantes podem utilizar a ferramenta de polígonos ou polígonos regulares para a construção do pentágono. Em seguida, criar um vetor que determinará a direção e a medida a ser transladada. Com a ferramenta de translação, deverão apontar para o polígono e, depois, para o vetor. O polígono transladado aparecerá na tela.

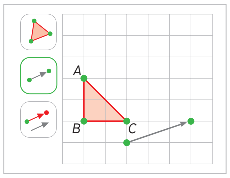
5. a) Não, pois a figura é a reflexão da figura original em relação a uma reta vertical.
b) Sim, com uma rotação de 90° no sentido horário ou uma rotação de 270° no sentido anti-horário.
c) Sim, com uma rotação de 180° no sentido horário ou no sentido anti-horário.
d) Não, pois a figura é a reflexão da figura original em relação a uma reta horizontal.

Outra maneira de realizar a translação de uma figura é com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica. Veja como podemos fazer a translação de um triângulo retângulo.

1º passo: Com a ferramenta *Polígono*, desenhe um triângulo retângulo.

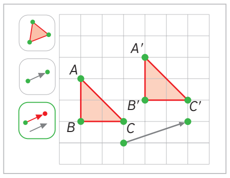


2º passo: Com a ferramenta *Vetor*, desenhe um vetor.



Ilustrações: ID/BR

3º passo: Selecione a ferramenta *Translação por um vetor*. Clique na figura e, depois, no vetor para que a translação seja realizada.



Espera-se que os estudantes respondam que o triângulo *A'B'C'* mudará de posição conforme a direção, o sentido ou o comprimento do vetor.

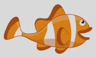
PARE E REFLITA

O que acontece com o triângulo *ABC* se movimentarmos uma das extremidades do vetor?

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

5. Verifique nos itens a seguir quais figuras podem ser obtidas por uma rotação desta figura.



a) 

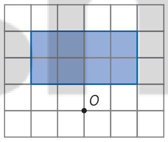
c) 

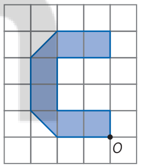
b) 

d) 

AMj Studio/ID/BR

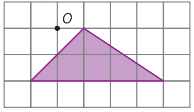
6. Copie as figuras a seguir em uma malha quadriculada. Depois, desenhe-as segundo uma rotação de 90° em torno do ponto *O* no sentido anti-horário. **Consulte as respostas neste manual.**

a) 

b) 

ID/BR

7. Reproduza a figura a seguir em uma folha de papel quadriculado. Depois, desenhe-a com rotação de centro *O* de acordo com os ângulos dados em cada item. **Consulte as respostas neste manual.**



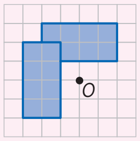
ID/BR

a) 90° no sentido horário.
b) 90° no sentido anti-horário.
c) 180° no sentido horário.
d) 270° no sentido horário.
e) 270° no sentido anti-horário.

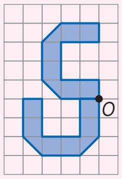
8. Desenhe, em uma malha quadriculada, um retângulo de 2 unidades por 4 unidades. Depois, translade-o 7 unidades para cima. (Considere a unidade o lado do quadrado da malha.) **Consulte a resposta neste manual.**

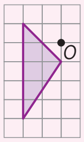
9. Utilizando um *software* de geometria dinâmica, desenhe um polígono qualquer. Depois, translade-o 5 unidades para a esquerda. **Resposta pessoal.**

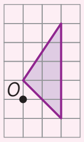
RESPOSTAS

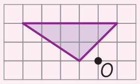
6. a) 

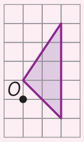
Ilustrações: ID/BR

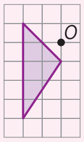
b) 

7. a) 

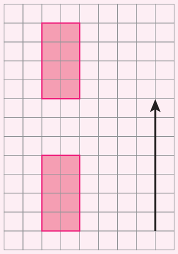
b) 

c) 

d) 

e) 

8. Resposta possível:

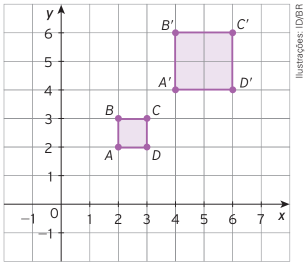


Outras transformações geométricas

Além de modificar a posição das figuras, as transformações geométricas podem alterar o tamanho e a forma delas também. Acompanhe as situações seguir.

Situação 1

Tatiana desenhou o quadrado *ABCD* no plano cartesiano e multiplicou as abscissas e as ordenadas de cada vértice do quadrado por 2, obtendo uma nova figura, cujos vértices correspondentes são os pontos *A′*, *B′*, *C′* e *D′*. Observe a figura original e a figura obtida a partir dessa transformação.



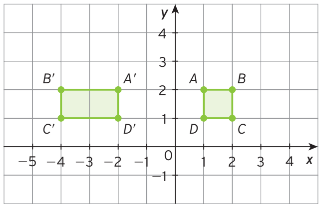
Ilustrações: ID/BR

A figura obtida a partir da transformação se manteve no 1º quadrante, conservando a forma da figura original, e as medidas dos lados correspondentes foram dobradas.

Como a forma da figura original foi mantida e as medidas dos lados correspondentes são proporcionais, podemos dizer que o quadrado *A′B′C′D′* é uma ampliação do quadrado *ABCD*.

Situação 2

Hugo desenhou o quadrado *ABCD* no plano cartesiano. Para obter uma nova figura, ele multiplicou apenas as abscissas de cada vértice por −2. Observe a figura original e a figura obtida a partir dessa transformação.



Note que a figura original estava no 1º quadrante e a figura obtida está no 2º quadrante. Além disso, sua forma foi alterada (a partir do quadrado da figura original foi obtido um retângulo). O que podemos observar sobre as medidas dos lados das duas figuras?

Espera-se que os estudantes observem que as medidas dos lados $\overline{B'A'}$ e $\overline{C'D'}$ são o dobro das medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ e que as medidas dos lados $\overline{A'D'}$ e $\overline{B'C'}$ são as mesmas que as medidas dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Quando realizamos uma transformação em uma figura e sua forma não se mantém, dizemos que houve uma deformação da figura original.

- Explique aos estudantes que podemos usar transformações no plano cartesiano para aumentar e diminuir as dimensões de determinada imagem, ampliando, reduzindo ou deformando a figura. Para isso, precisamos somente multiplicar e/ou dividir as coordenadas cartesianas.
- Verifique se os estudantes compreendem que na situação **1** a figura foi ampliada dentro do mesmo quadrante. Na situação **2**, a figura, além de sofrer deformação, mudou sua posição do 1º para o 2º quadrante. É importante que eles notem que, nesse caso, as abscissas de cada ponto da figura original foram multiplicadas por um mesmo número negativo.

DE OLHO NA BASE

As situações propostas permitem aos estudantes compreender como é possível realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA19**.

OUTRAS FONTES

Mabuchi, S. T. *Transformações geométricas*: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. 2000. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11217. Acesso em: 31 maio 2022.

Esse trabalho apresenta uma análise de estudos e pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem das transformações geométricas no Ensino Fundamental e tem como finalidade contribuir para a reflexão de como esse tema deve ser incorporado aos cursos de formação de professores de Matemática.

- Na situação **3**, a figura também sofre deformação, mas sua posição mudou do 1º para o 4º quadrante; nesse caso, somente as ordenadas foram multiplicadas por um mesmo número negativo.

DE OLHO NA BASE

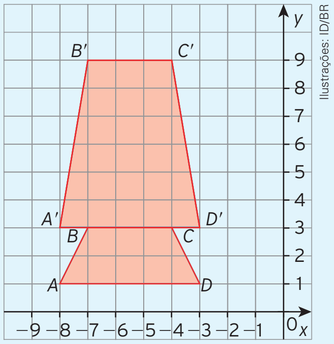
As atividades propostas nesta página permitem aos estudantes compreender como é possível realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro, desenvolvendo a habilidade **EF07MA19**.

- As atividades desta página favorecem o esclarecimento de possíveis dúvidas. Para isso, após os estudantes resolverem as atividades, promova um debate sobre a resolução e outras transformações possíveis.

RESPOSTAS

10. a) $A(-8, 1)$, $B(-7, 3)$, $C(-4, 3)$, $D(-3, 1)$; $A'(-8, 3)$, $B'(-7, 9)$, $C'(-4, 9)$, $D'(-3, 3)$

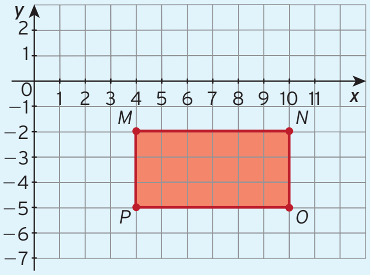
b)



Ilustrações: ID/BR

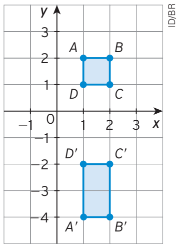
c) Houve uma deformação no trapézio original e sua altura triplicou, porém a figura permaneceu no 2º quadrante.

11.



Situação 3

Amélia desenhou o quadrado *ABCD* no plano cartesiano e, para obter uma nova figura, multiplicou apenas as ordenadas de cada vértice por −2. Observe a seguir a figura original e a figura obtida a partir da transformação.



ID/BR

Note que a figura original estava no 1º quadrante e a figura obtida está no 4º quadrante e teve sua forma alterada.

PARE E REFLITA

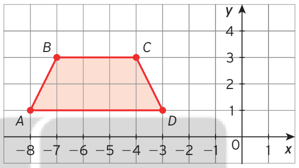
O que você acha que aconteceria com o quadrado *ABCD* se Amélia multiplicasse as abscissas e as ordenadas de cada vértice por −2?

Espera-se que os estudantes percebam que o quadrado *ABCD* seria levado para o 3º quadrante e teria o dobro do tamanho, mas manteria sua forma.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

10. Veja o trapézio *ABCD* desenhado no plano cartesiano. **Consulte a resposta neste manual.**



a) Escreva as coordenadas dos vértices do trapézio *ABCD*. Depois, multiplique apenas as ordenadas de cada vértice por 3 e obtenha os vértices do trapézio *A'B'C'D'*.

b) Agora, desenhe um plano cartesiano no caderno e localize os trapézios *ABCD* e *A'B'C'D'*.

c) O que aconteceu com o trapézio original?

11. Desenhe em uma malha quadriculada um plano cartesiano e nele o retângulo *MNOP* cujos vértices têm coordenadas $M(4, -2)$, $N(10, -2)$, $O(10, -5)$ e $P(4, -5)$.

a) O que acontecerá com o retângulo se a abscissa de cada vértice for multiplicada por −3?

b) O que acontecerá com o retângulo se a ordenada de cada vértice for multiplicada por −2?

c) O que acontecerá com o retângulo se as duas coordenadas de cada vértice forem multiplicadas por −4?

11. Consulte a construção neste manual.

a) O retângulo será levado para o 3º quadrante, a medida da base será triplicada e a medida da altura, mantida. A figura original sofrerá deformação, porém continuará sendo um retângulo.

b) O retângulo será levado para o 1º quadrante, a medida da base será mantida e a medida da altura, duplicada. A figura original sofrerá deformação e passará a ser um quadrado.

c) O retângulo será levado para o 2º quadrante e ampliado duas vezes.

12. Observe a figura a seguir.

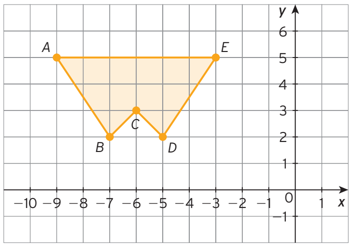
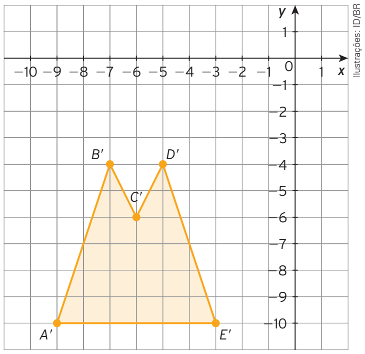


Figura original.

Agora, descreva como a figura a seguir pode ser obtida a partir da figura original.



Ilustrações: ID/BR

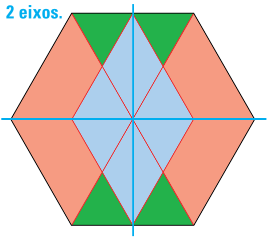
12. A ordenada de cada vértice da figura original foi multiplicada por −2.

DIVERSIFICANDO

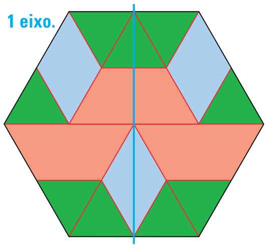
Responda sempre no caderno.

1. Quantos eixos de simetria há em cada uma das figuras a seguir?

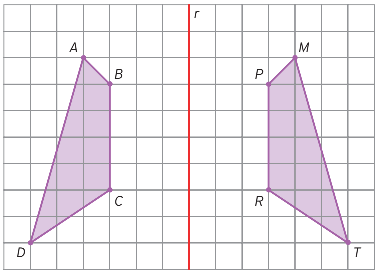
a) **2 eixos.**



b) **1 eixo.**



2. Observe as figuras representadas na malha quadriculada a seguir e, depois, responda às questões.



a) Escreva os pontos simétricos dos pontos *P*, *M*, *T* e *R* em relação à reta *r*. **B, A, D e C, respectivamente.**

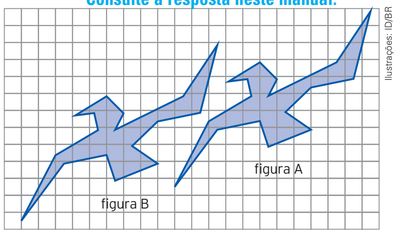
b) Escreva os lados simétricos relativos aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. **$\overline{MP}$, $\overline{PR}$, $\overline{RT}$ e $\overline{TM}$, respectivamente.**

c) Se o segmento $\overline{DA}$ mede 5 cm, quanto mede o segmento $\overline{TM}$? Explique a um colega como você pensou. **5 cm. Resposta pessoal.**

d) Quanto mede o ângulo formado pelo eixo de simetria *r* e o segmento $\overline{CR}$? **90°**

3. Desenhe no caderno uma figura que tenha três eixos de simetria. **Resposta pessoal.**

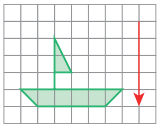
4. Reproduza em uma malha quadriculada as figuras a seguir e desenhe o vetor que determina a translação da figura A para a figura B. **Consulte a resposta neste manual.**



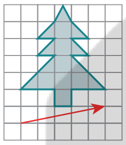
Ilustrações: ID/BR

5. Reproduza em uma malha quadriculada as imagens a seguir. Depois, construa a imagem de cada uma delas segundo a translação indicada pelo vetor. **Consulte as respostas neste manual.**

a)



b)



6. Desenhe um plano cartesiano em malha quadriculada. Represente um polígono de cinco lados no 4º quadrante dele. Em seguida, faça o que se pede. **Respostas pessoais.**

a) Multiplique apenas a coordenada *x* de cada vértice por −3 e desenhe a nova figura.

b) Multiplique apenas a coordenada *y* de cada vértice por −3 e desenhe a nova figura.

c) Amplie o polígono original de modo que ele fique no 2º quadrante.

7. M. C. Escher foi um conhecido artista plástico europeu. Reúna-se com três colegas para fazer uma pesquisa sobre ele: datas de nascimento e de morte, nacionalidade, formação, influências que recebeu, etc. Relacionem o trabalho desse artista com as transformações geométricas e apresentem sua pesquisa aos demais colegas da turma. **Resposta pessoal.**

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

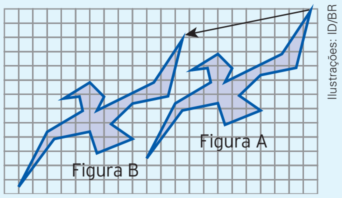
- Nesta seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Sugira que as atividades sejam trabalhadas em grupos, para que os estudantes se ajudem na compreensão delas.
- Se julgar oportuno, leve os estudantes à sala de informática para que possam reproduzir a atividade **6** em um *software* de geometria dinâmica.

DE OLHO NA BASE

A atividade **7** possibilita que os estudantes vinculem o estudo das transformações geométricas a representações planas de obras de arte, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA21**.

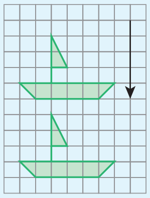
RESPOSTAS

4. Resposta possível:

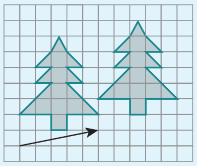


Ilustrações: ID/BR

5. a)



b)



ESTRATÉGIAS DE APOIO

Sempre que possível, organize os estudantes em duplas ou em trios e leve-os à sala de informática para que as atividades sejam reproduzidas em um *software* de geometria dinâmica. Desse modo, eles conseguem visualizar o movimento das figuras e, também, discutir com os colegas para planejar e resolver as questões buscando a solução do problema proposto.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Resolver um problema usando a estratégia "tradução para linguagem algébrica" permite aos estudantes transformar as informações apresentadas no enunciado, que estão na forma da linguagem natural, para a linguagem algébrica, possibilitando, assim, o desenvolvimento de diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático.

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

- É importante que os estudantes leiam o problema e extraiam do enunciado os dados necessários para desenvolver a resolução. Assim, eles devem compreender a relação dada no enunciado (depois de uma semana os dois terminaram de ler o livro) e transformá-la em uma linguagem algébrica, para então resolver a equação e descobrir quantas páginas Júlia e Lucas leram no primeiro dia.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

- Para resolver esse problema, os estudantes precisarão representar algebricamente a relação entre as quantidades de páginas lidas.
- Na primeira questão, é possível escolher qualquer letra para representar a quantidade de páginas lidas por cada um. Por exemplo, a letra *a*.

DE OLHO NA BASE

Ao resolver as atividades desta seção, os estudantes reconhecem que problemas que têm a mesma estrutura podem ser resolvidos utilizando os mesmos procedimentos, desenvolvendo, assim, a habilidade **EF07MA06**.

RESOLVENDO PROBLEMAS

O problema

Leia a situação a seguir.

Júlia e Lucas começaram a ler na segunda-feira um livro que o professor indicou na sala de aula. Nesse dia, os dois leram a mesma quantidade de páginas. Depois de uma semana, Júlia tinha lido 9 vezes a quantidade de páginas que leu no primeiro dia mais 15 páginas, e Lucas tinha lido 8 vezes a quantidade de páginas que leu no primeiro dia mais 27 páginas.

Sabendo que depois de uma semana os dois terminaram de ler o livro, quantas páginas eles leram no primeiro dia?

Evertoons/ID/BR

Compreensão do problema

1. É possível obter no enunciado do problema, sem fazer nenhuma conta, a quantidade de páginas que Júlia e Lucas leram, cada um, no primeiro dia? **Não.**
2. Depois de uma semana, Júlia tinha lido quantas páginas? E Lucas?
3. A quantidade total de páginas que Júlia e Lucas leram foi a mesma? **Sim.**

Compreensão do problema – 2. Júlia leu 9 vezes a quantidade de páginas que leu no primeiro dia mais 15 páginas, e Lucas leu 8 vezes a quantidade de páginas que leu no primeiro dia mais 27 páginas.

Resolução do problema

1. Escolha uma incógnita para representar a quantidade de páginas lida no primeiro dia de leitura. **Resposta pessoal.**
2. Como a quantidade de páginas que Júlia e Lucas leram em uma semana pode ser representada algebricamente? Utilize a incógnita escolhida na atividade anterior.
3. É possível encontrar o valor da incógnita a partir da relação representada na atividade anterior? Se sim, como podemos fazer isso? **Sim. Resposta possível: Resolvendo a equação.**
4. Então, quantas páginas Júlia e Lucas leram, cada um, no primeiro dia? **12 páginas.**

Resolução do problema – 2. Considerando que a incógnita escolhida na atividade anterior tenha sido a letra *a*, podemos representar algebricamente a relação encontrada por Júlia e Lucas da seguinte maneira: $9a + 15 = 8a + 27$.

DE OLHO NA BASE

Os problemas propostos nesta seção auxiliam os estudantes a enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo imaginar situações, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens, o que favorece o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 6**.

Reflexão sobre o problema

Respostas pessoais.

① Você gostou de resolver esse problema? Por quê?

② Você encontrou dificuldades para resolver esse problema? Em caso afirmativo, quais foram as dificuldades? Justifique sua resposta.

③ Você fez anotações dos dados do problema para ajudar a compreendê-lo?

④ Que estratégia você adotou para resolver o problema?

⑤ Os colegas utilizaram estratégias diferentes da sua? Se sim, quais?

⑥ Você pode apresentar outra maneira de resolver esse mesmo problema? Em caso afirmativo, qual?

Mais problemas

1. Alberto fez um orçamento em duas empresas de transporte para realizar uma mudança. Uma das empresas cobra um valor fixo de R$ 240,00 mais R$ 12,00 por quilômetro rodado, e a outra cobra um valor fixo de R$ 250,00 mais R$ 10,00 por quilômetro rodado. Sabendo que o valor final nas duas empresas é o mesmo para fazer a mudança de que Alberto precisa, qual é a medida da distância entre os dois endereços? **5 quilômetros.**

Ilustrações: Evertoons/ID/BR

2. Duas irmãs, Bruna e Camila, ganharam da avó a mesma quantia em dinheiro e foram a uma loja comprar alguns jogos de *videogame*. Bruna queria comprar cinco jogos, mas percebeu que para isso ainda faltavam R$ 4,00. Já Camila conseguiu comprar os três jogos que queria e ainda ficou com R$ 10,00. Sabendo que todos os jogos têm o mesmo valor, qual é o preço de cada jogo? **R$ 7,00**

3. Fernanda e Priscila precisavam fazer panfletos para divulgar os respectivos negócios. Fernanda tem uma escola de natação, e Priscila tem uma loja de cosméticos. Elas fizeram panfletos em gráficas diferentes, mas pagaram o mesmo valor. Sabendo que Fernanda deu um terço do valor como sinal mais R$ 160,00, e que Priscila deu três quartos do valor como sinal mais R$ 60,00, qual foi o valor que Fernanda e Priscila pagaram pelos panfletos? **R$ 240,00**

REFLEXÃO SOBRE O PROBLEMA

- Reflexões sobre o problema são importantes, pois é necessário saber se o tipo de problema apresentado foi interessante para os estudantes e se a estratégia usada para resolvê-lo pode ser utilizada em outro momento. Além disso, é importante saber as dificuldades que os estudantes enfrentaram ao resolvê-lo, assim como eles mesmos devem se conscientizar disso. Se acharem a situação proposta muito fácil, isso pode desmotivá-los a resolver problemas em outro momento.
- Deparar-se com diferentes estratégias de resolução amplia a visão de problema e agrega elementos ao repertório de resolução de problemas dos estudantes e a compreensão de que um problema, em Matemática, pode ter mais de uma estratégia de resolução. No caso do problema em questão, o método de tentativa e erro é uma das estratégias possíveis. Outra estratégia útil para resolver os problemas da seção é a utilização de esquemas ou tabelas.
- Na terceira questão, vale salientar que fazer anotações auxilia na representação dos dados trazidos pelo enunciado e contribui para a continuidade do desenvolvimento do raciocínio dos estudantes durante a resolução de problemas.
- É importante estimular os estudantes a falar sobre sua estratégia de resolução do problema. Permita que eles desenvolvam suas próprias estratégias de resolução de problemas e auxilie-os na construção de seu conhecimento, o que muitas vezes implica a apresentação de métodos de organização e de resolução de problemas.

DE OLHO NA BASE

O debate sobre diferentes meios de resolver um problema permite aos estudantes criar um repertório e aumentar seu poder de argumentação, desenvolvendo a **competência geral 7**.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Essas atividades envolvem a resolução de problemas, que é uma estratégia interessante para observar se os estudantes compreenderam os conceitos trabalhados na unidade, pois terão de aplicá-los. Outro tipo de questão interessante na seção é a de “verdadeiro ou falso”. Nesse caso, os estudantes precisarão refletir sobre o que aprenderam, o que possibilita discussões mais aprofundadas sobre o tema.

RESPOSTAS

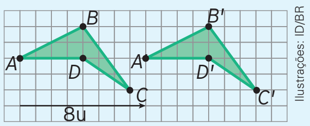
3. Os itens **b**, **c** e **d** são verdadeiros. Veja uma possível correção para os itens **a** e **e**:

a) Uma figura obtida por rotação mantém a mesma forma e as mesmas medidas que a figura original.

e) Uma figura obtida por reflexão mantém a mesma forma e o mesmo tamanho que a figura original, porém em posição invertida.

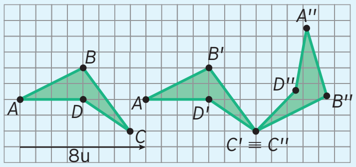
4. Respostas possíveis:

a)

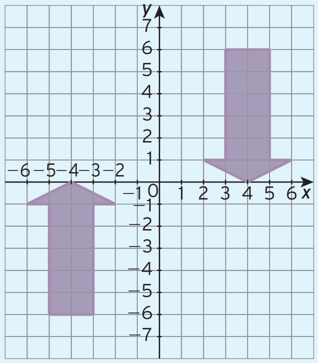


Ilustrações: ID/BR

b)

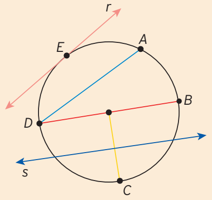


5. Uma possível representação da imagem do item **a** é a seguinte:



ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Observe a imagem a seguir.



Escreva no caderno a alternativa correta. **Alternativa e.**

a) $\overline{AE}$ representa um arco.

b) $\overline{BD}$ representa o raio.

c) $\overline{DA}$ representa o diâmetro.

d) *s* é uma reta tangente à circunferência.

e) *r* é uma reta tangente à circunferência.

2. Registre no caderno a alternativa que responde corretamente à atividade a seguir.

(Uniube-MG) KLAUSS, um lindo menininho de 7 anos, ficou desconcertado quando, ao chegar em frente ao espelho de seu armário, vestindo uma blusa onde havia seu nome escrito, viu a seguinte imagem do seu nome: **Alternativa d.**

a) K L A U S S

b) ꓘ ⅃ A U Ƨ Ƨ

c) ꓘ ⅂ ∀ ∩ S S

d) Ƨ Ƨ U A ⅃ ꓘ

3. Verifique se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Reescreva as falsas no caderno, corrigindo-as. **Consulte as respostas neste manual.**

a) Uma figura obtida por rotação mantém a mesma forma que a figura original, porém não com as mesmas medidas.

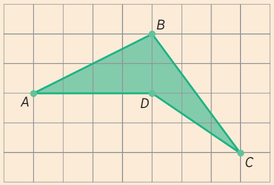
b) Se duas figuras são simétricas em relação a uma reta, então elas são congruentes.

c) Um ponto *A* é refletido em relação a uma reta *r*, obtendo-se um ponto *A*′; então, a distância de *A* a *r* é igual à distância de *A*′ a *r*.

d) Se uma figura *A*′*B*′*C*′ é obtida através de uma translação da figura *ABC*, então *ABC* e *A*′*B*′*C*′ são congruentes.

e) Uma figura obtida por reflexão mantém a mesma forma, o mesmo tamanho e a mesma posição que a figura original.

4. Reproduza na malha quadriculada a figura a seguir.

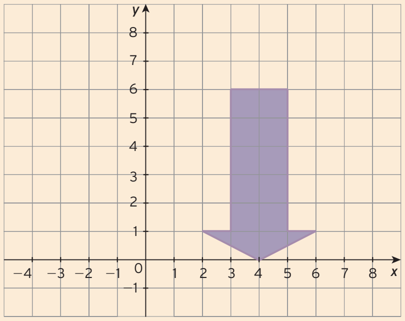


Consulte as respostas neste manual.

a) Construa a figura *A*′*B*′*C*′*D*′ fazendo a translação de 8 unidades para a direita na direção horizontal da figura original.

b) Usando régua, transferidor e compasso, construa a figura *A*′′*B*′′*C*′′*D*′′ fazendo a rotação de 100° da figura *A*′*B*′*C*′*D*′ no sentido horário em torno do ponto *C*′.

5. Observe esta figura no plano cartesiano.



Ilustrações: ID/BR

a) Reproduza a figura em um plano cartesiano e desenhe a figura simétrica da seta roxa em relação à origem. **Consulte a resposta neste manual.**

b) Determine as coordenadas dos vértices da figura que você obteve no item anterior.

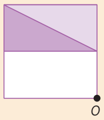
6. Ana disse a Lia que havia desenhado duas circunferências tangentes: uma de centro *A* e 6 cm de medida de raio e outra de centro *B* e 14 cm de medida de raio. Ana perguntou a Lia qual seria a medida do raio de uma circunferência com centro em *B* que tangenciasse a circunferência de centro *A*. Lia deu as possíveis três respostas corretas. Quais foram as respostas de Lia? Converse com um colega sobre esse problema. **2 cm, 14 cm e 26 cm.**

5. b) (−2, −1); (−3, −1); (−3, −6); (−5, −6); (−5, −1); (−6, −1); (−4, 0)

Responda sempre no caderno.

7. Registre no caderno a alternativa que responde corretamente à atividade a seguir.

(Enem) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto *O*.

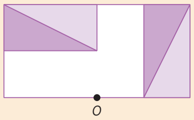


Enem. Fac-símile/ID/BR

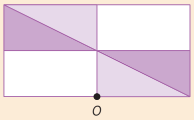
Figura original

A imagem que representa a nova figura é: **Alternativa e.**

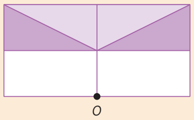
a)



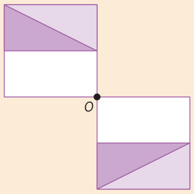
b)



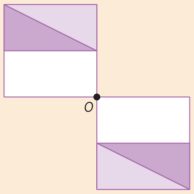
c)



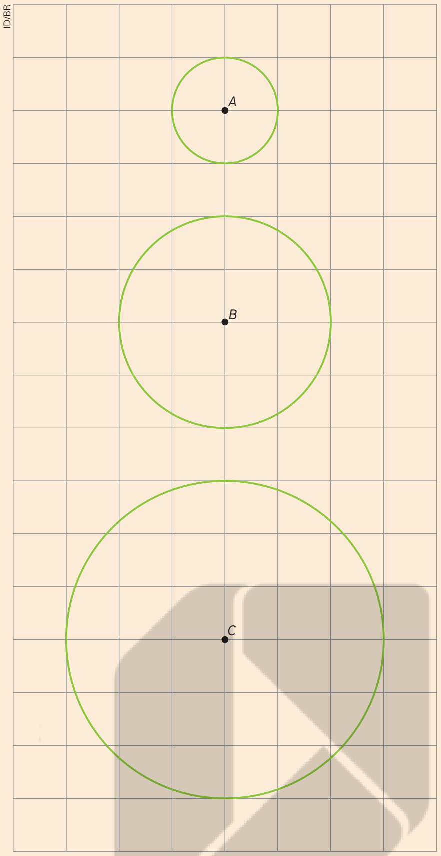
d)



e)



8. Observe as circunferências a seguir.



ID/BR

a) Meça o diâmetro de cada circunferência e registre as medidas no caderno.

b) Pergunte ao professor como é possível medir o comprimento do contorno de uma circunferência. Depois, meça o comprimento do contorno das circunferências dessa atividade e registre as medidas no caderno.

c) O que acontece com a medida do comprimento da circunferência quando duplicamos a medida do seu diâmetro? E quando triplicamos essa medida? **Duplica. Triplica.**

8. a) $d_A = 2$ cm, $d_B = 4$ cm e $d_C = 6$ cm.
b) $c_A = 6{,}28$ cm, $c_B = 12{,}56$ cm e $c_C = 18{,}84$ cm.

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Entendi a definição de circunferência e de círculo e as diferenças entre essas figuras?
- Reconheço elementos de uma circunferência: raio, corda e diâmetro?
- Aprendi a construir circunferência com compasso e um *software* de geometria dinâmica?
- Reconheço as definições de ângulo central e de medida do arco?
- Consigo identificar arcos de uma circunferência em vários contextos?
- Aprendi sobre posições relativas entre reta e circunferência?
- Identifico as posições entre ponto e circunferência e entre duas circunferências?
- Sei diferenciar figuras simétricas em relação a um ou a vários eixos?
- Compreendi como construir figuras que apresentam um ou mais eixos de simetria e figuras que não apresentam eixo de simetria?
- Aprendi a reconhecer transformações geométricas: reflexão, rotação e translação?
- Reconheço as propriedades das transformações geométricas?
- Entendi como acontecem as transformações no plano cartesiano?
- Procurei conversar com os colegas e o professor sobre as dificuldades que encontrei?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

ESTRATÉGIAS DE APOIO

- Para a resolução dessas atividades, sugira aos estudantes que sempre façam desenhos para representar a situação retratada. Isso proporciona a eles visualizar o que se pede, entender quais são os dados que têm para resolvê-la e realizar inferências, aplicando propriedades conhecidas por eles.
- Na atividade **7**, incentive os estudantes, em grupos, a discutir as características de simetria e outras transformações geométricas existentes na figura resultante.
- Na atividade **8**, organize as informações em um quadro, para que os estudantes as visualizem melhor e as comparem. No item **b**, comente com eles que, para medir o comprimento do contorno de uma circunferência, é preciso posicionar um barbante de maneira que ele cubra todo o contorno e nenhum pedaço fique sobreposto a outro. Depois, deve-se cortar o barbante e medir o comprimento com uma régua. Esse é o comprimento do contorno da circunferência.

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
4, 8, 9 e 10.

Competências específicas de Matemática
2, 4, 6 e 7.

Temas Contemporâneos Transversais
Saúde, Cidadania e Civismo e Ciência e Tecnologia.

Habilidades

(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

(EF07MA35) Compreender, em contextos significativos, o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados.

(EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.

(EF07MA37) Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.

UNIDADE 7

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

SOBRE A UNIDADE

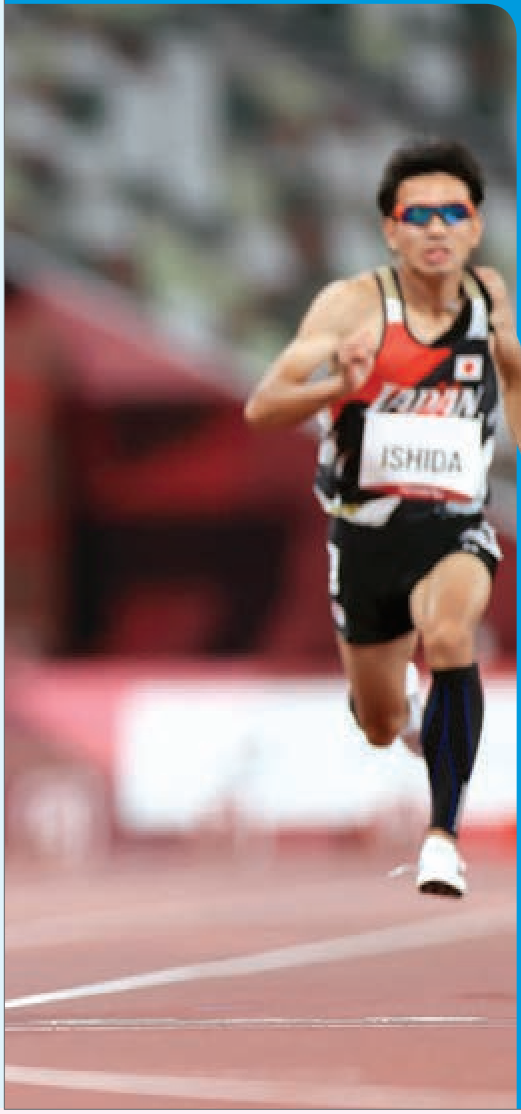
Nesta unidade, retomamos os conceitos de probabilidade e de estatística, de modo que os estudantes possam ampliar seu repertório acerca do planejamento e da realização de experimentos aleatórios e de pesquisas estatísticas, além de compreender a média estatística, interpretar e analisar dados em tabelas e gráficos.

Para desenvolver a autonomia e a colaboração da turma, apresentamos atividades de pesquisa, organização, coleta de dados e representação de resultados em diferentes tipos de gráfico e conclusões e interpretações que incentivam o protagonismo e a oralidade.

Os conteúdos desenvolvidos incentivam os estudantes a perceber a presença da Matemática em vários contextos da sociedade contemporânea, contribuindo para o desenvolvimento deles e a solução de problemas que a impactam.

CAPÍTULO 1
Probabilidade

CAPÍTULO 2
Estatística


Carmen Mandato/Equipe/AsiaPac/Getty Images

PRIMEIRAS IDEIAS

Desde 1960, os jogos paraolímpicos são realizados de quatro em quatro anos. Os jogos de 2020 ocorreram em Tóquio, no Japão, e o Brasil conquistou 22 medalhas de ouro, 20 de prata e 30 de bronze.

1. Que tipo de gráfico você utilizaria para representar a quantidade de medalhas que o Brasil conquistou nos Jogos Paraolímpicos de Tóquio?
2. Em sua opinião, o que significa dizer que "o Brasil obteve, em média, mais de 8 medalhas de ouro em cada edição dos jogos paraolímpicos de que participou"?
3. Uma pesquisa realizada em 2019 apontou que 44,8% da população brasileira não realiza o mínimo de atividade física recomendado pela Organização Mundial da Saúde (OMS). Qual é a importância de uma pesquisa como essa? Discuta com os colegas e o professor.

← Final dos 100 metros rasos masculino na categoria T47, nos Jogos Paraolímpicos de Tóquio, no Japão. Foto de 2021.

DE OLHO NA BASE

Apresentar aos estudantes e discutir com eles eventos como as paraolímpiadas incentiva-os a fazer observações de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais. Dessa maneira, eles podem investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes, o que contribui para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 4**.

Além disso, ao discutir os dados da atividade **3** e buscar com os colegas soluções para o problema da falta de exercícios físicos, os estudantes são incentivados a agir pessoal e coletivamente, com autonomia, tomando decisões baseadas em princípios éticos, democráticos, inclusivos e solidários, favorecendo também para o desenvolvimento da **competência geral 10**.

PRIMEIRAS IDEIAS

- Inicie a conversa perguntando aos estudantes se eles conhecem os jogos paraolímpicos. Nesse tipo de campeonato mundial, diversas modalidades esportivas são disputadas por atletas com deficiência física ou sensorial. O *site* do Comitê Paralímpico Brasileiro apresenta um histórico que pode servir como base à discussão. Ele está disponível em: https://www.cpb.org.br/ocomite/institucional. Acesso em: 3 jun. 2022.

RESPOSTAS

1. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes citem gráficos de barras, de colunas ou de setores.
2. Resposta pessoal. Para responder, espera-se que os estudantes realizem uma breve pesquisa sobre o número de medalhas obtidas em todas as edições dos jogos e contruam uma tabela como as apresentada a seguir.

Medalhas de ouro do Brasil nos jogos paraolímpicos

Jogos	Ouro
2020	22
2016	14
2012	21
2008	16
2004	14
2000	6
1996	2
1992	3
1988	4
1984	7
1980	0
1976	0
1972	0

Fonte de pesquisa: Resultados dos Jogos Paralímpicos. *Comitê Paralímpico Internacional*. Disponível em: https://www.paralympic.org/paralympic-games-results. Acesso em: 3 jun. 2022.

3. Resposta pessoal. Com base no resultado apontado na pesquisa, incentive os estudantes a refletir sobre o impacto do sedentarismo, a importância de hábitos mais saudáveis, como a prática esportiva, e a relevância das pesquisas com base em informações confiáveis para melhorar a qualidade de vida das pessoas. Pergunte se eles gostam de algum esporte, se o praticam e os benefícios que esse esporte traz à saúde. Informe que o sedentarismo pode ocasionar algumas patologias, como aumento dos níveis de colesterol, diabetes e doenças cardiovasculares. Essa conversa contribui para desenvolver os **Temas Contemporâneos Transversais** Educação em Direitos Humanos e Saúde, que pertencem às macroáreas **Cidadania e Civismo** e **Saúde**.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Experimento aleatório, espaço amostral e evento.
- Cálculo de probabilidade de ocorrência de um evento.
- Simulações que envolvem cálculo de probabilidade.

Objetivos

- Ampliar e consolidar os conceitos de experimento aleatório, espaço amostral, evento e probabilidade.
- Calcular probabilidade de um evento e expressá-la por meio de um número fracionário ou uma porcentagem.

Justificativa

- Neste capítulo, analisando e realizando atividades que envolvem diversos contextos, os estudantes vão retomar as ideias de probabilidade, experimentos aleatórios e espaço amostral, como também efetuar os cálculos para determinar a probabilidade de um evento ocorrer. Essas tarefas propiciam uma aprendizagem matemática, no campo da Probabilidade, fundamental para que se tornem cidadãos mais críticos e capazes de ler, entender e compreender o mundo, inferindo os conhecimentos adquiridos na escola.

RETOMANDO A IDEIA DE PROBABILIDADE

- Se julgar pertinente, retome rapidamente com os estudantes o cálculo de porcentagem.
- Leia o texto sobre a tartaruga albina e retome a ideia de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral.

Capítulo

1 PROBABILIDADE

Para o desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes estejam familiarizados com cálculo de porcentagem e retomem as ideias que envolvem probabilidade vistas em anos anteriores.

Retomando a ideia de probabilidade

Leia a reportagem a seguir.

> **Tartaruga albina nasce em ninhada de mais de 100 filhotes no Araguaia**
>
> Uma tartaruga albina se destacou entre os mais de 100 filhotes nascidos nos últimos dias às margens no Rio das Mortes, em Ribeirão Cascalheira, a 893 km de Cuiabá, por meio do projeto Quelônios do Araguaia. Ser diferente, nesse caso, não é bom, segundo o executor do projeto na região, Gaspar Saturnino Rocha, já que o filhote não consegue passar despercebido e se torna alvo fácil para os predadores.
>
> [...]
>
> Pollyana Araújo. Tartaruga albina nasce em ninhada de mais de 100 filhotes no Araguaia. *G1*, 4 jan. 2017. Disponível em: http://g1.globo.com/mato-grosso/noticia/2017/01/tartaruga-albina-nasce-em-ninhada-de-mais-de-100-filhotes-no-araguaia.html. Acesso em: 6 abr. 2022.

Imagine uma ninhada de tartaruga com 100 ovos, dos quais apenas um filhote é albino. Escolhendo um desses ovos ao acaso, a chance de ser um filhote albino é de 1 em 100. Dizemos que a probabilidade é de:

$$\frac{1}{100} \quad \text{ou} \quad 1\%$$

A probabilidade é um número de 0 a 1 (ou de 0% a 100%) que indica quanto a ocorrência de determinado fato é provável.

Neste capítulo, vamos retomar e ampliar nossos conhecimentos sobre probabilidades.

Filhote de tartaruga (*Terrapene ornata ornata*) albino.

Larry Miller/Photoresearchers/Latinstock

(IN)FORMAÇÃO

Certezas e incertezas no jogo das probabilidades

Como incorporar os conceitos e as técnicas do estudo das probabilidades à vida quotidiana.

No início da década de [19]80, quando uma onda terrorista se alastrou pela Europa, algumas pessoas chegaram a temer pela vida ao terem de viajar de avião com medo de atentados a bomba. Afinal, corriam o risco de literalmente voar pelos ares. As companhias aéreas, preocupadas com a queda nas vendas de passagens, apressaram-se em mostrar que tal receio era exagerado, pois a probabilidade de viajar num avião que continha uma bomba era muito pequena. A probabilidade de haver duas então era praticamente nula. O transtorno foi enorme para os que cuidavam da segurança dos voos, pois, além dos terroristas, os cidadãos mais previdentes passaram a levar sua própria bomba, tornando quase impossível a chance de encontrar outra no avião.

Com certeza eles aumentaram, e muito, as probabilidades de serem presos ou internados num manicômio. Obviamente isso é uma brincadeira, mas a escolhi porque ela reflete o uso enganoso, porém frequente, que se faz das probabilidades. Ninguém tem dúvidas da importância do ensino da teoria das probabilidades e suas aplicações. Mas mesmo fazendo parte dos currículos escolares – pois é ferramenta de trabalho de geneticistas, físicos, sociólogos, engenheiros, meteorologistas, químicos –, seu estudo parece não estar sendo suficiente, pois os que se sensibilizam com a matéria têm dado aos resultados obtidos um caráter determinístico, e não probabilístico, como seria o correto.

Na verdade, mais que treinar as técnicas dos cálculos probabilísticos é preciso incorporar os conceitos e o espírito mesmo de tais fenômenos. Com base nisso, ouso dizer que os institutos que pesquisam a opinião pública – seja para os departamentos de *marketing* de grandes empresas, para grandes redes de televisão ou jornais ou partidos políticos às vésperas de eleições – fazem cálculos e estimativas provavelmente corretos, mas a maneira ingênua e leviana como são divulgados acabam por negar o conceito. Imprimem aos resultados um caráter determinístico. De fato, não é fácil medir as incertezas.

Experimento aleatório, espaço amostral e evento

Letícia é voluntária em uma ONG e vai fazer uma rifa utilizando uma cartela de nomes para arrecadar dinheiro para a biblioteca da instituição. Veja a cartela de nomes.

CARTELA DE NOMES

ANTÔNIO	MANUEL	ALICE	CLARA	VILMA	GUILHERME
MARIA	CAROLINA	JOÃO	CÍCERO	AMANDA	SANDRA
VALÉRIA	JÚLIO	FELIPE	JOAQUIM	MARCELO	ELIANA
PAULA	MÔNICA	APARECIDA	PALOMA	BERNARDO	GIOVANA

João Picoli/ID/BR

Cada pessoa que participar deve escolher um dos nomes da cartela. Quando todos os nomes forem escolhidos, Letícia revelará o ganhador indicando o nome sorteado. Note que não é possível saber com certeza o nome que será sorteado.

Situações como essa, em que o resultado não pode ser previsto com certeza, são chamadas de **experimentos aleatórios**.

Perceba que, se repetido em condições idênticas, o sorteio do nome da cartela pode produzir resultados distintos e que não podem ser previstos com certeza.

Entretanto, apesar de não sabermos com certeza o nome que será sorteado, podemos elencar os possíveis resultados: todos os nomes da cartela.

O conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de **espaço amostral**.

Agora, imagine que Caio tenha comprado todos os nomes que começam com a letra M dessa rifa: Maria, Manuel, Mônica e Marcelo. Sortear um nome que comece com a letra M é um fato relacionado ao experimento aleatório "sortear um nome da rifa". Dizemos que esse fato é um **evento** relacionado ao experimento aleatório.

Como todos os nomes têm a mesma chance de serem sorteados, medimos a chance de Caio ganhar calculando a razão entre o número de resultados favoráveis ao evento "nome sorteado começar com a letra M" e o número de resultados possíveis. Chamando de P a probabilidade de Caio ganhar, temos:

$$P = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número de resultado possíveis}} = \frac{4}{24}$$

Assim, a probabilidade de Caio ganhar o sorteio é $\frac{4}{24}$, que é, aproximadamente, 16,7%.

EVENTO CERTO E EVENTO IMPOSSÍVEL

Em um experimento aleatório, um evento que não tem a possibilidade de ocorrer é denominado **evento impossível**, e um evento em que se tem total certeza de sua ocorrência é chamado de **evento certo**.

Considerando a situação da rifa de Letícia, dê um exemplo de evento certo e um de evento impossível.

Exemplo de resposta: Evento certo – sair um nome com quatro ou mais letras; evento impossível – sair um nome que comece com a letra U.

- Reflita com os estudantes sobre a situação da rifa apresentada no Livro do Estudante para rever o conceito de espaço amostral como o conjunto que apresenta todos os resultados possíveis de um experimento.
- Apresente a eles o cálculo da probabilidade e destaque as possíveis representações: fracionária, decimal ou porcentagem. Se julgar conveniente, cite exemplos mais simples, como $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$ (metade).
- Se julgar necessário, proponha outro experimento aleatório e peça aos estudantes que citem um exemplo de evento impossível e outro de evento certo.
  - Experimento aleatório: Sortear uma bola de uma urna com 10 bolas de mesmo tamanho e de mesma massa numeradas de 1 a 10.
  - Evento certo: Sair uma bola com um número menor que 11.
  - Evento impossível: Sair uma bola com o número 12.

  É importante que as respostas dos estudantes sejam analisadas de acordo com cada situação apresentada, uma vez que é possível escrever esses eventos de inúmeras maneiras.
- Pergunte aos estudantes qual é a probabilidade de ocorrer um evento impossível e qual é a probabilidade de ocorrer um evento certo. Verifique se eles respondem que as probabilidades são 0 e 1, respectivamente. Saliente que a probabilidade é sempre um número que varia de 0 a 1.

Os livros de curiosidades matemáticas estão cheios de casos que mostram como as estimativas baseadas no senso comum podem diferir das reais chances envolvidas. Tomemos como exemplo um jogo de cartas. Vamos usar um baralho reduzido a apenas quatro cartas: um ás de ouro, um ás de paus, uma dama de copas e um sete de espadas. Se as cartas forem embaralhadas e distribuídas em mãos de duas cartas, teremos seis combinações possíveis de duas cartas. Cinco delas têm pelo menos um ás, e só uma tem dois ases. Assim, se um jogador anuncia que tem um ás, pode-se calcular que a probabilidade de ele ter outro ás é de $\frac{1}{5}$. No entanto, se o jogador dissesse que tem um ás de ouro, se saberia que a probabilidade de ele ter outro ás seria de $\frac{1}{3}$, pois existem apenas três combinações que permitem dizer que o jogador possui um ás de ouro e somente uma dessas combinações tem outro ás.

Por isso, a determinação do naipe do ás alterou as probabilidades. Tais considerações, embora simples, nem sempre são levadas em conta quando se elaboram raciocínios desse tipo. Muitas vezes, mesmo raciocinando corretamente, chegamos a resultados que por alguma razão surpreendem nossas expectativas baseadas no senso comum. Por exemplo, qual a probabilidade que duas entre 25 pessoas escolhidas aleatoriamente façam aniversário na mesma data?

Em geral estima-se uma probabilidade bem baixa, mas, se efetuarmos os cálculos, veremos que quem apostar na coincidência de pelo menos duas datas ganhará em média 57 vezes e perderá 43 em cada cem apostas. Se o número de pessoas escolhidas como amostra fosse 60, a coincidência seria quase certa. Mas devemos lembrar que a certeza absoluta só nos é permitida se tivermos 366 pessoas como amostra, levando-se em conta que o ano tem 365 dias. Escolha você mesmo 25 pessoas ao acaso e vai constatar que a única certeza que podemos ter é a de quão incerto é alimentar certezas.

Barco, L. Certezas e incertezas no jogo das probabilidades. *Superinteressante*, 31 mar. 1990. Disponível em: https://super.abril.com.br/ciencia/certezas-e-incertezas-no-jogo-das-probabilidades/. Acesso em: 3 jun. 2022.

- Se julgar oportuno, escreva na lousa outros experimentos aleatórios, como sorteio de uma bola de uma urna com bolas numeradas de 1 a 10, sorteio de uma carta de um baralho comum e lançamento de uma moeda. Depois, peça aos estudantes que descrevam o espaço amostral de cada uma dessas situações. Faça o mesmo para eventos relacionados a esses experimentos.

  Por exemplo, no experimento sorteio de uma bola de uma urna com bolas numeradas de 1 a 10, o espaço amostral é:

  $$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

  Um evento para esse experimento poderia ser "sair um número múltiplo de 3", que pode ser representado por: $E = \{3, 6, 9\}$.

DE OLHO NA BASE

Descrever os elementos do espaço amostral e dos eventos favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA34**.

SIMULAÇÃO

- Ao fazer simulações, os estudantes esperam obter o mesmo resultado do cálculo da probabilidade. Isso ocorre porque estão acostumados a trabalhar com a probabilidade clássica, ou seja, calcular a probabilidade por meio da razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis. Esclareça que, como em muitas situações no dia a dia não conseguimos prever resultados, a probabilidade frequentista auxilia a fazer uma estimativa com a observação da repetição de um evento.
- Se julgar necessário, proponha outra simulação. Retome o conceito de probabilidade clássica e faça a seguinte pergunta: Por que a probabilidade de sair coroa em um lançamento de uma moeda é 50%? Espera-se que os estudantes respondam que isso acontece em razão de termos uma possibilidade favorável em duas possibilidades.

  Depois, realize algumas perguntas: Se realizarmos uma simulação, é certo sair esse mesmo resultado? Se eu lançar uma moeda 10 vezes, terei sempre como resultado 5 caras e 5 coroas?

  Providencie uma moeda e realize uma simulação com os estudantes: faça 30 lançamentos, anote na lousa os resultados e discuta com eles o que aconteceu.

Representação do espaço amostral e de um evento

Vimos que espaço amostral é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório e que evento é um fato relacionado ao experimento aleatório. Agora, veremos como podemos representar um espaço amostral e um evento.

Considere o experimento aleatório "lançar um dado de seis faces e observar o número da face voltada para cima".

Os resultados possíveis para esse evento são: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Representamos o espaço amostral correspondente a esse experimento utilizando um conjunto. De maneira geral, utilizamos a letra S para representar um espaço amostral. Assim:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Agora, considere o evento "sair um número par". Para representar um evento também utilizamos um conjunto. De maneira geral, utilizamos a letra E para representar um evento. Veja.

$$E = \{2, 4, 6\}$$

Simulação

Danillo Souza/ID/BR

Amanda, Sabrina, Fábio e Jéssica foram os vencedores do campeonato de desafios matemáticos na escola em que estudam. Eles ganharam uma bicicleta e decidiram que o melhor a ser feito seria deixar a bicicleta com alguém da equipe e quando um deles precisasse dela bastaria pedir emprestado.

O grupo pensou em fazer um sorteio para escolher quem levaria a bicicleta para casa. Nesse sorteio, qual é a probabilidade de cada integrante do grupo ser sorteado?

Para calcular essa probabilidade, devemos comparar o resultado do evento E "sair cada um dos integrantes" com o total de resultados possíveis. Assim, sendo $P(E)$ a probabilidade de ocorrer o evento E, teríamos:

$$P(E) = \frac{1}{4} = 25\%$$

Depois de calcular a probabilidade do evento "sair cada um dos integrantes", Sabrina decidiu fazer algumas simulações. Ela simulou o sorteio 100 vezes, anotou o resultado de cada um deles e organizou um quadro. Veja.

Resultado do sorteio

Nome sorteado	Amanda	Sabrina	Fábio	Jéssica
Número de vezes que o nome foi sorteado	26	29	24	21

Com os registros em mãos, Sabrina calculou a porcentagem de cada resultado em relação ao total de sorteios simulados.

- Amanda: $\frac{26}{100} = 26\%$
- Fábio: $\frac{24}{100} = 24\%$
- Sabrina: $\frac{29}{100} = 29\%$
- Jéssica: $\frac{21}{100} = 21\%$

DE OLHO NA BASE

A situação desta página também contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**, pois favorece que os estudantes exercitem a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação.

- Promova, de maneira recorrente, rodas de conversa que possibilitem aos estudantes sentir que o ambiente escolar é um espaço livre de quaisquer atos violentos (verbais ou não verbais), em que o respeito a diferentes opiniões e posicionamentos seja constantemente desenvolvido. Aproveite esses momentos para buscar soluções coletivas e democráticas de maneira que seja possível identificar, prevenir e reverter situações de conflito no ambiente escolar. Dessa maneira, os estudantes podem ter sentimentos de pertencimento à escola e reconhecê-la como um espaço saudável de convivência.
- Promover a cultura de paz possibilita aos estudantes exercitar a empatia e elaborar estratégias de resolução de conflitos não violenta na convivência escolar.

Sabrina percebeu que as porcentagens encontradas por ela são diferentes da probabilidade que ela calculou para o evento "sair cada um dos integrantes". Por que será que esses valores foram diferentes? **Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que isso ocorre por se tratar de um experimento aleatório.**

Perceba que, apesar de a probabilidade de cada nome ser sorteado ser de 25%, isso não significa que, repetindo o sorteio várias vezes, cada resultado sairá em 25% deles.

DESCUBRA MAIS

Chance de vitória nos dados


João Picoli/ID/BR

Você já jogou dados?

O dado mais comum é o cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6.

Propomos um jogo simples, em que o vencedor de cada partida será o jogador que tiver como resultado o maior número ao lançar um dado.

Por exemplo, em uma partida com dois jogadores, considere que, no lançamento do dado, o primeiro jogador tenha como resultado o número 3 e o segundo tenha como resultado o número 1. Então, o primeiro jogador vence a partida. Em caso de resultados iguais, os jogadores devem lançar os dados novamente.

O objetivo será determinar a probabilidade de o segundo jogador vencer a partida, já sabendo o resultado do lançamento do primeiro jogador.

Materiais

- dado numerado de 6 faces
- caderno
- caneta ou lápis

Como fazer

❶ Organizem-se em duplas, de acordo com a orientação do professor.

❷ Determinem quais são os resultados possíveis para que o segundo jogador vença a partida, já sabendo o resultado do primeiro jogador.

❸ Determinem a probabilidade de o segundo jogador vencer essa partida, indicando a fração:

$$\frac{\text{número de jogadas vencedoras}}{\text{número de jogadas possíveis}}$$

Para concluir

Responda sempre no caderno.

1. Considerando que o primeiro jogador obteve 5 no lançamento do dado, quantas possibilidades de jogada o segundo jogador tem disponível para vencer? **Apenas uma possibilidade.**
2. Quem terá mais chances de ganhar esse jogo se o primeiro jogador lançar o dado e sair o número 2? **O segundo jogador.**
3. Escrevam um relatório com as conclusões que vocês obtiveram com essa atividade. **Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes compreendam que esse é um experimento aleatório e que uma maior probabilidade não é garantia de vitória.**

DESCUBRA MAIS

Leia com os estudantes o texto inicial e verifique se todos compreenderam as regras do jogo. Depois, solicite que se reúnam em duplas e escrevam todos os resultados possíveis para que o segundo jogador vença. Eles podem elaborar um quadro como o apresentado a seguir.

Jogador 1	Jogador 2
1	2
1	3
1	4
1	5
1	6
2	3
2	4
2	5
2	6
3	4
3	5
3	6
4	5
4	6
5	6

Esse tipo de registro auxilia os estudantes a responder às questões.

Peça a eles que escrevam também os resultados possíveis para que o primeiro jogador vença e para que ocorra empate. Verifique, por exemplo, se compreendem que, se o primeiro jogador obter o número 1, ele não poderá vencer ou, se ele obter o número 6, ele vencerá em cinco ocorrências e empatará em uma.

Verifique se eles encontraram 36 jogadas possíveis das quais 15 o segundo jogador vence.

PARA CONCLUIR

- Espera-se que na questão **2** os estudantes percebam que, se o primeiro jogador obtiver o número 2, ele só vencerá se o segundo jogador obtiver o número 1. Já o segundo jogador vencerá se obtiver os números 3, 4, 5 ou 6. Ou seja, o primeiro jogador tem apenas uma chance de vencer, enquanto o segundo tem quatro chances.

OUTRAS FONTES

Pereira, P. B. de S. e S. *et al.* Definição clássica e definição frequentista de probabilidade: uma abordagem em sala de aula. *In*: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7963_3734_ID.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

Relato de uma experiência em sala de aula para mostrar um estudo das definições clássica e frequentista de probabilidade.

DE OLHO NA BASE

Propor aos estudantes atividades simples, como jogos de dados, para ajudá-los a compreender os conceitos iniciais de probabilidade por meio de experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências, desenvolve a habilidade **EF07MA34**.

- Na atividade **3**, se possível, contextualize a situação apresentada e mostre aos estudantes um baralho comum. Ele deve ser composto de 52 cartas, organizadas em quatro naipes, em duas cores (preta e vermelha), cada um com 13 cartas. Lembre-se de que na sala de aula pode ter algum estudante que não conheça esse tipo de jogo, portanto explique antes de eles realizarem a resolução.
- Amplie a atividade **7** perguntando aos estudantes qual é a probabilidade de Roberto ganhar um peixe azul e qual é a probabilidade de ele ganhar um peixe amarelo. Verifique se eles respondem que em ambas as situações a probabilidade é igual a 40%.
- Na atividade **8**, peça aos estudantes que justifiquem o erro de cada uma das frases realizando o cálculo. Por exemplo, no item **a**, a probabilidade de a bola ser verde é igual a $\frac{2}{20}$ ou 10%. No item **b**, a probabilidade de sair uma bola amarela é 40%, pois a de sair uma bola azul é 50%. E, no item **c**, a probabilidade de sair uma bola azul é $\frac{10}{20}$ ou $\frac{1}{2}$.

RESPOSTAS

2\. a) Resposta possível:

Moeda 1	Moeda 2
Cara	Cara
Cara	Coroa
Coroa	Cara
Coroa	Coroa

3\. a) $\frac{1}{2}$ ou 50%.

b) $\frac{1}{4}$ ou 25%.

c) $\frac{1}{52}$ ou aproximadamente 1,92%.

d) $\frac{1}{26}$ ou aproximadamente 3,85%.

e) $\frac{3}{4}$ ou 75%.

f) $\frac{25}{26}$ ou aproximadamente 96,15%.

g) $\frac{2}{13}$ ou aproximadamente 15,38%.

h) $\frac{12}{13}$ ou aproximadamente 92,31%.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Considere o lançamento de um dado honesto com faces numeradas de 1 a 6.

a) Qual é a probabilidade de o resultado ser 6? $\frac{1}{6}$

b) Qual é a probabilidade de o resultado ser par? $\frac{1}{2}$

c) Qual é a probabilidade de o resultado ser divisível por 3? $\frac{1}{3}$

d) Qual é a probabilidade de o resultado ser um número primo? $\frac{1}{2}$

2. Faça o que se pede em cada item.

a) Construa um quadro com todos os resultados que podem ser obtidos quando lançamos, simultaneamente, duas moedas distintas. **Consulte a resposta neste manual.**

b) Responda: Lançar, simultaneamente, duas moedas distintas é um experimento aleatório? Justifique.

c) Retome o quadro que você elaborou no item **a** e escreva o espaço amostral do experimento “lançar, simultaneamente, duas moedas distintas”.

d) Escreva dois possíveis eventos para o experimento em questão e, em seguida, calcule a probabilidade de cada um deles ocorrer. **Resposta pessoal.**

2. b) Sim, pois não é possível saber com certeza os resultados que vão ocorrer.

2. c) $S = \{$(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)$\}$

3. Dado um baralho comum, de 52 cartas, calcule a probabilidade de, na escolha aleatória de uma carta, ocorrerem os seguintes eventos: **Consulte as respostas neste manual.**

a) ser vermelha;

b) o naipe ser espadas;

c) ser 2 de copas;

d) ser 9 vermelho;

e) o naipe não ser espadas;

f) não ser 5 vermelho;

g) ser 2 ou 4;

h) ser uma carta que não seja um rei.

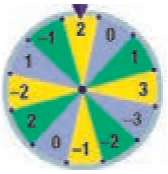
4. Determine todos os números de dois algarismos que podem ser formados com os algarismos 2, 3, 5 e 6. Depois, responda aos itens a seguir.

a) Qual é a probabilidade de, escolhido um desses números ao acaso, ele ser par? $\frac{1}{2}$

b) Qual é a probabilidade de ele ser ímpar? $\frac{1}{2}$

c) Qual é a probabilidade de ele ser menor que 40 e não ter algarismos iguais? $\frac{3}{8}$

5. Observe a roleta utilizada em um jogo.



João Picoli/ID/BR

Calcule a probabilidade de a roleta parar:

a) no número 2; **$\frac{1}{6}$ ou aproximadamente 16,67%.**

b) em um número negativo;

c) em uma casa verde. **$\frac{1}{3}$ ou aproximadamente 33,33%.**

5. b) $\frac{5}{12}$ ou aproximadamente 41,67%.

6. Um casal tem uma filha. Quando a esposa engravidar novamente, qual é a probabilidade de o segundo filho ser menino? **50%**

7. Luís tem um aquário com 10 peixes coloridos: 4 azuis, 4 amarelos e 2 vermelhos. Ele retirou ao acaso um dos peixes para dar de presente a seu primo Roberto. Qual é a probabilidade de Roberto ganhar um peixe vermelho? **20%**

8. Em uma urna há 10 bolas azuis, 8 bolas amarelas e 2 bolas verdes. Reescreva as frases a seguir no caderno, corrigindo-as. **Respostas possíveis:**

a) Retirando uma bola da urna ao acaso, a probabilidade de a bola ser verde é maior que 50%.

b) A probabilidade de retirar uma bola amarela é maior que a probabilidade de retirar uma bola azul.

c) A probabilidade de retirar uma bola azul é $\frac{1}{10}$. **A probabilidade de retirar uma bola azul é $\frac{1}{2}$.**

9. Elabore uma tabela com a quantidade de meninos e de meninas em cada turma do 7º ano de sua escola. Se precisar, peça ajuda ao professor para obter esses dados.

Em seguida, calcule a probabilidade de, sorteado um estudante ao acaso, ele ser:

a) um menino; **Resposta pessoal.**

b) uma menina da sua turma; **Resposta pessoal.**

c) uma menina ou um menino. **100%**

8. a) Retirando uma bola da urna ao acaso, a probabilidade de a bola ser verde é menor que 50%.

8. b) A probabilidade de retirar uma bola amarela é menor que a probabilidade de retirar uma bola azul.

DIVERSIFICANDO

5. b) As duas cores têm a mesma chance, pois há a mesma quantidade de fichas de cada cor na caixa.

Responda sempre no caderno.

1. a) 9 possibilidades. b) $\frac{1}{9}$ ou aproximadamente 11,11%.

1. Cristina pode ir à escola e voltar para casa de três maneiras diferentes: de ônibus, de carro com os pais ou de carona com os pais de uma amiga.

a) Quantas possibilidades diferentes ela tem para ir à escola e voltar para casa?

b) Cristina escreveu todas as possibilidades em papéis de mesmo tamanho. Todos foram dobrados da mesma maneira e colocados dentro de um saquinho para o sorteio de um deles. Qual é a probabilidade de sair um papel com a opção "ida de ônibus e volta de carona com os pais de uma amiga"?

2. Uma urna laranja tem 3 bolas idênticas com os números 1, 2 e 3; outra urna, azul, tem 2 bolas idênticas com os números 4 e 5.

a) No caderno, copie e complete o quadro com as possibilidades de resultado ao retirar aleatoriamente uma bola de cada urna.

	Urna laranja	Urna azul	Soma dos números das bolas sorteadas
	1	4	5
	1	5	6
2; 4; 6			
2; 5; 7			
3; 4; 7			
3; 5; 8			

b) Qual é a probabilidade de a soma dos pontos ser maior do que 4? De que tipo é esse evento: certo ou impossível? **1 ou 100%; evento certo.**

c) Qual é a probabilidade de a soma dos pontos ser zero? De que tipo é esse evento: certo ou impossível? **0; evento impossível.**

d) Qual é a probabilidade de a soma dos pontos ser menor que 6? **$\frac{1}{6}$ ou aproximadamente 16,67%.**

3. Em uma festa, há 10 meninos e 25 meninas.

a) Sorteando um convidado ao acaso, qual é a probabilidade de ser um menino?

b) E de ser uma menina?

c) Qual é a soma desses dois resultados? **1 ou 100%.**

4. Considere os números naturais que são divisores de 30. Escolhendo um desses números, qual é a probabilidade de ele ser um número primo?

3. a) $\frac{2}{7}$ ou aproximadamente 28,57%. **4.** $\frac{3}{8}$ ou 37,5%.

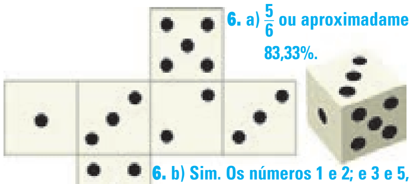
5. a) Vermelha, pois há mais fichas dessa cor na caixa.

5. Em uma caixa, há 5 fichas vermelhas e 4 fichas azuis.

a) Na primeira retirada, o que é mais provável sair: uma ficha vermelha ou uma ficha azul? Justifique sua resposta.

b) Se, na primeira retirada, saiu uma ficha vermelha, o que é mais provável sair na segunda retirada se não houver reposição da ficha? Justifique sua resposta.

6. Patrícia levou para a aula de Matemática um dado não convencional, com os números 1, 2, 3, 3, 5 e 5 em suas faces. Veja.



6. a) $\frac{5}{6}$ ou aproximadamente 83,33%.

João Picoli/ID/BR

6. b) Sim. Os números 1 e 2; e 3 e 5, porque no dado existem apenas um número 1 e um número 2; e dois números 3 e dois números 5.

a) Jogando o dado ao acaso, qual é a probabilidade de se obter um número ímpar?

b) Há números com a mesma chance de serem obtidos? Se houver, indique quais são e por que isso ocorre.

c) Com um colega, confeccionem um dado como o de Patrícia. Lancem o dado 50 vezes e registrem os resultados obtidos. Depois, retomem os itens **a** e **b** e verifiquem se as respostas estão parecidas com o que vocês obtiveram na simulação. **Resposta pessoal.**

7. Leia a situação a seguir e indique no caderno a alternativa correta.

Virgínia lançou uma moeda 20 vezes seguidas e obteve os seguintes resultados:

- 8 caras;
- 12 coroas.

Se Virgínia decidir lançar a moeda mais 100 vezes, espera-se que: **Alternativa c.**

a) ocorram exatamente 40 caras e 60 coroas.

b) ocorram mais coroas do que caras.

c) a razão entre o número de caras e o número de coroas obtidas não seja a mesma que a dos primeiros 20 lançamentos.

d) ocorram exatamente 50 caras e 50 coroas.

3. b) $\frac{5}{7}$ ou aproximadamente 71,43%.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta página, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Na atividade **1**, peça aos estudantes que expliquem como organizaram as informações de ida e volta de Cristina de três maneiras diferentes.
- Na atividade **2**, itens **b**, **c** e **d**, os estudantes precisam identificar, no quadro preenchido no item **a**, as somas que podem ser obtidas e, então, calcular as probabilidades solicitadas.

  Complemente a atividade fazendo outras perguntas, como: Qual é a probabilidade de a soma dos pontos ser 7? $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$.

  A probabilidade de a soma dos pontos ser 5 é a mesma de a soma ser 8? Sim.
- Na atividade **4**, retome com eles os divisores do número 30 (1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30).
- Na atividade **5**, item **b**, espera-se que os estudantes percebam que haverá um número menor de fichas vermelhas, já que não há reposição, e ainda que haverá a mesma quantidade de fichas de cada cor; portanto, a probabilidade de na segunda retirada sair uma ficha azul é igual à probabilidade de sair uma vermelha.

  Para complementar a atividade, pergunte: Se na primeira retirada sair uma ficha azul e na segunda, uma vermelha, o que é mais provável sair na terceira retirada, sabendo que não houve reposição das fichas em nenhuma das retiradas? Espera-se que os estudantes percebam que é mais provável sair uma ficha vermelha, pois haverá mais fichas vermelhas que azuis.

DE OLHO NA BASE

As situações das atividades **6** e **7** propiciam a comparação entre o cálculo da probabilidade por meio de uma razão e o cálculo por meio de frequência de ocorrências, desenvolvendo a habilidade **EF07MA34**.

Além disso, as diversas atividades propostas nestas páginas ajudam a desenvolver o raciocínio lógico e o espírito de investigação dos estudantes, favorecendo também o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 2**.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Se os estudantes tiverem alguma dificuldade em escrever o espaço amostral na atividade **1**, sugira a eles que elaborem um quadro como o apresentado a seguir.

Volta Ida	Ônibus (o)	Carro (c)	Carona (k)
Ônibus (o)	o/o	o/c	o/k
Carro (c)	c/o	c/c	c/k
Carona (k)	k/o	k/c	k/k

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Pesquisa amostral e pesquisa censitária.
- Planejamento de pesquisa, coleta e organização dos dados, construção de tabelas e gráficos e interpretação das informações.
- Tabelas simples e de dupla entrada.
- Gráficos de barras simples, de barras duplas, de linhas, pictóricos e de setores.
- Cálculo da média aritmética com e sem o uso de planilhas eletrônicas.

Objetivos

- Compreender o que é pesquisa estatística.
- Entender o conceito de população, amostra e variável em uma pesquisa estatística.
- Classificar variáveis em qualitativas e quantitativas.
- Analisar informações de pesquisas.
- Organizar, interpretar e analisar dados representados em gráficos e tabelas.
- Reconhecer diferentes tipos de gráfico e tabela, bem como seus elementos: títulos, fonte e legendas.
- Calcular e utilizar média aritmética para tomada de decisões.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes vão ter a oportunidade de compreender as etapas de uma pesquisa estatística e a representação desses dados em tabelas simples, de dupla entrada e em variados tipos de gráfico. Além disso, eles podem reconhecer a média aritmética como uma medida de tendência central. Essa oportunidade é fundamental para que eles tenham subsídios para associar e aplicar na vida cotidiana os saberes e conhecimentos adquiridos na escola, tornando-se cidadãos mais críticos e autônomos.

PESQUISA ESTATÍSTICA

- Neste capítulo, amplia-se o conceito de pesquisa estatística para que os dados obtidos sejam utilizados para a tomada de decisões.
- Comente com os estudantes que para realizar uma pesquisa é necessário um planejamento com base em um problema a ser resolvido.
- Se julgar conveniente, apresente o censo demográfico feito pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), que é um documento referencial para traçar o perfil da população brasileira e auxilia os órgãos governamentais na escolha e no planejamento de ações e programas voltados a políticas públicas.
- Com base na imagem e no texto de abertura deste capítulo, comente com os estudantes a respeito da mobilidade urbana e o progresso dos meios de transporte ao longo do tempo com o avanço da tecnologia. Incentive-os a trocar ideias sobre o aperfeiçoamento do transporte urbano que exigiu refletir sobre algumas perspectivas, como alterar as leis de trânsito, ressignificar o comportamento dos usuários, otimizar o tráfego na cidade, reduzir a emissão de gases poluentes, etc. Em seguida, questione-os se essas questões são consideradas em relação à qualidade de vida da população que utiliza o meio de transporte no dia a dia. Instigue-os a refletir e pergunte: Além de investir em conscientização e cobrar de governantes esse tipo de política pública, como podemos utilizar a ciência para aprimorar o meio de transporte de maneira que a população consiga se locomover e tenha acesso a um serviço público mais justo e digno? Se julgar necessário, consulte o material “Como trabalhar a mobilidade com os alunos?”, disponível em: https://box.novaescola.org.br/etapa/3/educacao-fundamental-2/caixa/281/mobilidade-dos-caminhos-indigenas-as-inovacoes-atuais/conteudo/20334 (acesso em: 17 mar. 2022). Esse debate contribui para desenvolver os **Temas Contemporâneos Transversais** Educação para o Trânsito e Ciência e Tecnologia, que pertencem, respectivamente, às macroáreas **Cidadania e Civismo** e **Ciência e Tecnologia**.

Capítulo 2 ESTATÍSTICA

Para melhor compreensão do conteúdo deste capítulo, os estudantes devem ter entendido os conceitos de porcentagem e proporcionalidade, além de conteúdos acerca dessa unidade temática vistos nos anos anteriores.

Pesquisa estatística

Como é que você vai, como é que você vem? De carro, a pé ou de bicicleta? De moto, de ônibus ou de trem? A Companhia do Metropolitano de São Paulo (Metrô) realiza, a cada 10 anos, desde 1967, a pesquisa Origem e Destino, a maior pesquisa de mobilidade do Brasil. Ela apura os meios de deslocamentos diários da população: motorizados (transporte coletivo e individual) e não motorizados (viagens a pé e de bicicleta).

Essa pesquisa permite conhecer como as pessoas de todas as classes sociais da população se deslocam pela metrópole. Os resultados indicam caminhos para a melhoria do trânsito, dos transportes públicos e da mobilidade ativa em São Paulo.

↓ Estação da Luz, em São Paulo (SP). Foto de 2021.

mateusfiuza/Shutterstock.com/ID/BR

População e amostra

A pesquisa estatística estuda uma **população**, que é o conjunto dos elementos que apresentam determinada característica e que vão ser o objeto de um estudo. Essa população pode ser de diversos tipos, por exemplo: produtos fabricados por uma indústria, animais de um bioma, pessoas de determinada faixa etária, entre outros.

Boa parte das pesquisas estatísticas, entretanto, é feita apenas com parte de uma população, ou seja, com uma **amostra**.

As pesquisas nas quais toda a população é consultada são chamadas de **censitárias** e, de maneira geral, são mais precisas do que as **amostrais**, em que apenas parte da população é consultada.

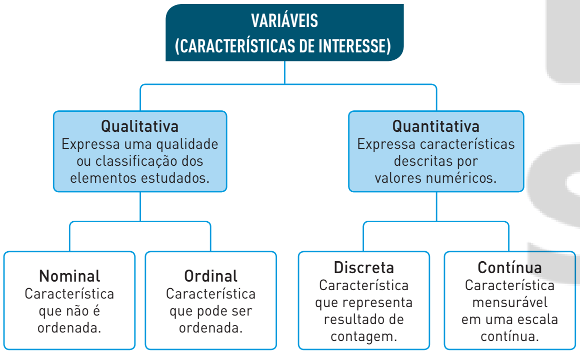
Para decidir se uma pesquisa será censitária ou amostral, o pesquisador precisa considerar o objetivo da pesquisa, o tempo e os recursos disponíveis para sua elaboração. Pesquisas com grupos pequenos, por exemplo, com os estudantes de uma sala de aula ou com os professores de uma escola, costumam ser feitas de maneira censitária, pois é possível consultar um a um os integrantes dessa população. Entretanto, quanto maior o grupo de entrevistados, maiores são as dificuldades para fazer a pesquisa com toda a população.

Nas pesquisas amostrais, a escolha da amostra é muito importante, pois as informações obtidas devem representar corretamente a população.

Variáveis

Toda pesquisa estatística busca analisar alguns atributos da população. Cada atributo a ser estudado é chamado de **variável**.

As variáveis de uma pesquisa estatística podem ser de dois tipos: qualitativa ou quantitativa. Além disso, cada um desses tipos apresenta outras duas classificações. Observe o esquema a seguir.



PARA EXPLORAR

IBGE Educa

Nesse *site*, você encontra várias informações, brincadeiras e material de pesquisa sobre o Brasil. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/. Acesso em: 6 abr. 2022.

PARE E REFLITA

Imagine que o professor de Língua Portuguesa crie um clube de leitura e queira saber que tipos de livro colocar nesse clube para que a maior parte dos estudantes fique satisfeita.

Essa pesquisa deveria ser censitária ou amostral? Que variáveis ele deveria estudar? De que tipo seria cada uma delas?

Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes percebam que, nessa situação, é possível que a pesquisa seja censitária. Em relação às variáveis a serem estudadas, as respostas podem variar, mas observe se todos os estudantes percebem a necessidade de estudar a variável "gênero do livro". Essa é uma variável qualitativa nominal.

OUTRAS FONTES

Confederação Brasileira de Voleibol (CBV). Disponível em: https://superliga.cbv.com.br/. Acesso em: 3 jun. 2022.

Esse *site* disponibiliza diversas informações sobre a Superliga de vôlei, com estatísticas referentes aos jogos. É uma ótima oportunidade para demonstrar a interdisciplinaridade dos conceitos estatísticos.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Disponível em: https://censo2010.ibge.gov.br/. Acesso em: 3 jun. 2022.

Esse *site* pode ser consultado para diversas finalidades, como o censo nacional atualizado, com informações territoriais apresentadas em tabelas e gráficos.

- Nesta página, retomamos os conceitos de população, amostra e variável. Realize um debate com os estudantes sobre a importância de escolher as amostras, pois elas devem representar e fornecer dados sobre a população investigada. Ou seja, a relação entre amostra e população é de extrema importância para toda análise estatística.

DE OLHO NA BASE

Identificar se uma pesquisa deve ser censitária ou amostral favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA36**.

- Quanto às variáveis, comente com os estudantes que elas correspondem ao conjunto de resultados possíveis de um estudo. Por exemplo, em estudo sobre:
  - o número de filhos, os resultados possíveis podem ser expressos por meio de números naturais. Nesse caso, temos uma variável quantitativa discreta.
  - a cor dos olhos, os resultados possíveis são expressos pelas cores que os olhos podem ter. Nesse caso, trata-se uma variável qualitativa nominal.
  - o nível de domínio de uma língua, os resultados possíveis são básico, intermediário e avançado, por exemplo. Nesse caso, temos uma variável qualitativa ordinal.
  - a medida da altura de pessoas, os resultados possíveis assumem valores racionais. Ou seja, temos uma variável quantitativa contínua.

- Converse com os estudantes sobre a importância de organizar e registrar os dados e como apresentá-los em gráficos, tabelas e produções textuais. Transformar tabelas em gráficos e vice-versa propicia o uso de diferentes portadores de texto, ampliando a competência de leitura e de escrita, além de reforçar os conceitos.
- Se julgar oportuno, elabore com os estudantes um gráfico com os dados da tabela “Mulheres que consomem frutas e hortaliças regularmente nas capitais dos estados da Região Norte”. Desenhar o gráfico amplia a visão espacial, já que estimula os estudantes a posicioná-lo na página de maneira que facilite a visualização. Comente com eles a importância dos elementos de um gráfico de barras: título dos eixos, título do gráfico e fonte de pesquisa.
- Aproveite a oportunidade e pergunte aos estudantes sobre alguns hábitos alimentares, como se costumam consumir frutas e hortaliças e se alimentam em horários regulares. Ao abordar o tema, é importante conscientizá-los sobre os vários tipos de alimento (*in natura*, processados e ultraprocessados) e a influência que as propagandas da indústria alimentícia podem exercer nessa faixa etária, uma vez que se tornarão potenciais consumidores futuramente. Se julgar necessário, consulte o *Guia alimentar para a população brasileira*, disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf. Acesso em: 14 abr. 2022. Essa conversa contribui para desenvolver os **Temas Contemporâneos Transversais** Educação em Direitos Humanos e Educação Alimentar e Nutricional, que pertencem, respectivamente, às macroáreas **Cidadania e Civismo** e **Saúde**.

Organização de dados em tabela e em gráfico de colunas

Para organizar os dados obtidos em pesquisas estatísticas e facilitar a leitura, a interpretação e a análise deles, é comum o uso de tabelas e gráficos.

Em 2019, o Ministério da Saúde realizou uma pesquisa sobre os hábitos alimentares da população brasileira. Veja alguns dos dados obtidos nessa pesquisa.

Mulheres que consomem frutas e hortaliças regularmente nas capitais dos estados da Região Norte

Capital	Rio Branco	Macapá	Manaus	Belém	Porto Velho	Boa Vista	Palmas
Porcentagem aproximada (%)	31	31	36	30	34	32	45

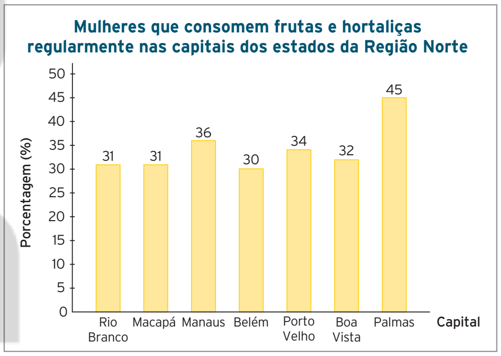
Fonte de pesquisa: Ministério da Saúde. *Vigitel Brasil 2019*. Brasília, 2020. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/vigitel_brasil_2019_vigilancia_fatores_risco.pdf. Acesso em: 5 abr. 2022.

OBSERVAÇÃO

Os gráficos de barras podem ser construídos com barras verticais ou horizontais. Nesta coleção, vamos chamar os gráficos de barras verticais de gráficos de colunas e os gráficos de barras horizontais simplesmente de gráficos de barras.

Agora, vamos construir um gráfico de colunas com esses dados.

- Traçamos dois eixos perpendiculares.
- A altura de cada barra vertical vai indicar a porcentagem de mulheres que consomem frutas e hortaliças regularmente nas capitais dos estados da Região Norte. A capital será representada no eixo horizontal.
- Precisamos escolher uma escala adequada para o eixo vertical. Como a maior porcentagem é 45 e a menor é 30, estabelecemos que o lado de cada quadradinho representará 5%, mas outro valor poderia ter sido escolhido.
- Desenhamos uma coluna que relaciona a capital Rio Branco, no eixo horizontal, com o número 31%, no eixo vertical. Repetimos esse procedimento para as demais capitais, mantendo a mesma largura para cada coluna e espaçando as colunas igualmente no eixo horizontal.
- Colocamos o título e a fonte.



ID/BR

Fonte de pesquisa: Ministério da Saúde. *Vigitel Brasil 2019*. Brasília, 2020. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/vigitel_brasil_2019_vigilancia_fatores_risco.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

Além dos dados relacionados ao percentual de mulheres que consomem frutas e hortaliças regularmente, a pesquisa informou os dados relativos aos homens que têm esse hábito alimentar. Para facilitar a análise dos dados de homens e mulheres, vamos organizar todas essas informações em uma tabela de dupla entrada e em um gráfico de colunas duplas.

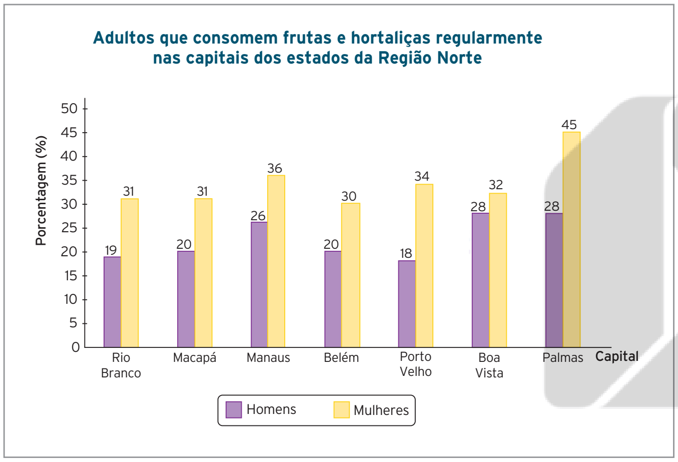
Porcentagem (%) de adultos que consomem frutas e hortaliças regularmente nas capitais dos estados da Região Norte

Capital / Gênero	Rio Branco	Macapá	Manaus	Belém	Porto Velho	Boa Vista	Palmas
Homens	19%	20%	26%	20%	18%	28%	28%
Mulheres	31%	31%	36%	30%	34%	32%	45%

Fonte de pesquisa: Ministério da Saúde. *Vigitel Brasil 2019*. Brasília, 2020. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/vigitel_brasil_2019_vigilancia_fatores_risco.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

Note que, para cada capital, há duas informações: o percentual para homens e o percentual para mulheres. Tabelas desse tipo são chamadas de dupla entrada, pois apresentam os dados de duas variáveis.

Agora, observe os dados representados em um gráfico de colunas duplas.



Adultos que consomem frutas e hortaliças regularmente nas capitais dos estados da Região Norte

ID/BR

Fonte de pesquisa: Ministério da Saúde. *Vigitel Brasil 2019*. Brasília, 2020. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/vigitel_brasil_2019_vigilancia_fatores_risco.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

O gráfico apresentado é chamado de gráfico de colunas duplas. Os gráficos de colunas podem ser também de colunas triplas, quádruplas, entre outras, de acordo com a quantidade de variáveis que se quer representar.

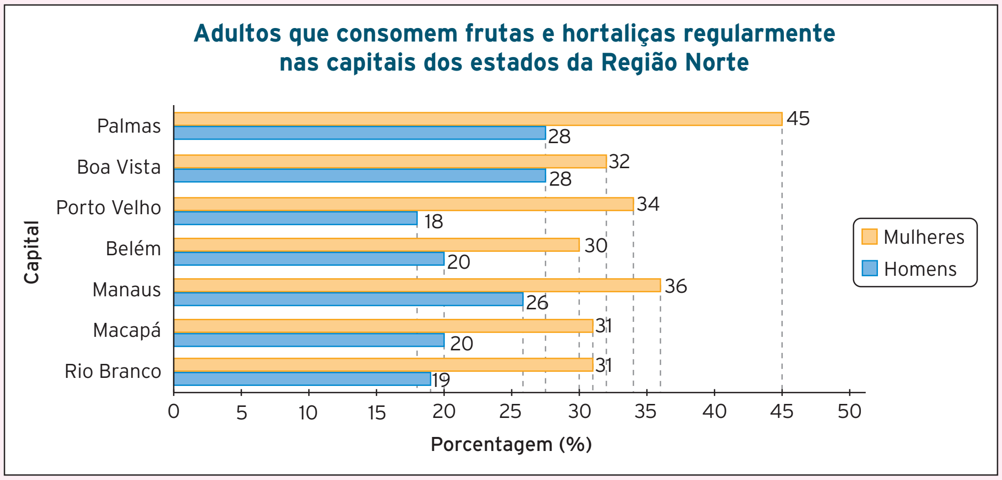
Agora é a sua vez! Construa no caderno um gráfico de barras duplas horizontais usando as informações da tabela. **Consulte a resposta neste manual.**

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Para que os estudantes percebam as características comuns e as diferenças entre os gráficos de colunas e os de barras, converse sobre as mudanças que ocorrem entre esses tipos de gráfico. Essas mudanças mostram um reajuste na visualização e na ordenação dos dados. Verifique se eles percebem que, no gráfico de colunas, é a altura da coluna que indica a porcentagem de homens ou de mulheres e que, no gráfico de barras, é o comprimento das barras. Além disso, houve a mudança dos eixos. No gráfico de barras horizontais, o eixo vertical refere-se ao nome das capitais, enquanto o eixo horizontal refere-se às porcentagens. Pergunte se há elementos que se mantêm; por exemplo, o título do gráfico permanece o mesmo.

Depois, proponha a eles que transformem o gráfico de colunas da página 254 do Livro do Estudante em um gráfico de barras.

RESPOSTA



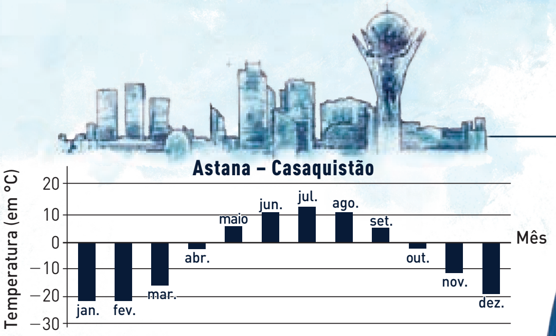
Adultos que consomem frutas e hortaliças regularmente nas capitais dos estados da Região Norte

ID/BR

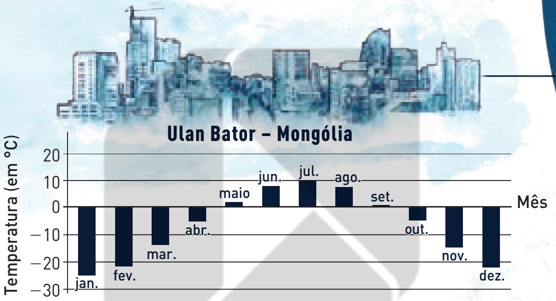
Fonte de pesquisa: Brasil. Ministério da Saúde. *Vigitel Brasil 2019*. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/vigitel_brasil_2019_vigilancia_fatores_risco.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

- Analise atentamente com os estudantes o infográfico apresentado nestas páginas. É importante que eles observem o eixo vertical de todos os gráficos e verifiquem que ele indica medidas de temperatura que variam de −30 °C a +20 °C. Outro ponto que deve ser destacado é em relação às colunas que ficam acima e às que ficam abaixo do eixo horizontal. Verifique se eles compreenderam que – acima do eixo —, quanto mais alta a coluna, maior é a medida de temperatura e que – abaixo do eixo —, quanto mais alta a coluna, menor é a medida de temperatura.
- Se julgar oportuno, peça aos estudantes que observem os dados do infográfico e pergunte sobre o período em que as capitais Astana, Helsinque e Ottawa e a cidade de Ushuaia ficam com a medida de temperatura abaixo de zero. Veja exemplo de resposta no texto abaixo do gráfico referente à capital da Mongólia.
- Aproveite a oportunidade e proponha à turma uma pesquisa para conhecer alguns aspectos das múltiplas realidades dos povos que vivem nessas localidades. Os estudantes devem se organizar em grupos de quatro integrantes e cada grupo pode pesquisar um tema sobre as diferenças sociais, históricas, políticas, econômicas, demográficas e culturais desses países. Depois, cada grupo deve apresentar à turma as conclusões que obtiveram com a pesquisa.

Os gráficos de colunas também podem envolver números negativos. Nesse infográfico, que mostra as temperaturas de quatro das capitais mais gélidas do mundo e também de uma cidade na Argentina, foram utilizados gráficos de colunas com números negativos para representar as informações desejadas.

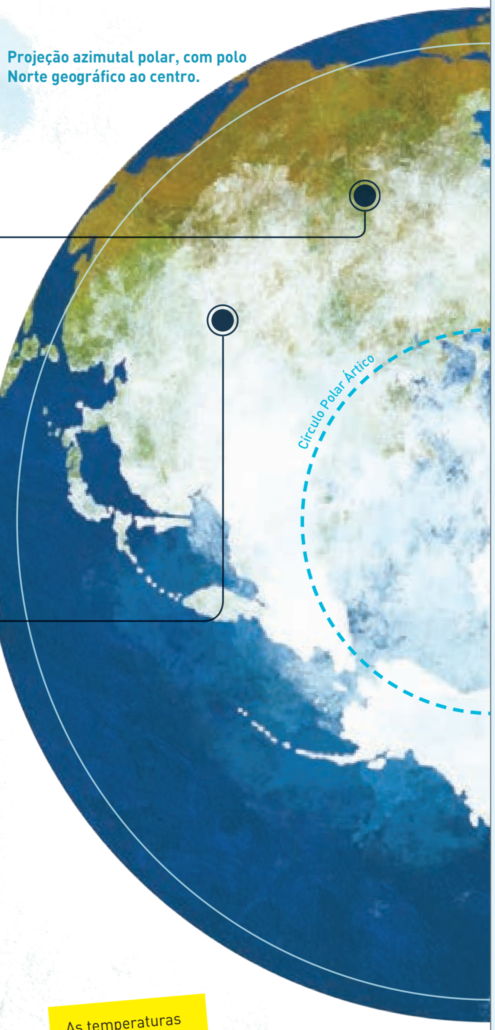


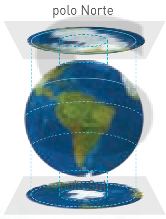
Repare que os gráficos mostram temperaturas mês a mês, mas sua variação ao longo do ano tem um padrão parecido. Isso ocorre porque todas as capitais aqui mencionadas estão localizadas no hemisfério Norte, onde o inverno começa no mês de dezembro.



Em gráficos como esses, as colunas abaixo do eixo horizontal representam valores negativos. Esse gráfico mostra que a capital da Mongólia tem temperaturas abaixo de zero de outubro a abril.

Projeção azimutal polar, com polo Norte geográfico ao centro.





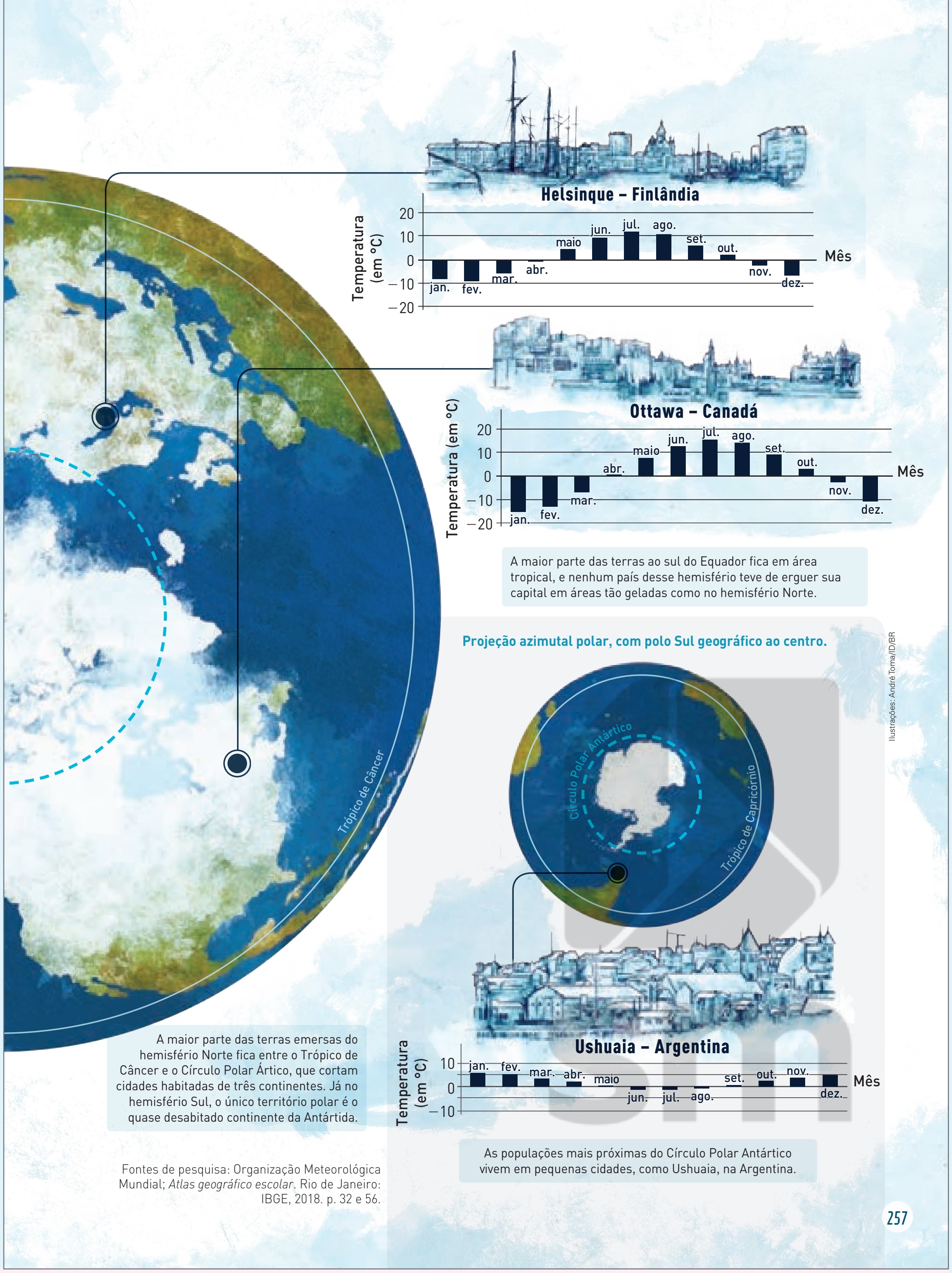
Projeção azimutal

Cartógrafos (especialistas na produção de mapas) desenvolveram formas de representar a superfície terrestre chamadas de projeções cartográficas. A ilustração, ao lado, representa a projeção dos polos denominada azimutal.

As temperaturas registradas nos gráficos são as médias das temperaturas mínimas mensais.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Proponha aos estudantes que pesquisem a temperatura de outras localidades e elaborem gráficos parecidos com os apresentados nesse infográfico. Depois, solicite que um dos gráficos construído seja de barras e explore as características desse gráfico. Verifique se eles construíram barras para a esquerda, indicando as temperaturas negativas, e para a direita, indicando temperaturas positivas.



A maior parte das terras ao sul do Equador fica em área tropical, e nenhum país desse hemisfério teve de erguer sua capital em áreas tão geladas como no hemisfério Norte.

Projeção azimutal polar, com polo Sul geográfico ao centro.

A maior parte das terras emersas do hemisfério Norte fica entre o Trópico de Câncer e o Círculo Polar Ártico, que cortam cidades habitadas de três continentes. Já no hemisfério Sul, o único território polar é o quase desabitado continente da Antártida.

As populações mais próximas do Círculo Polar Antártico vivem em pequenas cidades, como Ushuaia, na Argentina.

Fontes de pesquisa: Organização Meteorológica Mundial; *Atlas geográfico escolar*. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 32 e 56.

257

- Organize uma roda de conversa e aproveite para perguntar aos estudantes: Você sabe se na cidade em que vocês moram já foram registradas medidas de temperatura abaixo de zero? Se sim, quais? Você já esteve em alguma cidade na época em que foi registrada alguma temperatura negativa? Em caso afirmativo, qual? Converse com eles sobre os costumes dos habitantes de cidades em que as medidas de temperatura são muito baixas: lazer, esportes, hábitos alimentares, vestuários e tradições.
- Comente com os estudantes que os períodos de inverno e de verão nas cidades do hemisfério norte são invertidos em relação ao do Brasil, que está no hemisfério sul. Chame a atenção deles para observarem essa situação nos gráficos dessas cidades, ou seja, que as menores medidas de temperatura são registradas entre novembro e fevereiro, período que corresponde ao inverno desses países.
- Se possível, proponha uma pesquisa em duplas, em que os estudantes escolham uma cidade brasileira da Região Sul, cujo inverno costuma ser bem rigoroso, com temperaturas negativas. Peça a eles que busquem em *sites* confiáveis os registros das medidas de temperatura médias nessa cidade no último ano e elaborem um gráfico para apresentar à turma.

- Se possível, disponibilize papel quadriculado para os estudantes e peça que reproduzam o gráfico desta página do Livro do Estudante seguindo os passos indicados.
- Converse com os estudantes sobre as informações que estão representadas tanto na tabela como no gráfico. Inicie a mediação por meio do título perguntando a eles o que acham que se pretende mostrar com esse estudo e peça que observem o que acontece ano a ano.
- Solicite também aos estudantes que comparem os dois portadores de informação (tabela e gráfico) e falem sobre como os dados são apresentados. Pergunte em qual deles é mais fácil ou mais rápido observar o que aconteceu com a porcentagem de adultos fumantes. Espera-se que eles percebam que o gráfico permite visualizar, por meio das linhas decrescentes e pelos pontos inicial e final, que a porcentagem de adultos fumantes reduziu entre 2013 e 2019, sem que se tenha de comparar os números.
- Promova um debate sobre esses resultados. Sugira aos estudantes que busquem na fonte de pesquisa informações de como a pesquisa foi realizada. Essa é uma boa oportunidade de os estudantes terem contato com os conceitos que viram até o momento aplicados em situações reais.
- O tema do tabagismo permite analisar o impacto de políticas públicas destinadas à saúde, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF07CI09** [Interpretar as condições de saúde da comunidade, cidade ou estado, com base na análise e comparação de indicadores de saúde (como taxa de mortalidade infantil, cobertura de saneamento básico e incidência de doenças de veiculação hídrica, atmosférica entre outras) e dos resultados de políticas públicas destinadas à saúde.] do componente curricular Ciências.

DE OLHO NA BASE

Discutir a redução do número de fumantes permite conscientizar os estudantes em relação ao cuidado de sua saúde física, contribuindo também para o desenvolvimento da **competência geral 8**.

Gráfico de linhas

De maneira geral, utilizamos os gráficos de linhas (ou de segmentos) para representar dados coletados em um período de tempo.

Nesse tipo de gráfico, as informações são representadas por um ponto e, para facilitar a análise comparativa, usamos segmentos de reta para unir os pontos.

A tabela a seguir apresenta o percentual de adultos residentes no Brasil que são fumantes de 2013 a 2019.

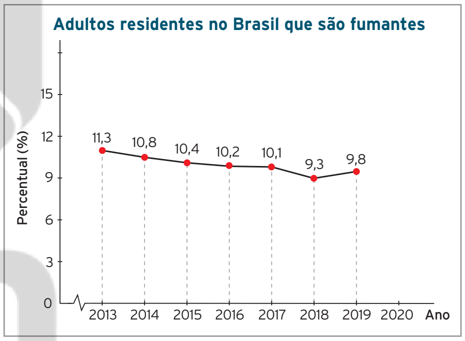
Adultos residentes no Brasil que são fumantes

Ano	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Percentual (%)	11,3	10,8	10,4	10,2	10,1	9,3	9,8

Fonte de pesquisa: Ministério da Saúde. *Vigitel Brasil 2019*. Brasília, 2020. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/vigitel_brasil_2019_vigilancia_fatores_risco.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

Acompanhe como podemos construir um gráfico de linhas com base nos dados dessa tabela.

- Traçamos dois eixos perpendiculares.
- De maneira geral, representamos a variação do tempo no eixo horizontal. Nesse caso, o eixo vertical vai representar o percentual de fumantes.
- Escolhemos a escala para o eixo vertical. Por exemplo, decidimos que o lado de cada quadradinho representará 3%, mas outro valor também poderia ter sido escolhido.
- Marcamos um ponto no encontro da linha que indica o ano de 2013 no eixo horizontal e na linha que indica 11,3% no eixo vertical. Repetimos esse procedimento para os demais anos. Lembre-se de que os anos devem estar espaçados igualmente no eixo horizontal.
- Traçamos segmentos de reta para unir os pontos marcados.
- Colocamos o título e a fonte do gráfico.



ID/BR

Fonte de pesquisa: Ministério da Saúde. *Vigitel Brasil 2019*. Brasília, 2020. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/vigitel_brasil_2019_vigilancia_fatores_risco.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

Nesse gráfico, o símbolo ∿ indica que o intervalo entre 0 e 2013 não é proporcional aos demais intervalos marcados no eixo.

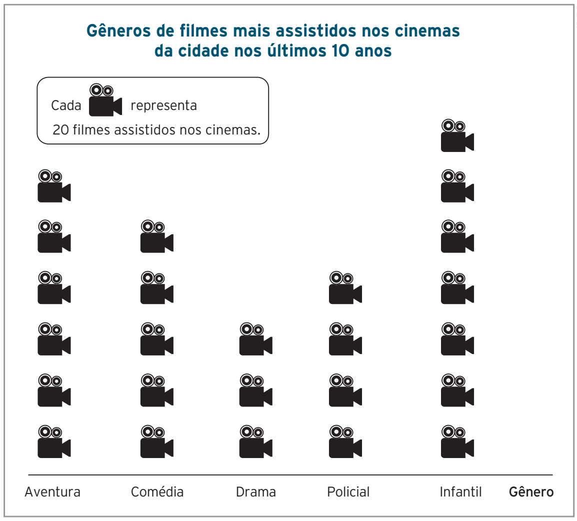
ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Para ampliar o conhecimento e avaliar a compreensão dos estudantes acerca da construção e interpretação de gráficos de linhas, proponha estas atividades:

1. Solicite aos estudantes que recortem de jornais ou revistas a representação de um gráfico de linhas para trabalhar a interpretação de gráficos de maneira contextualizada. Peça que colem-na em uma folha de papel avulsa e redijam um pequeno texto que revele uma conclusão possível para esse gráfico. Ressalte que, em qualquer representação gráfica, eles devem ler com atenção a informação apresentada, e não apenas olhar a tendência observada no gráfico, pois algumas vezes os gráficos têm erros comuns, como a falta de informação nos eixos, ou erros na escala que podem gerar conclusões equivocadas. Dessa maneira, os estudantes podem perceber a importância de ler e interpretar gráficos para a compreensão do mundo.
2. Se possível, leve os estudantes à sala de informática e peça que elaborem, com base na tabela desta página do Livro do Estudante, um gráfico de linhas utilizando uma planilha eletrônica.

Pictograma

Um pictograma, ou gráfico pictórico, usa símbolos ou figuras para representar o que foi pesquisado e indicar a quantidade. Observe o pictograma a seguir.



ID/BR

Dados fornecidos pela administração dos cinemas.

O número de figuras relaciona os gêneros dos filmes à quantidade de filmes assistidos no cinema, e cada figura representa 20 filmes assistidos, como indica a legenda.

Para descobrir quantos filmes de cada gênero foram assistidos nesses 10 anos, basta multiplicar 20 pela quantidade de ícones referentes a cada gênero.

- Aventura: 6 🎥
  20 · 6 = 120
- Comédia: 5 🎥
  20 · 5 = 100
- Drama: 3 🎥
  20 · 3 = 60
- Policial: 4 🎥
  20 · 4 = 80
- Infantil: 7 🎥
  20 · 7 = 140

Danilo Souza/ID/BR

É HORA DE ASSISTIR AO FILME!

Para que todas as pessoas consigam viver em sociedade e de maneira harmoniosa, em diversas ocasiões precisamos seguir algumas regras de comportamento. Imagine, por exemplo, que você esteja no cinema e, na melhor parte do filme, o celular da pessoa que está a seu lado comece a tocar. Como o ambiente é escuro, a pessoa demora para encontrar o aparelho e, quando você percebe, a melhor parte do filme passou e você nem viu. Ruim, não é mesmo?

- **Converse com os colegas e o professor sobre as regras de convívio em lugares como cinema, parques, escola, transporte público, etc.**

Resposta pessoal.

- Proponha aos estudantes que elaborem uma tabela com base nos dados do pictograma. Dessa maneira, é possível avaliar a compreensão deles acerca da interpretação de dados apresentados nesse tipo de gráfico. Por exemplo:

Gêneros de filmes mais assistidos nos cinemas da cidade nos últimos 10 anos

Gênero	Quantidade
Aventura	120
Comédia	100
Drama	60
Policial	80
Infantil	140

Dados fornecidos pela administração dos cinemas.

- Se julgar oportuno, peça a eles que pesquisem pictogramas em revistas, jornais ou na internet e tragam para a sala de aula para serem analisados pela turma.

Respeito

Realize um debate com os estudantes sobre a importância de seguir regras de comportamento no convívio social, em diversos contextos, de maneira que possam respeitar, ser respeitados e viver harmoniosamente na sociedade.

DE OLHO NA BASE

Apresentar a construção de diversos tipos de gráfico permite aos estudantes ter subsídios para interpretar e comunicar dados de pesquisas, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA36**.

- Se julgar necessário, reproduza na lousa os dados da tabela a seguir, que apresenta os graus correspondentes a cada fonte de energia, para auxiliar os estudantes a compreender a construção do gráfico na próxima página do Livro do Estudante. Observe.

Consumo de energia residencial no Brasil em 2020

Fonte	Porcentagem (%)	Ângulo (em grau)
Eletricidade	46,4	167,04
Lenha	26,1	93,96
Gás Liquefeito de Petróleo (GLP)	24,4	87,84
Gás natural	1,6	5,76
Outras fontes	1,5	5,4

Fonte de pesquisa: Empresa de Pesquisa Energética. *Relatório Síntese 2021*. Disponível em: https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-601/topico-588/BEN_S%C3%ADntese_2021_PT.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

- Se julgar oportuno, incentive os estudantes a consultar a fonte de pesquisa da tabela desta página para analisar as informações sobre o balanço energético nacional. Analisar fontes de pesquisas contribui para identificar *fake news* e fornece argumentos para desmentir as que apresentam dados falsos ou alguma manipulação incorreta dos dados.
- Os estudantes devem compreender que o gráfico de setores é utilizado para fazer uma comparação entre a parte e o todo e que a soma das partes sempre corresponde a 100%.

DE OLHO NA BASE

As situações apresentadas nestas páginas, em que os estudantes verificam como se constrói gráficos de setores, também favorecem o desenvolvimento da **competência geral 4**.

Além disso, aprender a construir gráfico de setores pode auxiliá-los na interpretação e na análise desse tipo de gráfico divulgado pela mídia, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA37**.

Gráfico de setores

Observe na tabela a seguir o consumo residencial de energia no Brasil em 2020.

Consumo de energia residencial no Brasil em 2020

Fonte	Eletricidade	Lenha	Gás Liquefeito de Petróleo (GLP)	Gás natural	Outras fontes
Porcentagem (%)	46,4	26,1	24,4	1,6	1,5

Fonte de pesquisa: Empresa de Pesquisa Energética. Relatório Síntese 2021.Disponível em: https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-601/topico-588/BEN_S%C3%ADntese_2021_PT.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

Com o objetivo de facilitar a comparação das informações da tabela, vamos construir um gráfico de setores com as porcentagens que cada fonte de energia representa.

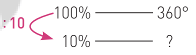
Para construir um gráfico de setores, é preciso encontrar quantos graus cada porcentagem representa do círculo. O círculo tem 360° e representa o todo (nesse caso, 100% das fontes de energia).

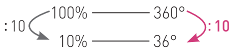
ID/BR

O círculo todo tem 360° e corresponde a 100% das fontes de energia consumidas nas residências.

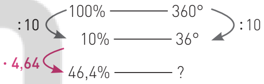
Veja uma maneira de como podemos determinar quantos graus correspondem à fonte de eletricidade.

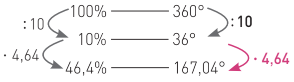
- Encontramos quantos graus correspondem a 10%.





- Determinamos quantos graus correspondem a 46,4% (fonte de eletricidade).





Portanto, o setor circular correspondente à fonte de eletricidade tem 167,04°. Para determinar a quantos graus as demais porcentagens correspondem, podemos pensar do mesmo modo.

QUE GRÁFICO USAR?

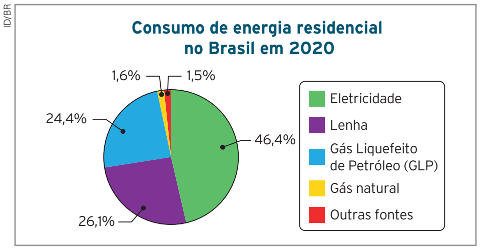
Quando vamos representar os dados de uma pesquisa em um gráfico, é preciso ter cuidado ao escolher o tipo de gráfico. O gráfico de setores, por exemplo, é usado para representar as partes de um todo. Isso significa que, ao adicionar as porcentagens de cada setor, elas devem somar 100%. Além disso, ele não é um bom recurso quando os dados estão divididos em muitas categorias, pois a comparação pode não ser eficiente.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Aproveite os dados da tabela desta página do Livro do Estudante e, se possível, leve os estudantes à sala de informática para que eles elaborem um gráfico de setores utilizando uma planilha eletrônica. A seguir, apresentamos alguns passos.

- Solicite aos estudantes que construam a tabela na planilha. Veja a reprodução dela a seguir.
- Depois, eles devem selecionar a tabela e, então, na aba "inserir", selecionar gráfico de *pizza*. Informe a eles que na barra de ferramenta o gráfico de setores chama-se gráfico de *pizza.*
- Deixe que os estudantes descubram como inserir o rótulo dos dados e permita que formatem como desejarem, desenvolvendo autonomia e fomentando o protagonismo.
- Após a elaboração do gráfico, proponha aos os estudantes que analisem os motivos pelos quais uma ou outra fonte de energia é utilizada. Uma possibilidade para fomentar essa análise é perguntar a eles qual dessas fontes de energia é a mais utilizada pela família deles e os motivos que levaram a essa escolha. Essa análise favorece o desenvolvimento, do ponto de vista matemático e computacional, da análise crítica, criativa e propositiva de temas relacionados aos princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social.

- Por fim, com o auxílio de um compasso, traçamos uma circunferência de raio qualquer e, com um transferidor e uma régua, marcamos as medidas dos ângulos obtidos para cada fonte de energia. Depois, inserimos as legendas, o título e a fonte do gráfico.



Fonte de pesquisa: Empresa de Pesquisa Energética. Relatório Síntese 2021. Disponível em: https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-601/topico-588/BEN_S%C3%ADntese_2021_PT.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Leia um trecho da 5ª edição da pesquisa Retratos da Leitura no Brasil.

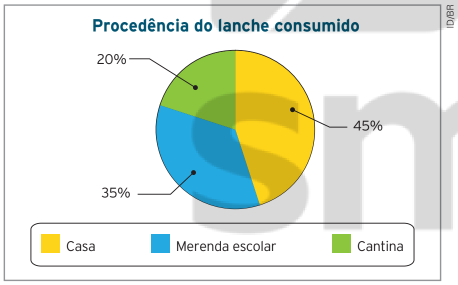
> **Leitores que perdemos pelo caminho**
>
> A 5ª edição da pesquisa Retratos da Leitura no Brasil, cuja série histórica tem início em 2007, oferece recursos consistentes para tentar responder a essa pergunta de diferentes formas: colhendo dados significativos sobre a relação dos brasileiros com o livro e a leitura [...] em um levantamento de âmbito nacional no qual 8 076 respondentes (brasileiros e brasileiras com 5 anos ou mais, alfabetizados ou não), distribuídos por 208 municípios nas cinco regiões do país, falam sobre o mundo dos livros e dos leitores – literários ou não – na escola e fora dela.
>
> [...]
>
> No tocante à motivação, 26% dos leitores afirmam que leem porque gostam, e essa é sua principal motivação para ler. Esse grupo de leitores espontâneos é composto por 48% de respondentes de 5 a 10 anos, 33% de 11 a 13 anos e 24% de leitores entre 14 e 17 anos.
>
> Rita Jover-Faleiros. Leitores que perdemos pelo caminho. Em: Zoara Failla (org.). *Retratos da Leitura no Brasil 5*. São Paulo: Instituto Pró-Livro, 2021. p. 67 e 71.

a) Do que trata a pesquisa feita? **Do perfil dos leitores brasileiros.**

b) A pesquisa foi censitária ou amostral? **Amostral.**

c) Cite, pelo menos, duas variáveis estudadas. **Motivações para ler; idade.**

2. Uma pesquisa sobre a procedência do lanche consumido no recreio foi feita com 400 estudantes. O resultado está apresentado no gráfico de setores ao lado.



Dados obtidos pela diretora da escola.

a) Quantos estudantes trazem o lanche de casa? **180 estudantes.**

b) Calcule a medida do ângulo correspondente a cada porcentagem do gráfico.

c) Construa uma tabela com os dados apresentados no gráfico. **Consulte a resposta neste manual.**

2. b) Casa: 162°; merenda escolar: 126°; cantina: 72°.

- Na abordagem do gráfico "Consumo de energia residencial no Brasil em 2020", retome o conceito de arredondamento, pois, no cálculo dos graus correspondentes a cada porcentagem, temos como resultados números na forma decimal e, no transferidor, usado para marcar os ângulos, temos números naturais.

Peça aos estudantes que utilizem a mesma estratégia da segunda etapa do exemplo da página anterior para calcular quantos graus cada porcentagem representa. Chame a atenção deles para que a soma dos ângulos seja 360° (167,04 + 93,96 + + 87,84 + 5,76 + 5,4 = 360). Comente com eles que, na construção de um gráfico de setores, deve-se arredondar, quando necessário, as medidas encontradas. Por exemplo, para o ângulo 167,04°, pode-se arredondar para 167°.

Ao arredondar as medidas dos ângulos dos setores, porém, podemos encontrar uma medida próxima de 360°, mas não igual. Nesse caso, devemos escolher convenientemente uma das medidas para arredondar, para mais ou para menos, e compensar a diferença.

- Na atividade **1**, solicite aos estudantes que anotem no caderno cada uma das porcentagens apresentadas no texto sobre a pesquisa de leitores no Brasil com a respectiva nomenclatura. Essas porcentagens podem ser transformadas em uma tabela para aproveitar esse tipo de registro. Lembre-os de criar um título.

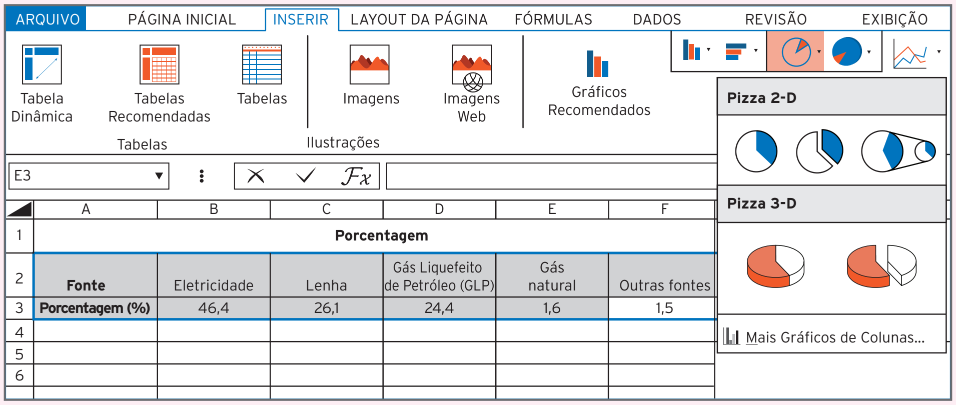
RESPOSTA

2. c)

Procedência do lanche consumido

Procedência	Quantidade de estudantes	Porcentagem (%)
Casa	180	45
Merenda escolar	140	35
Cantina	80	20
Total	**400**	**100**

Dados obtidos pela diretora da escola.



	A	B	C	D	E	F
1			**Porcentagem**			
2	**Fonte**	Eletricidade	Lenha	Gás Liquefeito de Petróleo (GLP)	Gás natural	Outras fontes
3	**Porcentagem (%)**	46,4	26,1	24,4	1,6	1,5
4						
5						
6						

- Complemente a atividade **4** fazendo outras perguntas, como: O que ocorreu com a quantidade de estudantes matriculados no período de 2020 a 2021? A quantidade de estudantes matriculados diminuiu. Quantos estudantes foram matriculados a mais em 2024 em relação a 2019? 193 estudantes. É possível prever o que pode acontecer no ano de 2025? Justifique. Não. Justificativa pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que, mesmo com um aumento do número de estudantes matriculados desde 2021, não é possível garantir que o número de matrículas continue aumentando.
- Se julgar oportuno, complemente a atividade **5** e peça aos estudantes que elaborem o gráfico que eles citaram como resposta do item **d**.
- Complemente a atividade **6** fazendo outras perguntas, como: Quantos veículos foram vendidos no mês de maior venda? 12 500 veículos. Qual é a diferença entre a quantidade de veículos vendida em setembro e a quantidade vendida em novembro? 5 000 veículos.

  Ainda nessa atividade, se julgar oportuno, pergunte aos estudantes que outro gráfico poderia ter sido elaborado para representar esses dados. Espera-se que eles respondam que seria possível utilizar um gráfico de barras ou um gráfico de linhas.

RESPOSTA

3. c)

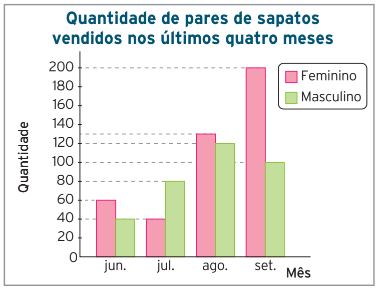
Quantidade de pares de sapatos vendidos nos últimos quatro meses

Mês	Quantidade de pares de sapatos vendidos	
	Feminino	Masculino
Junho	60	40
Julho	40	80
Agosto	130	120
Setembro	200	100
Total	**430**	**340**

Dados fornecidos pela loja.

3. a) 430 pares de sapatos femininos.

3. Observe o gráfico a seguir.



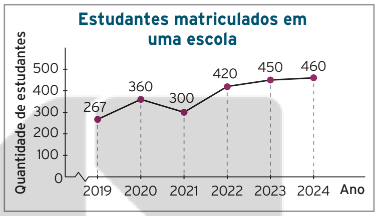
Dados fornecidos pela loja.

a) Quantos pares de sapatos femininos foram vendidos ao todo nesses 4 meses?

b) Quantos calçados femininos foram vendidos a mais que os masculinos durante esse período? **90 calçados femininos.**

c) Represente as informações do gráfico em uma tabela de dupla entrada. **Consulte a resposta neste manual.**

4. Observe o gráfico a seguir.



Dados fornecidos pela escola.

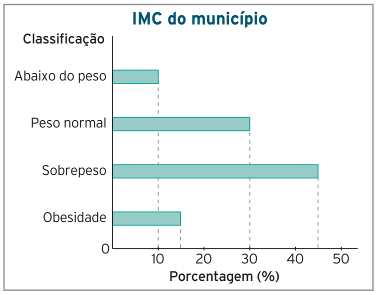
a) Qual foi o ano com menor quantidade de estudantes matriculados? **2019**

b) Quantos estudantes foram matriculados de 2019 a 2024? **2 257 estudantes.**

c) Em que período ocorreu o maior aumento de estudantes matriculados? **Entre 2021 e 2022.**

5. O Índice de Massa Corpórea (IMC) é utilizado por alguns especialistas para avaliar a medida da massa de uma pessoa. Ele é obtido dividindo-se a medida da massa de uma pessoa (em quilograma) pelo quadrado da medida da altura dela (em metro).

Com o objetivo de estudar os hábitos alimentares das pessoas que residem em certo município, a prefeitura realizou uma pesquisa sobre o IMC com 240 pessoas. Observe os resultados apresentados no gráfico a seguir.



Dados fornecidos pela prefeitura.

a) Observando o gráfico, é possível dizer que mais da metade das pessoas pesquisadas tinham sobrepeso? **Não.**

b) Quantas pessoas estavam abaixo do peso? E com o peso normal? **24 pessoas; 72 pessoas.**

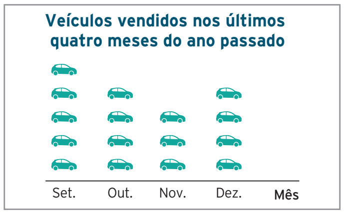
c) Você acha que seria viável representar as informações desse gráfico em um gráfico de linhas? Converse com os colegas e o professor sobre isso.

d) Que outro tipo de gráfico você utilizaria para representar essas informações?

5. c) **Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que não seria conveniente utilizar um gráfico de linhas, pois os dados da pesquisa não estão sendo analisados em um período de tempo.**

d) **Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que utilizariam um gráfico de setores ou um pictograma.**

6. No pictograma a seguir, cada ícone representa 2 500 veículos vendidos por uma indústria automobilística nos últimos quatro meses do ano passado.



Dados obtidos pela indústria automobilística.

a) Em algum dos meses a venda foi igual à de outro mês? Se foi, quais são esses meses? **Sim, nos meses de outubro e dezembro.**

b) Quantos veículos foram vendidos no mês de menor venda? **7 500 veículos.**

c) No total, quantos veículos essa empresa vendeu nos últimos quatro meses? **40 000 veículos.**

(IN)FORMAÇÃO

O desenvolvimento do conceito de média aritmética

[…]

A média aritmética é um conceito fundamental da Estatística e da ciência experimental, sendo amplamente utilizada no contexto escolar e no cotidiano (Gal, 1995). É comum ler nos jornais ou ouvir nas reportagens frases do tipo: *a renda* per capita *do Nordeste é inferior à do Sudeste, a expectativa de vida da mulher é maior que a do homem*, ou informações referentes à chuva média mensal, à escolaridade média, ao número médio de filhos por casal e assim por diante. As pessoas estão acostumadas a estimar o tempo médio gasto no percurso de casa para o trabalho, o tempo médio que demoram para fazer as compras do mês no supermercado, o tempo despendido na fila de banco, dentre outras estimativas. Esse processo faz parte do cotidiano e está tão arraigado que, às vezes, as pessoas nem percebem o grau apurado de suas estimativas. Algumas pessoas, inclusive, são capazes de estimar com bastante precisão, por exemplo, quanto tempo demoram para chegar ao trabalho, de acordo com o dia da semana ou usando caminho alternativo. Conseguem estimar médias sem ter, necessariamente, anotado o tempo gasto em cada viagem e depois dividido pelo número de viagens; às vezes nem conhecem a fórmula da média, mas continuam a utilizar seu conhecimento no planejamento de suas atividades rotineiras.

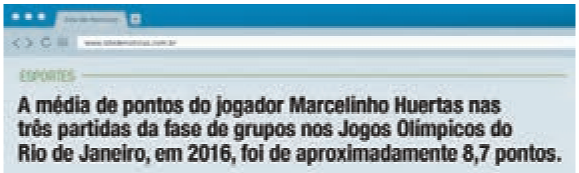
Por outro lado, a maioria dos dados relatados em revistas científicas utiliza a média e as inferências lidam, quase que exclusivamente, com médias ou diferenças entre médias. Além disso, em muitas disciplinas, as teorias incluem conceitos

Média aritmética

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Olívia começou a treinar basquete na escola e decidiu fazer uma pesquisa sobre esse esporte na internet. Veja uma das informações que ela encontrou.


ESPORTES

A média de pontos do jogador Marcelinho Huertas nas três partidas da fase de grupos nos Jogos Olímpicos do Rio de Janeiro, em 2016, foi de aproximadamente 8,7 pontos.

João Picoli/ID/BR

Você conseguiu entender a notícia que ela encontrou? O que significa ter uma média de aproximadamente 8,7 pontos? **Respostas pessoais.**


João Picoli/ID/BR

Em um primeiro momento, também não entendi, mas, depois de conversar com meu pai, ele me explicou que a reportagem estava querendo dizer que: se Marcelinho tivesse feito a mesma pontuação nas três partidas da fase de grupos, seria como se ele tivesse feito aproximadamente 8,7 pontos em cada uma delas.

Acompanhe como o autor da reportagem obteve a média de pontos do jogador Marcelinho Huertas.

- Primeiro, ele verificou a quantidade de partidas da fase de grupos dos jogos olímpicos de 2016: 3 partidas.
- Depois, ele verificou quantos pontos Marcelinho Huertas fez em cada uma das partidas: na 1ª partida, ele marcou 5 pontos; na 2ª, 11 pontos; e, na última, 10 pontos.
- Por fim, ele calculou a média de pontos de Marcelinho nessa fase. Para isso, adicionou os pontos que ele fez nas três partidas e dividiu pelo total de partidas.

$$\text{Média} = \frac{\overbrace{5 + 11 + 10}^{\text{Pontos obtidos em cada partida}}}{\underbrace{3}_{\text{Total de partidas}}} = \frac{26}{3} \simeq 8,7$$

Observe que, apesar de a média ser aproximadamente 8,7, em nenhuma das partidas Marcelinho fez 8,7 pontos. A média indica apenas que, se ele tivesse tido o mesmo desempenho em todas as partidas, ele teria marcado aproximadamente 8,7 pontos em cada uma delas.

A **média aritmética** (*MA*) de um grupo de números é o quociente da adição desses números pela quantidade de números do grupo.

SÍMBOLO ≃

O símbolo ≃ indica aproximadamente.

MÉDIA

Quando nos referirmos à média, estamos querendo dizer média aritmética.

MÉDIA ARITMÉTICA

- Alguns estudantes podem apresentar dificuldade na compreensão do conceito de média; por isso, faça algumas perguntas: Em que outra situação usamos a média? O que representa o valor médio calculado? A média deve ser sempre igual a um dos valores dados?
- Algumas características da média devem ser reforçadas com eles, por exemplo:
  - A média não precisa coincidir com um dos valores das parcelas usadas para seu cálculo, porém ela precisa estar entre o menor e o maior valor utilizado. Observe que na situação **1** a média está entre 5 e 11.
  - A média não é necessariamente um valor central. Na situação **1**, a média é 8,7, enquanto o valor central é 10.
  - A média nem sempre é um número natural. Pode ser um número decimal que não representa um valor no contexto analisado. Veja que na situação **1** a média é 8,7.
- Pergunte aos estudantes se é possível fazer 8,7 pontos em uma partida de basquete e como explicar esse resultado. Verifique se eles compreendem que a média é um número representativo dos demais. Nesse caso, é preciso compreender que não é possível fazer 8,7 pontos; o significado desse resultado é que, em média, o jogador faz 8,7 pontos por partida ou que a cada 10 partidas o jogador faz em média 87 pontos.

DE OLHO NA BASE

A situação **1** também contribui para o desenvolvimento da **competência geral 8**, pois favorece que os estudantes reflitam sobre a sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

- O ambiente escolar deve ser um espaço saudável e colaborativo, no qual a saúde física e mental dos estudantes deve ser preservada. Para isso, valorize situações em que eles se sintam acolhidos, incentivando o desenvolvimento da empatia e da solidariedade.

  Os processos cognitivos como percepção, memorização, raciocínio, imaginação e resolução de problemas podem contribuir para elevar a autoestima dos estudantes, apesar de a saúde mental parecer um assunto que não se relaciona com a Educação Matemática.

expressos em termos da média ou da soma. Isso decorre do fato de a média proporcionar um indicador, que pode ser interpretado como um escore típico que representa um conjunto de dados.

A média aritmética também é de fundamental importância, pois a partir dela são calculadas outras medidas, como, por exemplo, a variância, o desvio-padrão, o coeficiente de variação, assimetria, curtos e de correlação.

[...]

De acordo com Strauss e Bichler (1988), a média aritmética possui sete propriedades, cujo conhecimento pelo sujeito denota o domínio do conceito:

1. a média está localizada entre os valores extremos [...];
2. a soma dos desvios a partir da média é zero [...];
3. a média é influenciada por cada um e por todos os valores [...];
4. a média não necessariamente tem que coincidir com um dos valores;
5. a média pode ser uma fração que não tem uma contrapartida na realidade física [...];
6. o cálculo da média leva em consideração todos os valores, inclusive os nulos e os negativos, e
7. a média é um valor representativo dos dados a partir dos quais ela foi calculada. Em termos espaciais, a média é aquela que está mais próxima de todos os valores.

[...]

Cazorla, I. M. *A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002. p. 29-31.

DE OLHO NA BASE

As situações apresentadas nas páginas 263 e 264 do Livro do Estudante auxiliam na compreensão do significado de média aritmética, bem como no cálculo, seja com as ferramentas lápis e papel, seja com meios eletrônicos, como calculadoras, aplicativos e planilhas eletrônicas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA35**.

- Comente com os estudantes que o cálculo de médias pode ser obtido de maneira mais rápida por meio de *softwares* de planilha eletrônica, principalmente quando há grandes volumes de dados a serem analisados.

Situação 2

Dário é recepcionista em uma clínica médica e está planejando alterar o intervalo entre uma consulta e outra, pois percebeu que sempre há atraso nos atendimentos. Para determinar o novo intervalo entre as consultas, ele decidiu anotar o tempo do atendimento de cada paciente em certo dia. Veja.

- Paciente 1: 18 minutos.
- Paciente 2: 13 minutos.
- Paciente 3: 25 minutos.
- Paciente 4: 13 minutos.
- Paciente 5: 22 minutos.
- Paciente 6: 17 minutos.

Dário pensou em encontrar um único valor que representasse o conjunto dos tempos que anotou. Ou seja, ele calculou a média (*MA*) do tempo das consultas.

$$MA = \frac{18 + 13 + 25 + 13 + 22 + 17}{6} = \frac{108}{6} = 18$$

Com isso, Dário concluiu que seria melhor marcar as consultas com 18 minutos de intervalo entre uma consulta e outra.

Observe que a diferença entre o maior tempo (25 minutos) e o menor tempo (13 minutos) é de 12 minutos. Isso indica que os valores variam bastante em relação à média obtida por Dário. Quanto maior for essa diferença, maior será a variação dos dados em relação à média.

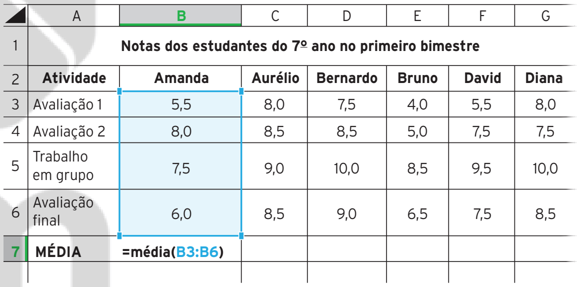
Cálculo de médias em planilhas eletrônicas

Você sabia que muitas planilhas eletrônicas têm uma função para calcular de maneira automática a média de um conjunto de dados? Acompanhe a situação a seguir.

Mônica é professora do 7º ano e utiliza um desses *softwares* para calcular a média bimestral dos estudantes. Vamos descobrir como ela faz.

- Primeiro, ela coloca, na planilha eletrônica, as notas que cada estudante obteve em cada atividade.
- Depois, ela clica na célula na qual gostaria de inserir a média. Para obter, por exemplo, a média bimestral de Amanda, ela digita "=média(B3:B6)" e aperta o botão *enter* do teclado para obter o resultado da média.

célula: em uma planilha eletrônica, é o nome dado a cada um dos retângulos brancos em que se pode inserir um dado.



	A	B	C	D	E	F	G
1	Notas dos estudantes do 7º ano no primeiro bimestre						
2	**Atividade**	**Amanda**	**Aurélio**	**Bernardo**	**Bruno**	**David**	**Diana**
3	Avaliação 1	5,5	8,0	7,5	4,0	5,5	8,0
4	Avaliação 2	8,0	8,5	8,5	5,0	7,5	7,5
5	Trabalho em grupo	7,5	9,0	10,0	8,5	9,5	10,0
6	Avaliação final	6,0	8,5	9,0	6,5	7,5	8,5
7	**MÉDIA**	**=média(B3:B6)**					

ID/BR

Note que entre os parênteses é preciso inserir o intervalo em que estão os valores dos quais se pretende obter a média.

- Mônica repete esse procedimento para cada um dos estudantes, trocando sempre o intervalo desejado.

9. a) No sexto jogo.
b) No quarto jogo.
c) 8 pontos.
d) 108 pontos.
e) 18 pontos.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

7. Calcule a média dos números a seguir.

a) 6, 4, 4, 7, 7, 9, 5 **6**

b) 15, 20, 23, 28, 19, 21 **21**

c) 44, 40, 30, 43, 48 **41**

d) 101, 119, 110, 140, 105 **115**

8. Durante uma semana, de domingo a sábado, uma loja vendeu em cada dia, respectivamente, 140, 130, 115, 100, 80, 120 e 65 camisetas. Em média, quantas camisetas foram vendidas por dia nessa semana? **Aproximadamente 107,14 camisetas.**

9. Observe na tabela a seguir a quantidade de pontos feitos por Lucas nos seis primeiros jogos de um campeonato.

Quantidade de pontos feitos por Lucas

Jogo	Quantidade de pontos
1	14
2	22
3	18
4	13
5	17
6	24

Dados fornecidos pelo treinador de Lucas.

a) Em qual jogo Lucas fez mais pontos?

b) Em qual jogo Lucas fez menos pontos?

c) Quantos pontos Lucas fez a mais no 2º jogo em relação ao 1º jogo?

d) Ao todo, quantos pontos ele marcou nos seis jogos?

e) Qual foi a média de pontos marcados por Lucas?

f) Em sua opinião, os dados variaram muito em relação à média?

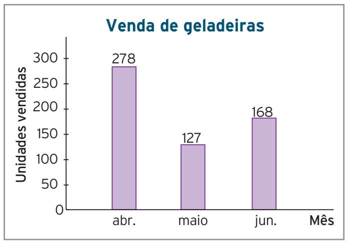
10. Selma participou de um campeonato de ginástica rítmica. As notas que ela obteve foram registradas no painel ilustrado a seguir.

João Picoli/ID/BR

Calcule a média das notas obtidas por Selma no campeonato. **9,0**

11. A média aritmética de quatro números é 4. Sabendo que três desses números são 2, 6 e 3, qual é o quarto número? **5**

12. O gráfico a seguir mostra as vendas de uma fábrica de geladeiras durante o segundo trimestre de 2023.



ID/BR

Dados fornecidos pelo fabricante.

a) Represente os dados do gráfico em uma tabela. Para isso, utilize uma planilha eletrônica. **Consulte a resposta neste manual.**

b) Utilizando uma planilha eletrônica como ferramenta, encontre a média da quantidade de geladeiras vendidas no período apresentado. **191 geladeiras.**

13. A empresa de ônibus Fortaleza S.A. fez um levantamento do número de passageiros durante uma semana em determinado mês. Veja o que foi observado.

- Domingo: 15 passageiros.
- Segunda-feira: o triplo de passageiros do domingo.
- Terça-feira: 10 passageiros a mais do que no domingo.
- Quarta-feira: o dobro de passageiros da segunda-feira.
- Quinta-feira: mesmo número de passageiros que na terça-feira.
- Sexta-feira: 5 passageiros a mais do que na segunda-feira.
- Sábado: 10 passageiros.

a) Calcule a média do número de passageiros por dia que utilizaram o ônibus naquela semana. **Aproximadamente 37,14 passageiros.**

b) Construa um gráfico que represente o número de passageiros durante cada dia da semana. Que tipo de gráfico você escolheu para construir? Por quê? **Consulte a resposta neste manual.**

9. f) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes comparem a média obtida no item anterior com cada um dos jogos. No 1º jogo, a diferença entre a média e a quantidade de pontos feitos por Lucas é 4; no 2º jogo, também é 4; no 3º jogo, não existe diferença de pontos; no 4º jogo, a diferença é 5; no 5º jogo, a diferença é 1; e, no 6º jogo, a diferença é 6. Ou seja, os dados não variaram muito em relação à média.

- Na atividade **7**, é conveniente utilizar calculadora para a resolução dos cálculos das médias. Retome, se achar adequado, a escrita na forma de expressão numérica, favorecendo o uso adequado da linguagem matemática e sua simbologia e incluindo a importância do uso de parênteses.
- No item **f** da atividade **9**, espera-se que os estudantes comparem a média obtida (18 pontos) com os valores descritos na tabela, verificando que alguns deles estão muito próximos e outros, mais distantes.
- Na atividade **11**, é importante retomar o conceito de equações se eles tiverem alguma dificuldade em realizar os cálculos. O objetivo deve estar no uso correto da linguagem matemática. Indicando o quarto número por x, podemos resolver desta maneira:

$$\frac{2 + 6 + 3 + x}{4} = 4$$

$$11 + x = 16$$

$$x = 16 - 11$$

$$x = 5$$

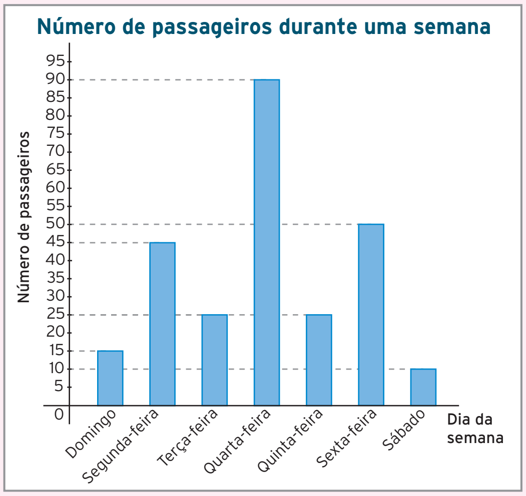
RESPOSTAS

12. a) Resposta possível:

	A	B
1	Venda de geladeiras	
2	Mês	Unidades vendidas
3	Abril	278
4	Maio	127
5	Junho	168
6	Dados fornecidos pelo fabricante.	
7		

ID/BR

13. b) Nessa atividade, o ideal é representar os dados em um gráfico de colunas, de maneira que relacione, em seu eixo horizontal, os dias da semana e, em seu eixo vertical, o número de passageiros.



ID/BR

Dados obtidos pela empresa de ônibus Fortaleza S.A.

ETAPAS DA PESQUISA

- Nestas páginas, vamos apresentar as etapas de uma pesquisa que vai desde o planejamento até a análise dos resultados.
- Se julgar oportuno, informe aos estudantes que a coleta, a organização e a descrição dos resultados dos dados fazem parte da Estatística Descritiva, enquanto a análise e a interpretação desses dados fazem parte da Estatística Indutiva ou Inferencial.
- Escreva na lousa as etapas de uma pesquisa estatística para que os estudantes acompanhem a situação proposta e comparem os passos com o próprio esquema.

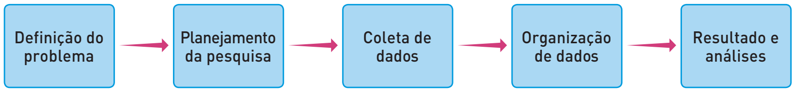
DE OLHO NA BASE

Ao analisar pesquisas estatísticas e planejar ações, os estudantes são incentivados a discutir projetos que abordam, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários. Dessa maneira, eles podem buscar ações para a solução de problemas e agir de maneira proativa na resolução desses problemas, o que favorece também o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 7**.

Etapas da pesquisa

Pedro e Carlos pensaram em propor à diretora da escola onde estudam um aumento do acervo de livros da biblioteca. Para isso, eles fizeram uma pesquisa com o objetivo de estudar o hábito de leitura dos colegas.

Veja quais são as etapas de uma pesquisa estatística.



Agora, acompanhe como Pedro e Carlos fizeram em cada etapa da pesquisa.

Definição do problema

Na definição do problema, é importante determinar o que se pretende com a pesquisa. Os meninos perceberam que, para convencer a diretora de que o acervo da biblioteca precisava ser ampliado, era preciso fazer uma pesquisa que mostrasse o hábito de leitura dos colegas. Ou seja, nessa pesquisa, o problema a ser resolvido é: conhecer o hábito de leitura dos estudantes que utilizam a biblioteca da escola.

Planejamento da pesquisa

Vimos que uma pesquisa estatística estuda uma população. Como a pesquisa de Pedro e Carlos vai analisar o hábito de leitura dos colegas que estudam na escola, então a população será o conjunto de todos os estudantes da escola onde os meninos estudam.

Depois, ambos discutiram sobre o tipo de pesquisa a ser feita: censitária ou amostral. Veja como eles pensaram.

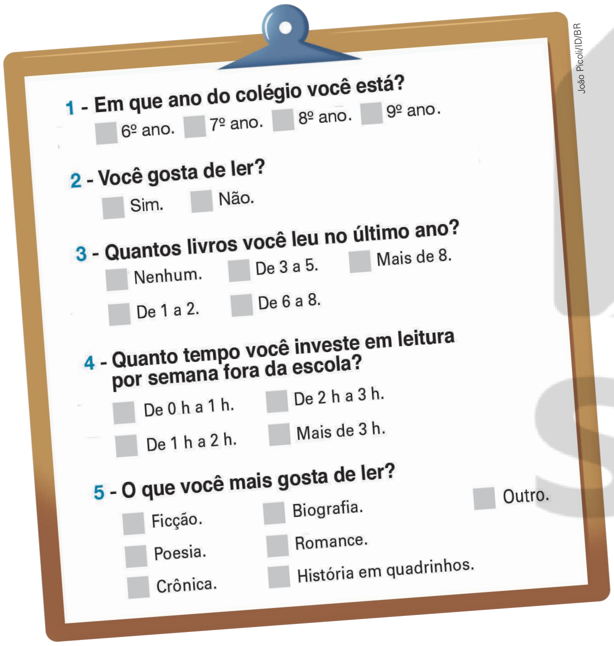
Danilo Souza/ID/BR

Depois de definirem a população e a amostra da pesquisa, Pedro e Carlos determinaram as variáveis de estudo, ou seja, as características que pretendem estudar.

Danillo Souza/ID/BR

Coleta de dados

Com as variáveis definidas, Pedro e Carlos precisavam coletar os dados. Eles acharam que o jeito mais fácil de fazer isso seria por meio de uma entrevista. Observe o questionário que eles elaboraram para entrevistar os colegas.



1 - Em que ano do colégio você está?

☐ 6º ano. ☐ 7º ano. ☐ 8º ano. ☐ 9º ano.

2 - Você gosta de ler?

☐ Sim. ☐ Não.

3 - Quantos livros você leu no último ano?

☐ Nenhum. ☐ De 3 a 5. ☐ Mais de 8.
☐ De 1 a 2. ☐ De 6 a 8.

4 - Quanto tempo você investe em leitura por semana fora da escola?

☐ De 0 h a 1 h. ☐ De 2 h a 3 h.
☐ De 1 h a 2 h. ☐ Mais de 3 h.

5 - O que você mais gosta de ler?

☐ Ficção. ☐ Biografia. ☐ Outro.
☐ Poesia. ☐ Romance.
☐ Crônica. ☐ História em quadrinhos.

João Picoli/ID/BR

PARE E REFLITA

De que outras maneiras os meninos poderiam ter coletado os dados para a pesquisa? Será que, se eles tivessem utilizado outra maneira, conseguiriam atingir mais estudantes do que a amostra inicialmente planejada? Converse com os colegas e o professor.

É provável que os estudantes sintam dificuldade em responder a esses questionamentos. Se esse for o caso, faça perguntas que os levem a concluir que os meninos poderiam ter feito, por exemplo, um questionário eletrônico. Ou que poderiam ter distribuído os questionários aos professores de cada turma para que repassassem aos estudantes, sem que fosse necessário fazer as entrevistas.

- É importante que os estudantes percebam que, após a definição do problema e de cuidadoso planejamento no qual foram definidas a população, a amostra e as variáveis, dá-se início à coleta de dados.
- Ao desenvolver uma pesquisa, os estudantes devem compreender a importância da etapa de coleta de dados. Até esse momento, eles já devem saber se a pesquisa é amostral ou censitária e, no caso de ser amostral, o tamanho da amostra já deve ter sido definido. No caso da situação apresentada, Pedro e Carlos optaram por fazer uma pesquisa amostral com 50 estudantes.
- Outro ponto que deve ser considerado é o da coleta de dados. Essa coleta deve ser completa e precisa, para que as informações não sejam perdidas.

OUTRAS FONTES

WINKEL, S. Como trabalhar estatística a partir das eleições. *Nova Escola*, 1º ago. 2018. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/12187/como-trabalhar-estatistica-a-partir-das-eleicoes. Acesso em: 3 jun. 2022.

Esse artigo apresenta dicas de como trabalhar um tema da realidade social, no caso as eleições, em sala de aula.

- Discuta com os estudantes a importância da organização dos dados coletados em uma pesquisa. Após a etapa da coleta, seja por meio de entrevista, seja na forma de questionário, os dados podem ser inseridos em uma tabela e, depois, suas informações, analisadas em um relatório.
- Converse com os estudantes sobre o fato de o gênero textual relatório ter características específicas. O relatório é um texto bastante útil para informar os procedimentos e concluir sobre os resultados da pesquisa.

DE OLHO NA BASE

O relatório é um instrumento textual útil no desenvolvimento de capacidades de escrita, que possibilita aos estudantes expressar suas respostas e sintetizar conclusões por meio de diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, fluxogramas, etc.), desenvolvendo também a **competência específica de Matemática 6**.

Organização de dados

Depois de realizar as entrevistas, Pedro e Carlos reuniram os questionários para organizar os dados obtidos.

Para cada uma das variáveis estudadas, eles elaboraram uma tabela.

Danilo Souza/ID/BR

Veja a tabela que eles montaram para a variável "gostar de ler".

	Gosto dos estudantes da escola pela leitura	
	Quantidade de estudantes	Porcentagem
Gostam de ler	35	$\frac{35}{50} = \frac{70}{100} = 70\%$
Não gostam de ler	15	$\frac{15}{50} = \frac{30}{100} = 30\%$

Dados obtidos por Pedro e Carlos.

Resultados e análises

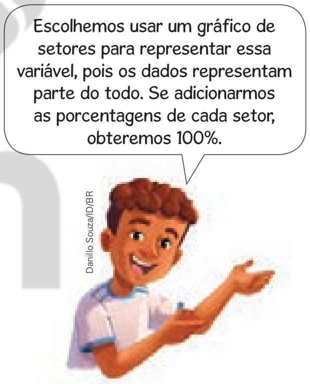
Para apresentar a proposta de ampliação do acervo da biblioteca da escola à diretora do colégio, Pedro e Carlos organizaram um relatório com base na pesquisa feita por eles.

Nesse relatório, eles expuseram os procedimentos e a descrição do que pensaram em cada etapa da pesquisa, além de apresentar os resultados em gráficos e em tabelas produzidos com o auxílio de planilhas eletrônicas.

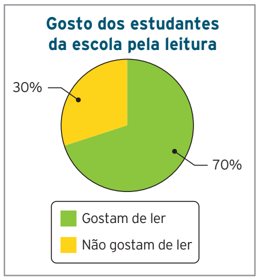
Veja alguns dos resultados que eles incluíram no relatório.

COMO FAZER UM RELATÓRIO

Relatório é um gênero textual que apresenta os resultados de uma atividade ou de uma pesquisa. De maneira geral, a estrutura desse texto é formada pela introdução, que explica os objetivos do trabalho, e pelo desenvolvimento, que descreve os procedimentos utilizados na atividade ou na pesquisa. Por fim, apresentam-se os resultados, seja por meio de recursos textuais, seja por meios não textuais, como representações gráficas, com suas respectivas análises e conclusões.



Danilo Souza/ID/BR



ID/BR

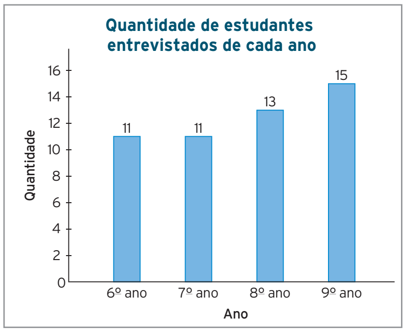
Dados obtidos por Pedro e Carlos.

OUTRAS FONTES

UNIVERSIDADE Federal de Santa Maria. Escrevendo um relatório de análise estatística (RAE). Texto adaptado de Nolan e Speed. *Stat Labs*: Mathematical Statistics Through Applications – Appendix A, 2000. Disponível em: https://moodle.ufsc.br/mod/folder/view.php?id=2074017&forceview=1. Acesso em: 3 jun. 2022.

O texto apresenta dicas e roteiro sobre como escrever um relatório estatístico que seja de fácil apreciação dos leitores.

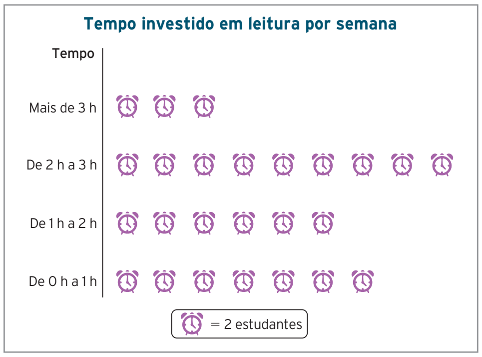
Danillo Souza/ID/BR



ID/BR

Dados obtidos por Pedro e Carlos.

Em média, foram entrevistados 12,5 estudantes de cada ano.



ID/BR

Dados obtidos por Pedro e Carlos.

Danillo Souza/ID/BR

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

14. Mariana precisa fazer uma pesquisa estatística para um trabalho da escola. Para facilitar, ela montou algumas fichas com as etapas a serem seguidas, mas as deixou cair. Ajude Mariana a colocar as fichas na ordem correta. **VII; V; II; IV, VI, I, III.**

- **I** Elaborar os gráficos e as tabelas.
- **II** Escolher as variáveis.
- **III** Preparar o relatório.
- **IV** Elaborar as perguntas para o questionário.
- **V** Determinar a população e, caso houver, a amostra.
- **VI** Fazer as entrevistas.
- **VII** Definir o tema da pesquisa.

Danillo Souza/ID/BR

- Converse com os estudantes sobre a apresentação de resultados e de análises da pesquisa, que pode ser representada em diversos tipos de gráfico, como o pictograma, o de setores e o de colunas elaborados por Pedro e Carlos.
- Tendo em vista que escrever um relatório faz parte do processo de comunicação, os estudantes podem ter dificuldade em selecionar os dados relevantes para a elaboração do relatório. Informe a eles que:
  - o relatório sempre deve produzido com base nos resultados descritos, e não apenas na análise pessoal;
  - nem todos os dados precisam constar no relatório;
  - é necessário selecionar as informações mais relevantes;
  - informações com pouca representatividade não devem ser colocadas no relatório.
- A atividade **14** destaca a importância de seguir etapas para a realização de uma pesquisa.

15. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que, por ser uma pesquisa que retrata uma característica da população brasileira, seria inviável entrevistar a população toda, pois demandaria muito tempo e recursos.

Responda sempre no caderno.

16. a) Exemplo de respostas: Gráfico de setores; Estudantes ofendidos nas redes sociais.

16. c) A resposta depende da quantidade de estudantes da turma.

15. Leia a reportagem a seguir, que resume uma pesquisa realizada pelo instituto Datafolha sobre as atividades físicas praticadas pelos brasileiros. Para o estudo, foram entrevistados 2 732 brasileiros maiores de 16 anos.

Na velhice, o futebol some e a caminhada se estabelece

De oito atividades possíveis para garantir uma velhice mais saudável, os exercícios ficam em sétimo lugar, mostra pesquisa nacional feita pelo Datafolha. Numa escala de 0 a 10, o brasileiro dá média 5,6 para sua dedicação a atividades físicas – e 1 a cada 5 se atribuem nota zero.

São 46% os brasileiros que não fazem exercícios físicos.

A caminhada, atividade mais comum quando se considera o total da população, passa a ser a opção favorita após os 60 anos de idade.

Com o passar dos anos, o brasileiro abandona os campos de futebol e as academias de musculação. Praticadas, respectivamente, por cerca de 31% e 21% dos jovens de 16 a 24 anos que declaram fazer exercício, as atividades deixam de ser citadas pelos que têm 60 ou mais.

São 2% os idosos que ainda jogam bola, e a porcentagem cai a zero para os com mais de 80 anos. A musculação é citada por 4% dos com mais de 60 e por 2% dos acima de 80.

[...]

Na velhice, o futebol some e a caminhada se estabelece. *Folha Online*, 26 dez. 2017. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/esporte/2017/12/1946000-na-velhice-o-futebol-some-e-a-caminhada-se-estabelece.shtml. Acesso em: 7 abr. 2022.

a) A pesquisa feita pelo instituto Datafolha foi amostral. Em sua opinião, por que os pesquisadores optaram por esse tipo de pesquisa?

b) Se os dados dessa pesquisa tivessem sido obtidos por meio de entrevistas, quais seriam algumas das perguntas feitas?

16. Leia a reportagem a seguir.

IBGE: um em cada dez estudantes já foi ofendido nas redes sociais

Aproximadamente um em cada dez adolescentes (13,2%) já se sentiu ameaçado, ofendido e humilhado em redes sociais ou aplicativos. [...]

Ao todo, foram entrevistados quase 188 mil estudantes, com idade entre 13 e 17 anos, em 4.361 escolas de 1.288 municípios de todo o país. [...]

As agressões existem também fora da internet, nas escolas, onde 23% dos estudantes afirmaram ter sido vítimas de *bullying*, ou seja, sentiram-se humilhados por provocações feitas por colegas nos 30 dias anteriores à pesquisa. Quando perguntados sobre o motivo de sofrerem *bullying*, os três maiores percentuais foram para aparência do corpo (16,5%), aparência do rosto (11,6%) e cor ou raça (4,6%).

[...]

Mariana Tokarnia. IBGE: um em cada dez estudantes já foi ofendido nas redes sociais. *Agência Brasil*. 10 set. 2021. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2021-09/ibge-um-em-cada-dez-estudantes-ja-foi-ofendido-nas-redes-sociais. Acesso em: 7 abr. 2022.

Observe os dados da reportagem e, depois, responda às questões.

a) Que tipo de gráfico você escolheria para representar a informação “um em cada dez”? Que título você daria a esse gráfico?

b) Aproximadamente quantos dos entrevistados já se sentiram ofendidos nas redes sociais? **Aproximadamente 24 816 entrevistados.**

c) Caso o resultado dessa pesquisa “um em cada dez adolescentes[...] já se sentiu ameaçado, ofendido e humilhado em redes sociais ou aplicativos” fosse aplicado à quantidade de estudantes de sua turma na escola, quantos estudantes da turma teriam sido vítimas de *bullying*?

d) Agora, aplique o resultado dessa pesquisa na quantidade de estudantes da escola em que estuda e responda: Quantos estudantes da escola teriam sido vítimas de *bullying*? **A resposta depende da quantidade de estudantes da escola.**

15. b) Resposta possível: Em uma escala de 0 a 10, sendo 0 nenhuma dedicação e 10 o maior nível de dedicação, que nota você daria ao seu nível de dedicação à atividade física?; Você pratica atividade física?; Em caso afirmativo, que atividade física pratica?; Qual é sua idade?

- Na atividade **15**, é fundamental que a leitura seja compartilhada para que os estudantes anotem no caderno os dados do enunciado. Ressalte a importância de analisar a fonte da reportagem e o fato de ela ser confiável para que as conclusões sejam corretas.
- Com base na leitura do texto sobre o processo de envelhecimento, incentive os estudantes a refletir sobre hábitos mais saudáveis nessa fase da vida e a socializar a opinião deles sobre esse tema. Ressalte à turma a importância de praticar atividades físicas, independentemente da fase da vida, para ter uma vida mental e física mais saudável. Pergunte se eles consideram que as pessoas idosas não praticam essas atividades com mais frequência em razão de uma questão cultural que remete ao preconceito da própria sociedade, uma vez que envelhecer pode ser considerado um processo biológico negativo e excludente em diversos grupos sociais, ou por outras questões que consideram pertinentes. Se julgar necessário, consulte a cartilha *Direitos humanos das pessoas idosas*, disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/assuntos/noticias/2018/marco/CartilhaUNISAL.pdf (acesso em: 17 mar. 2022). Em seguida, forme grupos que representem cada direito dos idosos para compartilhar com a turma. Esse debate contribui para desenvolver o **Tema Contemporâneo Transversal** Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso referente à macroárea **Cidadania e Civismo**.
- Na atividade **16**, é conveniente que os dados apresentados no texto sejam transcritos no caderno. Incentive os estudantes a transformá-los em tabelas. Aproveite a oportunidade para que eles reflitam sobre as angustias e os sofrimentos relacionados ao *bullying*, incentivando-os a ter empatia.

DE OLHO NA BASE

A situação apresentada na atividade **16** também contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**, pois favorece que os estudantes exercitem a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitem e promovam o respeito ao outro e aos direitos humanos, acolham e valorizem a diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

- Promova, de maneira recorrente, rodas de conversa que possibilitem aos estudantes sentir que o ambiente escolar é um espaço livre de quaisquer atos violentos (verbais ou não verbais), em que o respeito a diferentes opiniões e posicionamentos sejam constantemente desenvolvidos. Aproveite esses momentos para buscar soluções coletivas e democráticas de maneira que seja possível identificar, prevenir e reverter situações de conflito no ambiente escolar. Dessa maneira, os estudantes podem ter sentimentos de pertencimento à escola e reconhecê-la como um espaço saudável de convivência.

Nesse sentido, esteja atento a possíveis práticas de *bullying* para intervir e mediar qualquer manifestação de possível violência física ou psicológica, intencional e repetitiva praticada por algum estudante ou grupo, promovendo reflexões e acompanhando os envolvidos num processo de mediação e de reflexão de maneira que contribua para o processo de aprendizagem e o gerenciamento das emoções deles.

“É importante destacar que *bullying* é um fenômeno de violência bem específico que se caracteriza pela intimidação e humilhação sistemática e contínua entre pares, assim, quando um caso é identificado, é necessário atenção às pessoas envolvidas: à vítima que passou por um período de violência e sofrimento, ao(à) agressor(a) que, de alguma forma, vê a violência como um recurso, e às pessoas que acompanharam como espectadoras as situações de *bullying* sem fazer interferências.”

Fonte: *Convivência escolar e cultura de paz*. Brasília: SEEDF/Subeb, 2020. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 18 abr. 2022.

Para obter mais informações sobre como prevenir e mediar o *bullying* na escola e evitar ações de violência autoprovocada, os educadores e gestores educacionais podem ter acesso a cartilhas elaboradas pela Organização Mundial da Saúde (OMS), pelo Ministério da Saúde e pelo Ministério Público do Estado de São Paulo, pela Ordem dos Advogados do Brasil (OAB) e pelo Centro de Valorização da Vida (CVV).

DESCUBRA MAIS

Pesquisando

Vimos como construir alguns tipos de gráfico e como planejar uma pesquisa estatística. Agora é com vocês! Com um colega, vocês vão fazer uma pesquisa estatística e escrever um relatório para apresentar os resultados obtidos.

Materiais

- caderno para anotar as respostas dos entrevistados
- cartolinas, lápis e canetas coloridas para construir os gráficos ou um computador com *software* de planilha eletrônica

Zilu8/Shutterstock.com/ID/BR

Stanislav Glushko/Shutterstock.com/ID/BR

Len44ik/Shutterstock.com/ID/BR

(Representações sem proporção de tamanho entre si)

Como fazer

① Com a orientação do professor, reúnam-se em duplas.

② Cada dupla deverá pensar em um tema de interesse sobre o qual vai fazer uma pesquisa estatística. Atenção: o tema deve possibilitar que a pesquisa seja feita por meio de questionários ou entrevistas. Veja alguns exemplos do que pode ser pesquisado:

- A preferência dos colegas por esportes.
- Que meios de transportes os colegas utilizam ao ir de casa para a escola e da escola para casa.
- Quantos moradores do bairro em que está a escola separam o lixo orgânico do lixo reciclável.

③ Iniciem o planejamento da pesquisa, registrando cada uma das etapas, pois essas informações serão utilizadas na conclusão. Decidam se a pesquisa será amostral ou censitária. Lembrem-se de que essa decisão deve ser tomada de acordo com o tempo disponível e o tamanho da população a ser estudada.

④ Escolham as perguntas que serão feitas aos entrevistados. Essa é uma etapa muito importante, pois as perguntas devem ser pensadas de modo que permitam atingir o objetivo inicial da pesquisa. Por exemplo, não faz sentido perguntar a alguém qual é sua sobremesa predileta se o objetivo da pesquisa é conhecer a preferência dela por esporte.

⑤ Depois de entrevistar os participantes da pesquisa, é hora de organizar os dados obtidos e construir tabelas e gráficos para apresentar as informações.

Para concluir

Responda sempre no caderno.

Respostas pessoais. As respostas dessas atividades dependem da pesquisa feita pelas duplas.

1. Faça um relatório sobre a pesquisa que vocês fizeram. Ele deve ter a justificativa do tema escolhido; a descrição da população e da amostra da pesquisa; a apresentação dos dados obtidos; as conclusões que podem ser levantadas após a análise de dados, etc.
2. Explique como vocês escolheram os tipos de gráfico para apresentar os dados coletados.
3. Fez sentido calcular a média para alguma das variáveis que vocês pesquisaram? Em caso afirmativo, explique os motivos.

DESCUBRA MAIS

Retome na lousa o esquema das etapas de uma pesquisa estatística da página 266 do Livro do Estudante para que os estudantes possam tê-lo como guia.

Solicite a eles que façam o passo a passo do planejamento, registrando as ideias iniciais.

Se possível, reúna-se com o professor do componente curricular de Língua Portuguesa para realizar a reescrita do relatório, apontando, assim, o caráter interdisciplinar da produção textual.

Para que a autonomia dos estudantes seja desenvolvida, incentive-os a apresentar aos colegas os resultados e as conclusões da pesquisa.

PARA CONCLUIR

- A resposta da questão **3** vai depender das variáveis escolhidas pelas duplas. Este é um momento em que os estudantes vão validar ou reestruturar seus conceitos.

DE OLHO NA BASE

Esse boxe permite aos estudantes, por meio do planejamento e da realização de uma pesquisa sobre um tema de interesse, expressar suas conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas e relatório) para descrever dados, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA36** e da **competência específica de Matemática 6**.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nesta seção propiciam aos estudantes a resolução de situações-problema em múltiplos contextos, incluindo situações imaginadas, não diretamente relacionadas ao aspecto prático-utilitário, de maneira que possam expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas dados, etc.), desenvolvendo também a **competência específica de Matemática 6**.

- No item **a** da atividade **1**, espera-se que os estudantes percebam que não é possível saber o tipo de pesquisa ao observar o gráfico, mas apenas que a pesquisa foi feita com crianças de 6 a 10 anos sem estudos.

  Se julgar oportuno, converse com eles sobre a situação dessas crianças e incentive-os a usar os dados apresentados ao argumentar suas posições. Essas trocas de ideias possibilitam a interação entre os estudantes de maneira que cada um possa expor seu ponto de vista, respeitando uns aos outros.
- Na atividade **2**, deve-se dar atenção especial à leitura do gráfico para que a legenda seja utilizada na resposta.

  Complemente essa atividade pedindo aos estudantes que escrevam a medida arredondada do ângulo do setor correspondente à porcentagem de outras ocupações, por exemplo:
  - Trabalhador familiar: 8°
  - Conta própria: 102°
  - Empregado no setor público: 48°
  - Empregado sem carteira assinada: 41°
  - Trabalhador doméstico: 21°
  - Empregador: 16°

DIVERSIFICANDO

1. Leia a reportagem a seguir e, depois, faça o que se pede.

> **41% das crianças brasileiras sem estudos em 2020 tinham de 6 a 10 anos, aponta Unicef**
>
> Uma pesquisa do Fundo das Nações Unidas para a Infância (Unicef), [...] em parceria com o Cenpec Educação, aponta que mais de 5 milhões de crianças e adolescentes estavam sem acesso aos estudos no Brasil no fim de 2020. Entre elas, quatro em cada dez tinham de 6 a 10 anos.
>
> [...]
>
> Na análise por áreas urbanas, a exclusão maior entre crianças de 6 a 10 anos está concentrada na zona rural, onde estão 16,5% dos casos. Na área urbana, são 12,6%.
>
> Entre as regiões do país, Norte e Nordeste concentram os maiores percentuais, como mostra o gráfico abaixo:

Fotografia: G1

Elida Oliveira. 41% das crianças brasileiras sem estudos em 2020 tinham de 6 a 10 anos, aponta Unicef. *G1*, 29 abr. 2021. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2021/04/29/quatro-em-cada-dez-criancas-de-6-a-10-anos-estavam-sem-estudos-em-2020-aponta-pesquisa-do-unicef.ghtml. Acesso em: 7 abr. 2022.

a) Por meio da observação apenas do gráfico, é possível identificar se a pesquisa é amostral ou censitária? **Não.**

b) Qual foi a população pesquisada?

c) Por meio da observação do gráfico, é possível identificar e classificar a variável pesquisada? **Sim.**

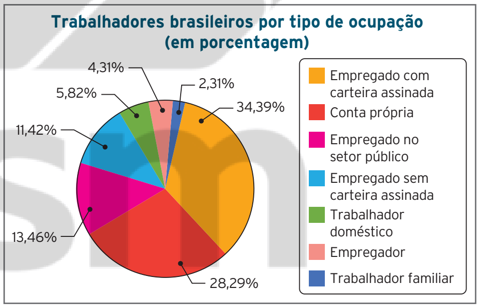
d) Identifique e classifique a variável pesquisada.

1. b) Crianças de 6 a 10 anos sem estudos, em área urbana e rural.

d) Variável: "em que área moram" trata-se de uma variável qualitativa nominal.

2. O gráfico a seguir representa a quantidade de trabalhadores brasileiros por tipo de ocupação, em porcentagem. Os dados são referentes ao 2º trimestre de 2021. **2. a) Empregado com carteira assinada.**

ID/BR



a) Qual é o tipo de ocupação mais frequente entre os brasileiros?

b) Qual é o ângulo do setor que corresponde à porcentagem de brasileiros referente a essa categoria? **Aproximadamente 124.**

Fonte de pesquisa: Darlan Alvarenga. Renda média do trabalho encolhe e é a menor desde 2017. *G1*. 24 set. 2021. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2021/09/24/renda-media-do-trabalho-encolhe-e-e-a-menor-desde-2017.ghtml. Acesso em: 7 abr. 2022.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para ampliar os conhecimentos dos estudantes sobre construção, interpretação e análise de dados em gráficos e tabelas, proponha estas atividades:

1. Solicite aos estudantes que produzam coletivamente um texto com base nesta pergunta: O que aprendemos em relação à construção de gráficos de linhas?

   Esse tipo de atividade permite aos estudantes refletir sobre as características desse tipo de gráfico e de quando utilizá-lo.
2. Peça aos estudantes que, em duplas, elaborem uma pergunta para cada um dos gráficos destas páginas do Livro do Estudante. Depois, solicite que troquem as questões elaboradas com outra dupla para que sejam respondidas.

   Ao elaborar perguntas em duplas, os estudantes refletem sobre os aspectos dos gráficos, interagem com os colegas e percebem que há várias possibilidades de perguntas para um mesmo gráfico.

3. b) A média terá pouca alteração. Verifique se os estudantes percebem que isso acontece porque o valor inserido é próximo da média. A nova média é aproximadamente 162,64 cm.

Responda sempre no caderno.

5. c) Sim, pois 27,9% tinham Ensino Fundamental incompleto e 5,1% não tinham instrução, o que totaliza 33,0%.

3. Em uma sala de 7º ano do Colégio Amanhecer, há 10 meninas, cujas alturas medem: 165 cm, 168 cm, 171 cm, 157 cm, 152 cm, 152 cm, 157 cm, 165 cm, 168 cm e 171 cm.

a) Calcule a média das medidas das alturas. **162,6 cm**

b) No meio do ano, uma nova estudante, com 163 cm de medida de altura, passou a fazer parte da turma. Verifique se a média será alterada. Caso seja, qual é a nova média?

4. Observe a tabela a seguir e, depois, faça o que se pede em cada item.

Taxa de extrema pobreza

Ano \ Porcentagem (%)	Mundo	Brasil
1987	35,8	17,7
1990	36,2	21,5
1993	34,3	19,8
1996	29,7	14,1
1999	28,8	13,3
2002	25,7	10,2
2005	21	8,6
2008	18,4	5,5
2011	13,9	4,7
2014	10,7	2,7
2017	9,3	4,4

Fonte de pesquisa: The World Bank. Poverty headcount ratio at $1.90 a day (2011 PPP) (% of population). Disponível em: https://data.worldbank.org/indicator/SI.POV.DDAY?end=2019&locations=1W-BR&name_desc=false&start=1981&view=chart. Acesso em: 7 abr. 2022.

a) Com base na tabela, construa um gráfico de linhas para comparar a taxa de extrema pobreza do mundo e a do Brasil entre 1987 e 2017. **Consulte a resposta neste manual.**

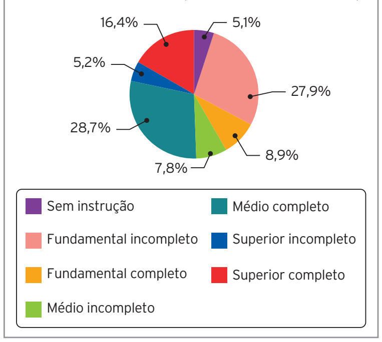
b) Em que ano o Brasil obteve o maior índice de pessoas em extrema pobreza? E o mundo?

c) Qual foi a diferença percentual entre os anos de 2002 e 2005 no Brasil? E no mundo? **Brasil: 1,6%; mundo: 4,7%.**

5. Em uma pesquisa, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) fez um levantamento sobre quantos anos de estudo têm os brasileiros com 14 anos de idade ou mais. Os resultados aproximados podem ser verificados no gráfico a seguir.

4. b) Brasil: 1990; mundo: 1990.

Nível de instrução das pessoas de 14 anos ou mais (2º trimestre de 2021)



Fonte de pesquisa: IBGE. Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua – PNAD Contínua: 2º trimestre de 2021. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/2421/pnact_2021_2tri.pdf. Acesso em: 7 abr. 2022.

a) Qual é a porcentagem de brasileiros que têm o Ensino Médio completo? **28,7%**

b) A parcela de brasileiros que corresponde a aproximadamente 16% da população apresenta qual nível de instrução? **Superior completo.**

c) É correto afirmar que, entre as pessoas participantes da pesquisa, 33,0% não tinham completado o Ensino Fundamental? Justifique.

6. Um grupo de pescadores organizou uma cooperativa para vender peixes. A tabela a seguir mostra as vendas no primeiro dia de funcionamento da cooperativa.

Vendas de peixe no primeiro dia

Produto	Quantidade (em kg)	Preço (por kg)
Peixe A	30	R$ 4,00
Peixe B	12	R$ 6,00
Peixe C	8	R$ 10,00
Peixe D	10	R$ 12,00
Peixe E	20	R$ 7,00

Dados fornecidos pela cooperativa.

a) Quanto a cooperativa arrecadou com a venda de peixes no primeiro dia? **R$ 532,00**

b) Qual foi a arrecadação, em média, por quilograma de peixe vendido? **R$ 6,65**

- No item **a** da atividade **3**, os estudantes podem calcular a média utilizando uma calculadora ou lápis e papel. Para calcular a média, é preciso adicionar todas as medidas de altura e dividir a soma pela quantidade de meninas. No item **b**, os estudantes devem acrescentar a nova medida de altura à soma anterior e dividir o resultado por 11.

  Se possível, leve os estudantes à sala de informática para resolver essa atividade utilizando uma planilha eletrônica.
- Complemente a atividade **5** solicitando aos estudantes que construam no caderno uma tabela que represente os dados do gráfico.

DE OLHO NA BASE

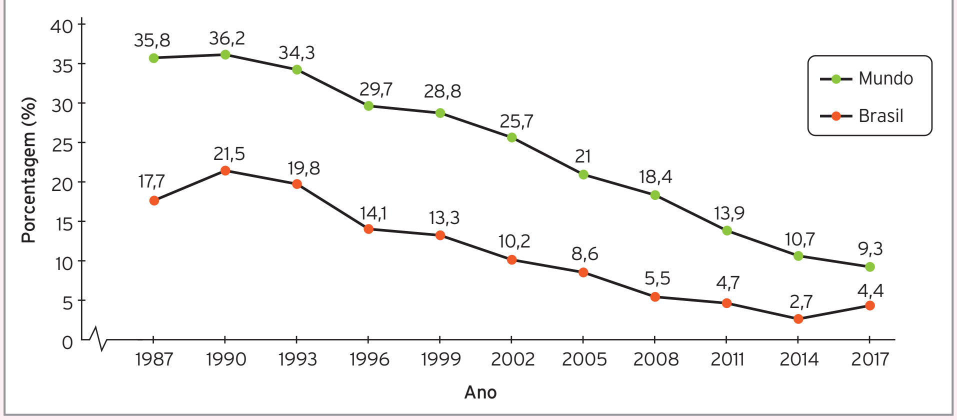
Interpretar e analisar dados em gráficos de setores, como nas atividades **2** e **5**, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA37**.

- Complemente a atividade **6** utilizando uma planilha eletrônica para converter os dados da tabela em um gráfico. Verifique que tipo de gráfico os estudantes utilizam e peça que justifiquem a escolha. No cálculo da média no item **b**, é possível que eles dividam o total arrecadado com a venda pela quantidade de tipos de peixe (5). Nesse caso, ajude-os a perceber que eles devem dividir pelo total de quilogramas vendidos (80 kg).

RESPOSTA

4. a)

Taxa de extrema pobreza



Fonte de pesquisa: The World Bank. Poverty headcount ratio at $1.90 a day (2011 PPP) (% of population). Disponível em: https://data.worldbank.org/indicator/SI.POV.DDAY?end=2019&locations=1W-BR&name_desc=false&start=1981&view=chart. Acesso em: 3 jun. 2022.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, o tema abordado é a publicidade e os anúncios publicitários. Convide os estudantes a refletir sobre a influência dos anúncios publicitários no comportamento do consumidor. Esses anúncios, em sua maioria, procuram por meio de recursos visuais e textuais nos induzir a sentir uma vontade mais forte de adquirir determinado produto ou serviço.
- É importante que os estudantes compreendam que a publicidade pode influenciar, induzir, manipular e, por outro lado, informar, ajudar a escolher, avaliar e entender um produto ou serviço. Converse com eles que é preciso estar atento às armadilhas e avaliar com cautela as potencialidades. Dessa maneira, convide-os a pensar em como a publicidade é criada e como pode influenciar o comportamento do consumidor, utilizando elementos e anseios próprios dessa faixa etária e explorando temas relacionados às culturas juvenis, como estilos musicais, filmes, jogos eletrônicos e vestuário.
- Com a proibição da publicidade infantil na televisão, os anúncios publicitários voltados a esse público têm sido cada vez mais recorrentes na internet, por meio de anúncios em vídeos, de vídeos patrocinados em canais de *youtubers* que fazem sucesso com esse público, de canais em que determinados produtos são desembalados e apresentados ao público, etc. Dificilmente as crianças e os adolescentes estão efetivamente protegidos da publicidade voltada a eles, mesmo que seja proibida.

Responsabilidade

O assunto tratado nesta seção possibilita a aproximação com o valor responsabilidade. Ser responsável na hora de avaliar algumas situações, ainda que nem sempre tenhamos condições de agir dessa maneira, pode contribuir para um consumo consciente.

AMPLIANDO HORIZONTES


Leandro Lassmar/ID/BR

Anúncios encan(ten)tadores!

Você gosta de mágicas? É impressionante como elas chamam a atenção de várias pessoas, dos mais jovens aos mais experientes. Fazer as pessoas acreditarem que objetos desaparecem ou simplesmente mudam de lugar é extraordinário. Mas talvez as mágicas mais fascinantes e encantadoras sejam aquelas que dão a ilusão de que uma coisa se transforma em outra – um lenço que vira uma pomba; uma pessoa que vira um gorila. A expressão "em um passe de mágica" nos faz pensar em uma transformação.

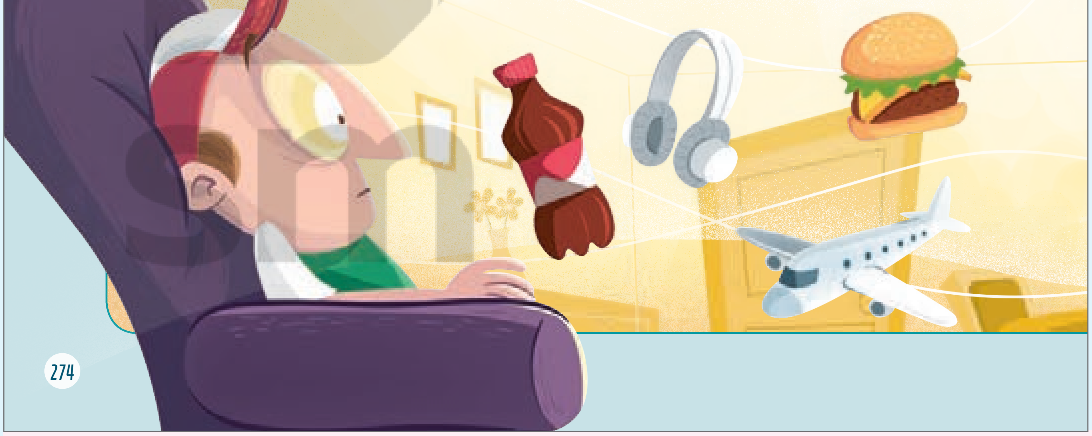
Mas o que a mágica tem a ver com educação financeira?

Os anúncios publicitários não parecem ter um poder mágico? Alguns deles nos fazem imaginar como aquele produto "nos transformaria" em pessoas mais fortes, elegantes, poderosas, felizes, inteligentes, modernas, conectadas, etc. Eles informam, seduzem e envolvem, parecendo nos levar a um novo mundo ou a uma nova realidade. Por fim, muitos deles são tentadores e encantadores.

Leandro Lassmar/ID/BR

Anúncios publicitários procuram estimular nossos desejos de consumo. E muitos deles realmente nos fazem sentir uma forte vontade de adquirir determinado produto ou serviço. Eles parecem ter uma capacidade especial de comunicar como satisfazer nossas necessidades e, por vezes, até de criar desejos que não tínhamos antes ou que, se existiam, não tínhamos consciência. Já reparou quantas vezes você assiste ao mesmo anúncio em uma hora vendo televisão ou assistindo a vídeos na internet? Você acha que essa repetição influencia sua vontade? Alguns anúncios passam tantas vezes que até sonhamos com aqueles brinquedos, *games*, parques de diversões, *smartphones*, etc.

Os anúncios são pensados com base em respostas a algumas perguntas, entre elas: Compramos por impulso ou planejamos antes? O que nos leva a comprar por impulso? O que nos faz decidir por um produto em vez de outro? Qual é o ingrediente mágico que faz um produto vender?



OUTRAS FONTES

Ferreira, V. R. M. *Decisões econômicas*: você já parou para pensar? 2. ed. São Paulo: Évora, 2011.

Esse livro traz uma análise do ponto de vista da psicologia econômica de como os seres humanos tomam decisões e de como as propagandas têm um papel importante na forma como isso acontece.

Os delírios de consumo de Becky Bloom. Direção: P. J. Hogan. EUA, 2009 (104 min).

Esse filme é uma adaptação do livro *Os delírios de consumo de Becky Bloom*, de Sophie Kinsella. É uma ótima oportunidade para discutir a temática da seção.

Soton, C. *Consumo adolescente*. Código de barras, TV Brasil. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=HWpITjSW1YU. Acesso em: 3 jun. 2022.

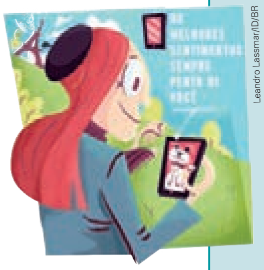
Essa reportagem pode ser utilizada como atividade em sala de aula e convida os estudantes a refletir, de maneira crítica e responsável, sobre o consumismo na adolescência e o papel dos anúncios publicitários nesse consumo.

As pessoas famosas de que gostamos, quando aparecem nos anúncios, podem nos influenciar a comprar o produto anunciado. Atores, influenciadores digitais, cantores, apresentadores, esportistas e outros famosos têm grande influência em nossos desejos, gerando em nós diversos sentimentos, entre eles o de desejarmos ser como aquelas pessoas.

É claro que usar um xampu ou uma roupa não vai nos transformar nessas celebridades nem mesmo nos fazer ficar parecidos com a pessoa que usa o produto no anúncio. Beber aquele refrigerante também não vai nos tornar mais livres, ainda que a publicidade tente passar a mensagem de que ele nos trará a felicidade. E o celular não vai nos permitir levar os melhores sentimentos conosco, nem com a melhor câmera do mundo nem com 256 GB de memória.

Não é que os produtos não sejam importantes e não devam ser usados. O que importa é avaliar: Realmente precisamos do produto? Ele vai nos fazer bem? Temos dinheiro para comprá-lo? Precisamos comprá-lo hoje? Questionamentos como esses podem nos ajudar na hora em que estamos prestes a comprar alguma coisa. Se respondermos sim a essas quatro perguntas, é provável que a compra seja boa para nós.

Toda publicidade tem elementos que visam despertar o desejo de consumo. Podemos usá-la a nosso favor, como uma fonte de informação sobre as possibilidades de satisfazer nossas necessidades.



Leandro Lassmar/ID/BR

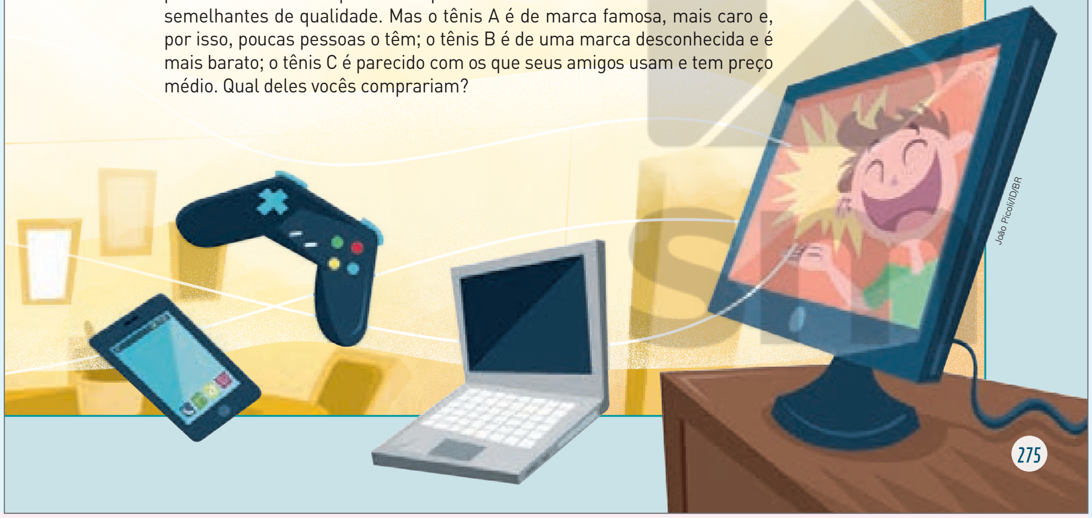
Leandro Lassmar/ID/BR

Para refletir

Responda sempre no caderno.

Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir. **Consulte as respostas neste manual.**

1. Na opinião de vocês, quais são os "poderes mágicos" que a publicidade parece ter sobre as pessoas? Citem cinco exemplos em que anúncios publicitários influenciaram as decisões de consumo de vocês e conte aos colegas.
2. Imaginem que vocês estejam em uma loja de calçados experimentando três pares de tênis. Vocês percebem que todos os três têm características muito semelhantes de qualidade. Mas o tênis A é de marca famosa, mais caro e, por isso, poucas pessoas o têm; o tênis B é de uma marca desconhecida e é mais barato; o tênis C é parecido com os que seus amigos usam e tem preço médio. Qual deles vocês comprariam?



João Picoli/ID/BR

RESPOSTAS

DE OLHO NA BASE

Ao se reunir em duplas e discutir sobre o consumo e o uso da publicidade, os estudantes estão exercitando o diálogo e a cooperação. Dessa maneira, eles se fazem respeitar e promovem o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, suas identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, desenvolvendo também a **competência geral 9**.

1. Resposta pessoal. Desejo de ser o que a pessoa no anúncio publicitário é; sentimento de pertencer ao grupo (todos têm celular, menos eu); vontade de gerar inveja nos outros; poder e prazer; entre outros, podem ser emoções que permeiam a experiência do jovem com a propaganda.
2. Resposta pessoal. Discuta o poder da marca dos produtos nas decisões dos consumidores. Aborde também a formação do preço de um produto e por que as pessoas às vezes pagam muito mais caro para ter um produto exclusivo e demonstrar *status* e poder diante das pessoas pelo fato de tê-lo, mesmo que o produto não seja o melhor em sua categoria. Discuta, ainda, as situações em que o produto mais caro é, de fato, o de melhor qualidade. Nesse caso, porém, é necessário contextualizar essa situação de acordo com a realidade financeira dos estudantes. É melhor, mas você pode ter? É o momento correto para ter? Vai fazer bem a você adquiri-lo?

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Na atividade **1**, converse com os estudantes sobre cada uma das alternativas.

  Veja que, na alternativa **a**, a fração $\frac{2}{3}$ foi utilizada como operador multiplicativo, calculando $\frac{2}{3}$ de 20 anos, e, portanto, não poderia corresponder à declaração do geólogo. Na alternativa **b**, o fato de $\frac{2}{3}$ ser maior que 50% de probabilidade não nos garante certeza de um evento acontecer. A alternativa **d** não corresponde à fala do geólogo, que diz que há certa probabilidade de o terremoto ocorrer. Veja que a alternativa **c** é a que exprime melhor o que o geólogo diz, pois a probabilidade de ocorrer um terremoto é $\frac{2}{3}$, logo a de não ocorrer é $\frac{1}{3}$, e $\frac{2}{3}$ é maior que $\frac{1}{3}$.
- Na atividade **2**, a probabilidade de o estudante sorteado ser do sexo feminino é a de 15 em 25, ou seja, $\frac{15}{25} = 0{,}6 = 60\%$.
- Na atividade **3**, os estudantes devem primeiro calcular a média e depois compará-la com a quantidade de casos confirmados em cada região. A média é a soma de todos os casos confirmados dividida pela quantidade total de regiões: $\frac{1\,832}{8} = 229$

  Ao comparar a média com os dados da tabela, temos que em 5 regiões os valores são maiores que a média e em 3 regiões são menores. Assim:

  $$5 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 50 + 21 = 71$$

  Portanto, 71 funcionários devem ser contratados pela prefeitura.
- Complemente a atividade **5** solicitando aos estudantes que respondam às mesmas duas perguntas dos itens **a** e **b** em relação a 1969, 1979, 1989, 1999 e 2009. Depois, peça que comparem a taxa de fertilidade do Brasil ao longo dos anos e, se julgar oportuno, construam um gráfico de linhas para representar a evolução desses dados.
- Um experimento aleatório que eles podem considerar na atividade **7** é sortear uma carta de um baralho comum de 52 cartas e observar a carta retirada. A seguir, seguem alguns exemplos de evento para esse experimento:
  - sair uma carta preta;
  - sair o naipe de ouros;
  - sair 8 preto;
  - não sair um valete.

  Os estudantes podem construir uma tabela para organizar os sorteios simulados da mesma maneira que foi feito na página 248 do Livro do Estudante.

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Leia a questão a seguir e indique a alternativa correta no caderno.

(Pisa) Foi divulgado um documentário sobre terremotos e a frequência com que eles ocorrem. Esta reportagem incluiu uma discussão sobre a previsibilidade dos mesmos.

Um geólogo declarou: — Nos próximos vinte anos, a probabilidade de que ocorra um terremoto em Zedópolis é de dois em três.

Qual das opções a seguir exprime melhor o significado da declaração do geólogo? **Alternativa c.**

a) $\frac{2}{3} \cdot 20 = 13{,}3$, portanto no período de 13 a 14 anos, a partir de hoje, haverá um terremoto em Zedópolis.

b) $\frac{2}{3}$ é maior que $\frac{1}{2}$, portanto podemos ter certeza de que haverá um terremoto em Zedópolis nos próximos 20 anos.

c) A probabilidade de haver um terremoto em Zedópolis nos próximos 20 anos é maior que a probabilidade de não haver um terremoto.

d) Não se pode afirmar o que acontecerá porque ninguém pode ter certeza de quando ocorrerá um terremoto.

2. Indique a alternativa correta no caderno.

Em uma sala de aula do 7º ano de uma escola havia 25 estudantes, sendo 15 meninas e 10 meninos. Sorteando-se aleatoriamente um estudante dessa turma, qual é a probabilidade de o estudante sorteado ser uma menina? **Alternativa d.**

a) 6%
b) 40%
c) 50%
d) 60%
e) 64%

3. Leia a atividade a seguir e indique no caderno a alternativa correta.

(Enem) Em uma cidade, o número de casos de dengue confirmados aumentou consideravelmente nos últimos dias. A prefeitura resolveu desenvolver uma ação contratando funcionários para ajudar no combate à doença, os quais orientarão os moradores a eliminarem criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. A tabela apresenta o número atual de casos confirmados por região da cidade.

Região	Casos confirmados
Oeste	237
Centro	262
Norte	158
Sul	159
Noroeste	160
Leste	278
Centro-Oeste	300
Centro-Sul	278

A prefeitura optou pela seguinte distribuição dos funcionários a serem contratados:

I. 10 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja maior que a média dos casos confirmados.

II. 7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.

Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetivar a ação? **Alternativa d.**

a) 59
b) 65
c) 68
d) 71
e) 80

4. Responda à questão a seguir no caderno.

(Enem) Um posto de saúde registrou a quantidade de vacinas aplicadas contra febre amarela nos últimos cinco meses:

- 1º mês: 21
- 2º mês: 22
- 3º mês: 25
- 4º mês: 31
- 5º mês: 21

No início do primeiro mês, esse posto de saúde tinha 228 vacinas contra febre amarela em estoque. A política de reposição do estoque prevê a aquisição de novas vacinas no início do sexto mês, de tal forma que a quantidade inicial em estoque para os próximos meses seja igual a 12 vezes a média das quantidades mensais dessas vacinas aplicadas nos últimos cinco meses. Para atender a essas condições, a quantidade de vacinas contra febre amarela que o posto de saúde deve adquirir no início do sexto mês é: **Alternativa b.**

a) 156.
b) 180.
c) 192.
d) 264.
e) 288.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para auxiliar os estudantes na interpretação das atividades desta seção, proponha que identifiquem a pergunta de cada uma delas e as informações necessárias para resolver o problema. Veja dois exemplos:

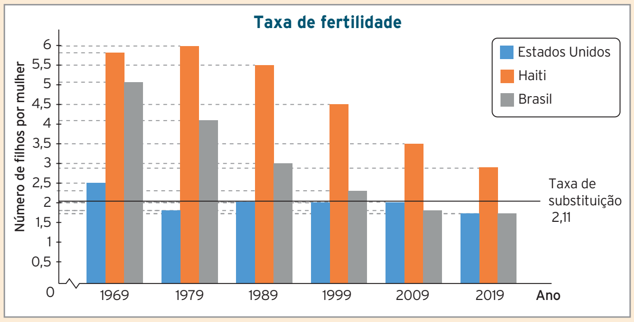
1. Na atividade **2**, a pergunta é: Qual é a probabilidade de o estudante sorteado ser uma menina?

   Para resolver essa atividade, é necessário saber o total de estudantes e a quantidade de estudantes do sexo feminino. A quantidade de estudantes do sexo masculino não é necessária.

2. Na atividade **4**, a pergunta é: Qual é a quantidade de vacinas contra a febre amarela que o posto de saúde deve adquirir no início do sexto mês?

   Para resolver essa atividade, é necessária a informação sobre a política de reposição do estoque que demanda calcular a média aritmética e a diferença entre o que restou no estoque e a quantidade inicial para os próximos meses.

5. Observe o gráfico e, depois, responda às questões.



Ilustrações: ID/BR

Fonte de pesquisa: The World Bank. Fertility rate, total (births per woman). Disponível em: https://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.TFRT.IN?view=chart&locations=BR-HT-US. Acesso em: 7 abr. 2022.

a) A taxa de fertilidade é uma estimativa do número médio de filhos que uma mulher tem ao longo da vida. Em 2019, a taxa de fertilidade no Brasil foi maior ou menor que 2? E nos Estados Unidos? E no Haiti? **Menor; menor; maior.**

b) A taxa de substituição corresponde ao número médio de filhos que cada mulher deve ter para que a reposição populacional seja assegurada. Observando o gráfico, qual(is) desses países, em 2019, está(ão) abaixo da taxa de substituição? E qual(is) está(ão) acima? **Estados Unidos e Brasil; Haiti.**

6. Responda à atividade no caderno.
O projeto Prodes (Programa de Cálculo do Desflorestamento da Amazônia) realiza o monitoramento do desmatamento na Amazônia Legal desde 1988. Veja os registros obtidos de 2004 a 2021.

Fonte de pesquisa: Monitoramento do desmatamento da Floresta Amazônica brasileira por satélite. Inpe, 19 nov. 2021. Disponível em: http://www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes. Acesso em: 7 abr. 2022.

Considerando as informações do gráfico, indique a alternativa correta. **Alternativa e.**

a) O maior pico de desmatamento ocorreu no ano de 2008.

b) Entre os anos de 2019 e 2021, o desmatamento diminuiu.

c) De 2012 a 2014, o desmatamento manteve-se constante.

d) A área desmatada decresceu de 2015 a 2016 e cresceu de 2016 a 2017.

e) A área desmatada teve aumentos sucessivos de 2017 a 2021.

7. Reúna-se com um colega para planejar um experimento aleatório que envolve as cartas de um baralho. Decidam qual será o espaço amostral e os eventos que serão considerados e, depois, realizem simulações para verificar se as probabilidades dos eventos que vocês escolheram são parecidas com as que vocês obtiveram nas simulações. **Resposta pessoal.**

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Desenvolvi o raciocínio probabilístico a partir de situações cotidianas e imaginadas?
- Compreendi e sei descrever os conceitos básicos de probabilidade?
- Entendi como calcular a probabilidade de ocorrência de um evento?
- Relacionei números obtidos em cálculos de probabilidade no campo dos racionais?
- Compreendi o que é uma pesquisa estatística?
- Distingui variáveis qualitativas de quantitativas?
- Aprendi a analisar informações de pesquisas?
- Diferenciei pesquisa amostral de pesquisa censitária?
- Compreendi como organizar, interpretar e analisar dados em gráficos e tabelas?
- Entendi os diferentes tipos de gráfico e tabela, bem como seus elementos primordiais?
- Sei calcular e utilizar média aritmética para tomada de decisões?
- Identifiquei a média e a amplitude de um conjunto de dados?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

NESTA UNIDADE...

Competências gerais
1, 4, 7 e 9.

Competências específicas de Matemática
1, 3, 4 e 5.

Habilidades

(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.

(EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).

(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.

(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

UNIDADE 8

GRANDEZAS E MEDIDAS

SOBRE A UNIDADE

Nesta unidade, serão retomadas as grandezas comprimento, área, massa, volume, capacidade, tempo e temperatura e conceitos relacionados à ideia de medir.

A comparação entre grandezas de mesma natureza medidas em unidades diferentes e a diferenciação entre unidades de medida padronizadas e não padronizadas serão enfatizadas, levando os estudantes a perceber a importância de um padrão para realizar medidas precisas e entender que medidas empíricas são aproximadas.

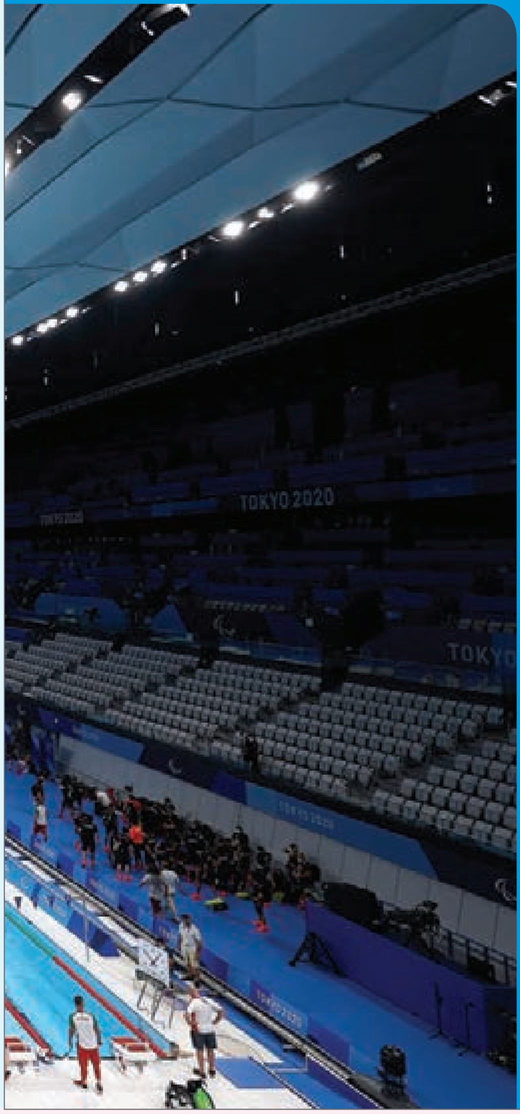
Serão trabalhados também os conceitos de área com unidades de medida de área e por meio da comparação de figuras equivalentes por composição e decomposição, além do estudo do cálculo das medidas de áreas de quadriláteros e triângulos por meio de malha quadriculada e do uso de fórmulas.

Também será trabalhado o conceito de volume de um bloco retangular, destacando-se o cubo, utilizando a composição e a decomposição de figuras e o uso de fórmulas.

São apresentadas atividades que integram o conteúdo com situações-problema que envolvem contextos do cotidiano e de outras áreas de conhecimento.

CAPÍTULO 1
Medições

CAPÍTULO 2
Áreas e volumes



Dean Mouhtaropoulos/Equipe/Getty Images

Visão geral da piscina no Centro Aquático, antes dos Jogos Paraolímpicos de Tóquio 2020, no Japão. Foto de 2021.

PRIMEIRAS IDEIAS

Você já assistiu a um campeonato de natação desportiva? De maneira geral, competições de natação são realizadas em piscinas olímpicas, as quais devem seguir padrões de medida preestabelecidos: 50 m de comprimento, 25 m de largura e pelo menos 2 m de profundidade.

Você tem ideia de quanta água cabe em uma piscina dessas? No mínimo, 2 500 000 L. Imagine o tempo que demoraria para encher uma piscina olímpica com um balde comum, em que cabem aproximadamente 15 L de água.

1. Na sala de aula seria possível construir uma piscina olímpica? Por quê?
2. Por que foi necessário criar um padrão para as dimensões de piscinas usadas em competições? Converse com os colegas e o professor.
3. A medida de capacidade de 2 500 000 L em um espaço fechado é muito ou pouco?

PRIMEIRAS IDEIAS

- Peça aos estudantes que observem a imagem. Trata-se da piscina olímpica utilizada na prova de natação nos Jogos Paraolímpicos de Tóquio 2020. Explique que nessa piscina há 10 raias e a largura de cada uma delas mede 2,5 m e que geralmente são utilizadas apenas 8 raias nas competições.
- Leia o texto e chame a atenção dos estudantes para as dimensões de uma piscina olímpica. Se julgar oportuno, informe que existem piscinas semiolímpicas e que a diferença está no comprimento, que corresponde à metade da medida do comprimento da piscina olímpica.
- Deixe que os estudantes respondam às perguntas dessa seção e que compartilhem as respostas da questão **3** com os colegas, para que possam perceber que todas as respostas podem ser válidas, dependendo da situação.

RESPOSTAS

1. Espera-se que os estudantes digam que não. Instigue-os a pensar nas dimensões da sala de aula e, então, a compará-las com as medidas de uma piscina olímpica.
2. Resposta pessoal. Ter um padrão é importante por diferentes motivos. Um deles refere-se às distâncias das provas: nas competições olímpicas, são comuns provas cujas distâncias são múltiplos de 50 (50 metros, 100 metros, 200 metros, etc.), ou seja, o nadador sempre termina a prova em uma das bordas.
3. Espera-se que os estudantes percebam que para responder a essa questão é preciso ter um referencial. Se compararmos 2 500 000 litros de água, por exemplo, com a medida do volume de água do oceano Atlântico, é pouco. Mas, se compararmos com um recipiente pequeno, por exemplo, um copo de água, é muito.

DE OLHO NA BASE

Motivar os estudantes a participar e a compartilhar suas ideias, utilizando o conhecimento matemático para se expressar, desenvolve a autoconfiança e a segurança e leva ao entendimento mútuo, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 4**.

CAPÍTULO 1

Conteúdos

- Grandezas e medidas.
- Unidades de medida padronizadas e não padronizadas.

Objetivos

- Ampliar os conceitos de grandezas e unidades de medida.
- Diferenciar unidades de medida padronizadas das não padronizadas.
- Reconhecer a necessidade da utilização de unidades de medidas padronizadas.
- Resolver e elaborar problemas que envolvam unidades de medidas padronizadas e não padronizadas.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar a ideia de medir e aprofundá-la reconhecendo a necessidade de se estabelecer unidades de medidas padronizadas. Dessa maneira, espera-se que eles aprimorem a compreensão do mundo que os cerca e tornem-se mais autônomos na resolução dos problemas do cotidiano deles.

A IDEIA DE MEDIR

- As grandezas e as unidades de medida são fundamentais para que os estudantes sejam capazes de compreender diversas situações de seu dia a dia.
- Ressalte aos estudantes que para medir é necessário que se defina uma unidade-padrão e se conte o número de vezes que ela cabe no que se pretende medir.
- Comente com os estudantes que medir usando os passos como unidade de medida, como feito pela personagem da tira para encontrar o tesouro do pirata, não é um método exato por causa da diferença das dimensões dos pés e das pernas de cada pessoa.

Capítulo

1 MEDIÇÕES

Para o desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes tenham se familiarizado com os conceitos relacionados a grandezas e medidas estudados em anos anteriores e consigam operar com números na forma decimal.

A ideia de medir

Leia a tira a seguir. Você conseguiu entender o humor presente nela? O que significa andar 100 passos? **Respostas pessoais.**

Quando alguém pergunta a você qual é a medida de sua altura, como você responde? **Resposta pessoal.**

Essas perguntas tratam de grandezas e medidas. Tudo o que pode ser medido é uma **grandeza**. Assim, a altura, o comprimento, o tempo, a temperatura, o volume e a massa são exemplos de grandezas.

As medidas estão presentes em diversas situações do nosso cotidiano. Você já imaginou como faria para adquirir alguns produtos se não houvesse unidades de medida? Por exemplo, como um eletricista faria para comprar fios? Como o vendedor saberia a quantidade correta do produto a ser vendido se não houvesse um modelo em que se basear? Não surpreende que a necessidade de medir tenha surgido há muito tempo.

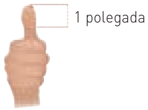
© Humor com Ciência

OUTRAS FONTES

PEREIRA, F. F.; DONEZE, I. S. Medindo distâncias a partir de instrumentos não convencionais: uma abordagem extraclasse para o Ensino Fundamental. *Revista Thema*, v. 15, n. 2, 2018. Disponível em: https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/836. Acesso em: 31 maio 2022.

Esse trabalho relata a importância e os resultados de uma atividade extraclasse, que envolveu partes do corpo como instrumentos de medição, considerando os conhecimentos do cotidiano dos estudantes para o ensino de conteúdos matemáticos, especificamente, o conteúdo de medidas de comprimento.

Antigamente, as unidades de medida quase sempre se baseavam em partes do corpo humano, como o pé, o palmo e a polegada.



Porém, havia alguns problemas. Imagine, por exemplo, a seguinte situação: uma pessoa encomenda a um carpinteiro um armário cujas medidas são 12 palmos de comprimento, 4 pés de largura e 15 palmos de altura. Ao receber a encomenda, no entanto, a pessoa percebe que o armário não estava com as medidas que havia pedido, apesar de o carpinteiro assegurar que fez o armário de acordo com as medidas solicitadas na encomenda. Você sabe por que isso aconteceu?

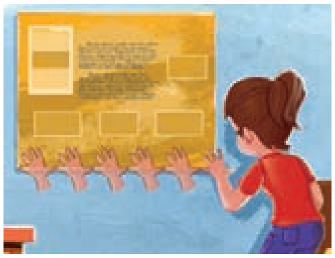
Provavelmente houve confusão porque as medidas do palmo e do pé da pessoa que fez a encomenda e as do carpinteiro eram diferentes.

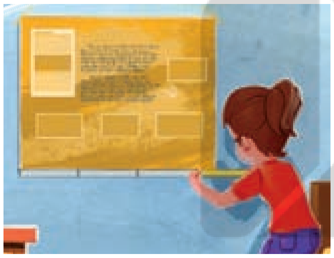
Esse problema teria sido evitado se as dimensões do armário seguissem uma unidade de medida padronizada, como é o caso do metro e do centímetro, entre outras.

O que é medir

Medir é comparar duas grandezas de mesma natureza (unidade de medida) e verificar quantas vezes uma contém a outra. Acompanhe um exemplo.

Para medir o comprimento do pôster que está na parede de seu quarto, Antônia escolheu duas unidades de medida: o próprio palmo e um pedaço de fita.


↑ **Com seu palmo, Antônia verificou que o comprimento do pôster media 5 palmos e meio.**


↑ **Usando um pedaço de fita como unidade de medida, Antônia obteve a medida de 3 pedaços mais $\frac{1}{4}$ de um de pedaço de fita.**

Ilustrações: Danillo Souza/ID/BR

Observe que, ao medir o comprimento do pôster, Antônia encontrou um número de palmos maior que o número de pedaços de fita $\left(5\frac{1}{2} > 3\frac{1}{4}\right)$. Isso aconteceu porque a unidade de medida pedaço de fita é maior que a unidade de medida palmo. Quanto maior for a unidade de medida usada, menor será a quantidade de vezes que ela caberá na grandeza a ser medida.

- Converse com os estudantes sobre a situação que envolve o contexto de carpintaria e estimule-os a falar o porquê de o armário encomendado não estar com as medidas corretas. Verifique se eles concluem que a divergência entre as medidas se deu porque provavelmente o carpinteiro tem as medidas de palmo e de pés diferentes das respectivas medidas de palmo e de pés diferentes de quem fez a encomenda.
- Explique aos estudantes que os métodos de medidas baseados nas partes do corpo usados antigamente podem gerar divergência no resultado das medidas, como o ocorrido com a encomenda do carpinteiro.
- Ao comparar os resultados obtidos nas medições com diferentes unidades de medida, espera-se que os estudantes percebam que, quanto maior for a unidade de medida escolhida, menor será a quantidade de vezes que ela vai caber na grandeza a ser medida.

- Converse com os estudantes sobre a importância e a necessidade da criação e da utilização de unidades de medida padronizadas.
- Depois, converse sobre as duas situações apresentadas nesta página (futebol entre amigos e compras em um açougue).
- Incentive os estudantes a falar sobre situações em que é necessário usar unidades de medida padronizadas e em que podemos usar as unidades de medida não padronizadas.
- É importante verificar o critério utilizado pelos estudantes para classificar as situações. Verifique se eles levam em consideração a necessidade e diferenciam estas das situações em que são aceitáveis aproximações.

Unidades de medida padronizadas e não padronizadas

Com a necessidade de uniformização das unidades de medida, em 1789 foi criado na França o Sistema Métrico Decimal. Em 1960, foi aprovada uma versão moderna desse sistema, chamada de Sistema Internacional de Unidades (SI), que foi adotada no Brasil em 1962.

Veja no quadro a seguir algumas unidades do SI usadas frequentemente.

Grandeza	Unidade de medida	
	Nome	Símbolo
Comprimento	Metro	m
Área	Metro quadrado	m^2
Tempo	Segundo	s
Massa	Quilograma	kg

Sistema Internacional de Unidades (SI). Tradução do grupo de trabalho luso-brasileiro do Inmetro e IPQ. Brasília, DF: Inmetro, 2021. Disponível em: https://www.gov.br/inmetro/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/documentos-tecnicos-em-metrologia/si_versao_final.pdf/view. Acesso em: 20 abr. 2022.

Além dessas unidades, temos o centímetro, a hora e o grama, também bastante usadas no dia a dia.

As unidades não padronizadas são utilizadas apenas quando não é fundamental obter uma medida exata. Por exemplo, quando um grupo de amigos se reúne para jogar futebol na areia, a largura dos gols pode ser medida com o comprimento dos pés de uma pessoa.

Entretanto, há situações em que é necessário realizar uma medição mais precisa, como ao comprar carne em um açougue.

Ilustrações: Danillo Souza/ID/BR

(IN)FORMAÇÃO

Unidade de comprimento (metro)

A definição do metro, dada em 1889, baseada no protótipo internacional de liga metálica de platina-irídio, foi substituída na 11ª [Conferência Geral de Pesos e Medidas] CGPM (1960) por outra definição baseada no comprimento de onda de uma radiação do criptônio-86. Esta mudança teve a finalidade de aumentar a exatidão da realização da definição do metro, realização esta conseguida com um interferômetro e um miscroscópio deslizante para medir a diferença do caminho óptico à medida que as franjas eram contadas. Por sua vez, esta definição foi substituída em 1983 pela 17ª CGPM (1983, Resolução 1; CR 97 e *Metrologia*, 1984, 20, 25) pela definição atual seguinte:

O metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 de segundo.

Essa definição tem o efeito de fixar a velocidade da luz no vácuo em 299 792 458 metros por segundo exatamente, $c_0 = 299\,792\,458$ m/s.

O protótipo internacional original do metro, que foi sancionado pela 1ª CGPM em 1889 (CR, 34-38), ainda é conservado no [Bureau International de Poids et Mesures – Escritório Internacional de Pesos e Medidas] BIPM nas mesmas condições que foram especificadas em 1889.

Sistema Internacional de Unidades: SI. Rio de Janeiro: Inmetro/Cicma/Sepin, 2012. Disponível em: http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/si_versao_final.pdf. Acesso em: 1º jun. 2022.

Nem todos os países utilizam o Sistema Internacional de Unidades. Há países, como Estados Unidos, Mianmar e Libéria, que não usam o SI como sistema oficial de medidas. Entretanto, isso não significa que o SI não seja utilizado. Mianmar e Libéria, por exemplo, têm alta demanda de importação e, consequentemente, utilizam o SI nas negociações com outros países.

Nos Estados Unidos, o sistema métrico oficial é o sistema imperial ou sistema britânico de pesos e medidas. Veja a seguir algumas equivalências.

Correspondência de algumas unidades no sistema imperial e no Sistema Internacional de Unidades

Grandeza / Sistema-padrão	Comprimento				Massa		Volume
Sistema imperial	1 polegada	1 pé	1 jarda	1 milha	1 onça	1 libra	1 galão
SI	2,54 cm	30,48 cm	91,44 cm	1,61 km	28,35 g	453,59 g	3,79 L

Em nosso país, em paralelo ao Sistema Internacional de Unidades oficial, permanecem em uso cotidiano algumas unidades do sistema imperial, como a polegada, utilizada para medir objetos como chaves de boca, televisores, etc. Apesar de ser empregada com naturalidade, boa parte das pessoas não sabe que 1 polegada equivale a 2,54 centímetros.

Nexus 7/Shutterstock.com/ID/BR

Televisor de 32 polegadas.

STILLFX/Shutterstock.com/ID/BR

(Representações sem proporção de tamanho entre si)

Chave combinada. Nessa chave há uma chave de boca e uma chave de estria, e ambas são de $\frac{3}{4}$ de polegada.

- Peça aos estudantes que leiam o texto e faça com eles uma breve análise do quadro. Verifique se eles associam as unidades de um sistema com o outro e se compreendem que há diferentes unidades de medida padronizadas para medir a mesma grandeza.

Você pode fazer perguntas aos estudantes para estimular a comparação entre polegadas e pés, por exemplo, de modo que percebam que, ao medir o mesmo objeto, usaremos mais polegadas que pés, visto que uma polegada é bem menor que um pé.

DE OLHO NA BASE

Auxiliar os estudantes a reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, resultado das necessidades de diferentes culturas, e que contribui para embasar descobertas e solucionar problemas científicos e tecnológicos da sociedade colabora para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 1**.

Além disso, conhecer a história e participar de diálogos que envolvem a Matemática e situações reais possibilita aos estudantes valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 1**.

+ INTERESSANTE

O texto traz uma situação real que exemplifica a importância de apresentar uma grandeza sempre acompanhada de uma unidade de medida.

Promova um debate sobre as ideias apresentadas no texto com o intuito de fazer os estudantes perceberem a importância de definir a unidade de medida que foi empregada ao se obter determinada medida.

- Na atividade **1**, caso os estudantes não conheçam alguma das unidades de medida apresentadas, incentive-os a consultar o dicionário.
- Na atividade **2**, sugira aos estudantes que elaborem um quadro com as medidas obtidas e utilizem pelo menos três unidades de medidas diferentes, de modo que percebam que, quanto maior for a unidade de medida, menor será a medida obtida. No item **c**, espera-se que eles diferenciem as medidas padronizadas das não padronizadas.

+ INTERESSANTE

A importância da unidade de medida!

Não informar a unidade na medida de uma grandeza pode, além de gerar dúvidas, provocar erros graves. Veja um exemplo na reportagem a seguir.

Erro da Nasa pode ter destruído sonda

Um erro elementar de conversão de pesos e medidas cometido pelos controladores de voo pode ter sido o motivo pelo qual a sonda espacial Mars Climate Orbiter foi destruída ao tentar entrar na órbita de Marte há sete dias.

Ao se aproximar do planeta, a sonda recebeu duas informações conflitantes dos controladores na Terra. Uma, no Sistema Métrico Decimal (que usa metro e quilograma) e outra, em unidades britânicas (que usa pé e libra). As informações eram consideradas críticas para que a sonda alcançasse a órbita apropriada de Marte.

É o que indicam os primeiros resultados obtidos por uma comissão que investiga as causas da perda da sonda, formada por membros do Laboratório de Propulsão a Jato, da Nasa, agência espacial norte-americana.

"As pessoas cometem erros às vezes", disse Edward Weiler, administrador-associado para as Ciências Espaciais da Nasa, em um comunicado à imprensa.

Para Weiler, no entanto, o problema principal não foi o erro cometido pelos controladores de voo, mas sim a falha dos sistemas de engenharia da Nasa, que não foram capazes de detectar as diferenças numéricas e corrigir os dados a tempo.

O erro de navegação fez com que a Mars Climate Orbiter (MCO) chegasse a apenas 60 km de Marte – 100 km mais perto do que o planejado e 25 km abaixo do nível de segurança do projeto.

O erro de rota teria sido suficiente para que ela fosse destruída pela atmosfera do planeta, em 23 de setembro, segundo a Nasa.

A MCO, de US$ 125 milhões, foi lançada em dezembro de 98 e levou 286 dias para chegar a Marte. Sua principal função era recolher dados atmosféricos de cada estação do ano do planeta e entender suas modificações climáticas.

[...]

Marcelo Ferroni. Erro da Nasa pode ter destruído sonda. *Folha de S.Paulo*, 1º out. 1999. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/fsp/ciencia/fe0110199905.htm. Acesso em: 20 abr. 2022.

PARE E REFLITA

Em sua opinião, como o erro mencionado na reportagem poderia ter sido evitado? Você conhece outra situação em que um erro na unidade de medida teve uma consequência séria?

Respostas pessoais. Na primeira pergunta, espera-se que os estudantes comentem que erros desse tipo seriam evitados se uma grandeza fosse sempre acompanhada de sua unidade de medida.

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

1. Bianca escreveu algumas unidades de medida em pedaços de papel. Observe.

jarda
mão
centímetro
miligrama
minuto
passo
segundo
copo
polegar

Quais dessas unidades de medida não são padronizadas? **Passo, mão, copo e polegar.**

Responda sempre no caderno.

2. Meça com um lápis o comprimento de sua carteira. Em seguida, utilize uma unidade de medida menor, como a tampa de uma caneta ou a largura de seu polegar, para medir novamente sua carteira.

a) Que medidas você obteve? **Resposta pessoal.**

b) Compare as medidas obtidas no item anterior com as obtidas por um colega. Elas são iguais? Por quê? **Respostas pessoais.**

c) As unidades de medida que você usou para medir o comprimento da carteira são padronizadas? Explique. **Unidade de medida não padronizada. Resposta pessoal.**

DESCUBRA MAIS

Unidades de medida não padronizadas

Você já sabe que as medidas e as unidades de medida estão presentes em nosso dia a dia. Mas você já observou alguém relacionar unidades de medida padronizadas com unidades de medida não padronizadas? Por exemplo, uma pessoa mede determinada distância com três passos e, argumentando que cada passo corresponde a aproximadamente 1 metro, conclui que a distância medida é de cerca de 3 metros. Será que isso é verdade?

Materiais

- lápis e borracha
- trena ou régua
- caderno


Khaoniewping/ Shutterstock.com/ID/BR


Trehalа77/ Shutterstock. com/ID/BR


Serhiy Kobyakov/ Shutterstock.com/ID/BR


Evgeni_S/ Shutterstock.com/ ID/BR


M.Bonotto/Shutterstock.com/ID/BR

(Representações sem proporção de tamanho entre si)

Como fazer

❶ Com a orientação do professor, organizem-se em grupos de 3 ou 4 integrantes.

❷ Juntos, os grupos devem escolher um objeto a ser medido. Por exemplo, a lousa da sala de aula, uma mesa ou um armário.

❸ Cada integrante do grupo deve medir as dimensões (comprimento, largura e altura) do objeto escolhido usando palmo, pé ou outra parte do corpo. Registrem no caderno as medidas obtidas.

❹ Depois, cada um deve medir, com a régua ou a trena, a parte do corpo que utilizou como unidade de medida. Registrem essas medidas e façam a equivalência para descobrir as medidas do objeto.

❺ Por fim, utilizem a trena ou a régua e meçam diretamente o objeto escolhido.

Para concluir

Responda sempre no caderno.

1. As medidas encontradas por todos os integrantes do grupo foram as mesmas? Que parte do corpo vocês escolheram utilizar? **Respostas pessoais.**
2. A medida obtida ao utilizar uma parte do corpo como unidade de medida é exata ou aproximada? O que fez vocês concluírem isso? **Consulte as respostas neste manual.**
3. A medida obtida ao fazer a equivalência entre a unidade de medida do corpo utilizada e a medida obtida diretamente com a régua ou com a trena foram parecidas? Qual delas vocês acreditam ser a mais precisa? **Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes cheguem a medidas aproximadas e percebam que a medida obtida com o uso de unidade de medida padronizada é mais precisa do que a obtida por meio da medição com unidade de medida não padronizada.**

DESCUBRA MAIS

Nesta atividade, espera-se que os estudantes compreendam na prática que medir é comparar duas grandezas de mesma natureza e que reconheçam a importância da utilização de uma unidade de medida padronizada. Pergunte a eles: Quantas vezes a grandeza conhecida cabe na grandeza que queremos medir?

Nas situações em que a unidade de medida adotada não "cabe" um número exato de vezes na grandeza a ser medida, é possível retomar com os estudantes a necessidade de criação dos números racionais.

PARA CONCLUIR

2. As medidas obtidas são aproximadas. Espera-se que os estudantes percebam que essas medidas, por não serem padronizadas, são aproximadas. A medida encontrada pelos estudantes pode variar de acordo com o tamanho da parte do corpo escolhida. Oriente-os a usar as unidades de medida: sempre o mesmo palmo (não variar usando palmo aberto, palmo fechado e semiaberto) ou a mesma parte do corpo da mesma pessoa; os palmos (ou outra parte do corpo que eles escolherem) devem ser posicionados sem sobreposição ou intervalos.

DE OLHO NA BASE

As atividades desse boxe permitem aos estudantes, por meio da resolução de situações-problema que envolvem medidas de grandeza, reconhecer que as unidades de medida não padronizadas não são precisas como as unidades de medida padronizadas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF07MA29**.

Ao reunir os estudantes em grupo, cria-se a oportunidade de interação, favorecendo a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos, a cooperação e o respeito a si próprio e ao outro, o que contribui para o desenvolvimento da **competência geral 9**.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Caso considere adequado, solicite aos estudantes que resolvam a atividade **1** em duplas. A interação entre eles auxiliará na reflexão e discussão sobre os conceitos de unidades de medidas presentes nas cenas cotidianas, apresentadas na atividade.

  Comente com os estudantes que a medida pés da cena G é uma medida não padronizada e ela se refere ao tamanho dos pés de quem está realizando a medida. Diferentemente da medida pés do sistema imperial, que é uma medida padronizada e equivale a aproximadamente 30,5 cm.
- As atividades **2**, **3** e **5** abordam as unidades de medida padronizadas e não padronizadas. Trabalhe essas atividades em conjunto, relacionando-as. Incentive os estudantes a apresentar suas ideias à turma, defendendo seus pontos de vista e ouvindo as ideias dos colegas, assim eles conseguem compreender melhor e ampliar esses conceitos.
- Disponibilize ou peça aos estudantes que tragam os instrumentos necessários para a realização da atividade **4**. Essa atividade permite verificar se eles escolhem as unidades de medida corretamente ao fazer as estimativas.
- Complemente a atividade **6** perguntando aos estudantes como é obtida a quantidade de farinha indicada na receita e se essa quantidade pode variar ou não. Verifique quais são as hipóteses levantadas por eles e explique que um punhado de farinha corresponde à quantidade de farinha obtida quando se enche a mão com esse ingrediente e depois a fecha, o que ficar na mão é o punhado. Espera-se que os estudantes percebam que a quantidade de farinha pode variar dependendo do tamanho da mão da pessoa que fizer a medição. Faça perguntas sobre o copo de leite que será utilizado, para que eles percebam que essa medida também pode variar de acordo com o copo que se utiliza.
- Amplie a atividade **7** perguntando aos estudantes quantos palmos de Douglas equivalem a um passo de João. Como a mesma mesa foi medida por ambos, e Douglas encontrou como medida 30 palmos e João 6 passos, espera-se que os estudantes dividam 30 por 6, obtendo como resposta que cada passo de João equivale a 5 palmos de Douglas.

DIVERSIFICANDO

1. Observe as cenas a seguir.

Ilustrações: João Picoli/ID/BR

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Para ajudar os estudantes a superar as dificuldades que ainda podem aparecer durante a realização das atividades sobre as unidades de medida padronizadas e não padronizadas, proponha que completem um quadro como o sugerido. Se julgar oportuno, amplie o quadro inserindo novas situações. É importante observar que algumas situações podem ser respondidas pelos estudantes com as grandezas volume ou capacidade e as unidades de medida apropriadas metro cúbico ou litro, respectivamente.

Situação	Grandeza	Unidade de medida mais apropriada
Quantidade de água que cabe em uma piscina	volume	m^3
Espaço no interior de uma balde	capacidade	L
Espaço ocupado por uma caixa cúbica	volume	m^3
Altura de um poste	comprimento	m
Distância entre duas cidades	comprimento	km
Período de permanência na escola	tempo	h

Responda sempre no caderno.

Consulte as respostas neste manual.

Agora, responda às questões.

a) Se outra pessoa medir a altura da caixa da cena A utilizando a mesma trena que Caio, ela encontrará a mesma medida que ele encontrou? Por quê?

b) Na cena B, se Ana medir o pano utilizando seu palmo, encontrará a mesma medida que Vicente encontrou? Por quê?

c) Na cena C, é possível observar algumas crianças brincando. Se outra criança estivesse fazendo a contagem da brincadeira, o tempo poderia ser maior ou menor que o da contagem feita por Adriele?

d) Na cena D, qual dos copos William deveria utilizar na receita?

e) Na cena E, a quantidade de água no galão está sendo medida em uma unidade de medida padronizada ou não padronizada?

f) Na cena F, se outra pessoa estivesse com o cronômetro em mãos, a duração da cena seria diferente?

g) Na cena G, se Paulo medir o mesmo lado da quadra que Ester mediu usando seus pés, a medida será a mesma? Se não, qual das medidas será maior: a de Paulo ou a de Ester?

h) Quais das cenas utilizam unidades de medida não padronizadas? Como você chegou a essa conclusão?

2. Você conhece alguma unidade de medida padronizada que não é utilizada no Brasil? Em caso afirmativo, qual é essa unidade? Para que ela serve? **Respostas pessoais.**

3. Você costuma usar algum tipo de medida não padronizada em seu dia a dia? Se usa, indique qual é essa medida e por que a utiliza. **Respostas pessoais.**

4. Estime as medidas das situações indicadas em cada item. Em seguida, use uma régua, uma trena ou uma fita métrica para verificar se suas estimativas ficaram próximas das medidas reais. **Respostas pessoais.**

a) O comprimento de seu pé.

b) O comprimento de um caderno.

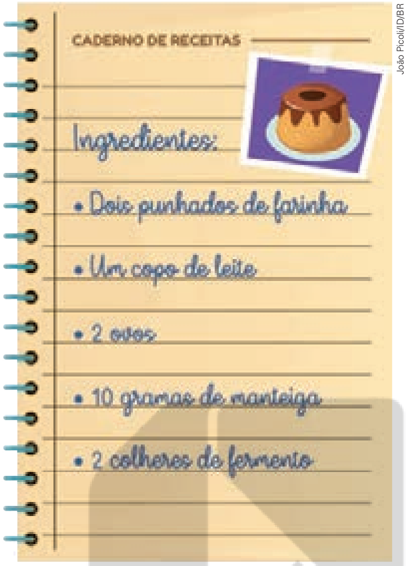
c) A largura da porta.

d) O comprimento de um lápis.

e) O comprimento de um dos lados da quadra da escola.

5. Em situações em que há necessidade de obter uma medida exata, devemos escolher uma unidade de medida padronizada ou não padronizada? **Padronizada.**

6. Adriana decidiu fazer uma surpresa para a mãe dela. Para isso, pediu à sua vizinha que a ajudasse a fazer um bolo. A vizinha anotou os ingredientes da receita da seguinte maneira:



CADERNO DE RECEITAS

Ingredientes:

- Dois punhados de farinha
- Um copo de leite
- 2 ovos
- 10 gramas de manteiga
- 2 colheres de fermento

João Piccoli/ID/BR

a) A vizinha de Adriana anotou alguns ingredientes com unidades de medida não padronizadas. Quais foram as unidades de medida não padronizadas que ela utilizou? **Punhado, copo e colher.**

b) Ao preparar a receita usando as quantidades indicadas por sua vizinha, Adriana conseguirá fazer o bolo corretamente?

6. b) Provavelmente não, pois não se sabe quanto representa um punhado nem os tamanhos do copo e da colher em unidades de medida padronizadas.

7. João e Douglas mediram o comprimento da mesma mesa do refeitório da escola em que estudam. João mediu o comprimento da mesa com seu passo e obteve 6 passos. Douglas usou seu palmo para medir o mesmo comprimento e obteve 30 palmos. Explique por que Douglas encontrou uma medida muito maior que a obtida por João.

7. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que a unidade de medida escolhida por João é maior que a unidade de medida escolhida por Douglas. Logo, a unidade de medida de João cabe menos vezes no comprimento que eles estão medindo, resultando em uma medida menor que a encontrada por Douglas.

RESPOSTAS

1. As questões propostas nesta atividade podem ser respondidas da seguinte maneira:

a) Sim, pois a trena é um instrumento de medição que utiliza unidades de medidas padronizadas.

b) Provavelmente não, pois as medidas dos palmos de Ana e de Vicente são diferentes.

c) Provavelmente seria diferente, mas não é possível saber se seria maior ou menor.

d) Não é possível saber. Depende da medida de capacidade de cada copo e da quantidade dada na receita.

e) Padronizada (litro).

f) A duração da cena não seria diferente, pois com o uso do cronômetro a duração será sempre a mesma, independentemente de quem esteja com o cronômetro em mãos.

g) Provavelmente eles vão obter medidas diferentes. Nessa situação, é provável que a medida obtida por Paulo seja maior, pois seus pés são menores que os de Ester.

h) As cenas B, C, D e G. Resposta pessoal.

DE OLHO NA BASE

As atividades propostas nesta seção envolvem medidas de grandezas provenientes de situações cotidianas e permitem aos estudantes reconhecer que as medidas empíricas são aproximadas, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA29**.

Além disso, fazer estimativas e verificar se as medidas são próximas das medidas reais, utilizando instrumentos, como régua e trena, como sugerido na atividade **4**, permite aos estudantes desenvolver pensamento crítico para validar estratégias e resultados, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 5**.

OUTRAS FONTES

Tabelas de conversão métricas e calculadoras para conversões métricas. Disponível em: https://www.metric-conversions.org/pt-br/. Acesso em: 1º jun. 2022.

Esse *site* disponibiliza, gratuitamente, diversas tabelas e calculadoras para conversão de unidades de medida, classificadas pelas grandezas.

CAPÍTULO 2

Conteúdos

- Equivalência entre figuras planas.
- Área e suas unidades de medida padronizadas.
- Área de quadriláteros e triângulos.
- Volume de um bloco retangular.

Objetivos

- Retomar o conceito de área e de suas unidades de medida padronizadas.
- Identificar unidades de medida de área.
- Determinar a medida da área de uma região utilizando unidades não padronizadas e equivalência de figuras.
- Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e quadriláteros.
- Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área.
- Compreender e aplicar o conceito de volume.
- Identificar as unidades de medida de volume.
- Resolver e elaborar problemas de cálculo de volume.

Justificativa

- Neste capítulo, os estudantes terão a oportunidade de retomar o estudo de áreas e volumes, compreendendo o uso de fórmulas para o cálculo das medidas da área de figuras geométricas planas e do volume de figuras geométricas não planas. Esses conhecimentos ampliam o pensamento geométrico dos estudantes, atrelando-o ao pensamento algébrico, favorecendo generalizações, o pensamento dedutivo e o repertório dos estudantes na resolução de problemas.

ÁREAS

- Chame a atenção dos estudantes para a imagem da quadra de tênis e para as informações sobre as dimensões dela quando há partidas simples e quando há jogos de duplas. Pergunte a eles sobre a diferença entre essas dimensões. Verifique se percebem que a mudança está na medida da largura. Explore com eles a ideia de que existe a área total, coberta pelo piso, e a área utilizada para o jogo.
- É importante que os estudantes entendam o significado do conceito de área como uma grandeza.

Capítulo

2 ÁREAS E VOLUMES

Para o desenvolvimento dos conteúdos deste capítulo, é importante que os estudantes tenham consolidado as ideias apresentadas em anos anteriores relacionadas a esses assuntos. Além disso, eles precisam saber operar com números racionais e reconhecer características de figuras geométricas como o quadrado e o triângulo.

Áreas

Uma quadra de tênis pode ser feita com diferentes tipos de piso: grama, saibro, asfalto, material sintético, entre outros. Entretanto, seu formato e suas dimensões são sempre as mesmas.

Nas partidas simples, quando há um jogador de cada lado da quadra, as dimensões válidas são 23,77 m de comprimento e 8,23 m de largura. Já no jogo de duplas, quando há dois jogadores de cada lado da quadra, as faixas laterais também podem ser utilizadas, e as dimensões passam a ser 23,77 m de comprimento e 10,97 m de largura.

Você tem ideia de qual é a medida da área interna de uma quadra de tênis?

↓ Partida de tênis entre Novak Djokovic (Sérvia) e Stefanos Tsitsipas (Grécia), no Torneio Aberto de Tênis da França, em Roland Garros. Paris, França. Foto de 2021.

Tim Clayton/Corbis/Getty Images

OUTRAS FONTES

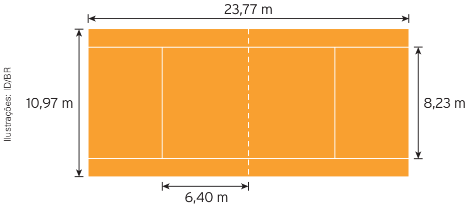
PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. *In*: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 23, 2000, Caxambu. *Anais*... 2000. Disponível em: http://23reuniao.anped.org.br/textos/1919t.PDF. Acesso em: 1º jun. 2022.

Esse artigo aborda o significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria no Ensino Fundamental.

QUEVEDO, G. A. *Compreensão dos conceitos de área e perímetro*: um estudo de caso. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/149219. Acesso em: 1º jun. 2022.

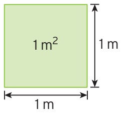
Esse trabalho apresenta uma análise a respeito da compreensão de uma turma de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental acerca dos conceitos de área e perímetro.

Na representação a seguir, a região laranja corresponde à área da quadra de tênis. Para medir a área dessa quadra, devemos utilizar uma unidade de medida de área.



Ilustrações: ID/BR

A unidade de medida padrão para **área** é o **metro quadrado** (m^2). Essa unidade é derivada da unidade de medida de comprimento padrão, o metro (m), e corresponde à medida da área de um quadrado de 1 m de lado.



Para medir áreas muito grandes, podemos usar os múltiplos do metro quadrado, e para medir áreas pequenas, podemos usar os submúltiplos do metro quadrado. Veja essas relações no quadro a seguir.

Múltiplos			Unidade de medida padrão	Submúltiplos		
Quilômetro quadrado (km^2)	Hectômetro quadrado (hm^2)	Decâmetro quadrado (dam^2)	**METRO QUADRADO (m^2)**	Decímetro quadrado (dm^2)	Centímetro quadrado (cm^2)	Milímetro quadrado (mm^2)
1 km^2 equivale a 1 000 000 m^2	1 hm^2 equivale a 10 000 m^2	1 dam^2 equivale a 100 m^2	**1 m^2**	1 dm^2 equivale a $\frac{1}{100}$ m^2	1 cm^2 equivale a $\frac{1}{10\,000}$ m^2	1 mm^2 equivale a $\frac{1}{1\,000\,000}$ m^2

Existem também outras unidades de área, como as que são usadas para registrar medidas agrárias.

- Alqueire: no Brasil, essa unidade de medida tem mais de um valor, variando de acordo com o estado. Assim, o alqueire paulista equivale a 24 200 m^2, o alqueire mineiro corresponde a 48 400 m^2 e o alqueire baiano corresponde a 96 800 m^2.
- Hectare (ha): equivale a 10 000 m^2 ou a 1 hm^2.
- Are (a): equivale a 100 m^2 ou a 1 dam^2.

PARE E REFLITA

Comparando cada unidade de medida do quadro anterior com a unidade de medida que está imediatamente à direita dela, o que é possível perceber?

Espera-se que os estudantes percebam que cada unidade de medida é 100 vezes maior que a unidade de medida que está imediatamente à sua direita.

Observação

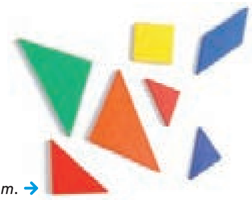
Para calcular a área de uma região, todas as dimensões devem estar nas mesmas unidades de medida. Caso isso não aconteça, escolhemos uma das unidades de medida e convertemos as demais para a unidade de medida escolhida. Se as medidas estiverem em centímetro (cm), a medida da área será dada em centímetro quadrado (cm^2); se estiverem em metro (m), a medida será dada em metro quadrado (m^2); e assim por diante.

- Para medir a área de uma região, enfatize o uso de uma unidade de medida e a verificação de quantas vezes a unidade de medida cabe na região que se pretende medir.
- Para medir determinada área, primeiro definimos uma unidade de medida. A unidade de medida padrão para a grandeza área é o metro quadrado, que corresponde à medida da área de um quadrado com 1 m de medida de lado.
- Se considerar adequado, reúna os estudantes em duplas para que respondam à questão sugerida no boxe *Pare e reflita* no Livro do Estudante. Complemente com a seguinte pergunta: Considerando cada unidade de medida do quadro e a unidade de medida que está imediatamente à sua esquerda, o que é possível perceber? Espera-se que os estudantes percebam que cada unidade de medida é equivalente a um centésimo da unidade de medida que está imediatamente à sua esquerda.

- É importante destacar que a simples manipulação do *tangram* e o conjunto de atividades não garantem a aprendizagem dos conceitos pelos estudantes, mas, sim, as relações que estabelecem entre conceitos e significados. O *tangram* é apenas um recurso que permite aos estudantes refletir sobre alguns aspectos do conceito que se quer desenvolver.
- Um dos conceitos que podemos trabalhar é o de figuras equivalentes, ou seja, figuras de mesma medida de área. Verifique se os estudantes compreendem que todas as figuras formadas (casa, peixe, barco, quadrado) têm a mesma medida de área, uma vez que são formadas pelas mesmas peças.
- Se julgar oportuno, disponibilize malhas quadriculadas para os estudantes e sugira a eles que desenhem uma figura geométrica, por exemplo, um trapézio, e, em seguida, a decomponham como nos exemplos desta página. Eles podem decompor o trapézio em triângulos e quadrado, por exemplo.

Figuras equivalentes

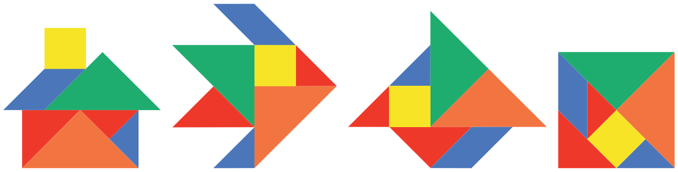
O *tangram* é um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças: 2 triângulos grandes, 2 triângulos pequenos, 1 triângulo médio, 1 quadrado e 1 paralelogramo.



Tangram. →

Anaken2012/Shutterstock.com/ID/BR

Utilizando todas as peças de um *tangram* sem sobrepô-las, é possível formar diversas figuras. Veja algumas delas.

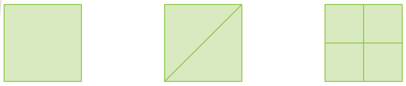


Ilustrações: ID/BR

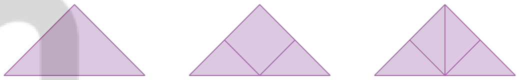
Observe que todas essas figuras, embora tenham formatos diferentes, são formadas pela composição das mesmas figuras – as peças do *tangram*. Assim, todas elas têm a mesma medida de área, que é igual à soma das medidas de área de cada uma das peças do *tangram*. Dizemos, então, que essas figuras são **figuras equivalentes**.

Do mesmo modo que podemos compor uma figura plana com outras figuras menores, também é possível decompô-la em outras figuras planas. Veja dois exemplos.

- Podemos decompor um quadrado, por exemplo, em dois triângulos ou em quatro quadrados menores.



- Podemos decompor um triângulo, por exemplo, em dois triângulos menores e um quadrado ou em quatro triângulos menores.



Há diversas maneiras de decompor uma figura plana. No entanto, lembre-se de que, ao decompor uma figura, a soma das medidas de área das figuras nas quais ela foi decomposta deve ser igual à medida da área da figura inicial, ou seja, a medida de área total das duas figuras deve ser a mesma.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Antes de iniciar o estudo do cálculo de medida de áreas, proponha aos estudantes atividades utilizando o *tangram*, para reforçar o conceito de figuras equivalentes.

Caso não exista um *tangram* disponível na escola, solicite aos estudantes que o desenhem em uma folha de papel avulsa e recortem as peças para fazer as sobreposições e responder às questões.

Ao acessar o *link* http://www.matematica.seed.pr.gov.br/arquivos/File/tangram_molde.jpg (acesso em: 1º jun. 2022), é possível obter um modelo de *tangram* construído em malha quadriculada.

Considerando o *tangram* ilustrado a seguir, proponha estas atividades:

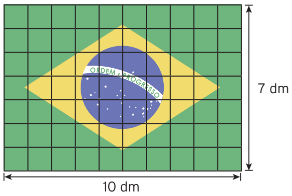
ID/BR

1. Use o triângulo verde para cobrir cada peça do *tangram* e escreva a quantidade de triângulos verdes que são necessários para cobrir:
   a) o triângulo laranja; 2 triângulos verdes.
   b) o quadrado roxo; 2 triângulos verdes.
   c) o triângulo azul; 4 triângulos verdes.
   d) o paralelogramo rosa. 2 triângulos verdes.

Área de um retângulo

No quarto de João há uma parede com algumas bandeiras penduradas. Nesta semana, João ganhou a bandeira do Brasil. Para verificar onde vai afixá-la, ele precisa determinar a medida da área ocupada pela bandeira.

Como a bandeira tem formato retangular, João mediu cada lado dela. Em seguida, quadriculou uma folha de papel vegetal usando quadradinhos de 1 dm de lado e colocou sobre o pôster. Veja.



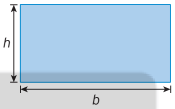
Grmarc/Shutterstock.com/ID/BR

João percebeu que poderia obter a medida da área do pôster usando uma multiplicação. Como a figura é formada por 7 linhas com 10 quadradinhos de 1 dm^2 ou por 10 colunas com 7 quadradinhos de 1 dm^2 cada um, a medida da área do retângulo é equivalente a 70 dm^2:

$$7 \cdot 10 = 10 \cdot 7 = 70$$

Assim, a área do pôster mede 70 dm^2.

Para determinar a medida da área de qualquer retângulo, basta multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura. Se definirmos a medida do comprimento como a medida da base b do retângulo, a medida da largura será a medida da altura h relativa a essa base, pois a largura é perpendicular ao comprimento.



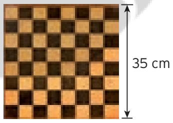
ID/BR

A medida da área de um retângulo cuja base mede b e cuja altura mede h é dada por:

$$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$$

Área de um quadrado

Flávia ganhou um tabuleiro de xadrez. Ela quer deixá-lo sobre a mesinha de centro da sala. Qual é a medida da área da mesinha que esse tabuleiro ocupará, sabendo que ele tem o formato de um quadrado de 35 cm de lado?



Mauro Carli/Shutterstock.com/ID/BR

↑ **Tabuleiro de xadrez.**

O quadrado é um caso particular de retângulo. Ou seja, para determinar a medida de sua área A, podemos fazer:

$$A = 35 \cdot 35 = 1\,225$$

Portanto, o tabuleiro ocupará uma área de medida 1 225 cm^2 na mesinha em que ele ficará.

A medida da área de um quadrado cujo lado mede ℓ é dada por:

$$A_{\text{quadrado}} = \ell^2$$

- Para que os estudantes estabeleçam e compreendam a expressão de cálculo da medida da área do retângulo e do quadrado, iniciamos o trabalho utilizando a decomposição dessas figuras em quadradinhos, de modo que eles possam contar os quadradinhos que cabem na figura.
- É importante que os estudantes percebam que a expressão para calcular a medida da área do retângulo é válida para qualquer retângulo.
- Reforce que todo quadrado é um retângulo cujas dimensões (comprimento e largura) são congruentes. Por esse motivo, a expressão para calcular a medida da área do quadrado é:

$$A_{\text{quadrado}} = \ell \cdot \ell = \ell^2$$

- Levar os estudantes a perceber que a expressão do cálculo da medida da área do retângulo pode ser utilizada para o cálculo da medida da área do quadrado permite que eles utilizem o conhecimento geométrico sobre as características dessas figuras, o que contribui para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Esse tipo de raciocínio também é utilizado para deduzir as expressões de cálculo da medida da área do triângulo, do paralelogramo, do trapézio e do losango.

DE OLHO NA BASE

Compreender como se estabelecem as fórmulas para calcular a medida da área de quadrados e retângulos contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA31**.

2. Analisando a atividade anterior, quais peças do *tangram* são equivalentes? O paralelogramo, o triângulo laranja e o quadrado.
3. Comparando as medidas de área, o triângulo verde corresponde a qual fração do triângulo azul? $\frac{1}{4}$
4. Comparando as medidas de área, o triângulo verde corresponde a qual fração do triângulo laranja? $\frac{1}{2}$

Com essas atividades, espera-se que os estudantes percebam que figuras de formas diferentes podem ter medidas de área iguais, enquanto figuras de mesma forma podem ter áreas com medidas diferentes.

- Recorde com os estudantes que um paralelogramo é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos. Os retângulos são paralelogramos cujos ângulos internos são retos.
- Podemos transformar o paralelogramo em retângulo por meio de decomposição e composição. Por isso, a expressão para calcular a medida da área do paralelogramo é a mesma que usamos para calcular a do retângulo:

$$A = b \cdot h$$

- Aproveite a atividade **1** para retomar a relação inversa entre a unidade de medida e a medida, isto é, quanto maior a unidade de medida, menor é o número que indica a medida, estudada no capítulo anterior. Ao trabalhar com a malha quadriculada para determinar a medida da área de figuras, permita que os estudantes realizem diversos processos para esse fim. Veja que, no item **a**, a unidade de medida escolhida é 1 quadradinho da malha; assim, os estudantes podem contar os quadradinhos que cabem em cada figura. Verifique se eles compreendem que a medida da área de dois triângulos corresponde à medida da área de um quadradinho ou, ainda, que a medida da área de um triângulo é a metade da medida da área de um quadradinho.

DE OLHO NA BASE

Compreender como se estabelece a expressão para calcular a medida da área de paralelogramos favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA31**.

Resolver problemas que envolvem cálculos de medida de áreas de figuras planas por meio de composição e decomposição de quadrados, triângulos e retângulos utilizando a ideia de figuras equivalentes contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA32**.

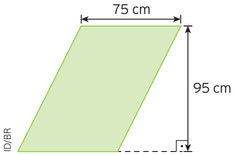

Danilo Souza/ID/BR

Área de um paralelogramo

Andreia tem como passatempo a pintura. O último quadro que ela pintou tem o formato de um paralelogramo. Como ela vai expor esse trabalho em uma feira de arte, precisa informar a medida da área do quadro para os organizadores do evento.

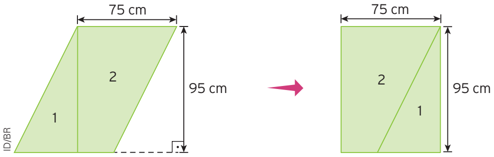
Como podemos calcular a medida da área do quadro feito por Andreia?

Para determinar essa medida, vamos desenhar um paralelogramo equivalente ao quadro. Observe.



ID/BR

Esse paralelogramo pode ser decomposto em um triângulo (1) e um trapézio (2). Ao deslocar a posição da figura 1, podemos compor um retângulo.



ID/BR

Para determinar a medida da área A de um retângulo, fazemos:

$$A = 75 \cdot 95 = 7\,125$$

A área do quadro e a área do retângulo são equivalentes. Logo, a área do quadro mede 7 125 cm^2.

A medida da área de um paralelogramo em que a base mede b e a altura mede h é igual à medida da área de um retângulo em que a base mede b e a altura mede h. Assim:

$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$$

ATIVIDADES

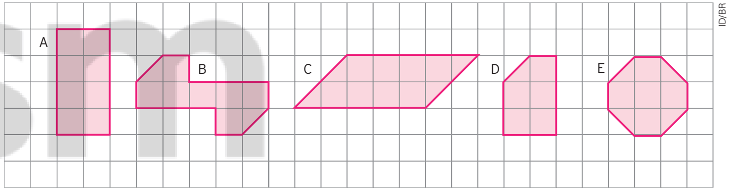
Responda sempre no caderno.

1. Determine a medida da área das figuras a seguir, de acordo com a unidade de medida indicada em cada item. **a) A: 8 ☐; B: 8 ☐; C: 10 ☐; D: $5\frac{1}{2}$ ☐; E: 7 ☐.**

b) A: 4 ☐☐; B: 4 ☐☐; C: 5 ☐☐; D: $2\frac{3}{4}$ ☐☐; E: $3\frac{1}{2}$ ☐☐.

c) A: 16 ◢; B: 16 ◢; C: 20 ◢; D: 11 ◢; E: 14 ◢.

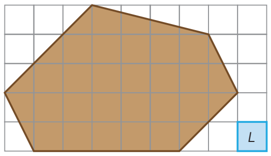
ID/BR



ID/BR

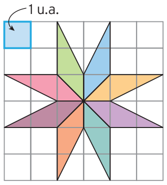
a) ☐ b) ☐☐ c) ◢

2. Um homem quer revestir o piso de seu quintal com lajotas azuis. Na figura, a região em marrom representa o quintal, e a região *L* representa uma lajota azul.



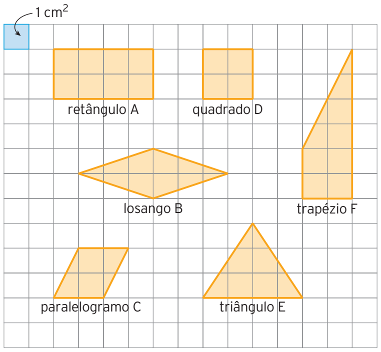
Supondo que não haja perdas, qual é a quantidade mínima de lajotas que ele deverá usar para revestir completamente o piso do quintal? **29 lajotas.**

3. Reproduza a ilustração a seguir em uma malha quadriculada regular.



Determine a medida da área dessa figura, considerando um quadradinho da malha como unidade de medida. **12 u.a.**

4. Calcule a medida da área de cada polígono a seguir, considerando que um quadradinho da malha quadriculada mede 1 cm^2.

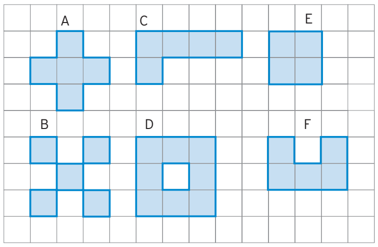


Agora, identifique os pares de figuras que têm a mesma medida de área.

4. A: 8 cm^2; B: 6 cm^2; C: 4 cm^2; D: 4 cm^2; E: 6 cm^2; F: 8 cm^2. Os pares de figuras com a mesma medida de área são: A e F; B e E; C e D.

5. Resposta pessoal. A, B, C e F são equivalentes.

5. Observe as figuras a seguir.



Ilustrações: ID/BR

Agora, escolha uma unidade de medida e, com ela, determine a medida da área de cada figura. Depois, escreva quais delas são equivalentes.

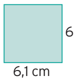
6. Calcule a medida da área de um retângulo com lados de medida 7 cm e 4 cm. **28 cm^2**

7. Determine a medida da área de um quadrado cujo lado mede 12 cm. **144 cm^2**

8. Calcule a medida da área de um paralelogramo cuja base mede 9 cm e cuja altura mede 4,5 cm. **40,5 cm^2**

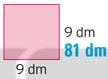
9. Calcule a medida da área das figuras a seguir.

a)



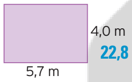
37,21 cm^2

d)



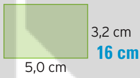
81 dm^2

b)



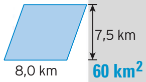
22,8 m^2

e)



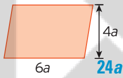
16 cm^2

c)



60 km^2

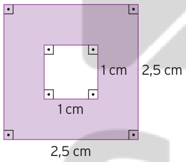
f)



24a^2

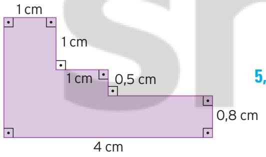
10. Calcule a medida da área das regiões roxas.

a)



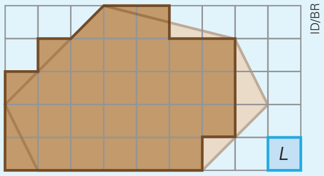
5,25 cm^2

b)



5,2 cm^2

- Na atividade **2**, ao contar as lajotas, os estudantes encontrarão 28 lajotas e meia. Observe como podemos compor os quadradinhos:



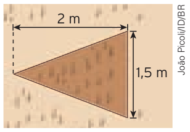
Enfatize que o enunciado pede a quantidade mínima, pois não são consideradas partes de uma lajota. Assim, o conjunto com o qual essa questão trabalha é o dos números inteiros; logo, a resposta esperada é 29, ou seja, o próximo número inteiro maior que 28,5.

- Caso os estudantes não conheçam a notação u.a., antes de realizarem a atividade **3**, explique a eles que ela significa unidade de medida de área.
- Na atividade **9**, aproveite para verificar se os estudantes apresentam dificuldade em operar com números na forma decimal.

- Para que os estudantes compreendam melhor o conceito de área de um triângulo, utilize dois triângulos, que podem ser os triângulos pequenos do *tangram*, para demonstrar que formam o paralelogramo. Utilizando os dois pares de triângulos do *tangram*, mostre que eles, dois a dois, formam quadrados. Se o *tangram* não estiver disponível na escola, uma alternativa é propor aos estudantes que copiem os triângulos desta página em uma folha de papel avulsa, recortem-nos e componham o paralelogramo com eles.
- Se julgar necessário, antes de iniciar a atividade **11**, explique aos estudantes que nos triângulos obtusângulos, como o triângulo do item **a**, há duas alturas que serão externas ao triângulo. (Ressaltamos que no 8º ano será trabalhado o conteúdo referente às alturas de um triângulo.)
- Na atividade **12**, caso os estudantes apresentem dificuldade, sugira que façam um desenho e representem nele as medidas da base e da altura. Nesse caso, a base mede 4 m e a altura, como é o dobro da base, mede 8 m.

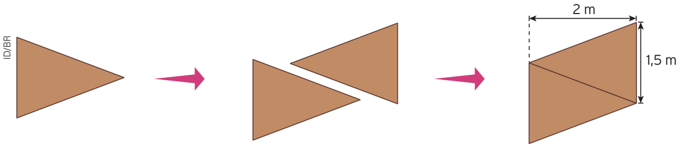
Área de um triângulo

Sofia separou uma região triangular de seu quintal para fazer uma horta. Para saber quantas mudas comprar, ela precisa determinar a medida da área dessa região. Observe o desenho que Sofia fez para representar a região destinada à horta.



João Picoli/ID/BR

Para calcular a medida da área de uma região triangular, primeiro duplicamos a figura do triângulo; depois, juntamos as figuras, a fim de obter um paralelogramo.



ID/BR

O paralelogramo formado tem a base e a altura iguais, respectivamente, à base e à altura do triângulo duplicado. Perceba que a área do triângulo corresponde à metade da área do paralelogramo.

Assim, Sofia pode calcular a medida da área *A* da região destinada à horta da seguinte maneira:

$$A = \frac{\text{medida da área do paralelogramo}}{2} = \frac{1{,}5 \cdot 2}{2} = 1{,}5$$

A área destinada à horta mede 1,5 m^2.

A medida da área de um triângulo cuja base mede *b* e cuja altura mede *h* é igual à metade da medida da área de um paralelogramo em que a base mede *b* e a altura mede *h*. Assim:

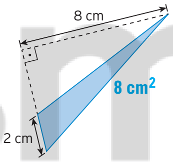
$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

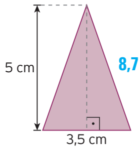
11. Calcule a medida da área dos seguintes triângulos:

a)



8 cm^2

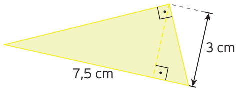
b)



8,75 cm^2

c)

11,25 cm^2

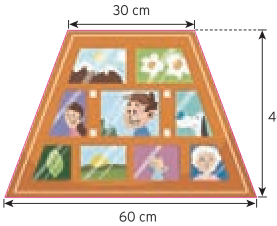


Ilustrações: ID/BR

12. Determine a medida da área de um triângulo cuja medida da altura é o dobro da medida da base, que mede 4 m. **16 m^2**

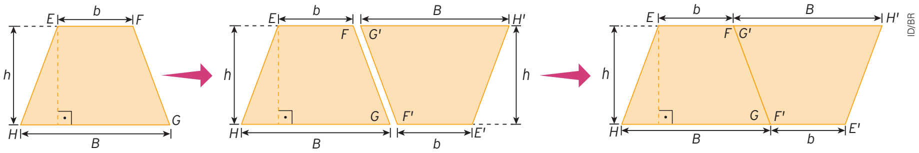
Área de um trapézio

Fernando ganhou um painel de fotos que lembra um trapézio e vai determinar a medida da área da parede que esse painel ocupará. Acompanhe.



João Picoli/ID/BR

Observe o trapézio *EFGH* representado a seguir. Ao duplicar a região trapezoidal, podemos compor um paralelogramo.



ID/BR

O paralelogramo formado tem base medindo $(B + b)$ e altura igual à altura do trapézio. Note que a área do trapézio corresponde à metade da área do paralelogramo formado.

Assim, a medida da área *A* que o painel de fotos ocupará na parede pode ser obtida da seguinte maneira:

$$A = \frac{\text{medida da área do paralelogramo}}{2} = \frac{(60 + 30) \cdot 40}{2} = \frac{90 \cdot 40}{2} = \frac{3600}{2} = 1800$$

Portanto, o painel de fotos ocupará uma área que mede 1 800 cm^2.

A medida da área de um trapézio em que a base maior mede *B*, a base menor mede *b* e a altura mede *h* é igual à metade da medida da área de um paralelogramo em que a base mede $(B + b)$ e a altura mede *h*. Assim:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

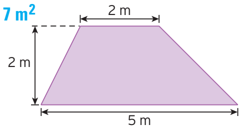
ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

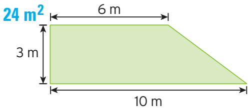
13. Determine a medida da área de um trapézio cujas bases medem 5 cm e 9 cm e cuja altura mede 4,5 cm. **31,5 cm^2**

14. Determine a medida da área dos trapézios a seguir, em metro quadrado.

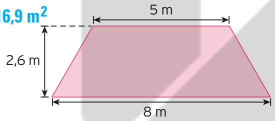
a) **7 m^2**



b) **24 m^2**



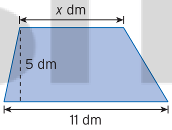
c) **16,9 m^2**



Ilustrações: ID/BR

15. Se a área de um trapézio retângulo mede 120 m^2 e seus lados paralelos medem 7,5 m e 4,5 m, calcule a medida do lado perpendicular aos lados paralelos. **20 m**

16. Qual deve ser o valor de *x* nesta figura para que a medida da área do trapézio seja 45 dm^2? **$x = 7$**

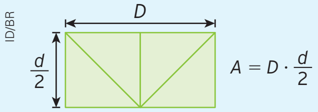


- Para determinar a medida da área de outras figuras geométricas, como o trapézio, utilize o processo de decomposição em triângulos ou quadriláteros, cuja medida de área os estudantes já saibam calcular.
- Caso considere adequado, proponha aos estudantes que desenhem o trapézio em uma folha de papel avulsa e recortem-no. Depois, eles devem duplicar o desenho, recortá-lo e juntar as duas partes. O material manipulável e a análise realizada podem contribuir significativamente para a construção do conceito.
- Reforce o uso dos parênteses na expressão do cálculo da medida da área do trapézio; verifique se os estudantes adicionam as medidas das bases para depois multiplicar pela medida da altura.
- Na atividade **15**, caso alguns estudantes desconheçam o que é um trapézio retângulo, incentive-os a descobrir, pela nomenclatura, associando-o a triângulos retângulos, por exemplo. Construir os conceitos, em vez de receber as informações prontas, permite aos estudantes desenvolver o pensamento matemático, tornando a aprendizagem significativa e sólida.

DE OLHO NA BASE

Estabelecer expressões de cálculo da medida da área do trapézio favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA31**.

- Comente com os estudantes que, para determinar a medida da área do losango, é possível decompô-lo em triângulos e compor um retângulo cuja medida da área eles já sabem calcular. Proponha o cálculo da medida da área do losango, desenhando a figura em uma folha de papel avulsa, decompondo-o em 4 triângulos, recortando a figura nas diagonais e compondo um retângulo de base D e altura $\frac{d}{2}$.



- Nos itens **b** e **c** da atividade **17**, verifique se os estudantes percebem que as medidas dadas referem-se à metade da medida de cada diagonal.

DE OLHO NA BASE

Resolver problemas de cálculo de medida da área do losango por meio da decomposição da figura em retângulos ou triângulos, lidando com a equivalência entre áreas, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA32**.

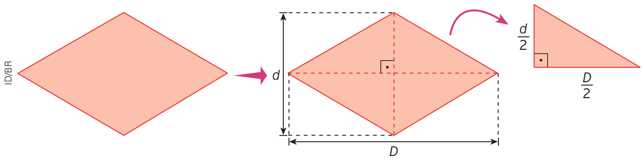
Área de um losango


MaxCab/Shutterstock.com/ID/BR

↑ Colcha de retalhos.

Marina confecciona colchas de retalhos e recebeu uma encomenda para costurar uma colcha com retalhos que lembram losangos, todos com as mesmas dimensões. Para saber a quantidade de tecido necessária para essa encomenda, ela vai calcular a medida da área de um losango.

Para determinar a medida da área do losango, podemos decompô-lo em figuras cuja área já sabemos medir. Observe que, ao traçar as diagonais D e d, o losango fica decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes. Então, a área do losango equivale a quatro vezes a área de um desses triângulos.



$$A = 4 \cdot \left(\frac{\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{D \cdot d}{8} = \frac{D \cdot d}{2}$$

Marina mediu as diagonais do molde e obteve 20 cm e 15 cm. Assim, ela pode obter a medida da área A de cada losango da seguinte maneira:

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{20 \cdot 15}{2} = \frac{\cancel{20}^{10} \cdot 15}{\cancel{2}_1} = 10 \cdot 15 = 150$$

Portanto, Marina utilizará 150 cm^2 de tecido para cada um dos losangos.

A medida da área de um losango em que a diagonal maior mede D e a diagonal menor mede d é igual a quatro vezes a área de um triângulo cuja base mede $\frac{D}{2}$ e cuja altura mede $\frac{d}{2}$. Assim:

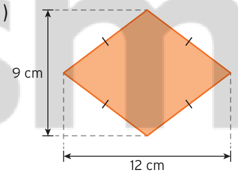
$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

ATIVIDADE

Responda sempre no caderno.

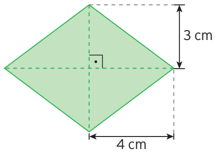
17. Calcule a medida da área dos losangos a seguir.

a)



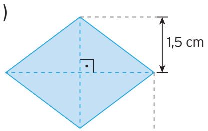
54 cm^2

b)



24 cm^2

c)



6 cm^2

Ilustrações: ID/BR

OUTRAS FONTES

PALHANO, A. A. V. Aprendendo geometria plana com o uso do GeoGebra. *In*: *Os desafios da escola pública paraense na perspectiva do professor PDE*. Produções Didático-Pedagógicas. Curitiba: SEED, 2013. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_ufpr_mat_pdp_ana_aparecida_vieira_palhano.pdf. Acesso em: 1º jun. 2022.

Material auxiliar no ensino e na aprendizagem dos conceitos de área e perímetro utilizando *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra. Entre as atividades desenvolvidas destaca-se a de decomposição e composição de figuras geométricas utilizando o *tangram*.

Volumes

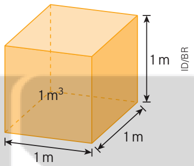
Todos os anos, milhões de toneladas de produtos são movimentadas nos portos brasileiros e de todo o mundo. Em geral, esses produtos são transportados em contêineres. Você já viu um contêiner? Tem ideia do espaço que ele ocupa? **Respostas pessoais.**


AlanMorris/Shutterstock.com/ID/BR

← **Contêineres empilhados no terminal de Belfast Harbour, Reino Unido. Foto de 2021.**

Um contêiner lembra um bloco retangular, e suas dimensões variam de acordo com o modelo. O espaço ocupado pelos contêineres está associado a uma grandeza chamada **volume**.

A unidade de medida padrão para volume é o **metro cúbico** (m^3). Essa unidade de medida, assim como a unidade de medida padrão para área, é derivada da unidade de medida de comprimento metro e corresponde ao volume ocupado por um cubo cujas arestas medem 1 m.



ID/BR

O metro cúbico também tem múltiplos e submúltiplos.

Múltiplos			Unidade de medida padrão	Submúltiplos		
Quilômetro cúbico (km^3)	Hectômetro cúbico (hm^3)	Decâmetro cúbico (dam^3)	**METRO CÚBICO (m^3)**	Decímetro cúbico (dm^3)	Centímetro cúbico (cm^3)	Milímetro cúbico (mm^3)
1 km^3 equivale a 1 000 000 000 m^3	1 hm^3 equivale a 1 000 000 m^3	1 dam^3 equivale a 1 000 m^3	**1 m^3**	1 dm^3 equivale a $\frac{1}{1\,000}$ m^3	1 cm^3 equivale a $\frac{1}{1\,000\,000}$ m^3	1 mm^3 equivale a $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$ m^3

Observação

Para calcular a medida do volume de um objeto, todas as dimensões devem estar nas mesmas unidades de medida. Caso isso não aconteça, escolhemos uma das unidades de medida e convertemos as demais para a unidade de medida escolhida. Se as medidas estiverem em centímetro (cm), a medida do volume será dada em centímetro cúbico (cm^3); se estiverem em metro (m), a medida será dada em metro cúbico (m^3); e assim por diante.

PARE E REFLITA

Comparando cada unidade de medida no quadro anterior com a unidade de medida que está imediatamente à direita dela, o que é possível perceber?

Espera-se que os estudantes percebam que cada unidade de medida é 1 000 vezes maior que a unidade de medida que está imediatamente à sua direita.

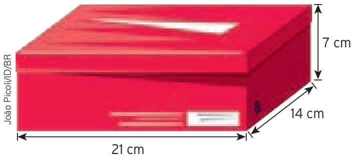
VOLUMES

- Pergunte aos estudantes o que eles entendem por volume e verifique se eles compreendem que essa grandeza está associada ao espaço ocupado por um objeto.
- Se julgar necessário, retome a diferença entre volume e capacidade. Enquanto volume refere-se ao espaço que um objeto ocupa, capacidade refere-se ao volume interno, ou seja, espaço interno de um recipiente que pode ser preenchido.
- Lembre os estudantes de que a unidade de medida metro cúbico corresponde ao espaço ocupado por um cubo cujas arestas medem 1 metro.
- Observe se os estudantes compreendem que cada unidade de medida de volume é equivalente a 1 000 vezes a unidade de medida que está imediatamente à sua direita e a um milésimo da unidade de medida que está imediatamente à sua esquerda.

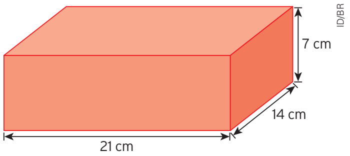
- Explique aos estudantes que bloco retangular é um sólido com faces retangulares, também chamado de paralelepípedo.
- O cálculo da medida do volume do paralelepípedo ou bloco retangular é abordado inicialmente pela decomposição em cubinhos. Avalie a pertinência de usar nesse trabalho o Material Dourado, que também pode auxiliar nessa fase do aprendizado. Os cubinhos do Material Dourado permitem a construção de blocos retangulares de tamanhos variados para o estudo de volumes.
- Caso considere oportuno, traga para a sala de aula embalagens que lembrem blocos retangulares (caixas de sapato, de creme dental, etc.) e peça aos estudantes que estimem as medidas de seus volumes. Uma sugestão é essa estimativa ser feita com o uso dos cubinhos do Material Dourado. Meça o comprimento, a largura e a altura da caixa, calcule o produto dessas medidas e compare com as estimativas.

Volume de um bloco retangular

Estela trabalha com entregas e inclui no preço do frete o espaço ocupado pelo objeto. Para entregar um par de chuteiras, ela precisa calcular a medida do volume da caixa, que lembra um bloco retangular. Veja.

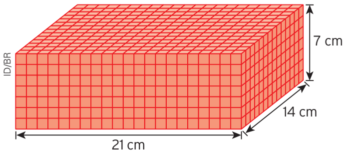


João Picoli/ID/BR



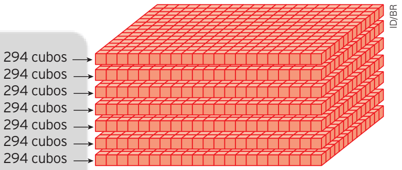
ID/BR

Para determinar a medida do volume da caixa, Estela pensou em representá-la utilizando cubos medindo 1 cm^3, como mostra a figura a seguir.



ID/BR

Com essa representação, Estela percebeu que em cada camada havia 14 linhas com 21 cubos em cada. Ou seja, havia 294 cubos em cada camada ($14 \cdot 21 = 294$). Como são 7 camadas com 294 cubos em cada uma, então havia 2 058 cubos no total ($7 \cdot 294 = 2058$).

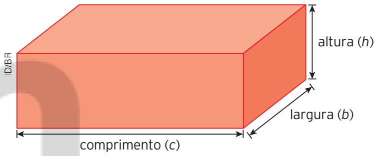


ID/BR

$7 \cdot 294 = 2058$

Então, Estela concluiu que a medida do volume da caixa do par de chuteiras é 2 058 cm^3.

Você percebeu que a medida encontrada por Estela é igual ao produto da medida do comprimento pela medida da largura e pela medida da altura do bloco retangular?



ID/BR

$21 \cdot 14 \cdot 7 = 2058$

A medida do volume de um bloco retangular é igual ao produto das medidas do comprimento *c*, da largura *b* e da altura *h* desse paralelepípedo.

$$V_{\text{bloco retangular}} = c \cdot b \cdot h$$

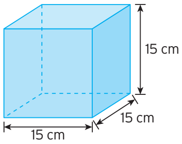
Volume de um cubo

Na casa de Tadeu, há um porta-cápsulas de café com o formato de um cubo de 15 cm de lado. Vamos calcular a medida do volume desse porta-cápsulas?


Horiyan/Shutterstock.com/ID/BR

← **Porta-cápsulas de acrílico.**

O cubo é um caso particular de bloco retangular, pois tem medidas iguais de comprimento, de altura e de largura. Assim, podemos obter a medida de seu volume elevando o valor de sua aresta à terceira potência.



ID/BR

$$15 \cdot 15 \cdot 15 = 15^3 = 3375$$

Portanto, o porta-cápsulas de café de Tadeu mede 3375 cm³ de volume.

A medida do volume de um cubo é igual à medida de sua aresta ℓ elevada à terceira potência.

$$V_{cubo} = \ell^3$$

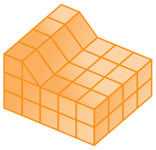
ATIVIDADES

Responda sempre no caderno.

18. Considere este bloco como unidade de medida de volume.

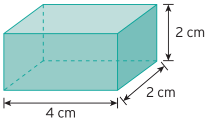

1 u.v.

Qual é a medida do volume da pilha de blocos a seguir, se não há blocos escondidos atrás da pilha? **46 u.v.**


Ilustrações: ID/BR

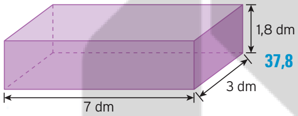
19. Determine a medida do volume de cada bloco retangular a seguir.

a)



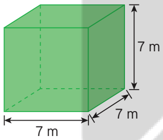
16 cm³

b)



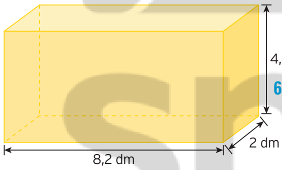
37,8 dm³

c)



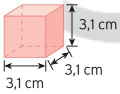
343 m³

d)



68,88 dm³

e)



29,791 cm³

- Comente com os estudantes que cubo é um bloco retangular cujas faces são quadradas. As medidas do comprimento, da largura e da altura do cubo são congruentes. Dessa forma, a medida do seu volume pode ser determinada pela medida da sua aresta elevada à terceira potência.
- Antes de iniciar as atividades, verifique se os estudantes entendem a notação u.v. como unidade de volume.
- Nos itens **b**, **d** e **e** da atividade **19**, verifique se os estudantes apresentam dificuldades em operar com os números na forma decimal. Caso julgue interessante, apresente uma alternativa ao uso de números na forma decimal realizando a transformação de unidades. Por exemplo, no bloco retangular do item **d**, temos:
  - 4,2 dm correspondem a 42 cm;
  - 8,2 dm correspondem a 82 cm;
  - 2 dm correspondem a 20 cm.

  Assim, é possível calcular a medida do volume do bloco retangular, sabendo que ela será igual a 68 880 cm³, pois $42 \cdot 20 \cdot 82 = 68\,880$.

  Como as medidas das arestas estão em decímetro e 1 decímetro cúbico é equivalente a 1 000 centímetros cúbicos (conforme visto no quadro de múltiplos e submúltiplos do metro cúbico), para obter a medida do volume em decímetro cúbico deve-se dividir a medida por 1 000. A medida do volume será 68,88 dm³, pois:

  $$68\,880 : 1\,000 = 68{,}88$$

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

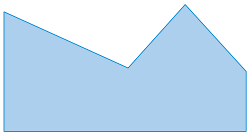
- Nesta seção, de maneira contextualizada, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo do capítulo.
- Peça aos estudantes que reproduzam no caderno as diferentes maneiras de decomposição apresentadas nas alternativas da atividade **1**.
- Oriente os estudantes a escrever a expressão do item **c** da atividade **3**. Espera-se que eles escrevam:

  $16 \cdot 38 + 15 \cdot 17 = 863$

  ou uma variação dessa expressão, uma vez que a propriedade comutativa da adição e/ou da multiplicação poderá ser usada.
- Para resolver a atividade **5**, inicialmente podemos dividir 144 por 8, encontrando a medida do comprimento do retângulo: 18 cm. Para calcular a medida do perímetro, basta adicionar as medidas dos quatro lados do retângulo, obtendo 52 cm $(8 + 8 + 18 + 18 = 52)$.
- Depois de resolverem a atividade **6** utilizando a decomposição de figuras, peça aos estudantes que a resolvam utilizando também as expressões de cálculo da medida da área do trapézio e do paralelogramo e comparem os dois valores obtidos para cada item.
- Na atividade **7**, além de os estudantes fazerem os desenhos para visualizar a situação apresentada, verifique se eles percebem que devem iniciar pelas informações do retângulo. A área do retângulo mede 48 cm², então o losango também tem 48 cm² de medida de área.

DIVERSIFICANDO

1. Observe a figura a seguir.



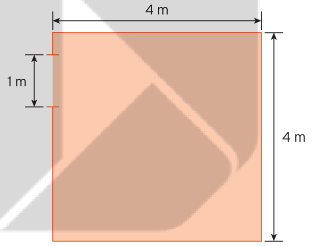
Escreva no caderno qual alternativa indica as figuras geométricas nas quais essa figura poderia ser decomposta. **Alternativa e.**

a) Um trapézio, um triângulo e um retângulo.
b) Quatro quadrados e dois triângulos.
c) Dois retângulos e dois triângulos.
d) Dois quadrados, dois triângulos e um retângulo.
e) Todas as alternativas anteriores.

2. Com o auxílio de uma calculadora, resolva o problema a seguir.

O terreno de uma chácara tem formato retangular e sua área mede 57 456 m^2. Sabendo que seu comprimento mede 342 m, quanto mede a largura desse terreno? **168 m**

3. Um arquiteto está planejando a reforma de um quarto e precisa calcular a quantidade de rodapés e de lajotas que deverá comprar. O quarto tem a forma de um quadrado cujo lado mede 4 m e uma porta cuja largura mede 1 m.



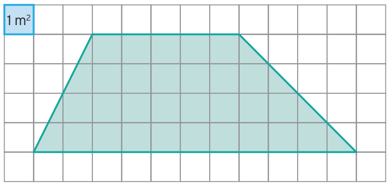
a) Quantos metros quadrados de lajota são necessários? **16 m^2**
b) Quantos metros de rodapé devem ser comprados? Lembre-se de que o rodapé não será colocado na região da porta. **15 m**
c) Sabendo que 1 m^2 de lajota custa R$ 38,00 e que 1 m de rodapé custa R$ 17,00, qual é o valor mínimo que será gasto com rodapés e lajotas? **R$ 863,00**

4. Mário fez uma horta em um terreno de formato retangular medindo 13 m de comprimento por 7 m de largura. Ele plantou cenoura em uma área retangular de medidas 6 m por 7 m, tomate em uma área retangular que mede 4 m por 7 m e repolho na parte restante. Quantos metros quadrados Mário utilizou para plantar repolho? **21 m^2**

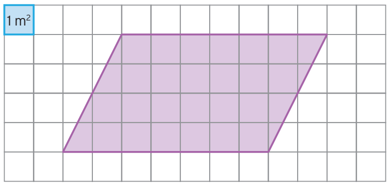
5. A medida do perímetro de um polígono é a soma das medidas de todos os seus lados. Sabendo disso, resolva o problema do quadro a seguir.

> Um retângulo de 8 cm de medida de altura tem a mesma área que um quadrado cujo lado mede 12 cm. Calcule a medida do perímetro desse retângulo. **52 cm**

6. Suponha que cada quadradinho das malhas quadriculadas a seguir meça 1 m^2 de área.



trapézio



paralelogramo

Ilustrações: ID/BR

Respostas pessoais.

a) Estime a medida da área de cada figura.
b) Verifique em quantos triângulos e retângulos cada figura pode ser decomposta.
c) Determine a medida da área de cada figura. **Trapézio: 32 m^2; paralelogramo: 28 m^2.**

7. Uma das diagonais de um losango mede 12 cm e a medida de sua área é igual à de um retângulo cujos lados medem 8 cm e 6 cm. Determine a medida da outra diagonal do losango. **8 cm**

6. b) As duas figuras podem ser decompostas em retângulos e em triângulos.

ESTRATÉGIAS DE APOIO

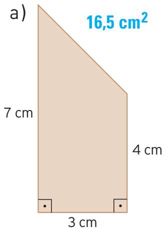
Para auxiliar os estudantes que ainda têm dificuldade em resolver as atividades com cálculo de medida de área, disponibilize para eles malha quadriculada e oriente-os a desenhar a figura geométrica quando ela não fizer parte do enunciado da situação-problema, pois a representação gráfica é importante e auxilia na estruturação da resolução e na aplicação do conceito.

Se possível, trabalhe com cores diferentes ao desenhar as decomposições das figuras na lousa, pois esse recurso facilita a visualização das partições das figuras. Sempre que possível, mostre aos estudantes diferentes modos de decompor as figuras.

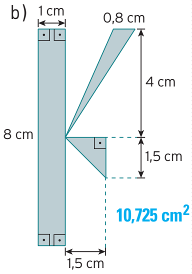
Evite que os estudantes utilizem as expressões de maneira mecanizada; atribua significado a elas correlacionando os retângulos e os triângulos com as decomposições que as originaram.

8. Calcule a medida da área das regiões indicadas a seguir.

a) **16,5 cm^2**



b)

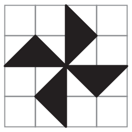


10,725 cm^2

9. Escreva no caderno a alternativa correta.

(Obmep) A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadradinhos iguais.

A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado? **Alternativa c.**



a) $\frac{1}{2}$

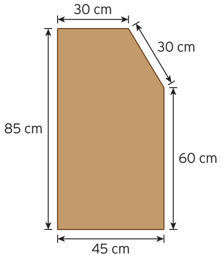
b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{8}$

e) $\frac{1}{16}$

10. Considere a ilustração a seguir.



Respostas pessoais.

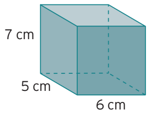
a) Com um colega, elabore um problema que utilize essa figura e que envolva o cálculo da medida da área.

b) Troquem de caderno com outra dupla de colegas para que eles resolvam o problema criado por vocês e vocês resolvam o problema que eles criaram.

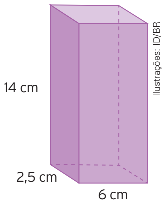
11. Juntas, as diagonais de um losango medem 45 m. Sabendo que uma diagonal é o dobro da outra, calcule a medida da área desse losango. **225 m^2**

12. Observe os dois modelos de embalagens de papelão na forma de bloco retangular, recomendados por uma empresa e representados nesta figura.

a) Embalagem 1: 210 cm^3; embalagem 2: 210 cm^3.



↑ Embalagem 1.



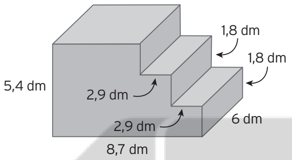
↑ Embalagem 2.

Ilustrações: ID/BR

a) Determine a medida do volume de cada embalagem.

b) Qual embalagem necessita de maior quantidade de papelão para ser produzida? **A embalagem 2.**

13. Na entrada de uma casa, há uma escada de concreto com três degraus, conforme mostra a figura a seguir.



Determine a medida do volume de concreto usado para fazer essa escada. **187,92 dm^3**

14. João recebeu uma encomenda de um aquário em formato de bloco retangular de 36 dm^3 e altura medindo 4 dm. Quais são as possíveis medidas do comprimento e da largura desse aquário, sabendo que essas medidas precisam ser expressas em decímetros inteiros? **9 dm e 1 dm; 1 dm e 9 dm; 3 dm e 3 dm.**

15. Considere a situação descrita no quadro.

> As dimensões de um elevador de carga que tem formato de bloco retangular são 2 m, 2 m e 3 m.

Agora, com um colega, elabore um problema com as informações dadas cuja resolução envolva o cálculo da medida de volume. Depois, troquem de caderno com outra dupla para que os colegas respondam às perguntas criadas por vocês e vocês respondam às perguntas que eles criaram. Atenção! Vocês podem incrementar a situação com outros dados. **Resposta pessoal.**

- No item **a** da atividade **8**, os estudantes podem aplicar diretamente a expressão do cálculo da medida da área do trapézio. Já no item **b**, podem calcular as três medidas de área separadamente e por fim adicioná-las.
- Na atividade **9**, verifique se os estudantes perceberam que o quadrado está dividido em 16 quadradinhos e que a região sombreada é formada por 8 triângulos congruentes, cada um com medida de área igual à metade da área de um quadradinho.
- Para resolver a atividade **14**, os estudantes deverão dividir 36 dm^3 por 4 dm, obtendo 9 dm^2. Verifique se eles entendem que 9 dm^2 representa a medida da área da base do aquário. Retome a ideia de divisores de um número natural, já que uma medida não pode ser negativa e as medidas das dimensões do aquário devem ser inteiras, conforme o enunciado.

DE OLHO NA BASE

A atividade **10**, que envolve a elaboração e a resolução de problemas relacionados ao cálculo da medida da área, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA32**.

Já a atividade **15**, que envolve a elaboração e a resolução de um problema relacionado ao cálculo da medida de volume, favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA30**.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, o tema abordado são os impostos de uma nota fiscal ou de um cupom fiscal. Convide os estudantes a pensar, com base no texto e nas perguntas, sobre o papel dos impostos em uma sociedade. Estimule-os de modo que essa discussão esteja conectada com o contexto em que vivem: escola, hospitais, praças, ruas, etc.
- É importante que os estudantes entendam que os impostos são tributos. Além dos impostos, há outros tributos cobrados no Brasil, os quais podem ser divididos em taxas, impostos e contribuições sociais. Dados estatísticos também são muito reveladores sobre a questão tributária no Brasil e podem contribuir para a discussão sobre a carga tributária brasileira quando comparada com a de outros países.

DE OLHO NA BASE

Refletir sobre este tema auxilia os estudantes a valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social e cultural, a entender e explicar a realidade, a continuar aprendendo e a colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 1**.

Além disso, a reflexão sobre o tema possibilita aos estudantes argumentar, com base em fatos, dados e informações confiáveis, formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 7**.

Responsabilidade

O assunto tratado nesta seção possibilita a aproximação com o valor responsabilidade, tanto no âmbito público, no sentido de o dinheiro público ser utilizado em benefícios para o povo, quanto no âmbito individual, no que concerne ao dever de cada cidadão de estar atento a esses fatos e cobrar as autoridades competentes quando o uso do dinheiro público não acontecer da maneira correta.

AMPLIANDO HORIZONTES

O mistério do cupom fiscal: o que são os impostos e para que servem

O que um delicioso lanche, uma roupa bem legal, o combustível do carro da família e seu plano de internet têm em comum? Pare e pense um pouco.

Pode haver muita coisa em comum, mas uma delas é um documento chamado nota fiscal ou cupom fiscal. Trata-se daquele papel que você, geralmente, recebe depois de realizar uma compra.

Você já reparou no que vem escrito no cupom fiscal? Além de uma série de informações sobre a empresa que comercializou o produto que você comprou, o cupom fiscal traz o preço do produto. Uma parte desse preço é formada por impostos. Você sabe o que são impostos?

Imposto é um tipo de tributo, ou seja, algo que o governo cobra de pessoas e de empresas para arrecadar dinheiro a fim de realizar diversas ações. Quando bem empregados, os impostos são usados para construir estradas, escolas e hospitais, fazer redes de saneamento básico, oferecer segurança pública e pagar os salários dos funcionários públicos, por exemplo.

Assim, no preço de um produto está embutida uma série de tributos. E a Matemática pode nos ajudar a entender o peso desses impostos no preço final de mercadorias e serviços.

Observe o exemplo na ilustração.

Você percebeu que a Matemática pode contribuir para que as pessoas entendam como os impostos são calculados e quanto elas pagam de imposto? Saber quanto se paga de imposto possibilita que cada cidadão brasileiro cobre dos governantes a aplicação adequada desses tributos.

Wandson Rocha/ID/BR

OUTRAS FONTES

A história dos tributos no Brasil. Grupo de Educação Fiscal Estadual de São Paulo. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=EM_gru0GRn4. Acesso em: 1º jun. 2022.

Vídeo sobre a história dos tributos no Brasil.

Almanaque da turma do Leãozinho. Receita Federal. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/educacao-fiscal/educacao-fiscal/publicacoes/revistinhas/almanaque-turma-do-leaozinho.pdf/view. Acesso em: 1º jun. 2022.

Almanaque sobre educação fiscal.

Para refletir

Responda sempre no caderno.

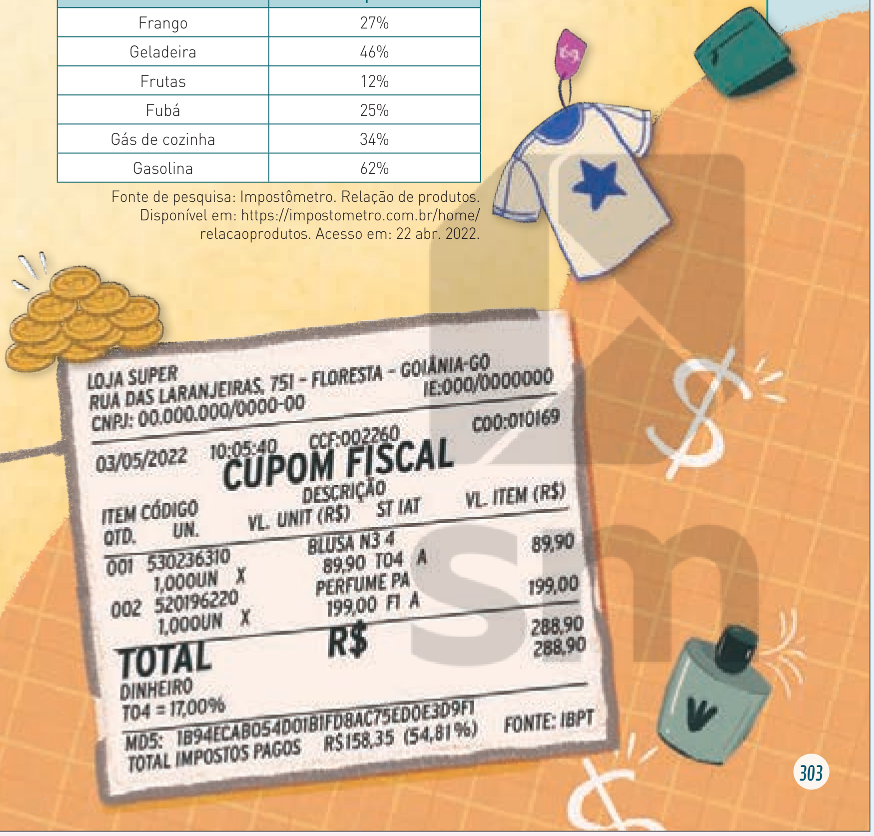
Reúna-se com um colega para responder às questões a seguir. **Consulte as respostas neste manual.**

1. Vocês acham que suas famílias pagam muito, pagam pouco ou pagam um valor justo de impostos, incluindo os que estão embutidos nos preços dos produtos e serviços? Expliquem suas respostas.
2. Citem os impostos que vocês conhecem.
3. Acessem o impostômetro no *site* https://impostometro.com.br (acesso em: 22 abr. 2022). Qual foi o valor pago pelos brasileiros em impostos neste ano, até este momento, segundo o impostômetro?
4. Celeste comprou uma geladeira por R$ 2 000,00. Cláudio foi a um supermercado e comprou 2 kg de frango por R$ 14,00 o quilograma e 1 kg de maracujá por R$ 9,00 o quilograma, e ainda passou no posto de gasolina e encheu o tanque de seu carro, pagando R$ 420,00. Quantos reais em impostos cada uma dessas pessoas pagou nas respectivas compras? Utilize a tabela a seguir como referência para realizar os cálculos.

Relação de produtos e percentual aproximado de imposto

Produto	Imposto
Frango	27%
Geladeira	46%
Frutas	12%
Fubá	25%
Gás de cozinha	34%
Gasolina	62%

Fonte de pesquisa: Impostômetro. Relação de produtos. Disponível em: https://impostometro.com.br/home/relacaoprodutos. Acesso em: 22 abr. 2022.



LOJA SUPER
RUA DAS LARANJEIRAS, 751 – FLORESTA – GOIÂNIA-GO
CNPJ: 00.000.000/0000-00 IE:000/0000000
03/05/2022 10:05:40 CCF:002260 COO:010169
CUPOM FISCAL
ITEM CÓDIGO DESCRIÇÃO
QTD. UN. VL. UNIT (R$) ST IAT VL. ITEM (R$)
001 530236310 BLUSA N3 4
1,000UN X 89,90 T04 A 89,90
002 520196220 PERFUME PA
1,000UN X 199,00 F1 A 199,00
TOTAL R$ 288,90
DINHEIRO 288,90
T04 = 17,00%
MD5: 1B94ECAB054D01B1FD8AC75ED0E3D9F1
TOTAL IMPOSTOS PAGOS R$158,35 (54,81%) FONTE: IBPT

RESPOSTAS

DE OLHO NA BASE

Ao se reunir em duplas e discutir as questões propostas, os estudantes estão exercitando a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades sem preconceitos de qualquer natureza, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 9**.

1. Resposta pessoal. O objetivo aqui é convidar os estudantes a pensar sobre o quanto suas famílias pagam de impostos. Listar as impressões e iniciar um debate podem ser estratégias muito enriquecedoras, pois a percepção nessa fase da vida sobre impostos pode ser muito pequena ou nenhuma. Nesse caso, será necessária sua mediação, com o uso de gráficos sobre o assunto para dar suporte às discussões.
2. Algumas respostas possíveis: IRPF (Imposto de Renda de Pessoa Física), IPVA (Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores), IPTU (Imposto Predial e Territorial Urbano), ICMS (Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços), IPI (Imposto sobre Produtos Industrializados), taxa de iluminação pública, taxa de bombeiro, taxa de cartório, CSLL (Contribuição Social sobre o Lucro Líquido), etc. Anote na lousa as respostas dadas pelos estudantes e proponha que comparem a quantidade de impostos pagos com a qualidade dos serviços oferecidos à população em geral.
3. A resposta depende da data em que a atividade for realizada. Por exemplo, de 1º/1/2022 a 1º/6/2022, foram pagos aproximadamente 1,2 trilhão de reais em impostos. Se possível, realize essa atividade coletivamente com os estudantes na sala de informática da escola.
4. Celeste pagou R$ 920,00 em impostos e Cláudio, R$ 269,04.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, os estudantes terão a oportunidade de refletir se há alguma relação entre duas variáveis: o tempo que uma pessoa leva para chegar à escola e o meio de transporte utilizado por ela. Converse com eles que um dos primeiros passos para correlacionar duas ou mais variáveis é por meio da coleta de informação, utilizando, por exemplo, um questionário.

PARA COMEÇAR

- Leia o texto inicial com os estudantes e verifique as hipóteses deles sobre a resposta do problema proposto, ou seja, se há correlações entre meio de transporte e tempo gasto no percurso.

PROCEDIMENTOS

- Na *Parte I*, organize a turma em grupos de quatro estudantes. Informe-os de que nessa etapa eles vão produzir o questionário da pesquisa, portanto, têm de planejar o tipo de pergunta que vai ser aplicada aos entrevistados. Verifique se as perguntas têm características de um questionário fechado, que possibilita respostas diretas e objetivas do entrevistado. Dessa forma, a coleta de dados será mais fácil e rápida de contar. As questões devem ser discutidas com toda a turma com o objetivo de elaborar um questionário final para todos os grupos. Para auxiliá-los, peça a um integrante de cada grupo que responda às questões a fim de que os estudantes percebam se as perguntas precisam ser revistas.
- Na *Parte II*, peça aos estudantes que reproduzam as questões em um editor de texto e imprimam a quantidade necessária para o desenvolvimento dessa etapa. Se não for possível imprimir, eles podem reproduzir à mão a quantidade necessária.
Explique aos estudantes que eles devem seguir algumas normas de ética em uma entrevista. Por exemplo, respeitar se o entrevistado não autorizar a divulgação de informações pessoais, não quiser responder a perguntas nem fazer gravações de voz. Ressalte a eles que é importante identificar-se e saudar o entrevistado antes de aplicar o questionário.

INVESTIGAR

De casa para a escola: quanto tempo leva?

Para começar

O tempo que uma pessoa leva para ir de um lugar a outro pode variar de acordo com diversos fatores. Será que o meio de transporte é um deles? Você e os colegas vão investigar se há alguma relação entre o meio de transporte utilizado e o tempo gasto para chegar à escola. Depois, vocês vão compartilhar em um cartaz as informações obtidas do questionário.

O PROBLEMA

O meio de transporte utilizado pelos colegas para ir de casa à escola pode ter alguma relação com o tempo que eles gastam nesse percurso?

A INVESTIGAÇÃO

- **Prática de pesquisa:** pesquisa de campo.
- **Instrumento de coleta:** questionário.

MATERIAIS

- caneta ou lápis e borracha
- caderno ou folha de papel avulsa
- computador ou *tablet* com planilha eletrônica instalada (*software* de uso livre)

Procedimentos

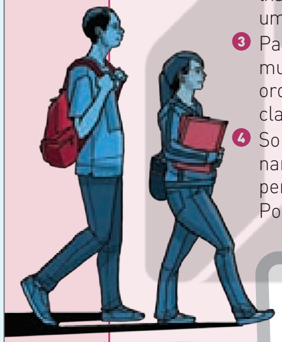
Parte I – Produção do questionário

❶ Para fazer essa investigação, vocês vão preparar e aplicar um questionário.

❷ Existem diferentes tipos de questionário. O **questionário aberto** é composto de perguntas às quais o entrevistado responde com suas palavras, ou seja, as possibilidades de resposta não são limitadas. Já o **questionário fechado** é produzido com perguntas de múltipla escolha, que limitam as possibilidades de resposta. Para a investigação desta seção, produzam um questionário fechado.

❸ Para isso, vocês devem considerar o tema que pretendem pesquisar e, então, formular perguntas de acordo com a análise necessária. Além disso, é preciso definir a ordem das perguntas e verificar se as perguntas e as possibilidades de resposta estão claras e não são ambíguas.

❹ Sob a orientação do professor, organizem-se em grupos de quatro integrantes e definam as perguntas e as possibilidades de resposta. Lembrem-se de que a escolha das perguntas e das possibilidades de resposta pode interferir no resultado da pesquisa. Por isso, fiquem atentos a essa etapa.



Observe alguns exemplos de perguntas e de possibilidades de respostas de um questionário fechado. →

Ⓐ Qual é a medida da distância da sua casa até a escola?

☐ Menos de 1 km. ☐ Entre 1 km e 3 km. ☐ Mais de 3 km.

Ⓑ Em qual horário você costuma sair de casa para chegar à escola?

☐ Antes das 6 h. ☐ Entre 6 horas e 6 h 30 min. ☐ Outro.

Ⓒ Qual(is) meio(s) de transporte você utiliza para chegar à escola?

☐ Carro. ☐ Ônibus. ☐ Transporte escolar. ☐ A pé. ☐ Outro(s).

Ⓓ Qual é o tempo médio que você leva para chegar à escola?

☐ Menos de 15 min. ☐ Entre 15 min e 30 min. ☐ Entre 30 min e 60 min. ☐ Mais de 60 min.

QUESTÕES PARA DISCUSSÃO

- Após as etapas de procedimentos, organize novamente a turma em uma roda de conversa para compartilhar as opiniões e experiências vividas nas atividades propostas desta seção.

1. Auxilie os estudantes a encontrar relações entre meio de transporte e tempo gasto para se locomover com ele. O uso das tabelas e dos gráficos construídos auxilia na visualização dos dados obtidos.
2. Os estudantes devem compreender que os questionários abertos, geralmente, fornecem mais informações sobre os entrevistados; no entanto, algumas informações são omitidas, dificultando o agrupamento dos dados.
3. As planilhas eletrônicas facilitam a manipulação dos dados e contribuem para a rápida visualização das informações obtidas.
4. Os estudantes devem compreender que os dados duplicados podem alterar as conclusões obtidas durante a pesquisa, privilegiando uma resposta que deveria ter um número menor de incidência.
5. Entre os fatores que podemos citar estão: o trânsito e o tempo de espera para a chegada do meio de transporte. Novas perguntas podem ser adicionadas ao questionário para abordar a importância desses fatores no tempo necessário para ir de casa à escola.

Parte II – Aplicação do questionário

❶ Cada integrante do grupo deverá responder ao questionário e, depois, o grupo vai coletar as respostas de cinco estudantes da escola. É importante que os grupos troquem informações para que não apliquem o questionário aos mesmos entrevistados. **Atenção:** Dados duplicados podem gerar erros no resultado e na análise da pesquisa.

❷ Peçam aos colegas que preencham o questionário e expliquem o que vocês vão fazer com os dados coletados e onde esses dados serão publicados. Se algum colega não quiser responder ao questionário, vocês devem respeitá-lo.

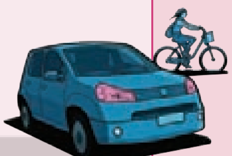
❸ Sob a orientação do professor, combinem uma data-limite para que todos os grupos finalizem a etapa de aplicação do questionário.

Parte III – Organização e análise de dados

❶ Juntem os questionários preenchidos de todos os grupos e, sob a orientação do professor, organizem as informações coletadas.

❷ Testem diferentes maneiras de visualizar os dados na planilha eletrônica: tabelas, quadros, gráficos, entre outros.

❸ Listem as relações que vocês encontraram entre as variáveis estudadas; por exemplo, pessoas que costumam ir a pé à escola têm uma variação de tempo menor em proporção à distância percorrida.



Questões para discussão

Respostas pessoais.

1. Com base na amostra e na pesquisa realizada, vocês encontraram alguma relação entre o tempo gasto para ir à escola e o meio de transporte utilizado? Expliquem.
2. Na opinião de vocês, os resultados obtidos teriam sido diferentes se vocês tivessem utilizado um questionário aberto? Nesse caso, como vocês organizariam os dados?
3. De que maneira o uso de planilha eletrônica contribuiu para a organização e a análise dos dados?
4. Como os dados duplicados podem interferir no resultado e na análise de uma pesquisa?
5. Que outros fatores podem influenciar o tempo que cada estudante leva para ir de casa à escola? Como vocês poderiam verificar se, de fato, existe uma relação entre esses fatores e o tempo?

Ilustrações: Gil Tokio/Pingado/ID/BR

Comunicação dos resultados

Produção de um cartaz com os dados obtidos

Conversem e selecionem as relações que julgarem mais pertinentes para produzir um cartaz. Lembrem-se de que, para um cartaz ser atrativo, ele deve ter recursos visuais que chamem a atenção do leitor.

Para finalizar, sigam as orientações do professor para expor o cartaz no mural da escola. Convidem os colegas de outras turmas para observar o que vocês produziram e expliquem a eles como foi o processo de investigação para a confecção do cartaz.

- Na *Parte III*, os estudantes vão pensar em como mostrar os dados coletados. Peça que se reúnam em grupos novamente e façam a tabulação dos dados no caderno. Privilegie essa etapa do desenvolvimento estatístico deles, circule pela sala de aula e verifique se conseguem reconhecer os padrões nos dados coletados. Em seguida, se possível, continue o trabalho na sala de informática e peça aos estudantes que organizem os dados em uma planilha eletrônica e gerem um gráfico. Após a elaboração do tipo do gráfico escolhido, solicite a cada grupo que analise e interprete as variáveis da pesquisa. Lembre os estudantes de que o gráfico deve apresentar os elementos essenciais. Depois, eles devem escrever uma breve conclusão. Para isso, pergunte: Com que tipo de meio de transporte os entrevistados levam menos tempo para chegar à escola? Por fim, peça-lhes que revisem essa conclusão e escrevam um pequeno texto como forma de avaliação parcial do processo. O trabalho de organização e análise dos dados para a posterior comunicação dos resultados proporciona o desenvolvimento, do ponto de vista matemático e computacional, da análise crítica, criativa e propositiva da produção, circulação e recepção de textos de divulgação científica e de mídias sociais.

COMUNICAÇÃO DOS RESULTADOS

- Providencie com a direção da escola, antecipadamente, um lugar na escola para realizar a exposição dos trabalhos e atingir os objetivos pretendidos com a produção dos estudantes. Ressalte aos estudantes que a composição desse cartaz deve trazer as informações de forma sucinta. O cartaz deve ter título, tabela e/ou gráfico e conclusão do grupo. Pelo fato de ele trazer diversos elementos textuais e não textuais, como os gráficos, informe os estudantes de que eles devem pensar, previamente, sobre a posição de cada elemento para que nenhuma informação se sobreponha a outra e, assim, o leitor possa ler as informações de forma clara e compreender o objetivo do cartaz. Esse trabalho permite uma abordagem interdisciplinar, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF69LP41** [Usar adequadamente ferramentas de apoio a apresentações orais, escolhendo e usando tipos e tamanhos de fontes que permitam boa visualização, topicalizando e/ou organizando o conteúdo em itens, inserindo de forma adequada imagens, gráficos, tabelas, formas e elementos gráficos, dimensionando a quantidade de texto (e imagem) por *slide*, usando progressivamente e de forma harmônica recursos mais sofisticados como efeitos de transição, *slides* mestres, *layouts* personalizados etc.] do componente curricular Língua Portuguesa.

DE OLHO NA BASE

A *Parte II* permite aos estudantes relacionar a Matemática com o mundo do trabalho, desde a ética da função exercida até a postura diante do entrevistado. Informe-os de que essa função é exercida por pessoas que coletam dados estatísticos, como os censores do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), favorecendo o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 4**.

Além disso, o contato do estudante com ferramentas digitais contribui para a análise e a interpretação de números em situações reais e a compreensão do impacto do mundo digital em sua vida e na sociedade em que vai atuar com essas habilidades, de forma crítica, para resolver problemas, possibilitando o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 5**.

OUTRAS FONTES

A evolução dos transportes. Direção: Elvio Cavalcante. Brasil, 2012 (3 min 18 s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=WJKLC8zf_ow. Acesso em: 2 jun. 2022.

Se possível, projete na sala de aula um curta-metragem sobre os impactos negativos dos meios de transporte ou disponibilize o *link* para que os estudantes assistam ao vídeo.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Nesta seção, são propostas atividades que retomam os conteúdos trabalhados ao longo da unidade.
- Chame a atenção dos estudantes para o fato de que, com recursos da Álgebra, é possível resolver a atividade **4**.
- Para realizar a atividade **5**, os estudantes podem utilizar diferentes maneiras para determinar as medidas dos lados da região quadrada destacada. Peça a eles que compartilhem como resolveram essa atividade.
- Ao final da atividade **10**, questione os estudantes sobre o porquê de a medida das áreas dos dois triângulos ser igual. Espera-se que eles concluam que, se ambos têm base de mesma medida e altura de mesma medida, já que os vértices opostos à base comum estão em uma reta paralela à base, e se a medida da área de um triângulo pode ser obtida por meio dessas medidas, eles necessariamente terão áreas com a mesma medida.
- Na atividade **12**, verifique se os estudantes compreenderam a situação antes de iniciar os cálculos, principalmente porque a medida do volume do bloco será igual à soma das medidas dos volumes dos cubos (conservação de massa). Sugira que façam desenhos das três figuras apresentadas no enunciado.
- Na atividade **15**, oriente os estudantes a desenhar a caixa planificada antes de calcular a medida do volume. Verifique se eles dividem a medida do volume da caixa por 3, pois o enunciado pede para se obter a terça parte da medida do volume da caixa.

RESPOSTAS

2. Resposta esperada: Não, pois se trata de uma unidade de medida não padronizada e não exata. Em uma obra de construção civil, todas as medições precisam ser exatas e com unidades de medida padronizadas para que imprecisões não causem problemas de segurança, ergonomia ou uso e ocupação do solo.

6. Resposta possível: Considerando que os vértices do quadrado estão localizados no centro dos círculos, obtém-se a medida da área destacada subtraindo da medida da área do quadrado a soma da medida da área dos quatro quartos de círculo inscritos no quadrado (equivalente à medida da área de um círculo inteiro).

ATIVIDADES INTEGRADAS

1. Indique a unidade de medida padronizada mais apropriada para medir:

a) a capacidade de uma piscina infantil; **Litro.**

b) a massa de uma pessoa; **Quilograma.**

c) a distância entre países. **Quilômetro.**

2. É confiável o mestre de obras de uma construção fazer medições na obra usando o palmo como unidade de medida? Por quê? **Consulte as respostas neste manual.**

3. Faça o que se pede em cada item. **Respostas pessoais.**

a) Junte-se a um colega para elaborar um problema que envolva a medição de um mesmo elemento utilizando uma unidade de medida padronizada e uma unidade de medida não padronizada.

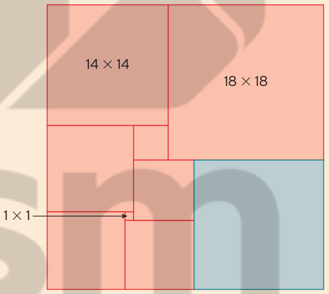
b) As medições obtidas por vocês utilizando a unidade de medida padronizada e a unidade de medida não padronizada foram parecidas? Converse com os colegas e o professor.

4. A altura de um paralelogramo mede $\frac{2}{3}$ da medida de sua base, e a soma das medidas da altura e da base é 30 m. **a) Base: 18 m; altura: 12 m.**

a) Qual é a medida da base desse paralelogramo? Qual é a medida de sua altura?

b) Qual é a medida da área desse paralelogramo? **216 m²**

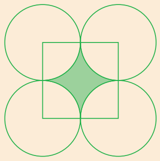
5. A figura a seguir mostra uma região retangular decomposta em várias regiões quadradas, das quais três apresentam as dimensões indicadas a seguir, na mesma unidade de medida.



Ilustrações: ID/BR

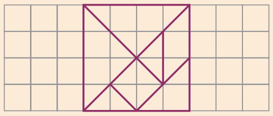
Determine as dimensões do quadrado destacado em azul. **15 × 15**

6. Na figura a seguir, os círculos têm áreas de mesma medida e os vértices do quadrado estão no centro dos círculos.



Se as medidas da área do quadrado e da de um círculo fossem conhecidas, como você calcularia a medida da área da parte destacada? **Resposta pessoal.**

7. O *tangram* é um quebra-cabeça de origem chinesa formado por sete figuras geométricas. Na figura a seguir, as peças do *tangram* foram construídas sobre uma malha quadriculada.

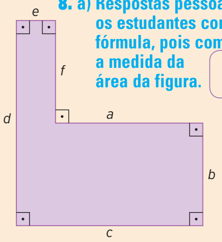


Construa um *tangram* em uma malha quadriculada e recorte suas peças. Depois, faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Encontre uma maneira de cobrir uma das regiões triangulares maiores usando outras peças.

b) Calcule a medida da área de cada peça desse *tangram*, considerando que um quadradinho mede 1 cm².

8. Ana deduziu uma fórmula para calcular a medida da área da figura a seguir.



$A = c \cdot b + e \cdot f$

8. a) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes concordem com a fórmula, pois com ela é possível obter a medida da área da figura.

b) Resposta possível: $A = a \cdot b + e \cdot d$.

a) Você concorda com essa fórmula? Por quê?

b) Escreva outra fórmula para o cálculo da medida dessa área usando as medidas *a* e *d*.

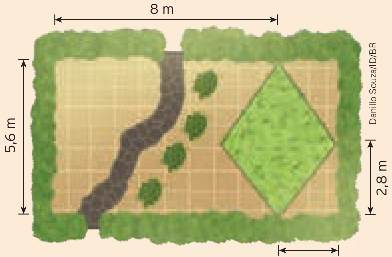
7. a) Resposta possível: Usar os dois triângulos pequenos e o triângulo médio.
b) Triângulos maiores: 4 cm²; triângulo médio: 2 cm²; triângulos pequenos: 1 cm²; quadrado: 2 cm²; paralelogramo: 2 cm².

DE OLHO NA BASE

Atividades, como a **4**, que relacionam a Álgebra e a Geometria contribuem para o desenvolvimento da **competência específica de Matemática 3**.

Resolver problemas, como os das atividades **5**, **6**, **7** e **8**, que envolvem o cálculo de medida de área utilizando a decomposição de figuras, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF07MA32**. As atividades **11**, **12**, **13**, **14** e **15**, que envolvem o cálculo da medida do volume, favorecem o desenvolvimento da habilidade **EF07MA30**.

9. Em um projeto para uma empresa, um paisagista desenhou um gramado em forma de losango, como representado na ilustração a seguir.



Danilo Souza/ID/BR

a) Qual é a medida da área do gramado? **12,32 m²**

b) Se o preço do metro quadrado de grama é R$ 16,50, qual é o custo para gramar essa parte do jardim? **R$ 203,28**

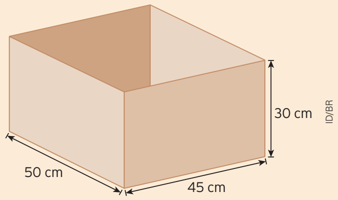
10. Faça no caderno o passo a passo descrito a seguir. **Resposta pessoal.**

I. Desenhe um par de retas paralelas não coincidentes *r* e *s*. Marque em *r* dois pontos *A* e *B*. Na reta *s*, marque os pontos *C* e *D*.

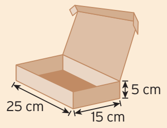
II. Pinte os triângulos *ABC* e *ABD*, cada um de uma cor.

Com um colega, demonstre que os dois triângulos têm áreas com a mesma medida.

11. Determine o número máximo de caixas iguais à menor, montadas e fechadas, que cabem na caixa maior. **36 caixas.**



ID/BR



12. Escreva no caderno a alternativa correta.

(Fuvest-SP) Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm, são levados juntos à fusão e, em seguida, o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8 cm, 8 cm e *x* cm. O valor de *x* é: **Alternativa d.**

a) 16
b) 17
c) 18
d) 19
e) 20

13. Um artesão pretende derreter duas peças metálicas cúbicas maciças. Ele sabe que as arestas de uma delas medem 2 cm e as da outra medem 4 cm. Com o material obtido, ele vai fabricar uma peça maciça em formato de bloco retangular. Calcule a medida do volume:

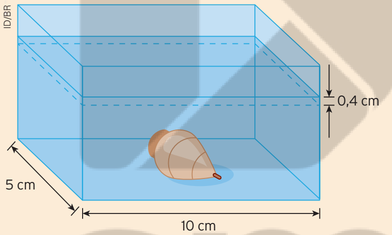
a) de cada peça maciça cúbica que será derretida; **8 cm³; 64 cm³.**

b) da nova peça com a forma de bloco retangular. **72 cm³**

14. Para calcular a medida aproximada do volume de um objeto irregular, basta mergulhá-lo em uma caixa com água. A medida do volume de água deslocado é igual à medida do volume do objeto.

João colocou um pião dentro de uma caixa com água cujas medidas estão indicadas na figura. O pião ficou totalmente imerso. João verificou que o nível da água subiu 0,4 cm. Sem considerar a espessura do vidro, qual é a medida aproximada do volume do pião? **20 cm³**

ID/BR



15. (UFSC) Usando um pedaço retangular de papelão, de dimensões 12 cm e 16 cm, desejo construir uma caixa sem tampa, cortando, em seus cantos, quadrados iguais de 2 cm de lado e dobrando, convenientemente, a parte restante. Obtenha a terça parte do volume da caixa, em cm³. **64 cm³**

AUTOAVALIAÇÃO

Proponha aos estudantes as questões a seguir para que façam uma autoavaliação.

- Compreendi os conceitos grandeza e unidade de medidas?
- Entendi a diferença entre medidas padronizadas e medidas não padronizadas?
- Consegui perceber que apenas um número sem a unidade de medida da grandeza pode gerar confusão na interpretação da medida?
- Compreendi que o conceito de área como uma medida está relacionado com suas unidades de medida de área?
- Sou capaz de calcular as medidas de áreas e de volume de diferentes figuras geométricas por meio de composição e decomposição?
- Aprendi a determinar medidas da área de quadriláteros e triângulos e do volume de blocos retangulares por meio de fórmulas?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

ESTRATÉGIAS DE APOIO

Na resolução de problemas, é importante que os estudantes representem por meio de desenhos ou esquemas o que entenderam do enunciado antes de começarem a calcular utilizando os dados. Muitas vezes, eles querem resolver rapidamente uma questão e não leem com a devida atenção e confundem o que é pedido, deixando de perceber informações importantes apresentadas no enunciado. Uma sugestão é pedir aos estudantes que anotem as partes que julgarem mais importantes do enunciado. Discutir as questões em dupla também pode auxiliar bastante nesses casos.

INTERAÇÃO

Conteúdos

- Análise de dados.
- Construção de tabela.

Objetivos

- Promover o debate e a reflexão acerca do tema reciclagem.
- Realizar pesquisa em diferentes fontes.
- Construir uma tabela e elaborar um folheto.
- Planejar, organizar e divulgar uma exposição que conscientize a comunidade a reutilizar materiais que iriam para o lixo.

Justificativa

- Nesse projeto, os estudantes terão a oportunidade de experienciar um momento de trocas de ideias com o debate e a reflexão acerca do tema reciclagem. Além disso, em grupos, eles vão planejar e organizar uma exposição para divulgar os resultados desse trabalho e conscientizar a comunidade a reutilizar materiais que iriam para o lixo. Assim, os estudantes estarão praticando autonomia, empatia e trabalho em equipe para a preservação do meio ambiente e desenvolvendo as habilidades e competências envolvidas.

Sugestão de cronograma

- Propomos que esse projeto seja desenvolvido ao longo de um semestre, em 14 aulas, que não precisam ser consecutivas.
    - 1 aula – Organização dos grupos e debate sobre o que os estudantes conhecem a respeito da produção, do descarte e do impacto ambiental causado pelo descarte irregular do lixo.
    - 1 aula – Pesquisas sobre quantidade, tipos de material descartados por ano e tempo de decomposição.
    - 1 aula – Cálculo do tempo que levará para o material descartado em um ano se decompor e construção da tabela.
    - 2 aulas – Roda de conversa sobre os dados obtidos. Os estudantes devem apresentar esses dados por meio de uma tabela e podem comentar se ficaram surpresos, ou não, com os resultados das pesquisas. Também podem debater como imaginam que será o futuro, caso não haja mudanças a respeito da produção e do descarte do lixo.
    - 1 aula – Levantamento de alternativas para reduzir, reutilizar e reciclar o lixo.
    - 1 aula – Debate sobre os dados da produção e do descarte irregular do lixo. Os estudantes podem discutir quais, entre as alternativas levantadas, são mais viáveis e quais não são tão boas. Elaboração de um folheto que informe "o que fazer" e "o que não fazer" em relação ao lixo para preservar o meio ambiente.
    - 5 aulas – Planejamento, organização, preparação e divulgação da exposição de arte.
    - 2 aulas – Abertura da exposição e roda de conversa.

INTERAÇÃO

VAMOS RECICLAR?

Dados da Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (Abrelpe) indicam que, durante o ano de 2020, a geração de resíduos sólidos no Brasil chegou a aproximadamente 82,5 milhões de toneladas. Isso significa que cada brasileiro gerou, em média, 1,07 quilograma de resíduo por dia.

A região com a maior quantidade de resíduos é a Sudeste, com cerca de 113 mil toneladas diárias. Esse valor corresponde a quase 50% do total de lixo gerado no país.

Ainda de acordo com dados da Abralpe de 2021, estima-se que a cada ano, em todo o mundo, mais de 25 milhões de toneladas de resíduos sólidos tenham os oceanos como destino. Você sabia que um canudo de aproximadamente 0,3 grama, geralmente utilizado para beber algo rapidamente e, em seguida, ser descartado no lixo, demora no mínimo cem anos para se decompor?

Pensando na preservação do meio ambiente, algumas iniciativas – como a utilização do óleo de cozinha para produzir sabão, o uso de garrafa PET para fabricar tecido e a criação de uma lei proibindo a distribuição de sacolas plásticas em estabelecimentos comerciais – visam reduzir a geração de resíduos, reutilizar produtos e reciclar materiais, com o objetivo de diminuir o impacto ambiental.

Em sua opinião, quais são as causas do excesso de lixo? Quais são as formas de reduzi-lo? Seus familiares e amigos têm consciência do impacto ambiental causado pelo descarte de materiais? Quais são as melhores maneiras de conscientização sobre o assunto?

Neste projeto, você e os colegas vão pesquisar e discutir esse assunto e vão também planejar, organizar e divulgar uma exposição que conscientize a comunidade a reutilizar produtos que iriam para o lixo.

Objetivos

- Pesquisar, em grupos, as causas e os impactos do excesso de lixo no meio ambiente.
- Pesquisar e calcular a quantidade de lixo descartada por ano no município em que vocês moram e seu tempo de decomposição, levando em consideração o tipo de material (plástico, papel, alumínio, etc.).

Interdisciplinaridade

- Nesse projeto, a interdisciplinaridade se dará, mais especificamente, com componente curricular de Arte. O projeto contribui para o desenvolvimento das seguintes habilidades:
    - EF69AR01
    - EF69AR02
    - EF69AR05
    - EF69AR06
    - EF69AR07
    - EF69AR31
    - EF69AR32
- O texto de cada uma dessas habilidades pode ser encontrado na BNCC, disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf (acesso em: 15 jul. 2022).

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

- Essa seção é um convite para que os estudantes participem de ações que desenvolvam as competências e as habilidades esperadas, aprendendo de modo autônomo e colaborativo. Propostas como essa podem ser realizadas com a metodologia de aprendizagem baseada em projetos.

  A aprendizagem com base em projetos é uma metodologia ativa que propõe a atividade prática como instrumento para a aprendizagem.
- Para este projeto, a turma deve ser organizada em dois grupos:
    - um grupo pode ficar responsável por pesquisar a questão do lixo na água (oceanos, rios, lagos, etc.);
    - e outro, na terra (aterros sanitários, espaços públicos, etc.).

- Fazer um levantamento de alternativas que possam reduzir o impacto ambiental causado pelo lixo.
- Planejar, organizar e divulgar uma exposição de arte em que tenham sido reutilizados produtos que seriam descartados , conscientizando a comunidade a respeito do impacto ambiental causado pelo excesso de lixo.

Planejamento

- O professor vai organizar a turma em grupos de, no máximo, dez estudantes.
- Este projeto será realizado em seis partes:

Parte I – Conversa inicial
Parte II – Pesquisa e organização dos dados
Parte III – Apresentação dos resultados da pesquisa
Parte IV – Busca de soluções
Parte V – Seleção das propostas e elaboração de folheto
Parte VI – Produto final: exposição de arte

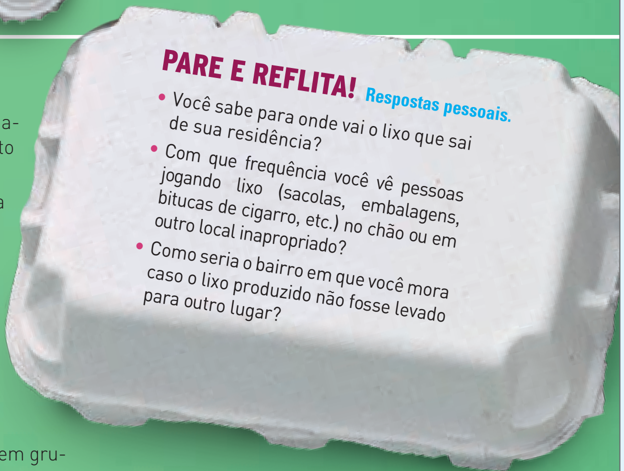
Materiais

- Papel, lápis e caneta
- Computador com acesso à internet
- Jornais, revistas e livros
- Cola, tinta, garrafa PET, jornal, lata de refrigerante, etc. (o que for necessário para a elaboração das obras de arte).

Procedimentos

Parte I – Conversa inicial

1. Discutam o que conhecem ou vivenciaram a respeito das origens do lixo e quais são os impactos ambientais de sua produção.
2. Elaborem uma lista com as conclusões de vocês sobre quais materiais são descartados em maior quantidade.



PARE E REFLITA! Respostas pessoais.

- Você sabe para onde vai o lixo que sai de sua residência?
- Com que frequência você vê pessoas jogando lixo (sacolas, embalagens, bitucas de cigarro, etc.) no chão ou em outro local inapropriado?
- Como seria o bairro em que você mora caso o lixo produzido não fosse levado para outro lugar?

Parte II – Pesquisa e organização dos dados

1. Pesquisem sobre a quantidade de lixo produzido por ano no município onde vivem, bem como os tipos de material descartados (plástico, alumínio, papel, etc.).
2. Façam um levantamento da quantidade (aproximada) de material que é reciclado e de lixo que vai para aterros sanitários ou que acaba nos oceanos.
3. Pesquisem quanto tempo é necessário para cada tipo de material se decompor.
4. Elaborem uma tabela relacionando a quantidade de cada tipo de material descartado por ano no município com o tempo médio de decomposição e calculem quanto tempo será necessário para que se decomponha todo o lixo gerado no município em um ano.

Parte III – Apresentação dos resultados da pesquisa

1. Com a ajuda do professor, organizem-se para que cada grupo apresente aos colegas os resultados da pesquisa e a tabela que elaboraram.
2. Em uma roda de conversa com toda a turma, verifiquem se os dados apresentados estão de acordo com as hipóteses levantadas ou se houve alguma surpresa na pesquisa.

Fotos: wragg/iStock/Getty Images

DE OLHO NA BASE

Incentive os estudantes a discutir as questões do boxe *Pare e reflita!*. Esse é um momento no qual eles vão compartilhar suas respostas e opiniões, exercitando a empatia e o diálogo e promovendo o respeito ao outro, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 9**.

Além disso, ao refletir e argumentar sobre as questões propostas nesse boxe, os estudantes estarão promovendo os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 7**.

- Na *Parte I*, incentive os estudantes a comentar sobre o que já viram e vivenciaram a respeito do descarte de lixo. Fique atento aos conhecimentos prévios deles e complemente com outras informações. Anote as hipóteses dos estudantes sobre o tema, para serem retomadas posteriormente, quando tiverem os dados numéricos em mãos.
- Na *Parte II*, se possível, leve os estudantes ao laboratório de informática para a realização da pesquisa com a coleta e a análise de dados apresentados em mídias eletrônicas. Mantenha-os alerta à confiabilidade dos *sites*.
- Essa parte da pesquisa pode ser realizada com base nos temas dos grupos (água e terra, por exemplo):
    - O grupo responsável pela pesquisa “terra” pode analisar a quantidade de aterros sanitários, legais e ilegais, no Brasil, a quantidade média de lixo recebida pelos aterros por dia e os impactos ambientais.
    - O grupo responsável pela pesquisa “água” pode analisar a quantidade de lixo que é descartada nos rios e oceanos, por que esse material vai para lá e quais os impactos ambientais.

DE OLHO NA BASE

Na construção da tabela, incentive o uso de *softwares* de edição de texto e de planilhas eletrônicas. Dessa maneira, os estudantes poderão desenvolver a **competência geral 5**, ao utilizar tecnologias digitais de informação para se comunicar, acessar e disseminar informações.

- Na *Parte III*, peça aos grupos que apresentem os dados coletados e questione se algum impacto ambiental encontrado pelo grupo “terra” afeta, direta ou indiretamente, os rios, mares, oceanos, etc. Questione, também, se o grupo “água” encontrou algum impacto que afete, direta ou indiretamente, os solos. Pergunte se ficaram surpresos com algum dado e utilize as hipóteses anotadas na *Parte I* para estimular o debate.
- Na *Parte IV*, incentive os estudantes a pesquisar em jornais, revistas e na internet textos que tratem de alternativas para redução, reutilização e reciclagem de alguns materiais. Os *sites* Uma vida sem lixo (disponível em: https://umavidasemlixo.com/; acesso em: 15 jul. 2022) e Menos um lixo (disponível em: https://www.menos1lixo.com.br/; acesso em: 15 jul. 2022) podem ser utilizados para pesquisar alternativas. Iniciativas como compostagem doméstica, armário cápsula e até mesmo a filosofia minimalista são boas ideias para a redução de consumo e, consequentemente, de produção de lixo.

- Na *Parte V*, permita que os grupos apresentem suas impressões sobre as alternativas encontradas, perguntando quais são, no ponto de vista deles, as melhores. De acordo com os posicionamentos dos grupos, auxilie na elaboração de um folheto sobre "o que fazer" e "o que não fazer" em relação ao descarte e à produção de lixo. O folheto produzido poderá ser fotocopiado e distribuído na exposição de arte, ao final do projeto.
- A *Parte VI* contribui com o desenvolvimento das habilidades **EF69AR31** e **EF69AR32**.

1. Em consonância com as habilidades **EF69AR01** e **EF69AR02**, se possível, leve os estudantes a um museu ou promova uma visita *on-line* a algum museu que ofereça esse serviço.
2. Depois, converse sobre a visita e o que os estudantes gostariam de mostrar à comunidade. Eles devem planejar uma exposição na escola.
3. Nessa etapa, os estudantes pesquisarão artistas que reciclam ou reutilizam materiais para suas obras. Indique, por exemplo Vik Muniz, Jean Shin, Alain Guerra e Neraldo de la Paz.
4. Promova um breve debate sobre o que os estudantes querem que o público aprecie em suas obras, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF69AR05**.
5. Trabalhando as habilidades **EF69AR06** e **EF69AR07**, peça aos estudantes que pesquisem e escolham o tipo de obra que querem produzir (escultura, pintura, *performance*, etc.), que façam um esboço para facilitar a produção e que estabeleçam uma lista dos materiais recicláveis de que vão precisar.
6. Quando iniciarem a produção da obra de arte, lembre os estudantes de que devem fazer um pequeno texto sobre o que a obra representa.
7. Durante a etapa de construção da obra, ajude os estudantes a utilizar a Matemática para produzir as obras de acordo com os esboços e os planos iniciais e para calcular os espaços necessários e adequados para a exposição das obras.
8. Incentive os estudantes a divulgar o evento sem produzir lixo (pode ser por meio de redes sociais ou usando material reciclado para fazer os convites, por exemplo).
9. Um dia antes da exposição, peça aos estudantes que posicionem as obras no lugar estabelecido. Permita que apreciem a exposição pronta e peça que discutam o que acharam. As questões propostas na avaliação podem ser realizadas nessa etapa.
10. No dia da exposição, auxilie os estudantes na roda de conversa e incentive o debate com a comunidade sobre alternativas relacionadas ao lixo.

Parte IV – Busca de soluções

❶ Com base nos dados, conversem nos grupos de trabalho e levantem possíveis soluções para minimizar o problema do lixo no município onde moram.

Parte V – Seleção das propostas e elaboração de folheto

❶ Organizem uma apresentação das propostas para a turma.

❷ Conversem sobre quais são as melhores alternativas para diminuir o impacto ambiental causado pelo lixo e quais alternativas são inviáveis.

❸ De volta aos grupos, elaborem um folheto que informe o que fazer e o que não fazer em relação ao impacto do lixo no meio ambiente.

Parte VI – Produto final: exposição de arte

❶ Planejem uma exposição artística que conscientize a comunidade em relação ao problema do lixo no município.

❷ Definam o que deve impressionar a comunidade e o que vai marcar sua memória, lembrando que o intuito principal é conscientizar a respeito do impacto ambiental do lixo.

❸ Pesquisem artistas cujas obras incluam reciclagem de materiais ou reutilização de objetos.

❹ Escolham o tipo de obra de arte que queiram produzir – escultura, pintura, *performance*, instalação, etc. Façam um esboço e definam um título para ela (que poderá ser provisório).

❺ Façam uma lista dos materiais de que vão precisar, priorizando aqueles que seriam descartados.

mastersky/iStock/Getty Images

❻ Produzam as obras e elaborem um pequeno resumo com o nome da obra, o nome dos artistas (os integrantes do grupo) e o que essa produção representa.

❼ Com os demais grupos, planejem a exposição. Vocês podem, por exemplo, definir duas pessoas da turma para serem os guias da exposição.

❽ Combinem a data com o professor e façam a divulgação do evento.

❾ Antes da exposição, posicionem as obras e o resumo conforme planejado. Depois, individualmente, observem atentamente cada obra com o objetivo de captar as próprias impressões.

❿ Durante a exposição, distribuam cópias do folheto elaborado, possibilitando a conscientização da comunidade em relação ao impacto do lixo no meio ambiente.

Compartilhamento

A exposição servirá como introdução para uma roda de conversa sobre a importância da redução, da reutilização e da reciclagem do lixo, em que vocês poderão falar sobre o resultado das pesquisas e, com a comunidade, determinar as melhores alternativas.

Avaliação

1. Como foram realizadas as pesquisas a respeito da quantidade de lixo produzida e descartada?
2. Você se surpreendeu com algum dado encontrado? Se sim, qual? Se não, por quê?
3. Você mudou ou mudaria alguma atitude sua depois de participar desse projeto?
4. Seu grupo conseguiu fazer a obra de arte conforme o planejado?
5. Como foi trabalhar com seu grupo? Houve cooperação no desenvolvimento do trabalho?
6. Foi interessante planejar, organizar, realizar e divulgar a exposição? De quais partes você mais gostou e quais partes gostaria de melhorar?
7. O que você aprendeu com a realização deste projeto?

Svetlanais/iStock/Getty Images

OUTRAS FONTES

Ilha das flores. Direção: Jorge Furtado. Brasil, 1989 (13 min).

Documentário que mostra como a economia gera relações desiguais entre os seres humanos.

Homem sem impacto. Direção: Laura Gabbert e Justin Schein. EUA, 2009 (93 min).

Documentário que mostra o dia a dia de uma família que abdica de usar eletricidade, comprar comida empacotada ou coisas novas. A ideia é, após a exibição, criar uma oportunidade para os estudantes trocarem ideia sobre esse assunto.

Lista de siglas e bibliografia

Lista de siglas

Cesgranrio-RJ	Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio
CMB-DF	Colégio Militar de Brasília
CMPA-RS	Colégio Militar de Porto Alegre
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
EPCAr-MG	Escola Preparatória de Cadetes do Ar
Faap-SP	Fundação Armando Álvares Penteado
Fuvest-SP	Fundação Universitária para o Vestibular
Ifal	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Alagoas
IFSP	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
Obmep	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
Pisa	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
Prova Brasil	Avaliação Nacional do Rendimento Escolar
Saresp	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
Unifesp	Universidade Federal de São Paulo
Uniube-MG	Universidade de Uberaba

Bibliografia comentada

Bacich, L.; Holanda, L. *STEAM em sala de aula*: a aprendizagem baseada em projetos integrando conhecimentos na educação básica. Porto Alegre: Penso, 2020.

Os estudos na área da educação convergem para a adoção de propostas que coloquem o estudante em um papel investigativo. Nesse sentido, a abordagem STEAM (sigla em inglês para Ciência, Tecnologia, Engenharia, Arte e Matemática) é uma ferramenta valiosa que serve de inspiração para a elaboração de diversas propostas pedagógicas.

Bendick, J. *Pesos e medidas*. Tradução: Djalmir Ferreira de Mello. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1960 (Coleção O Mundo e Nós).

Nesse livro estão presentes ideias e conceitos acerca de pesos e medidas.

Boaler, J. *Mentalidades matemáticas*: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Tradução: Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2018.

Nesse livro, a autora apresenta técnicas e atividades que mostram como tornar a aprendizagem da Matemática mais agradável e acessível a todos os estudantes.

Boyer, C. B.; Merzbach, U. C. *História da Matemática*. Tradução: Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

Esse livro trata da história da relação da humanidade com o desenvolvimento da Matemática.

Brasil. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). *Matrizes de referência do Saeb*. Brasília: MEC/Inep, 1999. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/matrizes-e-escalas. Acesso em: 23 mar. 2022.

O Saeb é um conjunto de avaliações que permite ao Inep diagnosticar a educação básica brasileira e os fatores que podem estar relacionados ao desempenho dos estudantes. Essas avaliações são elaboradas com base em matrizes de referência.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Alfabetização. *PNA*: Política Nacional de Alfabetização. Brasília: MEC/Sealf, 2019. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/images/banners/caderno_pna.pdf. Acesso em: 23 mar. 2022.

A Política Nacional de Alfabetização (PNA) foi instituída com o objetivo de melhorar a qualidade da alfabetização no Brasil e combater o analfabetismo no país. O documento aborda conceitos como alfabetização, literacia e numeracia.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 23 mar. 2022.

Elaborada pelo Ministério da Educação de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, de 1996, a Base Nacional Comum Curricular é um documento normativo que estabelece os conhecimentos, as competências e as habilidades que se espera que os estudantes desenvolvam ao longo da Educação Básica.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Competências socioemocionais como fator de proteção à saúde mental e ao* bullying. Brasília: MEC/SEB, 2020. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/195-competencias-socioemocionais-como-fator-de-protecao-a-saude-mental-e-ao-bullying. Acesso em: 23 mar. 2022.

Nesse material é possível compreender como as competências socioemocionais estão presentes nas dez competências gerais descritas pela BNCC. Esse documento serviu como base para a elaboração de diversas propostas desta coleção.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. *Diretrizes Curriculares Nacionais para Educação Básica*. Brasília: MEC/SEB/Dicei, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file. Acesso em: 23 mar. 2022.

Esse documento traz as diretrizes que estabelecem uma base nacional comum, responsável por orientar a organização, a articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas de todas as redes de ensino brasileiras.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Ensino Fundamental de nove anos*: orientações para a inclusão da criança de seis anos de idade. Brasília: MEC/SEB, 2007. Disponível em: portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Ensfund/ensifund9anobasefinal.pdf. Acesso em: 23 mar. 2022.

Esse documento foi elaborado com base no diálogo com gestores dos sistemas de ensino e tem como propósito desenvolver uma metodologia de trabalho voltada à ampliação do programa do Ensino Fundamental de oito para nove anos.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 23 mar. 2022.

O trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) possibilita que os estudantes concluam sua educação formal reconhecendo e aprendendo os temas que são relevantes para sua atuação na sociedade. Esse documento apresenta os TCTs e traz propostas de práticas de implementação.

Bussab, W. O.; Morettin, P. A. *Estatística básica*. São Paulo: Saraiva, 2017.

O livro é divido em três partes. A primeira trata da análise de dados uni e bidimensionais. A segunda traz conceitos básicos de probabilidade e variáveis aleatórias. E, por fim, a terceira trata dos principais tópicos da inferência estatística.

Eves, H. *Introdução à história da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2011.

Essa obra narra a história da Matemática desde a Antiguidade até os dias atuais por meio da observação da cultura de cada época retratada.

Iezzi, G. *et al*. *Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 2013. v. 1 a 11.

Os livros dessa coleção foram utilizados como referenciais teóricos para a apresentação de diversos temas e conteúdos.

Januário, A. J. *Desenho geométrico*. 4. ed. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2019.

Esse livro aborda de maneira simples conteúdos de desenho geométrico, possibilitando uma aprendizagem imediata. Muitas das propostas apresentadas nele inspiraram os autores na elaboração dos conteúdos de desenho geométrico desta coleção.

Magalhães, M. N.; Lima, A. C. P. *Noções de probabilidade e estatística*. São Paulo: Edusp, 2015.

O livro apresenta uma introdução à probabilidade e à estatística. Os conceitos de estatística descritiva são tratados em paralelo com outras teorias, possibilitando estabelecer uma relação entre estatística descritiva, probabilidade e variáveis aleatórias.

Meyer, P. L. *Probabilidade*: aplicações à estatística. Tradução: Ruy C. B. Lourenço Filho. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

Os conceitos, os teoremas e os comentários sobre probabilidade e estatística apresentados nesse material serviram de inspiração para a elaboração das unidades referentes ao eixo temático Probabilidade e Estatística.

Milies, C. P.; Coelho, S. P. *Números*: uma introdução à matemática. 3. ed. São Paulo: Edusp, 2013.

Esse livro apresenta a teoria dos números inteiros e mostra como o conjunto dos números racionais se constrói com base nos números inteiros. Além disso, trabalha com uma apresentação axiomática de Peano para os números naturais.

Moraes, C. A. P. *Avaliação em Matemática*: pontos de vista dos sujeitos envolvidos na Educação Básica. Jundiaí: Paco Editorial, 2012.

Esse livro investiga as concepções da avaliação em Matemática na Educação Básica. A leitura da obra permite um amplo aprofundamento nas teorias da avaliação e a compreensão dos processos utilizados pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e pelo Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp).

Polya, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

A resolução de problemas possibilita que os estudantes desenvolvam o pensamento matemático de maneira ativa. Nesse livro, é possível encontrar diversas contribuições acerca desse tema, que serviram de inspiração para o projeto e a elaboração das situações abordadas na seção *Resolvendo problemas*.

Rezende, E. Q. F.; Queiroz, M. L. B. *Geometria euclidiana plana e construções geométricas*. 2. ed. Campinas: Ed. da Unicamp, 2008.

Esse livro contribui para a descoberta e a compreensão da Geometria associada às demais áreas do conhecimento, além de contribuir para a organização do raciocínio lógico.

Skovsmose, O. *Um convite à educação matemática crítica*. Tradução: Orlando de Andrade Figueiredo. Campinas: Papirus, 2014.

O autor aborda conceitos cruciais na área de educação matemática crítica e apresenta diferentes cenários para a investigação e a Matemática em ação.

Stewart, I. *Almanaque das curiosidades matemáticas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Esse material é uma coletânea de casos curiosos da Matemática e serviu como inspiração para a elaboração de algumas informações apresentadas nesta coleção.

Surendra, V. *Ideias geniais*: os principais teoremas, teorias, leis e princípios científicos de todos os tempos. Tradução: Carlos Irineu da Costa. Belo Horizonte: Gutenberg, 2011.

A obra traz princípios, equações, teorias, teoremas e afins que formam os fundamentos da ciência.

sm

2 1 1 8 1 3

ISBN 978-65-5744-756-7

2 900002 118131